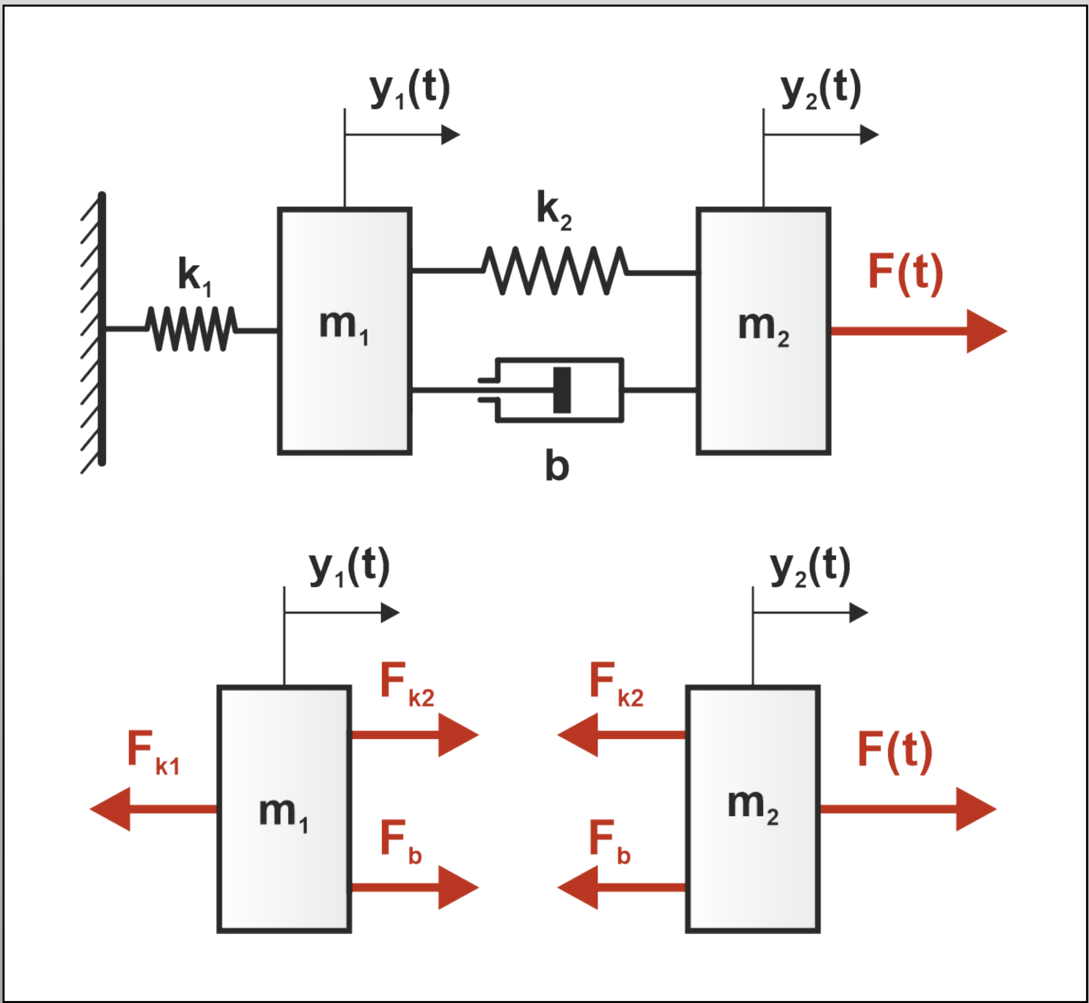
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

MODELOVANIE A SIMULÁCIE MECHATRONICKÝCH SYSTÉMOV I.

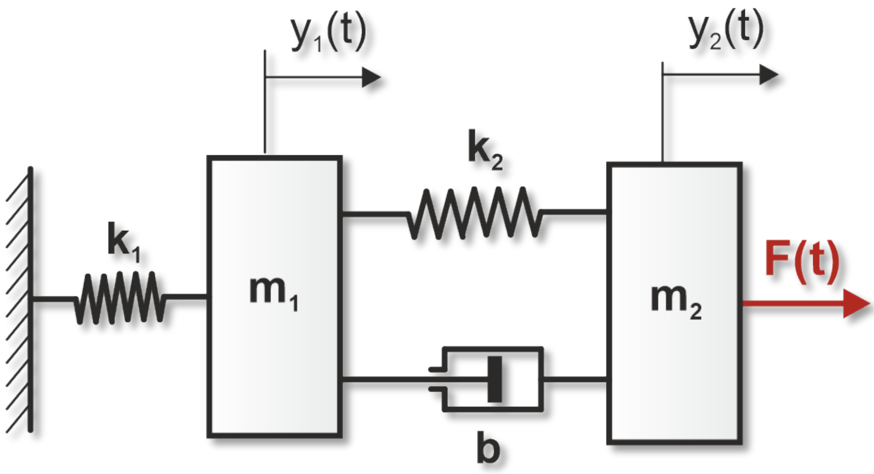


Ing. Martin Garan, PhD.

SPEKTRUM STU

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Modelovanie a simulácie mechatronických systémov I.



prvé vydanie

Ing. Martin Garan, PhD.

2020

Učebnica svojím obsahom pokrýva rozsah predmetu Mechatronika a Simulácie mechatronických systémov, vyučovaných v bakalárskom stupni štúdia odboru Aplikovaná mechanika a mechatronika na Strojníckej fakulte STU. Kniha Modelovanie a simulácie mechatronických systémov I. poskytuje veľké množstvo teoretických poznatkov z oblasti Mechatroniky a z teórie modelovania dynamických systémov. Obsahovo je zameraná na veľké množstvo praktických ukážok aplikácií jednoduchých systémov, pri ktorých sa využívajú moderné simulačné nástroje na vyšetrenie odozvy uvažovaných fyzikálnych modeloch.

Úvodné kapitoly tejto učebnice sú venované teoretickým základom modelovania a tvorby fyzikálnych modelov dynamických systémov z rôznej fyzikálnej podstaty. V rámci knihy sú postupne opísané prístupy tvorby matematických modelov pre tieto typy systémov z rôznej fyzikálnej podstaty a to konkrétne pre dynamické systémy mechanické, elektrické, elektro-mechanické, pneumatické, hydraulické a tepelné. Prevažná časť učebnice je okrem teoretických základov venovaná praktickým ukážkam tvorby matematických modelov, ktorých výsledkom sú spravidla diferenciálne rovnice resp. sústavy diferenciálnych rovníc.

V učebnici možno okrem iného nájsť aj návody ako vyšetriť odozvu pre odvodené matematické modely uvažovaných systémov. Pre vyšetrovanie odozvy a správania sa systémov je v učebnici využívaná prevažne metóda inverznej Laplaceovej transformácie, ktorej výsledkom je analytické riešenie odozvy v časovej oblasti a to pre rôzne uvažované vstupy lineárne časovo závislých systémov. Práca s modelmi je realizovaná s využitím simulačného prostredia Matlabu, ktorý umožňuje tvoriť simulačné skripty na výpočet odozvy systému a jej ďalšieho zobrazenia na zodpovedajúcich grafoch v závislosti od času.

Na simuláciu modelov je v rámci celej knihy využitý softvér Matlab verzia R2018a alebo Matlab R2019a od spoločnosti MathWorks a takisto Control toolbox Matlabu (nadstavba Matlabu slúžiaca na modelovanie a riadenie dynamických systémov), ktorý je primárne určený na modelovanie a vyšetrovanie vlastností dynamických systémov.

Recenzenti: prof. Ing. Peter Šolek, PhD., doc. Ing. Vladimír Chmelko, PhD., Ing. Juraj Kubica, PhD.

Grafický návrh obálky: Ing. Martin Garan, PhD.

Schválila Vedecká rada Strojníckej fakulty STU v Bratislave.

Rok vydania: 2020

ISBN xxx-xx-xxx-xxxx-x

Predhovor

Mechatronika je pomerne mladý odbor, ktorý vznikol v **Japonsku v 70. rokoch** minulého storočia implementáciou stále dokonalejších prvkov výpočtovej techniky do pôvodne čisto mechanických alebo elektromechanických strojov. Postupným zavedením inteligentných prvkov sa postupne začali vyvíjať **výrobky novej vyššej kvality s pridanou hodnotou**. Takéto zavádzanie nových inovatívnych prvkov priniesla potreba súčasných konkurencieschopných trhov. Vývojoví inžinieri museli neustále čeliť výzve produkovať stále zložitejšie a sofistikovanejšie inžinierske systémy s vysokým stupňom výkonnosti, spoľahlivosti a to pri nízkej udržateľnej cene (trend, ktorý na trhu možno pozorovať aj v súčasnosti). Požiadavku priniesol práve pokrok v mikroprocesorových technológiách súvisiaci s požiadavkou neustáleho zmenšovania mechanických a elektronických súčastí a implementáciou **inteligentných (smart) prvkov** do novovznikajúcich zariadení. V snahe čeliť súčasnej vysoko súťaživej atmosfére vo vývoji produktov tak musia byť dnešní vývojári neustále schopní prinášať nové a pútavé prvky a integrovať tak veľké množstvo spolu súvisiacich technológií, ktoré pochádzajú z viacerých fyzikálnych oblastí (mechanickej, elektrickej, tepelnej a iných). Platformou pre najlepšie splnenie danej integrácie s najrýchlejším možným procesom návrhu a výroby poskytol práve vedný odbor **Mechatronika**.

Snahou mechatroniky, ktorú radíme medzi **interdisciplinárne inžinierske spôsoby návrhu** a **vývoja inteligentných (smart)** elektromechanických systémov je čo najlepšie integrovať mnohé technológie z rôznych fyzikálnych oblastí ako sú **elektronika**, **mechanika**, **automatické riadenie** v reálnom čase (z angl. real-time control) a **informatika**. Mechatronika zavádza do výrobkov **mikroprocesory**, **smart materiály** a časti nevyhnutnej interakcie človeka s počítačom. V súčasnosti aj prvky umelej inteligencie.

Proces uvedenia nového výrobku na trh by sa od fázy jeho návrhu a jeho samotnej výroby mal udiať v čo najkratšom možnom čase. Na trh sa v konečnej fáze prinesie konkurencieschopný a inteligentný produkt s vysokou kvalitou a pridanou hodnotou. **Mechatronika** ako taká je kľúčom k návrhu širokého spektra produktov medzi, ktoré patria napr. **pevné disky**, **digitálne kamery**, **digitálne fotoaparáty**, **mobilné telefóny** a **počítače** a **flexibilné autonómne systémy**, **inteligentné zbraňové systémy**, **lietadlá** a **vesmírne rakety**, ale aj systémy riadiacich procesov v elektrárňach a továrňach a veľa iných. Pri vývoji všetkých spomenutých produktov sa v súčasnosti využíva mechatronický spôsob prístup návrhu. Aby bolo možné navrhovať produkty **mechatronickým prístupom** je nutné poznať princíp správania sa systémov a to s ohľadom na rôznu fyzikálnu podstatu, nakoľko všetky produkty, ktoré vyvíjame mechatronickým spôsobom sú prienikom systémov z viacerých fyzikálnych odvetví. Je teda zrejmé, že každý **mechatronický inžinier**, ktorý vstupuje do fázy vývoja nového **mechatronického systému**, by mal byť inžinierom, ktorý má informácie o základných fyzikálnych systémoch, mal by byť schopný opísať a vytvoriť jednoduché matematické modely takýchto fyzikálnych systémov a takisto by mu nemali byť cudzie zručnosti týkajúce sa modelovania systémov s využitím počítačovej podpory.

Táto učebnica prináša pre budúcich **mechatronických inžinierov** možnosť naučiť sa a pochopiť tvorbu matematických modelov pre základné fyzikálne systémy a tiež možnosť získať zručnosti vo vyšetrovaní odozvy navrhovaných **dynamických systémov** pre rôzne uvažované budiace signály s využitím moderných prístupov modelovania systémov pomocou počítača, napr. prostredí **Matlab**.

Kapitola 1 sa venuje teoretickým základom a teórii modelovaní systému. V tejto kapitole je opísaná základná klasifikácia systémov a členenie všetkých systémov podľa základných hľadísk.

Kapitoly 2 – 7 sú venované metodike tvorby matematických modelov základných fyzikálnych systémov ako sú **mechanický systém, elektrický systém, elektro-mechanický systém**, ďalej **tekutinové systémy** zahŕňajúce **pneumatický** a **hydraulický systém** a napokon **tepelnému systému**.

Kapitola 9 je zameraná na vyšetrovanie dynamickej odozvy fyzikálnych systémov. Kapitola sa venuje vyšetrovaniu vlastnej a nútenej odozvy systémov.

Kapitola 10 rozoberá o **systém 1. rádu**. V tejto kapitole sa venujeme výpočtu odozvy systému prvého a zadefinovaniu jeho základných parametrov, ktoré daný systém charakterizujú (časová konštanta a zosilnenie systému).

Kapitola 11 je venovaná **systému druhého rádu**. V tejto kapitole je odvodená odozva pre systém druhého rádu a to pre rôzne prípady na základe koreňov charakteristickej rovnice. Navyše sú v tejto kapitole opísané základné charakteristické parametre systému druhého rádu.

Kapitola 12 sa venuje teórii Fourierových radov. V tejto kapitole je vysvetlená metodika výpočtu reálneho a komplexného typu Fourierovho radu pre periodicky opakujúce sa funkcie **f(t)** a takisto spôsob výpočtu frekvenčného spektra funkcie **f(t)**.

Kapitola 13 je zameraná na teóriu **Fourierovej transformácie**, ktorá je zadefinovaná na základe teórie **Fourierových radov**. V tejto kapitole je vysvetlený spôsob výpočtu frekvenčného spektra pre neperiodické spojité funkcie **f(t)** definované v časovej oblasti **t**.

Kapitola 14 je venovaná teórii **Laplaceovej transformácie**, ktorá umožňuje nájsť obraz časovo závislej funkcie **f(t)** v komplexnej rovine **s**. V tejto kapitole možno tiež nájsť informácie o vlastnostiach Laplaceovej transformácie a príklady výpočtu Laplaceovej transformácie základných funkcií **f(t)**.

Kapitola 15 opisuje teóriu výpočtu riešenia diferenciálnych rovníc s využitím definície Laplaceovej transformácie a jej vlastností.

Kapitola 16 je zameraná na vyšetrovanie a analýzu odozvy systémov s uvažovanou skokovou zmenou, budeného ľubovoľným vstupným signálom a vyšetrovaním impulznej odozvy systémov.

Citáty na úvod:

Umenie je lož, ktorá nám pomáha vidieť pravdu.

Picasso

Fyzikálne modely sú také odlišné od sveta, ako je geografická mapa odlišná od povrchu zeme.

L. Brillouin

Obsah

1 MODELOVANIE A TVORBA MODELOV

1.1 ÚVOD DO MODELOVANIA

Človek modeloval a simuloval od času, keď sa jeho mozog začal vyvíjať a získal schopnosti predstavovať si. Deti od svojho narodenia modelujú bez toho, že by si to vôbec uvedomili. Prakticky my všetci **modelujeme** a **simulujeme** ako **dieťa** v ranom veku hrajúce sa s loptou, či **architekt** vytvárajúci model budovy alebo **biznismen**, ktorý pripravuje svoj **biznis plán** na ekonomickom trhu.

Prečo je modelovanie potrebné? Je jednoduchá otázka, ktorá by mohla zaznieť predtým než sa začneme zaoberať samotným procesom modelovania a simulácie matematických modelov. Odpoveď by mohla byť ... „**Pretože, modelovanie môže byť veľmi užitočné, ak chceme napríklad ...**“

1. zistiť výšku alebo náklon veže **– bez toho, aby sme na vežu vyliezli**,
2. odmerať šírku rieky **– bez nutnosti jej preplávania**,
3. odhadnúť približnú hmotnosť **Zeme – bez toho aby sme ju odvážili**
4. zistiť teplotu na povrchu, či v samotnom strede **Slnka**,
5. vyčísliť približné množstvo **krvi**, ktorá prúdi v ľudskom tele,
6. predpovedať ako sa bude meniť **vývoj populácie** na zemi za určitý čas,
7. alebo určiť čas potrebný na obeh **satelitu** na orbite okolo zeme.

V prípade každej takejto úlohy možno zostaviť matematický model, na základe ktorého možno danú úlohu riešiť a potom simulovať pre rôzne premenlivé **parametre**. Podobný spôsob funguje pre všetky odvetvia vedy a to aj pre prípady, keď riešime **fyzikálne, biologické** alebo **sociálne** problémy. Zo skúseností nadobudnutých vedeckým skúmaním a sledovaním správania sa všetkých **fyzikálnych systémov** za pomerne dlhý čas sa zistilo, že prakticky všetky systémy majú určitú podobnosť a teda možné medzi nimi nájsť nejakú analógiu, z ktorej potom vyplýva podobnosť **matematických modelov** v reálnom svete. Vedeckým bádaním sa takisto zistilo, že matematické modely sú v prevažnej miere definované jednoduchými diferenciálnymi rovnicami **1.** a **2. rádu**. Proces tvorby alebo nadobudnutia matematického modelu pre opisovaný systém nazývame – **modelovanie**.

Z nadobudnutých skúsenosti tiež vyplynulo, že prevažná časť systémov sa vyznačuje dynamickým správaním sa, ktoré možno v konečnom dôsledku opísať jednou diferenciálnou rovnicou prípadne sústavou viacerých diferenciálnych rovníc. Získaním matematického modelu sa však proces analýzy systému nekončí, nakoľko nasleduje proces, ktorý nazývame proces **simulácie matematického modelu** (vyšetrenie správania sa systému).

Matematický model možno **simulovať** pre rôzne počiatočné podmienky a získať tak prehľad o jeho správaní sa napr. pre rôzne uvažované parametre resp. vyšetriť citlivosť daného systému na akúkoľvek zmenu vstupných budiacich podnetov. Posledným štádiom analýzy systému by mal byť proces zhodnotenia vypočítanej odozvy matematického modelu alebo posúdenie správnosti a reálnosti nadobudnutého riešenia. Poznamenajme, že toto štádium nemusí byť vždy konečným štádiom analýzy systému, nakoľko v procese **simulácie** možno ďalej pokračovať a vyšetrovať napr. vplyv odozvy na rôznu zmenu parametrov systému alebo venovať sa návrhu riadenia mechatronického systému na dosiahnutie požadovanej odozvy.

1.2 MODELOVANIE SYSTÉMOV

Čo teda proces modelovania znamená z technického hľadiska ? Modelovanie možno definovať ako proces **abstrakcie reálneho systému**. Model by mal zachytávať konceptuálny rámec celého uvažovaného a vyšetrovaného systému. Model možno chápať ako **abstrakciu skutočného systému**, takisto **ako istú fyzikálnu repliku** napr. existujúceho **systému**, **procesu** alebo **modelovej situácie**. Je to teda vecná reprezentácia skutočnej reality.

Model: Je slovo odvodené z latinského slova, ktorého zmysel je **tvar, forma** alebo **vzor**. V prípade modelu, ktorý je abstrakciou reality rozoznávame dva typy abstrakcie. A tak **abstraktný model** môže byť:

- logický (opísaný logickými úvahami),
- alebo matematický.

