

# PROCESNÉ STROJNÍCTVO

## Príklady

Peter Peciar  
Martin Juriga  
Adam Gušťačík  
Michaela Kohútová  
Kristian Jezsó

# **PROCESNÉ STROJNÍCTVO**

## **Příklady**

# **PROCESNÉ STROJNÍCTVO**

## **Príklady**

Peter Peciar, Martin Juriga, Adam Gušťačík,  
Michaela Kohútová, Kristian Jezsó

Skriptá vznikli s podporou Ministerstva školstva, vedy výskumu a športu Slovenskej republiky v rámci riešenia projektov KEGA 016STU-4/2019 a KEGA 036STU-4/2020.

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo vydavateľstva.

© doc. Ing. Peter Peciar, PhD., Ing. Martin Juriga, PhD., Ing. Adam Gušťařík,  
Ing. Michaela Kohútová, Ing. Kristian Jezsó

Recenzenti: Dr. h. c. mult. prof. Ing. Miroslav Badida, PhD.  
prof. Ing. Tomáš Svěrák, CSc.

Schválila Vedecká rada Strojníckej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-5081-3

## OBSAH

|          |                                                               |            |
|----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>LÁTKOVÉ BILANCIE.....</b>                                  | <b>7</b>   |
|          | Všeobecná rovnica látkových bilancií.....                     | 7          |
|          | Vyjadrovanie množstva a zloženia prúdu.....                   | 8          |
|          | Postup pri riešení látkových bilancií.....                    | 9          |
|          | RIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                         | 10         |
|          | NERIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                       | 21         |
| <b>2</b> | <b>MECHANICKÉ PROCESY.....</b>                                | <b>24</b>  |
|          | Definícia partikulárnej látky.....                            | 24         |
|          | Koncentrácie jednotlivých fáz.....                            | 24         |
|          | Veľkosť a tvar tuhých častíc.....                             | 25         |
|          | Hustota a objemová hmotnosť.....                              | 27         |
|          | Medzerovitosť a pórovitosť.....                               | 28         |
|          | Vlhkosť a stupeň nasýtenia pórov.....                         | 29         |
|          | Frakčné zloženie partikulárnej látky.....                     | 30         |
|          | RIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                         | 32         |
|          | NERIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                       | 41         |
| <b>3</b> | <b>HYDROMECHANICKÉ PROCESY.....</b>                           | <b>44</b>  |
|          | Rýchlosť prietoku.....                                        | 44         |
|          | Kontinuita toku.....                                          | 44         |
|          | Charakter prúdenia.....                                       | 44         |
|          | Energetická bilancia toku.....                                | 45         |
|          | Varianty Bernoulliho rovnice.....                             | 46         |
|          | Tlakové straty v potrubí.....                                 | 46         |
|          | Čerpadlá.....                                                 | 49         |
|          | Miešanie.....                                                 | 51         |
|          | Filtrácia.....                                                | 52         |
|          | Usadzovanie častíc v gravitačnom poli.....                    | 54         |
|          | RIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                         | 56         |
|          | NERIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                       | 76         |
| <b>4</b> | <b>TEPELNÉ PROCESY.....</b>                                   | <b>81</b>  |
|          | Výpočet prestupu tepla vedením.....                           | 81         |
|          | Výpočet prestupu tepla vedením v rovinnej stene.....          | 81         |
|          | Výpočet prestupu tepla vedením vo valcovej stene.....         | 83         |
|          | Výpočet prestupu tepla vedením v dutej guľi.....              | 84         |
|          | Výpočet prestupu tepla prúdením.....                          | 84         |
|          | Výpočet prestupu tepla pri kombinácii vedenia a prúdenia..... | 87         |
|          | Návrh výmenníkov tepla.....                                   | 89         |
|          | RIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                         | 91         |
|          | NERIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                       | 104        |
| <b>5</b> | <b>DIFÚZNE PROCESY.....</b>                                   | <b>107</b> |
|          | Prestup látky.....                                            | 107        |
|          | Jednosmerná difúzia.....                                      | 107        |
|          | Dvojsmerná difúzia.....                                       | 108        |
|          | Fázová rovnováha kvapalina – para.....                        | 109        |

|                                                                                    |            |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| RIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                                              | 110        |
| NERIEŠENÉ PRÍKLADY.....                                                            | 115        |
| <b>PRÍLOHY.....</b>                                                                | <b>117</b> |
| Príloha 1 – Tabuľka prepočtu zlomkov a koncentrácií.....                           | 118        |
| Príloha 2 – Moodyho diagram.....                                                   | 119        |
| Príloha 3 – Stredná absolútna drsnosť potrubia pre vybrané typy<br>materiálov..... | 120        |
| Príloha 4 – Vybrané koeficienty miestnych strát.....                               | 121        |
| Príloha 5 – Určenie prietokovej rýchlosti.....                                     | 122        |
| Príloha 6 – Určenie priemeru potrubia.....                                         | 123        |
| Príloha 7 – Príklady charakteristík komerčne predávaných čerpadiel.....            | 124        |
| Príloha 8 – Príkonové charakteristiky vybraných miešadiel.....                     | 125        |
| <b>LITERATÚRA.....</b>                                                             | <b>126</b> |

# 1 LÁTKOVÉ BILANCIE

Pri navrhovaní zariadení a výrobných liniek sú látkové bilancie často nevyhnutnou súčasťou inžinierskeho výpočtu. Táto bilančná časť zväčša predchádza konštrukčné a projekčné výpočty, pretože na základe bilančných výpočtov sa spravidla navrhujú základné parametre zariadenia, resp. procesu. Bilančné výpočty sú dôležité nielen pri návrhu, ale aj pri kontrolovaní a optimalizácii procesov, napr. pri overovaní správnosti chodu výroby, pri zisťovaní účinnosti alebo pri komplikáciách so stratami. Platí, že čím je bilancia podrobnejšia, tým lepšie sa pozná daný systém, resp. proces.

Slovo bilancovať znamená robiť sumarizáciu – výpočty nad určitým bilančným systémom, ktorý je definovaný ako časť priestoru, od okolia je oddelený hranicami a komunikuje s okolím. Hranice takéhoto bilančného systému môžu byť priepustné (otvorený, uzavretý systém) a nepriepustné (izolované). *Otvorený systém* má hranice, ktoré umožňujú výmenu látky a energie s okolitým prostredím. *Uzatvorený systém* disponuje hranicami, cez ktoré dochádza iba k výmene energie medzi okolím a systémom. *Izolovaný systém* je taký, ktorého hranice sú nepriepustné pre prenos látky alebo energie.

Pri bilancovaní sústavy platí *zákon zachovania hmoty*, pričom s hmotou súvisí vždy hmotnosť a energia.

## VŠEOBECNÁ ROVNICA LÁTKOVÝCH BILANCIÍ

Je dôležité uviesť, že pri látkových bilanciách fyzikálnych procesov sa neuvažuje s chemickými reakciami, preto je tvorba materiálu vždy nulová. Celý výpočet je založený na zákone zachovania hmotnosti. To znamená, že hmotnosť jednotlivých zložiek v systéme je nemenná – nevzniká ani nezaniká. Slovné ju možno formulovať nasledovne:

$$\text{celková vstupujúca hmotnosť} = \text{celková vystupujúca hmotnosť} + \text{akumulácia} \quad (1.1)$$

Akumulácia je charakteristická pre prietokové systémy. Týmto pojmom sa označuje látka, ktorá sa v priebehu procesu nahromadí v systéme. Obyčajne po dosiahnutí určitej hodnoty akumulácie sa ďalej jej hodnota nezväčšuje. Vtedy sa hovorí o ustálenom deji, t. j. keď veličiny opisujúce danú sústavu sú nezávislé od času. V takom prípade je hodnota akumulácie nulová. Slovná formulácia sa dá matematicky vyjadriť nasledovne:

$$\sum_{i=1}^k m_i = \sum_{j=k+1}^l m_j + m_a \quad (1.2)$$

kde

|       |                                       |      |
|-------|---------------------------------------|------|
| $m_i$ | – hmotnosť $i$ -tého vstupného prúdu  | (kg) |
| $m_j$ | – hmotnosť $j$ -tého výstupného prúdu | (kg) |
| $m_a$ | – akumulácia hmotnosti                | (kg) |
| $k$   | – počet vstupných prúdov              | (1)  |
| $l$   | – celkový počet prúdov                | (1)  |

### VYJADROVANIE MNOŽSTVA A ZLOŽENIE PRÚDU

V praxi sa najčastejšie bilancuje pomocou hmotnosti a látkového množstva. Hmotnosť sa označuje písmenom  $m$ , jednotka hmotnosti je (kg), látkové množstvo sa označuje písmenom  $n$  a jeho jednotka je (mol). Bilancovanie v objemoch ( $\text{m}^3$ ) je často nevhodné, pretože na objem tekutín vplývajú aj faktory ako teplota, tlak a koncentrácia jednotlivých zložiek. Pri prietokových systémoch sú často množstvá jednotlivých látok vzťahované na časovú jednotku. V takých prípadoch sa bilancuje v hmotnostných tokoch  $\dot{m}$ , resp. v molárnych tokoch  $\dot{n}$ .

Pri riešení úloh sú jednotlivé prúdy spravidla viaczložkové, preto je potrebné si vyjadriť ich zloženie. Takéto vyjadrenie sa robí najčastejšie pomocou (absolútnych) hmotnostných a molárnych zlomkov. Hmotnostný zlomok zložky  $j$  v prúde  $i$  sa spravidla označuje  $\bar{x}_{ij}$  a je definovaný vzťahom:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i} \text{ resp. } \bar{x}_{ij} = \frac{\dot{m}_{ij}}{\dot{m}_i} \quad (1.3)$$

kde

|                |                                         |                                     |
|----------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|
| $m_{ij}$       | – hmotnosť zložky $j$ v prúde $i$       | (kg)                                |
| $m_i$          | – celková hmotnosť prúdu $i$            | (kg)                                |
| $\dot{m}_{ij}$ | – hmotnostný tok zložky $j$ v prúde $i$ | ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ) |
| $\dot{m}_i$    | – celkový hmotnostný tok prúdu $i$      | ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ) |

Z toho vyplýva, že ak ide o jednozložkový prúd, tak  $m_{ij} = m_i$  a  $\dot{m}_{ij} = \dot{m}_i$ , potom hmotnostný zlomok pre danú zložku v danom prúde sa rovná 1. Ďalej platí:

$$\sum_{j=A}^k \bar{x}_{ij} = 1 \quad (1.4)$$

To znamená, že súčet hmotnostných zlomkov jednotlivých zložiek ( $A, B, \dots k$ ) v danom prúde  $i$  sa vždy rovná 1.

V prípade molárnych zlomkov sa postupuje analogicky. Molárny zlomok sa označuje  $x_{ij}$  a je definovaný vzťahom:

$$x_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} \text{ resp. } x_{ij} = \frac{\dot{n}_{ij}}{\dot{n}_i} \quad (1.5)$$

kde

|                |                                                        |                                      |
|----------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| $n_{ij}$       | – látkové množstvo zložky $j$ v prúde $i$              | (mol)                                |
| $n_i$          | – celkové látkové množstvo prúdu $i$                   | (mol)                                |
| $\dot{n}_{ij}$ | – tok látky, resp. molárny tok, zložky $j$ v prúde $i$ | ( $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$ ) |
| $\dot{n}_i$    | – celkový tok látky, resp. molárny tok, prúdu $i$      | ( $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$ ) |

Pre súčet molárnych zlomkov v danom prúde platí:



$$\sum_{j=A}^k x_{ij} = 1 \quad (1.6)$$

Obdobne vyzerajú aj rovnice na výpočet relatívnych hmotnostných a molárnych zlomkov. Rozdiel spočíva v stiahnutí hmotnosti zložky, resp. látkového množstva, nie k celkovému množstvu prúdu alebo sústavy, ale k nejakej konkrétnej zložke.

Tabuľka 1.1. Vyjadrenie vzťahov na výpočet relatívnych koncentrácií

| Symbol    | Definícia                                                                                           | Rozmer | Názov                       |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-----------------------------|
| $\bar{X}$ | $\bar{X} = \frac{m_i}{m_S} = \frac{\text{hmotnosť zložky } i}{\text{hmotnosť zložky } S}$           | (1)    | relatívny hmotnostný zlomok |
| $X$       | $X = \frac{n_i}{n_S} = \frac{\text{látkové množstvo zložky } i}{\text{látkové množstvo zložky } S}$ | (1)    | relatívny molárny zlomok    |
| $C^V$     | $C^V = \frac{V_i}{V_S} = \frac{\text{objem zložky } i}{\text{objem zložky } S}$                     | (1)    | relatívny objemový zlomok   |

Medzi hmotnosťou a látkovým množstvom  $i$ -tej zložky platí nasledujúca súvislosť:

$$n_i = \frac{m_i}{M_i} \quad (1.7)$$

kde

$M_i$  – molárna hmotnosť zložky  $i$  (kg. mol<sup>-1</sup>)

Hmotnosť látky  $i$  sa dá vyjadriť aj pomocou objemu látky  $V_i$  a hustoty  $\rho_i$ :

$$m_i = V_i \rho_i \quad (1.8)$$

## POSTUP PRI RIEŠENÍ LÁTKOVÝCH BILANCIÍ

Dôležitým krokom pri bilanciách je voľba základu výpočtu. Základ sa volí v takých jednotkách, v akých je výpočet najúčelnejší alebo najjednoduchší. Počas výpočtu sa odporúča dodržiavať nasledujúce pokyny, ktoré výrazne ovplyvnia priehľadnosť a správnosť výpočtu:

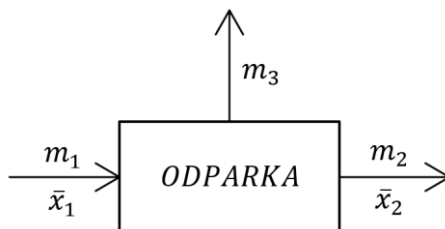
- v úvode nakresliť jednoduchú schému príkladu,
- vyznačiť a očíslovať jednotlivé prúdy a zapísať ich zloženie,
- ak je príklad zložitejší, je vhodné si znázorniť údaje v bilančnej tabuľke, v ktorej sa vyplnia jednotlivé prúdy a jednotlivé zložky a do ľavého horného rohu sa spravidla zapisujú jednotky, v ktorých sa bude bilancovať,
- určiť neznáme veličiny a zostaviť sústavu vzájomne nezávislých rovníc (bilančné rovnice celkové a bilančné rovnice zložkové), aby bol príklad riešiteľný, pričom počet neznámych veličín nesmie presiahnuť počet nezávislých rovníc,
- riešiť sústavu nezávislých rovníc, a tým vyčísliť neznáme veličiny,
- overiť správnosť výsledkov, buď kontrolou množstiev vstupných, resp. výstupných prúdov, alebo ak je k dispozícii ďalšia rovnica, ktorá nebola využitá v pôvodnom výpočte, tak pomocou nej.

## RIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 1-1 Zahusťovanie – zmena koncentrácie roztoku

Zadanie: Roztok s počiatočnou koncentráciou vyjadrenou hmotnostným zlomkom  $\bar{x}_1 = 0,16$  a hmotnosťou 1500 kg má byť zahustený na roztok s hmotnostnou koncentráciou  $\bar{x}_2 = 0,75$ . Vypočítajte množstvo rozpúšťadla, ktoré treba z roztoku odstrániť.

Postup: Schéma k príkladu je znázornená na obrázku 1.1. Hmotnosť pôvodného roztoku sa označí ako  $m_1$ , výsledné množstvo zahusteného roztoku  $m_2$  a množstvo odstráneného rozpúšťadla  $m_3$ .



Obr. 1.1. Schéma k príkladu 1-1

Celková hmotnostná bilancia systému má tvar:

$$m_1 = m_2 + m_3 \quad (1.9)$$

Pre rozpúšťanú látku platí zložková látková bilančná rovnica v tvare:

$$m_1 \bar{x}_1 = m_2 \bar{x}_2 \quad (1.10)$$

Spojením celkovej hmotnostnej bilančnej rovnice (1.9) a zložkovej bilančnej rovnice (1.10) sa dostane rovnica v tvare:

$$m_1 \bar{x}_1 = (m_1 - m_3) \bar{x}_2 \quad (1.11)$$

Jednoduchou matematickou úpravou sa vyjadří neznáma  $m_3$ :

$$m_3 = m_1 \left( 1 - \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \right) \quad (1.12)$$

Výpočet: Po dosadení do predchádzajúcej rovnice (1.12) sa vypočíta hodnota  $m_3$  odstráneného rozpúšťadla.

$$m_3 = 1500 \left( 1 - \frac{0,16}{0,75} \right) = 1180 \text{ kg}$$

Kontrola výpočtu:

$$1500 = m_2 + 1180 \rightarrow m_2 = 320 \text{ kg}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{m_2 \bar{x}_2}{m_1} = \frac{320 \cdot 0,75}{1500} = 0,16$$

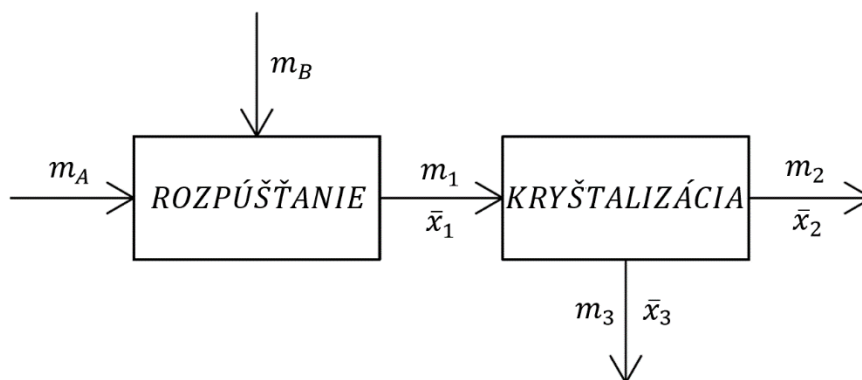
Výsledok: Pri zahusťovaní je nutné odstrániť zo systému 1180 kg rozpúšťadla.

### Príklad 1-2 Kryštalizácia

Zadanie: Rekryštalizáciou sa čistí chlorid sodný tak, že soľ sa rozpustí v potrebnom množstve vody na nasýtený roztok pri teplote 100 °C, keď je rozpustnosť 40 g NaCl na 100 g vody. Vzniknutý roztok sa ochladí na teplotu 20 °C, pričom rozpustnosť je 35,9 g NaCl na 100 g vody. Zistite:

- aká hmotnosť vody je potrebná na prečistenie 1000 kg suroviny a aká hmotnosť kryštálov vznikne, ak sa neberie do úvahy vyparovanie rozpúšťadla pri ochladzovaní roztoku,
- ako sa zmení bilancia za predpokladu, že sa pri ochladení vyparí 9,5 % vody prítomnej v pôvodnom roztoku.

Postup: Za základ výpočtu sa zvolí 1000 kg surového chloridu sodného. Na výpočet sa použijú už známe rovnice látkovej bilancie pre kryštalizáciu, ktoré sa využijú na obe časti príkladu.



Obr. 1.2. Schéma k príkladu 1-2

Výpočet: Jednoduchá schéma výpočtu je znázornená na obrázku 1.2. Na zavedenie jednoduchých bilančných rovníc je potrebné označenie jednotlivých látok a prúdov. Hmotnosť surového roztoku chloridu sodného je  $m_A$ , hmotnosť vody potrebnej na prečistenie sa označí  $m_B$ , hmotnosť nasýteného roztoku  $m_1$  a hmotnosť vykryštalizovaného roztoku  $m_2$ . Hmotnostný zlomok  $\bar{x}_1$  je koncentrácia pôvodného roztoku pri teplote 100 °C a  $\bar{x}_2$  je koncentrácia výsledného roztoku pri teplote 20 °C.

a) Výpočet hmotnosti vody potrebnej na prečistenie (získanie nasýteného roztoku). Pri rozpúšťaní NaCl podľa obrázku 1.2 platí bilančná rovnica:

$$m_A + m_B = m_1 \quad (1.13)$$

Bilancia zložky A (NaCl) má v spojení s predchádzajúcou rovnicou tvar:

$$m_A = m_1 \bar{x}_{1A} = (m_A + m_B) \bar{x}_{1A} \quad (1.14)$$

Na základe uvedenej rozpustnosti zložky A (NaCl) bude koncentrácia nasýteného roztoku vyjadrená hmotnostným zlomkom:

$$\bar{x}_{1A} = \frac{40 \text{ g NaCl}}{40 \text{ g NaCl} + 100 \text{ g H}_2\text{O}} = 0,2857$$

Množstvo vody  $m_B$  potrebnej na prečistenie a zároveň vytvorenie nasýteného roztoku predstavuje:

$$m_B = m_A \frac{1 - \bar{x}_{1A}}{\bar{x}_{1A}} = 1000 \frac{1 - 0,2857}{0,2857} = 2500 \text{ kg}$$

Množstvo získaných kryštálov po ochladení nasýteného roztoku sa vypočíta po zostavení bilančných rovníc podľa obrázku 1.2:

$$m_1 = m_2 + m_3 \quad (1.15)$$

Zložková bilančná rovnica NaCl má tvar:

$$m_1 \bar{x}_{1A} = m_2 \bar{x}_{2A} + m_3 \bar{x}_{3A} \quad (1.16)$$

Keďže prúd 3 obsahuje len kryštály NaCl, jeho hmotnostný zlomok sa rovná  $\bar{x}_{3A} = 1$ . Z rovnice (1.16) sa vyjadrí člen  $m_2$  a ten sa dosadí do rovnice (1.15). Tým sa získa rovnica:

$$m_3 = \frac{m_1 (\bar{x}_{2A} - \bar{x}_{1A})}{\bar{x}_{2A} - \bar{x}_{3A}} \quad (1.17)$$

Na určenie množstva získaných kryštálov pri kryštalizácii je potrebné zistiť hodnotu prúdu  $m_1$ , teda množstvo nasýteného roztoku podľa rovnice (1.15).

$$m_1 = 1000 + 2500 = 3500 \text{ kg}$$

Na číselné dosadenie je potrebné vypočítať hmotnostnú koncentráciu vykryštalizovaného roztoku  $\bar{x}_2$ :

$$\bar{x}_2 = \frac{35,9 \text{ g NaCl}}{35,9 \text{ g NaCl} + 100 \text{ g H}_2\text{O}} = 0,2642$$

Po dosadení do rovnice (1.17) sa vypočíta hmotnosť kryštálov  $m_3$ :

$$m_3 = 3500 \frac{0,2642 - 0,2857}{0,2642 - 1} = 102,27 \text{ kg}$$

Kontrola výpočtu: Množstvo vody vstupujúce do systému vystupuje v nezmenenom množstve, z toho vyplýva, že zo známeho množstva vody a rozpusteného NaCl je možné vypočítať konečnú koncentráciu roztoku a porovnať ju so zadanou hodnotnou rozpustnosti. Množstvo

NaCl v konečnom roztoku je dané rozdielom vstupujúceho množstva a množstva získaných kryštálov.

$$m_A - m_3 = 1000 - 102,27 = 897,73 \text{ kg}$$

Kontrolný výpočet hmotnostnej koncentrácie vystupujúceho roztoku  $\bar{x}_2$ :

$$\bar{x}_2 = \frac{m_A - m_3}{m_A - m_3 + m_B} = \frac{1000 - 102,27}{1000 - 102,27 + 2500} = 0,2642$$

Keďže hmotnostná koncentrácia vypočítaná na základe látkovej bilancie súhlasí s koncentráciou vypočítanou na základe zadanej rozpustnosti, je možné považovať príklad za správne vyriešený.

Výpočet s využitím relatívnych koncentrácií: Počiatočnú a konečnú koncentráciu roztoku, vypočítanú na základe látkovej bilancie, je možné vyjadriť ako množstvo tuhej zložky vzťahnuté k množstvu vody v roztoku, teda relatívne. Ak sa bude voda považovať len za referenčnú zložku, výpočet sa podstatne zjednoduší.

Relatívna hmotnostná koncentrácia počiatočného roztoku má tvar podľa danej rozpustnosti:

$$\bar{X}_1 = \frac{m_A}{m_B} = 0,40$$

Z tejto rovnice je možné získať hmotnosť vody  $m_B$  a po úprave sa dostane:

$$m_B = \frac{m_A}{\bar{X}_1} = \frac{1000}{0,4} = 2500 \text{ kg}$$

Rovnakým spôsobom sa stanoví aj množstvo získaných kryštálov:

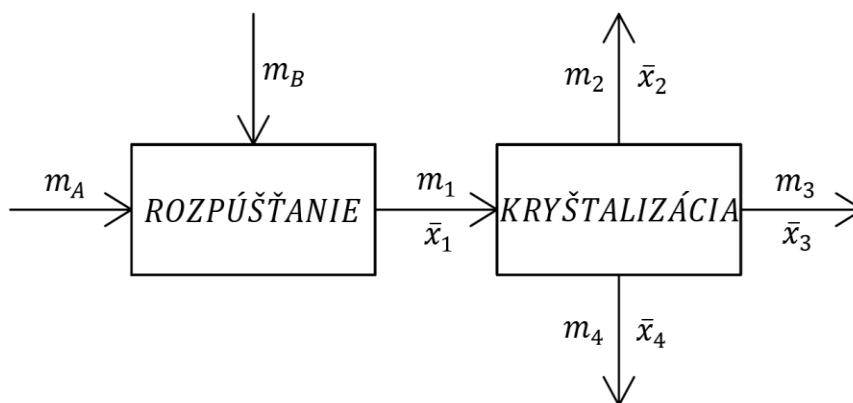
$$\bar{X}_1 m_B = \bar{X}_2 m_B + m_3 \quad (1.18)$$

Odtiaľ sa po úprave a dosadení ( $\bar{X}_2 = 35,9/100 = 0,359$ ) získa hmotnosť kryštálov  $m_3$ :

$$m_3 = m_B (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 2500 (0,40 - 0,359) = 102,5 \text{ kg}$$

b) Hmotnosť vody v pôvodnom nasýtenom roztoku ostáva rovnaká ako v prípade po a), t. j.  $m_B = 2500 \text{ kg}$ . Keď sa označí hmotnosť vody, ktorá sa pri ochladení vyparí ako  $m_4$  a zo zadania je známe, že sa vyparí 9,5 % vody prítomnej v pôvodnom roztoku, je možné napísať rovnicu:

$$m_4 = 0,095 m_B = 0,095 \cdot 2500 = 237,5 \text{ kg}$$



Obr. 1.3. Schéma k príkladu 1-2 b)

Zostaví sa bilančná tabuľka, ktorá pozostáva z riadkov predstavujúcich jednotlivé látky  $A$  (NaCl),  $B$  (voda) a stĺpcov zobrazujúcich jednotlivé prúdy kryštalizácie. Stĺpec 1 sa rovná stĺpcom 2+3+4, matematické vyjadrenie:  $m_1 = m_2 + m_3 + m_4$ . Pre riadok je situácia podobná, riadok 1 v stĺpci 1 sa rovná riadku 1 v stĺpcoch 2 a 3:  $m_{1A} = m_{2A} + m_{3A}$ .

Tabuľka 1.2. Všeobecná bilančná tabuľka k príkladu 1-2 b)

| (kg)                      | 1                           | 2                           | 3                           | 4                                   |
|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| $A$<br>(NaCl)             | $\bar{x}_{1A} m_1 = m_{1A}$ | $\bar{x}_{2A} m_2 = m_{2A}$ | $\bar{x}_{3A} m_3 = m_{3A}$ |                                     |
| $B$<br>(H <sub>2</sub> O) | $\bar{x}_{1B} m_1 = m_{1B}$ | $\bar{x}_{2B} m_2 = m_{2B}$ |                             | $\bar{x}_{4B} m_4 = m_{4B} = 237,5$ |
| $\Sigma$                  | $m_1 = 3500$                | $m_2$                       | $m_3$                       | $m_4 = 237,5$                       |

Do bilančnej tabuľky 1.2 sa doplnia číselné hodnoty jednotlivých hmotnostných koncentrácií:

Tabuľka 1.3. Bilančná tabuľka s číselnými hodnotami k príkladu 1-2 b)

| (kg)                      | 1                          | 2                     | 3                | 4     |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------|------------------|-------|
| $A$<br>(NaCl)             | $0,2857 \cdot 3500 = 1000$ | $0,2642 m_2 = m_{2A}$ | $1 m_{3A} = m_3$ |       |
| $B$<br>(H <sub>2</sub> O) | $0,7143 \cdot 3500 = 2500$ | $0,7358 m_2 = m_{2B}$ |                  | 237,5 |
| $\Sigma$                  | 3500                       | $m_2$                 | $m_3$            | 237,5 |

Z bilančnej tabuľky potom vyplývajú príslušné bilančné rovnice, na základe ktorých sa určí hmotnosť vzniknutých kryštálov v prípade, že sa odparí 9,5 % vody z pôvodného roztoku.

$$\begin{aligned}
 2500 &= m_{2B} + 237,5 \rightarrow m_{2B} = 2500 - 237,5 = 2262,5 \text{ kg} \\
 0,7358 m_2 &= m_{2B} \rightarrow m_2 = \frac{m_{2B}}{0,7358} = \frac{2262,5}{0,7358} = 3074,9 \text{ kg} \\
 1000 &= 0,2642 m_2 + m_3 = 0,2642 \cdot 3074,9 + m_3 \rightarrow \\
 &\rightarrow m_3 = 1000 - 812,4 = 187,6 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Z bilančných rovníc sa získala hmotnosť kryštálov, ktorá je v tomto prípade vyššia ako hmotnosť získaná počas kryštalizácie, keď sa neuvažuje s vyparením rozpúšťadla. Rovnako sa získala aj hmotnosť roztoku po kryštalizácii.

Zadané, ako aj získané hodnoty, sa zapisujú do bilančnej tabuľky.

Tabuľka 1.4. Vyriešená bilančná tabuľka s číselnými hodnotami k príkladu 1-2 b)

| (kg)                    | 1    | 2      | 3     | 4     |
|-------------------------|------|--------|-------|-------|
| A<br>(NaCl)             | 1000 | 812,4  | 187,6 |       |
| B<br>(H <sub>2</sub> O) | 2500 | 2262,5 |       | 237,5 |
| Σ                       | 3500 | 3074,9 | 187,6 | 237,5 |

Výsledok: Na prečistenie 1000 kg chloridu sodného treba 2500 kg vody. Ak sa neuvažuje s vyparením rozpúšťadla počas kryštalizácie, je hmotnosť vzniknutých kryštálov 102,5 kg. S prihliadnutím na vyparovanie rozpúšťadla, t. j. vody, ktoré je 9,5 % z pôvodného roztoku, vykryštalizuje 187,6 kg kryštálov NaCl.

### **Príklad 1-3** Zmiešavanie

Zadanie: K dispozícii je zariadenie, z ktorého musí odchádzať 273 kg·h<sup>-1</sup> roztoku s hmotnostným zložením 28,4 % HNO<sub>3</sub>, 67 % H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> a zvyšok tvorí voda. K dispozícii je starý roztok so zložením 13,5 % HNO<sub>3</sub>, 54,9 % H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> a 31,6 % H<sub>2</sub>O; koncentrovaná kyselina dusičná 93 % HNO<sub>3</sub> a koncentrovaná kyselina sírová v zložení 98 % H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. Vypočítajte jednotlivé množstvá roztokov vstupujúcich do zariadenia.

Postup: Pre zjednodušenie výpočtu sa nahradia jednotlivé látky písmenami: A - HNO<sub>3</sub>, B - H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> a C - H<sub>2</sub>O. Prúd  $\dot{m}_4$  je výtok zo zmiešavača a prúdy  $\dot{m}_1$  (starý roztok),  $\dot{m}_2$  (koncentrovaná kyselina HNO<sub>3</sub>),  $\dot{m}_3$  (koncentrovaná kyselina H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) tvoria vstupy. Ak sa v jednom prúde nachádza iba koncentrovaná kyselina o príslušnej koncentrácii zvyšok takejto koncentrovanej kyseliny tvorí voda. Platí zákon zachovania hmotnosti, teda čo do zmiešavača vstúpi, to z neho musí aj vystúpiť.

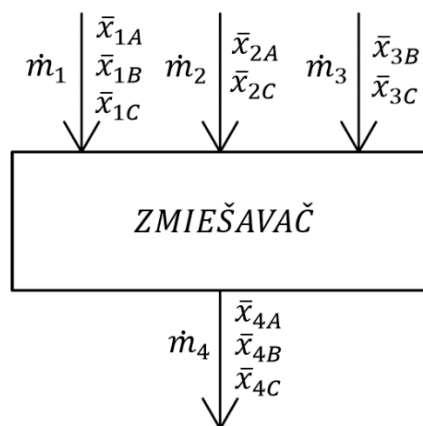
$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 = \dot{m}_4 \quad (1.19)$$

Rovnaké pravidlo platí aj pri hmotnostnom, resp. molárnom zložení jednotlivých prúdov. Ak je dané, že hmotnostné zloženie prúdu  $\dot{m}_2$  obsahuje 93 hmot. % zložky A a neobsahuje zložku B, iba zložku C, potom má bilančná rovnica tvar:

$$\bar{x}_{2A} + \bar{x}_{2C} = 1 \quad (1.20)$$

$$\bar{x}_{2C} = 1 - \bar{x}_{2A} = 1 - 0,93 = 0,07$$

Nakreslí sa jednoduchá schéma (obr. 1.4), ktorá v sebe zahŕňa jednotlivé látkové prúdy.



Obr. 1.4. Schéma k príkladu 1-3

Výpočet: Na základe schémy sa vytvorí bilančná tabuľka, do ktorej sa doplnia najprv všeobecné hodnoty a následne číselne známe hodnoty.

Tabuľka 1.5. Všeobecná bilančná tabuľka k príkladu 1-3

| (kg. h <sup>-1</sup> )              | 1                                       | 2                                       | 3                                       | 4                                       |
|-------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| A (HNO <sub>3</sub> )               | $\bar{x}_{1A} \dot{m}_1 = \dot{m}_{1A}$ | $\bar{x}_{2A} \dot{m}_2 = \dot{m}_{2A}$ |                                         | $\bar{x}_{4A} \dot{m}_4 = \dot{m}_{4A}$ |
| B<br>H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> | $\bar{x}_{1B} \dot{m}_1 = \dot{m}_{1B}$ |                                         | $\bar{x}_{3B} \dot{m}_3 = \dot{m}_{3B}$ | $\bar{x}_{4B} \dot{m}_4 = \dot{m}_{4B}$ |
| C (H <sub>2</sub> O)                | $\bar{x}_{1C} \dot{m}_1 = \dot{m}_{1C}$ | $\bar{x}_{2C} \dot{m}_2 = \dot{m}_{2C}$ | $\bar{x}_{3C} \dot{m}_3 = \dot{m}_{3C}$ | $\bar{x}_{4C} \dot{m}_4 = \dot{m}_{4C}$ |
| $\Sigma$                            | $\dot{m}_1$                             | $\dot{m}_2$                             | $\dot{m}_3$                             | $\dot{m}_4$                             |

Tabuľka 1.6. Bilančná tabuľka s číselnými hodnotami k príkladu 1-3

| (kg. h <sup>-1</sup> )              | 1                                | 2                               | 3                               | 4                     |
|-------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------|
| A (HNO <sub>3</sub> )               | 0,135 $\dot{m}_1 = \dot{m}_{1A}$ | 0,93 $\dot{m}_2 = \dot{m}_{2A}$ |                                 | 0,284 . 273<br>= 77,5 |
| B<br>H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> | 0,549 $\dot{m}_1 = \dot{m}_{1B}$ |                                 | 0,98 $\dot{m}_3 = \dot{m}_{3B}$ | 0,67 . 273<br>= 182,9 |
| C (H <sub>2</sub> O)                | 0,316 $\dot{m}_1 = \dot{m}_{1C}$ | 0,07 $\dot{m}_2 = \dot{m}_{2C}$ | 0,02 $\dot{m}_3 = \dot{m}_{3C}$ | 0,046 . 273<br>= 12,6 |
| $\Sigma$                            | $\dot{m}_1$                      | $\dot{m}_2$                     | $\dot{m}_3$                     | 273                   |

Z bilančnej tabuľky 1.6 sa vyberú tri rovnice, ktoré v sebe zahrňujú tri neznáme, ktoré sa vyjadria matematickými úpravami:

$$\begin{aligned} 0,135 \dot{m}_1 + 0,93 \dot{m}_2 &= 77,5 \\ 0,549 \dot{m}_1 + 0,98 \dot{m}_3 &= 128,9 \\ \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 &= 273 \end{aligned}$$

Riešením týchto rovníc sú hmotnostné toky  $\dot{m}_1 = 10,3 \text{ kg. h}^{-1}$ ,  $\dot{m}_2 = 81,8 \text{ kg. h}^{-1}$  a  $\dot{m}_3 = 180,9 \text{ kg. h}^{-1}$ .



**Kontrola výpočtu:** Z bilančných rovníc, z ktorých sa matematicky vyjadrili hmotnostné toky vstupných prúdov, sa použijú rovnice na kontrolu výpočtu. Kontrola spočíva v tom, že bunky v stĺpcoch 1, 2, 3 sa rovnajú bunke v stĺpci 4 v danom riadku. Rovnako tak aj bunky v riadku A, B, C v danom stĺpci sa rovnajú sumačnému riadku toho istého stĺpca.

Tabuľka 1.7. Vyriešená bilančná tabuľka s číselnými hodnotami k príkladu 1-3

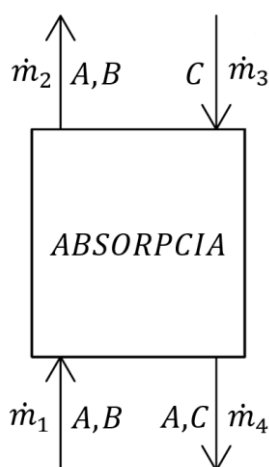
| (kg. h <sup>-1</sup> )                 | 1    | 2    | 3     | 4     |
|----------------------------------------|------|------|-------|-------|
| A<br>(HNO <sub>3</sub> )               | 1,4  | 76,1 |       | 77,5  |
| B<br>(H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> ) | 5,7  |      | 177,3 | 182,9 |
| C<br>(H <sub>2</sub> O)                | 3,2  | 5,7  | 3,6   | 12,6  |
| Σ                                      | 10,3 | 81,8 | 180,9 | 273   |

**Výsledok:** Aby zo zariadenia odchádzalo 273 kg. h<sup>-1</sup> roztoku, musí byť hmotnostný tok starého roztoku  $\dot{m}_1 = 10,3 \text{ kg. h}^{-1}$ , koncentrovanej kyseliny dusičnej  $\dot{m}_2 = 81,8 \text{ kg. h}^{-1}$  a koncentrovanej kyseliny sírovej  $\dot{m}_3 = 180,9 \text{ kg. h}^{-1}$ .

#### Príklad 1-4 Absorpcia

**Zadanie:** Protiprúdová absorpčná kolóna spracuje 1000 kg. h<sup>-1</sup> plynu s obsahom 9 hmot. % amoniaku. Zvyšok tohto plynu je inertná zložka. Na výstupe je obsah amoniaku v plyne 2 hmot. %, keďže odstránenie celkového množstva amoniaku je obtiažne. Na vypieranie sa používa čistá voda, ktorá na výstupe z absorpčnej kolóny obsahuje 5 hmot. % vypieranej zložky. Určte potrebný prietok vstupujúcej vody, aby absorpcia prebiehala pri zadaných podmienkach.

**Postup:** Absorpcia je dej, pri ktorom sa rozpúšťa plyn v kvapaline (rozpúšťadlo – absorbent). Bilančná schéma je znázornená na obrázku 1.5.



Obr. 1.5. Schéma k príkladu 1-4

Hmotnostný tok vstupujúceho plynu sa označil  $\dot{m}_1$ , tok odchádzajúceho (vyčisteného plynu)  $\dot{m}_2$ . Čistá voda (rozpušťač) vstupuje do zariadenia v prúde 3, jej hmotnostný tok je označený  $\dot{m}_3$ . Amoniakom obohatená voda vystupuje zo zariadenia v prúde 4, jej hmotnostný tok je  $\dot{m}_4$ . Na schéme sú tiež zaznačené jednotlivé zložky ( $A, B, C$ ) a prúdy (1, 2, 3, 4). Písmenom  $A$  sa označil amoniak,  $B$  je inertný plyn a  $C$  je voda. Hmotnostné zastúpenie jednotlivých zložiek v daných prúdoch je známe zo zadania. Keďže prúdy sú maximálne dvojzložkové, platí:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{1A} &= 0,09 \rightarrow \bar{x}_{1B} = 1 - 0,09 = 0,91 \\ \bar{x}_{2A} &= 0,02 \rightarrow \bar{x}_{2B} = 1 - 0,02 = 0,98 \\ \bar{x}_{3A} &= 0 \rightarrow \bar{x}_{3C} = 1 \\ \bar{x}_{4A} &= 0,05 \rightarrow \bar{x}_{4C} = 1 - 0,05 = 0,95\end{aligned}$$

Príklad sa bude riešiť za predpokladu, že prestup látky je jednosmerný, aj to len v prípade amoniaku. To znamená, že počas procesu sa nepohlcuje žiadne množstvo inertného plynu v absorbente a taktiež žiadne kvapky vody nie sú strhávané (zachytávané) plynom. Príklad sa rieši popisáním bilančných rovníc pri ustálenom stave. Akumulácia je nulová.

Výpočet: Celková bilančná rovnica sa píše ako rovnosť vstupujúcich a vystupujúcich prúdov:

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_3 = \dot{m}_2 + \dot{m}_4 \quad (1.21)$$

Zložková bilančná rovnica pre zložku  $A$  vyzerá nasledovne:

$$\dot{m}_{1A} + \dot{m}_{3A} = \dot{m}_{2A} + \dot{m}_{4A} \quad (1.22)$$

Rovnica (1.22) sa môže rozpísať pomocou hmotnostných zlomkov a hlavných hmotnostných tokov nasledovne:

$$\dot{m}_1 \bar{x}_{1A} + \dot{m}_3 \bar{x}_{3A} = \dot{m}_2 \bar{x}_{2A} + \dot{m}_4 \bar{x}_{4A} \quad (1.23)$$

Sú známe dve rovnice (1.21) a (1.23), ale tri neznáme  $\dot{m}_2$ ,  $\dot{m}_3$  a  $\dot{m}_4$ . Ďalšie rovnice sa môžu písať na základe predpokladov, že tok inertnej zložky – rovnica (1.24) a tok čistej vody – rovnica (1.25) sa nemenia.

$$\dot{m}_{1B} = \dot{m}_{2B} \rightarrow \dot{m}_1 \bar{x}_{1B} = \dot{m}_2 \bar{x}_{2B} \quad (1.24)$$

$$\dot{m}_{3C} = \dot{m}_{4C} \rightarrow \dot{m}_3 \bar{x}_{3C} = \dot{m}_4 \bar{x}_{4C} \quad (1.25)$$

Teraz sú k dispozícii štyri rovnice (1.21), (1.23), (1.24) a (1.25). Pomocou troch rovníc je možné vyrátať tri neznáme veličiny a pomocou štvrtej rovnice sa spraví kontrola. Z rovnice (1.24) je možné priamo vyjadriť  $\dot{m}_2$ .

$$\dot{m}_2 = \frac{\dot{m}_1 \bar{x}_{1B}}{\bar{x}_{2B}} = \frac{1000 \cdot 0,91}{0,98} \doteq 928,57 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

Keď sa vyjadrí z rovnice (1.25)  $\dot{m}_3$  a následne sa dosadí do rovnice (1.21), tak potom pre  $\dot{m}_4$  platí:

$$\dot{m}_4 = \frac{\dot{m}_1 - \dot{m}_2}{\frac{\bar{x}_{3C} - \bar{x}_{4C}}{\bar{x}_{3C}}} = \frac{1000 - 928,57}{\frac{1 - 0,95}{1}} \doteq 1428,57 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

Túto hodnotu je možné späťne dosadiť do rovnice (1.25), dostane sa:

$$\dot{m}_3 = \frac{\dot{m}_4 \bar{x}_{4C}}{\bar{x}_{3C}} = \frac{1428,57 \cdot 0,95}{1} \doteq 1357,14 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

**Kontrola výpočtu:** Rovnicu (1.23) je možné použiť ako kontrolnú rovnicu, a to tak, že sa do nej dosadia známe veličiny.