Matematický model je matematický opis vlastností a interakcií systému, ktorého odvodenie závisí od **systémových hraníc, systémových komponentov** a ich **interakcií** medzi sebou. Model takisto závisí od typu analýzy, ktorú pre daný model realizujeme. Z teórie systémov poznáme dve základné typy analýz a to:

- analýzu v ustálenom stave (z angl. **steady-state**)
- a prechodovú analýzu (z angl. **transient analysis**)

Matematický model závisí v neposlednej rade takisto od **zjednodušení**, ktoré uvažujeme počas celej tvorby modelu. V tomto štádiu je nutné poznamenať, že v prípade, ak použijeme príliš veľa **zjednodušení** získame síce **zjednodušený model**, avšak na úkor nižšej presnosti vyšetrovanej odozvy daného systému. Na druhej strane, ak pri modelovaní použijeme **zjednodušení** príliš málo, dospejeme často k **zložitým (komplexným)** modelom, ktorých riešenie môže byť síce presnejšie, ale získame ich obťažnejším spôsobom a výpočet môže trvať podstatne dlhší čas.

Navyše, zložitý model nie vždy musí znamenať tú najvýhodnejšiu cestu, ktorou by sa mal jeho tvorca vydať. Nakoľko zo skúseností získaných z dlhoročnej praxe vyplynulo, že príliš zložité matematické modely nie vždy vedú k reálnym odozvám systémov, ale naopak takéto výsledky v skutočnosti vôbec nezodpovedajú realite pri overení experimentálnym šetrením. Platí pravidlo, že v mnohých prípadoch práve jednoduchší model poskytuje reálnejšiu odozvu skúmaného systému ako model zložitejší.

V procese modelovania sa spravidla pri tvorbe modelu stretávame s riešením a optimalizovaním troch problémov a to:

- jednoduchosť alebo zložitosť modelu,
- presnosť získaného modelu z pohľadu jeho fyzikálnej podstaty,
- ako aj dôveryhodnosť daného modelu.

Pripomeňme, že z dôvodu jednoduchosti realizácie je zrejmé, že pri analýze alebo návrhu riadenia systému je vhodné siahnuť najskôr po **matematickom modely**, ktorého správnosť neskôr overíme **experimentálnym modelom**.

V tomto štádiu už vieme, že matematický model je najvýhodnejším a najlacnejším spôsobom analýzy systémov, ktorý inžinieri používajú na vyšetrovanie správania sa systému. V nasledujúcich kapitolách sa zameriame na **matematický model** z pohľadu matematického hľadiska.

1.3 MODEL

Pojem **model** sa vyskytuje v odbornej literatúre veľmi často. Teória modelov a modelovania systémov nadobudla význam v súvislosti s rozvojom kybernetiky. V súčasnosti však modely nachádzajú uplatnenie v rôznych vedných odboroch, a to nielen v technických vedách.

Termín **model** možno chápať rôznym spôsobom, nakoľko vytvorené modely ako také môžu slúžiť odlišným cieľom. Problematika modelovania zahŕňa veľké množstvo rôznorodých otázok. To znamená, že sme nútení obmedziť sa len na tie, ktoré priamo alebo nepriamo súvisia s využitím štatistických metód. Rôzne názory na všeobecnú podstatu modelov, na ich obsah, klasifikáciu a predovšetkým funkciu, netvoria zďaleka ucelenú teóriu s presne vymedzenou a jednotnou terminológiou. **Konštrukcia modelu** a analýza takejto konštrukcie sú spravidla viazané na riešenie konkrétnych úloh teoretického a praktického rázu a je preto zrejmé, že pri posudzovaní metodologických otázok je treba k tejto skutočnosti prihliadať. Pri pozorovaní **javov** a **procesov** reálneho sveta si uvedomujeme, že z pohľadu svojej jednoduchosti sú prírodné procesy v prevažnej miere také zložité, že na pochopenie jednoduchým ľudským chápaním momentálne nie sme a možno ani v dohľadnom čase nebudeme schopní tieto procesy dokonale pochopiť a vysvetliť. Pochopenie fyziky je tak náročné, že len veľmi obtiažne opisujeme zákonitosti z pozorovania prírody a ešte obťažnejšie prenikáme do ich väzieb a súvislosti.

Modelovanie je tvorivá ľudská činnosť spočívajúca v **idealizácií** a **zjednodušení** dejov reálneho sveta. Väčšina autorov sa zhoduje na tom, že model musíme chápať ako určitú formu vyobrazenia skutočnosti. Rozdiely sú iba v tom, aká je **modelovaná skutočnosť**, aké sú **modelovacie prostriedky**, či k akému cieľu daný model slúži. Slovo **model** má svoj pôvod takisto v stavebníctve, kde označuje mieru, podľa ktorej sú vyjadrované proporcie stavby. Neskôr dostal pojem **model** zásadne nový význam. Pripúšťa sa, že teória nemusí byť len zobrazením skutočnosti a jej objektívnej podoby, ale môže ísť aj o jej určitú **idealizáciu**. Často sa vyskytujú prípady keď je výhodnejšie operovať s modelom ako so skutočnosťou. Čo vyplýva z toho, že častejšie ovládame lepšie pravidlá modelovacej techniky, než pravidlá priamo nepozorovateľnej skutočnosti.

Podstata modelovania vychádza zo zákonov prírody a z historicky vzniknutej schopnosti abstrahovať podobné vlastnosti rôznych objektov. Vďaka súvislostiam, ktoré medzi objektami existujú môžeme nepriamo sledovať niektoré objekty prostredníctvom objektov iných. Cez mnohoznačnosť pojmu **model** môžeme charakterizovať realitu skúmaného prvku ako zjednodušenú formu zobrazení jeho podstatných čŕt. **Model** je zostavený podľa určitých pravidiel, ktoré dovoľujú napodobovať správanie sa a vlastnosti zobrazovanej reality.

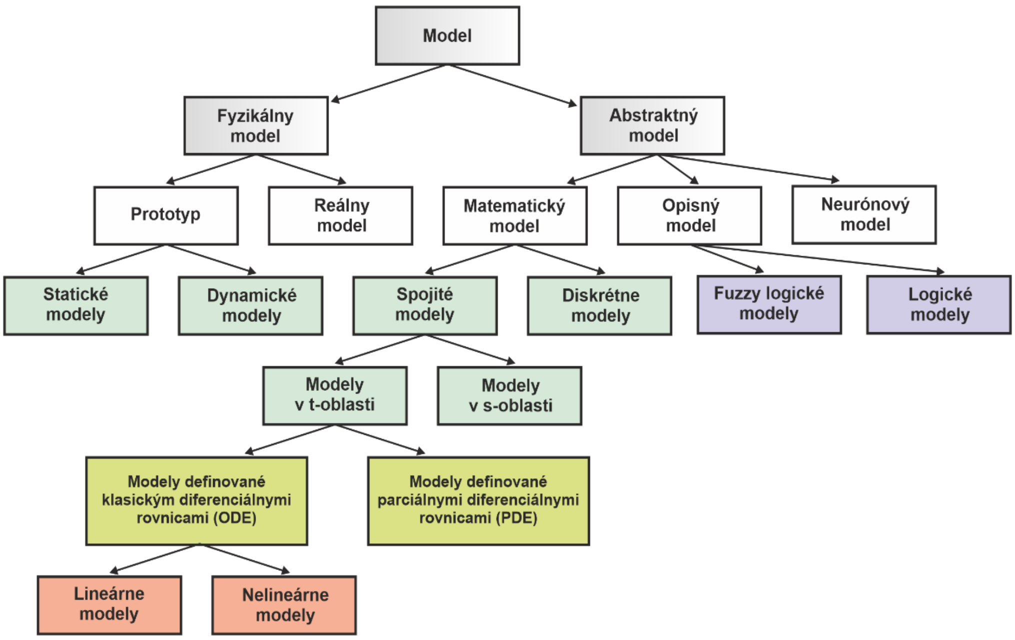
Model je nielen prostriedkom získavania poznatkov, ale pomocou modelu možno takisto rozvinúť teóriu určitej oblasti. Štúdium modelu umožňuje stanoviť niektoré poznatky o zobrazovanej skutočnosti, a to iba v prípade, že medzi skutočnosťou a modelom existuje podoba, ktorá je pre poznávanie reality nevyhnutná.

Činnosť zameranú na vytvorenie a nájdenie modelu nazývame **modelovaním**. **Modelovaním** môžeme dospieť k matematickej teórii, ktorá umožňuje vysvetľovať a objavovať súvislosti a čiastočne ju zovšeobecňovať.

1.4 KLASIFIKÁCIA MODELOV

Modely sú vo všeobecnosti veľmi užitočné pre štúdium komplexných fenoménov experimentálneho vyšetrovania a analýzy systémov s využitím počítačovej simulácie. V prípade modelovania na počítači sa šetria náklady. Nemusíme vytvárať fyzické modely, nakoľko na vytvorenom matematickom modeli možno uskutočniť analýzy za pomerne krátky čas a pri nulových nákladoch.

Systémové modely klasifikujeme podľa nasledujúceho vývojového diagramu znázorneného na Obr. 1.1.



Obr. 1.1. Klasifikácia systémov

1.4.1 Fyzikálny a abstraktný model

Mnohým ľudom slovo **„model”** evokuje obrazy **hlinených áut**, **modelov budov** v aerodynamických tuneloch, **trenažéry kokpitov lietadiel** alebo **miniatúrne modely** super tankerov plávajúcich v bazénoch.

Toto všetko sú príklady **fyzikálnych modelov** (tiež nazývaných – **ikonické modely**). Nie sú to typické druhy modelov, ktoré sú záujmom poznania v prípade **systémovej analýzy**. Fyzikálne modely sú vo všeobecnosti ľahko pochopiteľné a sú obyčajne **replikami** v zmenšenej mierke.

V systémovej analýze sú však viac používané tzv. **abstraktné modely**, reprezentujúce systém v zmysle **logických** alebo **kvantitatívnych** vzťahov, ktoré sú neskôr upravované a pozmeňované na vyšetrenie reakcií modelu na prípadné zmeny. Abstraktný model je viac všeobecnejší, a preto menej rozpoznateľný.

1.4.2 Matematický a opisný model

Matematický model je **abstraktný model** používajúci matematický zápis na opísanie správania sa sústavy alebo systému. Matematické modely sa používajú prevažne v prírodných vedách a **inžinierskych disciplínach** ako je **fyzika**, **biológia** a **elektrotechnika**, ale aj v **sociálnych vedách** ako je **ekonómia**, **sociológia** a **politické** vedy. Najčastejšie sa s matematickými modelmi stretávajú fyzici, inžinieri, informatici a ekonómovia. Matematický model je zapísaný jazykom **matematických symbolov**. Matematické modely môžeme klasifikovať podľa nasledujúcich hľadísk ako:

- **Lineárne** a **nelineárne modely**: V tomto prípade sú funkcie, podmienky a okrajové podmienky reprezentované lineárnymi rovnicami. Takýto model označujeme ako **lineárny model**. Ak je aspoň jedna z podmienok alebo obmedzení reprezentovaná **nelineárnou rovnicou**, potom model označujeme ako **nelineárny**.
- **Deterministické** a **stochastické** (**náhodné**) **modely**: Deterministický model vykazuje pri opakovaní pokusu pri rovnakých počiatočných podmienkach rovnaké správanie. Naopak pri stochastickom modeli je prítomná náhoda, aj keď sú počiatočné podmienky rovnako zachované.
- **Statické** a **dynamické** modely: Statický model neuvažuje prvok času. Na strane druhej **dynamický** model prvok času vyžaduje a z tohto dôvodu sú dynamické modely zvyčajne reprezentované a opisované **rekurentnými** alebo **diferenciálnymi rovnicami**
- **Systémy so sústredenými** alebo **distribuovanými parametrami**: Ak považujeme model za **homogénny** (t. j. konzistentný stav modelu v každej časti systému), potom hovoríme, že parametre tohto modelu sú **sústredené**. Ak však považujeme systém za **heterogénny** (t. j. rozličný stav v rôznych častiach systému), potom hovoríme, že parametre modelu sú

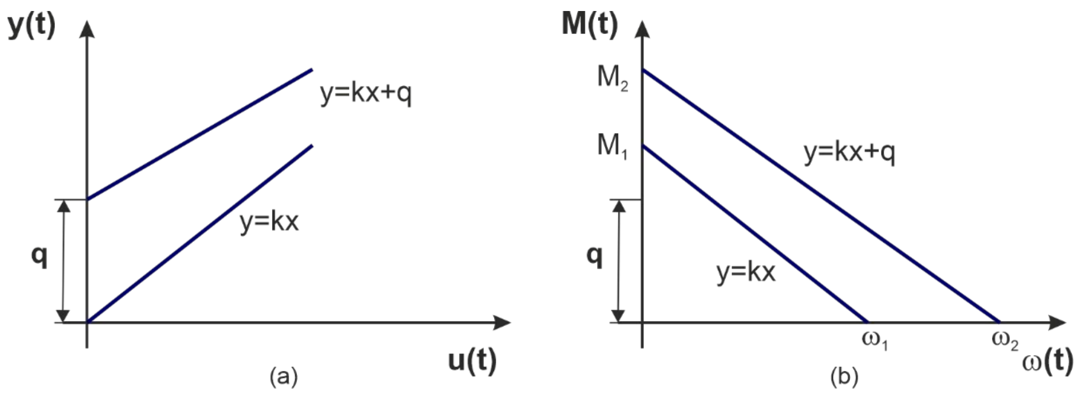
distribuované. Systémy s distribuovanými alebo rozšírenými parametrami sú zvyčajne reprezentované a opisované **parciálnymi diferenciálnymi rovnicami**

1.4.3 Statický a dynamický model

Systém lineárneho alebo **nelineárneho** charakteru možno ďalej uvažovať ako systém **statický** alebo **dynamický. Statické** systémy sú také systémy, ktoré v praxi tvoria relatívne menšiu skupinu oproti systémom **dynamickým**. Dynamické systémy predstavujú veľkú skupinu systémov, s ktorými sa možno bežne stretnúť v praktickom živote.

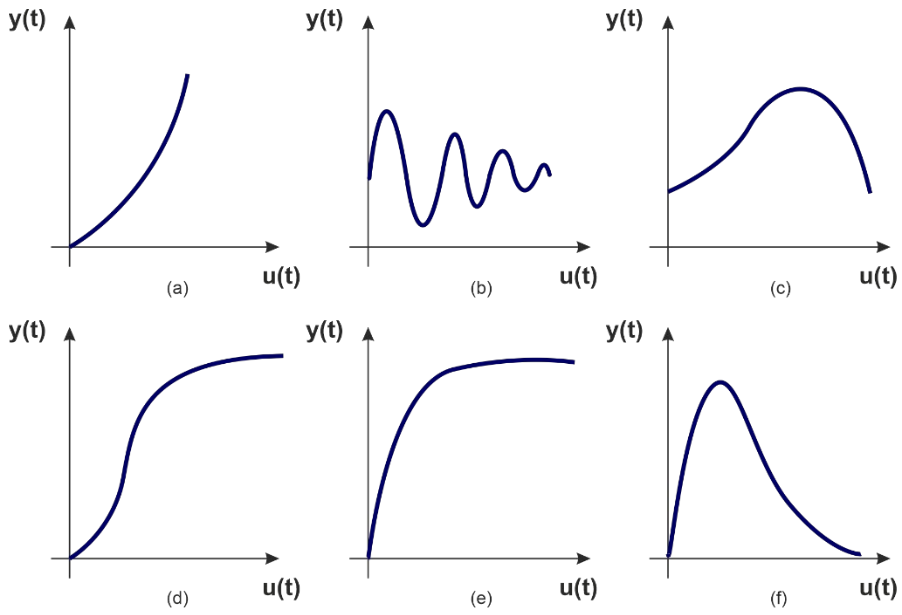
Statické modely sú viac používané napr. pri práci architektov keď na vizualizáciu statickej situácie, napr. plánu podlažia, či celej budovy sa využíva práve statický model. **Statický simulačný model** je reprezentácia systému v konkrétnom čase alebo taká realizácia systému, v ktorom čas nehrá žiadnu rolu. Na druhej strane **model dynamického systému** reprezentuje systém a vývoj odozvy systému v čase. Dynamické modely sa zaoberajú **časovo-premenlivými interakciami**.

Statický systém je taký typ systému, ktorého stav závisí od okamžitých podnetov a nezávisí od predchádzajúceho stavu. Takýto systém možno matematicky opísať **algebrickými** rovnicami príp., **sústavou algebrických rovníc**. Napr. lineárny systém zobrazený na Obr. 1.2 (a) resp. model motora na Obr. 1.2 (b). **Statické systémy** nie sú nikdy opisované alebo definované diferenciálnymi rovnicami.



Obr. 1.2. Statický systém: (a) lineárny systém, (b) statický model motora

Dynamický systém je typ systému, ktorého okamžitý stav závisí od predchádzajúcich stavov a takisto vonkajších podnetov. Dynamický systém sa vyznačuje istou zotrvačnosťou, ktorá sa prejaví v oneskorených reakciách systému v čase. **Dynamický systém** nazývame aj systémom s pamäťou. Odozva takéhoto systému na vonkajší podnet sa spravidla vyvíja v čase. Každý dynamický systém je teda opísaný hlavne diferenciálnou rovnicou alebo sústavou diferenciálnych rovníc. Na nasledujúcich obrázkoch možno vidieť typické odozvy dynamických systémov, pozri Obr. 1.3.



Obr. 1.3. Typické odozvy dynamických systémov

1.4.4 Ďalšia klasifikácia modelov

Matematické modely možno ďalej triediť aj podľa iných hľadísk. Za hlavné hľadisko možno považovať odlíšenie **deterministických** modelov od **stochastických modelov**. Charakteristické pre deterministické modely je, že zákonitosti pri dodržaní určitých predpokladov a podmienok vždy platia alebo vyhovujú každej konkrétnej empirickej situácii.

Na rozdiel od **deterministického** modelu vyhovuje **stochastický** model konkrétnym situáciám len približne a to s určitou pravdepodobnosťou (systémy náhodného charakteru). Z tohto dôvodu **stochastické modely** označujeme aj ako modely **pravdepodobnostné**. Pre takéto typy modelov je charakteristické, že dovoľujú pomerne presnú matematickú manipuláciu medzi veličinami, aj keď medzi veličinami platia tieto vzťahy iba približne. Pre tieto typy systémov je charakteristická neistota, ktorú pociťujeme už pri samotnej tvorbe matematickej formy modelu.

Jednoducho možno prijať definíciu **stochastického modelu** ako rovnicu alebo sústavu rovníc **náhodnej veličiny** resp. **nenáhodnej veličiny** a ďalších parametrov (konštánt). Najjednoduchšie stochastické modely sú **lineárneho charakteru**. Na reálne zložitejšie nelineárne modely sa používa vo všeobecnosti vždy ich lineárne zjednodušenie.

Pri tvorbe matematických modelov sa stretávame s rôznymi prístupmi. Prístup vychádzajúci z vecných znalostí problematiky je veľmi blízky **deduktívnej povahe**, pri ktorej predpokladáme, že modely sú odvodené na základe všeobecných princípov danej úlohy či príslušného vedného odboru. Pri **induktívnej povahe** sa postupuje s porovnaním s deduktívnou úlohou v obrátenom smere, a teda od konkrétneho poznatku k všeobecnému, od reality k modelu alebo od výberových dát k skutočným, resp. hypotetickým rozdeleniam. Pre **statickú indukciu** je charakteristické, že všeobecný záver sa vyvodzuje na základe konkrétnych pozorovaní.

1.5 MATEMATICKÝ MODEL DYNAMICKÉHO SYSTÉMU

Ako už vieme, tak **matematický model** je matematická interpretácia vlastností a interakcií systému. V procese tvorby **matematického modelovania** sa využíva **matematický jazyk** na opis **správania sa systému**, ktorý môže byť rôznej **fyzikálnej podstaty** (**elektrický, mechanický, termodynamický, hydraulický, pneumatický, tepelný**), okrem iného aj **biologickej**, **ekonomickej** alebo **sociálnej** povahy.