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 \bar{x}_{1A} + \dot{m}_3 \bar{x}_{3A} &= \dot{m}_2 \bar{x}_{2A} + \dot{m}_4 \bar{x}_{4A} \\ 1000 \cdot 0,09 + 1357,14 \cdot 0 &= 928,57 \cdot 0,02 + 1428,57 \cdot 0,05 \\ 90 &= 90 \end{aligned}$$

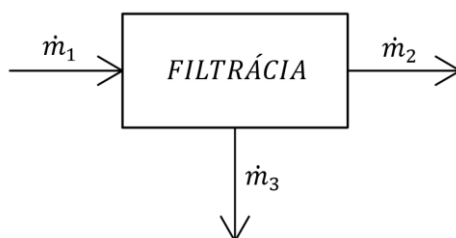
Keďže ľavá strana rovnice sa rovná pravej strane rovnice, riešenie možno považovať za správne.

**Výsledok:** Aby absorpcia prebiehala pri zadaných podmienkach, hmotnostný prietok vstupujúceho absorbenta musí byť  $1357,14 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ .

### **Príklad 1-5** Koláčová filtrácia

**Zadanie:** Na stavbe vzniká suspenzia, ktorá sa po odstránení tuhých častíc dá použiť znova. Analýzou sa zistilo, že 100 kg takejto heterogénnej zmesi obsahuje 15 kg tuhých častíc. Pri filtrácii sa vytvára filtračný koláč, v ktorom hmotnostné zastúpenie tuhej fázy je 5-násobné na 100 kg suspenzie v porovnaní so základnou suspenziou. Tento technologický proces je vysoko účinný, vďaka čomu je výskyt tuhých častíc vo filtráte zanedbateľný. Denne treba vyčistiť 480 kg suspenzie, ktorá je privádzaná konštantnou rýchlosťou. Aké množstvo materiálu pribudne na filtračnom koláči za každú hodinu, ak zariadenie pracuje 8 hodín denne?

**Postup:** Bilančná schéma je znázornená na obrázku 1.6. Hmotnostný tok vstupujúcej suspenzie sa označil  $\dot{m}_1$  a tok odchádzajúceho filtrátu  $\dot{m}_2$ . Prírastok hmotnosti filtračného koláča za časovú jednotku je označený  $\dot{m}_3$ .



Obr. 1.6. Schéma k príkladu 1-5

V skutočnosti  $\dot{m}_3$  nie je prúd, pretože tento hmotnostný tok nevystupuje zo zariadenia konštantne, filtračný zvyšok sa naakumuluje počas cyklu vo vnútri zariadenia a odstráni sa na konci procesu. Prúd 3 teda predstavuje akumuláciu. Postup výpočtu je nasledovný. Keďže v zadaní nebolo určené inak, suspenzia sa považuje za dvojzložkovú zmes, ktorá sa skladá

z tuhých častíc – zložka  $A$  a z kvapaliny – zložka  $B$ . Keďže platí zákon zachovania hmotnosti, je možné napísať celkovú bilančnú rovnicu, ako aj zložkovú bilančnú rovnicu ( $A$ ,  $B$ ) samostatne.

Výpočet: Celková bilančná rovnica podľa schémy sa môže napísať nasledovne:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad (1.26)$$

Pre zložku  $A$  a  $B$  platia rovnice:

$$\dot{m}_{1A} = \dot{m}_{2A} + \dot{m}_{3A} \quad (1.27)$$

$$\dot{m}_{1B} = \dot{m}_{2B} + \dot{m}_{3B} \quad (1.28)$$

Označenie  $\dot{m}_{1A}$  vyjadruje hmotnostný tok zložky  $A$  v prúde 1,  $\dot{m}_{2A}$  vyjadruje hmotnostný tok zložky  $A$  v prúde 2 atď. Rovnice (1.27) a (1.28) sa môžu rozpisovať v tvare:

$$\dot{m}_1 \bar{x}_{1A} = \dot{m}_2 \bar{x}_{2A} + \dot{m}_3 \bar{x}_{3A} \quad (1.29)$$

$$\dot{m}_1 \bar{x}_{1B} = \dot{m}_2 \bar{x}_{2B} + \dot{m}_3 \bar{x}_{3B} \quad (1.30)$$

Zo zadania je dané, že za 8 hodín sa vyčistí 480 kg suspenzie, teda:

$$\dot{m}_1 = \frac{m_1}{t} = \frac{480}{8} = 60 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

Keďže 100 kg suspenzie obsahuje 15 kg tuhých častíc, hmotnostný zlomok  $\bar{x}_{1A} = 0,15$ . Z toho vyplýva, že:

$$\bar{x}_{1B} = 1 - \bar{x}_{1A} = 1 - 0,15 = 0,85$$

nakoľko ide o dvojzložkovú zmes. Ďalej zo zadania je dané, že hmotnostné zastúpenie tuhých častíc vo filtračnom koláči je 5-násobné v porovnaní so základnou suspenziou.

$$\bar{x}_{3A} = 5 \bar{x}_{1A} = 5 \cdot 0,15 = 0,75$$

Potom pre hmotnostný zlomok vody vo filtračnom koláči platí:

$$\bar{x}_{3B} = 1 - \bar{x}_{3A} = 1 - 0,75 = 0,25$$

Keďže výskyt tuhých častíc vo filtráte je zanedbateľný, pre hmotnostné zlomky platí  $\bar{x}_{2A} = 0$  a  $\bar{x}_{2B} = 1$ .

Dosadením známych hodnôt do rovníc (1.26), (1.29) a (1.30) sa dostane:

$$\begin{aligned} 60 &= \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \\ 60 \cdot 0,15 &= 0 \dot{m}_2 + 0,75 \dot{m}_3 \\ 60 \cdot 0,85 &= 1 \dot{m}_2 + 0,25 \dot{m}_3 \end{aligned}$$

K dispozícii sú tri rovnice, v ktorých vystupujú dve neznáme hodnoty, čiže úloha je riešiteľná. Z druhej rovnice je možné priamo vyjadriť  $\dot{m}_3$ .

$$\dot{m}_3 = \frac{60 \cdot 0,15}{0,75} = 12 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

Táto hodnota sa dosadí do tretej rovnice a potom pre hmotnostný tok filtrátu platí:

$$\dot{m}_2 = 60 \cdot 0,85 - (12 \cdot 0,25) = 48 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

Kontrola výpočtu: Kontrolný výpočet sa vykoná pomocou prvej rovnice. Stačí dosadiť vypočítané hodnoty.

$$60 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 = 48 + 12 = 60$$

Keďže ľavá strana rovnice sa rovná pravej strane rovnice, riešenie možno považovať za správne.

Výsledok: Hmotnostný tok pribúdajúceho materiálu na filtračnom koláči je  $12 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ .

## NERIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 1-6

Zadanie: Ochladením roztoku síranu horečnatého nasýteného pri teplote  $60^\circ\text{C}$  na teplotu  $20^\circ\text{C}$  má vykryštalizovať  $10 \text{ g MgSO}_4$ . Vypočítajte hmotnosť  $\text{MgSO}_4$  a vody potrebných na prípravu potrebného množstva nasýteného roztoku síranu horečnatého. Rozpustnosť je daná nasledovne:  $s(60^\circ\text{C}) = 28,10 \text{ g MgSO}_4 / 100 \text{ g roztoku}$ ,  $s(20^\circ\text{C}) = 17,20 \text{ g MgSO}_4 / 100 \text{ g roztoku}$

Výsledok:  $m_{\text{MgSO}_4} = 25,94 \text{ g}$ ,  $m_{\text{H}_2\text{O}} = 92,53 \text{ g}$

### Príklad 1-7

Zadanie: Na výrobu ovocnej šťavy so zložením  $39,6 \text{ hmot. \%}$  sušiny a vody sa použije ovocná „kaša“ s  $90 \text{ hmot. \%}$  vody a sušiny. Táto zmes vstupuje do filtra, kde sa filtruje na číry filtrát a ovocnú šťavu. Vypočítajte hmotnostné toky jednotlivých prúdov, ak je potrebné, aby zo zariadenia odchádzalo  $152 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$  číreho filtrátu.

Výsledok:  $\dot{m}_{\text{ovocná kaša}} = 203,35 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\dot{m}_{\text{ovocná šťava}} = 51,35 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$

### Príklad 1-8

Zadanie: Pri čistení bauxitu vzniká vodná suspenzia, zmes drobných tuhých častíc a vody, ktorá obsahuje  $15 \text{ hmot. \%}$  látok v tuhom skupenstve. Suspenzia sa filtruje, pričom sa na filtri vytvára filtračný koláč, v ktorom je vždy  $68 \text{ hmot. \%}$  tuhých látok. Filtrát neobsahuje tuhú fázu a denne sa za  $24 \text{ hodín}$  odfiltruje  $120 \text{ ton}$  suspenzie. Vypočítajte akumuláciu hmotnosti na filtri za hodinu  $\dot{m}_2$  a hmotnostný tok filtrátu  $\dot{m}_3$  v  $\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$ .

Výsledok:  $\dot{m}_2 = 1102,94 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\dot{m}_3 = 3897,06 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$

### Príklad 1-9

**Zadanie:** Plyn, ktorý obsahuje 20 hmot. % HCl sa vedie cez absorpčnú kolónu. V kolóne sa zachytí 98 hmot. % zo vstupujúceho množstva HCl. Ako absorbent sa používa kvapalina, ktorá obsahuje na vstupe 2 hmot. % HCl. Na výstupe nesmie obsah HCl v kvapaline prekročiť 10 hmot. %. Vypočítajte potrebný prietok absorbenta, ak do kolóny vstupuje  $250 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$  znečisteného plynu. Pri výpočte platia predpoklady z príkladu 1-4.

**Výsledok:**  $\dot{m}_{\text{absorbent}} = 551,25 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$

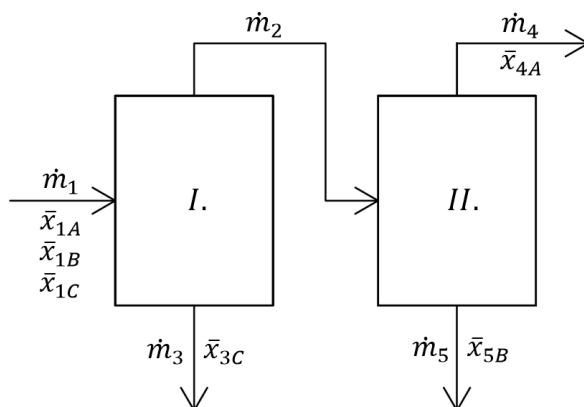
### Príklad 1-10

**Zadanie:** Na prípravu dezinfekčného roztoku do nákupných centier sa používa 95 hmot. % koncentrát účinnej zložky, v ktorom zvyšok tvorí voda. Takýto roztok je z ekonomických a hygienických hľadísk nepoužiteľný na bežné použitie, preto ho treba zriediť (vodou) tak, aby obsah účinnej zložky bol na úrovni 30 hmot. %. Aké množstvo koncentráta a vody je potrebné na prípravu dezinfekčného roztoku pre dané nákupné centrum na týždeň (centrum je otvorené každý deň), ak sa denne spotrebuje 20 kg roztoku?

**Výsledok:**  $m_{\text{koncentrát}} = 44,21 \text{ kg}$ ,  $m_{\text{voda}} = 95,79 \text{ kg}$

### Príklad 1-11

**Zadanie:** Zmes obsahujúca 15 hmot. % etánu, 36,3 hmot. % propánu a 48,7 hmot. % butánu sa bude deliť v dvoch kolónach podľa schémy na obrázku 1.7. Z dna prvej kolóny sa bude získavať čistý bután, na hlave druhej kolóny sa bude odoberať čistý etán, z dna druhej kolóny čistý propán. Koľko zmesi sa musí rozdeliť, aby sa získalo  $70 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$  čistého propánu? Aké bude zloženie prúdu odchádzajúceho z prvej kolóny do druhej?



Obr. 1.7. Schéma k príkladu 1-11

**Výsledok:**  $\dot{m}_1 = 192,84 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\bar{x}_{2A} = 0,29$ ,  $\bar{x}_{2B} = 0,71$

### Príklad 1-12

**Zadanie:** Do odparky sa privádza  $12 \text{ ton} \cdot \text{h}^{-1}$  vodného roztoku NaOH, ktorý obsahuje 62 hmot. % NaOH. Po odparení určitej časti vody zo zariadenia vystupuje  $8,5 \text{ ton} \cdot \text{h}^{-1}$  roztoku. Treba vypočítať množstvo odparenej vody a hmotnostný zlomok NaOH v odchádzajúcom roztoku.

**Výsledok:**  $\dot{m}_{\text{H}_2\text{O}} = 3,5 \text{ ton} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\bar{x}_{3A} = 0,875$

**Príklad 1-13**

Zadanie: Na výrobu dusíkatého kvapalného hnojiva sa v prvom kroku pripravuje vodný roztok, ktorý obsahuje 15 hmot. % amoniaku, nazývaného aj amoniaková voda. V zmiešavacej nádrži sa má takto pripraviť 15 m<sup>3</sup> amoniakovej vody z vodného roztoku so zvýšeným tlakom, ktorý obsahuje 70 hmot. % amoniaku. Hustota takejto amoniakovej vody je 960 kg.m<sup>-3</sup>. Vypočítajte hmotnosť roztoku a hmotnosť prúdu vody.

Výsledok:  $m_{roztok} = 3085,7 \text{ kg}$ ,  $m_{voda} = 11\,314,3 \text{ kg}$

ZOZNAM SYMBOLOV

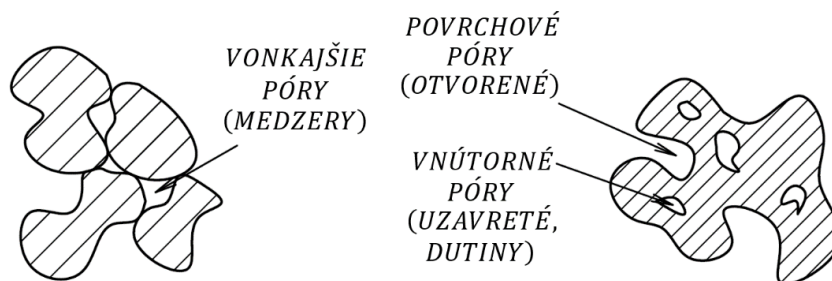
|                |                                                        |                          |
|----------------|--------------------------------------------------------|--------------------------|
| $k$            | – počet vstupných prúdov                               | (1)                      |
| $l$            | – celkový počet prúdov                                 | (1)                      |
| $m_a$          | – akumulácia hmotnosti                                 | (kg)                     |
| $m_i$          | – hmotnosť $i$ -tého vstupného prúdu                   | (kg)                     |
| $m_i$          | – celková hmotnosť prúdu $i$                           | (kg)                     |
| $\dot{m}_i$    | – celkový hmotnostný tok prúdu $i$                     | (kg. s <sup>-1</sup> )   |
| $m_{ij}$       | – hmotnosť zložky $j$ v prúde $i$                      | (kg)                     |
| $\dot{m}_{ij}$ | – hmotnostný tok zložky $j$ v prúde $i$                | (kg. s <sup>-1</sup> )   |
| $m_j$          | – hmotnosť $j$ -tého výstupného prúdu                  | (kg)                     |
| $n_i$          | – celkové látkové množstvo prúdu $i$                   | (mol)                    |
| $\dot{n}_i$    | – celkový tok látky, resp. molárny tok, prúdu $i$      | (mol. s <sup>-1</sup> )  |
| $n_{ij}$       | – látkové množstvo zložky $j$ v prúde $i$              | (mol)                    |
| $\dot{n}_{ij}$ | – tok látky, resp. molárny tok, zložky $j$ v prúde $i$ | (mol. s <sup>-1</sup> )  |
| $x_{ij}$       | – molárny zlomok zložky $j$ v prúde $i$                | (1)                      |
| $\bar{x}_{ij}$ | – hmotnostný zlomok zložky $j$ v prúde $i$             | (1)                      |
| $C^V$          | – relatívny objemový zlomok                            | (1)                      |
| $M_i$          | – molárna hmotnosť zložky $i$                          | (kg. mol <sup>-1</sup> ) |
| $X$            | – relatívny molárny zlomok                             | (1)                      |
| $\bar{X}$      | – relatívny hmotnostný zlomok                          | (1)                      |

## 2 MECHANICKÉ PROCESY

### DEFINÍCIA PARTIKULÁRNEJ LÁTKY

Partikulárna látka je definovaná ako viacfázový systém pozostávajúci z tuhých, vzájomne sa dotýkajúcich častíc, z kvapalnej fázy a (alebo) plynnej fázy, pričom kvapalná prípadne plyná fáza zaplňa medzery medzi tuhými časticami. Taktiež platí, že o partikulárnej látke má význam hovoriť len vtedy, ak objem najväčších častíc vyskytujúcich sa v látke je zanedbateľný oproti celkovému objemu látky.

Priestory medzi tuhými časticami sú označované ako medzery alebo vonkajšie póry. Okrem vonkajších pórov existujú aj póry v samotných časticach tvoriacich partikulárnu látku. Jednotlivé častice môžu obsahovať póry v objeme častice, nazývané tiež uzavreté póry (alebo dutiny) a póry nachádzajúce sa na povrchu častice, tzv. povrchové (alebo otvorené) póry (obrázok 2.1). Otvorené póry zväčšujú povrch partikulárnej látky, zatiaľ čo uzavreté póry vplyvajú na niektoré fyzikálne vlastnosti, ako je pevnosť častíc, hustota, vodivosť a pod.



Obr. 2.1. Póry v partikulárnej látke a v tuhej častici

Vzájomný dotyk tuhých častíc partikulárnej látky obmedzuje voľnosť ich pohybu, a tak zapríčiňuje špecifické správanie sa partikulárnych látok práve počas pohybu. Mechanické správanie sa partikulárnych látok je odrazom ich štruktúry a je dané charakterom pohybovej autonómie tuhých častíc.

### KONCENTRÁCIE JEDNOTLIVÝCH FÁZ

Keďže je partikulárna látka dvojfázový, resp. trojfázový systém, je vhodné poznať zastúpenie jednotlivých fáz. Toto zastúpenie sa zvykne udávať vo forme absolútneho hmotnostného zlomku a označuje sa symbolom  $k$ :

- pre tuhú fázu  $k_1$

$$k_1 = \frac{m_1}{m} \quad (2.1)$$

- pre kvapalnú fázu  $k_2$

$$k_2 = \frac{m_2}{m} \quad (2.2)$$

- pre plynú fázu  $k_3$ :

$$k_3 = \frac{m_3}{m} \quad (2.3)$$



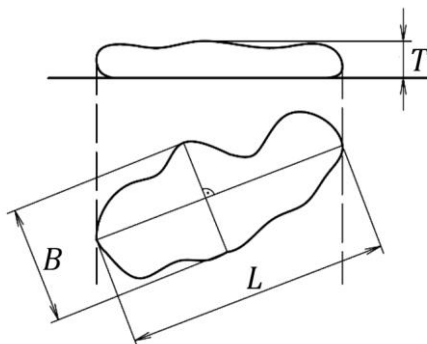
kde

|       |   |                                            |      |
|-------|---|--------------------------------------------|------|
| $k_1$ | – | absolútny hmotnostný zlomok tuhej fázy     | (1)  |
| $k_2$ | – | absolútny hmotnostný zlomok kvapalnej fázy | (1)  |
| $k_3$ | – | absolútny hmotnostný zlomok plynnej fázy   | (1)  |
| $m_1$ | – | hmotnosť tuhej fázy                        | (kg) |
| $m_2$ | – | hmotnosť kvapalnej fázy                    | (kg) |
| $m_3$ | – | hmotnosť plynnej fázy                      | (kg) |
| $m$   | – | celková hmotnosť partikulárnej látky       | (kg) |

### VEĽKOSŤ A TVAR TUHÝCH ČASTÍC

To, ako sa bude partikulárna látka správať, závisí predovšetkým od jej štruktúry. Geometria tuhých častíc je daná ich tvarom, veľkosťou a povrchom. Častice môžu byť rôznej veľkosti od submikroskopických až po makroskopické. Taktiež ich tvar môže byť rôznorodý. Tuhé častice môžu mať pravidelný geometrický tvar, avšak vo väčšine prípadov sú nepravidelného tvaru. Medzi bežné tvary tuhých častíc patria guľôčky, vlákna, šupinky, doštičky a iné.

Predpokladá sa, že častica nepravidelného tvaru v dôsledku pôsobenia gravitačnej sily dopadne na vodorovnú podložku, pričom s najväčšou pravdepodobnosťou sa častica uloží tak, že jej najmenší rozmer bude kolmý na túto rovinu. Vtedy sa hovorí, že častica je v polohe najväčšej stability. Práve v tejto polohe je možné určiť základné rozmery častice: výšku  $T$ , šírku  $B$  a dĺžku  $L$ . Tieto rozmery sú na seba kolmé tak, ako je to uvedené na príklade na obrázku 2.2.



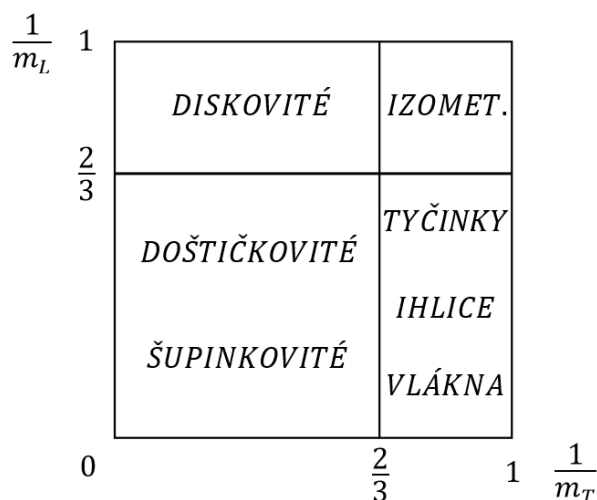
Obr. 2.2. Základné rozmery tuhej častice

Pomocou týchto rozmerov je možné definovať tvarové faktory podlhovastosť  $m_L$  a plochosť  $m_T$  podľa nasledujúcich vzťahov:

$$m_L = \frac{L}{B} \quad (2.4)$$

$$m_T = \frac{B}{T} \quad (2.5)$$

Následne je možné časticu klasifikovať pomocou obrátených hodnôt týchto veličín, ako je uvedené na obrázku 2.3.



Obr. 2.3. Klasifikácia tvarov častíc

Pri práci s partikulárnymi látkami je snaha zjednodušiť opis častice použitím len jedného rozmeru. Preto bol zavedený ekvivalentný priemer častice vyjadrujúci priemer fiktívnej gule, ktorá má s reálnou časticou spoločnú niektorú vlastnosť.

Takouto vlastnosťou môže byť napríklad priemet, pričom ekvivalentný priemer podľa priemetu bude vyjadrený ako:

$$d_{eS} = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} \quad (2.6)$$

kde

$$\begin{array}{ll} d_{eS} & - \text{ekvivalentný priemer podľa priemetu} & (\text{m}) \\ S & - \text{priemet častice} & (\text{m}^2) \end{array}$$

Ak bude spoločnou vlastnosťou reálnej častice a fiktívnej gule objem, tak ekvivalentný priemer podľa objemu sa vypočíta podľa vzťahu:

$$d_{eV} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} \quad (2.7)$$

kde

$$\begin{array}{ll} d_{eV} & - \text{ekvivalentný priemer podľa objemu} & (\text{m}) \\ V & - \text{objem častice} & (\text{m}^3) \end{array}$$

Ďalšou spoločnou vlastnosťou môže byť povrch. Ekvivalentný priemer podľa povrchu je vyjadrený ako:

$$d_{eA} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (2.8)$$

kde

|          |                                      |                   |
|----------|--------------------------------------|-------------------|
| $d_{eA}$ | – ekvivalentný priemer podľa povrchu | (m)               |
| $A$      | – povrch častice                     | (m <sup>2</sup> ) |

V oblastiach zaoberajúcich sa sedimentáciou častíc je dôležité poznať usadzovaciu rýchlosť, preto sa používa ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti vyjadrený vzťahom:

$$d_{eu} = \sqrt{\frac{18 \mu_l u_s}{(\rho_s - \rho_l) g}} \quad (2.9)$$

kde

|          |                                                    |                        |
|----------|----------------------------------------------------|------------------------|
| $d_{eu}$ | – ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti | (m)                    |
| $u_s$    | – usadzovacia rýchlosť častice                     | (m. s <sup>-1</sup> )  |
| $\mu_l$  | – dynamická viskozita kvapaliny                    | (Pa. s)                |
| $\rho_l$ | – hustota kvapaliny                                | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $\rho_s$ | – hustota častice                                  | (kg. m <sup>-3</sup> ) |

Vyššie uvedený vzťah je možné použiť len v prípade usadzovania guľovej častice v oblasti platnosti Stokesovho zákona, teda pri laminárnom obtekaní guľôčky pri hodnotách Reynoldsovho čísla  $Re \leq 0,2$ .

### HUSTOTA A OBJEMOVÁ HMOTNOSŤ

Pri práci s partikulárnymi látkami treba rozlišovať pojmy hustota a objemová hmotnosť. Hustota partikulárnej látky, resp. častice,  $\rho_1$  je definovaná ako pomer hmotnosti tuhej fázy k jej objemu pre neporéznu časticu.

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} \quad (2.10)$$

kde

|          |                                              |                        |
|----------|----------------------------------------------|------------------------|
| $\rho_1$ | – hustota partikulárnej látky, resp. častice | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $m_1$    | – hmotnosť tuhej fázy                        | (kg)                   |
| $V_1$    | – objem tuhej fázy                           | (m <sup>3</sup> )      |

Objemová hmotnosť partikulárnej látky  $\rho'$  je definovaná ako pomer celkovej hmotnosti látky k celkovému objemu, vrátane pórov medzi časticami a prípadne aj v časticiach.

$$\rho' = \frac{m}{V_c} \quad (2.11)$$

kde

|         |                                         |                        |
|---------|-----------------------------------------|------------------------|
| $\rho'$ | – objemová hmotnosť partikulárnej látky | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $V_c$   | – celkový objem                         | (m <sup>3</sup> )      |

Vzhľadom na stav partikulárnej látky sa rozlišujú rôzne druhy objemovej hmotnosti, a to sypná objemová hmotnosť, ktorá sa meria v okamihu po nasypaní partikulárnej látky do nádoby, striasaná objemová hmotnosť, ktorá sa určuje po jej dynamickom namáhaní a skladová objemová hmotnosť, ktorá predstavuje ustálenú objemovú hmotnosť látky počas skladovania.

### MEDZEROVITOSŤ A PÓROVITOSŤ

Keďže prítomnosť pórov v partikulárnej látke významne ovplyvňuje jej vlastnosti, je potrebné túto skutočnosť číselne vyjadriť. Veličiny opisujúce zastúpenie medzier a pórov v systéme sa nazývajú medzerovitosť a pórovitosť. Všeobecne ich možno definovať ako objem priestoru partikulárnej látky, ktorý nevyplňa tuhá fáza, k jej celkovému objemu. Rozdiel medzi jednotlivými pojmami je znázornený na obrázku 2.1.

Medzerovitosť označuje pomer objemu, ktorý tvoria medzery medzi časticami k celkovému objemu partikulárnej látky:

$$\varepsilon_m = \frac{V_m}{V_c} \quad (2.12)$$

kde

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_m & - \text{ medzerovitosť } (1) \\ V_m & - \text{ objem medzier } (m^3) \end{array}$$

Pórovitosť možno následne rozdeliť na skutočnú a zdanlivú. Skutočná pórovitosť vyjadruje pomer objemu všetkých medzier a pórov obsiahnutých v partikulárnej látke (vonkajších aj vnútorných) k jej celkovému objemu podľa vzťahu:

$$\varepsilon = \frac{V_m + V_o + V_u}{V_c} = \frac{V_c - V_1}{V_c} \quad (2.13)$$

kde

$$\begin{array}{ll} \varepsilon & - \text{ pórovitosť } (1) \\ V_o & - \text{ objem otvorených pórov } (m^3) \\ V_u & - \text{ objem uzavretých pórov } (m^3) \end{array}$$

Pri zdanlivej pórovitosti sa neberú do úvahy uzavreté póry, ale iba medzery a otvorené póry, teda tie, ku ktorým má prístup kvapalina. Vypočíta sa podľa nasledujúceho vzťahu:

$$\varepsilon_z = \frac{V_m + V_o}{V_c} \quad (2.14)$$

kde

$$\varepsilon_z \quad - \quad \text{zdanlivá pórovitosť} \quad (1)$$

Iný spôsob vyjadrenia pórovitosti partikulárnej látky je pomocou čísla pórovitosti, ktoré je definované podľa vzťahu:

$$e = \frac{V_m}{V_c - V_m} = \frac{\varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m} \quad (2.15)$$

kde

$$e \quad - \quad \text{číslo pórovitosti} \quad (1)$$

Medzerovitosť a pórovitosť partikulárnych látok závisia predovšetkým od priestorového usporiadania jednotlivých tuhých častíc a od ich geometrických a fyzikálnych vlastností. Medzerovitosť a pórovitosť môžu byť taktiež ovplyvnené dynamickým namáhaním látky alebo jej stlačením.

### VLHKOSŤ A STUPEŇ NASÝTENIA PÓROV

To, či medzery a póry partikulárnej látky vyplňa kvapalina alebo plyn, výrazne ovplyvňuje jej vlastnosti. Ak je v nej prítomná kvapalina, táto partikulárna látka sa nazýva vlhká, resp. mokrá. To, aké veľké zastúpenie v partikulárnej látke má kvapalina, udáva veličina nazývaná vlhkosť partikulárnej látky, pričom sa rozlišuje absolútna a relatívna vlhkosť.

Absolútna vlhkosť je definovaná ako pomer hmotnosti kvapaliny k celkovej hmotnosti partikulárnej látky podľa vzťahu:

$$w = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.16)$$

kde

$$w \quad - \quad \text{absolútna vlhkosť} \quad (1)$$

V menovateli by mala vystupovať aj hmotnosť plynnej fázy, ale tá je v porovnaní s tuhou a kvapalnou fázou taká malá, že sa zvykne zanedbávať.

Relatívna vlhkosť udáva pomer hmotnosti kvapalnej fázy k hmotnosti tuhých častíc v partikulárnej látke:

$$W = \frac{m_2}{m_1} \quad (2.17)$$

kde

$$W \quad - \quad \text{relatívna vlhkosť} \quad (1)$$

Úroveň zaplnenia pórov partikulárnej látky kvapalinou udáva veličina nazývaná stupeň nasýtenia partikulárnej látky, pričom sa rozlišuje celkový a zdanlivý stupeň nasýtenia.

Celkový stupeň nasýtenia je definovaný ako pomer objemu kvapaliny obsiahnutej v partikulárnej látke k objemu medzier a pórov, ku ktorým má kvapalina prístup:

$$S_c = \frac{V_2}{V_m + V_o} \quad (2.18)$$

kde

$$\begin{array}{ll} S_c & - \text{ stupeň nasýtenia pórov } (1) \\ V_2 & - \text{ objem kvapalnej fázy } (m^3) \end{array}$$

Zdanlivý stupeň nasýtenia dáva do pomeru len objem kvapaliny v partikulárnej látke a objem vonkajších pórov:

$$S_z = \frac{V_2}{V_m} \quad (2.19)$$

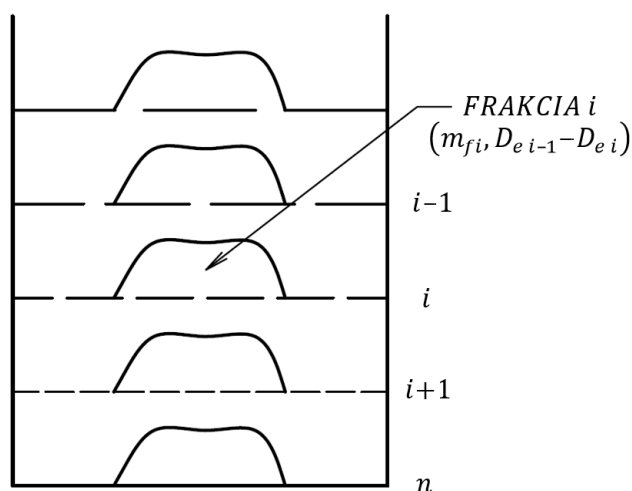
kde

$S_z$  – zdanlivý stupeň nasýtenia pórov (1)

### FRAKČNÉ ZLOŽENIE PARTIKULÁRNEJ LÁTKY

Frakčné zloženie partikulárnej látky udáva percentuálne zastúpenie častíc určitej veľkosti v danom objeme skúmanej látky.

Jeden zo základných spôsobov určenia frakčného zloženia je pomocou sitovej analýzy (obrázok 2.4). Tá je založená na princípe rozdelenia skúmanej vzorky partikulárnej látky na sitách rôznej veľkosti. Takto testovaná látka sa rozdelí na viaceré frakcie s určitou hmotnosťou  $m_{fi}$  a rozsahom veľkosti častíc. Každá frakcia je potom v prípade potreby charakterizovaná pomocou štatistických metód výskytom tvarov častíc alebo výskytom tvarových súčiniteľov.



Obr. 2.4. Schematické zobrazenie sitovej analýzy

Keďže každá vytriedená frakcia obsahuje častice s ekvivalentnými priermi danými veľkosťou oka sita nad a pod vybranou frakciou, je vhodné vyjadriť veľkosť frakcie pomocou jedného čísla. Preto sa zaviedol frakčný priemer vyjadrený rovnicou:

$$D_{fi} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (2.20)$$

kde

$D_{fi}$  – frakčný priemer častíc (m)

$x_i$  – veľkosť oka  $i$ -tého sita (m)

Takto vyjadrený frakčný priemer je aritmetický priemer veľkosti častíc frakcie. V prípade veľkého rozdielu veľkosti ôk sit nad sebou (platí rovnica (2.22)), je potrebné frakčný priemer častíc počítať ako geometrický priemer podľa rovnice:

$$D_{fi} = \sqrt{x_{i-1} x_i} \quad (2.21)$$

ktorá platí ak:

$$\frac{x_{i-1}}{x_i} > 2 \quad (2.22)$$

Ďalej sa zavádzajú pojmy zvyšok a prepád, pričom tieto sa ďalej rozdeľujú na relatívny a úhrnný. Relatívny zvyšok  $r_i$  je definovaný podľa vzťahu:

$$r_i = \frac{m_{fi}}{m} \quad (2.23)$$

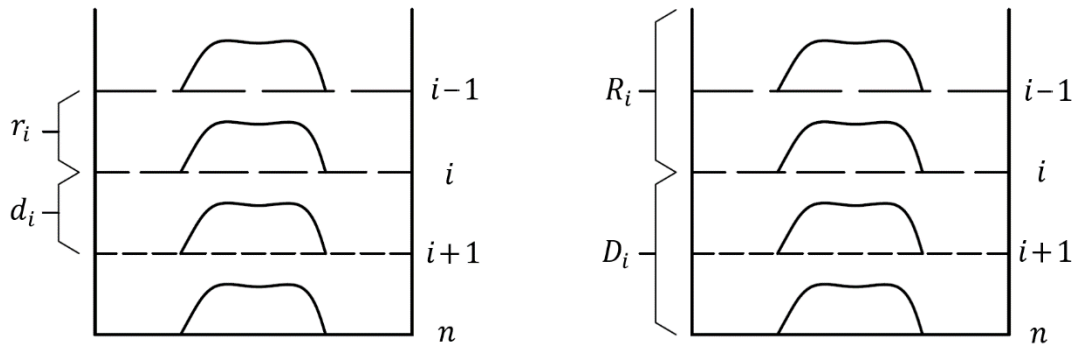
Čiže relatívny zvyšok reprezentuje frakciu, ktorá zostane na site  $i$ . Naopak frakcia, ktorá prepadne cez sito  $i$  je charakterizovaná ako relatívny prepád  $d_i$ :

$$d_i = \frac{m_{f(i+1)}}{m} \quad (2.24)$$

Úhrnný zvyšok  $R_i$  a úhrnný prepád  $D_i$  vyjadrujú pomer hmotností všetkého materiálu, ktorý ostane nad/pod sitom  $i$  k celkovej hmotnosti  $m$ :

$$R_i = \sum_{j=1}^i r_j = \frac{\sum_{j=1}^i m_{fj}}{m} \quad (2.25)$$

$$D_i = \sum_{j=i+1}^n d_j = \frac{\sum_{j=i+1}^n m_{fj}}{m} \quad (2.26)$$

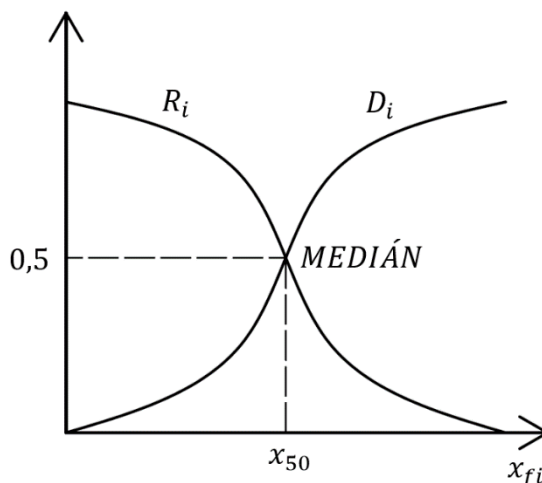


Obr. 2.5. Schematické znázornenie veličín zvyšok a prepád

Pri úhrnnom prepade a úhrnnom zvyšku platí, že súčet týchto veličín pri každom site sa musí rovnať jednej:

$$R_i + D_i = 1 \quad (2.27)$$

Grafické znázornenie týchto veličín sa nazýva krivka úhrnného prepadu, resp. krivka úhrnného zvyšku (obrázok 2.6).



Obr. 2.6. Krivky úhrnného prepadu a úhrnného zvyšku

Miesto pretnutia týchto kriviek býva označované ako medián, pričom tento rozdeľuje pôvodnú partikulárnu látku na dve partikulárne látky s rovnakou hmotnosťou.

## RIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 2-1 Určenie koncentrácií fáz partikulárnej látky

**Zadanie:** Partikulárna látka *A*, ktorá obsahuje 92 hmot. % tuhej fázy, 6 hmot. % kvapaliny a zvyšok vzduchu, sa zmieša s partikulárnou látkou *B* so zastúpením 76 hmot. % tuhej fázy, 18 hmot. % kvapaliny a zvyšok je vzduch. Určte koncentrácie jednotlivých fáz partikulárnej látky, ktorá vznikne ich zmiešaním, pričom pomer celkovej hmotnosti partikulárnej látky *A* k celkovej hmotnosti partikulárnej látky *B* je 3 : 1.

**Postup:** Zadané hmotnostné percentá predstavujú hmotnostné koncentrácie jednotlivých fáz v každej partikulárnej látke, ktoré sa môžu vyjadriť ako absolútne hmotnostné zlomky podľa vzťahov (2.1) až (2.3).

Pre látku *A* platí:

$$k_{1A} = \frac{m_{1A}}{m_A} \quad (2.28)$$

$$k_{2A} = \frac{m_{2A}}{m_A} \quad (2.29)$$

$$k_{3A} = \frac{m_{3A}}{m_A} \quad (2.30)$$

Pre látku *B* platí:

$$k_{1B} = \frac{m_{1B}}{m_B} \quad (2.31)$$



$$k_{2B} = \frac{m_{2B}}{m_B} \quad (2.32)$$

$$k_{3B} = \frac{m_{3B}}{m_B} \quad (2.33)$$

Pre látku  $C$  (zmes  $A + B$ ):

$$k_{1C} = \frac{m_{1C}}{m_C} \quad (2.34)$$

$$k_{2C} = \frac{m_{2C}}{m_C} \quad (2.35)$$

$$k_{3C} = \frac{m_{3C}}{m_C} \quad (2.36)$$

Keďže je látka  $C$  vytvorená zmiešaním látok  $A$  a  $B$ , platia vzťahy:

$$m_{1A} + m_{1B} = m_{1C} \quad (2.37)$$

$$m_{2A} + m_{2B} = m_{2C} \quad (2.38)$$

$$m_{3A} + m_{3B} = m_{3C} \quad (2.39)$$

$$m_A + m_B = m_C \quad (2.40)$$

Zo zadania je zrejmé, že pomer celkových hmotností látok  $A$  a  $B$  je  $3 : 1$ . Tento pomer sa označí symbolom  $a$  a vyjadrí sa pomocou rovnice:

$$a = \frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{1} = 3 \quad (2.41)$$

kde

$a$  – hmotnostný pomer (1)

Následne sa vyjadrí  $k_{1C}$  z rovnice (2.34) pomocou vzťahov (2.37) a (2.40) nasledovne:

$$k_{1C} = \frac{m_{1C}}{m_C} = \frac{m_{1A} + m_{1B}}{m_A + m_B} \quad (2.42)$$

Ďalej sa predošlá rovnica upraví tak, že sa celý výraz podelí hmotnosťou  $m_B$ :

$$k_{1C} = \frac{\frac{m_{1A}}{m_B} + \frac{m_{1B}}{m_B}}{\frac{m_A}{m_B} + \frac{m_B}{m_B}} \quad (2.43)$$

Prvý člen súčtu v čitateli  $m_{1A}/m_B$  sa upraví tak, že sa vynásobí jednotkovým zlomkom  $m_A/m_A$  čím sa dostane vzťah:

$$k_{1C} = \frac{\frac{m_{1A}}{m_A} \frac{m_A}{m_B} + \frac{m_{1B}}{m_B}}{\frac{m_A}{m_B} + \frac{m_B}{m_B}} \quad (2.44)$$

Nakoniec sa tento vzťah upraví pomocou vzťahov pre  $k_{1A}$ ,  $k_{1B}$  a  $a$  nasledovne:

$$k_{1C} = \frac{k_{1A} a + k_{1B}}{a + 1} \quad (2.45)$$

Analogicky sa získajú aj koncentrácie zvyšných fáz látky C:

$$k_{2C} = \frac{k_{2A} a + k_{2B}}{a + 1} \quad (2.46)$$

$$k_{3C} = \frac{k_{3A} a + k_{3B}}{a + 1} \quad (2.47)$$

Výpočet: Do rovníc (2.45), (2.46) a (2.47) sa dosadia zadané hodnoty, čím sa dostanú hľadané koncentrácie:

$$k_{1C} = \frac{0,92 \cdot 3 + 0,76}{3 + 1} = 0,88$$

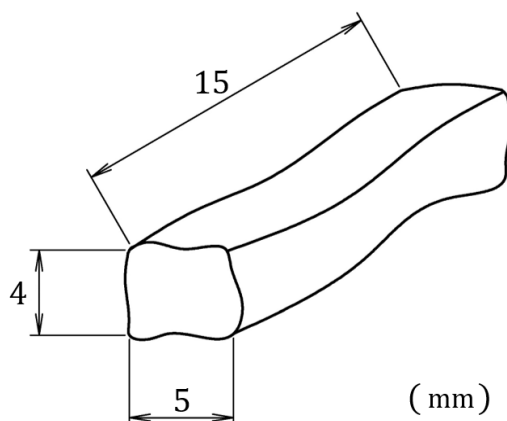
$$k_{2C} = \frac{0,06 \cdot 3 + 0,18}{3 + 1} = 0,09$$

$$k_{3C} = \frac{0,02 \cdot 3 + 0,06}{3 + 1} = 0,03$$

Výsledok: Zmiešaním látok A a B sa získa partikulárna látka, ktorá obsahuje 88 hmot. % tuhej fázy, 9 hmot. % kvapaliny a 3 hmot. % plynu.

### **Príklad 2-2** Klasifikácia tvaru častíc

Zadanie: Klasifikujte tvar častice, ktorá je zobrazená na obrázku 2.7.



Obr. 2.7 Častica s nameranými rozmermi jednotlivých strán

Výpočet: Bude sa predpokladať, že častica je v polohe najväčšej stability. Takto uloženú časticu je možné určiť rozmery podľa obrázka 2.2.

$$T = 4 \text{ mm}$$

$$L = 15 \text{ mm}$$

$$B = 5 \text{ mm}$$

Následne je možné podľa vzťahov (2.4) a (2.5) vypočítať hodnoty podlhovastosti a plochosti a ich obrátené hodnoty:

$$m_L = \frac{L}{B} = \frac{15}{5} = 3 \rightarrow \frac{1}{m_L} = 0,33$$

$$m_T = \frac{B}{T} = \frac{5}{4} = 1,25 \rightarrow \frac{1}{m_T} = 0,8$$

Nakoniec pomocou týchto hodnôt a obrázka 2.3 je možné časticu klasifikovať.

Výsledok: Zadanú časticu je možné klasifikovať ako ihlicovitú.

### **Príklad 2-3** Výpočet ekvivalentného priemeru podľa usadzovacej rýchlosti

Zadanie: Aký najväčší ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti je možné ešte zistiť pomocou sedimentačnej analýzy v prípade usadzovania tuhej častice s hustotou  $2200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  vo vode s teplotou  $20^\circ\text{C}$ ?

Postup: Ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti je možné vypočítať podľa vzťahu (2.9). V predchádzajúcom vzorci sú neznáme rýchlosť usadzovania a vlastnosti sedimentačného prostredia, v tomto prípade  $20^\circ\text{C}$  teplej vody.

Hustota a dynamická viskozita vody pri danej teplote sa určí z tabuliek:  $\rho_l = 998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu_l = 1,005 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ .

Rýchlosť je možné určiť pomocou Reynoldsovho čísla. V kapitole *Veľkosť a tvar tuhých častíc* je pri ekvivalentnom priemere podľa usadzovacej rýchlosti napísané, že daný vzorec má platnosť iba v oblasti platnosti Stokesovho zákona, a teda je obmedzený veľkosťou

Reynoldsovo čísla. Hraničná veľkosť Reynoldsovo čísla je v tomto prípade 0,2, čo je zároveň najvyššia možná hodnota, pri ktorej je možné ešte vykonať sedimentačnú analýzu.

$$Re = \frac{u_s d_{eu} \rho_l}{\mu_l} \leq 0,2 \quad (2.48)$$

Vyjadrením rýchlosti z predchádzajúceho vzťahu sa dostane vzťah:

$$u_s = \frac{Re \mu_l}{d_{eu} \rho_l} \quad (2.49)$$

Dosadením vzťahu (2.49) do rovnice pre ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti sa dostane rovnica:

$$d_{eu} = \sqrt{\frac{18 \mu_l \frac{Re \mu_l}{d_{eu} \rho_l}}{(\rho_s - \rho_l) g}} \quad (2.50)$$

Následnou úpravou sa vyjadri vzťah:

$$d_{eu} = \sqrt[3]{\frac{18 \mu_l^2 Re}{(\rho_s - \rho_l) \rho_l g}} \quad (2.51)$$

**Výpočet:** Po dosadení zadaných hodnôt sa vypočíta ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti:

$$d_{eu} = \sqrt[3]{\frac{18 (1,005 \cdot 10^{-3})^2 0,2}{(2200 - 998,2) 998,2 \cdot 9,81}} = 6,76 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

**Výsledok:** Najväčší ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti, ktorý sa môže ešte skúmať pomocou sedimentačnej analýzy, je  $6,76 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ .

#### **Príklad 2-4** Dovlhčenie partikulárnej látky

**Zadanie:** Suchú partikulárnu látku s objemovou hmotnosťou  $1750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  je potrebné dovlhčiť tak, aby jej relatívna vlhkosť bola 0,2. Aká bude objemová hmotnosť vlhkej partikulárnej látky za predpokladu, že dovlhčením sa celkový objem partikulárnej látky nezmení?

**Postup:** Keďže v zadaní vystupujú veličiny objemová hmotnosť a relatívna vlhkosť, bude sa vychádzať zo vzťahov (2.11) a (2.17). V prípade suchej partikulárnej látky (ak sa zanedbá hmotnosť plynu) sa objemová hmotnosť vyjadri ako:

$$\rho'_s = \frac{m_1}{V_c} \quad (2.52)$$

V prípade vlhkej partikulárnej látky je objemová hmotnosť vyjadrená nasledovne:

$$\rho'_v = \frac{m_1 + m_2}{V_c} \quad (2.53)$$

Menovateľ predchádzajúcej rovnice sa upraví tak, že celkový objem  $V_c$  sa vyjadrí z rovnice (2.52) a získa sa vzťah:

$$\rho'_v = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\rho'_s}} \quad (2.54)$$

Následne sa celý vzťah upraví tak, že čitateľ aj menovateľ sa podelí hmotnosťou  $m_1$ , čím sa dostane:

$$\rho'_v = \frac{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}}{\frac{1}{\rho'_s}} \quad (2.55)$$

Nakoniec sa rovnica upraví, čím sa dostane výsledný vzťah pre výpočet objemovej hmotnosti vlhkej partikulárnej látky:

$$\rho'_v = \frac{1 + W}{\frac{1}{\rho'_s}} \quad (2.56)$$

Výpočet: Samotný výpočet príkladu s použitím hodnôt zo zadania bude predstavovať:

$$\rho'_v = \frac{1 + W}{\frac{1}{\rho'_s}} = \frac{1 + 0,2}{\frac{1}{1750}} = 2100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Výsledok: Objemová hmotnosť partikulárnej látky po jej dovlhčení bude  $2100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### **Príklad 2-5** Pórovitosť partikulárnej látky

Zadanie: Partikulárna látka pozostávajúca z nepórovitých tuhých častíc s hustotou  $1900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  má relatívnu vlhkosť 0,3 a zdanlivú pórovitosť 0,5. Na akú pórovitosť je potrebné partikulárnu látku stlačiť, aby bol stupeň nasýtenia rovný jednej? Predpokladajte, že vlhkosť v látke predstavuje voda s hustotou  $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Postup: Vychádzať sa bude zo vzťahu pre zdanlivú pórovitosť (2.14). Zo zadania vyplýva, že častice tvoriace partikulárnu látku sú nepórovité, čo znamená, že jediné póry v partikulárnej látke sú medzery medzi jednotlivými časticami. Z toho vyplýva, že zdanlivá pórovitosť môže byť vyjadrená ako:

$$\varepsilon_z = \frac{V_m}{V_c} \quad (2.57)$$

Stupeň nasýtenia je vyjadrený vzťahom (2.18), pričom je ho taktiež potrebné upraviť pre prípad nepórovitých tuhých častíc nasledovne:

$$S_c = \frac{V_2}{V_m} \quad (2.58)$$

Z predošlého vzťahu vyplýva, že ak sa má stupeň nasýtenia rovnať jednej, tak objem medzier medzi časticami sa musí rovnať objemu kvapaliny. V takom prípade môže byť vzťah (2.57) upravený na:

$$\varepsilon_z = \frac{V_2}{V_c} = \frac{V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\frac{m_2}{\rho_2}}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}} \quad (2.59)$$

Ďalej je možné tento vzťah upraviť tak, že čitateľ aj menovateľ sa podelia hmotnosťou tuhých častíc  $m_1$  a upraví pomocou výrazu pre relatívnu vlhkosť (2.17), čím sa dostane:

$$\varepsilon_z = \frac{\frac{m_2}{m_1 \rho_2}}{\frac{m_1}{m_1 \rho_1} + \frac{m_2}{m_1 \rho_2}} = \frac{\frac{W}{\rho_2}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{W}{\rho_2}} \quad (2.60)$$

Výpočet: Po dosadení zadaných hodnôt do vzťahu (2.60) sa vyjadří výsledná hodnota zdanlivej pórovitosti:

$$\varepsilon_z = \frac{\frac{W}{\rho_2}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{W}{\rho_2}} = \frac{\frac{0,3}{1000}}{\frac{1}{1900} + \frac{0,3}{1000}} = 0,363$$

Výsledok: Aby sa dosiahol stupeň nasýtenia, ktorý sa rovná jednej, je potrebné danú partikulárnu látku stlačiť na pórovitosť 0,363.

### **Príklad 2-6** Sitová analýza partikulárnej látky

Zadanie: Vzorka polydisperznej partikulárnej látky s hmotnosťou 100 g bola podrobená sitovej analýze. Hmotnosti jednotlivých frakcií  $m_{fi}$  zachytené na konkrétnych sitách  $x_i$  sú uvedené v tabuľke 2.1. Vypočítajte frakčný priemer, relatívny zvyšok, relatívny prepád, úhrnný zvyšok, úhrnný prepád a zostrojte krivky úhrnného prepádu a úhrnného zvyšku.

Tabuľka 2.1. Zadanie príkladu 2-6

|                 |    |    |    |    |    |    |   |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|---|
| $x_i$<br>(mm)   | 12 | 10 | 8  | 5  | 3  | 1  | 0 |
| $m_{fi}$<br>(g) | 0  | 10 | 20 | 30 | 20 | 15 | 5 |

Postup: Vyhodnocovanie dát získaných zo sitovej analýzy je popísané v teoretickej časti tejto kapitoly. Pre prehľadnosť je vhodné si zostrojiť tabuľku 2.2, do ktorej sa budú zapisovať výsledky vyhodnocovania. Tabuľka môže vyzeráť nasledovne:

Tabuľka 2.2. Tabuľka pre zapisovanie vypočítaných údajov

| Číslo<br>sita | $x_i$<br>(mm) | $m_{fi}$<br>(g) | $D_{fi}$<br>(mm) | $r_i$<br>(1) | $d_i$<br>(1) | $R_i$<br>(1) | $D_i$<br>(1) | $R_i + D_i$<br>(1) |
|---------------|---------------|-----------------|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|
| 1.            | 12            | 0               |                  |              |              |              |              |                    |
| 2.            | 10            | 10              |                  |              |              |              |              |                    |
| 3.            | 8             | 20              |                  |              |              |              |              |                    |
| 4.            | 5             | 30              |                  |              |              |              |              |                    |
| 5.            | 3             | 20              |                  |              |              |              |              |                    |
| 6.            | 1             | 15              |                  |              |              |              |              |                    |
| 7.            | 0             | 5               |                  |              |              |              |              |                    |
| $\Sigma$      | -             | 100             |                  |              |              |              |              |                    |

Prvý stĺpec označuje číslo sita, druhý a tretí stĺpec obsahuje veličiny zistené zo sitovej analýzy a zvyšné stĺpce sú určené pre vypočítané veličiny. Pri každej veličine bude vzorovo vypočítaná hodnota pre štvrté sito a výsledky pre ostatné sitá budú uvedené v tabuľke 2.3.

Ako prvé je potrebné vypočítať frakčný priemer pre jednotlivé sitá. Tu si treba dať pozor na podmienku danú vzťahom (2.22). Z nej vyplýva, že až na šieste sito budú všetky frakčné priemery počítané ako aritmetické. Pre aritmetický frakčný priemer platí vzťah (2.20). Keďže je pri šiestom site splnená podmienka daná vzťahom (2.22), frakčný priemer tohto sita bude počítaný ako geometrický frakčný priemer podľa vzťahu (2.21).

Výpočet: Aritmetický frakčný priemer pre štvrté sito je:

$$D_{fi} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \rightarrow D_{f4} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{8 + 5}{2} = 6,5 \text{ mm}$$

Keďže je pri šiestom site splnená podmienka daná vzťahom (2.22), frakčný priemer tohto sita bude počítaný ako geometrický frakčný priemer podľa:

$$D_{fi} = \sqrt{x_{i-1} x_i} \rightarrow D_{f6} = \sqrt{x_5 x_6} = \sqrt{3 \cdot 1} = 1,73 \text{ mm}$$

Ako ďalší môže byť vypočítaný relatívny zvyšok a relatívny prepád podľa vzťahov (2.23) a (2.24). Pre štvrté sito potom platí:

$$r_4 = \frac{m_{f4}}{m} = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$d_4 = \frac{m_{f5}}{m} = \frac{20}{100} = 0,2$$

Nakoniec sa vypočíta úhrnný zvyšok a úhrnný prepád podľa vzťahov (2.25) a (2.26). Pre štvrté sito sa vypočíta:

$$R_4 = \frac{m_{f1} + m_{f2} + m_{f3} + m_{f4}}{m} = \frac{0 + 10 + 20 + 30}{100} = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$D_4 = \frac{m_{f5} + m_{f6} + m_{f7}}{m} = \frac{20 + 15 + 5}{100} = \frac{40}{100} = 0,4$$

Posledný stĺpec tabuľky slúži na kontrolu. Keďže musí byť zachovaná platnosť vzťahu (2.27), je možné si overiť, či v priebehu výpočtov niekde nenastala chyba:

$$R_4 + D_4 = 0,6 + 0,4 = 1$$

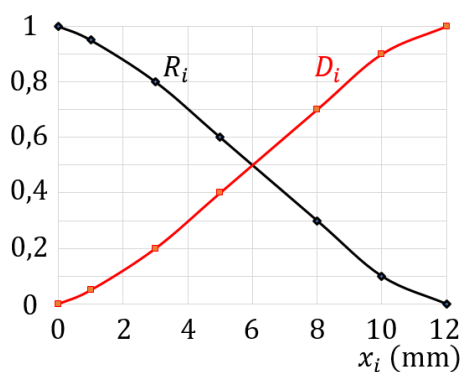
Taktiež súčet jednotlivých relatívnych zvyškov a relatívnych prepádov sa musí rovnať jednej.

Výsledok:

Tabuľka 2.3. Tabuľka vypočítaných údajov príkladu 2-6

| Číslo<br>sita | $x_i$<br>(mm) | $m_{fi}$<br>(g) | $D_{fi}$<br>(mm) | $r_i$<br>(1) | $d_i$<br>(1) | $R_i$<br>(1) | $D_i$<br>(1) | $R_i + D_i$<br>(1) |
|---------------|---------------|-----------------|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|
| 1.            | 12            | 0               | 12               | 0            | 0,1          | 0            | 1            | 1                  |
| 2.            | 10            | 10              | 11               | 0,1          | 0,2          | 0,1          | 0,9          | 1                  |
| 3.            | 8             | 20              | 9                | 0,2          | 0,3          | 0,3          | 0,7          | 1                  |
| 4.            | 5             | 30              | 6,5              | 0,3          | 0,2          | 0,6          | 0,4          | 1                  |
| 5.            | 3             | 20              | 4                | 0,2          | 0,15         | 0,8          | 0,2          | 1                  |
| 6.            | 1             | 15              | 1,73             | 0,15         | 0,05         | 0,95         | 0,05         | 1                  |
| 7.            | 0             | 5               | 0,5              | 0,05         | 0            | 1            | 0            | 1                  |
| $\Sigma$      | -             | 100             | -                | 1            | 1            | -            | -            | -                  |

Nakoniec je možné z vypočítaných veličín zostrojiť krivky úhrnného zvyšku a úhrnného prepádu:



Obr. 2.8. Krivka úhrnného zvyšku a úhrnného prepádu



## NERIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 2-7

Zadanie: V akom hmotnostnom pomere je potrebné zmiešať partikulárnu látku s absolútnou vlhkosťou 21 hmot. % a partikulárnu látku s absolútnou vlhkosťou 8 hmot. %, aby sa získala partikulárna látka s absolútnou vlhkosťou 11 hmot. %?

Výsledok: 0,3 : 1

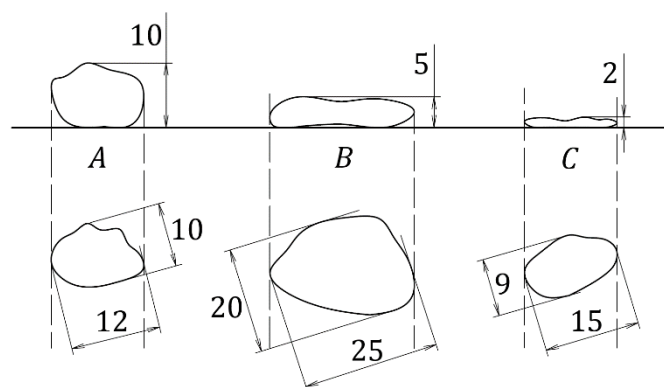
### Príklad 2-8

Zadanie: Partikulárna látka má hmotnosť 500 g a koncentráciu tuhej fázy 0,9. Koľko vody je potrebné do tejto látky pridať, aby sa koncentrácia tuhej fázy zmenila na 0,75?

Výsledok:  $m_2 = 100$  g

### Príklad 2-9

Zadanie: Na obrázku 2.9 sú znázornené častice A, B a C. Klasifikujte tvary týchto častíc.



Obr. 2.9. Znázornenie častíc A, B a C

Výsledok: A – izometrická častica, B – diskovitá častica, C – doštičkovitá častica

### Príklad 2-10

Zadanie: Tuhá častica má tvar kocky s dĺžkou steny 4 mm. Vypočítajte ekvivalentný priemer tejto častice podľa priemetu, objemu a povrchu.

Výsledok:  $d_{es} = 4,51$  mm;  $d_{ev} = 4,96$  mm;  $d_{eA} = 5,53$  mm

### Príklad 2-11

Zadanie: Vypočítajte ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti tuhej častice s hustotou  $2850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , ktorá sa usadzuje v  $20^\circ \text{C}$  teplej vode rýchlosťou  $3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ako by sa zmenil ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti, ak by sa tá istá častica usadzovala rovnakou rýchlosťou v glycerole rovnakej teploty akú mala voda?

Výsledok:  $d_{eu1} = 5,47 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ;  $d_{eu2} = 2,21 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

### **Príklad 2-12**

**Zadanie:** Aká je relatívna vlhkosť partikulárnej látky, ktorá pozostáva z pórovitých tuhých častíc hustoty  $2300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , pričom zdanlivá pórovitosť partikulárnej látky je 0,42 a celkový stupeň nasýtenia pórov vodou hustoty  $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  je 0,8?

**Výsledok:**  $W = 0,22$

### **Príklad 2-13**

**Zadanie:** Partikulárna látka, ktorá obsahuje 2 kg nepórovitých tuhých častíc s hustotou  $1650 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  má relatívnu vlhkosť 0,16 a zdanlivú pórovitosť 0,3. Aký je stupeň nasýtenia partikulárnej látky? Koľko vody ( $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) je potrebné pridať, aby sa stupeň nasýtenia rovnal jednej?

**Výsledok:**  $S_c = 0,7$ ;  $\Delta m_2 = 0,2 \text{ kg}$

### ZOZNAM SYMBOLOV

|          |                                                    |                                    |
|----------|----------------------------------------------------|------------------------------------|
| $a$      | – hmotnostný pomer                                 | (1)                                |
| $d_{eu}$ | – ekvivalentný priemer podľa usadzovacej rýchlosti | (m)                                |
| $d_{eA}$ | – ekvivalentný priemer podľa povrchu               | (m)                                |
| $d_{eS}$ | – ekvivalentný priemer podľa priemetu              | (m)                                |
| $d_{eV}$ | – ekvivalentný priemer podľa objemu                | (m)                                |
| $d_i$    | – relatívny prepád                                 | (1)                                |
| $e$      | – číslo pórovitosti                                | (1)                                |
| $k_1$    | – absolútny hmotnostný zlomok tuhej fázy           | (1)                                |
| $k_2$    | – absolútny hmotnostný zlomok kvapalnej fázy       | (1)                                |
| $k_3$    | – absolútny hmotnostný zlomok plynnej fázy         | (1)                                |
| $m$      | – celková hmotnosť látky                           | (kg)                               |
| $m_{fi}$ | – hmotnosť $i$ -tej frakcie                        | (kg)                               |
| $m_L$    | – podlhovastosť                                    | (1)                                |
| $m_T$    | – plochosť                                         | (1)                                |
| $m_1$    | – hmotnosť tuhej fázy                              | (kg)                               |
| $m_2$    | – hmotnosť kvapalnej fázy                          | (kg)                               |
| $m_3$    | – hmotnosť plynnej fázy                            | (kg)                               |
| $r_i$    | – relatívny zvyšok                                 | (1)                                |
| $u_s$    | – usadzovacia rýchlosť častice                     | ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) |
| $x_i$    | – veľkosť oka sita $i$                             | (m)                                |
| $w$      | – absolútna vlhkosť                                | (1)                                |
| $A$      | – povrch častice                                   | ( $\text{m}^2$ )                   |
| $B$      | – šírka častice                                    | (m)                                |
| $D_{fi}$ | – frakčný priemer častíc                           | (m)                                |
| $D_i$    | – úhrnný prepád                                    | (1)                                |
| $L$      | – dĺžka častice                                    | (m)                                |
| $Re$     | – Reynoldsovo číslo                                | (1)                                |
| $R_i$    | – úhrnný zvyšok                                    | (1)                                |
| $S$      | – priemet častice                                  | ( $\text{m}^2$ )                   |

|                 |                                              |                        |
|-----------------|----------------------------------------------|------------------------|
| $S_c$           | – stupeň nasýtenia pórov                     | (1)                    |
| $S_z$           | – zdanlivý stupeň nasýtenia pórov            | (1)                    |
| $T$             | – výška častice                              | (m)                    |
| $V$             | – objem častice                              | (m <sup>3</sup> )      |
| $V_c$           | – celkový objem                              | (m <sup>3</sup> )      |
| $V_m$           | – objem medzier                              | (m <sup>3</sup> )      |
| $V_o$           | – objem otvorených pórov                     | (m <sup>3</sup> )      |
| $V_u$           | – objem uzavretých pórov                     | (m <sup>3</sup> )      |
| $V_1$           | – objem tuhej fázy                           | (m <sup>3</sup> )      |
| $V_2$           | – objem kvapalnej fázy                       | (m <sup>3</sup> )      |
| $W$             | – relatívna vlhkosť                          | (1)                    |
| $\varepsilon$   | – pórovitosť                                 | (1)                    |
| $\varepsilon_m$ | – medzerovitosť                              | (1)                    |
| $\varepsilon_z$ | – zdanlivá pórovitosť                        | (1)                    |
| $\mu_l$         | – dynamická viskozita kvapaliny              | (Pa. s)                |
| $\rho_l$        | – hustota kvapaliny                          | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $\rho_s$        | – hustota častice                            | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $\rho_1$        | – hustota partikulárnej látky, resp. častice | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $\rho'$         | – objemová hmotnosť partikulárnej látky      | (kg. m <sup>-3</sup> ) |

### 3 HYDROMECHANICKÉ PROCESY

Oblasť transportu tekutín, t. j. kvapalín a plynov, tvorí veľmi dôležitú kapitolu procesného inžinierstva. Priemyselná prax sa stretáva s transportom plyných alebo kvapalných materiálov, ktoré sa spracúvajú v jednotlivých procesoch. Ovládanie jednotlivých zákonitostí hydrauliky má pre procesného inžiniera význam spočívajúci v tom, že pre väčšinu fyzikálnych procesov je povaha toku tekutín rozhodujúcim faktorom. Tok tekutín sa považuje za ustálený, keď všetky veličiny opisujúce tok majú v určitom mieste hodnoty nemeniace sa s časom, a teda sú funkciou len súradníc. Neustálený tok spočíva v tom, že aspoň jedna veličina opisujúca tok je funkciou nielen súradníc, ale aj času. Príklady v tejto časti skript sa budú zaoberať prevažne ustáleným tokom tekutín.

#### RÝCHLOSŤ PRIETOKU

Množstvo prúdiacej tekutiny sa obvykle vyjadruje niektorou z nasledujúcich veličín: hmotnostným prietokom  $\dot{m}$ , ktorý predstavuje hmotnosť tekutiny prúdiacej za jednotku času, objemovým prietokom  $\dot{V}$ , t. j. objemom tekutiny prúdiacej za jednotku času a rýchlosťou prúdenia  $v$ . Medzi týmito veličinami a prierezom prúdu  $S$  platia vzťahy:

$$\dot{m} = \dot{V} \rho = v S \rho \quad (3.1)$$

kde

$$\rho \quad - \quad \text{hustota tekutiny} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$$

#### KONTINUITA TOKU

Vzťah medzi prietokovými rýchlosťami v rôznych prierezoch prúdenia je daný rovnicou kontinuity toku. Pre prietoky v prierezoch 1 a 2 je táto rovnica pre nestlačiteľné tekutiny vyjadrená niektorou z nasledujúcich navzájom rovnocenných výrazov:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad (3.2)$$

$$\dot{V}_1 \rho = \dot{V}_2 \rho \quad (3.3)$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (3.4)$$

V prípade, že tok tekutiny je rozvetvený, treba brať do úvahy prietoky vo všetkých vetvách.

#### CHARAKTER PRÚDENIA

O tom, či je prúdenie laminárne alebo turbulentné, rozhoduje veľkosť Reynoldsovoho kritéria  $Re$ , definovaného:

$$Re = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{D v}{\nu} \quad (3.5)$$

kde

$$\begin{array}{lll} D & - & \text{charakteristický rozmer, pri kruhovom potrubí priemer} & (\text{m}) \\ \mu & - & \text{dynamická viskozita} & (\text{Pa} \cdot \text{s}) \\ \nu & - & \text{kinematická viskozita} & (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \end{array}$$

V prípade potrubia kruhového prierezu je charakteristický lineárny rozmer jeho priemer. V tomto prípade sa môže Reynoldsovo kritérium vyjadriť:

$$Re = \frac{4 \dot{V} \rho}{\pi D \mu} = \frac{4 \dot{m}}{\pi D \mu} \quad (3.6)$$

U nekrhových prierezov sa do Reynoldsovo kritéria dosadzuje za  $D$  ekvivalentný hydraulický priemer  $D_e$  a hodnoty hydraulického priemeru pre prípad nekrhových prierezov sú uvedené v tabuľke 3.1.

$$D_e = 4 \frac{S}{O} \quad (3.7)$$

kde

|       |                                    |                   |
|-------|------------------------------------|-------------------|
| $D_e$ | – ekvivalentný hydraulický priemer | (m)               |
| $S$   | – plocha prierezu                  | (m <sup>2</sup> ) |
| $O$   | – zmäčnaný obvod prierezu          | (m)               |

Tabuľka 3.1. Ekvivalentné hydraulické priemery pre nekrhové prierezy

| Tvar prierezu                                                       | $D_e$             |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------|
| Medzikružie s vnútorným priemerom $D_1$ a vonkajším priemerom $D_2$ | $D_2 - D_1$       |
| Štvorec so stranou $a$                                              | $a$               |
| Obdĺžnik so stranami $a$ a $b$                                      | $\frac{2ab}{a+b}$ |

Prúdenie možno považovať za laminárne, ak platí  $Re \leq 2300$ . Pri prúdení tekutiny rovným potrubím kruhového prierezu nastáva prechod medzi laminárnym a turbulentným prúdením v oblasti  $Re > 2300$ . S plne vyvinutým turbulentným prúdením sa uvažuje pri hodnote  $Re > 10\,000$ .

### ENERGETICKÁ BILANCIA TOKU

Bernoulliho rovnica udáva bilanciu mechanickej energie, t. j. závislosť medzi rôznymi druhmi mechanickej energie prúdiacej tekutiny a energie dodanej, ako i stratovej. V prípade, že sa do systému neprivádza ani neodvádza tepelná energia, je energetická bilancia toku pre prietok tekutiny medzi vstupom s indexom 1 a výstupom s indexom 2 vyjadrená nasledovne:

$$\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + g h_{str} \quad (3.8)$$

kde

|            |                                                                  |                      |
|------------|------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $\kappa_1$ | – bezrozmerná korekcia špecifickej kinetickej energie v mieste 1 | (1)                  |
| $\kappa_2$ | – bezrozmerná korekcia špecifickej kinetickej energie v mieste 2 | (1)                  |
| $v_1$      | – rýchlosť kvapaliny v mieste 1                                  | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v_2$      | – rýchlosť kvapaliny v mieste 2                                  | (m.s <sup>-1</sup> ) |

|           |                                            |      |
|-----------|--------------------------------------------|------|
| $p_1$     | – tlak v mieste 1                          | (Pa) |
| $p_2$     | – tlak v mieste 2                          | (Pa) |
| $h_1$     | – vzdialenosť miesta 1 od vzťažnej hladiny | (m)  |
| $h_2$     | – vzdialenosť miesta 2 od vzťažnej hladiny | (m)  |
| $h_{str}$ | – stratová výška                           | (m)  |

Člen  $\frac{1}{2}\kappa_i^2 v_i^2$  predstavuje kinetickú energiu, kde  $\kappa_i$  je bezrozmerná korekcia špecifickej kinetickej energie na nerovnakú rýchlosť tekutiny v priereze potrubia, v prípade laminárneho toku platí  $\kappa_i = 0,5$ , pre prípad turbulentného prúdenia  $\kappa_i \cong 1$ . Člen  $\frac{p_i}{\rho}$  predstavuje tlakovú energiu a  $g h_i$  polohovú, resp. potenciálnu energiu. Člen  $h_{str}$  vyjadruje stratovú výšku, ktorá v súčine  $g h_{str}$  predstavuje špecifickú stratu (disipáciu) mechanickej energie medzi bodmi 1 a 2. V prípade vetvenia potrubia sa v rovnici energetickej bilancie toku musí na jednej strane uvažovať s energiou vo všetkých vetvách.

### VARIANTY BERNOULLIHO ROVNICE

V prípade, že sa bude riešiť úloha, v ktorej neznámou bude tlaková strata v potrubnej sieti, rovnica (3.8) bude mať tvar:

$$\frac{1}{2}\kappa_1^2 v_1^2 \rho + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\kappa_2^2 v_2^2 \rho + p_2 + \rho g h_2 + \Delta p_{str} \quad (\text{Pa}) \quad (3.9)$$

kde

$$\Delta p_{str} \quad - \quad \text{tlaková strata v potrubnej sieti} \quad (\text{Pa})$$

Ak sa v systéme bude nachádzať čerpadlo, ktoré dodáva energiu do systému, rovnica (3.8) nadobudne tvar:

$$\frac{1}{2}\kappa_1^2 v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 + e_c = \frac{1}{2}\kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + e_z \quad (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (3.10)$$

kde

$$\begin{aligned} e_c & - \text{energia čerpadla} & (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}) \\ e_z & - \text{disipačná energia} & (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}) \end{aligned}$$

Na výpočet stratovej výšky sa použije nasledujúci tvar rovnice (3.8):

$$\frac{1}{2} \frac{\kappa_1^2 v_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2 v_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 + h_{str} \quad (\text{m}) \quad (3.11)$$

### TLAKOVÉ STRATY V POTRUBÍ

Pri prúdení tekutiny potrubím sa bilancuje energia, ako aj straty, ku ktorým dochádza. V prípade výpočtu tlakových strát (disipačnej energie  $e_z$ ) pri laminárnom alebo turbulentnom prúdení sa využíva Darcyho-Weisbachova rovnica:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \rho + \sum \xi \frac{v^2}{2} \rho \quad (3.12)$$

kde

|           |                               |                        |
|-----------|-------------------------------|------------------------|
| $\lambda$ | – koeficient trenia           | (1)                    |
| $L$       | – dĺžka potrubia              | (m)                    |
| $D$       | – priemer potrubia            | (m)                    |
| $\rho$    | – hustota kvapaliny           | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $v$       | – rýchlosť prúdenia kvapaliny | (m. s <sup>-1</sup> )  |
| $\xi$     | – koeficient miestnych strát  | (1)                    |

Koeficient miestnych strát  $\xi$  (príloha 4) predstavuje napríklad náhle a pozvoľné zúženie prierezu potrubia, náhle a pozvoľné rozšírenie prierezu potrubia, odbočky, prípojky, ohyby potrubia a všetky potrubné armatúry.

Koeficient trenia  $\lambda$  je funkciou Reynoldsovho čísla  $Re$  a relatívnej drsnosti  $k^*$ , pričom tá je definovaná ako:

$$k^* = \frac{k_{str}}{D} \quad (3.13)$$

kde

|           |                              |     |
|-----------|------------------------------|-----|
| $k^*$     | – relatívna drsnosť potrubia | (1) |
| $k_{str}$ | – absolútna drsnosť potrubia | (m) |

Absolútna drsnosť potrubia predstavuje priemernú výšku výstupkov a priehlbín, teda nerovnosti steny potrubia. Vybrané hodnoty absolútnej drsnosti potrubia sú uvedené v prílohe 3.

Koeficient trenia  $\lambda$  pre laminárny tok v kruhovom potrubí sa vypočíta:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (3.14)$$

V prípade turbulentného prúdenia v kruhovom potrubí je koeficient trenia funkciou Reynoldsovho čísla a relatívnej drsnosti  $\lambda = f(Re, k^*)$  a odčíta sa z Moodyho diagramu.

Ekvivalentná dĺžka rovného potrubia, ktorá spôsobuje rovnakú tlakovú stratu ako miestne odpory, sa vypočíta:

$$L_e = \frac{\sum \xi}{\lambda} D \quad (3.15)$$

Pre turbulentný tok a hladké potrubie ( $k_{str} = 0$ ) platia aj nasledovné rovnice:

- *Blaziova rovnica*, platiaca pre  $2300 < Re < 10^5$

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (3.16)$$

- Nikuradzeho rovnica, platiaca pre  $10^5 < Re < 10^8$

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}} \quad (3.17)$$

- Konakova rovnica, platiaca pre  $3 \cdot 10^3 < Re < 10^8$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log Re - 1,5 \quad (3.18)$$

V prípade turbulentného toku a hydraulicky drsného potrubia platia nasledovné rovnice:

- Roundova rovnica

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log \frac{Re}{0,135 (Re k^*) + 6,5} \quad (3.19)$$

- Altšul'ova rovnica

$$\lambda = 0,11 \left( k^* + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} \quad (3.20)$$

- Colebrookova-Whiteova rovnica

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{k^*}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (3.21)$$

V určitých prípadoch prúdenia tekutín potrubím je neznámou buď rýchlosť prúdenia  $v$  alebo priemer potrubia  $D$ . Ak nie je známa rýchlosť  $v$ , je možné ju vylúčiť z Darcyho-Weisbachovej rovnice, ako aj z Reynoldsovho čísla a získa sa vzťah na výpočet Karmanovho kritéria:

$$Ka = Re \sqrt{\lambda} = \frac{D}{\mu} \sqrt{\frac{2 \Delta p_{str} D \rho}{L}} \quad (3.22)$$

ktoré poskytne spolu s relatívnou drsnosťou výpočet prevrátenej hodnoty odmocniny z koeficienta trenia  $1/\sqrt{\lambda}$  (príloha 5). Na základe tejto prevrátenej hodnoty sa vypočíta Reynoldsovo číslo, z ktorého sa ďalej vypočíta rýchlosť prúdenia tekutiny v potrubí.

$$Ka \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = Re = \frac{D v \rho}{\mu} \rightarrow v = \frac{Re \mu}{D \rho} \quad (3.23)$$

Ak sa pri známej hodnote stratovej výšky (disipovanej energie  $e_z$ ) nepozná hodnota priemeru potrubia  $D$ , podobným spôsobom sa získa vzťah:



$$Re \sqrt[5]{\lambda} = \frac{\rho}{\mu} \sqrt[5]{\frac{128 e_z \dot{V}^3}{\pi^3 L}} \quad (3.24)$$

Následne sa použije obrázok z prílohy 6, ktorý opisuje závislosť veličiny  $1/\sqrt[5]{\lambda}$  od  $Re \sqrt[5]{\lambda}$  pri rôznej hodnote parametra  $\frac{Re}{k^*}$ :

$$\frac{Re}{k^*} = \frac{\frac{D v \rho}{\mu}}{\frac{k_{str}}{D}} = \frac{v \rho D^2}{\mu k_{str}} = \frac{4 \dot{V} \rho}{\pi \mu k_{str}} \quad (3.25)$$

Vzťah na výpočet Reynoldsovho čísla a výsledného priemeru potrubia bude mať tvar:

$$Re \sqrt[5]{\lambda} \frac{1}{\sqrt[5]{\lambda}} = Re = \frac{D v \rho}{\mu} \rightarrow D = \frac{Re \mu}{v \rho} \quad (3.26)$$

### ČERPADLÁ

Zaradením čerpadla do potrubnej trasy sa potrubie rozdelí na saciu časť, ktorú tvorí úsek spájajúci zásobnú nádrž čerpanej kvapaliny s čerpadlom a výtlačnú časť, ktorej úsek sa nachádza medzi čerpadlom a nádržou, do ktorej ústi čerpaná kvapalina.

Na pohon motora čerpadla je potrebný príkon čerpadla  $p_V$ , ktorý sa vypočíta z nasledujúcej rovnice:

$$p_V = \frac{\dot{m}_V e_c}{\eta_c} = \frac{\rho_V \dot{V}_V e_c}{\eta_c} \quad (3.27)$$

kde

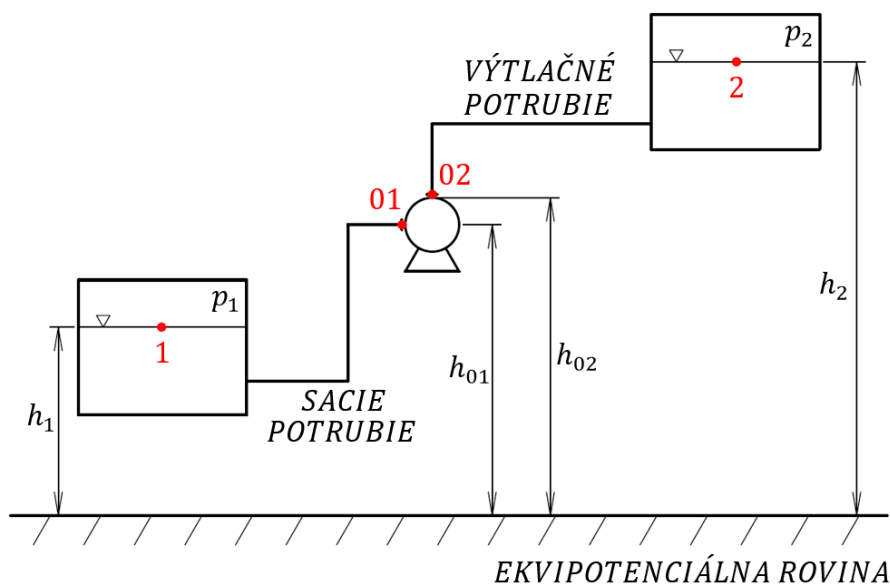
- |          |                             |     |
|----------|-----------------------------|-----|
| $p_V$    | – príkon čerpadla           | (W) |
| $\eta_c$ | – celková účinnosť čerpadla | (1) |

Celková účinnosť čerpadla udáva pomer užitočného výkonu čerpadla  $p^*$  k príkonu  $p_V$ :

$$\eta_c = \frac{p^*}{p_V} \quad (3.28)$$

Ak sa bude uvažovať so systémom, kde je zapojené čerpadlo, Bernoulliho rovnica bude vyjadrená vzťahom (3.10). Tlak  $p_1$  sa bude považovať za tlak v nasávacej časti potrubia a tlak  $p_2$  bude vo výtlačnej časti potrubia. Potom za predpokladu, že tieto tlaky, ako aj rýchlosti prúdenia sa budú rovnať, energia čerpadla sa vyjadrí ako:

$$e_c = g (h_2 - h_1) + e_z \quad (3.29)$$



Obr. 3.1. Schéma potrubnej siete s čerpadlom

Na nasatie kvapaliny zo zásobnej nádrže musí čerpadlo vyvinúť dostatočne hlboké vákuum, ktorého absolútna hodnota tlaku bude označená  $p_{01}$ . Ak sa predpokladá turbulentné prúdenie, po úprave nadobudne Bernoulliho rovnica pre saciu časť tvar:

$$\frac{p_1 - p_{01}}{\rho g} = h_s + \frac{1}{2g} (v_{01}^2 - v_1^2) + h_{str} \quad (3.30)$$

kde

|           |                                                        |                      |
|-----------|--------------------------------------------------------|----------------------|
| $p_1$     | – tlak na hladine kvapaliny v zásobnej nádrži v bode 1 | (Pa)                 |
| $p_{01}$  | – tlak na vstupe do čerpadla                           | (Pa)                 |
| $h_s$     | – sacia výška daná vzťahom $(h_{01} - h_1)$            | (m)                  |
| $h_{str}$ | – stratová výška v saciej časti potrubia               | (m)                  |
| $v_{01}$  | – rýchlosť kvapaliny na vstupe do čerpadla             | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v_1$     | – rýchlosť kvapaliny v bode 1                          | (m.s <sup>-1</sup> ) |

Rovnica (3.10) sa vie obdobne napísať aj pre výtláčnú časť potrubia:

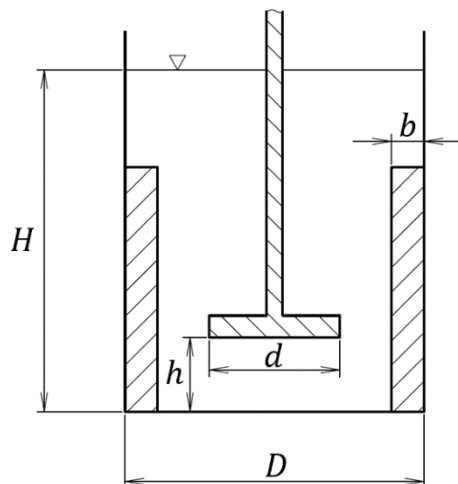
$$\frac{p_{02} - p_2}{\rho g} = h_v + \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_{02}^2) + h_{str2} \quad (3.31)$$

kde

|            |                                                        |                      |
|------------|--------------------------------------------------------|----------------------|
| $p_{02}$   | – tlak na výstupe z čerpadla                           | (Pa)                 |
| $p_2$      | – tlak na hladine kvapaliny v zásobnej nádrži v bode 2 | (Pa)                 |
| $h_v$      | – výtláčná výška daná vzťahom $(h_2 - h_{02})$         | (m)                  |
| $h_{str2}$ | – stratová výška vo výtláčnej časti potrubia           | (m)                  |
| $v_2$      | – rýchlosť kvapaliny v bode 2                          | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v_{02}$   | – rýchlosť kvapaliny na výstupe z čerpadla             | (m.s <sup>-1</sup> ) |

## MIEŠANIE

Špeciálnym prípadom núteného prúdenia, ktoré sa veľmi často vyskytuje v technologických operáciách, je miešanie. Miešanie je zložitý proces využívajúci sa na prípravu homogénneho koncentračného a teplotného poľa v miešanej kvapaline. Zložitosť samotného procesu sa dá chápať aj z pohľadu zohľadnenia vplyvu geometrických veličín, ako je priemer nádoby  $D$ , výška miešadla  $h$  nad dnom nádoby, výška hladiny  $H$  (v prípade, že je kvapalina v pokoji), šírka narážok  $b$  pri výpočtoch.