Matematický model je spravidla opísaný systémom v zmysle **premenných**. Týmito premennými môže byť vo všeobecnosti **číslo, logická hodnota, reťazec** a iné.

Premenné vo všeobecnosti predstavujú niektoré vlastnosti systému napr.

- namerané výstupné veličiny vo forme signálov,
- časové dáta,
- signály reprezentujúce výstupné veličiny,
- výskyt udalosti (áno/nie).

Premenné vo všeobecnosti delíme na tri základné typy:

- vstupné **u(t)**,
- vnútorné **x(t)**,
- výstupné **y(t)**.

Podľa toku energie delíme premenné na:

- prietokové premenné,
- a spádové premenné.

Potom aktuálny model je skupina funkcií, ktoré opisujú vzťahy medzi rozličnými premenným systému. Problémy matematického modelovania sú často klasifikované ako tzv. **biele skrinky (**z angl. **white-box)** alebo **čierne skrinky (**z angl. **black-box)**, podľa toho koľko informácií je dostupných o danom systéme a to v danom požadovanom čase **t**.

Black-box model je takým druhom modelu, ktorý neobsahuje všetky informácie o danom systéme. Tento systém nemá informáciu napr. o tzv. **vnútorných stavoch**, ale orientuje sa hlavne na opis matematických vzťahov medzi **vstupmi** a **výstupmi** uvažovaného systému. Takýto spôsob interpretácie systému nazývame **vonkajším opisom systému**.

Obr. 1.4. Vonkajší opis systému

Medzi vonkajšie opisy systémov radíme napr. **opis diferenciálnou rovnicou**, **opis prenosovou funkciou, grafom, tabuľkou** a ďalšie iné spôsoby.

Schematicky možno **vonkajší opis systému** znázorniť podľa Obr. 1.4, kde systém je zobrazený s vyznačením jeho vstupných a výstupných premenných. Pozrime sa teraz na ten najbežnejší typ matematického modelu daného **vonkajším opisom**, ktorého matematický model je definovaný **diferenciálnou rovnicou**.

Systém **n-tého rádu** s jedným vstupom **u(t)** a jedným výstupom **y(t)** kde pravá strana rovnice je jednoduchá funkcia bez derivácií vstupu **u(t)**, môžeme opísať nasledovnou diferenciálnou rovnicou

$$a_n \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)\,, \qquad (1.1)$$

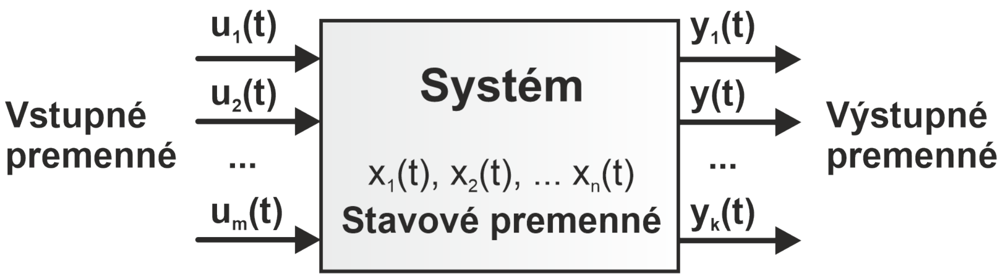
kde $\mathbf{a_0}, \dots, \mathbf{a_n}$ sú konštantné koeficienty.

V prípade, že uvažujeme **dynamický systém n-tého rádu** s jedným vstupom **u(t)** a jedným výstupom **y(t)** s deriváciami vstupnej funkcie **u(t)**, potom je takýto systém definovaný najvšeobecnejšou diferenciálnou rovnicou

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \cdots b_1 u^{(1)}(t) + b_0 y(t)\,, \end{aligned} \qquad (1.2)$$

kde $\mathbf{a_0}, \dots, \mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_0}, \dots, \mathbf{b_n}$ sú konštantné koeficienty.

Na druhej strane **white-box** je taký model systému, ktorého opis zahŕňa prakticky mnohé ďalšie informácie o danom systéme. V tomto prípade opisu systému získame informáciu aj o **vnútorných stavoch**. Takýto typ systému, ktorý vo všeobecnosti nazývame **vnútorným** alebo **stavovým opisom systému** je znázornený na Obr. 1.5. Na tomto obrázku je znázornený systém v stavovom opise s **m** vstupnými premennými $\mathbf{u_i(t)}$, **n** stavovými premennými $\mathbf{x_i(t)}$ a **k** výstupnými premennými $\mathbf{y_i(t)}$.



Obr. 1.5. Vnútorný (stavový) opis systému

Systém zadefinovaný stavovom opise (z angl. **state-space**) je opisovaný iným spôsobom ako to bolo v prípade systému **vonkajšieho opisu**. **Stavový opis** systému je charakterizovaný sústavou **diferenciálnych rovníc 1. rádu**, ktorý možno získať odvodením z jednej **diferenciálnej rovnice 1**. alebo vyššieho rádu, ako aj z každej sústavy diferenciálnych rovníc prvého, druhého a vyššieho rádu. Pred každou transformáciou pôvodnej sústavy diferenciálnych rovníc je nutné zadefinovať vektor stavov **x(t) (**z angl. state vector – **stavový vektor)**. Stavový opis potom tvoria dve sústavy rovníc. Prvou sústavou je **sústava diferenciálnych rovníc 1. rádu** nazývaná tiež rovnicou dynamiky. Druhou rovnicou stavového opisu je **sústava lineárnych algebrických** h **rovníc** nazývaná tiež **rovnicou výstupu**. Tieto dve sústavy rovníc možno potom zapísať do nasledovného maticového tvaru stavového opisu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\,, \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde **A, B, C, D** nazývame matice stavového opisu, **x(t)** je stavový vektor, **u(t)** je vektor vstupu a **y(t)** je vektor výstupu.

1.6 OPIS SYSTÉMU PRENOSOVOU FUNKCIOU

Ako sme už uviedli, každý fyzikálny systém interpretovaný diferenciálnou rovnicou možno interpretovať aj ďalším ekvivalentnými spôsobmi vonkajšieho opisu. Jeden z ekvivalentných spôsobov opisu systému diferenciálnou rovnicou je opis systému **prenosovou funkciou**. **Prenosovú funkciu** pre fyzikálny systém definovaný diferenciálnou rovnicou možno získať aplikovaním metódy tzv. **Laplaceovej transformácie**, ktorá bude bližšie vysvetlená v kap. 14.

Laplaceova transformácia je transformácia systému z časovej oblasti **t** do oblasti komplexnej roviny **s**. Poznamenajme, že na získanie prenosovej funkcie systému definovaného diferenciálnou rovnicou uvažujeme pri aplikovaní tejto Laplaceovej transformácie vždy nulové počiatočné podmienky.

Predpokladajme všeobecný systém **n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom, ktorý je reprezentovaný touto diferenciálnou funkciou **n-tého rádu**

$$a_n \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)\,. \tag{1.4}$$

Potom prostredníctvom **Laplaceovej transformácie** oboch strán rovnice pri uvažovaní nulových počiatočných podmienok dostávame

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = U(s)\,. \tag{1.5}$$

To znamená, že **prenosová funkcia systému n-tého rádu** je definovaná nasledovnou algebrickou formou a to ako pomer Laplaceoveho obrazu výstupu $\mathbf{Y(s)}$ k obrazu vstupu $\mathbf{U(s)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \tag{1.6}$$

kde $\mathbf{a_0, \dots, a_n}$ sú konštantné koeficienty, **Y(s)** je obraz riešenia v Laplaceovej rovine a **U(s)** je obraz vstupu v Laplaceovej rovine.

V prípade, že uvažujeme **systém n-tého rádu s jedným vstupom** a **jedným výstupom** s deriváciami vstupu na pravej strane v nasledovnom tvare

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \\ = b_m \frac{d^{(m)}u}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)}u}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

potom jeho **prenosová funkcia** bude mať tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{n-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \tag{1.8}$$

kde $\mathbf{a_0, \dots, a_n}$ a $\mathbf{b_0, \dots, b_m}$ sú konštantné koeficienty, **Y(s)** je obraz riešenia v Laplaceovej rovine a **U(s)** je obraz vstupu.

Predchádzajúca rovnica je najvšeobecnejším tvarom prenosovej funkcie **lineárneho systému n-tého rádu s jedným vstupom a jedným vstupom**. Pozostáva z dvoch polynomických funkcií s premennou $\mathbf{s}$ a nazývame ju **prenosovou funkciou vo všeobecnom tvare (tf)** (tf, z angl. transfer function – prenosová funkcia).

Podmienka, aby daný systém bol fyzikálne realizovateľný je, že stupeň polynómu v čitateli musí byť menší nanajvýš rovný stupňu polynómu v menovateli $\mathbf{m \leq n}$.

Ak uvažujeme systém **n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom **s časovým oneskorením** s hodnotou $\boldsymbol{\tau}$, potom takýto systém je opísaný touto diferenciálnou rovnicou

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^{(n)}y(t-\tau)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}y(t-\tau)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t-\tau)}{dt} + a_0 y(t-\tau) \\ = b_m \frac{d^{(m)}u(t-\tau)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)}u(t-\tau)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_1 \frac{du(t-\tau)}{dt} \\ + b_0 u(t-\tau)\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Potom **prenosová funkcia časovo oneskoreného systému** s časovým oneskorením $\boldsymbol{\tau}$ nadobudne tento tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{n-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} e^{-\tau t} . \tag{1.10}$$

1.7 PRENOSOVÁ FUNKCIA V TVARE PÓLOV, NÚL A ZOSILNENIA

Pripomeňme, že predchádzajúce prenosové funkcie tvoria jednoduché algebrické formy. Vo všeobecnosti sú definované dvoma polynómami a to polynómom **čitateľa** a **menovateľa**. V prípade, že vypočítame korene polynómov **čitateľa** a **menovateľa** a zapíšeme ich vo faktorovom tvare, potom možno získať ekvivalentný tvar prenosovej funkcie v zmysle **pólov**, **núl** a **zosilnenia**.

Diferenciálnu rovnicu **n-tého rádu** vo všeobecnom tvare možno zapísať vo faktorovom tvare prostredníctvom vypočítaných koreňov polynómu **čitateľa** a **menovateľa** ako

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} , \tag{1.11}$$

kde $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_n}$ nazývame nuly systému, $\mathbf{p_1}, \dots, \mathbf{p_n}$ nazývame póly systému a $\mathbf{K}$ zosilnením systému.

Výpočtom koreňov čitateľa dostávame $\mathbf{m}$ koreňov, pretože polynóm čitateľa je stupňa **m** a výpočtom koreňov menovateľa získame **n** koreňov. Konštanty $\mathbf{p_1}, \dots, \mathbf{p_n}$ predstavujú korene **charakteristickej rovnice systému**

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 . \tag{1.12}$$

Dá sa konštatovať, že od charakteristickej rovnice vo všeobecnosti závisí tvar odozvy daného systému. A to hlavne to, či daný systém sa bude správať ako systém **stabilný** alebo **nestabilný.** Vypočítané korene tejto rovnice môžu byť **reálne** alebo **komplexné čísla**. Zapísané vo všeobecnom tvare ako $\boldsymbol{\alpha_i} = \mathbf{R_e} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{Im}$, kde $\mathbf{R_e}$ je reálna zložka a $\mathbf{I_m}$ je imaginárna zložka komplexného čísla. Podobne $\mathbf{z_1}, \dots, \mathbf{z_n}$, budú korene tejto rovnice

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 = 0 , \tag{1.13}$$

ktoré môžu podobne nadobudnúť tvar **reálneho** alebo **komplexné čísla**.

Ak niektorú z vypočítaných premenných hodnôt $\mathbf{p_1}, \dots, \mathbf{p_n}$, dosadíme za parameter **s** v pôvodnej prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$, potom sa dá dokázať, že hodnota prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$ bude konvergovať k nekonečnu. Z tohto dôvodu hodnoty $\mathbf{p_1}, \dots, \mathbf{p_n}$ nazývame **pólami systému**.

Podobne, ak **s** nadobúda hodnotu niektorej z množiny koreňov $\mathbf{z_1, \ldots, z_n}$, potom sa dá dokázať, že prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ bude konvergovať k nule. Z tohto dôvodu hodnoty $\mathbf{z_1, \ldots, z_n}$ nazývame **nulami systému**.

Podobne ako v prípade štandardného tvaru prenosovej funkcie **(tf)**, tak aj v prípade tohto typu prenosovej funkcie možno definovať prenosovú funkciu, pre **systém n-tého rádu s časovým oneskorením**. Ak teda systém bol definovaný prenosovou funkciou v štandardnom tvare s časovým oneskorením, potom vypočítaním koreňov polynómu **čitateľa** a **menovateľa** možno odvodiť prenosovú funkciu v tvare **pólov**, **núl** a **zosilnenia K**

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} e^{-\tau t} . \qquad (1.14)$$

Poznamenajme, že **póly** a **nuly** systému, ktoré sú vo všeobecnosti komplexné čísla možno pre každý systém znázorniť graficky v tzv. komplexnej **Gaussovej rovine**.

Príklad č. 1.1:

Určte póly a nuly systému pre prenosovú funkciu **G(s)** a graficky zobrazte v Gaussovej rovine.

$$G(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 4s + 13} . \qquad (1.15)$$

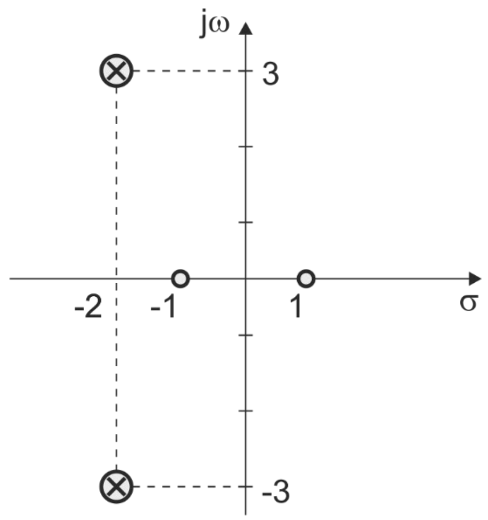
Korene čitateľa a menovateľa sú $\mathbf{z_1, z_2 = \pm 1}$ a $\mathbf{p_1, p_2 = -2 \pm 3i}$.

A teda

$$G(s) = \frac{(s + 1)(s - 1)}{(s + 2 + 3i)(s + 2 - 3i)} = \frac{(s + 1)(s - 1)}{[(s + 2)^2 + 3^2]} . \qquad (1.16)$$

Zobrazenie pólov a núl v Gaussovej rovine je ukázané na nasledujúcom Obr. 1.6. Poznamenajme, že táto prenosová funkcia má **dve reálne nuly** a **dva komplexne združené póly** v ľavej časti **s-roviny**. Keďže póly sa nachádzajú na ľavej strane imaginárnej osi možno usúdiť, že daný systém bude **stabilným systémom**. Toto možno potvrdiť vyšetrením odozvy daného systému.

Zobraziť **nuly** a **póly** možno zadefinovaním systému prenosovou funkciou a potom zobraziť dané rozloženie pólov a núl na grafe. V systéme Matlab možno takéto zobrazenie týchto veličín vykonať príkazom **pzmap**. Pripomeňme, že v teórii systémov je diagram **pólov** a **núl** veľmi užitočným na posúdenie dynamických vlastností vyšetrovaného systému.



Obr. 1.6. Póly a nuly systému

1.8 ANALÓGIA SYSTÉMOV A MODELOV

Základom podobnosti systémov v inžinierskych disciplínach je možnosť zdieľať pojem **spádových** a **prietokových** (úsilie a tok) **veličín**. Premenné využívané v inžinierskych disciplínach na definovanie diferenciálnych rovníc možno charakterizovať ako **spádové** alebo **prietokové** veličiny.

Spádová veličina je systémová premenná, ktorá vyjadruje **úsilie**, **napätosť** alebo **schopnosť konať** prácu. Podľa typu systému možno špecifikovať **spádové veličiny** týmto spôsobom,

1. **mechanický systém**: translačná **v** a uhlová rýchlosť **ω**
2. **elektrický systém**: napätie **U**
3. **hydraulický systém**: tlak **p**
4. **tepelný systém**: teplota **T**

Prietoková veličina je systémová premenná, ktorá vyjadruje **tok** alebo **rýchlosť zmeny** systémovej premennej. Prietoková veličina je obyčajne deriváciou premennej a tak fyzikálna jednotka prietokovej veličiny je spravidla definovaná ako zmena za jednotku času.

1. **mechanický systém**: sila **F** alebo moment **M**
2. **elektrický systém**: elektrický prúd **i**
3. **hydraulický systém**: objemový prietok **q**
4. **tepelný systém**: tepelný tok **q**

Nasledujúca tabuľka obsahuje začlenenie jednotlivých **spádových** a **prietokových** veličín podľa fyzikálnej podstaty.

Tabuľka 1.1. Druhy spádových a prietokových veličín podľa fyzikálnej podstaty

Druhy veličín	Systémy			
	Mechanický systém	**Elektrický systém**	**Hydraulický systém**	**Tepelný systém**
Spádové veličiny	Rýchlosť **v**, **ω**	Napätie **u**	Tlak **p**	Teplota **T**
Prietokové veličiny	Sila **F**, Moment **M**	Elektrický prúd **i**	Objemový prietok **q**	Tepelný tok **q**

Spádové a **prietokové** premenné poskytujú základ pre koncept **impedancie**, a to pre všetky inžinierske disciplíny. **Impedancia** elementu je pomer **spádovej premennej** k jej **prietokovej premennej**

$$\textbf{impedancia} = \frac{\text{spádová veličina}}{\text{prietoková veličina}}. \tag{1.17}$$

Impedancia môže byť dvoch typov a to:

- **statická** (odporová) alebo
- **dynamická** (kapacitná a indukčná).

Elektrická impedancia je dobre známa a pochopiteľná; avšak **mechanická impedancia** nemusí byť dôverne známy pojem. Pojem **fluidná impedancia** a **tepelná impedancia**, by nemal byť problém pochopiť, pretože modelovacie prístupy sú často podobné tým, ktoré sa využívajú práve pre z elektrickej podstaty. Pre základný model a každý element v rôznych inžinierskych disciplínach možno impedanciu zapísať v tomto tvare

$$\begin{gathered}\text{spádová veličina} = \textbf{impedancia} \times \text{prietoková veličina} \\ x(t) = \text{impedancia} \times y(t)\,.\end{gathered} \tag{1.18}$$

1.8.1 Generický opis dvoj-terminálových prvkov

V každom systéme možno identifikovať základné dvoj-terminálové komponenty, ktoré klasifikujeme ako:

A-type elementy: odporové (disipatívné) alebo algebrické komponenty

B-type elementy: kapacitné typy komponentov

C-type elementy: indukčné typy komponentov

D-type elementy: ovládače a zdroje.

Nasledujúca tabuľka obsahuje členenie prvkov systémov dvoj-terminálových elementov podľa **generického opisu**.