Obr. 3.2. Geometrické rozmery miešadla a nádoby

Pri výpočtoch sa využíva modifikované Reynoldsovo kritérium:

$$Re_M = \frac{n \rho d^2}{\mu} \quad (3.32)$$

kde

|        |                                          |                        |
|--------|------------------------------------------|------------------------|
| $Re_M$ | – modifikované Reynoldsovo kritérium     | (1)                    |
| $n$    | – frekvencia otáčania miešadla           | (s <sup>-1</sup> )     |
| $d$    | – priemer miešadla                       | (m)                    |
| $\rho$ | – hustota miešanej kvapaliny             | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $\mu$  | – dynamická viskozita miešanej kvapaliny | (Pa. s)                |

Na intenzitu miešania kvapaliny v nádobe má veľký vplyv objemový prietok kvapaliny cez miešadlo, ktorý sa vyjadrí:

$$\dot{V} = k n d^3 \quad (3.33)$$

kde

|     |                       |     |
|-----|-----------------------|-----|
| $k$ | – súčiniteľ úmernosti | (1) |
|-----|-----------------------|-----|

Súčiniteľ úmernosti  $k$  sa získa meraniami a zvyčajne sa vyjadrí ako funkcia modifikovaného Reynoldsovoho kritéria  $Re_M$ .

Na začiatku miešania je nutné priviesť do systému značnú energiu na uvedenie nehybnej vrstvy kvapaliny do pohybu. V momente, keď kvapalina už vykonáva pohyb, treba do systému dodávať už len energiu potrebnú na prekonanie vnútorného trenia v kvapaline (disipovanú

energiu) na udržanie takéhoto pohybu. Dôležitým parametrom pri návrhu miešadla je jeho príkon, na výpočet ktorého sa využíva hydrodynamické modelovanie. Na tento účel bolo odvodené príkonové číslo pre miešanie  $P_O$ .

$$P_O = \frac{P}{\rho n^3 d^5} \quad (3.34)$$

kde

$$\begin{array}{ll} P_O & - \text{ príkonové číslo} & (1) \\ P & - \text{ príkon} & (W) \end{array}$$

Pre miešanie kvapalín platí funkčná závislosť medzi kritériami  $P_O = f(Re_M)$ . V prípade pomalého prúdenia kvapaliny, keď sú zotrvačné sily v porovnaní s viskóznymi a tlakovými silami zanedbateľné, sa funkčná závislosť napíše v tvare rovnice:

$$P_O = \frac{P}{\rho n^3 d^5} = \frac{A}{Re_M} \quad (3.35)$$

z toho:

$$P = \frac{A (\rho n^3 d^5)}{Re_M} = P_O (\rho n^3 d^5) \quad (3.36)$$

kde

$$A \quad - \quad \text{konštanta miešadla} \quad (1)$$

Bezrozmerná konštanta  $A$  závisí od typu miešadla a je možné ju nájsť v tabuľkách a normách. Príkonová charakteristika je konkrétnym tvarom tejto závislosti, pre pomalobežné a rýchlobežné miešadlá je znázornená v prílohe 8. Podrobné vzťahy na výpočet rozmerov jednotlivých typov miešadiel sa dajú určiť z obrázka 5.6 v teoretickej učebnici Procesné strojnictvo I [9].

## FILTRÁCIA

Na oddelovanie tuhých častíc od tekutín sa v praxi využíva filtrácia. Je to proces, pri ktorom nastáva prietok tekutiny nehybnou pórovitou vrstvou materiálu, ktorá má schopnosť zachytiť častice tuhej fázy. Filtrátom sa nazýva tekutina, ktorá pretiekla okolo zachytených častíc a filtračným koláčom sa označuje vrstva zachytená na priehradke filtra. Takýto spôsob filtrácie sa nazýva koláčová filtrácia. Základné charakteristiky filtračného procesu sú:

- účinnosť filtrácie

$$\eta = \frac{m_{tz}}{m_t} \quad (3.37)$$

kde

$$\begin{array}{ll} \eta & - \text{ účinnosť filtrácie} & (1) \\ m_{tz} & - \text{ hmotnosť tuhých častíc zadržaných filtrom} & (\text{kg}) \\ m_t & - \text{ celkové množstvo častíc vo filtrovanej suspenzii} & (\text{kg}) \end{array}$$

- rýchlosť filtrácie

$$u_0 = \frac{dV}{A dt} \quad (3.38)$$

kde

|       |                                 |                      |
|-------|---------------------------------|----------------------|
| $u_0$ | – rýchlosť filtrácie            | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $dV$  | – diferenciálny objem filtrátu  | (m <sup>3</sup> )    |
| $A$   | – filtračná plocha              | (m <sup>2</sup> )    |
| $dt$  | – diferenciálny časový interval | (s)                  |

Rýchlosť filtrácie môže byť ovplyvnená vlastnosťami filtrátu (viskozita...), vlastnosťami dispergovaných častíc (tvar, veľkosť, deformovateľnosť...), veľkosťou hnacej sily procesu (rozdiel tlakov) a fyzikálno-chemickými javmi vo filtračnom koláči (médium, priehradka).

Výpočet straty mechanickej energie v prípade koláčovej filtrácie má tvar:

$$e_z = \lambda' \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{h}{D_p} u_0^2 \quad (3.39)$$

kde

|               |                                                          |                       |
|---------------|----------------------------------------------------------|-----------------------|
| $e_z$         | – strata mechanickej energie                             | (J.kg <sup>-1</sup> ) |
| $\lambda'$    | – koeficient trenia                                      | (1)                   |
| $\varepsilon$ | – pórovitosť nehybnej vrstvy                             | (1)                   |
| $h$           | – výška pórovitej vrstvy                                 | (m)                   |
| $D_p$         | – ekvivalentný priemer častíc podľa špecifického povrchu | (m)                   |
| $u_0$         | – rýchlosť filtrácie                                     | (m.s <sup>-1</sup> )  |

V prípade, že sa uvažuje laminárne prúdenie, bude mať koeficient trenia tvar:

$$\lambda' = \frac{A'}{Re'} \quad (3.40)$$

Reynoldsovo číslo sa vyjadrí v tvare (3.41) a ekvivalentný priemer podľa špecifického povrchu (3.42).

$$Re' = \frac{u_0 D_p \rho}{\mu (1 - \varepsilon)} \quad (3.41)$$

$$D_p = \frac{6}{a_v} \quad (3.42)$$

kde

|       |                             |                    |
|-------|-----------------------------|--------------------|
| $a_v$ | – vlastný špecifický povrch | (m <sup>-1</sup> ) |
|-------|-----------------------------|--------------------|

Úpravou rovnica (3.39) nadobudne tvar:

$$e_z = \frac{A' \mu (1 - \varepsilon)}{u_0 D_p \rho} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{h}{D_p} u_0^2 = \frac{A' (1 - \varepsilon)^2 a_v^2}{36 \varepsilon^3 \rho} \mu h u_0 \quad (3.43)$$

Na výpočet tlakovej straty posluží rovnica (3.43), ktorá sa upraví na tvar:

$$\Delta p_z = e_z \rho = \frac{A'}{36} \frac{(1 - \varepsilon)^2 a_v^2}{\varepsilon^3} \mu h u_0 \quad (3.44)$$

Člen  $A'/36 = \omega$  v rovnici (3.44) sa nazýva tvarový faktor, ktorý v prípade guľovej častice nadobudne hodnotu  $\omega = 160/36$ . Po aplikovaní tvarového faktora rovnica (3.44) nadobudne tvar:

$$\Delta p_z = \omega \frac{(1 - \varepsilon)^2 a_v^2}{\varepsilon^3} \mu h u_0 \quad (3.45)$$

Následne Darcyho rovnica nadobudne tvar:

$$\Delta p_z = \alpha \mu h u_0 \quad (3.46)$$

kde

$\alpha$  – špecifický odpor filtračného koláča ( $\text{m}^{-2}$ )

### USADZOVANIE ČASTÍC V GRAVITAČNOM POLI

Ďalšia metóda zaoberajúca sa delením heterogénnych sústav je usadzovanie častíc v gravitačnom poli, ktoré veľmi často predchádza filtráciu tým, že sa najskôr odstránia zo suspenzie častice väčších rozmerov. Matematický opis procesu usadzovania vychádza z hydraulického odporu pri obtekaní jednej guľovej častice reálnou tekutinou, čo je proces odpovedajúci usadzovaniu častice v tekutine.

Vychádzajúc zo silovej rovnováhy (obrázok 3.3) pôsobiacej na guľôčku (časticu) sú známe sily:

- sila tiaže

$$G = V \rho_t g \quad (3.47)$$

- vztlaková sila

$$F_V = V \rho g \quad (3.48)$$

- odporová sila

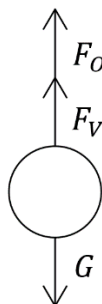
$$F_O = c_D S_P \rho \frac{v^2}{2} \quad (3.49)$$

pričom zotrvačné sily sa zanedbajú v dôsledku konštantnej rýchlosti častice, potom úpravou týchto rovníc sa dostáva výsledná rýchlosť usadzovania pre guľovitú časticu:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{d (\rho_t - \rho) g}{c_D \rho}} \quad (3.50)$$

kde

|          |                         |                        |
|----------|-------------------------|------------------------|
| $v$      | – usadzovacia rýchlosť  | (m. s <sup>-1</sup> )  |
| $d$      | – priemer tuhej častice | (m)                    |
| $\rho_t$ | – hustota tuhej častice | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $\rho$   | – hustota kvapaliny     | (kg. m <sup>-3</sup> ) |
| $c_D$    | – koeficient odporu     | (1)                    |



Obr. 3.3. Sily pôsobiace na guľovú časticu

Existuje niekoľko bezrozmerných veličín, ktoré charakterizujú proces usadzovania:

- Archimedovo číslo

$$Ar = \frac{d_s^3 g (\rho_t - \rho) \rho}{\mu^2} \quad (3.51)$$

- Reynoldsovo číslo

$$Re = \frac{d_s v \rho}{\mu} \quad (3.52)$$

- Eulerovo číslo

$$Eu = \frac{F_O}{A \rho v^2} \quad (3.53)$$

kde

|       |                                                                   |                   |
|-------|-------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $d_s$ | – ekvivalentný priemer častice                                    | (m)               |
| $F_O$ | – sila odporu                                                     | (N)               |
| $A$   | – plocha priemetu častice do roviny kolmej na smer toku kvapaliny | (m <sup>2</sup> ) |

Z týchto bezrozmerných veličín je možné odvodiť ďalšie bezrozmerné veličiny ako je napríklad:

- Ljaščenkovo číslo

$$Ly = \frac{v^3 \rho^2}{g (\rho_t - \rho) \mu} = \frac{v^3 \rho}{g (\rho_t - \rho) \nu} \quad (3.54)$$

Takéto bezrozmerné veličiny slúžia na výpočet rýchlosti usadzovania, ak je známy priemer častice a ostatné vlastnosti, čiže je možné vypočítať Archimedovo číslo  $Ar$ , potom na základe tabuľky 3.2 je možné určiť Reynoldsovo číslo  $Re$ , z ktorého sa vyjadří rýchlosť usadzovania častice. Obdobným spôsobom je možné určiť aj priemer usadzovanej častice na základe známej rýchlosti usadzovania  $v$  a ostatných vlastností, čiže známej hodnoty  $Ly$  podľa tabuľky 3.2.

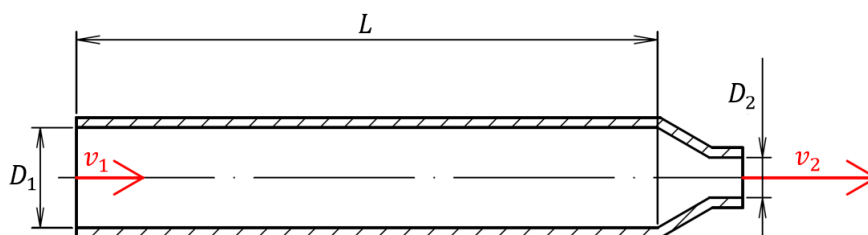
Tabuľka 3.2. Reynoldsovo číslo ako funkcia Archimedovho alebo Ljaščenkovo čísla

|                    |                                        |                          |
|--------------------|----------------------------------------|--------------------------|
| Stokesova oblasť   | $Ar \leq 36$                           | $Re = Ar/18$             |
|                    | $Ly \leq 0,22$                         | $Re = (18 Ly)^{0,5}$     |
| Prechodná oblasť   | $36 < Ar < 8,4 \cdot 10^4$             | $Re = (Ar/13,9)^{0,714}$ |
|                    | $0,22 < Ly < 1500$                     | $Re = (13,9 Ly)^{0,625}$ |
| Turbulentná oblasť | $8,4 \cdot 10^4 < Ar < 7,4 \cdot 10^9$ | $Re = 1,74 Ar^{0,714}$   |
|                    | $1500 < Ly < 4,6 \cdot 10^5$           | $Re = 0,33 Ly$           |

## RIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 3-1 Využitie rovnice kontinuity

**Zadanie:** Rovným vodorovným potrubím s priemerom  $D_1 = 80$  mm a dĺžke 36 m prúdi voda s hustotou  $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a rýchlosťou  $2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vypočítajte objemový prietok vody prúdiacej potrubím a výtokovú rýchlosť vody z trysky s priemerom  $D_2 = 35$  mm.



Obr. 3.4. Schéma k príkladu 3-1

**Postup:** Pri výpočte sa vychádza z rovnice kontinuity pre prúdenie kvapaliny, z ktorej sa vypočíta objemový prietok vody v potrubí s vnútorným priemerom  $D_1 = 80 \text{ mm} = 0,08 \text{ m}$ , kde voda prúdi rýchlosťou  $v_1 = 2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \dot{V}_1 \rho_1 = \dot{V}_2 \rho_2 \rightarrow \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \quad (3.55)$$



Pre nestlačiteľnú tekutinu bude platiť, že  $\rho_1 = \rho_2$ , potom bude mať rovnica (3.55) nasledovný tvar:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (3.56)$$

V prípade, že ide o kruhové potrubie, prierezová plocha  $S$  má tvar:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \quad (3.57)$$

Dosadením rovnice (3.57) do rovnice (3.56) sa získa:

$$v_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \quad (3.58)$$

Výpočet: Výpočet objemového prietoku bude vychádzať z ľavej časti rovnice (3.58), ktorá sa upraví na tvar:

$$\dot{V}_1 = v_1 S_1 = v_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 2,4 \frac{\pi 0,08^2}{4} = 0,012 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Po číselnom dosadení je objemový prietok vody prúdiacej v potrubí  $0,012 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Na výpočet rýchlosti vody vystupujúcej z trysky sa použije opäť rovnica (3.58).

$$v_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \rightarrow v_2 = v_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 = 2,4 \left( \frac{0,08}{0,035} \right)^2 = 12,54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

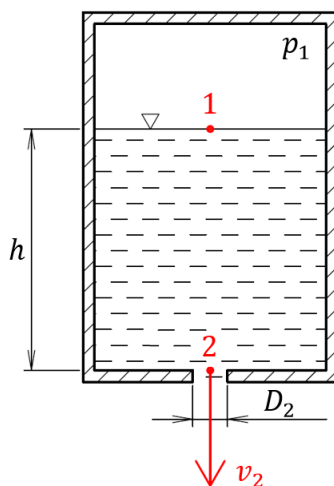
Kontrola výpočtu: Na kontrolu výpočtu sa použije rovnica (3.58), do ktorej sa dosadia vypočítané a známe hodnoty. V prípade, že sa ľavá a pravá strana rovnice budú rovnať, výpočet sa bude považovať za správny.

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\pi D_1^2}{4} &= v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \\ 2,4 \frac{\pi \cdot 0,08^2}{4} &= 12,54 \frac{\pi \cdot 0,035^2}{4} \\ 0,012 &= 0,012 \end{aligned}$$

Výsledok: Objemový prietok vody prúdiacej potrubím je  $0,012 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  a výtoková rýchlosť vody vytekajúcej z trysky je  $12,54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### **Príklad 3-2** Využitie Bernoulliho rovnice

Zadanie: Pracovník údržby dostal z veľína pokyn vypustiť tlakovú nádobu, a to tak, že otvorí v dne nádoby otvor s priemerom 50 mm, odkiaľ vytečie voda s hustotou  $998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , a to do atmosféry. Vypočítajte rýchlosť prúdenia vody z nádoby a objemový prietok vody vytekajúcej otvorom, ak je výška hladiny nad otvorom  $h = 1,75 \text{ m}$  a na hladinu v nádobe pôsobí tlak  $0,15 \text{ MPa}$ . Atmosférický tlak je  $101\,325 \text{ Pa}$  a straty pri prúdení vody zanedbajte.



Obr. 3.5. Schéma k príkladu 3-2

**Postup:** Výtoková rýchlosť vody vytekajúcej z dna tlakovej nádoby sa bude riešiť pomocou Bernoulliho rovnice a následne z rovnice kontinuity pre prúdenie kvapalín sa vypočíta objemový prietok vody.

**Výpočet:** Z obrázka 3.5 vyplýva, že hladina sa označí bodom 1 a miesto výpustu, teda otvoru na dne, bodom 2. Týmto predpokladom sa získajú nasledovné údaje:

$$\begin{aligned} h_1 &= h = 1,75 \text{ m} \\ h_2 &= 0 \text{ m} \\ p_1 &= 150\,000 \text{ Pa} \\ p_2 &= p_{atm} = 101\,325 \text{ Pa} \\ v_1 &= 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_2 &= ? \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Bernoulliho rovnica v tvare špecifickej energie:

$$\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + e_z \quad (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (3.59)$$

pričom člen  $e_z$  je možné podľa zadania z rovnice odstrániť, rovnako tak aj  $g h_2$ , pretože platí  $h_2 = 0 \text{ m}$ , tiež člen  $\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2$ , pretože platí  $v_1 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a za predpokladu turbulentného prúdenia platí  $\kappa_2 = 1$ . Doplnením predpokladov do rovnice (3.59) sa dostane nový tvar Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \quad (3.60)$$

Z rovnice (3.60) sa potom vyjadří neznáma  $v_2$  a číselne dosadí, pričom konštanta gravitačného zrýchlenia má hodnotu  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ :

$$v_2 = \sqrt{2 \left( \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g h_1 \right)} = \sqrt{2 \left( \frac{150\,000 - 101\,325}{998,2} + 9,81 \cdot 1,75 \right)} \\ = 11,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Z rovnice kontinuity sa vyjadří objemový prietok, ak sa predpokladá, že výpusť má kruhový prierez, čomu odpovedá vyjadrenie plochy  $S = \frac{\pi D^2}{4}$ , potom rovnica nadobudne tvar, do ktorého sa číselne dosadia premenné:

$$\dot{V}_2 = v_2 S_2 = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 11,48 \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 0,023 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Kontrola výpočtu: Na kontrolu výpočtu sa použije Bernoulliho rovnica:

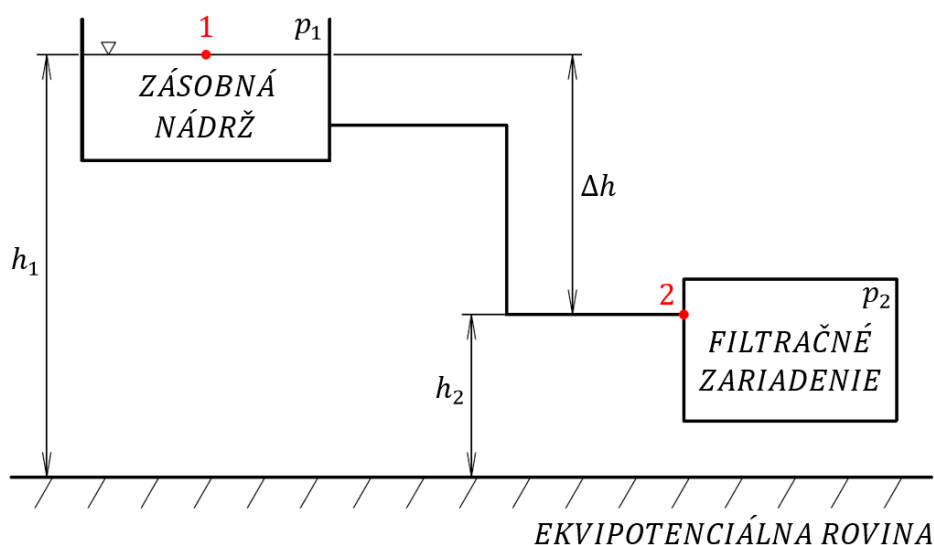
$$\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 \\ \frac{1}{2} 1^2 \cdot 0^2 + \frac{150\,000}{998,2} + 9,81 \cdot 1,75 = \frac{1}{2} 1^2 \cdot 11,48^2 + \frac{101\,325}{998,2} + 9,81 \cdot 0 \\ 167,4 = 167,4$$

Pravá a ľavá strana rovnice sa rovnajú, výpočet možno považovať za správny.

Výsledok: Rýchlosť prúdenia vody z nádoby činí  $11,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a objemový prietok vody vytekajúcej otvorom je  $0,023 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Príklad 3-3 Využitie Bernoulliho a Darcyho-Weisbachovej rovnice

Zadanie: Pomarančový džús, ktorý má hustotu  $1154 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , sa dopravuje samospádom z otvorenej zásobnej nádrže do filtračného zariadenia, v ktorom je tlak  $125,4 \text{ kPa}$ . Ako vysoko, vzhľadom na ústie potrubia do filtračného zariadenia, musí byť hladina džúsu v zásobnej nádrži, ak rýchlosť prúdenia džúsu v potrubí je  $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ? Disipácia mechanickej energie v potrubí zodpovedá  $h_{str} = 1,5 \text{ m}$  a prúdenie je turbulentné.



Obr. 3.6. Schéma k príkladu 3-3

Postup: Na obrázku 3.6 sú schematicky vyobrazené zariadenia so znázornením polohy bilancovaných miest. Cieľom takejto úlohy je zistiť rozdiel výšok  $\Delta h$ , ktoré zodpovedajú hladine pomarančového džúsu v zásobnej nádrži (1) a ústí potrubia do filtračného zariadenia (2). Pre bilancované miesta je možné napísať Bernoulliho rovnicu v tvare:

$$\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + e_z \quad (3.61)$$

kde za disipovanú energiu sa dosadí člen  $e_z = g h_{str}$ :

$$\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + g h_{str} \quad (3.62)$$

Predtým, ako sa začne riešiť táto úloha, je nutné si uvedomiť, že priemer potrubia, ktoré spája zásobnú nádrž s filtračným zariadením, je v porovnaní s priemerom zásobnej nádrže zanedbateľne malý. V takomto prípade, berúc do úvahy rovnicu kontinuity, je možné rýchlosť prúdenia v mieste hladiny pomarančového džúsu (1), považovať za zanedbateľne malú v porovnaní s rýchlosťou prúdenia džúsu v ústí potrubia do filtračného zariadenia. Na základe tohto predpokladu sa môže potom rovnica (3.62) napísať bez kinetického člena 1 na ľavej strane rovnice nasledovne:

$$\frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + g h_{str} \quad (3.63)$$

Keď sa z rovnice (3.63) vyjadří rozdiel výšok hladín ako  $\Delta h$ , potom je možné napísať rovnicu:

$$\Delta h = (h_1 - h_2) = \frac{\kappa_2^2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + h_{str} \quad (3.64)$$

Výpočet: Jedinou neznámou v rovnici (3.64) je tlak v mieste 1. V zadaní bolo však uvedené, že džús odtieká z otvorenej zásobnej nádrže, a teda tlak v mieste 1 sa bude rovnať okolitému (atmosférickému) tlaku. Potom rozdiel výšok hladiny džúsu v zásobnej nádrži a ústia potrubia do filtračného zariadenia má byť:

$$\Delta h = (h_1 - h_2) = \frac{1^2 \cdot 2,5^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{125\,400 - 101\,325}{1154 \cdot 9,81} + 1,5 = 3,95 \text{ m}$$

Kontrola výpočtu: Na kontrolu výpočtu sa použije rovnica (3.63), do ktorej sa dosadí vypočítaná hodnota rozdielu výšok hladín, resp. výška  $h_1$ , pričom výška  $h_2 = 0 \text{ m}$ .

$$\frac{101\,325}{1154} + 9,81 \cdot 3,95 = \frac{1}{2} 2,5^2 + \frac{125\,400}{1154} + 9,81 \cdot 0 + 9,81 \cdot 1,5$$

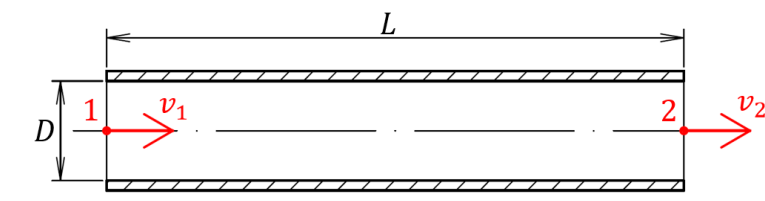
$$126,5 = 126,5$$

Pravá a ľavá strana rovnice sa rovnajú, výpočet možno považovať za správny.

**Výsledok:** Hladina džúsu v zásobnej nádrži musí byť vyššie o 3,95 m od miesta výpustu do filtračného zariadenia.

**Príklad 3-4** Využitie Bernoulliho a Darcyho-Weisbachovej rovnice

**Zadanie:** Letecký petrolej prúdi pri teplote 50 °C rovným neskorodovaným oceľovým potrubím s priemerom 4 cm, ktorého stredná absolútna drsnosť je  $k_{str} = 0,04$  mm. Hustota petroleja je pri uvedenej teplote 788 kg·m<sup>-3</sup> a jeho dynamická viskozita je 1,08·10<sup>-3</sup> Pa·s. Vypočítajte straty tlakovej energie v dôsledku trenia na dĺžke potrubia 2,5 m, ak je objemový prietok leteckého petroleja 4,3 m<sup>3</sup>·h<sup>-1</sup>.



Obr. 3.7. Schéma k príkladu 3-4

**Postup:** Cieľom je vypočítať množstvo disipovanej mechanickej energie (straty tlaku) pri toku petroleja v rovnom neskorodovanom oceľovom potrubí z miesta 1 do miesta 2, ktoré sú od seba vzdialené 2,5 m. Na tento účel poslúži Bernoulliho rovnica v tvare:

$$\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 \rho + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 \rho + p_2 + \rho g h_2 + \Delta p \quad (3.65)$$

Z rovnice kontinuity vyplýva, že objemový prietok, a teda aj rýchlosť prúdenia, je na oboch stranách potrubia rovnaký:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad (3.66)$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (3.67)$$

Z toho vyplýva, že kinetické členy  $\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 \rho$  a  $\frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 \rho$  sa v rovnici (3.65) odčítajú a rovnako tak aj členy  $\rho g h_1$  a  $\rho g h_2$ , keďže potrubie je horizontálne uložené a platí  $h_1 = h_2$ . Potom rovnica (3.65) nadobudne tvar:

$$\Delta p = p_1 - p_2 \quad (3.68)$$

Na výpočet tlakovej straty sa využije Darcyho-Weisbachova rovnica:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \rho + \sum \xi \frac{v^2}{2} \rho \quad (3.69)$$

V dôsledku absencie miestnych odporov, člen miestnych odporov v rovnici sa zanedbá. Zlúčením rovníc (3.68) a (3.69) nadobudne výsledná rovnica na výpočet tlakovej straty tvar:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \rho \quad (3.70)$$

Jedinou neznámou v rovnici je súčiniteľ trenia  $\lambda$ , ktorý závisí od charakteru prúdenia tekutiny. Na jeho výpočet sa využije Reynoldsovo číslo, pre ktoré platí, ak je jeho hodnota vyššia ako 2300, považuje sa prúdenie za turbulentné a súčiniteľ trenia tekutiny závisí od relatívnej drsnosti potrubia.

Výpočet: Na začiatku je nevyhnutné vypočítať si rýchlosť prúdenia  $v$  z rovníc (3.66) a (3.67):

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = v_1 S_1 \rightarrow v_1 &= \frac{\dot{V}_1}{S_1} = \frac{4 \dot{V}_1}{\pi D^2} = \frac{4 (1,1944 \cdot 10^{-3})}{\pi \cdot 0,04^2} = 0,9505 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \dot{V}_2 = v_2 S_2 \rightarrow v_2 &= \frac{\dot{V}_2}{S_2} = \frac{4 \dot{V}_2}{\pi D^2} = \frac{4 (1,1944 \cdot 10^{-3})}{\pi \cdot 0,04^2} = 0,9505 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v &= v_1 = v_2 = 0,9505 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$Re = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{0,04 \cdot 0,9505 \cdot 788}{1,08 \cdot 10^{-3}} = 27\,740,5$$

Keďže platí, že  $Re > 2300$ , prúdenie je turbulentné. Relatívna drsnosť sa vypočíta ako podiel absolútnej drsnosti  $k_{str}$  a priemeru potrubia  $D$ :

$$k^* = \frac{k_{str}}{D} = \frac{0,04}{40} = 0,001$$

Na základe vypočítaných hodnôt relatívnej drsnosti a Reynoldsovho čísla sa odčíta z Moodyho diagramu (príloha 2) súčiniteľ trenia tekutiny v potrubí a vypočítajú sa tlakové straty:

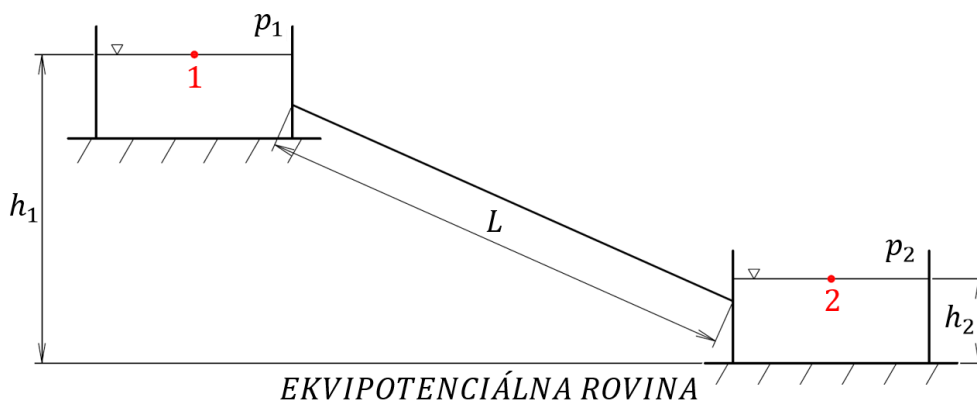
$$\lambda = 0,026$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \rho = 0,026 \frac{2,5}{0,04} \frac{0,9505^2}{2} 788 = 578,43 \text{ Pa}$$

Výsledok: Straty tlakovej energie v dôsledku trenia na dĺžke potrubia 2,5 m sú 578,43 Pa.

### **Príklad 3-5** Výpočet objemového prietoku v potrubí

Zadanie: Do papierenského závodu prúdi voda s teplotou 10 °C ( $\rho = 999,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu = 1,3077 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) samospádom z vodojemu, ktorý je vzdialený 2,8 km od zbernej nádrže nachádzajúcej sa v závode a je od nej o 60 m vyšší. Vypočítajte objemový prietok vody, ak priemer potrubia je 12 cm a stredná drsnosť potrubia je 0,4 mm. Miestne straty zanedbajte.



Obr. 3.8. Schéma k príkladu 3-5

Postup: Postup výpočtu vychádza z Bernoulliho rovnice v tvare:

$$\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + g h_{str} \quad (3.71)$$

Zo zadania vychádzajú predpoklady  $p_1 = p_2 = p_{atm}$  a  $v_1 = v_2 = 0$ , a preto v rovnici (3.71) je možné odčítať členy  $\frac{p_1}{\rho}$  a  $\frac{p_2}{\rho}$  a členy  $\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2$  a  $\frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2$  sú nulové (resp. veľmi blízke nule). Spojením ostávajúcich členov v rovnici (3.71)  $h_{str} = h_1 - h_2$  a Darcyho-Weisbachovej rovnice vo forme výšky bez uvažovania miestnych odporov (3.72) sa získa rovnica v tvare (3.73).

$$h_{str} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (3.72)$$

$$h_1 - h_2 = h_{str} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (3.73)$$

Keďže nie je známa rýchlosť  $v$ , je možné ju vylúčiť z Darcyho-Weisbachovej rovnice, ako aj z Reynoldsovho čísla a získa sa vzťah na výpočet Karmanovho kritéria, ako je uvedené v rovnici (3.22). Rovnicu (3.22) je možné prepísať do tvaru „výšky“ (3.74) a tento tvar rovnice sa nazýva Karmanovým kritériom.

$$Ka = Re \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{2 g h_{str} D^3 \rho^2}{L \mu^2}} \quad (3.74)$$

Výpočet: Na základe zadaných hodnôt hustoty a dynamickej viskozity vody pri 10 °C sa vypočíta Karmanovo kritérium podľa rovnice (3.74):

$$Ka = Re \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 60 \cdot 0,12^3 \cdot 999,7^2}{2800 (1,3077 \cdot 10^{-3})^2}} = 20\,605$$

Relatívna drsnosť sa vypočíta ako podiel absolútnej drsnosti  $k_{str}$  a priemeru potrubia  $D$ :

$$k^* = \frac{k_{str}}{D} = \frac{0,4}{120} = 0,0033$$

Na základe týchto hodnôt sa z obrázka (príloha 5) odčíta hodnota veličiny  $1/\sqrt{\lambda}$ .

$$1/\sqrt{\lambda} = 6$$

Existuje však aj presnejší, numerický výpočet člena  $1/\sqrt{\lambda}$  podľa nasledujúceho vzťahu:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{k^*}{3,71} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) = -2 \log \left( \frac{0,0033}{3,71} + \frac{2,51}{20\,605} \right) = 5,99$$

Hodnota Reynoldsovho čísla sa získa nasledovne:

$$Re = (Re\sqrt{\lambda}) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 20\,605 \cdot 5,99 = 123\,423,95$$

Potom objemový prietok sa vypočíta:

$$Re = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{D \rho 4 \dot{V}}{\pi \mu D^2} = \frac{4 \dot{V} \rho}{\mu \pi D} \rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{V} = \frac{Re \mu \pi D}{4 \rho} = \frac{123\,423,95 (1,3077 \cdot 10^{-3}) \pi (0,12)}{4 \cdot 999,7} = 0,015 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

a rýchlosť prúdenia:

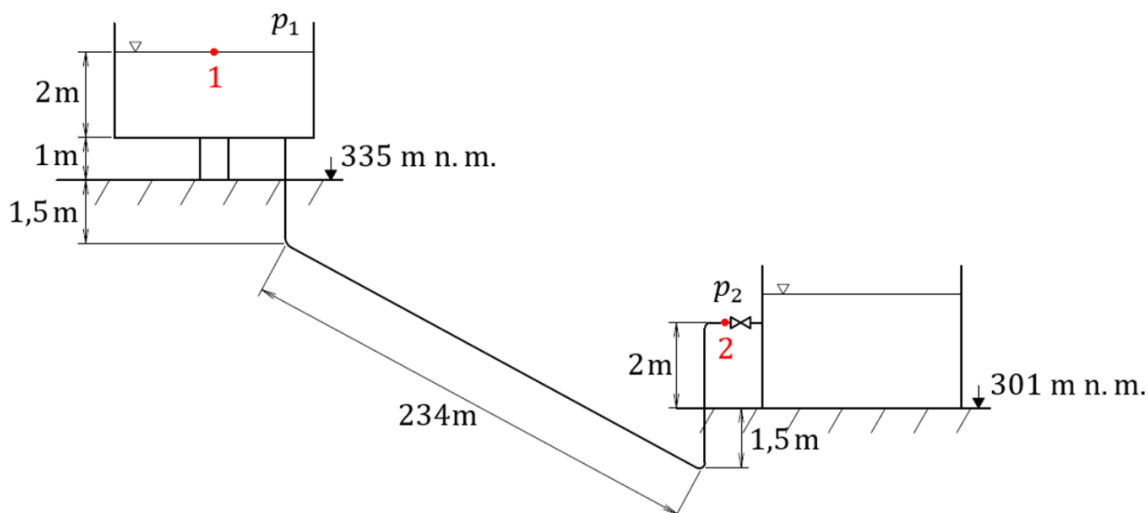
$$v = \frac{Re \mu}{D \rho} = \frac{123\,423,95 (1,3077 \cdot 10^{-3})}{(0,12) \cdot 999,7} = 1,345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Výsledok: Objemový prietok vody pri zanedbaní miestnych strát je  $0,015 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### **Príklad 3-6** Výpočet priemeru potrubia

**Zadanie:** Otec rodiny sa rozhodol, že naprojektuje potrubie, ktoré by slúžilo na dopravu vody zo zásobárne do bazéna, pričom ich vzájomná vzdialenosť je 234 m. Zásobáreň je v nadmorskej výške 335 m n.m. a bazén v nadmorskej výške 301 m n.m. Výška priepadu v zásobárni je 3 m nad terénom a potrubie ide 1,5 m pod povrchom. Pri bazéne výška potrubia nad povrchom dosiahne 2 m a tlak pred ventilom je 250 kPa. Určte minimálny priemer oceľového potrubia na dopravu 20 °C teplej vody ( $\rho = 998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu = 1,005 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ) tak, aby maximálny požadovaný odber bol  $100\,000 \text{ l} \cdot \text{h}^{-1}$ .





Obr. 3.9. Schéma k príkladu 3-6

**Postup:** Zo schémy na obrázku 3.9 je zrejmé, že sa bilancuje systém s hranicami v bodoch 1 a 2, pričom bod 1 je na hladine zásobnej nádrže ( $h_1 = 338$  m), kde je  $v_1 = 0$  m.s<sup>-1</sup> a bod 2 je pred uzáverom – ventilom ( $h_2 = 303$  m), kde je rovnako rýchlosť  $v_2 = 0$  m.s<sup>-1</sup>. Zásobáreň je otvorená a platí, že  $p_1 = p_{atm} = 101\,325$  Pa, potom Bernoulliho rovnica pre takýto prípad bude mať tvar:

$$\frac{1}{2} \kappa_1^2 v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g h_1 = \frac{1}{2} \kappa_2^2 v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + e_z \quad (3.75)$$

Pri uvedených predpokladoch úpravou rovnice (3.75) sa disipovaná energia:

$$e_z = g (h_1 - h_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad (3.76)$$

Z Darcyho-Weisbachovej rovnice sa vyjadří koeficient trenia  $\lambda$ :

$$e_z = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2 e_z D}{L v^2} \quad (3.77)$$

a z Reynoldsovho čísla, kde za rýchlosť prúdenia sa dosadí objemový prietok:

$$Re = \frac{D v \rho}{\mu} = \frac{4 \dot{V} \rho}{\mu \pi D} \quad (3.78)$$

Vylúčením priemeru potrubia  $D$  z rovníc (3.77) a (3.78) sa získa vzťah:

$$\begin{aligned}
 Re \sqrt[5]{\lambda} &= \frac{v D \rho}{\mu} \sqrt[5]{\frac{2 e_z D}{L v^2}} = \frac{\left(\frac{4 \dot{V}}{\pi D^2}\right) D \rho}{\mu} \sqrt[5]{\frac{2 e_z D}{L \left(\frac{4 \dot{V}}{\pi D^2}\right)^2}} = \frac{4 \dot{V} \rho}{\mu \pi D} \sqrt[5]{\frac{e_z \pi^2 D^5}{8 L \dot{V}^2}} = \\
 &= \frac{\rho}{\mu} \sqrt[5]{\frac{128 \dot{V}^3 e_z}{\pi^3 L}}
 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Výpočet: Veľkosť disipovanej energie sa vypočíta z rovnice (3.76):

$$\begin{aligned}
 e_z &= g (h_1 - h_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = 9,81 (338 - 303) + \frac{101\,325 - (0,25 \cdot 10^6)}{998,2} \\
 &= 194,41 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}
 \end{aligned}$$

Zo zadaných hodnôt:

$$\dot{V} = \frac{100\,000 \text{ l}}{h} = \frac{100\,000 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 60} = 0,027 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$L = 1 + 1,5 + 234 + 1,5 + 2 = 240 \text{ m}$$

sa získa:

$$Re \sqrt[5]{\lambda} = \frac{998,2}{(1,005 \cdot 10^{-3})} \sqrt[5]{\frac{128 \cdot 0,027^3 \cdot 194,41}{\pi^3 240}} = 144\,784,91 = 1,45 \cdot 10^5$$

Vypočítaná hodnota  $Re \sqrt[5]{\lambda} > 1124$ , a teda sa uvažuje s turbulentným prúdením. Preto je potrebné poznať hodnotu kritéria  $Re/k^*$  ak  $k^* = \frac{k_{str}}{D}$  a stredná absolútna drsnosť potrubia pre oceľové rúry sa zvolila podľa prílohy 3 ( $k_{str} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ):

$$\frac{Re}{k^*} = \frac{\frac{D v \rho}{\mu}}{\frac{k_{str}}{D}} = \frac{v \rho D^2}{\mu k_{str}} = \frac{4 \dot{V} \rho}{\pi \mu k_{str}} = \frac{4 \cdot 0,027 \cdot 998,2}{\pi (1,005 \cdot 10^{-3})(0,1 \cdot 10^{-3})} = 3,41 \cdot 10^8$$

Z prílohy 6 sa pre hodnoty parametra  $Re \sqrt[5]{\lambda}$  a  $Re/k^*$  odčíta hodnota  $\frac{1}{\sqrt[5]{\lambda}}$ :

$$\frac{1}{\sqrt[5]{\lambda}} = 2,18$$

Hodnota Reynoldsovo čísla a následne priemer potrubia sa vypočíta:

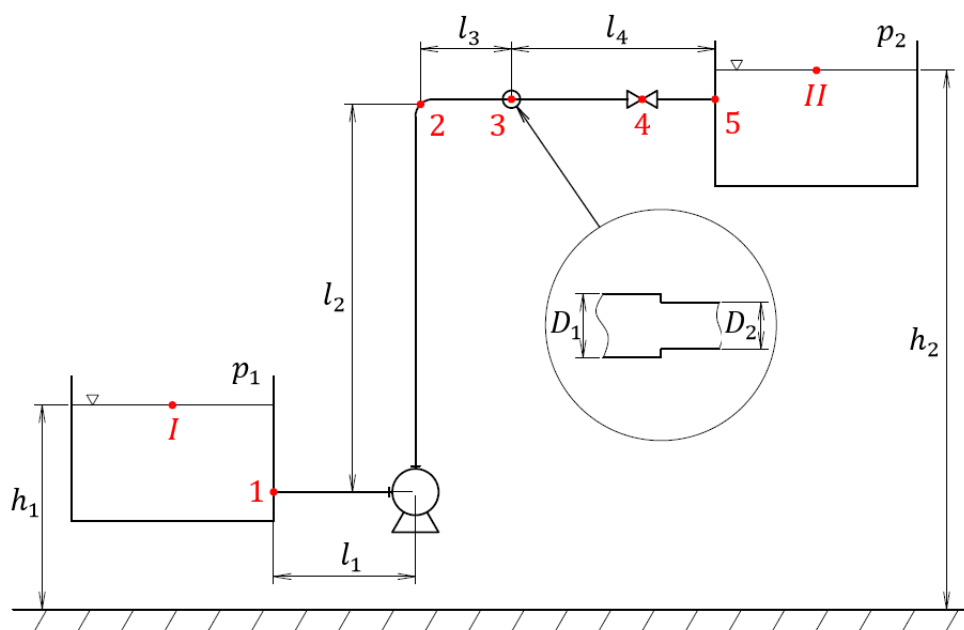
$$Re = Re \sqrt[5]{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{\lambda}} = 144\,784,91 \cdot 2,18 = 315\,631,11$$

$$D = \frac{4 \dot{V} \rho}{\pi \mu Re} = \frac{4 \cdot 0,027 \cdot 998,2}{\pi (1,005 \cdot 10^{-3}) 315 631,11} = 0,108 \text{ m}$$

**Výsledok:** Na objemový prietok vody  $100\,000 \text{ l} \cdot \text{h}^{-1}$  je potrebné potrubie s minimálnym priemerom 108 mm.

### Príklad 3-7 Návrh čerpadla

**Zadanie:** Dané sú dve otvorené nádrže. Z nižšie umiestnenej nádrže sa má prečerpávať  $30^\circ\text{C}$  voda s objemovým prietokom  $3 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ . Potrubie je vyrobené z mierne skorodovaných oceľových rúr, s absolútnou drsnosťou  $k_{str} = 0,25 \text{ mm}$ . Umiestnenie a geometria sú znázornené na obrázku 3.10. V bode 2 je pravouhlé koleno s polomerom ohybu  $60 \text{ mm}$  a v bode 3 je redukcia potrubia z  $55 \text{ mm}$  na  $40 \text{ mm}$  (vnútorné priemery rúr). Pre reguláciu prietoku sa umiestnil v bode 4 uzatvárací ventil so súčiniteľom miestnej straty  $3,5$ . Čerpadlo, navrhnuté podľa výpočtu, je potrebné vybrať z katalógu komerčne predávaných čerpadiel (príloha 7).



Obr. 3.10. Schéma k príkladu 3-7

**Postup:** Požadovanou úlohou je navrhnuť čerpadlo pre danú operáciu. Z charakteristiky čerpadiel (príloha 7) je zrejmé, že pre výber konkrétneho čerpadla je potrebné poznať dva údaje, a to objemový prietok kvapaliny  $\dot{V}$  a výtlačnú výšku  $h_v$ . Hľadaný prietok je zadáný, výtlačná výška sa vypočíta pomocou Bernoulliho rovnice. Vychádzať sa bude z obrázku 3.10, kde sú znázornené geometrické parametre sústavy. Pred začatím výpočtu je potrebné zistiť vlastnosti vody pri  $30^\circ\text{C}$ . Z tabuliek sa odčíta hustota vody  $995,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a kinematická viskozita vody  $0,8042 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Použije sa Bernoulliho rovnica vyjadrená vo forme špecifickej energie, pričom bilancia sa bude vykonávať medzi bodom I a bodom II. Vhodné je nájsť také body, o ktorých je dostupných čo najviac informácií. Takéto body môžu byť napr. hladiny v dvoch zásobníkoch, ako je uvedené na obrázku 3.10. Bernoulliho rovnica bude mať tvar:

$$\frac{1}{2} \kappa_I^2 v_I^2 + \frac{p_I}{\rho} + gh_I + e_c = \frac{1}{2} \kappa_{II}^2 v_{II}^2 + \frac{p_{II}}{\rho} + gh_{II} + e_z \quad (3.80)$$

Je to všeobecný tvar, ktorý je možné v tomto prípade zjednodušiť zavedením predpokladov. Keďže bod I a bod II sa nachádzajú na hladinách, platí, že rýchlosti prúdenia v týchto bodoch sa rovnajú nule (resp. sú veľmi blízke nule), t. j.  $v_I = v_{II} = 0$ , preto sa členy  $\frac{1}{2} \kappa_I^2 v_I^2$  a  $\frac{1}{2} \kappa_{II}^2 v_{II}^2$  môžu zanedbať. Zo zadania je zrejmé, že ide o otvorené zásobníky, takže platí  $p_I = p_{II} = p_{atm}$ , preto sa členy  $\frac{p_I}{\rho}$  a  $\frac{p_{II}}{\rho}$  navzájom odčítajú. Po zavedení týchto úprav rovnica (3.80) nadobudne tvar:

$$e_c = g(h_{II} - h_I) + e_z \quad (3.81)$$

Z rovnice (3.81) vyplýva, že energia dodaná čerpadlom  $e_c$  musí byť dostatočne veľká, aby sa prekonali výškové rozdiely a disipačná energia v dôsledku trenia. Nasleduje výpočet  $e_z$ , kde sa využije Darcyho-Weisbachova rovnica (3.82).

$$e_z = e_{zl} + e_{zm} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{v^2}{2} \quad (3.82)$$

Straty trením sa delia na dĺžkové straty  $e_{zl}$  a miestne straty  $e_{zm}$ . Z rovnice (3.82) je zrejmé, že oba tieto členy sú funkciou rýchlosti prúdenia kvapaliny. Zo zadania je zrejmé, že v bode 3 (obr. 3.10) dôjde k zmene priemeru potrubia. Z toho vyplýva, že v dôsledku platnosti rovnice kontinuity, pri zachovaní daného prietoku, pri zmene priemeru potrubia sa zmení rýchlosť prúdenia kvapaliny. To znamená, že po dĺžke potrubia sa bude počítat s dvoma rozdielnymi rýchlosťami, a preto platí:

$$e_{zl} = e_{zl1} + e_{zl2} = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2} \quad (3.83)$$

$$e_{zm} = e_{zm1} + e_{zm2} = \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{v_1^2}{2} + \sum_{i=4}^5 \xi_i \frac{v_2^2}{2} \quad (3.84)$$

Zo zadania je zrejmé, že objemový prietok má byť  $3 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ , to znamená, že je konštantný pre oba úseky. Pri predpoklade, že voda je nestlačiteľná kvapalina, platí:

$$\dot{V} = S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (3.85)$$

Výpočet: V rovnici (3.85)  $S_1$  a  $S_2$  sú vnútorné prierezy rúr, s priermi  $D_1$  a  $D_2$ . Potom pre rýchlosti  $v_1$  a  $v_2$  platí:

$$v_1 = \frac{\dot{V}}{S_1} = \frac{4 \dot{V}}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,055^2} \doteq 1,263 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{\dot{V}}{S_2} = \frac{4 \dot{V}}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{\pi 0,040^2} \doteq 2,387 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Súčinitele trenia  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  sú ďalšie neznáme veličiny v rovnici (3.83). Z predchádzajúcich výpočtov je zrejmé, že  $\lambda = f(Re, k^*)$ , preto je potrebné vypočítať nasledovné vzťahy:

$$Re_1 = \frac{v_1 D_1}{\nu} = \frac{1,263 \cdot 0,055}{0,8042 \cdot 10^{-6}} \doteq 86\,378$$

$$Re_2 = \frac{v_2 D_2}{\nu} = \frac{2,387 \cdot 0,040}{0,8042 \cdot 10^{-6}} \doteq 118\,727$$

$$k_1^* = \frac{k_{str}}{D_1} = \frac{0,25}{55} \doteq 4,55 \cdot 10^{-3}$$

$$k_2^* = \frac{k_{str}}{D_2} = \frac{0,25}{40} \doteq 6,25 \cdot 10^{-3}$$

Na základe týchto hodnôt sa určí súčiniteľ trenia pomocou Moodyho diagramu (príloha 2) pre danú časť potrubnej vetvy:

$$(Re_1, k_1^*) \rightarrow \lambda_1 \doteq 0,031$$

$$(Re_2, k_2^*) \rightarrow \lambda_2 \doteq 0,033$$

V rovnici (3.83) vystupujú ešte neznáme  $L_1$  a  $L_2$ . Je to celková dĺžka potrubia, v ktorom prúdi kvapalina s rýchlosťou  $v_1$  v prípade  $L_1$  resp. s rýchlosťou  $v_2$  v prípade  $L_2$ . Zo schémy na obrázku 3.10 je možné určiť:

$$L_1 = l_1 + l_2 + l_3 = 2000 + 5500 + 2500 = 10\,000 \text{ mm} = 10 \text{ m}$$

$$L_2 = l_4 = 3500 \text{ mm} = 3,5 \text{ m}$$

Všetky veličiny z rovnice (3.83) sú už známe, takže po dosadení pre dĺžkové straty sa dostane:

$$\begin{aligned} e_{zl} &= e_{zl1} + e_{zl2} = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2} = \\ &= 0,031 \frac{10}{0,055} \frac{1,263^2}{2} + 0,033 \frac{3,5}{0,040} \frac{2,387^2}{2} \doteq 4,50 + 8,23 = \\ &= 12,73 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \end{aligned}$$

Pre výpočet miestnych strát treba najprv určiť jednotlivé súčinitele miestnych strát  $\xi_i$ . Miesta, kde sa uvažuje s miestnymi stratami, sa označili na obrázku 3.10 číslami 1 až 5. Všeobecné vzťahy pre vybrané miestne odpory sú uvedené v prílohe 4.

V bode 1 je náhle zúženie potrubia, platí teda nasledujúca rovnica, kde  $S_0$  je prierezová plocha pred tvarovou zmenou (v smere prúdenia) a  $S_1$  je prierezová plocha za tvarovou zmenou. Keďže platí, že  $S_0 \gg S_1$ , pomer  $\frac{S_1}{S_0} \approx 0$ .

$$\xi_1 = 0,5 \left( 1 - \frac{S_1}{S_0} \right) = 0,5 (1 - 0) = 0,5$$

V bode 2 sa nachádza pravouhlé koleno s polomerom ohybu 60 mm. V prílohe 4 je možné vidieť závislosť miestneho odporu  $\xi$  od  $r/d$ . Miestny odpor v bode 2 teda bude:

$$\frac{r}{d_1} = \frac{60}{55} \doteq 1,09 \rightarrow \xi_2 \doteq 0,2$$

V bode 3 sa nachádza zúženie priemeru potrubia, a to z priemeru 55 mm na 40 mm. Opäť sa využije rovnica pre náhle zúženie potrubia:

$$\xi_3 = 0,5 \left( 1 - \frac{S_2}{S_1} \right) = 0,5 \left( 1 - \frac{\frac{\pi D_2^2}{4}}{\frac{\pi D_1^2}{4}} \right) = 0,5 \left( 1 - \frac{\frac{\pi 0,04^2}{4}}{\frac{\pi 0,055^2}{4}} \right) \doteq 0,24$$

V bode 4 sa nachádza uzatvárací ventil. Zo zadania je známa hodnota súčiniteľa miestnej straty:

$$\xi_4 = 3,5$$

V bode 5 dôjde k náhlemu rozšíreniu potrubia (vstup do nádoby). Všeobecne sa pre takýto prípad môže písať nasledovná rovnica, kde  $S_2$  je prierezová plocha pred tvarovou zmenou (v smere prúdenia) a  $S_3$  je prierezová plocha za tvarovou zmenou. Keďže platí, že  $S_3 \gg S_2$ , pomer  $\frac{S_2}{S_3} \approx 0$ :

$$\xi_5 = \left( 1 - \frac{S_2}{S_3} \right)^2 = (1 - 0)^2 = 1$$

Po dosadení vypočítaných miestnych odporov do rovnice (3.84) sa získa:

$$\begin{aligned} e_{zm} &= e_{zm1} + e_{zm2} = \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{v_1^2}{2} + \sum_{i=4}^5 \xi_i \frac{v_2^2}{2} = \\ &= (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \frac{v_1^2}{2} + (\xi_4 + \xi_5) \frac{v_2^2}{2} = \\ &= (0,5 + 0,2 + 0,24) \frac{1,263^2}{2} + (3,5 + 1) \frac{2,387^2}{2} \doteq 0,75 + 12,82 = \\ &= 13,57 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \end{aligned}$$

Potom pre celkovú disipačnú energiu  $e_z$  platí podľa rovnice (3.82):

$$e_z = e_{zl} + e_{zm} = 12,73 + 13,57 = 26,3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Po dosadení do rovnice (3.81) sa získa hodnota energie čerpadla:

$$e_c = g (h_{II} - h_I) + e_z = 9,81 (8 - 2) + 26,3 = 85,16 \text{ J.kg}^{-1}$$

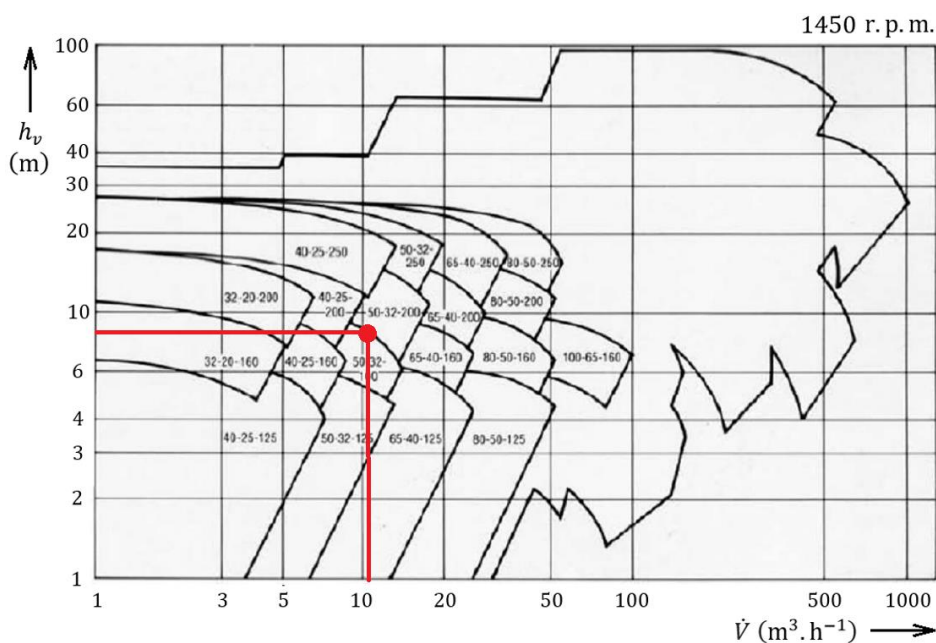
Z prílohy 7 je zrejmé, že na výber čerpadla je potrebné poznať objemový prietok  $\dot{V}$  ( $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ ) a výtlačnú výšku  $h_v$  (m). Zadaný objemový prietok je nutné prepočítať na správne jednotky:

$$\dot{V} = 3 \text{ l.s}^{-1} = 10,8 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

Výtlačná výška bude:

$$h_v = \frac{e_c}{g} = \frac{85,16}{9,81} \doteq 8,68 \text{ m}$$

Pomocou vypočítaných údajov sa môže vybrať konkrétny typ čerpadla, ako je znázornené na obrázku 3.11. Konkrétny typ odstredivého čerpadla vybraného z katalógu komerčného predajcu (príloha 8) je v tomto prípade čerpadlo 50-32-160.



Obr. 3.11. Výber čerpadla

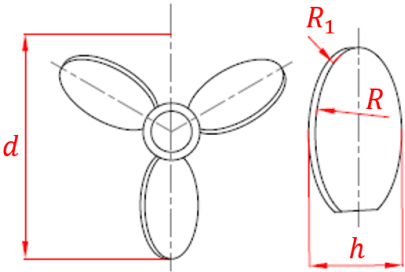
**Výsledok:** Na základe vypočítanej výtlačnej výšky a prietoku dopravovanej kvapaliny je pre čerpanie vhodné čerpadlo s označením 50-32-160.

### Príklad 3-8 Návrh miešadla

**Zadanie:** Úlohou je vypočítať príkon a rozmery miešadla, ako aj priemer valcovej nádoby pre tento účel. Miešadlo má byť vrtuľové podľa STN 69 1019 a s frekvenciou otáčania  $620 \text{ min}^{-1}$ . Treba vymiešať  $0,40 \text{ m}^3$  jogurtu. Miešacia nádoba je naplnená na 75 %, pričom jej výška  $h_N$  má byť 700 mm. Hustota jogurtu  $\rho$  je  $1035 \text{ kg.m}^{-3}$  a dynamická viskozita  $\mu$  je  $150 \text{ mPa.s}$ .

**Postup:** Na obrázku 3.12 je vidieť miešadlo, ktoré treba navrhnuť pre danú operáciu, pričom sú na obrázku znázornené aj odporúčané geometrické pomery, ktoré zabezpečia, aby hlavné parametre procesu ostali zachované pri rôznych veľkostiach miešadiel. Zo zadania je potrebné

najskôr vypočítať veľkosť nádoby, následne sa určia rozmery miešadla a nakoniec sa vypočíta potrebný príkon.

| TVAR MIEŠADLA                                                                     | NÁZOV                                                                    | $\frac{D}{d}$ | SIMPLEXY               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------------|
|  | VRTUĽOVÉ MIEŠADLO<br>S KONŠTANTNÝM<br>STÚPANÍM ZÁVITOVKY<br>STN 69 1019a | 3,0           | $\frac{h}{d} = 0,22$   |
|                                                                                   |                                                                          | AŽ            | $\frac{R}{d} = 0,40$   |
|                                                                                   |                                                                          | 4,0           | $\frac{R_1}{d} = 0,16$ |

Obr. 3.12. Vrtuľové miešadlo podľa STN 69 1019a

Výpočet: Keďže je známy objem jogurtu  $V$  a miera plnenia nádoby  $\eta$ , je možné vypočítať objem nádoby:

$$V_N = \frac{V}{\eta} = \frac{0,4}{0,75} = 0,533 \text{ m}^3$$

Zo zadania je zrejmé, že nádoba má byť valcovitého tvaru s výškou 0,7 m. Pre objem platí:

$$V_N = \frac{\pi D_N^2}{4} h_N \rightarrow D_N = \sqrt{\frac{4V_N}{\pi h_N}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,533}{\pi \cdot 0,7}} \doteq 0,985 \text{ m}$$

Ako je vidieť na obrázku 3.12, pre tento typ miešadla sa odporúča pomer medzi priemerom nádoby  $D_N$  a priemerom miešadla  $d$  3 až 4. Ak nie je presne určené, hodnota sa môže zvoliť z daného intervalu, pre tento prípad sa zvolila hodnota  $D_N/d = 3,5$ .

$$\frac{D_N}{d} = 3,5 \rightarrow d = \frac{D_N}{3,5} = \frac{0,985}{3,5} \doteq 0,281 \text{ m}$$

Priemer navrhovaného miešadla bude 0,281 m. Na základe simplexov na obrázku 3.12 sa vypočítajú ďalšie rozmery miešadla:

$$\frac{h}{d} = 0,22 \rightarrow h = 0,22 d = 0,22 \cdot 0,281 \doteq 0,062 \text{ m}$$

$$\frac{R}{d} = 0,40 \rightarrow R = 0,40 d = 0,40 \cdot 0,281 \doteq 0,112 \text{ m}$$

$$\frac{R_1}{d} = 0,16 \rightarrow R_1 = 0,16 d = 0,16 \cdot 0,281 \doteq 0,045 \text{ m}$$

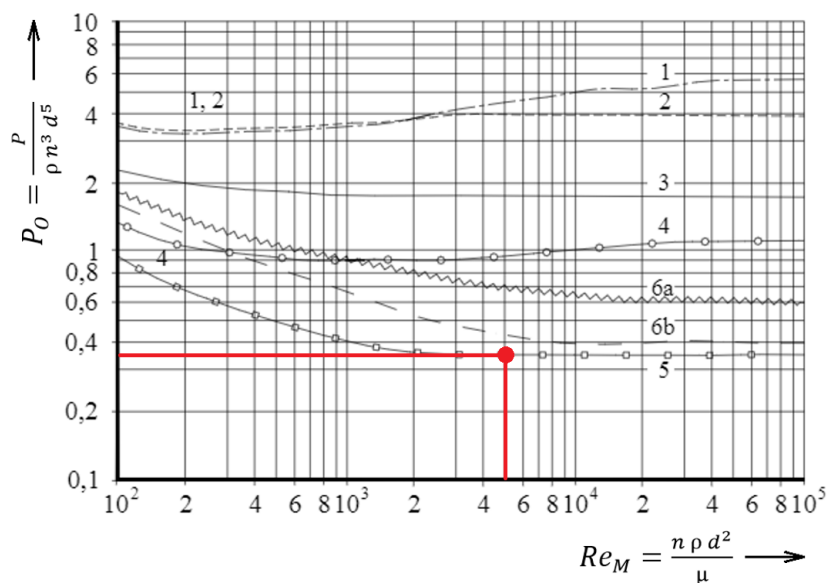
Na to, aby sa zistil príkon miešadla, je potrebné poznať príkonovú charakteristiku navrhovaného miešadla, ako je uvedené v prílohe 8. Pre odčítanie z obrázka (príloha 8) je



potrebné poznať režim prúdenia, čo udáva modifikované Reynoldsovo kritérium v rovnici (3.32):

$$Re_M = \frac{n \rho d^2}{\mu} = \frac{620}{60} \frac{1035 \cdot 0,281^2}{0,15} \doteq 5630 = 5,63 \cdot 10^3$$

Charakteristiku pre vrtuľové miešadlo predstavuje čiara 5, pričom na osi  $x$  je vypočítané modifikované Reynoldsovo kritérium a na osi  $y$  sa odčíta príkonové číslo  $P_O$ . Pre konkrétne navrhované miešadlo je charakteristika vyznačená na obrázku 3.13.



Obr. 3.13. Charakteristika vrtuľového miešadla podľa príkladu 3-8

$$P_O = 0,35$$

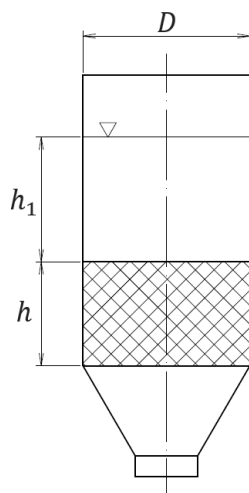
Podľa rovnice (3.36) je možné na základe príkonového čísla  $P_O$  vypočítať príkon  $P$ :

$$P = P_O \rho n^3 d^5 = 0,35 \cdot 1035 \left( \frac{620}{60} \right)^3 0,281^5 \doteq 700 \text{ W}$$

**Výsledok:** Na základe zadaných údajov sa vypočítal priemer miešacej nádoby a taktiež rozmery vrtuľového miešadla. Príkon miešadla pre dané podmienky je 700 W.

### Príklad 3-9 Filtrácia

**Zadanie:** Lôžko gravitačného filtra tvoria častice guľovitého tvaru, ktoré majú vlastný špecifický povrch  $35 \text{ mm}^2 \cdot \text{mm}^{-3}$ . Experimentálne sa zistilo, že pórovitosť lôžka je 0,52, jeho priemer je 0,2 m a výšku má 1,2 m. Výška hladiny vody nad lôžkom je 1,5 m. Treba určiť objemový prietok filtrátu, ak sa filtruje voda s teplotou  $30^\circ \text{C}$ .



Obr. 3.14. Schéma k príkladu 3-9

**Postup:** Úlohou je vypočítať objemový prietok filtrátu. Schéma príkladu je zobrazená na obrázku 3.14. Najprv treba určiť vlastnosti vody pri 30 °C. Z chemických tabuliek sa odčíta hustota vody 995,7 kg.m<sup>3</sup> a kinematická viskozita 0,8042. 10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Vychádza sa z teórie prúdenia tekutiny nehybnou pórovitou vrstvou. Pre energetické straty platí rovnica (3.39). Keďže sa uvažuje laminárne prúdenie pri procese filtrácie, koeficient trenia bude mať tvar podľa rovnice (3.40). Ďalej sa použijú rovnica na výpočet Reynoldsovho čísla (3.41) a rovnica ekvivalentného priemeru (3.42). Úpravami sa dostane rovnica pre výpočet tlakovej straty pri prúdení tekutiny nehybnou pórovitou vrstvou (3.46).

**Výpočet:** Výraz  $\frac{A'}{36}$  sa označuje  $\omega$  a predstavuje tvarový faktor. Hodnota  $A'$  pre guľové častice má hodnotu 160, potom platí:

$$\omega = \frac{A'}{36} = \frac{160}{36} \doteq 4,44$$

Následne je nevyhnutné vypočítať špecifický odpor filtračného koláča  $\alpha$ . (Poznámka: špecifický odpor filtračného koláča, ako aj špecifický povrch je vhodné dosadiť v základných jednotkách):

$$\alpha = \omega \frac{(1 - \varepsilon)^2 a_v^2}{\varepsilon^3} = 4,44 \frac{(1 - 0,52)^2 (35 \cdot 10^3)^2}{0,52^3} \doteq 8,91 \cdot 10^9 \text{ m}^{-2}$$

V tomto prípade sa tlakový rozdiel medzi hladinou a filtračnou prepážkou vypočíta ako hydrostatický tlak kvapalinového stĺpca  $h^*$ . Podľa obrázku 3.14 táto výška predstavuje súčet dvoch zakótovaných výšok:

$$\Delta p_z = \rho g h^* = 995,7 \cdot 9,81 \cdot (1,2 + 1,5) \doteq 26\,373 \text{ Pa}$$

Vyjadrením  $u_0$  zo vzťahu (3.46) je možné vypočítať mimovrstvovú rýchlosť kvapaliny. V tomto vzťahu figuruje dynamická viskozita kvapaliny, ktorá je zatiaľ neznáma, takže ju treba vypočítať pomocou hustoty a kinematickej viskozity:

$$\mu = \nu \rho = 0,8042 \cdot 10^{-6} \cdot 995,7 = 8,007 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$u_0 = \frac{\Delta p_z}{\alpha \mu h} = \frac{26\,373}{8,91 \cdot 10^9 \cdot 8,007 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2} \doteq 3,08 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pre objemový prietok potom platí:

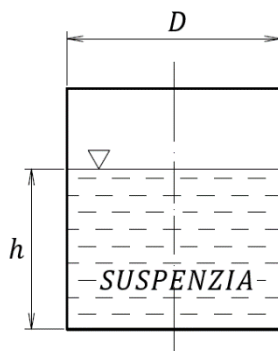
$$\dot{V} = \frac{\pi D^2}{4} u_0 = \frac{\pi 0,2^2}{4} 3,08 \cdot 10^{-3} \doteq 9,68 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 348,48 \text{ l} \cdot \text{h}^{-1}$$

Výsledok: Objemový prietok filtrátu bude 348,48 l. h<sup>-1</sup>.

### **Príklad 3-10** Čas usadzovania

Zadanie: Suspenziu, ktorú tvorí voda a žulové častice rôznych veľkostí pri teplote 30 °C, treba pred filtráciou upraviť usadzovaním, aby sa z nej vylúčili všetky častice s väčším priemerom ako 15 μm. Vypočítajte čas potrebný na usadzovanie za nasledovných podmienok:

- 3 m<sup>3</sup> suspenzie je v stojatej valcovej nádobe s priemerom 3,5 m,
- žulové častice majú približne guľovitý tvar s hustotou 2850 kg. m<sup>-3</sup>,
- usadzovanie je nerušené a vlastnosti vody pri 30 °C sú  $\rho = 995,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu = 0,8007 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ .



Obr. 3.15. Schéma k príkladu 3-10

Postup: Čas usadzovania sa bude počítať na základe predpokladu, že usadzovanie sa ukončí vtedy, keď častice žuly s priemerom 15 μm prejdú vzdialenosť od hladiny suspenzie na dno usadzovacej nádoby. Na to je potrebné poznať rýchlosť usadzovania tejto častice. Najskôr sa vypočíta Archimedovo číslo, ktoré odhalí oblasť prúdenia – či to bude Stokesova oblasť, prechodná alebo turbulentná oblasť. Na základe hodnoty Archimedovho čísla podľa rovnice (3.51) sa vyberie z tabuľky 3.2 vzťah pre výpočet Reynoldsovho čísla.

Výpočet: Archimedovo číslo bude mať hodnotu:

$$Ar = \frac{g d^3 (\rho_t - \rho) \rho}{\mu^2} = \frac{9,81 (15 \cdot 10^{-6})^3 (2850 - 995,7) 995,7}{(0,8007 \cdot 10^{-3})^2} = 0,095$$

Na základe Archimedovho čísla sa určilo, že ide o Stokesovu oblasť, pre ktorú platí, že Reynoldsovo číslo sa vypočíta:

$$Re = \frac{Ar}{18} = \frac{0,095}{18} = 5,297 \cdot 10^{-3}$$

Usadzovanie týchto častíc bude prebiehať v laminárnej oblasti. Z Reynoldsovho čísla sa vyjadrí rýchlosť usadzovania:

$$Re = \frac{d_{\text{častice}} v \rho}{\mu} \rightarrow v = \frac{Re \mu}{d_{\text{častice}} \rho} = \frac{(5,297 \cdot 10^{-3}) (0,8007 \cdot 10^{-3})}{(15 \cdot 10^{-6}) 995,7} = 2,8397 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Výška hladiny suspenzie  $h$  sa určí z objemu suspenzie  $V$  a priemeru usadzovacej nádoby  $D$  podľa vzťahu:

$$h = \frac{4 V}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 3}{\pi 3,5^2} = 0,3118 \text{ m}$$

a čas usadzovania:

$$t = \frac{h}{v} = \frac{0,3118}{2,8397 \cdot 10^{-4}} = 1098 \text{ s} \doteq 18 \text{ min}$$

Kontrola výpočtu: Pre guľovú časticu v Stokesovej oblasti platí:

$$c_D = \frac{24}{Re}$$

a pre rýchlosť usadzovania guľovej častice:

$$v = \sqrt{\frac{4 d (\rho_t - \rho) g}{3 c_D \rho}} = \sqrt{\frac{4 (15 \cdot 10^{-6}) (2850 - 995,7) 9,81}{3 \frac{24}{5,297 \cdot 10^{-3}} 995,7}} = 2,8397 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Z výsledku rýchlosti je zrejmé, že oba postupy výpočtu usadzovacej rýchlosti sa rovnajú, a preto možno považovať výsledný čas usadzovania za správny.

Výsledok: Čas potrebný na usadzovanie žulových častíc za daných podmienok je 18 min.

## NERIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 3-11

Zadanie: Vypočítajte hodnotu Reynoldsovho čísla a určte charakter prúdenia chloroformu, ktorý prúdi pri 25 °C ( $\rho = 1479,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu = 0,52 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ) potrubím s priemerom 30 mm v množstve  $102 \text{ dm}^3 \cdot \text{min}^{-1}$ .

Výsledok:  $Re = 145,1$ , ide o laminárne prúdenie

**Príklad 3-12**

**Zadanie:** Olej s hustotou  $\rho = 820 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  vstupuje cez hrdlo s priemerom 70 mm do výmenníka tepla typu rúrka v rúrke a prechádza priestorom medzi rúrkami, tzv. medzikružím. Vonkajší priemer vnútornej rúrky je 50 mm a vnútorný priemer vonkajšej rúrky je 98 mm. Akou rýchlosťou prúdi olej vo výmenníku tepla, ak na vstupnom hrdle bola jeho rýchlosť  $1,22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a aký je jeho hmotnostný prietok v  $\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$ ?

**Výsledok:**  $v = 2,59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\dot{m} = 13\,860 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$

**Príklad 3-13**

**Zadanie:** Vypočítajte tlakovú stratu spôsobenú trením pre prietok benzínu ocelovou, vo vnútri pozinkovanou rúrkou so strednou absolútnou drsnosťou  $k_{str} = 0,15 \text{ mm}$ , ktorá má vonkajší priemer 22 mm, hrúbku steny 2 mm a dĺžku 15 m. Priemerná rýchlosť prúdenia benzínu je  $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , hustota benzínu a kinematická viskozita  $\rho = 750 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\nu = 0,00216 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Výsledok:**  $\Delta p = 26\,015 \text{ Pa}$

**Príklad 3-14**

**Zadanie:** V potrubnej vetve cirkuluje voda, ktorá má  $10^\circ\text{C}$ . V bode 1 je vnútorný priemer potrubia 30 mm, tlakomer ukazuje hodnotu 300 kPa a rýchlosť prúdenia vody je  $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Určte tlak v mieste 2, ktoré je o 7 m vyššie ako bod 1, keď vnútorný priemer potrubia je v tomto mieste 10 mm. Taktiež určte charakter prúdenia v oboch častiach potrubnej vetvy. Neuvažujte s dĺžkovými ani miestnymi stratami. Hustota vody pri  $10^\circ\text{C}$  je  $999,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , dynamická viskozita je  $1,3077 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ .

**Výsledok:**  $p_2 = 221 \text{ kPa}$ , charakter prúdenia je v oboch úsekoch turbulentný

**Príklad 3-15**

**Zadanie:** Vypočítajte tlakovú stratu v baroch pri prúdení 50 hmot. % vodného roztoku kyseliny sírovej ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) novým ocelovým potrubím s vnútorným priemerom 80 mm a dĺžkou 300 m pri  $25^\circ\text{C}$ . Hustota roztoku je  $1483 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a dynamická viskozita je  $3,15 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ . Objemový prietok roztoku činí  $55 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ . V potrubnej trase sú zaradené 3 pravouhlé kolená s pomerom  $r/d = 1,5$  a 4 uzatváracie ventily s liatym telesom.

**Výsledok:**  $\Delta p \doteq 6,54 \text{ bar}$

**Príklad 3-16**

**Zadanie:** Novým liatinovým potrubím s priemerom 150 mm s dĺžkou 600 m prúdi olej s viskozitou  $\mu = 0,06 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  a hustotou  $\rho = 930 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Objemový prietok oleja je  $800 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$ . Aký bude potrebný príkon elektromotora čerpadla na dopravu oleja za predpokladu, že sa energia dodaná čerpadlom spotrebuje len na prekonanie strát spôsobených trením a čerpadlo má celkovú účinnosť 50 %?

**Výsledok:** Príkon čerpadla predstavuje  $1,02 \text{ kW}$ .

### **Príklad 3-17**

**Zadanie:** Vypočítajte rýchlosť usadzovania tuhej častice v glyceríne pri neovplyvnenej sedimentácii. Priemer častice je 0,1 mm a jej hustota  $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Hustota glycerínu je  $\rho = 1237 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a viskozita  $\nu = 82,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Výsledok:**  $v = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### **Príklad 3-18**

**Zadanie:** Vypočítajte minimálny priemer častíc štrku, ktoré sa usadia v nádrži vysokej 1 m za menej ako 20 s. Hustota častíc je  $7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a usadzujú sa vo vode s hustotou  $998,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a kinematickou viskozitou  $1,006 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Výsledok:**  $d_{\min} = 6,08 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

### **Príklad 3-19**

**Zadanie:** V nádobe s priemerom 1,5 m a výškou 1,8 m sa miešajú suroviny na výrobu farbív šesťlopatkovým miešadlom so šikmými lopatkami podľa STN 69 1020 s priemerom 65 cm. Hustota surovín je  $1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a dynamická viskozita je 1,8 mPa. s a vyplňa objem nádoby do troch štvrtín. Miešadlo má frekvenciu otáčania  $250 \text{ min}^{-1}$ . Vypočítajte príkon potrebný na miešanie navrhovaným miešadlom.

**Výsledok:**  $P = 22,6 \text{ kW}$

### **Príklad 3-20**

**Zadanie:** Do reaktora, v ktorom je tlak 250 kPa, sa čerpá metanol vodorovným oceľovým neskoroďovaným potrubím s vnútorným priemerom 50 mm a dĺžkou 60 m. Teplota metanolu je  $25^\circ \text{C}$  a na výstupe z čerpadla je hodnota tlaku 350 kPa. Aký je hmotnostný tok metanolu v prípade, že sa zanedbajú tlakové straty vyvolané miestnymi odpormi? Vlastnosti metanolu pri  $25^\circ \text{C}$  sú: hustota  $786,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , viskozita 0,55 mPa. s.

**Výsledok:**  $\dot{m} = 4,9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

## ZOZNAM SYMBOLOV

|            |                                              |                                     |
|------------|----------------------------------------------|-------------------------------------|
| $c_D$      | – koeficient odporu                          | (1)                                 |
| $d$        | – priemer tuhej častice                      | (m)                                 |
| $d$        | – priemer miešadla                           | (m)                                 |
| $d_s$      | – ekvivalentný priemer častice               | (m)                                 |
| $dt$       | – diferenciálny časový interval              | (s)                                 |
| $dV$       | – diferenciálny objem filtrátu               | ( $\text{m}^3$ )                    |
| $e_c$      | – energia čerpadla                           | ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ) |
| $e_z$      | – disipačná energia                          | ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ) |
| $h$        | – výška pórovitej vrstvy                     | (m)                                 |
| $h_{str}$  | – stratová výška v sacej časti potrubia      | (m)                                 |
| $h_{str2}$ | – stratová výška vo výtlačnej časti potrubia | (m)                                 |
| $h_1$      | – vzdialenosť miesta 1 od vzťažnej hladiny   | (m)                                 |

|               |                                                                   |                      |
|---------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $h_s$         | – sacia výška daná vzťahom ( $h_{01} - h_1$ )                     | (m)                  |
| $h_2$         | – vzdialenosť miesta 2 od vzťažnej hladiny                        | (m)                  |
| $h_v$         | – výtláčna výška daná vzťahom ( $h_2 - h_{02}$ )                  | (m)                  |
| $k$           | – súčiniteľ úmernosti                                             | (1)                  |
| $k^*$         | – relatívna drsnosť potrubia                                      | (1)                  |
| $k_{str}$     | – absolútna drsnosť potrubia                                      | (m)                  |
| $m_t$         | – celkové množstvo častíc vo filtrovanej suspenzii                | (kg)                 |
| $m_{tz}$      | – hmotnosť tuhých častíc zadržaných filtrom                       | (kg)                 |
| $n$           | – frekvencia otáčania miešadla                                    | (s <sup>-1</sup> )   |
| $p_v$         | – príkon čerpadla                                                 | (W)                  |
| $p_{01}$      | – tlak na vstupe do čerpadla                                      | (Pa)                 |
| $p_{02}$      | – tlak na výstupe z čerpadla                                      | (Pa)                 |
| $p_1$         | – tlak v mieste 1                                                 | (Pa)                 |
| $p_2$         | – tlak v mieste 2                                                 | (Pa)                 |
| $p_1$         | – tlak na hladine kvapaliny v zásobnej nádrži v bode 1            | (Pa)                 |
| $p_2$         | – tlak na hladine kvapaliny v zásobnej nádrži v bode 2            | (Pa)                 |
| $u_0$         | – rýchlosť filtrácie                                              | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v$           | – usadzovacia rýchlosť                                            | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v$           | – rýchlosť prúdenia kvapaliny                                     | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v_{01}$      | – rýchlosť kvapaliny na vstupe do čerpadla                        | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v_{02}$      | – rýchlosť kvapaliny na výstupe z čerpadla                        | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v_1$         | – rýchlosť kvapaliny v mieste 1                                   | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $v_2$         | – rýchlosť kvapaliny v mieste 2                                   | (m.s <sup>-1</sup> ) |
| $A$           | – filtračná plocha                                                | (m <sup>2</sup> )    |
| $A$           | – konštanta miešadla                                              | (1)                  |
| $A$           | – plocha priemetu častice do roviny kolmej na smer toku kvapaliny | (m <sup>2</sup> )    |
| $D$           | – priemer potrubia                                                | (m)                  |
| $D$           | – charakteristický rozmer, pri kruhovom potrubí priemer           | (m)                  |
| $D_e$         | – ekvivalentný hydraulický priemer                                | (m)                  |
| $D_p$         | – ekvivalentný priemer častíc podľa špecifického povrchu          | (m)                  |
| $F_O$         | – sila odporu                                                     | (N)                  |
| $O$           | – zmáčaný obvod prierezu                                          | (m)                  |
| $P$           | – príkon                                                          | (W)                  |
| $P_O$         | – príkonové číslo                                                 | (1)                  |
| $Re_M$        | – modifikované Reynoldsovo kritérium                              | (1)                  |
| $S$           | – plocha prierezu                                                 | (m <sup>2</sup> )    |
| $\alpha$      | – špecifický odpor filtračného koláča                             | (m <sup>-2</sup> )   |
| $a_v$         | – vlastný špecifický povrch                                       | (m <sup>-1</sup> )   |
| $\varepsilon$ | – pórovitosť nehybnej vrstvy                                      | (1)                  |
| $\eta$        | – účinnosť filtrácie                                              | (1)                  |
| $\eta_C$      | – celková účinnosť čerpadla                                       | (1)                  |
| $\kappa_1$    | – bezrozmerná korekcia špecifickej kinetickej energie v mieste 1  | (1)                  |
| $\kappa_2$    | – bezrozmerná korekcia špecifickej kinetickej energie v mieste 2  | (1)                  |
| $\lambda$     | – koeficient trenia                                               | (1)                  |
| $\lambda'$    | – koeficient trenia                                               | (1)                  |
| $\mu$         | – dynamická viskozita                                             | (Pa.s)               |

|                  |                                    |                                    |
|------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $\nu$            | – kinematická viskozita            | $(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$ |
| $\xi$            | – koeficient miestnych strát       | (1)                                |
| $\rho$           | – hustota tekutiny                 | $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$  |
| $\rho$           | – hustota kvapaliny                | $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$  |
| $\rho$           | – hustota miešanej kvapaliny       | $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$  |
| $\rho_t$         | – hustota tuhej častice            | $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$  |
| $\Delta p_{str}$ | – tlaková strata v potrubnej sieti | (Pa)                               |



## 4 TEPELNÉ PROCESY

Prestup tepla je prenos tepelnej energie z teplejšieho objektu na chladnejší. Tepelné procesy, napr. ohrievanie, chladenie, kondenzácia a odparovanie, sa riadia zákonmi prenosu tepla, ktoré sú podrobnejšie uvádzané v literatúre zaoberajúcej sa termodynamikou. Pri návrhu technických zariadení sa tieto poznatky uplatňujú v rozsahu a spôsobom potrebným pre určitý typ zariadenia.

Prestup tepla je proces, ktorý je dôležitý v každom odvetví priemyslu. Spracovaný materiál sa musí ohriať na potrebnú teplotu, treba mu dodať či odobrať reakčné teplo, dodať výparné teplo pri odparovaní kvapalín, alebo naopak, odobrať skupenské teplo pri kondenzácii pár a pod. Veľmi často sa požaduje, aby prestup tepla bol čo najintenzívnejší, v iných prípadoch naopak treba, aby výmena tepla s okolím bola čo najmenšia. Prestup tepla má veľký význam najmä preto, že vo väčšine prevádzok predstavuje energia na vykurovanie a chladenie najväčšiu položku zo všetkých spotrebovaných energií.

Základné spôsoby šírenia tepla sú vedenie (kondukcia), prúdenie (konvekcia) a sálanie (radiácia). Je dôležité zdôrazniť, že všetky tri mechanizmy šírenia tepla pôsobia spolu. Obyčajne niektorý z nich buď prevláda, alebo sa vôbec neobjavuje.

Vedenie tepla je charakterizované tým, že je to odovzdávanie energie na mikroskopickú úroveň, t. j. medzi atómami a molekulami systému. Uplatňuje sa predovšetkým v tuhých telesách, ktorých rôzne časti majú rôznu teplotu. Teplo sa vedením šíri tiež v kvapalinách a plynch, kde sa však tiež uplatňuje prenos tepla prúdením.

Prúdenie sa vyskytuje v tekutinách a predstavuje odovzdávanie energie na makroskopickú úroveň, t. j. medzi časticami tekutiny obsahujúcimi veľké množstvo molekúl či atómov. Je vždy sprevádzané vedením tepla a relatívny podiel oboch závisí od hydrodynamických podmienok. Prestup tepla prúdením je podstatne rýchlejší ako vedenie tepla v tekutinách.

Prestup tepla sálaním je zásadne odlišný od predchádzajúcich dvoch spôsobov. Pri sálaní sa teplo šíri vo forme elektromagnetického vlnenia a na to, aby mohlo prechádzať z jedného telesa na druhé, nepotrebuje hmotné prostredie (na rozdiel od prvých dvoch).

### VÝPOČET PRESTUPU TEPLA VEDENÍM

Vzťahy na výpočet prestupu tepla vedením vychádzajú z Fourierovej-Kirchhoffovej diferenciálnej rovnice s aplikáciou Fourierovho zákona vedenia tepla a Newtonovho ochladzovacieho zákona. Rovnice, ktoré možno priamo aplikovať na príklady z praxe, sú odvodené z uvedených rovníc pre daný súradnicový systém – karteziánsky súradnicový systém, cylindrický súradnicový systém a sférický súradnicový systém. Aplikáciou jednotlivých súradnicových systémov je možné vypočítať prestup tepla vedením pre rovinné plochy, pre valcové plochy a guľové plochy.