Tabuľka 1.2. Druhy prvkov podľa generického opisu

Systémy	Prvky			
	Odporový $x(t)=a.y(t)$	**Kapacitný** $x(t)=b\frac{dy(t)}{dt}$	**Indukčný** $y(t)=c\frac{dx(t)}{dt}$	**Zdroje**
Elektrický	Rezistor	Kondenzátor	Cievka	Napätie **U** alebo el. prúd **i**
Mechanický translačný	Tlmič	Pružina	Hmota	Rýchlosť **v** alebo sila **F**
Mechanický rotačný	Rotačný tlmič	Torzná pružina	Moment zotrvačnosti	Uh. rýchlosť **ω** alebo moment **M**
Hydraulický	Hydraulický odpor	Hydraulický zásobník	Hydraulický indukčný prvok	Tlak **p** alebo tok **q**
Tepelný	Tepelný odpor	Tepelný zásobník	Neexistuje	Tepelný tok q_t

1.8.2 Disipatívné elementy

Elementy, ktoré pohlcujú energiu alebo transformujú na inú formu ako napr. **teplo**, **svetlo**, **vibrácie** a pod, možno nájsť vo všetkých inžinierskych disciplínach. **Disipatívné elementy** neuchovávajú energiu a tak sú opisované v prevažnej miere algebrickými rovnicami skôr, než diferenciálnymi rovnicami. Disipatívné elementy podľa druhu fyzikálneho systému, ktoré poznáme sú:

1. mechanický systém: **tlmič** (translačný a rotačný)
2. elektrický systém: **elektrický odpor** (rezistor)
3. hydraulický systém: **hydraulický odpor**
4. tepelný systém: **tepelný odpor**

Terminálová rovnica pre **A-typ** komponentu môže byť zapísaná vo forme **impedancie**, ktorá je definovaná ako pomer spádovej a prietokovej veličiny v tvare:

$$\text{spádová veličina} = \textbf{Impedancia} \text{ x prietoková veličina}$$
$$x(t) = a\,y(t)\,. \tag{1.19}$$

1.8.3 Spádové alebo kapacitné typy elementov

Terminálová rovnica pre **B-typ kapacitného prvku** môže byť zapísaná v tejto forme

$$y(t) = \frac{1}{b}\int_{t_0}^{t} x(t) \quad \text{alebo} \quad x(t) = b\frac{dy(t)}{dt}\,. \tag{1.20}$$

Spádové elementy uchovávajú energiu na základe spádovej premennej. Spádové elementy sú teda povahou **kapacitné** a preto sú definované vždy diferenciálnou formou ako

$$\text{prietoková veličina} = \textbf{kapacita} \times \frac{d}{dt}\text{spádová veličina}\,. \qquad (1.21)$$

V mechanických systémoch je spádovou veličinou rýchlosť (**translačná** alebo **uhlová**), ktorá je definovaná na základe tejto rovnice

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dt}F\,. \qquad (1.22)$$

Prepísaná vo viac všeobecnom tvare ako $\mathbf{F} = \mathbf{k}\,.\,\mathbf{x}$, kde **k** je tuhosť pružiny. Nakoľko výchylka **x** je integrál rýchlosti $\mathbf{x} = \int \mathbf{v}\,\mathbf{dt}$. Kapacitným elementom v mechanických systémoch je **pružina**, ktorá uchováva potenciálnu energiu v zmysle počiatočného silového predpätia. V **elektrických systémoch** sa podobným spôsobom správa **kondenzátor**, ktorý je definovaný diferenciálnou formou s elektrickou kapacitou **C** a napätím **u**

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}\,. \qquad (1.23)$$

V prípade **fluidných systémoch** je objem stlačiteľnej kvapaliny v **nádrži** alebo **zásobníku** charakterizovaný diferenciálnou rovnicou s **fluidnou kapacitou** zásobníka **C** a tlaku **p**

$$q = C \cdot \frac{dp}{dt}\,. \qquad (1.24)$$

V **tepelných systémoch** táto diferenciálna rovnica nadobúda charakter diferenciálnej rovnice definovanej pre vlastnosť **tepelnej kapacity** materiálu **C** a teploty **T**

$$q = C \cdot \frac{dT}{dt}\,. \qquad (1.25)$$

1.8.4 Prietokové alebo indukčné typy elementov

Terminálová rovnica pre **C-typ indukčného komponentu** môže byť zapísaná v tejto forme

$$x(t) = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t} y(t) \quad \text{alebo} \quad y(t) = c\frac{dx(t)}{dt}\,. \qquad (1.26)$$

Prietokové elementy uchovávajú energiu na základe prietokovej premennej. Tieto typy elementov sú **indukčnej** povahy a preto sú podobne ako kapacitné definované diferenciálnou formou

$$\text{spádová veličina} = \textbf{indukčnosť} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\text{prietoková veličina} . \tag{1.27}$$

V **mechanických systémoch**, **hmotnosť** alebo **moment zotrvačnosti** predstavujú **indukčný** (prietokový) **element**. Pre tieto elementy platia tieto diferenciálne rovnice

$$\mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{v} \tag{1.28}$$

alebo

$$\mathrm{M} = \mathrm{I} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\omega , \tag{1.29}$$

kde **m** – je hmotnosť, **I** – je moment zotrvačnosti, **v** – je translačná rýchlosť, **ω** – je uhlová rýchlosť, **F** a **M** je sila a moment.

V **elektrických systémoch** je prietokovým elementom cievka, pre ktorú platí diferenciálna rovnica

$$\mathrm{u} = \mathrm{L} \cdot \frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}, \tag{1.30}$$

kde **L** – je indukčnosť cievky, **i** – je elektrický prúd.

Vo **fluidných systémoch** prietok tekutiny v dlhom potrubí malej prierezovej plochy predstavuje **indukčnosť**. Diferenciálna rovnica pre prietokovú veličinu hydraulického systému je definovaná ako

$$\mathrm{p} = \mathrm{I} \cdot \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}} , \tag{1.31}$$

kde **I** je **hydraulická inertancia** (z angl. inertance), **q** – objemový prietok.

Poznamenajme, že v prípade **tepelných systémoch** neexistuje rovnica, ktorá má formu prietokovej diferenciálnej rovnice, nakoľko **tepelná indukčnosť** v prípade tepelného systému neexistuje. Tepelný systém je teda špeciálnym typom systému z celej rady fyzikálnych systémov.

2 MODELOVANIE FYZIKÁLNYCH SYSTÉMOV

Predtým, než sa dostaneme k samotnej tvorbe matematických model a modelovaniu fyzikálnych systémov, položme si nasledujúce otázky.

Predpokladajme nasledujúcu situáciu. Mikroprocesor riadi zapínanie a vypínanie elektrického motora.

Otázka je, ako sa bude pohybovať hriadeľ motora v čase ?

Rýchlosť okamžite nedosiahne **plnú rýchlosť**, ale bude určitý čas trvať, pokiaľ sa ustáli na svojej požadovanej hodnote.

Predpokladajme druhú situáciu. Hydraulický systém sa používa k otváraniu a zatváraniu ventilu, ktorý dovoľuje vtekať kvapaline do nádrže s úlohou udržať požadovanú výšku hladiny.

Otázka je, ako sa bude meniť výška hladiny v nádobe s časom t ?

Aj v tomto prípade výška hladiny v nádobe nedosiahne požadovanú hodnotu okamžite, ale bude trvať určitý čas, kým sa systém ustáli.

Aby sme vedeli odpovedať na predchádzajúce dve otázky je nutné naučiť sa vyšetrovať správanie sa systémov. Na vyšetrovanie správania sa systémov musíme poznať matematické modely, ktorými možno tieto systémy opísať a simulovať. Aby sme získali zručnosti v tvorbe matematických modelov, nasledujúce kapitoly tejto učebnice budeme venovať práve problematike tvorby fyzikálnych modelov a to pre systémy z rôznej fyzikálnej podstaty.

Pre každý systém z rôznej fyzikálnej oblasti možno zadefinovať a nájsť základy pre matematický model, ktorý je definovaný fundamentálnymi fyzikálnymi zákonmi v danej fyzikálnej disciplíne. V nasledujúcich kapitolách sa budeme bližšie venovať štyrom základným typom systémov z rôznej fyzikálnej podstaty a to systému **mechanickému, elektrickému, tepelnému** a **fluidnému**. Ide o systémy s ktorými sa môžeme stretnúť v aplikáciách mnohých reálnych systémov a to nielen čisto **mechanického**, **elektrického**, **fluidného**, resp. **tepelného** charakteru, ale takisto v rôznych kombináciách daných týchto systémov (multifyzikálne systémy).

Poznamenajme, že každý systém možno poskladať zo základných stavebných blokov, ktoré možno matematicky opísať matematickou rovnicou alebo nejakou vlastnosťou, ktorá daný element charakterizuje. Jednoduchým príkladom môže byť napr. **elektrický systém**, ktorý je tvorený zo stavebných blokov ako sú **elektrické odpory, kondenzátory** a **cievky**. Kombináciou takýchto blokov možno poskladať a vytvárať jednoduché elektrické obvody a potom skúmať správanie sa celého systému na základe známych matematických a fyzikálnych zákonitostí týkajúcich a použitých blokov.

3 MECHANICKÝ SYSTÉM

Mechanický systém je systém, ktorý sa vyznačuje dynamickým a deterministickým správaním. Ide vo všeobecnosti o systém, ktorý je poskladaný z telies, ktoré majú možnosť pohybu. **Mechanický systém** najčastejšie pozostáva z pohyblivých (hmoty) a nepohyblivých častí (rámy). Všetky zariadenia alebo stroje konajúce nejaký pohyb, ktoré poznáme z bežnej praxe prakticky predstavujú nejaký typ **mechanického systému**.

Typickým príkladom môže byť napr. motorové vozidlo so **štyrmi kolesami**, **s pružením** a **tlmením**, ktoré sa pohybuje po nerovnej vozovke (komplikovaný typ dynamického systému). Tieto kolesá a tým aj celé auto ženie dopredu **mechanická energia**, ktorý sa získa premenou tepelnej energie na mechanickú energiu vo vnútri **spaľovacieho motora**. Spaľovací motor je takisto **mechanický systém**, ktorý pozostáva zo sústavy piestov pohybujúcich sa smerom nahor a nadol v bloku motora, a to v presne stanovenom momente, ktorý je daný otáčaním vačkového hriadeľa, z ktorého sa **mechanická energia** prenáša prostredníctvom komplikovaných prevodových mechanizmov od motora priamo až na kolesá automobilu, čím sa automobil poháňa dopredu. Celý systém automobilu má veľké množstvo pohybujúcich sa častí, ktoré slúžia na zabezpečenie požadovaných pohybov. Auto je teda výborným príkladom komplexného mechanického systému. Mechanický systém ako taký sa riadi fyzikálnymi zákonitosťami z oblasti **mechaniky** a vyznačuje sa zotrvačnými účinkami.

Medzi základné stavebné bloky **mechanického systému**, z ktorých možno kompletne poskladať celý mechanický systém patria **pružiny (**z angl. **springs)**, **tlmiče (**z angl. **dashpots)** a **hmoty (**z angl. **masses)**. **Pružiny** vo všeobecnosti v mechanickom systéme predstavujú **tuhosť systému**. **Tlmiče** na druhej strane majú za úlohu generovať sily, ktoré pôsobia proti pohybu a majú teda tlmiaci charakter. Medzi tieto tlmiace vplyvy možno uvažovať aj sily, ktoré predstavujú odpor voči pohybu a to napr. **vplyv trenia** alebo **vplyv viskózneho tlmenia**. Napokon **hmoty** predstavujú v mechanickom systéme **zotrvačnosť** systému. Hmoty vo všeobecnosti kladú **odpor proti pohybu** telies pri ich akcelerácií. Poznamenajme, že mechanický systém v skutočnosti nemusí byť vytvorený len z pružín, tlmičov a hmôt, ale vo všeobecnosti stačí v prípade daného systému len uvažovať, že časť tohto systému prípadne celý systém vykazuje vlastnosť danej **tuhosti**, **tlmenia** resp. **zotrvačnosti**.

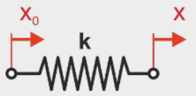
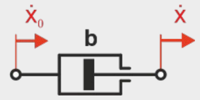
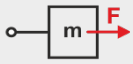
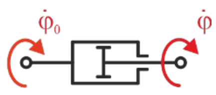
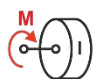
Pre všetky stavebné bloky mechanického systému možno uvažovať, že na nich z fyzikálneho hľadiska pôsobia buď **zaťažujúce sily F (translačný systém)** alebo **momenty M (rotačný systém)** resp. ich kombinácia (**translačno-rotačný systém**). Dôsledok pôsobenia síl **F** a momentov **M** sa prejaví zmenou polohy telies mechanického systému, ktorú možno charakterizovať ako **posunutie x** alebo **natočenie φ** daných telies systému.

Mechanické systémy možno rozdeliť na tri základné typy a to:

- mechanické systémy **translačného charakteru**
- mechanické systémy **rotačného charakteru**
- a mechanické systémy **kombinované** (translačného aj rotačného charakteru)

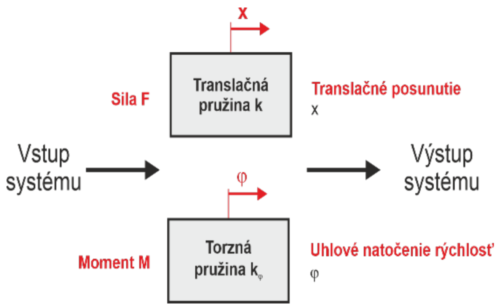
Podľa príslušného typu mechanického systému možno rozlíšiť tieto tri základné komponenty mechanického systému a používať ich schematické značky zobrazené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 3.1. Schematické značky mechanického systému

Systém	Pružina	Tlmič	Hmota	Zaťaženie systému	Odozva systému
Translačný systém				**F** (sila)	Posunutie **x**, Rýchlosť **v**
Rotačný systém				**M** (moment)	uhlové natočenie **φ**, uhlová rýchlosť **ω**

3.1 TUHOSŤ MECHANICKÉHO SYSTÉMU

Tuhosť mechanického systému možno opísať (modelovať) pomocou tuhosti pružného prvku. **Tuhosť pružiny k ($k_φ$)** je definovaná na základe lineárneho (nelineárneho) vzťahu medzi zaťažením **F (M)** pri stláčaní, resp. naťahovaní pružiny. Experimentálnym meraním správania sa pružiny pri jej zaťažovaní silou **F** (momentom **M**) a sledovaním jej deformácie (Obr. 3.1), možno odvodiť vzťah, ktorý opisuje závislosť medzi zaťažujúcou silou **F** (momentom **M**) a deformáciou **x (φ)**.



Obr. 3.1. Pružina zaťažovaná silou F (M)

V prípade, že pružina vykazuje lineárnu závislosť medzi pôsobiacou silou **F** a jej stlačením, resp. natiahnutím **x**, potom pre uvažovanú **fixovanú pružinu k základu** podľa Obr. 3.2 (a) s konštantou tuhosti **k [N/m, N/mm]**, možno definovať tento vzťah

$$F(t) = k \cdot x(t)\,. \tag{3.1}$$

Obr. 3.2. Fixovaná pružina (a) translačná, (b) torzná

Podobne, v prípade, že uvažujeme mechanický systém **rotačného charakteru** možno nájsť podobnú funkčnú závislosť medzi zaťažujúcim momentom **M** a uhlom natočenia **φ**. A teda pre **lineárnu torznú pružinu** fixovanú k základu s torznou tuhosťou $\mathbf{k_\varphi}$ **[N.m/rad, N.mm/rad]** podľa Obr. 3.2 (b), bude platiť lineárna závislosť

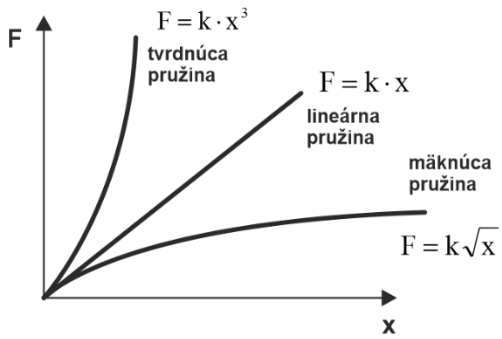
$$M(t) = k_\varphi \cdot \varphi(t)\,. \tag{3.2}$$

V prípade, že pružina **translačného** alebo **rotačného** charakteru nie je fixovaná k základu a má obidva konce voľné ako je znázornené na nasledujúcom Obr. 3.3 (a) a (b), potom pre tieto typy pružín **translačného** a **rotačného** charakteru budú platiť tieto vzťahy

$$\begin{aligned} F &= k \cdot (x - x_0)\,, \\ M &= k_\varphi \cdot (\varphi - \varphi_0)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Obr. 3.3. Pružina s voľnými koncami (a) translačná, (b) torzná

Je zrejmé, že nie každá pružina sa musí správať ako čisto **lineárna pružina**. Ako sme už uviedli, tak charakteristiku správania sa pružiny možno zistiť experimentálnym meraním (závislosti sily **F** od deformácie **x** alebo momentu **M** od deformácie **φ**). Na základe toho ako sa pružina správa pri jej zaťažovaní, možno rozlíšiť tri základné typy pružín t. j. pružinu **mäknúcu**, **tvrdnúcu**, resp. **lineárnu**, pozri Obr. 3.4. Poznamenajme, že fyzikálna jednotka konštanty tuhosti **k** je pre translačnú pružinu definovaná ako $[\mathbf{N.m^{-1}, N.mm^{-1}}]$ resp. pre torznú pružinu $\mathbf{k_\varphi}$ ako $[\mathbf{N.m.rad^{-1}, N.mm.rad^{-1}}]$.



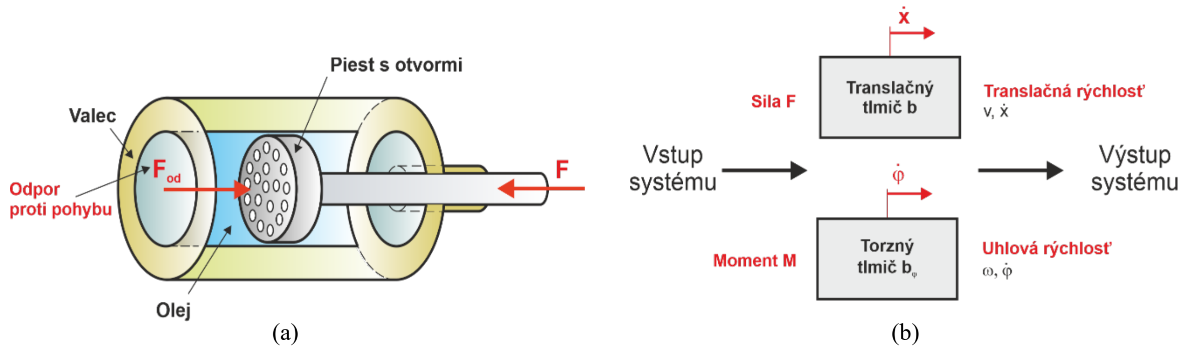
Obr. 3.4. Základné typy pružín z hľadiska správania sa pri zaťažovaní

V prípade, že pružina je **stláčaná** alebo **naťahovaná**, dochádza k uchovávaniu potenciálnej energie. Veľkosť tejto energie $\mathbf{E_p}$ pre translačnú, resp. torznú pružinu možno vypočítať vzťahom

$$\begin{gathered} E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2, \;\; E_p = \frac{1}{2} k \cdot (x - x_0)^2 \, , \\ E_{p\varphi} = \frac{1}{2} k_\varphi \cdot \varphi^2, \;\; E_p = \frac{1}{2} k \cdot (\varphi - \varphi_0)^2 \, . \end{gathered} \tag{3.4}$$

3.2 TLMENIE MECHANICKÉHO SYSTÉMU

V mechanických systémoch možno okrem pružných prvkov nájsť takisto ďalšie stavebné prvky, ktoré slúžia v týchto systémoch ako **pohlcovače mechanickej energie**. Ich primárnou úlohou je utlmiť daný systém. Takéto prvky mechanických systémov nazývame jednoducho **tlmiče** alebo **tlmiace prvky**.



Obr. 3.5. (a) Translačný hydraulický tlmič, (b) tlmič mechanického systému všeobecne

Na Obr. 3.5 (a) je znázornený translačný hydraulický tlmič. Pohyb piesta s otvormi vo valci, cez ktoré má možnosť prúdiť **hydraulická kvapalina** (najčastejšie hydraulický olej), spôsobuje vznik **odporovej (tlmiacej) sily F**, ktorá pôsobí proti pohybu piesta vo valci naplnenom hydraulickou kvapalinou (hydraulickým olejom).

V ideálnom prípade pre fixovaný translačný tlmič podľa Obr. 3.6 (a) možno na základe uvažovanej lineárnej konštanty tlmenia **b** (experimentálne nameranej pri zaznamenávaní závislosti sily **F** od rýchlosti pohybu piesta **v**), definovať priamoúmerný vzťah medzi **odporovou (tlmiacou) silou F** a **rýchlosťou** pohybu piesta vo valci **v** **(ẋ)**, pre ktorý platí táto rovnica

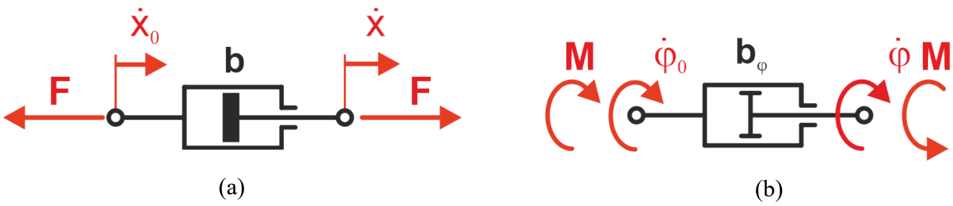
$$F(t) = b \cdot \dot{x}(t) \, . \tag{3.5}$$

Obr. 3.6. Fixovaný tlmič: (a) translačný, (b) torzný

Podobný spôsobom, pre fixovaný tlmič torzného charakteru podľa Obr. 3.6 (b), ak existuje priamoúmerný vzťah medzi **odporovým (tlmiacim) momentom M** a **uhlovou rýchlosťou** piesta **ω**, platí pre **lineárny torzný** tlmič s **torznou konštantou tlmenia b_φ** lineárna závislosť

$$M(t) = b_\varphi \cdot \dot{\varphi}(t)\,. \tag{3.6}$$

V prípade, že tlmič **translačného** alebo **torzného** charakteru nie je fixovaný k základu, a teda má obidva konce voľné ako je znázornené na nasledujúcich Obr. 3.7 (a) a (b).



Obr. 3.7. Tlmič s voľnými koncami: (a) translačný, (b) torzný

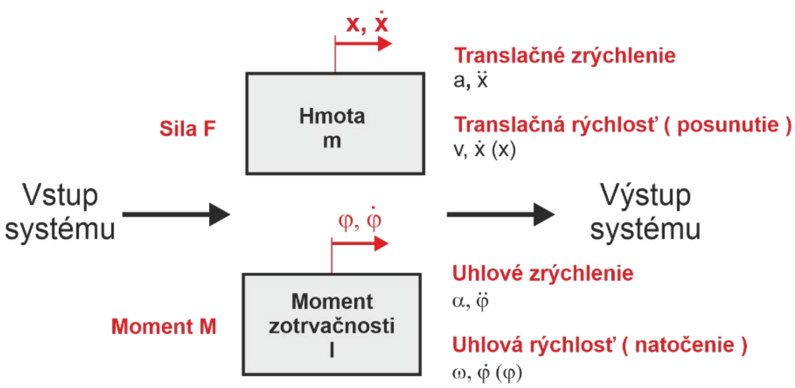
Potom, platia tieto vzťahy pre tlmič s voľnými koncami **translačného** a **rotačného** charakteru

$$\begin{aligned} F &= b \cdot (\dot{x} - \dot{x}_0)\,, \\ M &= b_\varphi \cdot (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0)\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Konštantu tlmiaceho člena podobne ako je v prípade pružinového prvku, možno určiť experimentálnym šetrením. Fyzikálna jednotka konštanty tlmiča je definovaná pre translačný tlmič **b** ako **[N.s/m, N.s/mm]** alebo pre torzný tlmič **b_φ** ako **[N.m.s/rad, N.mm.s/rad].**

3.3 ZOTRVAČNOSŤ MECHANICKÉHO SYSTÉMU

Každý mechanický systém, **translačný** alebo **rotačný** sa vyznačuje istou mierou zotrvačnosti, ktorá sa prejavuje pri zmene pohybu hmotnej časti daného systému, pozri Obr. 3.8.



Obr. 3.8. Zotrvačnosť hmoty (momentu zotrvačnosti) mechanického systému

Zotrvačnosť systému, ktorá predstavuje pri translačnom (rotačnom) pohybe hmoty odpor voči pohybu je pre **translačný systém** daná **hmotnosťou (m)** a pre **rotačný systém** je definovaná **momentom zotrvačnosti hmoty (I)**, pozri Obr. 3.8. Pri pohybe hmoty v priestore platí **II. pohybový Newtonov zákon**. Diferenciálna rovnica, ktorá opisuje lineárny vzťah medzi silou **F** a zrýchlením **a** pre systém **translačného charakteru**, kde konštantou proporcionality je hmota **m**, má tvar

$$F = m \cdot a = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3.8}$$

V prípade, že hmota **m** so známym **momentom zotrvačnosti I** koná rotačný pohyb s **uhlovým zrýchlením** $\boldsymbol{\alpha}$, potom platí lineárna závislosť medzi momentom **M** a týmto uhlovým zrýchlením $\boldsymbol{\alpha}$, kde konštantou proporcionality je v tomto prípade moment zotrvačnosti telesa **I** a platí, že

$$M = I \cdot \alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = I\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{3.9}$$

Hmota v priestore uchováva energiu v tvare **potenciálnej energie** $\mathbf{E_p}$ a **kinetickej energie** $\mathbf{E_k}$. Tieto dva typy energií možno vypočítať na základe týchto vzťahov

$$\begin{gathered} E_p = mgh\,, \\ E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \;\; E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,. \end{gathered} \tag{3.10}$$

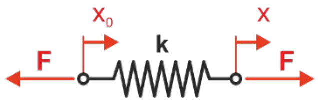
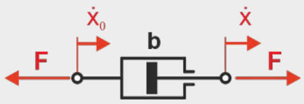
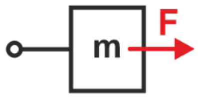
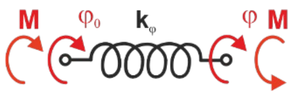
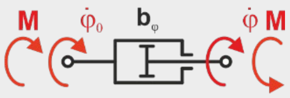
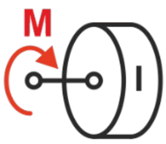
V prípade, že teleso koná **všeobecný pohyb**, je kinetická energia daná súčtom kinetickej energie pre **translačný** a **rotačný** pohyb

$$E_k = E_{kv} + E_{k\omega} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,. \tag{3.11}$$

Zhrnutie všetkých odvodených a zadefinovaných vzťahov, ktoré možno použiť na rozloženie každého **mechanického systému** na jednotlivé časti pri tvorbe matematického modelu, sa nachádza v nasledujúcej tabuľke. V tejto tabuľke sa nachádzajú vzťahy prostredníctvom, ktorých možno zadefinovať zložkové rovnice pre **pružiny** alebo **tlmiče** vyšetrovaného mechanického systému, ktoré sa potom využívajú pri tvorbe matematického modelu. V tabuľke sú uvedené vzťahy zvlášť pre rotačné a translačné systémy. Na základe týchto vzťahov možno tvoriť modely aj pre zmiešané systémy **translačno-rotačného charakteru**.

Vzťahy uvedené v tabuľke predstavujú zložkové rovnice pre jednotlivé stavebné prvky, ktoré vstupujú pri tvorbe diferenciálnych rovníc ako silové účinky napísané pre každú hmotu systému zvlášť na základe **II. Newtonovho zákona**.

Tabuľka 3.2. Základné stavebné prvky mechanického systému

Stavebný prvok	Rovnica	Uchovaná / Pohltená energia
	Translačný systém	
Pružina 	$F = k(x - x_0)$	$E = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$
Tlmič 	$F = b(\dot{x} - \dot{x}_0)$	$P = b(\dot{x} - \dot{x}_0)^2$
Hmota 	$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = \sum F$ $m\frac{dv}{dt} = m\ddot{x} = \sum F$	$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
	Rotačný systém	
Torzná pružina 	$M = k_\varphi(\varphi - \varphi_0)$	$E = \frac{1}{2}k_\varphi(\varphi - \varphi_0)^2$
Torzný tlmič 	$M = b_\varphi(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0)$	$P = b_\varphi(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0)^2$
Moment zotrvačnosti 	$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = I\ddot{\varphi} = \sum M$ $I\frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\varphi} = \sum M$	$E = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$

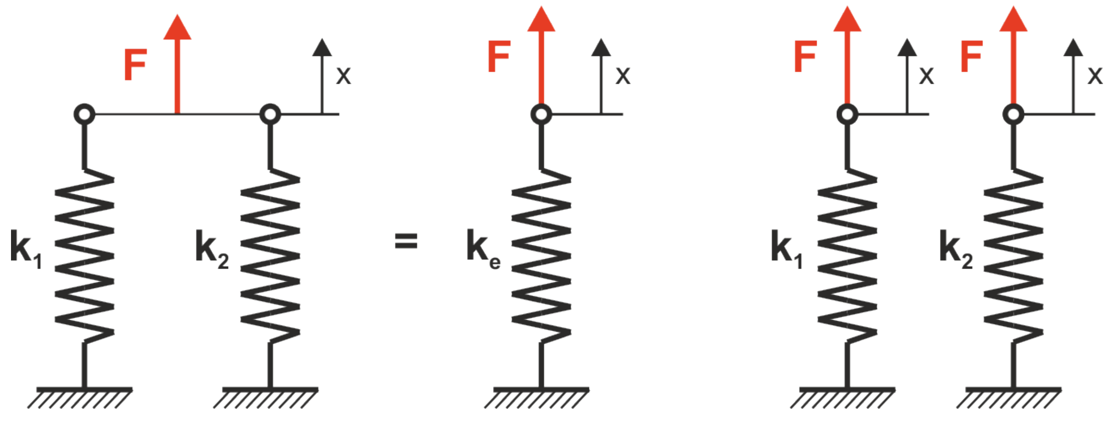
3.4 EKVIVALENCIA PRE MECHANICKÝ SYSTÉM

V mnohých mechanických systémoch sú mnohokrát použité kombinácie viacnásobných **pružín** a **tlmičov**. Vo všeobecnosti platí, že sústavy týchto elementov možno nahradiť jedným ekvivalentným prvkom tuhosti, resp. tlmenia. Ako nahradiť kombinované elementy ekvivalentným prvkom si ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad č. 3.1:

Mechanický systém pozostáva z dvoch pružín so známymi tuhosťami $\mathbf{k_1}$ a $\mathbf{k_2}$, ktoré sú zapojené paralelne ako je znázornené na nasledujúcom Obr. 3.9 (a). Dokážme, že daný systém pružín možno nahradiť jednou ekvivalentnou pružinou s konštantou tuhosti $\mathbf{k_e}$ danej vzťahom

$$k_e = k_1 + k_2 \,. \tag{3.12}$$



Obr. 3.9. (a) Paralelne zapojené pružiny, (b) ekvivalentná pružina, (c) uvoľnenie systému

Ak systém podľa Obr. 3.9 (a) nahradíme ekvivalentnou pružinou Obr. 3.9 (b) a uvoľníme v uzlovom bode spojenia dvoch pružín podľa Obr. 3.9 (c), potom možno napísať túto rovnicu rovnováhy pre daný bezhmotný systém

$$F = F_{k1} + F_{k2} = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2)x = k_e x \,. \tag{3.13}$$

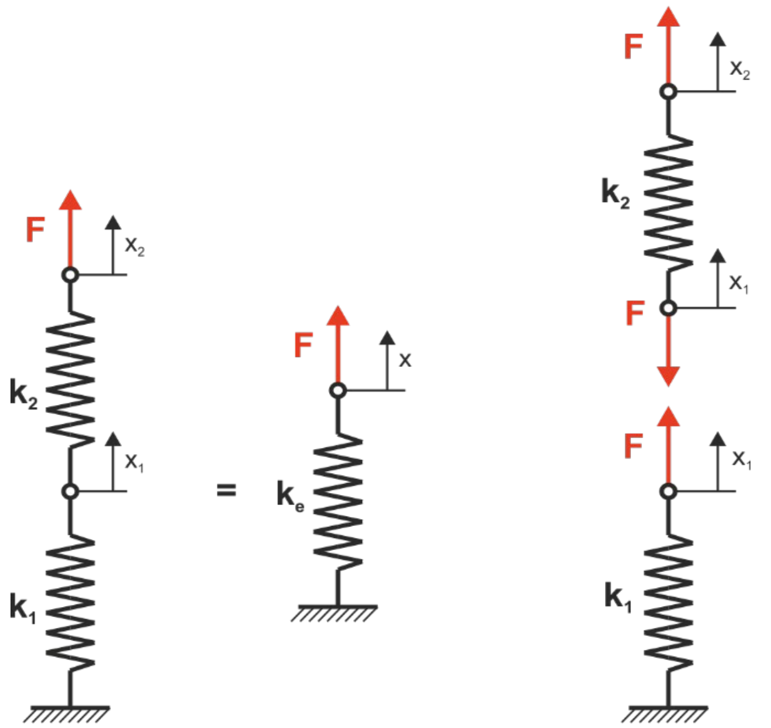
Tento prípad možno zovšeobecniť pre **n-paralelne** zapojených pružín a teda pre ekvivalentnú tuhosť **n** zapojených pružín bude platiť tento vzťah

$$k_e = k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \sum k_i \,. \tag{3.14}$$

Príklad č. 3.2:

Ak teraz budeme predpokladať systém dvoch pružín s tuhosťami $\mathbf{k_1}$ a $\mathbf{k_2}$, ktoré sú zapojené v sériovom spojení podľa Obr. 3.10 (a), dokážme, že daný systém pružín možno nahradiť jednou **ekvivalentnou pružinou s konštantou** tuhosti $\mathbf{k_e}$ podľa Obr. 3.10 (b), pre ktorú platí

$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \tag{3.15}$$



Obr. 3.10. (a) sériovo zapojené pružiny, (b) ekvivalentná pružina, (c) uvoľnenie systému

Keďže obe pružiny sú v statickej rovnováhe, potom podľa Obr. 3.10 (c) musí platiť, že sú zaťažované rovnakou silou **F**. Deformácia jednotlivých pružín je $\mathbf{x_1}$ a $\mathbf{x_2}$. To znamená, že pre celkovú deformáciu **x**, platí

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) F. \tag{3.16}$$

Pre ekvivalentný systém s pružinou $\mathbf{k_e}$ podľa Obr. 3.10 (b) musí platiť tento vzťah

$$x = \frac{F}{k_e}. \tag{3.17}$$

Porovnaním predchádzajúcich dvoch vzťahov dostávame vzťah pre ekvivalentnú tuhosť

$$k_e = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \tag{3.18}$$

Tento prípad možno zovšeobecniť na **n-sériovo zapojených pružín**. To znamená, že pre ekvivalentnú tuhosť $\mathbf{k_e}$ v prípade **n** zapojených pružín bude platiť tento vzťah

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}. \tag{3.19}$$

Identickým spôsobom možno odvodiť ekvivalentnú konštantu tlmenia $\mathbf{b_e}$ pre **paralelne zapojené tlmiče**, pre ktoré musí platiť

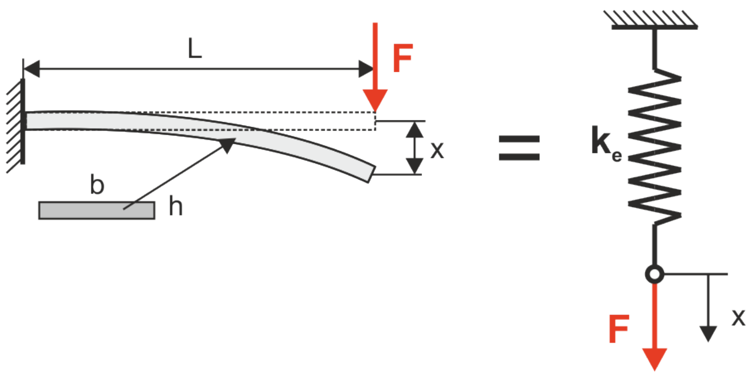
$$b_e = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum b_i\,, \tag{3.20}$$

resp. pre **sériovo zapojené tlmiče** možno odvodiť vzťah

$$\frac{1}{b_e} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}. \tag{3.21}$$

Príklad č. 3.3. Ekvivalentná konštanta tuhosti pre konzolový nosník

Konzolový nosník dĺžky **L**, hrúbky **b** a šírky **h** je znázornený na Obr. 3.11. Predpokladajme, že tento nosník je na jeho voľnom konci zaťažený silou **F**, ktorá je dôsledkom zodpovedajúcej deformácie **x**. Odvoďte ekvivalentnú tuhosť daného nosníka, ak poznáme modul pružnosti materiálu **E** a prierezové charakteristiky **b** a **h**.



Obr. 3.11. Ekvivalentná tuhosť – pre konzolový nosník

Pre ohybový moment **M**, ktorý vzniká od pôsobiacej sily **F**, a pre uvažovaný myslený rez vo vzdialenosti **x** možno napísať tento vzťah

$$M(x) = F.x\,, \qquad Jz = \frac{bh^3}{12}\,, \tag{3.22}$$

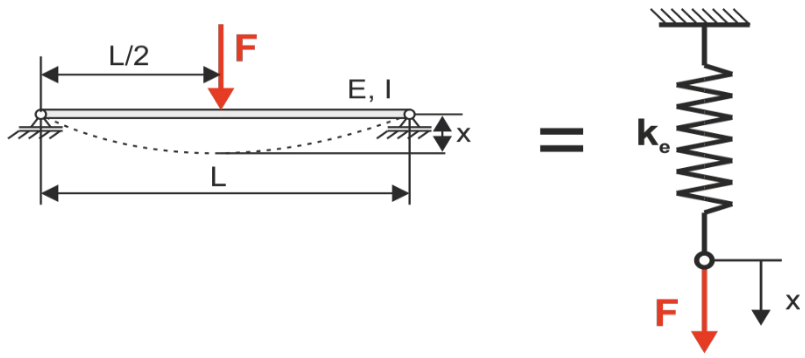
kde **Jz** je plošný moment zotrvačnosti prierezovej plochy k osi **z**. Využitím približnej diferenciálnej rovnice priehybovej čiary možno vypočítať priehyb nosníka v mieste pôsobiska tangenciálnej sily **F**, pre ktorý platí, že

$$x = \frac{L^3}{3.E.I}F = \frac{L^3}{3.E\frac{bh^3}{12}}F = \frac{4L^3}{Ebh^3}F\,. \tag{3.23}$$

Pre ekvivalentný systém pružiny podľa Obr. 3.11 platí vzťah medzi silou **F** a deformáciou **x**. Porovnaním týchto dvoch vzťahov možno zistiť ekvivalentnú tuhosť pružiny $\mathbf{k_e}$ a to na základe vzťahu

$$x = \frac{F}{k_e} = \frac{4L^3}{Ebh^3}F \qquad \Rightarrow \qquad k_e = \frac{Ebh^3}{4L^3}\,. \tag{3.24}$$

Ak by sme uvažovali nosník na dvoch podperách podľa Obr. 3.12, ktorý je v strede zaťažený silou **F**.