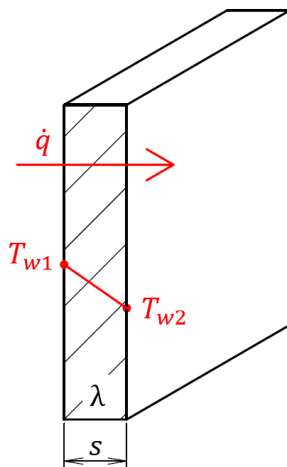
### VÝPOČET PRESTUPU TEPLA VEDENÍM V ROVINNEJ STENE

Základný vzťah pre výpočet tepelného toku v rovinnej stene je odvodený pomocou hustoty tepelného toku:

$$\dot{Q} = \dot{q} A \quad (4.1)$$

kde

|           |                          |                       |
|-----------|--------------------------|-----------------------|
| $\dot{Q}$ | – tepelný tok            | (W)                   |
| $\dot{q}$ | – hustota tepelného toku | (W. m <sup>-2</sup> ) |
| $A$       | – teplovýmenná plocha    | (m <sup>2</sup> )     |



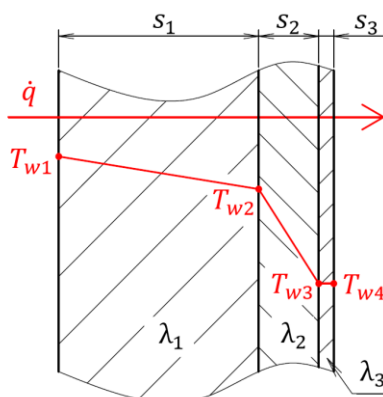
Obr. 4.1. Prestup tepla cez jednoduchú rovinnú stenu

Ak ide o rovinnú stenu, ktorá pozostáva len z jednej vrstvy (obr. 4.1), hustotu tepelného toku možno napísať:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{s}{\lambda}} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{s}{\lambda}} \quad (4.2)$$

kde

|            |                             |                                         |
|------------|-----------------------------|-----------------------------------------|
| $\Delta T$ | – rozdiel teplôt na stenách | (K)                                     |
| $s$        | – hrúbka steny              | (m)                                     |
| $\lambda$  | – tepelná vodivosť          | (W. m <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup> ) |
| $T_{w1}$   | – teplota na stene          | (K)                                     |
| $T_{w2}$   | – teplota na stene          | (K)                                     |



Obr. 4.2. Prestup tepla cez zloženú rovinnú stenu

Ak ide o stenu, ktorá je zložená z troch stien, ako je uvedené na obrázku 4.2, bude platiť vzťah:

$$\dot{q} = \frac{T_{w1} - T_{w4}}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} \quad (4.3)$$

Obdobne možno odvodiť aj vzťah pre rovinnú stenu, ktorá je zložená z  $n$  vrstiev. Vtedy platí:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} = \frac{T_{w1} - T_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \quad (4.4)$$

kde

- $s_i$  – hrúbka  $i$ -tej steny (m)  
 $\lambda_i$  – tepelná vodivosť  $i$ -tej steny ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )

### VÝPOČET PRESTUPU TEPLA VEDENÍM VO VALCOVEJ STENE

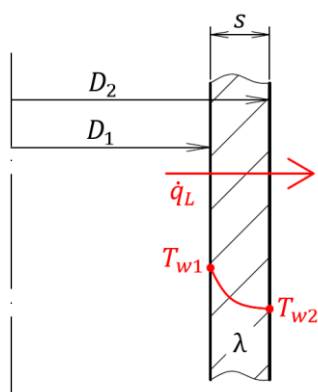
Obdobne, ako je možné získať vzťahy pre prestup tepla vedením v rovinnnej stene, aplikáciou okrajových podmienok v cylindrických súradniciach je možné dostať vzťah pre výpočet tepelného toku vo valcovej stene:

$$\dot{Q} = \dot{q}_L L \quad (4.5)$$

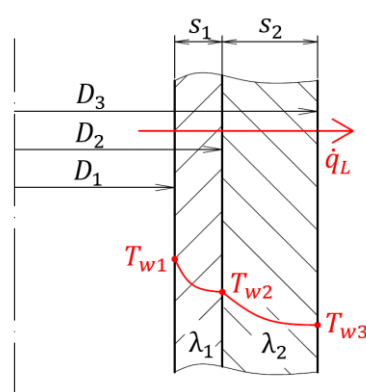
kde

- $\dot{q}_L$  – lineárna hustota tepelného toku ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$ )  
 $L$  – dĺžka valcovej steny (m)

Lineárnu hustotu tepelného toku pre jednoduchú valcovú stenu, ktorá pozostáva len z jednej vrstvy (obr. 4.3), je možné vypočítať pomocou vzťahu (4.6), pre zloženú valcovú stenu, ktorá pozostáva z dvoch vrstiev (obr. 4.4), pomocou vzťahu (4.7).



Obr. 4.3. Prestup tepla cez jednoduchú valcovú stenu



Obr. 4.4. Prestup tepla cez zloženú valcovú stenu

$$\dot{q}_L = \frac{\pi (\Delta T)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{D_2}{D_1}} = \frac{\pi (T_{w1} - T_{w2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{D_2}{D_1}} \quad (4.6)$$

kde

- $D_1$  – vnútorný priemer valcovej steny (m)  
 $D_2$  – vonkajší priemer valcovej steny (m)

$$\dot{q}_L = \frac{\pi (T_{w1} - T_{w3})}{\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{D_3}{D_2}} \quad (4.7)$$

Obdobne možno odvodiť aj vzťah pre valcovú stenu, ktorá pozostáva z  $n$  vrstiev:

$$\dot{q}_L = \frac{\pi \Delta T}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{D_{i+1}}{D_i}} \quad (4.8)$$

### VÝPOČET PRESTUPU TEPLA VEDENÍM V DUTEJ GULI

Základný vzťah, z ktorého možno získať tepelný tok v dutej valcovej guli, je:

$$\dot{Q} = \frac{4\pi\Delta T}{\frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (4.9)$$

kde

- $R_1$  – vnútorný polomer guľovej steny (m)
- $R_2$  – vonkajší polomer guľovej steny (m)

### VÝPOČET PRESTUPU TEPLA PRÚDENÍM

Konvektívny spôsob prenosu tepla je spôsobený pohybom tekutiny ako celku a prebieha v rýchlostnom poli charakterizovanom vektorom rýchlosti. Intenzita konvektívneho prenosu tepla je úmerná okamžitej hodnote rýchlosti prúdenia tekutiny. Teplo sa prostredím môže šíriť konvekciou pri nútenom alebo voľnom prúdení. Spôsob prúdenia tekutiny môže byť laminárny alebo turbulentný. Na výpočet prestupu tepla prúdením je potrebné vykonať rozmerovú analýzu, z ktorej je možné získať nasledovné bezrozmerné kritériá:

- *Nusseltovo číslo*

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (4.10)$$

- *Reynoldsovo číslo*

$$Re = \frac{\bar{v} l \rho}{\mu} \quad (4.11)$$

- *Prandtlovo číslo*

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (4.12)$$

- *Grasshofovo číslo*

$$Gr = \frac{g l^3}{\nu^2} \beta \Delta T = \frac{g l^3 \rho^2}{\mu^2} \beta \Delta T \quad (4.13)$$

- *Pecletovo číslo*

$$Pe = Re Pr \quad (4.14)$$

kde okrem už zavedeného označovania

|            |                                                                                 |                                          |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $\alpha$   | – súčiniteľ prestupu tepla                                                      | (W. m <sup>-2</sup> . K <sup>-1</sup> )  |
| $l$        | – charakteristický rozmer                                                       | (m)                                      |
| $g$        | – tiažové zrýchlenie                                                            | (m. s <sup>-2</sup> )                    |
| $\bar{v}$  | – stredná rýchlosť tekutiny                                                     | (m. s <sup>-1</sup> )                    |
| $\beta$    | – súčiniteľ objemovej rozťažnosti                                               | (K <sup>-1</sup> )                       |
| $\rho$     | – hustota tekutiny                                                              | (kg. m <sup>-3</sup> )                   |
| $\mu$      | – dynamická viskozita tekutiny                                                  | (Pa. s)                                  |
| $c_p$      | – špecifická tepelná kapacita pri konštantnom tlaku                             | (J. kg <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup> ) |
| $\nu$      | – kinematická viskozita tekutiny                                                | (m <sup>2</sup> . s <sup>-1</sup> )      |
| $\Delta T$ | – rozdiel teplôt medzi povrchom telesa a strednou teplotou okolia (hnacia sila) | (K)                                      |

Rovnica na výpočet súčiniteľa prestupu tepla v najvšeobecnejšom prípade pre newtonovskú kvapalinu bez zmeny skupenstva bude mať tvar podľa:

$$Nu = f \left( Re; Gr; Pr; \frac{L}{D}; \dots \right) \quad (4.15)$$

kde

|     |                    |     |
|-----|--------------------|-----|
| $D$ | – priemer potrubia | (m) |
| $L$ | – dĺžka potrubia   | (m) |

Pretože prúdenie podľa Reynoldsovho čísla  $Re$  sa delí na laminárne, prechodové a turbulentné, a podľa veľkosti Prandtlovho čísla  $Pr$  sa delia tekutiny na plyny, vodu, vodné roztoky, kvapaliny s nízkou a vysokou viskozitou, je zrejmé, že pre každý druh prúdenia alebo tekutiny bude vyhovovať iný typ základnej rovnice.

V nasledujúcej časti textu budú uvedené príklady kritériálnych rovníc výpočtu súčiniteľa prestupu tepla pomocou Nusseltovho čísla  $Nu$  pre rôzne prúdenie tekutiny v rúrke a medzi rúrkami pre laminárny a turbulentný režim prúdenia.

- *laminárne prúdenie vo vnútri rúrok*

Pre laminárne prúdenie ( $Re < 2300$ ) vo vnútri vodoravných alebo zvislých rúrok pri zanedbaní vplyvu voľnej konvekcie (prirodzeného prúdenia) možno použiť rovnicu:

$$Nu = 1,615 \left( Re Pr \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.16)$$

- *turbulentné prúdenie vo vnútri rúrok*

Pre plne vyvinuté turbulentné prúdenie  $Re \geq 10^4$  a  $0,6 < Pr < 100$ ;  $\frac{L}{D} > 50$  platí rovnica:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^b \quad (4.17)$$

kde pre chladenie platí  $b = 0,3$  a pre ohrev  $b = 0,4$ .

- *nútené prúdenie v rúrkach pri podmienkach prechodného charakteru prúdenia*

$$Nu = 0,116 \left( Re^{\frac{2}{3}} - 125 \right) Pr^{\frac{1}{3}} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \left( \frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad (4.18)$$

Rovnica (4.18) platí pre rozsah  $2300 \leq Re < 10^6$ ;  $0,6 \leq Pr \leq 500$ ;  $0 < \frac{D}{L} < 1$ .

- *nútené obtekanie jednotlivej rúrky alebo tyče kolmo na os [25]*

$$Nu = C Re^n Pr^{\frac{1}{3}} \quad (4.19)$$

kde

$n$  – parameter kritériálnej rovnice (1)

$C$  – parameter kritériálnej rovnice (1)

a

$$Re = \frac{D_v v_{\infty}}{\nu} = \frac{D_v v_{\infty} \rho}{\mu} \quad (4.20)$$

kde

$v_{\infty}$  – rýchlosť prúdu v dostatočnej vzdialenosti od povrchu rúrky (m.s<sup>-1</sup>)

$D_v$  – vonkajší priemer rúrky (m)

Tabuľka 4.1. Hodnoty konštánt  $C$  a  $n$  pre kruhové prierezy v závislosti od hodnoty  $Re$

| $Re$<br>(1)    | $C$<br>(1) | $n$<br>(1) |
|----------------|------------|------------|
| 0,4 – 4        | 0,989      | 0,33       |
| 4 – 40         | 0,911      | 0,385      |
| 40 – 4000      | 0,683      | 0,466      |
| 4000 – 40000   | 0,193      | 0,618      |
| 40000 – 400000 | 0,0266     | 0,805      |

- *prírodná konvekcia*

Ak je tekutina v styku s ohrievanou stenou, dochádza k prírodzenej cirkulácii tekutiny vplyvom zmeny hustoty s teplotou. Rýchlosť cirkulácie závisí od tvaru nádoby, v ktorej sa tekutina pohybuje a od usporiadania ohrievanej steny. Podobne ako pri vynútenej konvekcii má hlavný význam kritérium  $Re$ , pri prírodzenej konvekcii je charakteristické kritérium  $Gr$ . Parameter  $l$  v tomto kritériu je lineárny rozmer ohrievaného povrchu. Pri horizontálnom valci je  $l$  jeho vonkajší priemer, pri zvislom valci alebo doske je to zvyčajne ich výška. Stredná hodnota súčiniteľa prestupu tepla sa počíta zo závislosti, ktorá má tvar:

$$Nu = c (Gr Pr)^n \quad (4.21)$$

kde  $c$  a  $n$  sú parametre kritériálnej rovnice a získajú sa z tabuľky 4.2.

Tabuľka 4.2. Hodnoty konštánt  $c$  a  $n$  pre výpočet prirodzenej konvekcie

| $Gr Pr$<br>(1)                | $c$<br>(1) | $n$<br>(1) |
|-------------------------------|------------|------------|
| $< 10^{-3}$                   | 0,5        | 0          |
| $10^{-3} - 5 \cdot 10^2$      | 0,18       | 0,125      |
| $5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^7$ | 0,54       | 0,25       |
| $2 \cdot 10^7 - 10^{13}$      | 0,135      | 0,33       |

Po výpočte Nusseltovho čísla z kritériálnych rovníc je možné zo vzťahu (4.10) vypočítať súčiniteľ prestupu tepla  $\alpha$ . Z predchádzajúcich vzťahov je vidieť, že súčiniteľ prestupu tepla  $\alpha$  závisí od mnohých faktorov a je potrebné ho presne stanoviť s použitím vhodnej kritériálnej rovnice. Niekedy však pre rýchly odhad jeho hodnoty možno použiť hodnoty uvedené v tabuľke 4.3.

Tabuľka 4.3. Typické hodnoty súčiniteľa prestupu tepla

| Typ prúdenia              | $\alpha$<br>(W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> ) |
|---------------------------|---------------------------------------------------|
| Voľná konvekcia plynov    | 2 – 25                                            |
| Voľná konvekcia kvapalín  | 10 – 1 000                                        |
| Nútená konvekcia plynov   | 25 – 250                                          |
| Nútená konvekcia kvapalín | 50 – 20 000                                       |
| Var a kondenzácia         | 2500 – 100 000                                    |

Následne je možné vypočítať hustotu tepelného toku pomocou Newtonovho ochladzovacieho zákona:

$$\dot{q} = \alpha (T_w - T_f) \quad (4.22)$$

kde

$$\begin{array}{ll} T_w & - \text{teplota steny} & (K) \\ T_f & - \text{teplota tekutiny} & (K) \end{array}$$

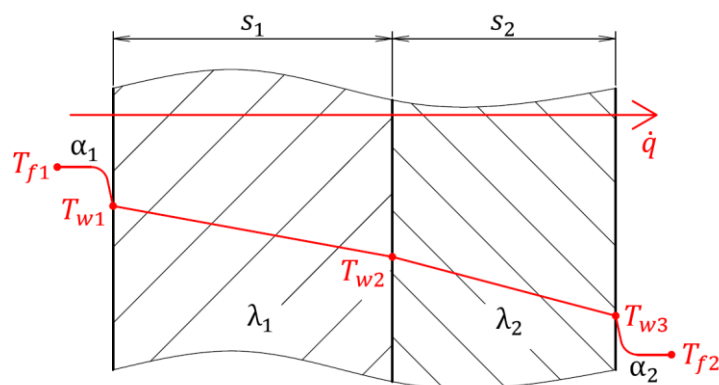
### VÝPOČET PRESTUPU TEPLA PRI KOMBINÁCIÍ VEDENIA A PRÚDENIA

V bežnej inžinierskej praxi však nastávajú situácie, keď je nevyhnutné počítať prestup tepla vedením a prestup tepla prúdením súčasne. Kombináciou predošlých vzťahov na výpočet hustoty tepelného toku vedením a prúdením je možné získať pre jednotlivé aplikácie nasledovné vzťahy. Pre výpočet hustoty tepelného toku cez jednoduchú rovinnú stenu to bude vzťah (4.23), pre rovinnú stenu zloženú z troch vrstiev to bude vzťah (4.24) a pre rovinnú stenu zloženú z  $n$  vrstiev vzťah (4.25). Tepelný tok cez rovinnú stenu možno následne vypočítať pomocou vzťahu (4.1), kde za hustotu tepelného toku sa dosadí hodnota zo vzťahu (4.23) alebo zo vzťahu (4.24) alebo zo vzťahu (4.25).

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (4.23)$$

$$\dot{q} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (4.24)$$

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (4.25)$$



Obr. 4.5. Prestup tepla cez zloženú rovinnú stenu

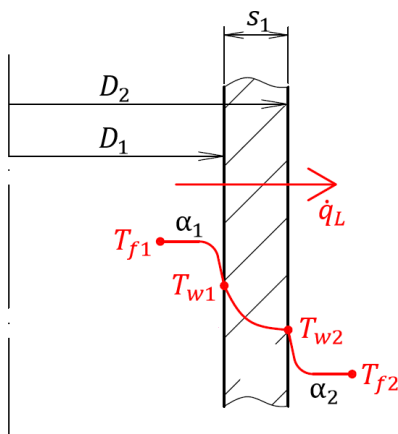
Pre výpočet lineárnej hustoty tepelného toku cez jednoduchú valcovú stenu bude platiť vzťah (4.26), pre valcovú stenu zloženú z dvoch vrstiev vzťah (4.27) a pre valcovú stenu zloženú z  $n$  vrstiev vzťah (4.28). Tepelný tok cez valcovú stenu možno následne vypočítať pomocou vzťahu (4.5), kde sa za lineárnu hustotu tepelného toku dosadí hodnota zo vzťahu (4.26) alebo zo vzťahu (4.27) alebo zo vzťahu (4.28).

$$\dot{q}_L = \frac{\pi (\Delta T)}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 D_2}} = \frac{\pi (T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 D_2}} \quad (4.26)$$

$$\dot{q}_L = \frac{\pi (T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{D_3}{D_2} + \frac{1}{\alpha_2 D_3}} \quad (4.27)$$

$$\dot{q}_L = \frac{\pi (\Delta T)}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{D_{i+1}}{D_i} + \frac{1}{\alpha_2 D_{n+1}}} \quad (4.28)$$





Obr. 4.6. Prestup tepla cez jednoduchú valcovú stenu

Pre výpočet tepelného toku cez jednoduchú guľovú plochu sa použije vzťah:

$$\dot{Q} = \frac{4 \pi (\Delta T)}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}} \quad (4.29)$$

Pri návrhu výmenníkov tepla sa často predošlé vzťahy vyjadrujú cez úhrnný súčiniteľ prestupu tepla vzťahnutý na jednotku plochy (4.30), resp. pre valcovú stenu lineárny súčiniteľ prestupu tepla (4.31).

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (4.30)$$

$$k_L = \frac{\pi}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 \lambda_i} \ln \frac{D_{i+1}}{D_i} + \frac{1}{\alpha_2 D_{n+1}}} \quad (4.31)$$

kde

- $k$  – úhrnný súčiniteľ prestupu tepla  $(W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1})$
- $k_L$  – lineárny súčiniteľ prestupu tepla  $(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$

### NÁVRH VÝMENNÍKOV TEPLA

Návrh výmenníka tepla predstavuje energetickú bilanciu systému a je možné ho získať pomocou bilancie tepelného toku. Pre výmenník tepla, kde sa uvažuje prestup tepla cez rovinnú stenu, možno bilanciu vykonať pomocou vzťahu (4.32), pre výmenník tepla, predstavujúci valcovú stenu pomocou vzťahu (4.33), z ktorého sa vyjadri navrhovaná teplovýmenná plocha  $A$ , resp. dĺžka výmenníka  $L$  pre rúrkové výmenníky tepla.

$$\dot{Q} = \dot{q} A = k \Delta T A \rightarrow A = \frac{\dot{Q}}{k \Delta T} \quad (4.32)$$

$$\dot{Q} = \dot{q}_L L = k_L \Delta T L \rightarrow L = \frac{\dot{Q}}{k_L \Delta T} \quad (4.33)$$

Vo vzťahoch (4.32) a (4.33) predstavuje  $\Delta T$  strednú teplotnú diferenciu, pričom najčastejšie sa používa stredná logaritmická teplotná diferencia  $\Delta T_{ln}$ , ktorá je definovaná vzťahom:

$$\Delta T_{ln} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} \quad (4.34)$$

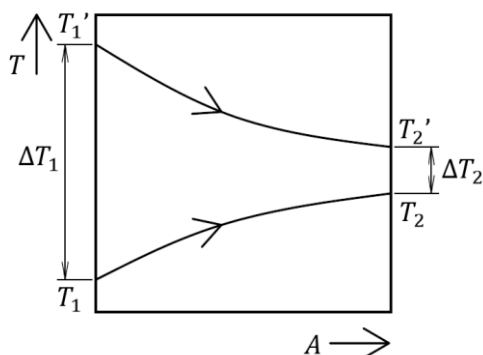
kde

$\Delta T_{ln}$  – stredná logaritmická teplotná diferencia (K)

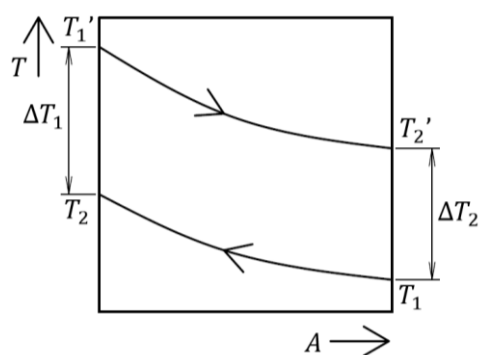
$\Delta T_1$  – vyššia teplotná diferencia (K)

$\Delta T_2$  – nižšia teplotná diferencia (K)

Vyššiu a nižšiu teplotnú diferenciu je potrebné vypočítať z rozdielov teplôt na vstupe prúdov do výmenníka tepla a na výstupe prúdov z výmenníka tepla, pričom nemožno zanedbať zapojenie výmenníka tepla. Najbežnejšie zapojenie výmenníka tepla je súprúdne a protiprúdne a priebeh teplôt v týchto zapojeniach je uvedený na obrázkoch 4.7 a 4.8.



Obr. 4.7. Priebeh teplôt pozdĺž teplovýmennej plochy pri súprúdnom zapojení výmenníka tepla



Obr. 4.8. Priebeh teplôt pozdĺž teplovýmennej plochy pri protiprúdnom zapojení výmenníka tepla

Nižšia a vyššia teplotná diferencia sa pre súprúdne usporiadanie vypočíta zo vzťahov (4.35) a (4.36), pre protiprúdne usporiadanie zo vzťahov (4.37) a (4.38), ak je uvažované, že vstup daného prúdu je označený indexom 1 a výstup prúdu indexom 2 a prúd, ktorý možno považovať za „teplejší“ bude mať veličiny označené s čiarou a „chladnejší“ prúd bez označenia.

$$\Delta T_1 = T_1' - T_1 \quad (4.35)$$

$$\Delta T_2 = T_2' - T_2 \quad (4.36)$$

$$\Delta T_1 = T_1' - T_2 \quad (4.37)$$

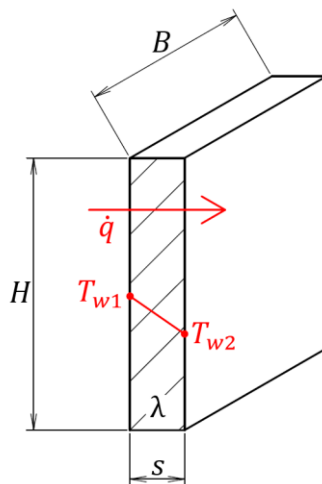
$$\Delta T_2 = T_2' - T_1 \quad (4.38)$$

V prípade, ak by nastala situácia, že by nižšia teplotná diferencia  $\Delta T_2$  mala vyššiu hodnotu ako vyššia teplotná diferencia  $\Delta T_1$ , označenie teplotných diferencií sa zmení, pričom musí platiť  $\Delta T_1 > \Delta T_2$ .

## RIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 4-1

**Zadanie:** Vypočítajte tok tepla cez rovinnú tehlovú stenu, ktorá má výšku 3 m, šírku 6 m a hrúbku 250 mm. Teplota vonkajšieho povrchu steny je 25 °C a vnútorného povrchu steny 5 °C. Súčiniteľ tepelnej vodivosti tehál je 0,6 W. m<sup>-1</sup>. K<sup>-1</sup>.



Obr. 4.9. Schéma k príkladu 4-1

**Postup:** Ide o príklad prestupu tepla vedením (kondukciou) cez jednoduchú rovinnú stenu, preto sa na výpočet tepelného toku použije vzťah (4.1) a pre hustotu tepelného toku vzťah (4.2).

**Výpočet:** Veľkosť teplovýmennej plochy je daná rozmermi steny, pričom výška steny sa označí ako  $H$  a šírka steny ako  $B$ :

$$A = H B \quad (4.39)$$

Úpravou vzorca (4.1) pomocou vzťahov (4.2) a (4.39) sa dostane:

$$\dot{Q} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{s}{\lambda}} H B \quad (4.40)$$

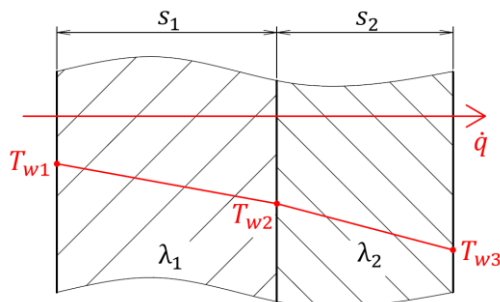
Dosadením zadáných hodnôt do predošlého vzorca sa vypočíta tok tepla:

$$\dot{Q} = \frac{298,15 - 278,15}{\frac{0,25}{0,6}} 3 \cdot 6 = 864 \text{ W}$$

**Výsledok:** Tok tepla cez rovinnú tehlovú stenu je 864 W.

### Príklad 4-2

**Zadanie:** Stena pece pozostáva zo šamotových tehál hrúbky 200 mm a stavebných tehál hrúbky 150 mm. Teplota vnútorného povrchu pece je 650 °C a teplota vonkajšieho povrchu je 80 °C. Vypočítajte hustotu tepelného toku a teplotu na styku šamotových a stavebných tehál. Súčiniteľ tepelnej vodivosti šamotu je 1,2 W. m<sup>-1</sup>. K<sup>-1</sup> a stavebných tehál je 0,6 W. m<sup>-1</sup>. K<sup>-1</sup>.



Obr. 4.10. Schéma k príkladu 4-2

Postup: Keďže ide o prenos tepla cez zloženú rovinnú stenu, na výpočet tepelného toku sa použije vzťah (4.4) upravený podľa obrázka 4.10:

$$\dot{q} = \frac{T_{w1} - T_{w3}}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2}} \quad (4.41)$$

Úlohou je aj vypočítať teplotu na styku tehál  $T_{w2}$ . Tá sa môže vyjadriť z rovnice pre hustotu tepelného toku napísanú pre prvú vrstvu tehál:

$$\dot{q} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{s_1}{\lambda_1}} \rightarrow T_{w2} = T_{w1} - \frac{\dot{q} s_1}{\lambda_1} \quad (4.42)$$

Výpočet: Všetky veličiny sú známe, hustota tepelného toku sa vypočíta:

$$\dot{q} = \frac{T_{w1} - T_{w3}}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2}} = \frac{923,15 - 353,15}{\frac{0,2}{1,2} + \frac{0,15}{0,6}} = 1368 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

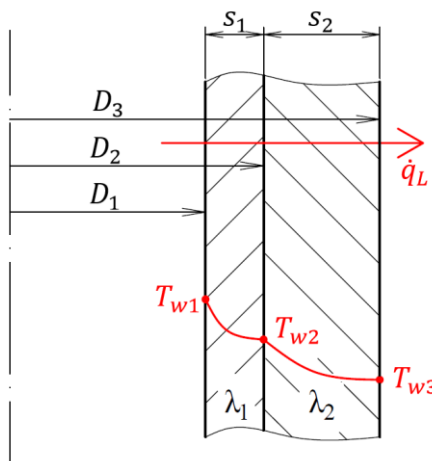
Keďže je hustota tepelného toku po hrúbke pece konštantná, teplota na styku vrstiev sa vypočíta ako:

$$T_{w2} = T_{w1} - \frac{\dot{q} s_1}{\lambda_1} = 923,15 - \frac{1368 \cdot 0,2}{1,2} = 695,15 \text{ K} = 422 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Výsledok: Hustota tepelného toku cez steny pece je 1368 W a teplota na styku šamotových a stavebných tehál je 422 °C.

### Príklad 4-3

Zadanie: V ocelovom potrubí kruhového prierezu dĺžky 5 m, s vnútorným priemerom 90 mm a hrúbkou steny 5 mm prúdi teplá voda. Teplota povrchu vnútornej steny rúrky je 80 °C a teplota povrchu vonkajšej steny je 30 °C. Potrubie je zaizolované izoláciou hrúbky 50 mm. Súčiniteľ tepelnej vodivosti potrubia je 47 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup> a izolácie je 0,12 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>. Vypočítajte tepelné straty cez stenu potrubia.



Obr. 4.11. Schéma k príkladu 4-3

Postup: Keďže ide o potrubie kruhového prierezu, je možné použiť vzťah pre výpočet toku tepla cez valcovú stenu (4.5). Teplo prechádza cez stenu potrubia a vrstvu izolácie, preto pre lineárnu hustotu tepelného toku  $\dot{q}_L$  platí vzťah (4.7).

Výpočet: Vonkajšie priemery potrubia a izolácie sa vypočítajú podľa obrázka 4.11 nasledovne:

$$D_2 = D_1 + 2 s_1 = 90 + 2 \cdot 5 = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$$

$$D_3 = D_2 + 2 s_2 = 100 + 2 \cdot 50 = 200 \text{ mm} = 0,2 \text{ m}$$

Po dosadení zadaných hodnôt:

$$\dot{q}_L = \frac{\pi (T_{w1} - T_{w3})}{\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{D_3}{D_2}} = \frac{\pi (353,15 - 303,15)}{\frac{1}{2 \cdot 47} \ln \frac{0,1}{0,09} + \frac{1}{2 \cdot 0,12} \ln \frac{0,2}{0,1}} = 54,37 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$$

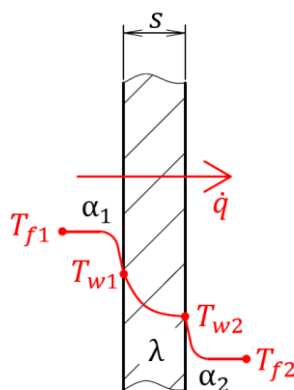
Nakoniec sa do vzťahu (4.5) dosadia hodnoty:

$$\dot{Q} = \dot{q}_L L = 54,37 \cdot 5 = 271,85 \text{ W}$$

Výsledok: Tepelné straty cez stenu potrubia sú 271,85 W.

#### **Príklad 4-4**

Zadanie: Vypočítajte hustotu tepelného toku cez tehlovú rovinnú stenu komína hrúbky 300 mm. Súčiniteľ tepelnej vodivosti tehál je  $0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Teplota vo vnútri komína je  $280^\circ \text{C}$  a teplota okolitého vzduchu je  $25^\circ \text{C}$ . Súčiniteľ prestupu tepla vo vnútri pece je  $160 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ , súčiniteľ prestupu tepla z povrchu do okolia je  $8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .



Obr. 4.12. Schéma k príkladu 4-4

**Postup:** V tomto prípade sú zadané teploty médií vo vnútri komína a v okolí. To znamená, že okrem odporu voči prestupu tepla, ktorý kladú tehly komína, bude potrebné rátať aj s odpormi, ktoré kladú média na oboch povrchoch komína, preto je potrebné použiť vzťah pre kombinovaný prestup tepla cez jednoduchú rovinnú stenu (4.23).

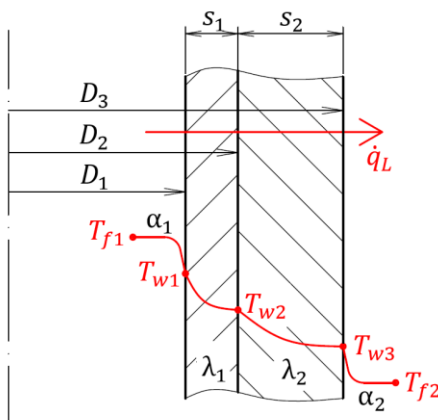
**Výpočet:** Po dosadení príslušných hodnôt do vzťahu (4.23) sa vypočíta hustota tepelného toku:

$$\dot{q} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{553,15 - 298,15}{\frac{1}{160} + \frac{0,3}{0,6} + \frac{1}{8}} = 403,96 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

**Výsledok:** Hustota tepelného toku cez stenu komína je  $403,96 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

#### Príklad 4-5

**Zadanie:** V oceľovom potrubí dĺžky 15 m s vnútorným priemerom 56 mm a vonkajším priemerom 60 mm prúdi médium s teplotou  $90^\circ\text{C}$ . Teplota okolia je  $10^\circ\text{C}$ . Potrubie je zaizolované izoláciou hrúbky 15 mm so súčiniteľom tepelnej vodivosti  $0,12 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Súčiniteľ vedenia tepla ocele je  $47 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Súčiniteľ prestupu tepla v potrubí je  $1830 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  a súčiniteľ prestupu tepla z povrchu potrubia do okolia je  $9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Vypočítajte tepelné straty potrubia. Koľko tepla sa ušetrí, ak by bola hrúbka izolácie dvojnásobná?



Obr. 4.13. Schéma k príkladu 4-5

Postup: Pre tok tepla cez valcovú stenu všeobecne platí vzťah (4.5). Keďže ide o prípad kombinovaného prestupu tepla v zloženej valcovej stene, je možné použiť pre výpočet lineárnej hustoty tepelného toku vzťah (4.27).

Výpočet: Na začiatok sa vypočíta vonkajší priemer izolácie:

$$D_3 = D_2 + 2 s_2 = 60 + 2 \cdot 15 = 90 \text{ mm} = 0,09 \text{ m}$$

Po dosadení hodnôt do vzťahu (4.27) sa vypočíta hustota tepelného toku:

$$\begin{aligned} \dot{q}_L &= \frac{\pi (T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2 \lambda_1} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{2 \lambda_2} \ln \frac{D_3}{D_2} + \frac{1}{\alpha_2 D_3}} = \\ &= \frac{\pi (363,15 - 283,15)}{\frac{1}{1830 \cdot 0,056} + \frac{1}{2 \cdot 47} \ln \frac{0,06}{0,056} + \frac{1}{2 \cdot 0,12} \ln \frac{0,09}{0,06} + \frac{1}{9 \cdot 0,09}} = \\ &= 85,65 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Následne sa dopočíta tok tepla pomocou vzťahu (4.5):

$$\dot{Q} = \dot{q}_L L = 85,65 \cdot 15 = 1284,75 \text{ W}$$

Súčasťou zadania je aj otázka zníženia tepelného zaťaženia, ak by bola hrúbka izolácie dvojnásobná. Postup je rovnaký, jediná zmena bude v hodnote priemeru  $D_3$ . Nová hodnota priemeru sa vypočíta nasledovne:

$$D'_3 = D_2 + 2 (2 s_2) = 60 + 4 \cdot 15 = 120 \text{ mm} = 0,12 \text{ m}$$

Dosadením do vzťahu (4.27) sa dostane nová hodnota lineárnej hustoty tepelného toku:

$$\begin{aligned} \dot{q}'_L &= \frac{\pi (T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2 \lambda_1} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{2 \lambda_2} \ln \frac{D'_3}{D_2} + \frac{1}{\alpha_2 D'_3}} = \\ &= \frac{\pi (363,15 - 283,15)}{\frac{1}{1830 \cdot 0,056} + \frac{1}{2 \cdot 47} \ln \frac{0,06}{0,056} + \frac{1}{2 \cdot 0,12} \ln \frac{0,12}{0,06} + \frac{1}{9 \cdot 0,12}} = \\ &= 65,71 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

A pre tok tepla:

$$\dot{Q}' = \dot{q}'_L L = 65,71 \cdot 15 = 985,65 \text{ W}$$

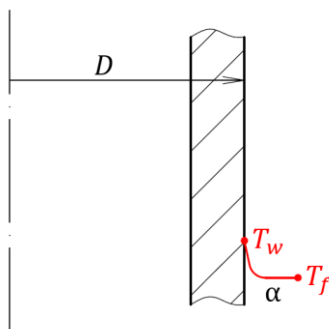
Nakoniec sa vypočíta ušetrené teplo tak, že sa odčíta hodnota tepelného toku  $\dot{Q}'$  od pôvodnej hodnoty tepelného toku  $\dot{Q}$ :

$$\Delta \dot{Q} = \dot{Q} - \dot{Q}' = 1284,75 - 985,65 = 299,1 \text{ W}$$

Výsledok: Tepelné straty potrubia sú 1284,75 W. Ak sa použije izolácia dvojnásobnej hrúbky, zníži sa tepelný tok o 299,1 W.

#### **Príklad 4-6**

Zadanie: Kolóna s vonkajším priemerom 1,8 m má výšku 12 m. Povrch kolóny má teplotu 90 °C a okolitý vzduch teplotu 10 °C. Vypočítajte súčiniteľ prestupu tepla z nádrže do okolia, ak sa uvažuje iba prirodzená konvekcia.



Obr. 4.14. Schéma k príkladu 4-6

Postup: Súčiniteľ prestupu tepla sa vo všeobecnosti dá vyjadriť zo vzťahu (4.10) pre Nusseltovo číslo. Keďže ide o voľnú konvekciu, ako sa píše v teoretickom úvode, charakteristický rozmer  $l$  je v prípade zvislej valcovej steny jej výška  $H$ . Nusseltovo číslo  $Nu$  sa môže v prípade voľnej konvekcie počítat' podľa vzťahu (4.21). Pre jeho výpočet je nutné poznať Grashofovo číslo, ktoré sa získa výpočtom podľa vzťahu (4.13) s tým, že za charakteristický rozmer sa dosadí opäť výška valca  $H$ . Prandlovo číslo  $Pr$  sa môže vypočítat' aj pomocou vzťahu (4.12), alebo v prípade niektorých látok býva uvedené priamo v tabuľkách pre danú teplotu. Vo vzťahu (4.13) vystupuje okrem iného aj súčiniteľ objemovej tepelnej rozťažnosti  $\beta$ . Ten je možné určiť buď z tabuliek, alebo v prípade ideálneho plynu sa môže vypočítat' podľa vzťahu:

$$\beta = \frac{1}{T_u} \quad (4.43)$$

Výpočet: Na začiatok je nevyhnutné získať všetky potrebné vlastnosti vzduchu pre určujúcu teplotu. Tá v tomto prípade je:

$$T_u = \frac{T_w + T_f}{2} = \frac{90 + 10}{2} = 50 \text{ °C} = 323,15 \text{ K}$$

Potrebné vlastnosti vzduchu pri teplote 50 °C sú získané z tabuliek:

$$\begin{aligned} \rho &= 1,093 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \lambda &= 0,0283 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \mu &= 19,49 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ Pr &= 0,692 \end{aligned}$$

Spätným postupom sa najprv vypočíta hodnota objemovej rozťažnosti  $\beta$ , pričom je nutné určujúcu teplotu vždy dosádzať v Kelvinoch:



$$\beta = \frac{1}{T_u} = \frac{1}{323,15} = 3,0945 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Posledná neznáma vo vzťahu (4.13) je  $\Delta T$ , čo je rozdiel teplôt, vďaka ktorému nastáva prirodzená konvekcia. V tomto prípade je to rozdiel teploty povrchu telesa  $T_w$  a okolitého vzduchu  $T_f$ . Dosadením hodnôt sa dostane:

$$Gr = \frac{g \rho^2 H^3}{\mu^2} \beta \Delta T = \frac{9,81 \cdot 1,093^2 \cdot 12^3}{(19,49 \cdot 10^{-6})^2} 3,0945 \cdot 10^{-3} (90 - 10) = 1,3198 \cdot 10^{13}$$

V ďalšom kroku je potrebné vypočítať hodnotu  $Gr \cdot Pr$ , aby bolo možné určiť z tabuľky 4.2 hodnoty konštánt  $c$  a  $n$ .

$$Gr \cdot Pr = 1,3198 \cdot 10^{13} \cdot 0,692 = 9,133 \cdot 10^{12}$$

Na základe tabuľky 4.2 sa určia hodnoty konštánt:

$$c = 0,135$$

$$n = 0,33$$

Následne sa pomocou vzťahu (4.21) vypočíta hodnota  $Nu$ :

$$Nu = c (Gr \cdot Pr)^n = 0,135 (9,133 \cdot 10^{12})^{0,33} = 2554,68$$

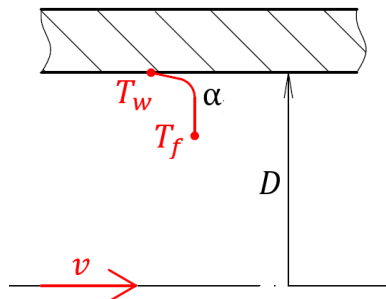
V poslednom kroku sa vypočíta súčiniteľ prestupu tepla zo vzťahu (4.10):

$$\alpha = \frac{Nu \lambda}{l} = \frac{2554,68 \cdot 0,0283}{12} = 6,025 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Výsledok: Súčiniteľ prestupu tepla z nádrže do okolia je  $6,025 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

#### **Príklad 4-7**

Zadanie: Vo výmenníku tepla sa ohrieva voda so strednou teplotou  $80^\circ\text{C}$ . Vodu poháňa čerpadlo a prúdi v rúrke s vnútorným priemerom 50 mm a dĺžkou 5 m. Vypočítajte koeficient prestupu tepla vo vode, ak prúdi rýchlosťou  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



Obr. 4.15. Schéma k príkladu 4-7

Postup: Na začiatok, pri nútenom prúdení tekutín v potrubí, je potrebné určiť režim prúdenia, na základe ktorého sa zvolí rovnica pre výpočet Nusseltovho čísla. Režim prúdenia je daný veľkosťou Reynoldsovho čísla, ktoré sa vypočíta zo vzťahu (4.11), ktorý sa pre prípad prúdenia v rúrke upraví na tvar:

$$Re = \frac{v D \rho}{\mu} \quad (4.44)$$

Na výpočet Reynoldsovho kritéria a Prandtlovho kritéria je potrebné poznať vlastnosti vody pri určujúcej teplote. Tak ako v predchádzajúcom príklade, aj tu je možné vypočítať Prandtlovo číslo podľa vzťahu (4.12), alebo je možné ho odčítať aj priamo z tabuliek. Na základe hodnoty Reynoldsovho čísla sa zo vzťahov pre výpočet Nusseltovho čísla vyberie tvar rovnice pre nútené prúdenie v rúrkach. Nakoniec sa vyjadří súčiniteľ prestupu tepla z rovnice pre Nusseltovo číslo (4.10).