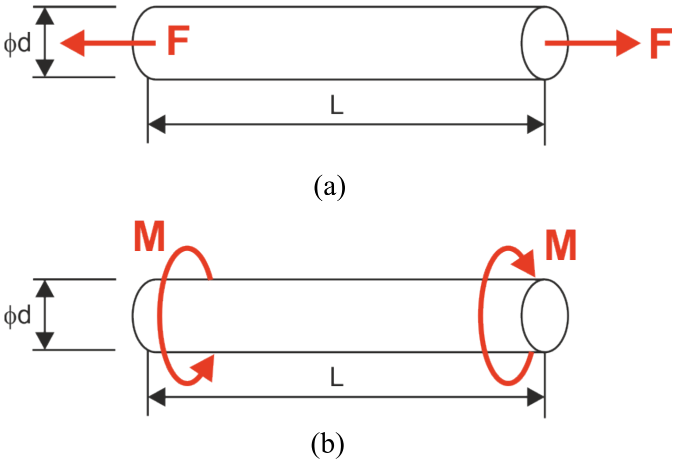
Obr. 3.12. Ekvivalentná tuhosť pre nosník na dvoch podperách

Potom pre ekvivalentný systém pružiny na Obr. 3.12 možno podobným spôsobom odvodiť vzťah medzi silou **F** a deformáciou **x**. Porovnaním tohto vzťahu so vzťahom pre ekvivalentnú pružinu potom možno vypočítať ekvivalentnú tuhosť $\mathbf{k_e}$ na základe vzťahu

$$x = \frac{F}{k_e} = \frac{L^3}{48.E.I}F \qquad \Rightarrow \qquad k_e = \frac{48.E.I}{L^3}\,. \tag{3.25}$$

Príklad č. 3.4:

Pre axiálne a rotačne zaťaženú tyčku podľa nasledujúceho obrázka Obr. 3.13 (a) a (b), nájdite ekvivalentnú tuhosť $\mathbf{k_e}$ pre oba uvažované prípady zaťažovania systémov.



Obr. 3.13. Ekvivalentná tuhosť torznej pružiny

Pre axiálne zaťažovanú tyčku podľa Obr. 3.13 (a) možno vypočítať ekvivalentnú tuhosť na základe vypočítaného celkového predlženia **x**, a teda

$$x = \int_0^L \frac{F}{E.S} dx = \frac{F.L}{E.S} = \frac{4.F.L}{E.\pi \cdot d^2} = \frac{F}{k_e} \qquad \Longrightarrow \qquad k_e = \frac{\pi d^2 E}{4L}. \tag{3.26}$$

Podobným spôsobom pre torznú tyč možno vypočítať ekvivalentnú torznú tuhosť na základe celkového skrútenia (natočenia) $\boldsymbol{\varphi}$.

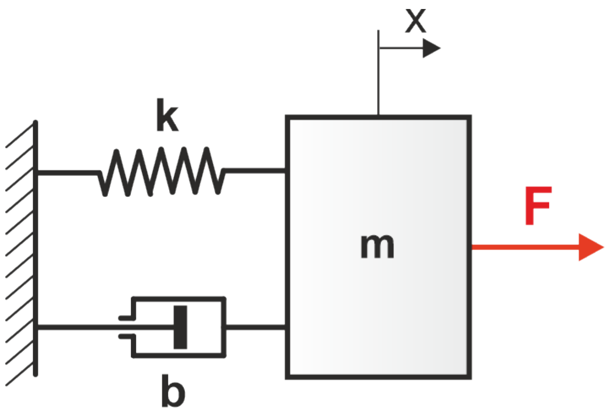
$$\varphi = \int_0^L \frac{M}{G.J_p} d\varphi = \frac{M.L}{G.J_p} = \frac{32.F.L}{G.\pi \cdot d^4} = \frac{M}{k_e} \qquad \Longrightarrow \qquad k_e = \frac{\pi d^4 G}{32L}. \tag{3.27}$$

3.5 TRANSLAČNÝ MECHANICKÝ SYSTÉM

V tejto kapitole sa zameriame na opis spôsobu tvorby matematického modelu pre systémy **translačného charakteru**. Princíp ako vytvoriť matematický model pre ľubovoľný **mechanický systém** translačného charakteru, ktorý je poskladaný zo základných komponentov mechanického systému (**pružina**, **tlmič** a **hmota**) si ukážeme a vysvetlíme modelovaním na jednoduchých príkladoch mechanických systémov. Pri odvodzovaní matematických modelov pre nasledujúce prípady mechanických systémov využijeme teoretické základy, ktoré sme nadobudli v predchádzajúcich kap. 3.1-3.3, kde sme zadefinovali základné rovnice platiace pre stavebné bloky translačných systémov.

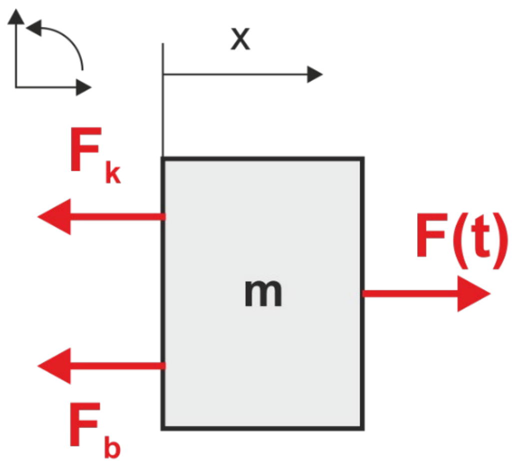
Príklad č. 3.5:

Mechanický systém pozostávajúci z jednoduchých základných prvkov, t. j. hmota **m**, pružina s tuhosťou **k** a tlmič s konštantou tlmenia **b** je zaťažený silou **F(t)** podľa Obr. 3.14. Tento mechanický systém vo všeobecnosti nazývame kmitajúcim systémom **hmota-pružina-tlmič (**z angl. **mass–spring-damper system**). Tento model možno v praxi využiť ako modelovú situáciu pre rôzne reálne systémy z praxe (kmitajúci stroj, kmitajúca sedačka, či kmitajúca časť budovy a iné). Nájdime matematický model takéhoto kmitavého systému.



Obr. 3.14. Systém pružina-tlmič-hmota

Každé teleso mechanického systému pri hľadaní matematického modelu v prvom rade uvoľníme, tzn. že nahradíme komponenty **pružinových** prvkov a **tlmičov** ich silovými reakciami. Pri uvoľňovaní telies dbáme na dodržiavanie súradníc tzv. pravotočivého súradného systému, pozri Obr. 3.15.



Obr. 3.15. Uvoľnené teleso hmoty m

Vo všeobecnosti je nutné držať sa zásady správneho smeru síl pri uvoľňovaní jednotlivých telies. Pre všetky telesá je nutné dodržať identický smer uvoľnených síl tak, aby sme sa vyhli v matematických rovniciach nesprávnej orientácii síl, ktorá sa prejaví opačným znamienkom vo výslednom modeli. To znamená, že ak v prvom prípade zvolíme smer síl šípkami od telesa, potom dodržíme smer aj v prípade ďalších telies a tento spôsobom uvoľnenia už potom nemeníme.

Po uvoľnení všetkých telies a dodržaním identickej orientácie smeru komponentných a vonkajších pôsobiacich síl pristúpime k určeniu **zložkových rovníc**. Pre jednotlivé stavebné bloky daného systému napíšeme rovnice podľa kap. 3.1-3.3. Komponentnými rovnicami myslíme rovnice pre všetky sily, ktorými sme nahradili fyzické **tlmiče** a **pružiny**. Pri ich písaní je dôležité si uvedomiť, či sa v tomto prípade jedná o **prvok**, ktorý je **fixovaný** resp. **nefixovaný** k základnému rámu (t. j. či sa daný komponent nachádza medzi dvoma navzájom sa voľne pohybujúcimi uzlovými bodmi, resp. hmotami).

Vo všeobecnosti na nájdenie matematicky správneho matematického modelu v každej komponentnej rovnici dbáme na správne priradenie znamienok. Ak dochádza k **stláčaniu pružiny (tlmiča)** prisúdime tejto deformácií (rýchlosti) **záporné znamienko (-)**. Naopak, ak je **pružina (tlmič) naťahovaná**, priradíme takýmto deformáciám (rýchlostiam) **kladné znamienkom (+)**. Na základe tohto pravidla bude teda pre náš prípad platiť nasledovné

$$\begin{aligned} F_k &= k(x-0) = kx\,, \\ F_b &= b(\dot{x}-0) = b\dot{x}\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ďalej postupujeme tak, že pre každé uvoľnené teleso napíšeme pohybové rovnice na základe **II. Newtonovho zákona**. Pri písaní týchto pohybových rovníc dbáme na pravidlo správneho priradenia znamienka. Ak **vonkajšie sily (momenty)** pôsobia v smere výchylky týmto **silám (momentom)** priradíme **kladné znamienko (+)**, v opačnom prípade týmto **silám (momentom)** priradíme **záporné znamienko (-)**. Pre náš prípad hmoty **m** bude teda platiť táto diferenciálna rovnica

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} &= F - F_k - F_b\,, \\ m\ddot{x} &= F - kx - b\dot{x}\,, \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= F\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Pre každý systém možno nájsť prenosovú funkciu systému prostredníctvom **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pre náš prípad diferenciálnej rovnice jednoduchého systému v **Laplaceovom tvare** bude platiť

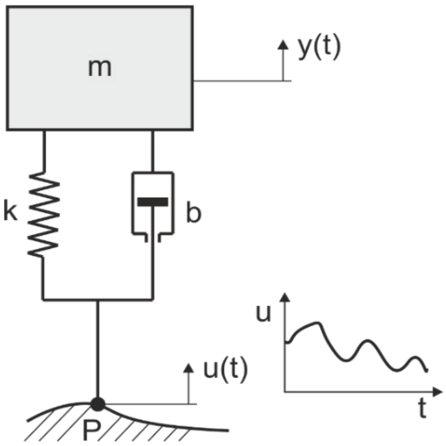
$$ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s) \tag{3.30}$$

a teda prenosová funkcia tohto systému $\mathbf{G(s)}$ bude mať tvar

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}. \qquad (3.31)$$

Príklad č. 3.6:

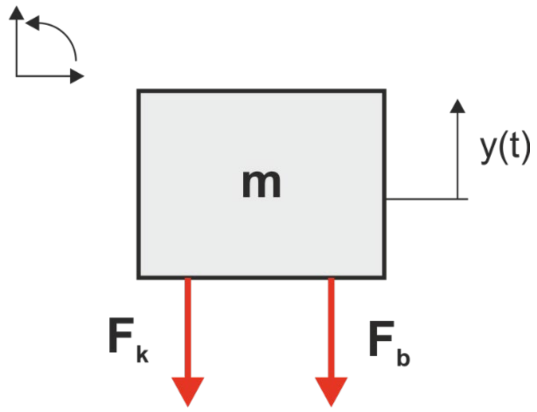
Budenie systému mechanického charakteru možno vyvolať aj iným spôsobom ako len pôsobením **sily** (**momentu**) a to vo všeobecnosti, buď pohybom danej hmoty **m (I)** alebo budením daného systému od jeho základu. Nasledujúci Obr. 3.16 zobrazuje mechanický systém, pri ktorom dochádza k budeniu systému od základu definovaného funkciou **u(t)**. Nájdime matematický model a prenosovú funkciu tohto kmitavého systému.



Obr. 3.16. Mechanický systém s kinematickým budením

Takýto typ systému je podobne ako v predchádzajúcom príklade možné použiť ako ekvivalentný model pre rôzne typy aplikácií kmitajúcich systémov v praxi. Napr. tento model môže predstavovať **štvrtinový model automobilu**, ktorý sa pohybuje po nerovnej vozovke. Môže ísť o kmitajúci stroj v prevádzke, ktorý kmitá z dôvodu vibrácií základu alebo môže predstavovať napr. časť kmitajúcej budovy, ktorá sa rozkmitá z dôvodu pôsobenia zemského zemetrasenia.

Ide teda o veľmi dôležitý typ mechanického modelu, ktorý nahrádza mnohé prípady mechanických systémov, ktoré nie sú budené silovým účinkom, ale sú budené kmitaním základu, ktorý možno opísať jednoduchou matematickou funkciou **u(t)** (toto budenie môže byť aj stochastického resp. náhodného charakteru). V našom prípade budeme uvažovať, že model predstavuje **štvrtinový model automobilu**, ktorý sa pohybuje po vozovke s nerovným reliéfom, ktorý sa mení v čase a je definovaný matematickou funkciou, pozri Obr. 3.16. Pred napísaním matematického modelu teleso s hmotou **(m)** uvoľníme nakreslením obrazca uvoľnenia (dodržaním pravidiel pre uvoľňovanie telies, ktoré sme popísali v predchádzajúcom príklade), pozri Obr. 3.17.



Obr. 3.17. Teleso s kinematickým budením u(t)

V tomto prípade sa komponenty systému ako pružina a tlmič nachádzajú medzi dvoma pohyblivými bodmi, tzn. že ani jeden z koncových bodov nie je fixovaný k základu. To znamená, že pre **pružinu** a **tlmič** takéto systému budú platiť tieto zložkové rovnice

$$\begin{aligned} F_k &= k[y - u(t)]\,, \\ F_b &= b[\dot{y} - \dot{u}(t)]\,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ďalej pristúpime k odvodeniu matematického modelu pre daný kmitajúci mechanický systém napísaním pohybovej rovnice na základe **II. Newtonovho zákona**. Pre hmotu **m** bude platiť

$$\begin{gathered} m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y} = -F_k - F_b\,, \\ m\ddot{y} = -k(y - u) - b(\dot{y} - \dot{u})\,, \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku\,. \end{gathered} \tag{3.33}$$

Aj pre tento systém postupujeme za účelom nájdenia prenosovej funkcie systému aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pre danú diferenciálnu rovnicu tohto systému v Laplaceovom tvare bude platiť

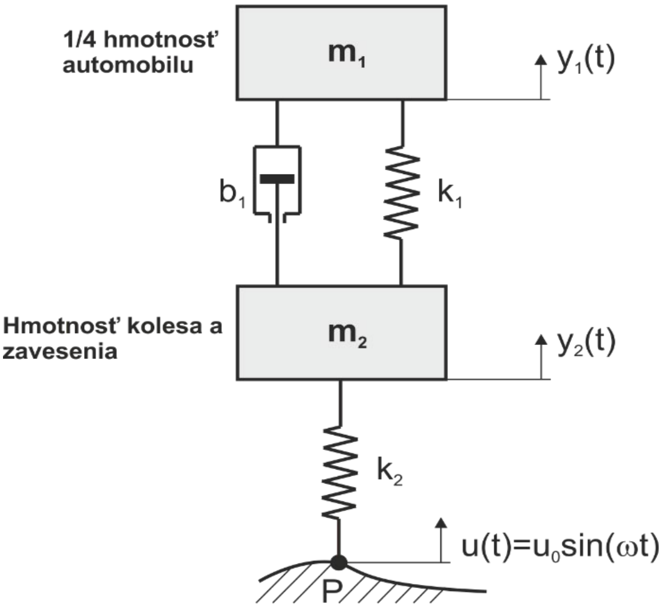
$$ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = bsU(s) + kU(s) \tag{3.34}$$

a teda prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ systému štvrtinového modelu automobilu bude mať tvar

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}\,. \tag{3.35}$$

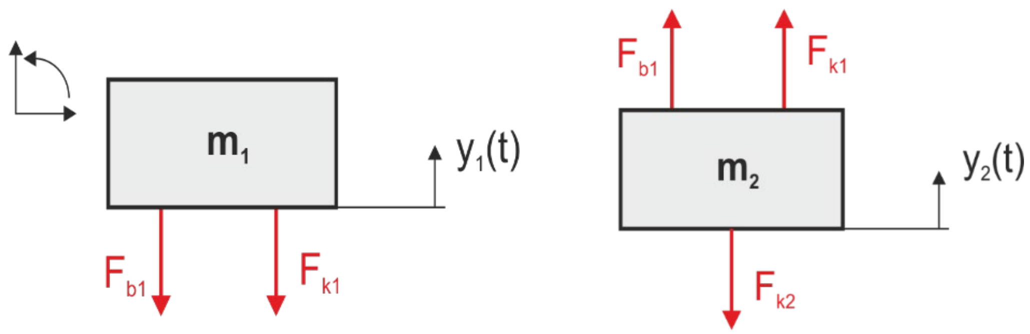
Príklad č. 3.7:

V tomto príklade budeme uvažovať model **mechanického systému**, ktorý predstavuje kmitanie zavesenia kolesa **štvrtinového modelu automobilu**. Prípad takéhoto zavesenia kolesa automobilu, ktoré je budené reliéfom od vozovky $\mathbf{u(t)}$ je znázornený na nasledujúcom Obr. 3.18. Tento mechanický model pozostáva z dvoch hmôt $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, spojených pružinou s tuhosťou $\mathbf{k_1}$ a tlmičom s konštantou $\mathbf{b_1}$. Tuhosť pneumatiky, ktorá prichádza do styku s vozovkou je daná pružinou s tuhosťou $\mathbf{k_2}$. Odvoďme matematický model takéhoto kmitajúceho systému.



Obr. 3.18. Štvrtinový model zavesenia kolesa

Systém dvoch hmôt uvoľníme nakreslením obrazca uvoľnenia pre obidve telesá podľa Obr. 3.19.



Obr. 3.19. Uvoľnené telesá zavesenia kolesa budené kinematickým budením u(t)

Potom pristúpime k napísaniu komponentných rovníc pre všetky prvky pružín a tlmičov, a teda dostávame

$$\begin{aligned} F_{k1} &= k_1(y_1 - y_2)\,, \\ F_{b1} &= b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)\,, \\ F_{k2} &= k_2(y_2 - u(t))\,. \end{aligned} \tag{3.36}$$

V tomto štádiu možno pristúpiť k tvorbe matematického modelu napísaním diferenciálnych rovníc pre každú uvoľnenú hmotu mechanického systému. Pre tento typ mechanického systému translačného charakteru možno odvodiť tento matematický model.