Výpočet: Na začiatok je nevyhnutné získať všetky potrebné vlastnosti vody pre určujúcu teplotu. Tá je v tomto prípade priamo daná ako stredná teplota vody:

$$T_u = 80 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Potrebné vlastnosti vody pri teplote 80 °C sú získané z tabuliek:

$$\begin{aligned} \rho &= 971,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \lambda &= 0,670 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \mu &= 0,3565 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ Pr &= 2,22 \end{aligned}$$

Zadané a odčítané hodnoty sa dosadia do vzťahu (4.44) a vypočíta sa Reynoldsovo kritérium:

$$Re = \frac{v D \rho}{\mu} = \frac{1 \cdot 0,05 \cdot 971,8}{0,3565 \cdot 10^{-3}} = 136\,297,34$$

Na základe hodnoty Reynoldsovho čísla sa zo vzťahov pre výpočet Nusseltovho čísla vyberie tvar rovnice pre nútené prúdenie v rúrkach vzťah (4.17). Keďže ide o ohrev vody, tak hodnota konštanty  $b = 0,4$ . Po dosadení zvyšných hodnôt sa vypočíta Nusseltovo číslo:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^b = 0,023 \cdot 136\,297,34^{0,8} \cdot 2,22^{0,4} = 405,38$$

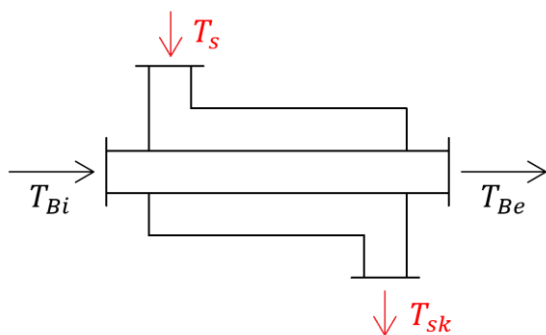
Nakoniec sa vyjadří súčiniteľ prestupu tepla z rovnice pre Nusseltovo číslo (4.10), pričom charakteristický rozmer pri prúdení v rúrkach je vnútorný priemer rúrky:

$$\alpha = \frac{Nu \lambda}{D} = \frac{405,38 \cdot 0,67}{0,05} = 5432,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

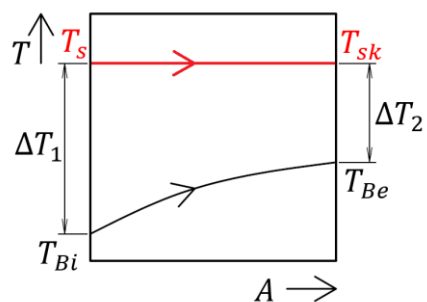
Výsledok: Súčiniteľ prestupu tepla vo vode je  $5\,432,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Príklad 4-8

**Zadanie:** Určte dĺžku výmenníka tepla typu rúrka v rúrke, v ktorom sa ohrieva voda z teploty 10 °C na teplotu 70 °C. Voda prúdi vo vnútornej rúrke rýchlosťou 1,5 m.s<sup>-1</sup>. Vnútorňa rúrka je vyrobená z medi a má rozmer 32 x 2. Medená rúrka je z vonkajšej strany ohrievaná kondenzujúcou vodnou parou teploty 138 °C, pričom stena rúrky je o 6 °C chladnejšia než je teplota pary. Straty do okolia predstavujú 8 % z tepla dodaného parou do systému. Určte taktiež potrebné množstvo vykurovacej vodnej pary.



Obr. 4.16. Schéma k príkladu 4-8



Obr. 4.17. Priebeh teplôt pozdĺž plochy výmenníka tepla pre príklad 4-8

**Postup:** Výmenník tepla typu rúrka v rúrke je zjednodušene znázornený na obrázku 4.16. Vo vnútornej menšej rúrke prúdi voda, ktorá sa označí symbolom  $B$ , pričom index  $i$  označuje vstup a index  $e$  výstup. Vo vonkajšej väčšej rúrke prúdi para, ktorá je označená symbolom  $s$  a vystupujúci kondenzát tejto pary označený ako  $sk$ .

Priebeh teplôt po ploche výmenníka tepla je znázornený na obrázku 4.17. Keďže sa voda  $B$  ohrieva, jej teplota postupne rastie. Pri pare sa uvažuje čisto iba s kondenzáciou sytej pary, preto sa jej teplota nemení  $T_s = T_{sk}$ . Dĺžka výmenníka tepla sa určí zo vzťahu (4.33), pričom momentálne sú všetky veličiny vystupujúce v tomto vzťahu neznáme. Postupne sa rozoberie každá z nich.

**Výpočet:** Na začiatok sa určí stredná teplotná diferencia  $\Delta T$ . Keďže ide o výmenník tepla typu rúrka v rúrke, môže sa táto diferencia určiť ako stredná logaritmická teplotná diferencia podľa vzťahu (4.34). Jednotlivé tepelné rozdiely  $\Delta T_1$  a  $\Delta T_2$  sa môžu vypočítavať podľa obrázka 4.17 nasledovne:

$$\Delta T_1 = T_s - T_{Bi} = 138 - 10 = 128 \text{ K}$$

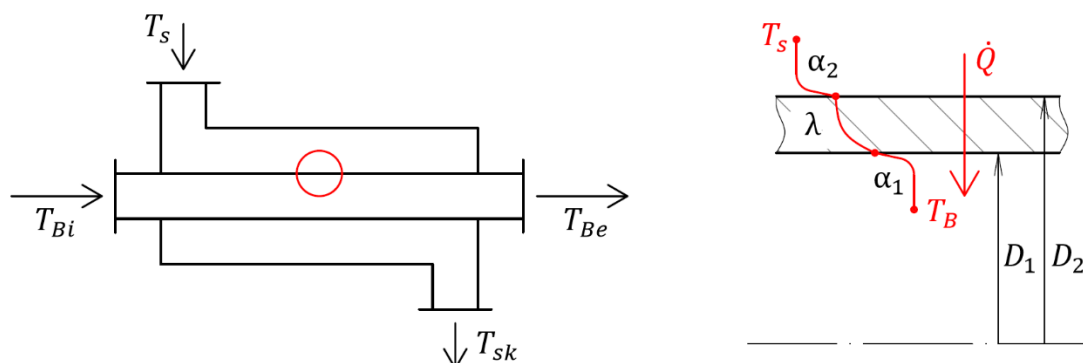
$$\Delta T_2 = T_{sk} - T_{Be} = 138 - 70 = 68 \text{ K}$$

Keďže ide o rozdiel hodnôt, je možné v tomto prípade dosadzovať teploty priamo v °C (1 °C = 1 K). Vypočítané hodnoty sa môžu dosadiť do rovnice (4.34):

$$\Delta T_{ln} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} = \frac{128 - 68}{\ln \frac{128}{68}} = 94,86 \text{ K}$$

Ako ďalší neznámy člen vzťahu (4.33) sa vypočíta úhrnný koeficient prestupu tepla vzťahnutý na jednotku dĺžky  $k_L$  podľa vzťahu (4.31) upraveného pre zadaný prípad nasledovne:

$$k_L = \frac{\pi}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 D_2}} \quad (4.45)$$



Obr. 4.18. Detail výmenníka tepla rúrka v rúrke

Rozmery rúrky sú uvedené v zadaní ako 32 x 2. Toto je v praxi časté označenie, pričom prvé číslo označuje vonkajší priemer rúrky a druhé číslo označuje hrúbku steny. Jednotlivé priemery pre tento prípad budú nasledovné:

$$D_1 = 28 \text{ mm}$$

$$D_2 = 32 \text{ mm}$$

Súčiniteľ vedenia tepla rúrky  $\lambda$  je daný materiálom rúrky a je ho možné odčítať z dostupných tabuliek. Keďže je materiál meď, súčiniteľ vedenia tepla sa môže určiť ako:

$$\lambda = 377 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Súčiniteľ prestupu tepla  $\alpha_1$  je podľa obrázka 4.18 vzťahnutý na prestup tepla z rúrky do vody. Keďže ide o prípad núteného prúdenia v rúrke, je potrebné určiť režim prúdenia. Ten je daný Reynoldsovým číslom podľa vzťahu (4.11), pričom charakteristický rozmer je vnútorný priemer rúrky:

$$Re_B = \frac{v_B D_1 \rho_B}{\mu_B} \quad (4.46)$$

Na výpočet tohto kritéria je potrebné poznať vlastnosti vody pri určujúcej teplote. V tomto prípade bude určujúca teplota stredná teplota vody v rúrke daná vzťahom:

$$T_{u_B} = \frac{T_{Bi} + T_{Be}}{2} = \frac{10 + 70}{2} = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Hodnoty vlastností vody odčítaných z dostupných tabuliek:

$$\begin{aligned} \rho_B &= 992,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \lambda_B &= 0,631 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \mu_B &= 0,656 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ Pr_B &= 4,33 \end{aligned}$$

Po dosadení do vzťahu (4.46):

$$Re_B = \frac{v_B D_1 \rho_B}{\mu_B} = \frac{1,5 \cdot 0,028 \cdot 992,2}{0,656 \cdot 10^{-3}} = 63\,525$$

Z výsledku je zrejmé, že prúdenie vody v rúrke má turbulentný charakter. Preto je možné na výpočet Nusseltovho čísla použiť vzťah (4.17), upravený pre tento prípad:

$$Nu_B = 0,023 Re_B^{0,8} Pr_B^b \quad (4.47)$$

Voda v rúrke sa ohrieva, takže konštanta  $b = 0,4$ .

$$Nu_B = 0,023 (63\,525)^{0,8} (4,33)^{0,4} = 287,53$$

Súčiniteľ prestupu tepla  $\alpha_1$  sa vyjadří z rovnice (4.10) a po dosadení hodnôt sa získa:

$$\alpha_1 = \frac{Nu_B \lambda_B}{D_1} = \frac{287,53 \cdot 0,631}{0,028} = 6\,479,7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Posledná neznáma vo vzťahu (4.45) je súčiniteľ prestupu tepla na strane pary  $\alpha_2$ . Keďže ide o kondenzáciu sytej vodnej pary na vonkajšom povrchu rúrky, je možné hodnotu  $\alpha_2$  vypočítať zo vzťahu:

$$\alpha_2 = c \left[ \frac{r g \rho_k^2 \lambda_k^3}{\mu_k l (T_s - T_w)} \right]^{0,25} \quad (4.48)$$

Predpokladá sa vodorovné uloženie výmenníka, preto bude platiť:

$$c = 0,72$$

$$l = D_2$$

Kondenzácia pary prebieha na vonkajšom povrchu medenej rúrky, preto charakteristický rozmer musí byť vonkajší priemer rúrky  $D_2$ . Špecifické výparné teplo  $r$  je možné určiť pre danú teplotu pary z dostupných tabuliek, ktorého hodnota pre tento prípad je:

$$r = 2\,150,8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Index  $k$  v rovnici (4.48) hovorí, že dané veličiny sa dosadzujú ako vlastnosti kondenzátu. Určujúca teplota kondenzátu sa určí ako stredná hodnota z teploty pary  $T_s$  a teploty povrchu rúrky  $T_w$  nasledovne:

$$T_{uk} = \frac{T_s + T_w}{2} \quad (4.49)$$

Zo zadania je zrejmé, že teplota steny rúrky je o 6 °C menšia ako teplota pary. Preto sa rovnica (4.49) môže napísať ako:

$$T_{uk} = \frac{T_s + (T_s - 6)}{2} = \frac{138 + (138 - 6)}{2} = 135 \text{ °C}$$

Ďalej sa z dostupných tabuliek odčítajú vlastnosti kondenzátu (vody) pri tejto teplote:

$$\begin{aligned}\rho_k &= 930,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \lambda_k &= 0,683 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \mu_k &= 0,2041 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}\end{aligned}$$

Dosadením hodnôt do vzťahu (4.48) sa vypočíta  $\alpha_2$ :

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= c \left[ \frac{r g \rho_k^2 \lambda_k^3}{\mu_k l (T_s - T_w)} \right]^{0,25} = 0,72 \left[ \frac{2150,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 930,2^2 \cdot 0,683^3}{0,2041 \cdot 10^{-3} \cdot 0,032 \cdot (6)} \right]^{0,25} = \\ &= 14\,132,45 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

Keďže všetky hodnoty pre výpočet  $k_L$  sú už známe, prejde sa k samotnému výpočtu:

$$\begin{aligned}k_L &= \frac{\pi}{\frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\alpha_2 D_2}} = \\ &= \frac{\pi}{\frac{1}{6\,479,7 \cdot 0,028} + \frac{1}{2 \cdot 377} \ln \frac{0,032}{0,028} + \frac{1}{14\,132,45 \cdot 0,032}} = \\ &= 397,67 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

Vo vzťahu (4.33) ostáva poslednou neznámou tok tepla, potrebný na ohriatie vody na požadovanú hodnotu. Tok tepla sa vypočíta z kalorimetrickej rovnice nasledovne:

$$\dot{Q} = \dot{m}_B \bar{c}_{p_B} (T_{Be} - T_{Bi}) \quad (4.50)$$

Hmotnostný tok vody  $\dot{m}_B$  síce nie je zadaný, ale je možné ho vypočítať zo zadaných hodnôt:

$$\dot{m}_B = \rho_B S v_B = \rho_B \frac{\pi D_1^2}{4} v_B \quad (4.51)$$

kde

$$\begin{array}{ll}\dot{m}_B & - \text{hmotnostný tok látky B (vody)} & (\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}) \\ S & - \text{prierezová plocha potrubia} & (\text{m}^2)\end{array}$$

$$\dot{m}_B = \rho_B \frac{\pi D_1^2}{4} v_B = 992,2 \frac{\pi 0,028^2}{4} 1,5 = 0,916 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Stredná špecifická tepelná kapacita vody  $\bar{c}_{p_B}$  sa odčíta pre určujúcu teplotu vody z dostupných tabuliek. Jej hodnota je:

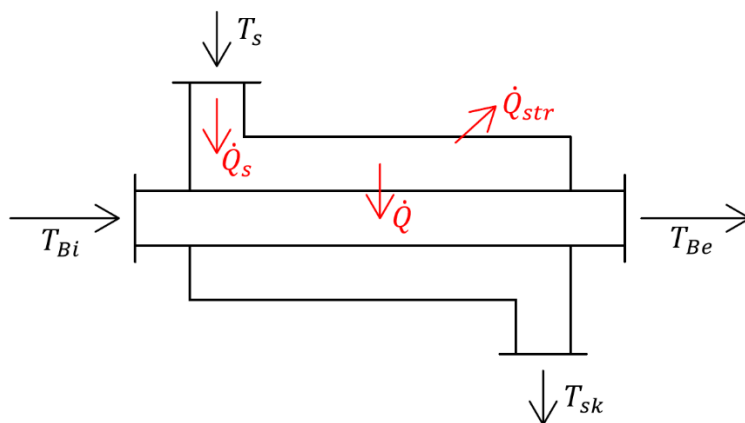
$$\bar{c}_{p_B} = 4\,180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Po dosadení jej hodnoty do vzťahu (4.50) sa vypočíta tok tepla:

$$\dot{Q} = \dot{m}_B \bar{c}_{p_B} (T_{Be} - T_{Bi}) = 0,916 \cdot 4180 (70 - 10) = 229\,732,8 \text{ W}$$

Po dosadení všetkých potrebných premenných do vzťahu (4.33) sa vypočíta hľadaná hodnota potrebnej dĺžky výmenníka tepla:

$$L = \frac{\dot{Q}}{k_L \Delta T} = \frac{229\,732,8}{397,67 \cdot 94,86} = 6,1 \text{ m}$$



Obr. 4.19. Tepelné toky vo výmenníku tepla

Na obrázku 4.19 sú znázornené tepelné toky v zadanom výmenníku.  $\dot{Q}_s$  je množstvo tepla dodané do výmenníka vyhrievacou parou za jednotku času,  $\dot{Q}$  je množstvo tepla potrebné na ohriatie vody na požadovanú teplotu za jednotku času a  $\dot{Q}_{str}$  predstavuje straty do okolia. Bilančná rovnica pre tok tepla bude:

$$\dot{Q}_s = \dot{Q} + \dot{Q}_{str} \quad (4.52)$$

Zo zadania je zrejmé, že straty do okolia predstavujú 8 % z tepla dodaného parou do systému, takže sa napíše rovnica:

$$\dot{Q}_{str} = 0,08 \cdot \dot{Q}_s \quad (4.53)$$

Dosadením rovnice (4.53) do vzťahu (4.52) sa dostane:

$$\dot{Q}_s = \frac{\dot{Q}}{1 - 0,08} \quad (4.54)$$

$$\dot{Q}_s = \frac{\dot{Q}}{1 - 0,08} = \frac{229\,732,8}{1 - 0,08} = 249\,709,6 \text{ W}$$

Pre tok tepla dodaného do systému parou platí rovnica (uvažuje sa len s čistou kondenzáciou):

$$\dot{Q}_s = \dot{m}_s r \rightarrow \dot{m}_s = \frac{\dot{Q}_s}{r} \quad (4.55)$$

Dosadením hodnôt sa dostane veľkosť hmotnostného toku pary  $\dot{m}_s$ :

$$\dot{m}_s = \frac{\dot{Q}_s}{r} = \frac{249\,709,6}{2150,8 \cdot 10^3} = 0,116 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Výsledok: Potrebná dĺžka výmenníka tepla je 6,1 m a potrebné množstvo ohrevnej pary je  $0,116 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## NERIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 4-9

Zadanie: Vypočítajte teplotu vonkajšieho povrchu šamotovej rovinatej steny, ak hustota tepelného toku je  $1500 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , vnútorná teplota steny je  $800^\circ\text{C}$  a jej hrúbka je 10 cm. Súčiniteľ tepelnej vodivosti šamotu je  $1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Výsledok:  $T_{w2} = 675^\circ\text{C}$

### Príklad 4-10

Zadanie: Vypočítajte tepelné straty z  $1 \text{ m}^2$  steny pece, ktorá pozostáva zo šamotových tehál hrúbky 250 mm, izolácie hrúbky 80 mm a ochranného oceľového plechu s hrúbkou 1 mm. Teplota vnútorného povrchu šamotových tehál je  $1100^\circ\text{C}$  a vonkajšieho povrchu oceľového plechu je  $50^\circ\text{C}$ . Súčiniteľ tepelnej vodivosti šamotu je  $1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , izolácie je  $0,08 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  a ocele je  $47 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Vypočítajte taktiež teploty na styku šamotových tehál a izolácie a na styku izolácie a ochranného plechu.

Výsledok:  $\dot{Q} = 868,95 \text{ W}$ ;  $T_{w2} = 918,97^\circ\text{C}$ ;  $T_{w3} = 50,02^\circ\text{C}$

### Príklad 4-11

Zadanie: V oceľovom potrubí s vnútorným priemerom 140 mm a vonkajším priemerom 150 mm prúdi para. Potrubie má dvojvrstvovú izoláciu, pričom prvá vrstva má hrúbku 15 mm a súčiniteľ tepelnej vodivosti je  $0,16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  a druhá vrstva má hrúbku 30 mm so súčiniteľom tepelnej vodivosti  $0,08 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Súčiniteľ tepelnej vodivosti ocele je  $47 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Teplota vnútorného povrchu rúrky je  $280^\circ\text{C}$  a vonkajšieho povrchu izolácie  $30^\circ\text{C}$ . Vypočítajte tepelné straty pripadajúce na 3 m dĺžky potrubia a teploty na styku jednotlivých vrstiev.

Výsledok:  $\dot{Q} = 994,8 \text{ W}$ ;  $T_{w2} = 279,92^\circ\text{C}$ ;  $T_{w3} = 219,78^\circ\text{C}$

### Príklad 4-12

Zadanie: Vo vodorovnom potrubí s vnútorným priemerom 100 mm sa chladí voda so strednou teplotou  $60^\circ\text{C}$ . Hmotnostný prietok chladenej vody je  $8 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  a ide o nútené prúdenie.



Hrúbka steny rúrky je 5 mm a teplota jej vonkajšieho povrchu je 55 °C. Určte súčiniteľ prestupu tepla vo vode a súčiniteľ prestupu tepla z rúrky do okolitého vzduchu teploty 5 °C, ak sa uvažuje iba prirodzená konvekcia.

Výsledok:  $\alpha_1 = 3\,892,27 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ;  $\alpha_2 = 6,49 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

#### **Príklad 4-13**

Zadanie: Vypočítajte teplovýmennú plochu súprúdneho výmenníka tepla, potrebnú na plynulé chladenie roztoku s množstvom 65 t.h<sup>-1</sup> z teploty 57 °C na teplotu 39 °C, pričom sa použije chladiaca voda s teplotou 10 °C. Množstvo chladiacej vody je 60 m<sup>3</sup>.h<sup>-1</sup> a úhrnný súčiniteľ prestupu tepla je 2 100 W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-1</sup>. Špecifická tepelná kapacita roztoku je 3810 J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> a vody 4190 J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>. Uvažujte nulové straty do okolia. Ako by sa zmenila potrebná teplovýmenná plocha, ak by bol výmenník zapojený protiprúdne?

Výsledok:  $A_s = 23,57 \text{ m}^2$ ,  $A_p = 20,24 \text{ m}^2$

#### ZOZNAM SYMBOLOV

|                 |                                                              |                                        |
|-----------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $b$             | – parameter kritériálnej rovnice                             | (1)                                    |
| $c$             | – parameter kritériálnej rovnice                             | (1)                                    |
| $c_p$           | – špecifická tepelná kapacita pri konštantnom tlaku          | (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ) |
| $\bar{c}_{p_i}$ | – stredná špecifická tepelná kapacita látky $i$              | (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ) |
| $g$             | – tiažové zrýchlenie                                         | (m.s <sup>-2</sup> )                   |
| $k$             | – úhrnný súčiniteľ prestupu tepla                            | (W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> )  |
| $k_L$           | – lineárny súčiniteľ prestupu tepla                          | (W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )  |
| $l$             | – charakteristický rozmer                                    | (m)                                    |
| $\dot{m}_i$     | – hmotnostný tok látky $i$                                   | (kg.s <sup>-1</sup> )                  |
| $n$             | – parameter kritériálnej rovnice                             | (1)                                    |
| $\dot{q}$       | – hustota tepelného toku                                     | (W.m <sup>-2</sup> )                   |
| $\dot{q}_L$     | – lineárna hustota tepelného toku                            | (W.m <sup>-1</sup> )                   |
| $r$             | – špecifické výparné teplo                                   | (J.kg <sup>-1</sup> )                  |
| $s$             | – hrúbka steny                                               | (m)                                    |
| $s_i$           | – hrúbka $i$ -tej steny                                      | (m)                                    |
| $\bar{v}$       | – stredná rýchlosť tekutiny                                  | (m.s <sup>-1</sup> )                   |
| $v_\infty$      | – rýchlosť prúdu v dostatočnej vzdialenosti od povrchu rúrky | (m.s <sup>-1</sup> )                   |
| $A$             | – teplovýmenná plocha                                        | (m <sup>2</sup> )                      |
| $B$             | – šírka steny                                                | (m)                                    |
| $C$             | – parameter kritériálnej rovnice                             | (1)                                    |
| $D$             | – priemer potrubia                                           | (m)                                    |
| $D_v$           | – vonkajší priemer rúrky                                     | (m)                                    |
| $D_1$           | – vnútorný priemer valcovej steny                            | (m)                                    |
| $D_2$           | – vonkajší priemer valcovej steny                            | (m)                                    |
| $Gr$            | – Grasshofovo číslo                                          | (1)                                    |
| $H$             | – výška steny                                                | (m)                                    |
| $L$             | – dĺžka valcovej steny                                       | (m)                                    |
| $L$             | – dĺžka potrubia, resp. výmenníka tepla                      | (m)                                    |
| $Nu$            | – Nusseltovo číslo                                           | (1)                                    |

|                 |                                                           |                                         |
|-----------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $Pe$            | – Pecletovo číslo                                         | (1)                                     |
| $Pr$            | – Prandtlovo číslo                                        | (1)                                     |
| $\dot{Q}$       | – tepelný tok                                             | (W)                                     |
| $\dot{Q}_s$     | – množstvo tepla dodané do výmenníka za jednotku času     | (W)                                     |
| $\dot{Q}_{str}$ | – straty výmenníka tepla, množstvo tepla za jednotku času | (W)                                     |
| $Re$            | – Reynoldsovo číslo                                       | (1)                                     |
| $R_1$           | – vnútorný polomer guľovej steny                          | (m)                                     |
| $R_2$           | – vonkajší polomer guľovej steny                          | (m)                                     |
| $S$             | – prierezová plocha potrubia                              | (m <sup>2</sup> )                       |
| $T_u$           | – určujúca teplota                                        | (K)                                     |
| $T_{w1}$        | – teplota na stene                                        | (K)                                     |
| $T_{w2}$        | – teplota na stene                                        | (K)                                     |
| $\alpha$        | – súčiniteľ prestupu tepla                                | (W. m <sup>-2</sup> . K <sup>-1</sup> ) |
| $\beta$         | – súčiniteľ objemovej rozťažnosti                         | (K <sup>-1</sup> )                      |
| $\lambda$       | – tepelná vodivosť                                        | (W. m <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup> ) |
| $\lambda_i$     | – tepelná vodivosť $i$ -tej steny                         | (W. m <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup> ) |
| $\mu$           | – dynamická viskozita tekutiny                            | (Pa. s)                                 |
| $\nu$           | – kinematická viskozita tekutiny                          | (m <sup>2</sup> . s <sup>-1</sup> )     |
| $\rho$          | – hustota tekutiny                                        | (kg. m <sup>-3</sup> )                  |
| $\Delta T$      | – rozdiel teplôt                                          | (K)                                     |
| $\Delta T_{ln}$ | – stredná logaritmická teplotná diferencia                | (K)                                     |
| $\Delta T_1$    | – vyššia teplotná diferencia                              | (K)                                     |
| $\Delta T_2$    | – nižšia teplotná diferencia                              | (K)                                     |

## 5 DIFÚZNE PROCESY

Oddelovanie zložiek látok, prípadne zmesí, je jednou zo základných operácií v priemyselnom sektore pri výrobe chemických zlúčenín a iných produktov. Z technologického hľadiska tvoria difúzne procesy veľmi významnú skupinu separačných procesov, pri ktorých sa oddelovaná látka z jednej fázy prevádza do druhej, s ktorou sa zmes uvedie do kontaktu. Podľa druhu jednotlivých fáz sa difúzne procesy rozdeľujú do kategórií:

- plyn – kvapalina (rektifikácia, absorpcia)
- kvapalina – kvapalina (extrakcia)
- plyn – tuhá fáza (adsorpcia, sušenie)
- kvapalina – tuhá fáza (vylúhovanie)

### PRESTUP LÁTKY

Na začiatok je potrebné uviesť niekoľko základných rovníc, z ktorých sa bude vychádzať. Rovnica ideálneho plynu:

$$p V = n R T \quad (5.1)$$

pre zložku  $i$  platí:

$$p_i V = n_i R T \quad (5.2)$$

a molárna koncentrácia zložky  $i$  pre ideálny plyn je:

$$c_i = \frac{n_i}{V} = \frac{p_i}{R T} \quad (5.3)$$

kde

|       |                                 |                                           |
|-------|---------------------------------|-------------------------------------------|
| $p$   | – tlak                          | (Pa)                                      |
| $p_i$ | – parciálny tlak zložky $i$     | (Pa)                                      |
| $n$   | – látkové množstvo              | (mol)                                     |
| $n_i$ | – látkové množstvo zložky $i$   | (mol)                                     |
| $R$   | – univerzálna plynová konštanta | (J. K <sup>-1</sup> . mol <sup>-1</sup> ) |
| $T$   | – teplota                       | (K)                                       |
| $V$   | – objem                         | (m <sup>3</sup> )                         |

### JEDNOSMERNÁ DIFÚZIA

Pre procesy ako je absorpcia a väčšina difúzných procesov je charakteristická jednosmerná výmena látky. Dochádza k nej vtedy, keď určitá zložka jednej fázy (pri absorpcii plynnej) prechádza – difunduje do druhej fázy (pri absorpcii kvapalnej), pričom z tejto fázy do prvej neprechádza nič. Inertnými zložkami sa nazývajú zložky, ktoré sa nezúčastňujú na výmene.

Možné je to uviesť na príklade odparovania kvapaliny do inertného plynu, keď sa difúzna zložka  $A$  nachádza v nepohyblivej zložke  $B$  (inert).

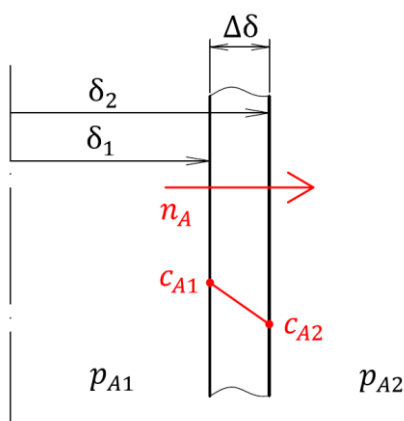
$$n_B = 0 \quad (5.4)$$

Potom hustota toku zložky A, pri ktorej sa uvažuje s rozdielnymi parciálnymi tlakmi sa vyjadrí nasledovne:

$$n_A = \frac{D_{AB} p}{R T z} \ln \frac{p_{B2}}{p_{B1}} \quad (5.5)$$

kde

|                  |                                                                   |                                                        |
|------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $D_{AB}$         | – difúzny koeficient (difuzivita) zložky A v binárnej zmesi A + B | $(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$                     |
| $p_{B1}, p_{B2}$ | – parciálne tlaky zložky B vo fáze 1 a 2                          | $(\text{Pa})$                                          |
| $z$              | – dĺžka                                                           | $(\text{m})$                                           |
| $n_A, n_B$       | – hustota toku zložky A a B                                       | $(\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})$ |



Obr. 5.1. Jednosmerná difúzia

### DVOJSMERNÁ DIFÚZIA

Takýto prípad difúzie nastane vtedy, keď jedna zložka z prvej fázy (kvapalnej) difunduje do druhej (plynnej) fázy a súčasne druhá zložka difunduje do prvej.

Difúzia pri dvojsmernej výmene látky býva ekvimolekulová, pre ktorú platia vzťahy:

- tok látky

$$N_A = n_A A \quad (5.6)$$

- hustota toku látky

$$n_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{d\delta} \quad (5.7)$$

$$n_A = -D_{AB} \frac{(c_{A2} - c_{A1})}{\Delta\delta} \quad (5.8)$$

$$n_A = \frac{D_{AB}}{R T \delta} (p_{A1} - p_{A2}) \quad (5.9)$$

kde

|                  |                                                       |                         |
|------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------|
| $c_{A1}, c_{A2}$ | – molárna objemová koncentrácie látky A vo fáze 1 a 2 | (mol. m <sup>-3</sup> ) |
| $p_{A1}, p_{A2}$ | – parciálne tlaky zložky A vo fáze 1 a 2              | (Pa)                    |
| $\Delta\delta$   | – dĺžka medzifázového rozhrania                       | (m)                     |
| $A$              | – plocha                                              | (m <sup>2</sup> )       |
| $N_A$            | – tok látky                                           | (mol. s <sup>-1</sup> ) |

### FÁZOVÁ ROVNOVÁHA KVAPALINA – PARA (VYUŽITIE ROVNOVÁHY PRI DESTILÁCII)

Pri odparovaní zmesi kvapalín dochádza k tomu, že jednotlivé zložky zmesi prechádzajú rôznou rýchlosťou z kvapalnej do parnej fázy. So vzrastajúcim počtom molekúl v parnej fáze dochádza aj k opačnému javu – kondenzácii, pri ktorej časť molekúl prechádza z pár späť do kvapaliny. Rovnovážny stav nastane, keď sa ustáli tlak pár a koncentrácia jednotlivých zložiek v parnej fáze na takej hodnote, pri ktorej sa rýchlosť odparovania jednotlivých zložiek rovná hodnote rýchlosti ich kondenzácie.

Pri rovnováhe kvapalina – para sa predpokladá platnosť Daltonovho zákona, t. j. súčet parciálnych tlakov zložiek sa rovná celkovému tlaku:

$$p_i = p y_i \quad (5.10)$$

$$\sum_i p_i = p \quad (5.11)$$

a Raoultovho zákona:

$$p_i = p_i^0 x_i \quad (5.12)$$

kde

|         |                                                                     |      |
|---------|---------------------------------------------------------------------|------|
| $p_i$   | – parciálny tlak prchavejšej zložky v kvapaline                     | (Pa) |
| $p_i^0$ | – tlak nasýtených pár čistej prchavejšej zložky pri teplote roztoku | (Pa) |
| $x_i$   | – molárny zlomok prchavejšej zložky v kvapaline                     | (1)  |
| $y_i$   | – molárny zlomok prchavejšej zložky v parnej fáze                   | (1)  |

Spojením týchto dvoch zákonov sa vyjadří vzťah opisujúci rovnováhu pomocou molárnych zlomkov nasledovne:

$$y_i = \frac{p_i^0 x_i}{p} = K_i^0 x_i \quad (5.13)$$

Pri výpočtoch sa často používajú pojmy ako prchavosť a relatívna prchavosť, ktorá sa vypočíta nasledovne:

$$\alpha_{AB} = \frac{K_A^0}{K_B^0} = \frac{p_A^0(T)}{p_B^0(T)} \quad (5.14)$$

kde

|         |                                     |     |
|---------|-------------------------------------|-----|
| $K_i^0$ | – rovnovážny rozdeľovací koeficient | (1) |
|---------|-------------------------------------|-----|

$$\alpha_{AB} \quad - \quad \text{relatívna prchavosť} \quad (1)$$

## RIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 5-1 Prepočet koncentrácií

Zadanie: Vzduch obsahuje 25 obj. % CO<sub>2</sub> pri celkovom tlaku 1,5 baru. Vyjadrite tento obsah:

- pomocou molárneho zlomku  $y$
- pomocou hmotnostného zlomku  $\bar{y}$
- ako relatívny molárny zlomok  $Y$
- ako relatívny hmotnostný zlomok  $\bar{Y}$
- parciálnym tlakom  $p_i$

Postup: Na prepočet jednotlivých koncentrácií sa použijú vzťahy v prílohe 1, prípadne sa využije definícia vyjadrenia jednotlivých koncentrácií. Pri ideálnom plyne sa predpokladá, že objemové zlomky sa rovnajú molárnym a za základ výpočtu sa zvolí 100 kmol zmesi.

Výpočet: Molárna hmotnosť CO<sub>2</sub> je 44,01 kg. kmol<sup>-1</sup>, molárna hmotnosť vzduchu pri teplote 0 °C a tlaku 1 bar je 28,96 kg. kmol<sup>-1</sup>.

$$y = \frac{25}{100} = 0,25 \text{ kmol CO}_2 \text{ na kmol zmesi}$$

$$\bar{y} = \frac{0,25 \cdot 44,01}{0,25 \cdot 44,01 + 0,75 \cdot 28,96} = 0,336 \text{ kg CO}_2 \text{ na kg zmesi}$$

$$Y = \frac{25}{75} = 0,333 \text{ kmol CO}_2 \text{ na kmol vzduchu}$$

$$\bar{Y} = \frac{0,25 \cdot 44,01}{0,75 \cdot 28,96} = 0,507 \text{ kg CO}_2 \text{ na kg vzduchu}$$

Na výpočet parciálneho tlaku sa využije rovnica (5.10):

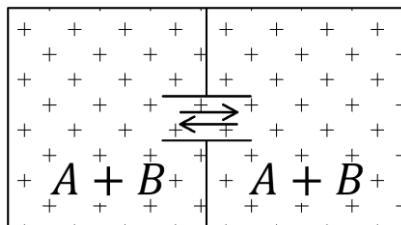
$$p_i = p \cdot y_i = 1,5 \cdot 0,25 = 0,375 \text{ bar}$$

Výsledok:

- molárny zlomok  $y = 0,25$
- hmotnostný zlomok  $\bar{y} = 0,336$
- relatívny molárny zlomok  $Y = 0,333$
- relatívny hmotnostný zlomok  $\bar{Y} = 0,507$
- parciálny tlak  $p_i = 0,375 \text{ bar}$

**Príklad 5-2** Výpočet hustoty toku

**Zadanie:** Amoniak difunduje trubicou dlhou 12 cm obsahujúcou dusík pri teplote 25 °C a celkovom tlaku 100 kPa. Parciálny tlak amoniaku na jednom konci trubice je 12 kPa a na druhom 2,5 kPa. Obidva konce trubice ústia do dobre premiešavaného priestoru. Súčiniteľ difúzie amoniaku v dusíku pri danej teplote a tlaku je  $2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Vypočítajte hustotu toku amoniaku.



Obr. 5.2. Schéma k príkladu 5-2

**Postup:** Amoniak sa označí písmenom A a dusík B. Teplota dusíka  $T_B = 25 \text{ °C} = 298,15 \text{ K}$  pri celkovom tlaku  $p = 100 \text{ kPa} = 100\,000 \text{ Pa}$ . Parciálny tlak amoniaku na jednej strane  $p_{A1} = 12 \text{ kPa} = 12\,000 \text{ Pa}$  a na strane druhej  $p_{A2} = 2,5 \text{ kPa} = 2\,500 \text{ Pa}$ . Súčiniteľ difúzie amoniaku v dusíku je  $D_{AB} = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

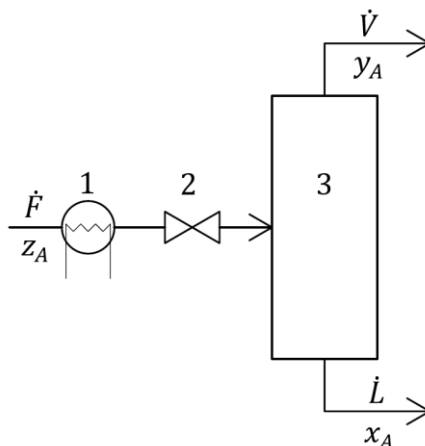
**Výpočet:**

$$n_A = \frac{D_{AB}}{R T \delta} (p_{A1} - p_{A2}) = \frac{2,3 \cdot 10^{-5}}{8,314 \cdot 298,15 \cdot 0,12} (12\,000 - 2\,500) = 0,00073456 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Výsledok:** Hustota toku amoniaku v dusíku je  $0,00073456 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Príklad 5-3** Rovnovážna destilácia

**Zadanie:** Ekvimolárna zmes benzénu a toluénu sa delí rovnovážnou destiláciou pri atmosférickom tlaku. Treba určiť zloženie odchádzajúcich fáz ak sa vie, že sa odparí 25 % nástreku. Taktiež je známa relatívna prchavosť binárnej zmesi  $\alpha_{AB}$ , ktorá je 2,44.



Obr. 5.3. Schéma k príkladu 5-3

Postup: Stručná schéma príkladu je znázornená na obrázku 5.3. Nástreku  $\dot{F}$  (z angl. *feed*) sa vedie do ohrievača 1, kde sa pod tlakom ohreje a čiastočne odparí. Následne sa zmes vedie cez redukčný ventil 2 prechádza do odlučovača 3, kde parná fáza  $\dot{V}$  (z angl. *vapor*) vystupuje na vrchu a kvapalná fáza  $\dot{L}$  (z angl. *liquid*) odchádza spodkom kolóny.

Zloženie nástreku  $z_A$  je zrejmé zo zadania, úlohou je vypočítať zloženie destilátu  $y_A$  a destilačného zvyšku  $x_A$ . Index  $A$  označuje benzén a index  $B$  toluén. Keďže ide o binárnu zmes, platí, že ak je známy molárny zlomok jednej zložky, jednoducho sa dá dopočítať molárny zlomok druhej zložky. Najskôr sa vyjadria bilančné rovnice. Keďže platí zákon zachovania hmotnosti bilančné rovnice sa napíšu v tvaroch:

$$\dot{F} = \dot{V} + \dot{L} \quad (5.15)$$

$$\dot{F} z_A = \dot{V} y_A + \dot{L} x_A \quad (5.16)$$

Vo všeobecnosti možno množstvo odpareného nástreku označiť ako  $f$ . Zo zadania vyplýva, že sa odparí 25 % nástreku, v tomto prípade  $f = 0,25$ . To znamená, že zvyšok, čiže 75 % zmesi odchádza ako destilačný zvyšok. Matematicky možno vyjadriť nasledovne:

$$\dot{V} = f \dot{F} \quad (5.17)$$

$$\dot{L} = (1 - f) \dot{F} \quad (5.18)$$

Po dosadení rovníc (5.17) a (5.18) do rovnice (5.16) sa po úprave dostane vzťah:

$$z_A = f y_A + (1 - f) x_A \quad (5.19)$$

V rovnici (5.19) však vystupujú dve neznáme ( $y_A, x_A$ ), preto je na výpočet potrebná ďalšia rovnica. Parokvapalná zmes je pri danej teplote a tlaku za určitých okolností v rovnováhe, t. j., že existuje vzťah medzi zložením parnej a kvapalnej fázy. V prípade dvojzložkových zmesí je táto závislosť vyjadrená nasledovným vzťahom:

$$y_A = \frac{\alpha_{AB} x_A}{1 + (\alpha_{AB} - 1) x_A} \quad (5.20)$$

Po dosadení rovnice (5.20) do rovnice (5.19) sa vyjadří kvadratická rovnica v tvare:

$$x_A^2 (\alpha_{AB} - 1)(1 - f) + x_A [(\alpha_{AB} - 1)(f - z_A) + 1] - z_A = 0 \quad (5.21)$$

Výpočet: Po dosadení známych hodnôt do rovnice (5.21) sa vyrieši kvadratická rovnica:

$$\begin{aligned} x_A^2 (2,44 - 1)(1 - 0,25) + x_A [(2,44 - 1)(0,25 - 0,5) + 1] - 0,5 &= 0 \\ 1,08 x_A^2 + 0,64 x_A - 0,5 &= 0 \end{aligned}$$

Pre riešenie kvadratickej rovnice sa využije známy vzťah:



$$x_{A1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.22)$$

Po aplikovaní pre tento prípad:

$$x_{A1,2} = \frac{-0,64 \pm \sqrt{0,64^2 - 4 \cdot 1,08 \cdot (-0,5)}}{2 \cdot 1,08} \rightarrow \begin{matrix} x_{A1} \doteq 0,446 \\ x_{A2} \doteq -1,038 \end{matrix}$$

Z dvoch koreňov je prijateľný ten prvý, ktorého hodnota sa použije na výpočet molárneho zlomku benzénu v destiláte:

$$y_A = \frac{\alpha_{AB} x_A}{1 + (\alpha_{AB} - 1) x_A} = \frac{2,44 \cdot 0,446}{1 + (2,44 - 1) 0,446} = 0,663$$

Keďže ide o binárnu zmes, molárne zlomky toluénu v destiláte a v destilačnom zvyšku sa vypočítajú nasledovne:

$$\begin{aligned} y_B &= 1 - y_A = 1 - 0,663 = 0,337 \\ x_B &= 1 - x_A = 1 - 0,446 = 0,554 \end{aligned}$$

Kontrola výpočtu: Kontrolu výpočtu by bolo možné vykonať grafickým spôsobom, pomocou  $x - y$  diagramu, ale jednoduchšia forma overenia je dosadenie vypočítaných hodnôt do rovnice (5.19):

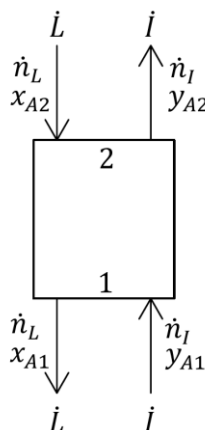
$$\begin{aligned} 0,5 &= 0,25 \cdot 0,663 + (1 - 0,25) 0,446 \\ 0,5 &= 0,5 \end{aligned}$$

Pravá a ľavá strana rovnice sa rovnajú, výpočet možno považovať za správny.

Výsledok: Úlohou bolo vypočítať zloženie odchádzajúcich fáz pri zadaných podmienkach. Destilát obsahuje 66,3 % benzénu a zvyšok tvorí toluén. Destilačný zvyšok obsahuje 44,6 % benzénu a zvyšok tvorí opäť toluén.