Pre hmotu $\mathbf{m_1}$ platí,

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= m_1\ddot{y}_1 = -F_{k1} - F_{b1}\,, \\ m_1\ddot{y}_1 &= -k_1(y_1 - y_2) - b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{aligned} \tag{3.37}$$

a **pre hmotu $\mathbf{m_2}$** platí,

$$\begin{aligned} m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} &= m_2\ddot{y}_2 = F_{k1} + F_{b1} - F_{k2}\,, \\ m_2\ddot{y}_2 &= k_1(y_1 - y_2) + b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k_2(y_2 - u)\,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Výsledný matematický model je tvorený sústavou dvoch **diferenciálnych rovníc**. V prípade, že máme systém, ktorý je definovaný viac ako jednou diferenciálnou rovnicou je výhodnejšie túto sústavu diferenciálnych rovníc zapísať do maticového tvaru. Usporiadajme teda systém diferenciálnych rovníc do nasledovného tvaru. Všetky neznáme presunieme na ľavú stranu rovnice a známe veličiny ponecháme na pravej strane rovnice, potom

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_2) + b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= 0\,, \\ m_2\ddot{y}_2 - k_1(y_1 - y_2) - b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2y_2 &= k_2u\,. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Výsledná sústava diferenciálnych rovníc prepísaná do maticového tvaru, ktorá predstavuje matematický model uvažovaného mechanického systému podľa Obr. 3.18, nadobúda tvar

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_1 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix}[u]\,. \tag{3.40}$$

Nájdime pre tento systém prenosovú funkciu aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}_{\mathbf{1}}(\mathbf{0}) = \dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{2}}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}_{\mathbf{2}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Keďže v tomto prípade máme sústavu diferenciálnych rovníc, vykonáme **Laplaceovu transformáciu** celého maticového systému v tomto tvare

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + b_1 s + k_1 & -b_1 s - k_1 \\ -b_1 s - k_1 & m_2 s^2 + b_1 s + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} [U(s)] \,. \qquad (3.41)$$

Poznamenajme, že prenosová funkcia $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ v tomto prípade systému štvrtinového modelu automobilu, bude definovaná v tvare prenosovej matice systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$, nakoľko máme systém s viacerými výstupmi. Nepôjde teda o jednoduchú prenosovú funkciu $\mathbf{G}(\mathbf{s})$, ale výsledkom sú dve prenosové funkcie $\mathbf{G}_{\mathbf{1}}(\mathbf{s})$ a $\mathbf{G}_{\mathbf{2}}(\mathbf{s})$, ktoré prislúchajú jednotlivým výstupom $\mathbf{Y}_{\mathbf{1}}(\mathbf{s})$ a $\mathbf{Y}_{\mathbf{2}}(\mathbf{s})$.

Danú prenosovú maticu systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ možno vyriešiť analytickým riešením lineárneho systému s pravou stranou zapísaného vo všeobecnom tvare ako

$$A \cdot \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U(s)} \end{bmatrix} = b \Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U(s)} \end{bmatrix} = A^{-1} b, \qquad (3.42)$$

kde matica **A** predstavuje maticu systému

$$A = \begin{bmatrix} m_1 s^2 + b_1 s + k_1 & -b_1 s - k_1 \\ -b_1 s - k_1 & m_2 s^2 + b_1 s + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \qquad (3.43)$$

a vektor pravej strany **b** prislúchajúci budiacej funkcii **U(s)** bude mať tvar

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.44)$$

Napokon výslednú prenosovú maticu systému **G(s)** možno zapísať vo všeobecnom tvare týmto spôsobom

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U(s)} \end{bmatrix}. \qquad (3.45)$$

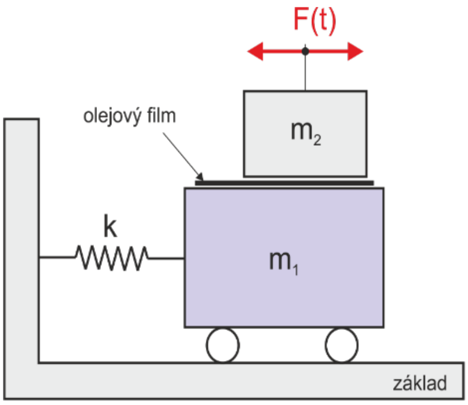
Riešením systému rovníc v symbolickom tvare (napr. v Matlabe) možno vypočítať výsledný tvar prenosovej funkcie **G(s)** pre nami uvažovaný mechanický systém dvoch hmôt v tvare

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{b_1k_2s+k_1k_2}{m_1m_2s^4+b_1(m_1+m_2)s^3+(k_1m_1+k_1m_2+k_2m_1)s^2+b_1k_2s+k_1k_2}\\ \dfrac{k_2m_1s^2+b_1k_2s+k_1k_2}{m_1m_2s^4+b_1(m_1+m_2)s^3+(k_1m_1+k_1m_2+k_2m_1)s^2+b_1k_2s+k_1k_2}\end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Ako si možno všimnúť z vypočítaného tvaru prenosových funkcií, tak tieto prenosové funkcie majú identický menovateľ a líšia sa len v tvare čitateľa prenosovej funkcie.

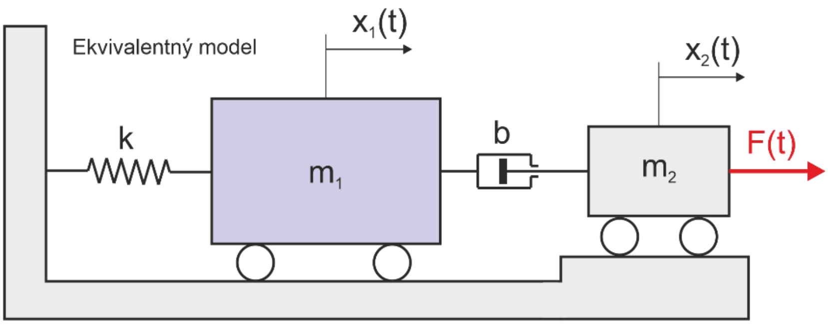
Príklad č. 3.8:

Na vozík hmotnosti $\mathbf{m_1}$, ktorý je pripevnený k základu prostredníctvom pružiny **k** je umiestnená kmitajúca hmota $\mathbf{m_2}$, pozri Obr. 3.20. Medzi hmotou $\mathbf{m_1}$ a $\mathbf{m_2}$ sa nachádza olejový film. Nájdite matematický model takéhoto typu systému, ak na hmotu $\mathbf{m_2}$ pôsobí vonkajšia sila **F(t)**,.



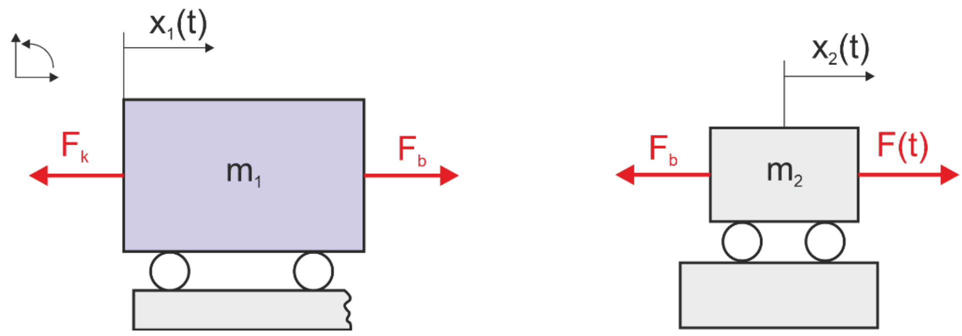
Obr. 3.20. Kmitajúca hmota na vozíku

Pre skúmaný mechanický model možno prekreslením pôvodného modelu nájsť ekvivalentný mechanický model systému. Olejový film možno chápať ako istý druh tlmiaceho člena, ktorý možno nahradiť tlmičom **b**. Model je teda možné prekresliť na nasledujúci tvar zobrazený na Obr. 3.21.



Obr. 3.21. Ekvivalentný mechanický model

Uvoľnené telesá tohto mechanického systému ekvivalentného s daným systémom sú znázornené na nasledujúcom Obr. 3.22.



Obr. 3.22. Uvoľnené telesá kmitajúceho systému

Pre jednotlivé časti systému pružín a tlmičov možno napísať tieto zložkové rovnice

$$F_k = k(x_1 - 0) = k \cdot x_1 \,,$$
$$F_b = b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \,. \tag{3.47}$$

Potom môžeme pristúpiť k tvorbe matematického modelu pre uvažovaný ekvivalentný mechanický systém podľa Obr. 3.21. Napísaním diferenciálnych rovníc pre jednotlivé uvoľnené hmoty mechanického systému podľa **II. Newtonovho zákona**, potom

pre hmotu m_1 platí, že

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1\ddot{x}_1 = -F_k + F_b \,,$$
$$m_1\ddot{x}_1 = -k \cdot x_1 + b \tag{3.48}$$

a **pre hmotu m_2** platí, že

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2\ddot{x}_2 = -F_b + F(t) \,,$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F(t) \,. \tag{3.49}$$

Výsledný matematický model pre mechanický systém podľa Obr. 3.20 bude teda rovnako tvorený **sústavou dvoch diferenciálnych rovníc** ako v predchádzajúcom príklade kmitajúceho systému automobilu.

Sústava dvoch diferenciálnych rovníc, ktorá vznikne po matematickej úprave usporiadaním premenných v pôvodných rovniciach, nadobudne tvar

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + k\,x_1 - b\dot{x}_2 = 0\,, \\ m_2\ddot{x}_2 - b\dot{x}_1 + b\dot{x}_2 = F(t)\,. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Uvedenú sústavu prepíšeme do nasledovného maticového tvaru systému dvoch diferenciálnych rovníc

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[F(t)]\,. \tag{3.51}$$

Aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{1}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_\mathbf{1}(\mathbf{0}) = \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{2}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_\mathbf{2}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ na sústavu diferenciálnych rovníc zapísaných v maticovom tvare, dostávame Laplaceovu transformáciu celého systému rovníc v tvare

$$\begin{bmatrix} m_1s^2 + bs + k & -bs \\ -bs & m_2s^2 + bs \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[F(s)]\,. \tag{3.52}$$

V tomto prípade bude prenosová matica systému $\mathbf{G(s)}$ definovaná dvoma prenosovými funkciami systému $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$, ktoré prislúchajú jednotlivým výstupom $\mathbf{X_1(s)}$ a $\mathbf{X_2(s)}$. Danú prenosovú maticu systému možno obdobným spôsobom nájsť (vyriešením lineárneho systému s pravou stranou zapísaného vo všeobecnom tvare) ako

$$A \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{X_1(s)}{F(s)} \\ \dfrac{X_2(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = b \Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{X_1(s)}{F(s)} \\ \dfrac{X_2(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = A^{-1}b, \tag{3.53}$$

kde matica **A** predstavuje

$$A = \begin{bmatrix} m_1s^2 + bs + k & -bs \\ -bs & m_2s^2 + bs \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

a vektor pravej strany **b** predstavuje

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.55}$$

Prenosová matica systému **G(s)**, ktorá je maticou dvoch prenosových funkcií $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{X_1(s)}{F(s)} \\ \dfrac{X_2(s)}{F(s)} \end{bmatrix}, \qquad (3.56)$$

nadobúda riešením lineárneho systému v symbolickom tvare použitím Matlabu tento tvar

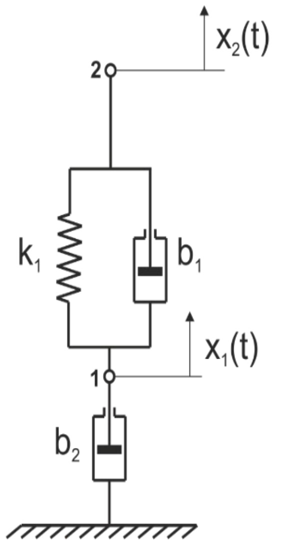
$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{m_1 m_2 s^3 + b(m_1 + m_2)s^2 + k m_2 s + bk} \\ \dfrac{m_1 s^2 + bs + k}{m_1 m_2 s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + k m_1 s^2 + bks} \end{bmatrix}. \qquad (3.57)$$

3.6 BEZHMOTNÉ MECHANICKÉ SYSTÉMY

Bezhmotný mechanický systém je spravidla mechanický systém pozostávajúci iba z pružín a tlmičov bez existencie akejkoľvek hmoty. Pre takéto typy systémov podobne ako pre systémy s hmotami možno nájsť pohybové rovnice na základe **II. Newtonovho zákona**. V tomto prípade pohybové rovnice zmenia tvar na rovnovážne rovnice, nakoľko uzlové body systému, uvažujeme ako hmoty s nulovou hmotnosťou.

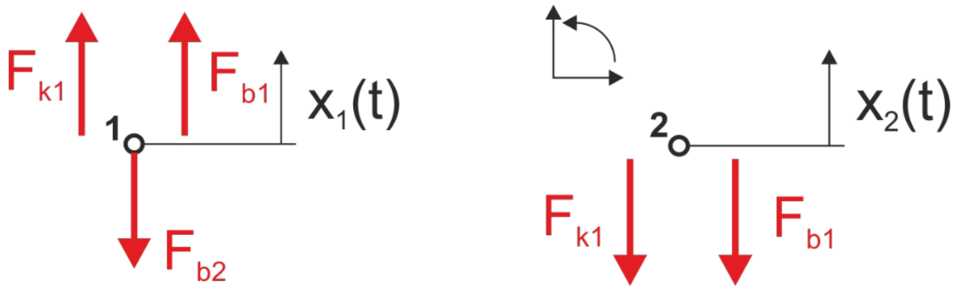
Príklad č. 3.9:

Mechanický systém, ktorý pozostáva z tlmičov $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ a jednej pružiny s tuhosťou $\mathbf{k_1}$ je znázornený na nasledujúcom Obr. 3.23. Nájdite matematický model pre takýto typ bezhmotného mechanického systému.



Obr. 3.23. Bezhmotný mechanický systém s uzlovými bodmi

Mechanický systém v tomto prípade neobsahuje žiadne hmoty, pozostáva len z komponentov pružín a tlmiacich prvkov. Uvoľnime uzlové body daného systému podľa nasledujúceho Obr. 3.24.



Obr. 3.24. Uvoľnené uzlové body kmitajúceho systému

Zložkové rovnice pre pružiny a tlmiče tohto bezhmotného mechanického systému budú mať tento tvar:

$$\begin{aligned} F_{k1} &= k_1(x_2 - x_1)\,, \\ F_{b1} &= b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,, \\ F_{b2} &= b_2(\dot{x}_2 - 0) = b_2\dot{x}_1. \end{aligned} \qquad (3.58)$$

Pre tento mechanický systém podobne ako pre systém s hmotami uvažujeme **II. Newtonov zákon**, ktorý aplikujeme zvlášť pre každý uhlový bod daného systému, potom

pre uzlový bod 1

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 = 0 &= F_{k1} + F_{b1} - F_{b2}\,, \\ 0 &= k_1(x_2 - x_1) + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - b_2\dot{x}_1 \end{aligned} \qquad (3.59)$$

a **pre uzlový bod 2**

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 = 0 &= -F_{k1} - F_{b1}\,, \\ 0 &= -k_1(x_2 - x_1) - b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,. \end{aligned} \qquad (3.60)$$

Potom usporiadaním premenných a ďalšími matematickými úpravami predchádzajúcich diferenciálnych rovníc možno dospieť k sústave dvoch diferenciálnych rovníc v tvare

$$\begin{aligned} k_1(x_2 - x_1) + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - b_2\dot{x}_1 &= 0\,, \\ k_1(x_2 - x_1) + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0\,. \end{aligned} \qquad (3.61)$$

Sústava diferenciálnych rovníc zapísaná v maticovom tvare nadobúda tvar

$$\begin{bmatrix} -b_1 - b_2 & b_1 \\ -b_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

3.7 D´ALEMBERTOV PRINCÍP

D'Alembertov princíp je dôležité tvrdenie týkajúce sa zákona pohybu v klasickej mechanike. Predstavuje ekvivalentné vyjadrenie **II. Newtonovho zákona**. Nesie meno po svojom objaviteľovi, ktorým bol francúzsky fyzik a matematik **Jean le Rond D'Alembert**. D'Alembertov princíp je základom **Lagrangeovejskej mechaniky**. Tento zákon hovorí, že ak sa k silám, resp. momentom (vonkajším aj reaktívnym od väzieb) pripočítajú sily (momenty) zotrvačné, potom budú všetky sily (momenty) v rovnováhe. D'Alembertov princíp vychádza z definície **II. Newtonov zákona** pre **translačný** a **rotačný** systém

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F\,, \\ I\ddot{\varphi} &= \sum M, \end{aligned} \tag{3.63}$$

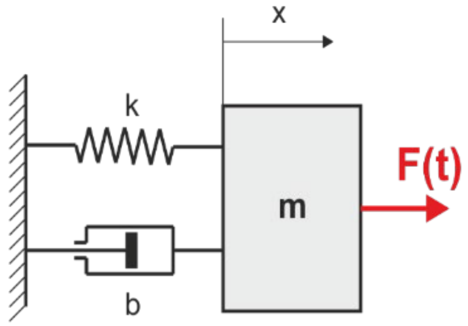
ktorý tento základný zákon mechaniky upravuje do tejto podoby

$$\begin{aligned} \sum F - m\ddot{x} &= 0\,, \\ \sum M - I\ddot{\varphi} &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Na tvorbu matematických modelov možno predchádzajúcu definíciu matematických rovníc výhodné používať na modelovanie **rotačných**, resp. **translačných** systémov. Zmysel použitia **D´Alembertovho** princípu je dôležitý hlavne v prípade rotačných systémov, keď sa zjednodušuje a urýchľuje nájdenie matematického modelu. Použitie D'Alembertovho princípu si ukážme v ďalšom príklade.

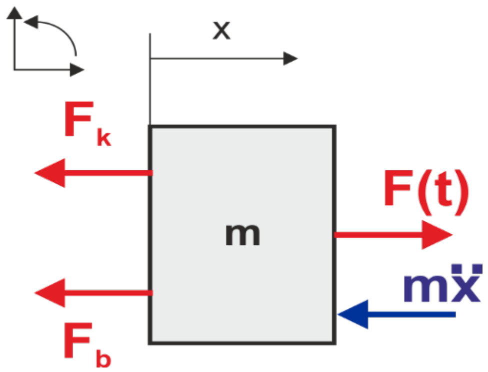
Príklad č. 3.10:

Predpokladajme jednoduchý kmitajúci mechanický systém, ktorý pozostáva z hmoty **m**, pružiny s tuhosťou **k** a translačného tlmiča s konštantou tlmenia **b**. Tento mechanický systém je znázornený na Obr. 3.25. Ak vieme, že na hmotu m pôsobí časovo premenlivá budiaca sila F(t), nájdite metódou **D´Alembertovho princípu** matematický model takéhoto kmitajúceho mechanického systému.



Obr. 3.25. Systém hmota-pružina-tlmič

V prípade, že tvoríme matematický model na základe **D´Alembertovho princípu**, pri uvoľňovaní každej **hmoty** alebo **uzlového** bodu musíme uvažovať aj zotrvačný účinok **sily**, resp. **momentu**, ktorý vkladáme priamo do obrazcu uvoľneného telesa a to v opačnom smere pohybu danej hmoty alebo telesa, pozri Obr. 3.26.



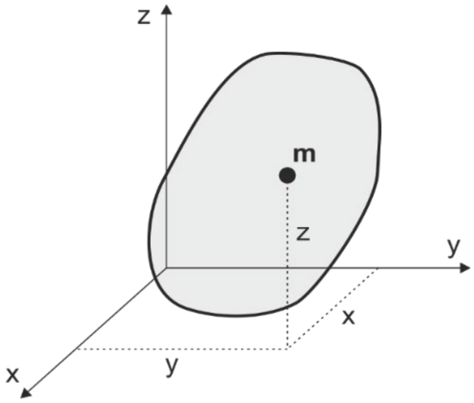
Obr. 3.26. Uvoľnená hmota m

Potom pre matematický model aplikujeme **rovnice rovnováhy** pre všetky **uvoľnené telesá** s uvažovaním príslušných smerov a znamienok pôsobiacich síl, resp. momentov podobným spôsobom ako sme aplikovali v predchádzajúcich prípadoch. Potom matematický model pre tento systém možno nájsť týmto spôsobom

$$
\begin{aligned}
-F_k - F_b + F(t) - m\ddot{x} &= 0\,, \\
-kx - b\dot{x} + F(t) - m\ddot{x} &= 0\,, \\
m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= F(t)\,.
\end{aligned}
\qquad (3.65)
$$

3.8 VŠEOBECNÝ POHYB TELESA

Momentová rovnica je aplikovateľná ako pre systémy sústavy bodov, tak aj pre dokonale tuhé telesá v rovine alebo priestore. V prípade, že **dokonalé tuhé teleso** podľa Obr. 3.27, resp. sústava hmotných bodov vykonáva všeobecný pohyb v priestore,



Obr. 3.27. Dokonale tuhé teleso

potom pre teleso alebo sústavu častíc možno napísať rovnicu danú druhým **II. Newtonovým zákonom** dynamiky k bodu **P**

$$\sum M_P = \dot{L}_P + m \cdot r_{\frac{\check{T}}{P}} \times a_p \,, \tag{3.66}$$

kde **P** predstavuje bod pôsobenia zrýchlenia, **Ť** označuje ťažisko systému častíc alebo tuhého telesa, $\sum \mathbf{M_P}$ je súčet všetkých pôsobiacich vonkajších momentov, $\mathbf{L_P}$ je moment hybnosti, $\mathbf{r}_{\check{T}/P}$ je polohový vektor ťažiska vzhľadom na bod **P**.