#### **Príklad 5-4** Látková bilancia absorpcie

Zadanie: Určte spotrebu vody v  $\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$  na vypieranie  $\text{SO}_2$  z plynnej zmesi inertným plynom v protiprúdovej absorpčnej kolóne. Vstupujúca plynná zmes obsahuje 1,8 obj. %  $\text{SO}_2$  a vystupujúca 0,04 obj. %  $\text{SO}_2$ . Voda na vstupe do kolóny neobsahuje žiadne  $\text{SO}_2$ . Za predpokladu spracovania  $1000 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$  (prietok nameraný pri tlaku 101,3 kPa a teplote  $0^\circ \text{C}$ ) plynnej zmesi sa nemá prekročiť  $\text{SO}_2$  v odchádzajúcej vode 6,3 hmot. %. Molárna hmotnosť vody je  $18 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$  a  $\text{SO}_2$  je  $64 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ .



Obr. 5.4. Schéma k príkladu 5-4

Postup: Tok kvapalnej fázy – vody sa označí ako  $\dot{L}$  a tok plynnej fázy bude označený ako  $\dot{I}$ . Hlava kolóny má index 2 a dno index 1. Koncentrácia vstupujúcej plynnej fázy  $y_{A1} = 0,018$  a vystupujúcej  $y_{A2} = 0,0004$ . Keďže voda na vstupe neobsahovala žiadny oxid siričitý, jeho objemová koncentrácia sa rovná nule  $\bar{x}_{A2} = 0$ , ale na výstupe z dna kolóny nesmie jeho hodnota prekročiť koncentráciu  $\bar{x}_{A1} = 0,063$ .

Výpočet: V protiprúdovej absorpčnej kolóne je možné látkovú bilanciu absorbovanej zložky A ( $\text{SO}_2$ ) vyjadriť nasledovne:

$$\dot{n}_A = \dot{n}_I (Y_{A1} - Y_{A2}) = \dot{n}_L (X_{A1} - X_{A2}) \quad (5.23)$$

Z tejto rovnice sa vyjadri hľadaná spotreba vody v ( $\text{mol} \cdot \text{h}^{-1}$ ) nasledovne:

$$\dot{n}_L = \dot{n}_I \frac{(Y_{A1} - Y_{A2})}{(X_{A1} - X_{A2})} \quad (5.24)$$

Všetky zadané hodnoty koncentrácií sa musia z absolútnych zlomkov (objemových aj hmotnostných) previesť na relatívne v nasledujúcich krokoch, pri ktorých netreba zabúdať, že molárna hmotnosť je potrebné previesť na základné jednotky ( $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ):

$$\begin{aligned} Y_{A1} &= \frac{y_{A1}}{1 - y_{A1}} = \frac{0,018}{1 - 0,018} = 0,0183 \\ Y_{A2} &= \frac{y_{A2}}{1 - y_{A2}} = \frac{0,0004}{1 - 0,0004} = 0,0004002 \\ X_{A1} &= \frac{\bar{x}_{A1} M_0}{(1 - \bar{x}_{A1}) M_A} = \frac{0,063 \cdot 0,018}{(1 - 0,063) 0,064} = 0,0189 \\ X_{A2} &= \frac{\bar{x}_{A2} M_0}{(1 - \bar{x}_{A2}) M_A} = \frac{0 \cdot 0,018}{(1 - 0) 0,064} = 0 \end{aligned}$$

Nasledujúcim krokom bude vyjadriť látkový tok inerty podľa rovnice:

$$p \dot{V}_I = \dot{n}_I R T \rightarrow \dot{n}_I = \frac{p \dot{V}_I}{R T} \quad (5.25)$$

Objemový prietok inertu  $V_I$  sa určí z celkového objemového prietoku plynnej fázy, ktorý je  $\dot{V} = 1000 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$  nasledovne:

- a) je známe zloženie plynnej fázy na vstupe, ktoré je  $y_{A1} = 0,018$ , na základe ktorého sa dopočíta koncentrácia inertu:

$$y_{A1} + y_{I1} = 1 \rightarrow y_{I1} = 1 - y_{A1} = 1 - 0,018 = 0,982$$

- b) objem inertu  $\dot{V}_I$  sa potom vypočíta nasledovne:

$$\dot{V}_I = \dot{V} y_{I1} = 1000 \cdot 0,982 = 982 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

Spätným krokom sa dopočíta látkový tok inertu z rovnice (5.25) nasledovne:

$$\dot{n}_I = \frac{p \dot{V}_I}{R T} = \frac{101\,300 \cdot 982}{8,314 \cdot 273,15} = 43\,803,6 \text{ mol} \cdot \text{h}^{-1}$$

Spotreba vody v ( $\text{mol} \cdot \text{h}^{-1}$ ) sa vypočíta nasledovne:

$$\dot{n}_L = \dot{n}_I \frac{(Y_{A1} - Y_{A2})}{(X_{A1} - X_{A2})} = 43\,803,6 \frac{0,0183 - 0,0004002}{0,0189 - 0} = 41\,485,5 \text{ mol} \cdot \text{h}^{-1}$$

Na záver sa spotreba prepočíta do požadovaných jednotiek:

$$\dot{m}_L = \dot{n}_L M_0 = 41\,485,5 \cdot 0,018 = 746,7 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$$

Výsledok: Spotreba vody na vypieranie  $\text{SO}_2$  z plynnej zmesi je  $746,7 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ .

## NERIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 5-5

Zadanie: Zmes metanolu a etanolu sa delí pri 101 kPa rovnovážnou destiláciou. Obsah metanolu v surovine je 35 mol. %, zvyšok je etanol. Aké bude zloženie odchádzajúcich fáz, ak sa odparí 33 % nástreku? Známa je relatívna prchavosť zmesi, ktorá je 1,59.

Výsledok:  $x_{\text{metanol}} = 0,315$ ,  $y_{\text{metanol}} = 0,422$

### Príklad 5-6

Zadanie: Do absorpčnej kolóny prichádza  $10\,000 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$  plynnej zmesi s obsahom 6,5 obj. % acetónu vo vzduchu. Absorpciou sa má obsah acetónu zmenšiť o 90 %. Plyn sa v absorpčnej kolóne prepiera čistou vodou pri teplote  $0^\circ \text{C}$  a tlaku 101,325 kPa. Vypočítajte:

- spotrebu vody na vypieranie acetónu
- koncentráciu acetónu v odchádzajúcom roztoku za predpokladu, že sa vypočítaná spotreba vody podľa a) dvojnásobne zväčší.

Výsledok: spotreba vody  $\dot{n}_L = 499,34 \text{ kmol} \cdot \text{h}^{-1}$ , koncentrácia acetónu  $X_{A1} = 0,0263$

**Príklad 5-7**

Zadanie: V kolóne laminárne steká film vody s hrúbkou 1 mm. Vypočítajte hustotu toku kyseliny octovej (látky A), ktorá predifunduje objemom vody pri teplote 17 °C. Na hraniciach objemu sú koncentrácie kyseliny octovej 9 hmot. % a 3 hmot. %. Difúzny koeficient má hodnotu  $0,95 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Molárna hmotnosť kyseliny octovej je  $60 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$  a vody  $18 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ . Hustota 9 %-ného roztoku je  $1,012 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  a 3 %-ného je  $1,0032 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

Výsledok:  $\dot{n}_A = 1,019 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

ZOZNAM SYMBOLOV

|                |                                                                     |                                                          |
|----------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $c_{A1}$       | – molárna objemová koncentrácie látky A vo fáze 1                   | ( $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ )                     |
| $n$            | – látkové množstvo                                                  | (mol)                                                    |
| $n_i$          | – látkové množstvo zložky i                                         | (mol)                                                    |
| $n_A, n_B$     | – hustota toku zložky A a B                                         | ( $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ) |
| $p$            | – tlak                                                              | (Pa)                                                     |
| $p_i$          | – parciálny tlak zložky i                                           | (Pa)                                                     |
| $p_i^0$        | – tlak nasýtených pár čistej prchavejšej zložky pri teplote roztoku | (Pa)                                                     |
| $p_{A1}$       | – parciálne tlaky zložky A vo fáze 1                                | (Pa)                                                     |
| $p_{B1}$       | – parciálne tlaky zložky B vo fáze 1                                | (Pa)                                                     |
| $x_i$          | – molárny zlomok prchavejšej zložky v kvapaline                     | (1)                                                      |
| $y_i$          | – molárny zlomok prchavejšej zložky v parnej fáze                   | (1)                                                      |
| $z$            | – dĺžka                                                             | (m)                                                      |
| $A$            | – plocha                                                            | ( $\text{m}^2$ )                                         |
| $D_{AB}$       | – difúzny koeficient (difuzivita) zložky A v binárnej zmesi A + B   | ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )                     |
| $K_i^0$        | – rovnovážny rozdeľovací koeficient                                 | (1)                                                      |
| $N_A$          | – tok látky                                                         | ( $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$ )                     |
| $R$            | – univerzálna plynová konštanta                                     | ( $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) |
| $T$            | – teplota                                                           | (K)                                                      |
| $V$            | – objem                                                             | ( $\text{m}^3$ )                                         |
| $\alpha_{AB}$  | – relatívna prchavosť                                               | (1)                                                      |
| $\Delta\delta$ | – dĺžka medzifázového rozhrania                                     | (m)                                                      |

# *PŘÍLOHY*

# **PRÍLOHA 1**

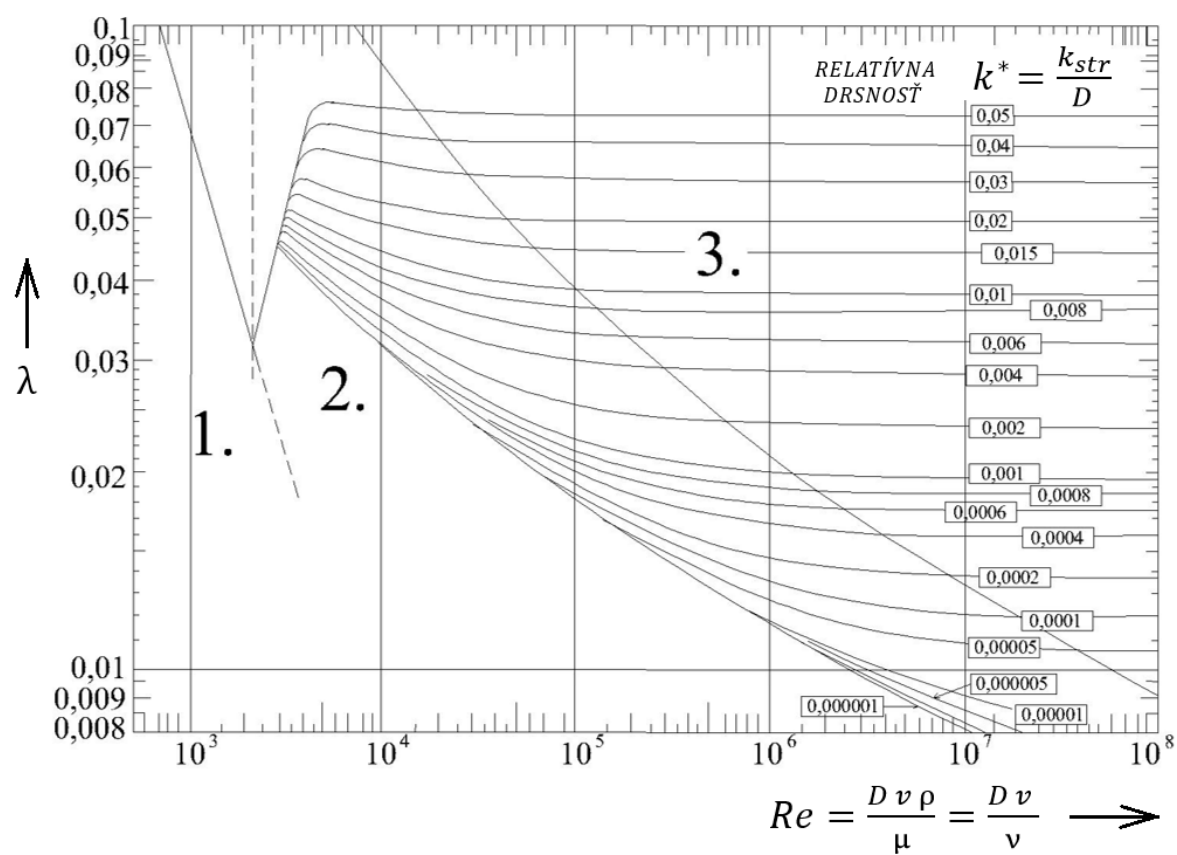
Tabuľka prepočtu zlomkov a koncentrácií [26].

| Dané →                                                                                                  |                                      |                                                                        |                                                               |                                                                                |                                                               |                                                                                     |                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Hľadané ↓                                                                                               |                                      |                                                                        |                                                               |                                                                                |                                                               |                                                                                     |                                                                                                         |
| Molárny zlomok<br>$x \left( \frac{\text{kmol}}{\text{kmol zmesi}} \right)$                              | -                                    | Molárny zlomok<br>$x \left( \frac{\text{kg}}{\text{kg zmesi}} \right)$ | $\frac{\bar{x}}{\bar{x}} \frac{M}{1 + \bar{x}} \frac{1}{M_o}$ | Relatívny molárny zlomok<br>$X \left( \frac{\text{kmol}}{\text{kmol}} \right)$ | $\frac{\bar{X}}{\bar{X}} \frac{M}{1 + \bar{X}} \frac{1}{M_o}$ | Relatívny hmotnostný zlomok<br>$\bar{X} \left( \frac{\text{kg}}{\text{kg}} \right)$ | Molárna objemová koncentrácia<br>$c \left( \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3 \text{ zmesi}} \right)$        |
| Hmotnostný zlomok<br>$\bar{x} \left( \frac{\text{kg}}{\text{kg zmesi}} \right)$                         | $\frac{M x}{M x + M_o (1 - x)}$      | $\frac{\bar{x}}{\bar{x}} \frac{M}{1 + \bar{x}} \frac{1}{M_o}$          | $\frac{\bar{x}}{\bar{x}} \frac{M}{1 + \bar{x}} \frac{1}{M_o}$ | $\frac{M X}{M_o + M X}$                                                        | $\frac{\bar{X}}{\bar{X}} \frac{M}{1 + \bar{X}} \frac{1}{M_o}$ | $\frac{\bar{X}}{\bar{X}} \frac{M}{1 + \bar{X}} \frac{1}{M_o}$                       | Hmotnostná objemová koncentrácia<br>$\bar{c} \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{ zmesi}} \right)$ |
| Relatívny molárny zlomok<br>$X \left( \frac{\text{kmol}}{\text{kmol}} \right)$                          | $\frac{x}{1 - x}$                    | $\frac{M_o \bar{x}}{M (1 - \bar{x})}$                                  | $\frac{M_o \bar{x}}{M (1 - \bar{x})}$                         | -                                                                              | $\frac{M_o \bar{X}}{M}$                                       | $\frac{c M_o}{\rho - M c}$                                                          | $\frac{\bar{c} M_o}{M (\rho - \bar{c})}$                                                                |
| Relatívny hmotnostný zlomok<br>$\bar{X} \left( \frac{\text{kg}}{\text{kg}} \right)$                     | $\frac{M x}{M_o (1 - x)}$            | $\frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$                                          | $\frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$                                 | $\frac{M X}{M_o}$                                                              | -                                                             | $\frac{c M}{\rho - M c}$                                                            | $\frac{\bar{c}}{\rho - \bar{c}}$                                                                        |
| Molárna objemová koncentrácia<br>$c \left( \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3 \text{ zmesi}} \right)$        | $\frac{\rho x}{M x + M_o (1 - x)}$   | $\frac{\bar{x} \rho}{M}$                                               | $\frac{\bar{x} \rho}{M}$                                      | $\frac{\rho X}{M_o + M X}$                                                     | $\frac{\rho \bar{X}}{M (1 + \bar{X})}$                        | -                                                                                   | $\frac{\bar{c}}{M}$                                                                                     |
| Hmotnostná objemová koncentrácia<br>$\bar{c} \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{ zmesi}} \right)$ | $\frac{\rho M x}{M x + M_o (1 - x)}$ | $\bar{x} \rho$                                                         | $\bar{x} \rho$                                                | $\frac{\rho M X}{M_o + M X}$                                                   | $\frac{\rho \bar{X}}{1 + \bar{X}}$                            | $M c$                                                                               | -                                                                                                       |

$M$  – molárna hmotnosť zložky v látke (kg.kmol<sup>-1</sup>),  $M_o$  – molárna hmotnosť látky (kg.kmol<sup>-1</sup>),  $\rho$  – hustota látky (kg.m<sup>-3</sup>)

## PRÍLOHA 2

**Moodyho diagram** [9]. Závislosť koeficienta trenia  $\lambda$  od Reynoldsovho čísla  $Re$  a relatívnej drsnosti stien potrubia  $k^*$ .



### **PRÍLOHA 3**

Stredná absolútna drsnosť potrubia  $k_{str}$  pre vybrané typy materiálov [9].

| Materiál rúr                                               | $k_{str}$ (mm)  |
|------------------------------------------------------------|-----------------|
| Sklo, mosadz, meď hladko ťahané                            | 0,0015 – 0,0025 |
| Bezošvé oceľové rúry valcované alebo ťahané, neskorodované | 0,03 – 0,06     |
| Oceľové rúry podĺžne zvarané, neskorodované                | 0,04 – 0,10     |
| Oceľové rúry mierne skorodované                            | 0,15 – 0,40     |
| Oceľové rúry silno skorodované                             | 0,50 – 1,50     |
| Oceľové rúry vo vnútri pozinkované                         | 0,10 – 0,15     |
| PVC                                                        | 0,002           |
| Liatina nová                                               | 0,20 – 0,60     |

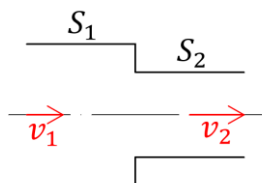


## PRÍLOHA 4

Vybrané koeficienty miestnych strát  $\xi$  [9].

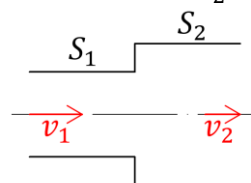
- náhle zúženie potrubia

$$\xi_{ZUZ} = 0,5 \left( 1 - \frac{S_2}{S_1} \right)$$

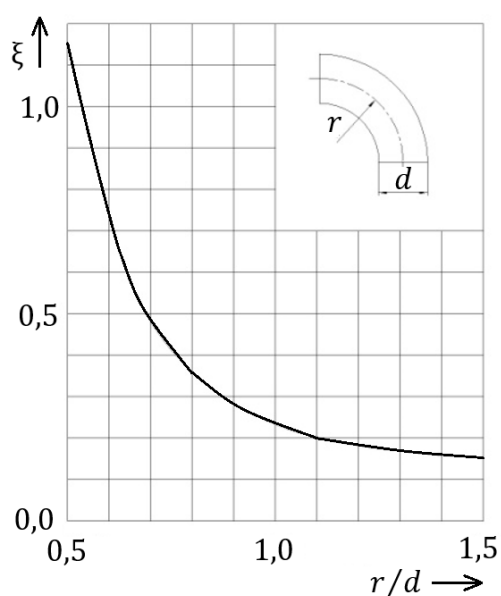


- náhle rozšírenie potrubia

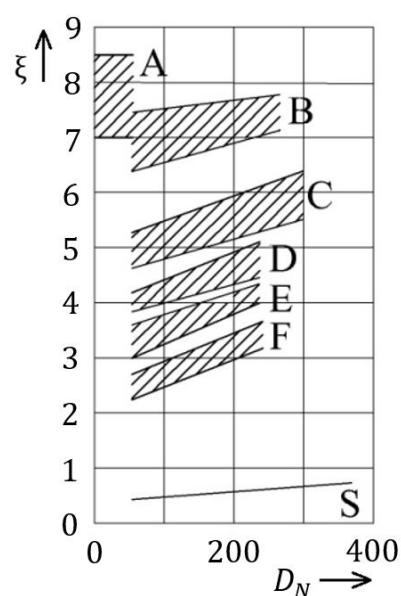
$$\xi_{ROZ} = \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2$$



- hladký ohyb potrubia (90°)



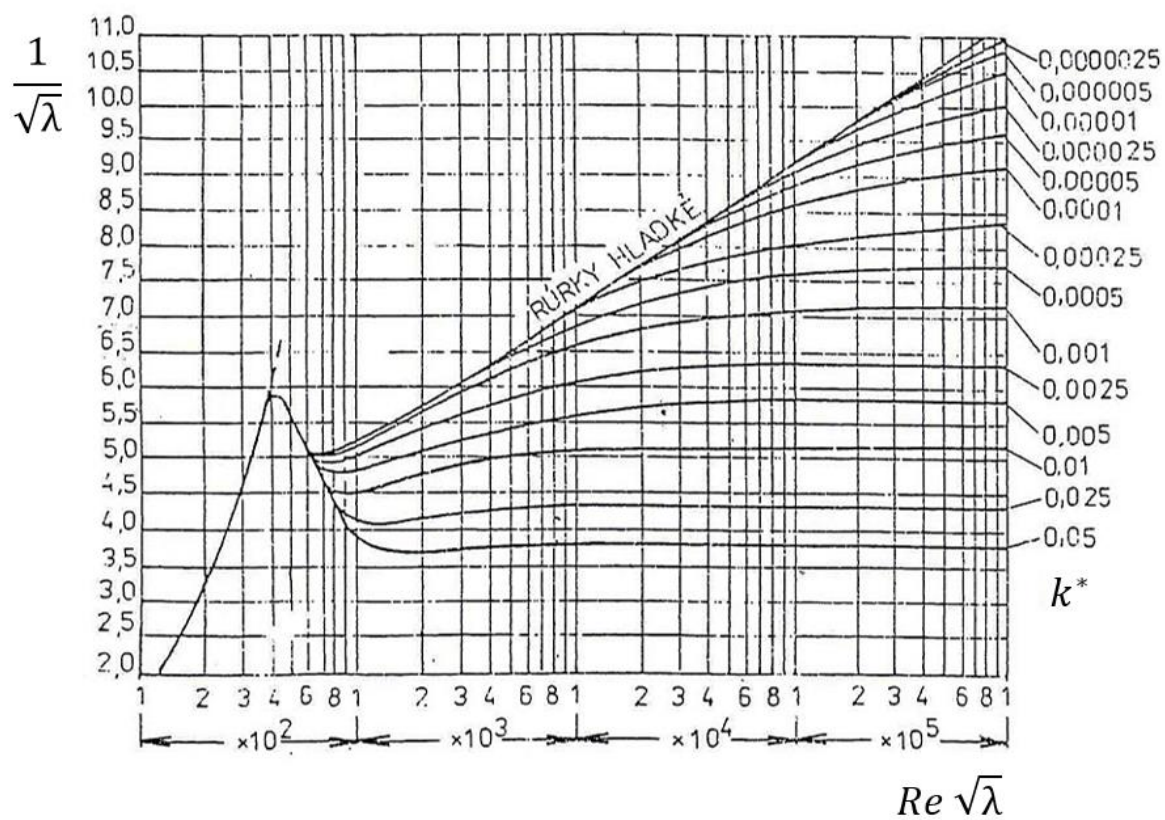
- rôzne typy armatúr



- A – uzatvárací ventil s kovaným a vŕtaným telesom
- B – spätný priamy ventil
- C – uzatvárací ventil s liatym telesom
- D – spätný rohový ventil
- E – uzatvárací rohový ventil
- F – uzatvárací ventil so šikmým vretenom
- S – posúvačový uzáver s nezúženým prierezom

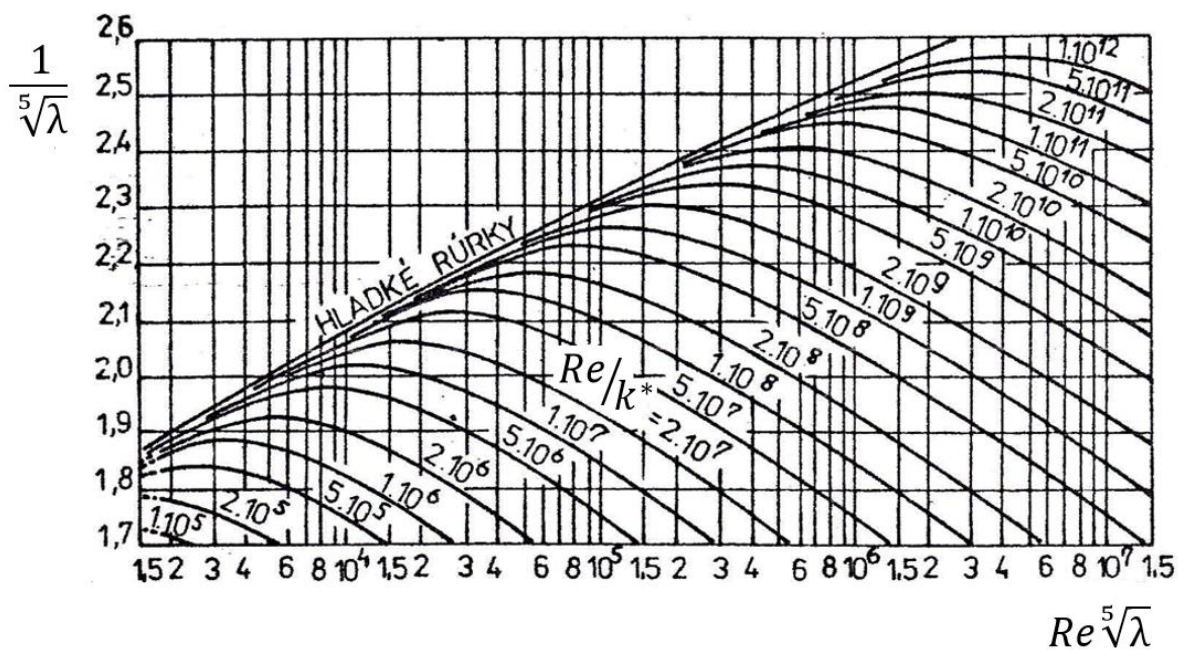
## PRÍLOHA 5

Určenie prietokovej rýchlosti [9]. Závislosť veličiny  $(1/\sqrt{\lambda})$  od Karmanovho kritéria  $(Re/\sqrt{\lambda})$  pre rôzne relatívne drsnosti potrubia.



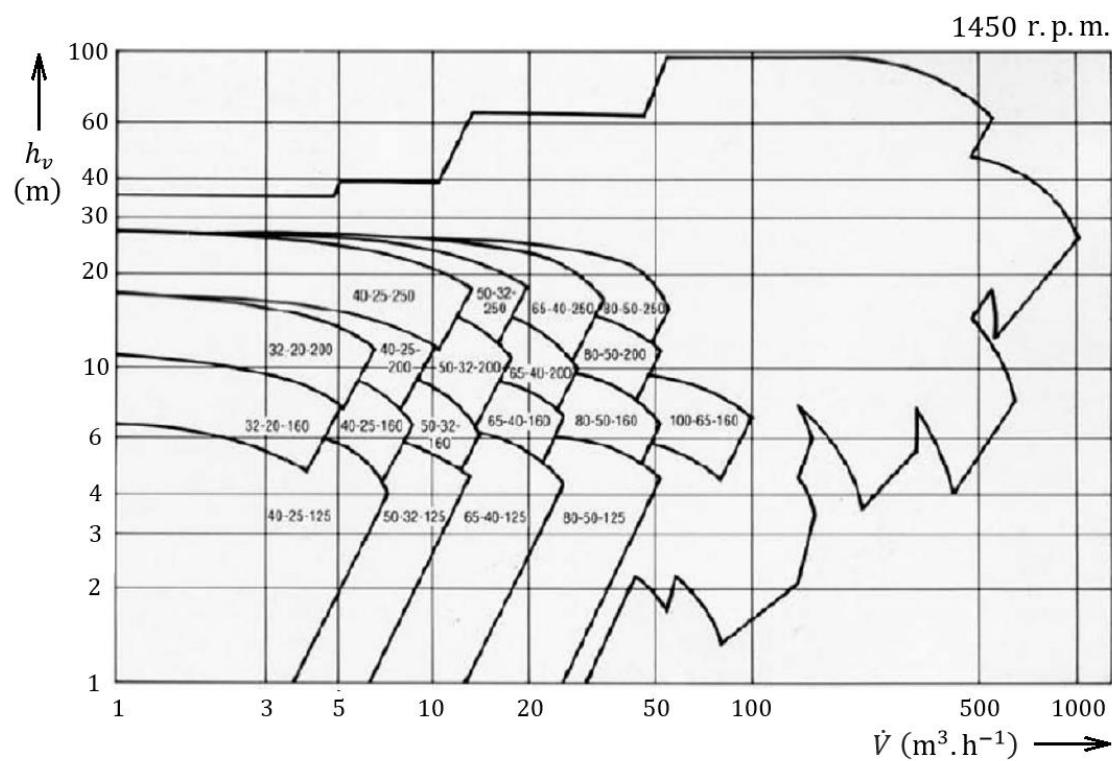
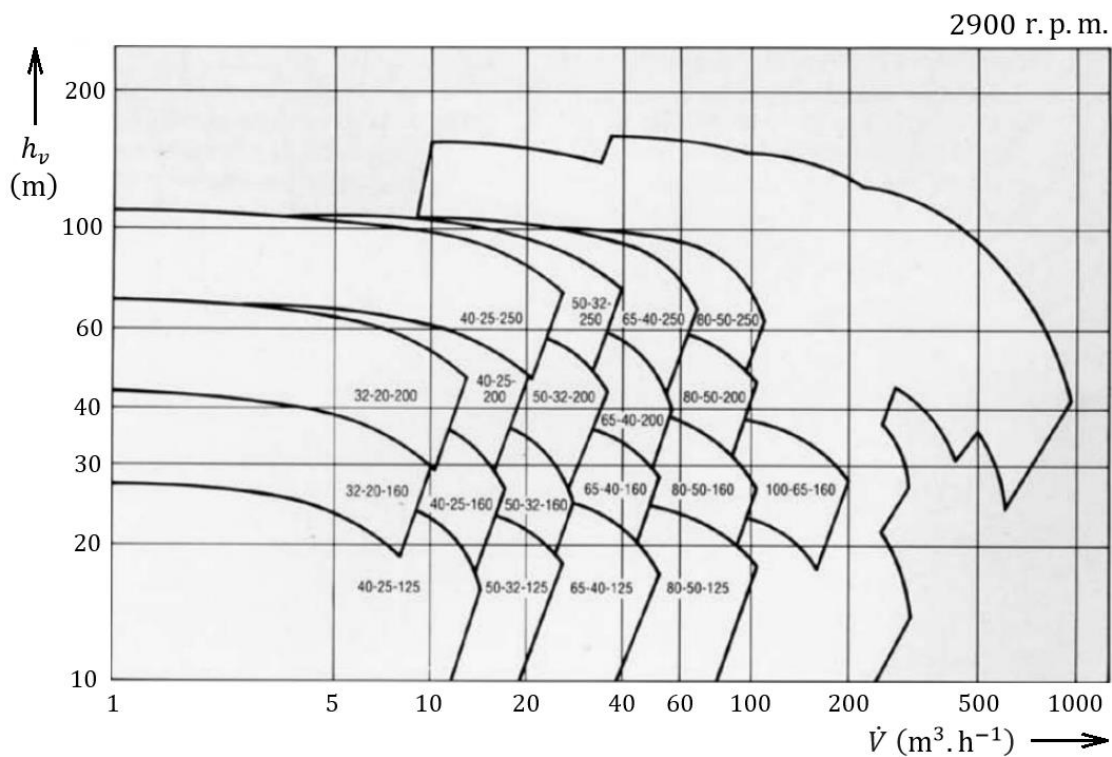
## PRÍLOHA 6

Určenie priemeru potrubia [9]. Závislosť veličiny  $(1/\sqrt[5]{\lambda})$  od  $(Re/\sqrt[5]{\lambda})$  pri rôznej hodnote parametra.



# PRÍLOHA 7

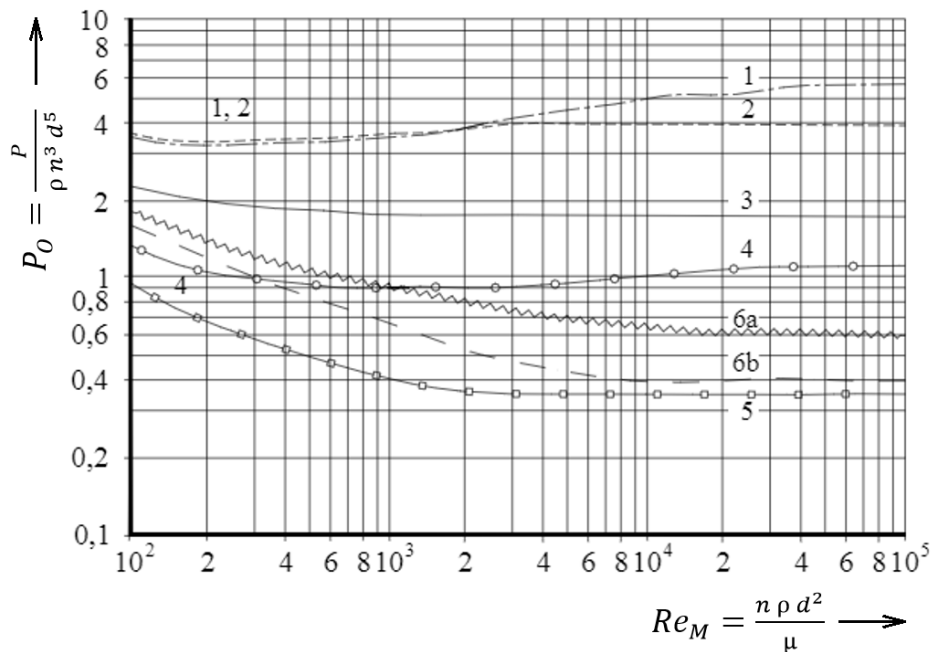
Príklady charakteristík komerčne predávaných odstredivých čerpadiel [9].



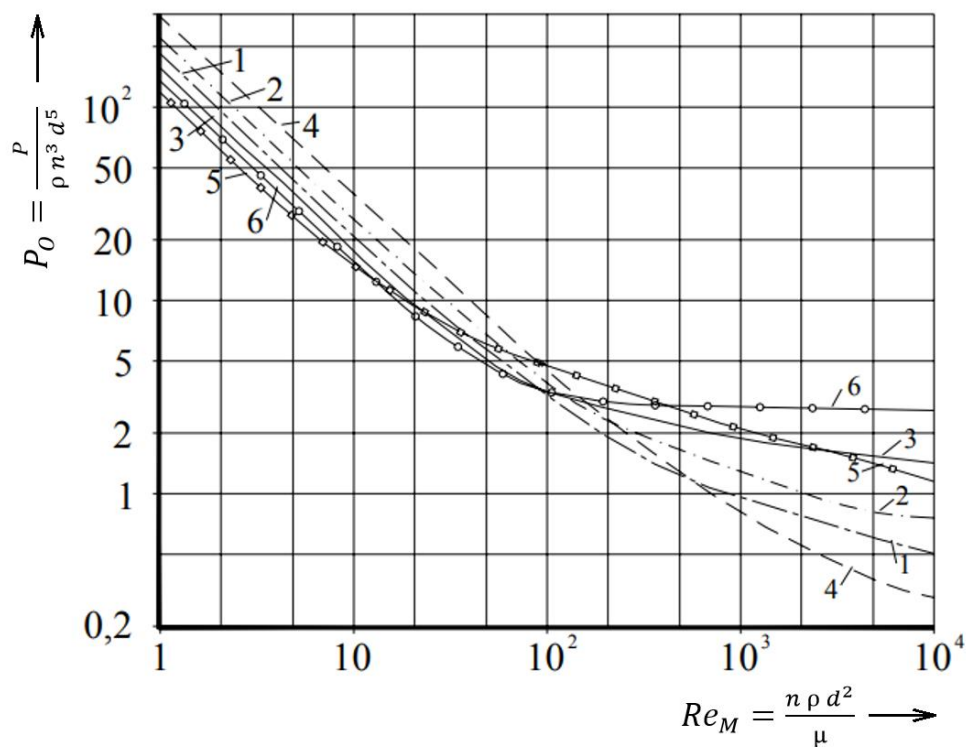
## PRÍLOHA 8

Príkonové charakteristiky vybraných miešadiel [9].

Vybrané rýchloběžné miešadlá: 1 – turbínové miešadlo, 2 – turbínové miešadlo bez deliaceho kotúča, 3 – šesťlopatkové miešadlo, 4 – trojlopatkové miešadlo, 5 – vrtuľové miešadlo, 6a, b – zubové miešadlá



Vybrané pomalobežné miešadlá: 1 – kotvové miešadlo, 2 – skrutkové miešadlo s usmerňovacím valcom, 3 – skrutkové miešadlo umiestnené excentricky, 4 – pásové miešadlo, 5 – listové miešadlo, 6 – štvornásobné lopatkové miešadlo umiestnené excentricky



## LITERATÚRA

- [1] BAFRNCOVÁ, S. a kol. 1991. *Chemické inžinierstvo - príklady a úlohy*. Bratislava: ALFA, 1991. 504 s. ISBN 80-05-00843-0.
- [2] BAFRNEC, M. a kol. 1999. *Chemické inžinierstvo I*. Bratislava: MALÉ CENTRUM, 1999. 440 s. ISBN 80-967064-3-8.
- [3] BALAJKA, B. - SÝKORA, K. 1959. *Výmena tepla v zariadeniach chemického priemyslu*. Praha: SNTL, 1959. 293 s.
- [4] BILLET, R. 1979. *Průmyslová destilace*. Praha: SNTL, 1979. 504 s.
- [5] CENGEL Y. A. 2003. *Heat Transfer: A Practical Approach*. McGraw-Hill, 2002. ISBN 978-0072458930
- [6] COULSON, J. M. - RICHARDSON, J. F. - BACKHURST, J. R. - HARKER, J. H. 1999. *Chemical Engineering Volume 1. Fluid Flow, Heat Transfer and Mass Transfer*. (6th Edition). Elsevier, 1999. ISBN 978-0-7506-4444-0.
- [7] DITL, P. 1996. *Difúzně separační pochody*. Praha: ČVUT, 1996. 225 s. ISBN 80-01-01439-8
- [8] DOJČANSKÝ, J. - LONGAUER, J. 2000. *Chemické inžinierstvo II*. Bratislava: Malé centrum, 2000. 383. s. ISBN 80-967064-8-9.
- [9] FEKETE, R. - GUŽELA, Š. - PECIAR, M. 2007. *Procesné strojnictvo I*. Bratislava: STU, 2007. 197 s. ISBN 978-80-227-2766-2.
- [10] FILKOVÁ, I. 1982. *Tepelné pochody - příklady výpočtů I*. Praha: ČVUT, 1982. 143 s.
- [11] FILKOVÁ, I. 1983. *Tepelné pochody - příklady výpočtů II*. Praha: ČVUT, 1983. 134 s.
- [12] HEINRICH, J. a kol. 1970. *Príklady a úlohy z chemického inžinierstva*. Bratislava: ALFA, 1970. 412 s.
- [13] HOLEČEK, O. 2013. *Chemicko-inženýrské tabulky*. Praha: VŠCHT v Praze. 2013. 118 s. ISBN 978-80-7080-444-5
- [14] HOUGEN O. A. - WATSON K. M., HAGATZ R. A. 1959. *Chemical Process Principles. Thermodynamics*. New York: Wiley, 1965. 506-1072 s.
- [15] JELEMENSKÝ, K. - ŠESTÁK, J. - ŽITNÝ, R. 2000. *Tepelné pochody*. Bratislava: STU, 2000. 243 s. ISBN 80-227-1416-X.
- [16] JINDRA, V. 1984. *Mechanické pochody*. Bratislava: SVŠT v Bratislave, 1984.
- [17] JINDRA, V. 1987. *Mechanické pochody: Příklady*. Bratislava: SVŠT v Bratislave, 1987.
- [18] KOSSACZKÝ, E. 2000. *Bilančné výpočty v technológii chemickej výroby - Materiálové a energetické bilancie*. Bratislava: STU, 2000. 527 s. ISBN 80-227-1359-7
- [19] KOSSACZKÝ, E. - SUROVÝ, J. 1972. *Chemické inžinierstvo 1*. Bratislava: ALFA, 1972. 392 s.
- [20] KOSSACZKÝ E. - SUROVÝ, J. 1987. *Chemické inžinierstvo 2*. Bratislava: ALFA, 1987. 400 s.
- [21] MADLO, V. 1983. *Teoretické základy odboru*. Bratislava: SVŠT, 1983. 313 s.
- [22] MADLO, V. 1998. *Teoretické základy odboru: Príklady k cvičeniam*. Bratislava: STU, 1998. 279 s. ISBN 80-227-1077-6.
- [23] MEDEK, J. 1998. *Mechanické pochody*. Brno: PC-DIR Real, 1998. 217 s.
- [24] MÍKA, V. 1981. *Základy chemického inženýrství*. Bratislava: ALFA, 1981. 872 s.
- [25] PECIAR, P. - FEKETE, R. - PECIAR, M. 2016. *Procesné strojnictvo II*. Bratislava: STU, 2016. 177 s. ISBN 978-80-227-4540-6.

- [26] PILAŘ, A. a kol. 1973. *Příklady chemickoinženýrských výpočtů III*. Praha: SNTL, 1973. 340 s.
- [27] RAŽNJEVIĆ, K. 1984. *Termodynamické tabuľky*. Bratislava: ALFA, 1984. 336 s.
- [28] STREK, F. 1977. *Míchání a míchací zařízení*. Praha: SNTL, 1977. 384 s.
- [29] ŠESTÁK, J. - ŽITNÝ, R. 2006. *Tepelné pochody II - Výměníky tepla, odpařování, sušení, průmyslové pece a elektrický ohřev*. Praha: ČVUT, 2006. 165 s. ISBN 80-01-03475-5
- [30] ŠESTÁK, J. a kol. 1980. *Transportní a termodynamická data pro výpočet aparátů a strojního zařízení*. Praha: ČVUT, 1980. 245 s.
- [31] VAVRO, K. - NOVÁK, V. - RIEGER, F. 1983. *Hydraulické pochody*. Bratislava: SVŠT v Bratislave, 1983.
- [32] VAVRO, K. - NOVÁK, V. - RIEGER, F. 1986. *Hydraulické pochody: Zbierka príkladov*. Bratislava: SVŠT v Bratislave, 1986.
- [33] VDI - *Wärmeatlas*. Heidelberg: Springer, 1997. 1374 s. ISBN 3-540-62719-7
- [34] VOLÁK, Z. - RYBA, M. - PECHOČ, V. 1974. *Příklady chemickoinženýrských výpočtů I/I*. Praha: SNTL, 1974. 264 s.
- [35] PECIAR, P. *Procesné strojnictvo*. Podklady k cvičeniam z predmetu Procesné strojnictvo.
- [36] PECIAR, P. *Tepelné procesy*. Podklady k cvičeniam z predmetu Tepelné procesy.
- [37] PECIAR, P. *Mechanické procesy*. Podklady k cvičeniam z predmetu Mechanické procesy.

doc. Ing. Peter Peciar, PhD., Ing. Martin Juriga, PhD., Ing. Adam Gušťařík,  
Ing. Michaela Kohútová, Ing. Kristian Jezsó

**PROCESNÉ STROJNÍCTVO**  
**Príklady**

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU,  
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2021.

Edícia skrípt

Rozsah 127 strán, 65 obrázkov, 16 tabuliek, 8 príloh, 5,981 AH, 6,240 VH, 1. vydanie,  
edičné číslo 6076, tlač ForPress NITRIANSKE TLAČIARNE, s. r. o.

85 – 210 – 2021

ISBN 978-80-227-5081-3