Pre každé dokonale tuhé teleso je moment hybnosti $\mathbf{L_P}$ definovaný ako súčin **momentu zotrvačnosti $\mathbf{I_P}$** a uhlovej rýchlosti **ω**

$$L_P = I_P \cdot \omega \,, \tag{3.67}$$

predchádzajúcu rovnicu možno prepísať do maticového tvaru ako

$$\begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}, \tag{3.68}$$

kde $\mathbf{L_P}$ je vektor momentu hybnosti k bodu **P** a **ω** je vektor uhlovej rýchlosť. Maticu 3 x 3 $\mathbf{I_P}$ nazývame tenzor momentu zotrvačnosti k bodu **P**.

V tenzore momentu zotrvačnosti $\mathbf{I_P}$ predstavujú jednotlivé prvky matice $\mathbf{I_{xx}}$, $\mathbf{I_{yy}}$, $\mathbf{I_{zz}}$, $\mathbf{I_{xy}}$, $\mathbf{I_{xz}}$, $\mathbf{I_{yz}}$, momenty zotrvačnosti jednotlivým osiam a rovinám súradného systému (momenty k zmiešaným osiam $\mathbf{I_{xy}} = \mathbf{I_{yx}}$, $\mathbf{I_{xz}} = \mathbf{I_{zx}}$, $\mathbf{I_{yz}} = \mathbf{I_{zy}}$, nazývame deviačnými momentami). Ak uvažujeme dokonalé tuhé teleso podľa Obr. 3.27, potom pre momenty zotrvačnosti a deviačné momenty platí, že

$$\begin{gathered} I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\mathrm{dm}\,, \quad I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\mathrm{dm}\,, \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\mathrm{dm}\,, \\ I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\,\mathrm{dm}\,, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int yz\,\mathrm{dm}\,, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\int xz\,\mathrm{dm}\,. \end{gathered} \tag{3.69}$$

Pre moment zotrvačnosti dokonale tuhého telesa **I**, ktoré rotuje okolo osi rotácie telesa prechádzajúcej ťažiskom platí vzťah definovaný na základe polohového vektora **r** elementu **dm**

$$I = \int r^2 \mathrm{dm}\,, \tag{3.70}$$

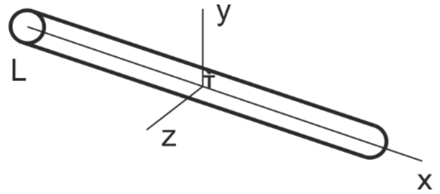
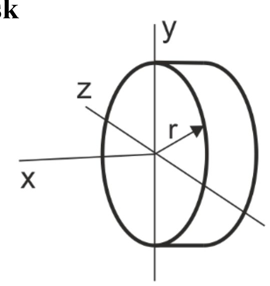
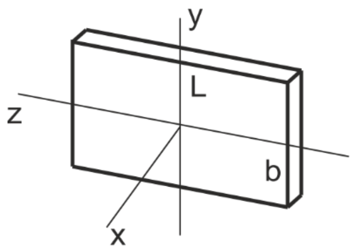
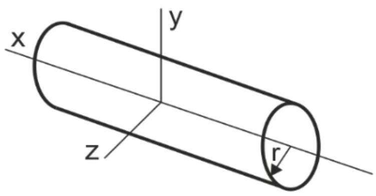
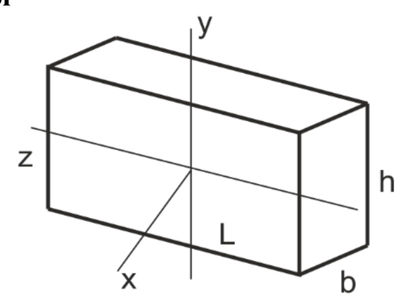
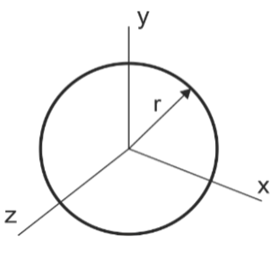
kde **r** je polohový vektor elementu **dm** od osi rotácie. Je nutné pripomenúť, že ak počítame moment zotrvačnosti telesa **I**, ktoré rotuje okolo osi rotácie vzdialenej od osi prechádzajúcej ťažiskom telesa (os rotácie v tomto prípade nie je totožná s osou prechádzajúcou ťažiskom), potom je nevyhnutné na výpočet momentu zotrvačnosti **I** (momentu k rotácie osi neprechádzajúcej ťažiskom) použiť definíciu tzv. **Steinerovej vety**

$$I = I_{Ť} + mr^2, \tag{3.71}$$

kde $\mathbf{I_{Ť}}$ je moment zotrvačnosti k osi prechádzajúcej ťažiskom a **m** je hmotnosť telesa a **r** je kolmá vzdialenosť osi rotácie k osi predchádzajúcej ťažiskom.

V nasledujúcej tabuľke možno nájsť zadefinované momenty zotrvačnosti k ťažisku pre jednoduché geometrické tvary ako sú napr. **štíhly prút, tenký disk, tenká platňa, tyč kruhového prierezu, obdĺžnikový kváder** alebo **guľa**. Všetky tieto momenty zotrvačnosti boli odvodené na základe uvedeného integrálu, ktorého platnosť je všeobecná a týmto spôsobom možno vypočítať momenty zotrvačnosti prakticky pre ľubovoľné tvary telies. Pre našu potrebu tvorby jednoduchých matematických modelov bude postačovať poznať momenty zotrvačnosti týchto jednoduchých tvarov telies. Poznamenajme, že v súčasnosti možno na výpočet momentov zotrvačnosti telies zložitejších tvarov využiť napr. **CAD systémy**, ktoré majú implementované moduly na výpočet týchto momentov zotrvačnosti a to aj pre telesá komplikovaných tvarov. Výhodou je možnosť identifikovať prvky kompletného **tenzora momentu zotrvačnosti** pre dané telesá a to bez nutnosti ich analytického počítania.

Tabuľka 3.3. Momenty zotrvačnosti základných geometrických tvarov

Štíhly prút  	$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$ $I_x = 0$
Tenký disk  	$I_x = \frac{1}{2} mR^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mR^2$
Tenká platňa  	$I_x = \frac{1}{12} m(L^2 + b^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mL^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Tyč kruhového prierezu  	$I_x = \frac{1}{2} mR^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3R^2 + L^2)$
Hranol  	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(L^2 + b^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(L^2 + h^2)$
Guľa  	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mR^2$

3.8.1 Pohyb tuhého telesa v rovine

Teleso vo všeobecnosti koná pohyb v rovine v prípade, že sa pohybuje v dvoch smeroch osí súradného systému **x, y** a rotuje okolo osi **z** kolmej na rovinu pohybu.

Pre dokonale tuhé teleso konajúce **rovinný pohyb** je moment zotrvačnosti $\mathbf{I_P}$ spravidla skalárna veličina a časovo premenlivý moment hybnosti $\mathbf{L_P}$ sa teda redukuje na rovnicu

$$\dot{L}_P = I_P \cdot \alpha\,, \tag{3.72}$$

kde $\mathbf{I_P}$ je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania prechádzajúcej bodom **P** a $\boldsymbol{\alpha}$ je uhlové zrýchlenie.

Potom rovnica všeobecného pohybu prejde na tvar

$$\sum M_P = I_P \cdot \alpha + m \cdot r_{\check{T}/P} \times a_p\,. \tag{3.73}$$

V prípade, že dokonale tuhé teleso rotuje okolo fixovanej osi prechádzajúcej bodom **O**, možno predchádzajúcu rovnicu zjednodušiť na tvar

$$\sum M_O = I_O \alpha\,, \tag{3.74}$$

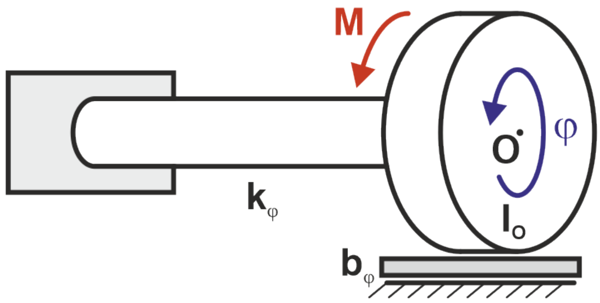
kde $\mathbf{I_O}$ je moment zotrvačnosti telesa k osi rotácie **O**.

3.9 ROTAČNÉ MECHANICKÉ SYSTÉMY

V tejto časti sa obmedzíme na tvorbu matematických modelov pre čisto **rotačné mechanické systémy**. Ak dokonale tuhé teleso koná ľubovoľný pohyb v priestore, potom os rotácie sa neustále mení. Toto vytvára modelovanie omnoho ťažším. V našom prípade sa obmedzíme len na tvorbu modelov pre rovinný pohyb a vysvetlíme si spôsob tvorby matematických modelov na jednoduchých príkladoch.

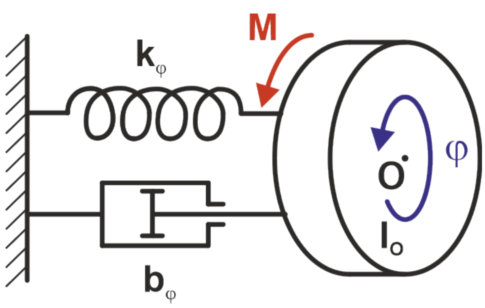
Príklad č. 3.11:

Jednoduchý rotačný **disk**, ktorý je pripojený k **torzný hriadeľu** ako je zobrazené na Obr. 3.28, rotuje okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. Torzný hriadeľ je priamo fixovaný k základu. Rotačný disk s momentom zotrvačnosti $\mathbf{I_o}$ rotuje okolo fixovanej osi **O** a je zaťažený vonkajším moment **M**, pričom pri jeho pohybe naň pôsobí **viskózny tlmič** s koeficientom tlmenia $\mathbf{b_\varphi}$. Odvoďte matematický model pre takýto typ torzného systému.



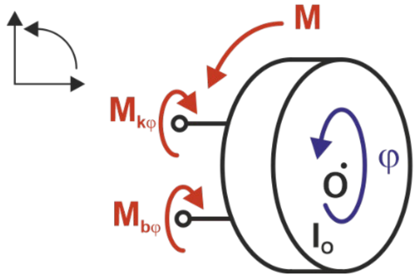
Obr. 3.28. Rotačný mechanický systém

Obrázok rotačného mechanického systému zobrazeného na Obr. 3.28 možno prekresliť na mechanický model systému využitím schematických značiek tak, že nahradíme torznú tyč pružinovým prvkom s tuhosťou $\mathbf{k_\varphi}$ a viskózne tlmenie na kotúči torzným tlmičom $\mathbf{b_\varphi}$, pozri Obr. 3.29.



Obr. 3.29. Schematický diagram rotačného systému

Teleso podobne ako v prípade **translačných systémov** uvoľníme zámenou pružín a tlmičov za ich vnútorné účinky (komponentné momenty). V tomto prípade však nie za sily, ale za **krútiace momenty** podľa Obr. 3.30.



Obr. 3.30. Uvoľnený rotačný systém hmoty

Zložkové rovnice pre **torznú pružinu** a **torzný tlmič**, ktoré sú fixované k základu sú definované v tvare

$$\begin{aligned} M_{k\varphi} &= k_\varphi(\varphi - 0) = k_\varphi \varphi\,, \\ M_{b\varphi} &= b_\varphi(\dot{\varphi} - 0) = b_\varphi \dot{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Na základe **II. Newtonovho zákona** pohybu možno napísať diferenciálnu rovnicu s uvažovaním pravotočivého súradného systému v tvare

$$\begin{aligned} I_O\alpha = I_O\frac{d^2\varphi}{dt^2} = I_O\ddot{\varphi} &= M - M_{k\varphi} - M_{b\varphi}\,, \\ I_O\ddot{\varphi} &= M - k_\varphi\varphi - b_\varphi\dot{\varphi}\,, \\ I_O\ddot{\varphi} + b_\varphi\dot{\varphi} + k_\varphi\varphi &= M, \end{aligned} \tag{3.76}$$

kde $\mathbf{I_O}$ je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os rotácie **O**.

Nájdime prenosovú funkciu systému aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pre danú diferenciálnu rovnicu tohto rotačného systému v Laplaceovom tvare bude platiť

$$I_O s^2\Phi(s) + b_\varphi s\Phi(s) + k_\varphi\Phi(s) = M(s) \tag{3.77}$$

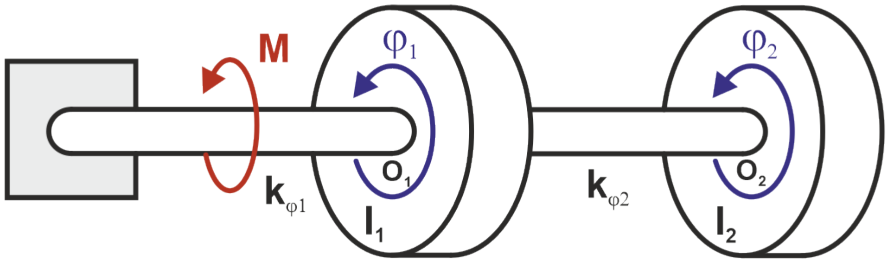
a teda prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ systému rotačného mechanického modelu bude mať tvar

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{M(s)} = \frac{1}{I_O s^2 + b_\varphi s + k_\varphi}\,. \tag{3.78}$$

Príklad č. 3.12:

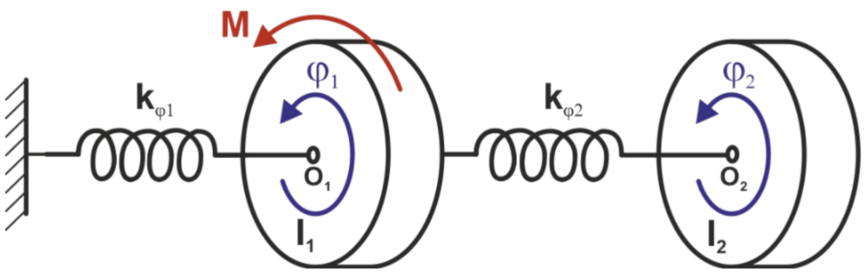
Torzný systém s dvoma stupňami voľnosti, ktorý je na jednej strane votknutý k základu je zaťažený vonkajším krútiacim momentom **M**, ktorý pôsobí na stredný disk rotačného mechanického systému podľa Obr. 3.31.

Predpokladajme, že všetky vstupné parametre systému sú známe veličiny, poznáme teda momenty zotrvačnosti hmôt $\mathbf{I_1}$ a $\mathbf{I_2}$ k osi rotácií $\mathbf{O_1}$ a $\mathbf{O_2}$ kmitajúcich diskov a takisto torzné tuhosti torzných tyčí $\mathbf{k_{\varphi 1}}$ a $\mathbf{k_{\varphi 2}}$. Odvoďte matematický model pre takýto **rotačný mechanický systém**. Poznamenajme, že systém torzných hriadeľov možno modelovať ako jednoduchý systém s torznými pružinami a rotačnými hmotami.



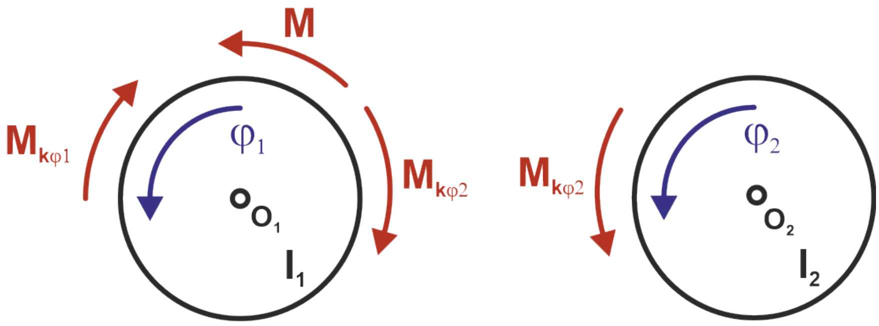
Obr. 3.31. Rotačný mechanický systém s dvomi stupňami voľnosti

Mechanický systém podľa zadania možno prekresliť podobne ako v predchádzajúcom prípade na schematický tvar rotačného mechanického systému a to využitím schematických značiek pre mechanické systémy podľa nasledujúceho Obr. 3.32.



Obr. 3.32. Schematický model rotačného systému

Rotačný mechanický torzný systém podľa Obr. 3.32 uvoľníme tak, že pre každý rotačný disk nakreslíme obrazec uvoľnenia nie v priestore, ale Na zjednodušenie v rovine kolmej na smer rotácie s uvažovaním všetkých momentov, ktoré na daný disk pôsobia, pozri Obr. 3.33.



Obr. 3.33. Uvoľnené telesá torzného systému

Na zjednodušenie zápisu komponentných rovníc modelu budeme uvažovať, že pre natočenia rotujúcich diskov v počiatočnom štádiu platí, že $\boldsymbol{\varphi_1} > \boldsymbol{\varphi_2} > \mathbf{0}$. Na základe uvažovaného je potom možné pre nakreslené diagramy uvoľnených telies napísať nasledovné zložkové rovnice

$$\begin{aligned} M_{k\varphi 1} &= k_{\varphi 1}(\varphi_1 - 0) = k_{\varphi 1}\varphi_1 \,, \\ M_{k\varphi 2} &= k_{\varphi 2}(\varphi_1 - \varphi_2) \,. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Pre napísanie matematického modelu aplikujeme podobný spôsob ako v predchádzajúcich prípadoch a to tak, že pre každý rotujúci disk zvlášť zadefinujeme matematickú rovnicu využitím **II. Newtonovho zákona**.

Pre hmotu $\mathbf{I_1}$ platí

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\varphi}_1 &= M - M_{k1\varphi} - M_{k2\varphi} \,, \\ I_1\ddot{\varphi}_1 &= M - k_{\varphi 1}\varphi_1 - k_{\varphi 2}(\varphi_1 - \varphi_2) \,, \\ I_1\ddot{\varphi}_1 + k_{\varphi 1}\varphi_1 + k_{\varphi 2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M \end{aligned} \tag{3.80}$$

a **pre hmotu $\mathbf{I_2}$** platí

$$\begin{aligned} I_2\ddot{\varphi}_2 &= M_{k2\varphi} \,, \\ I_2\ddot{\varphi}_2 &= k_{\varphi 2}(\varphi_1 - \varphi_2) \,. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Výsledný matematický model je tvorený sústavou dvoch diferenciálnych rovníc v tomto tvare, ktorý zapíšeme do maticového tvaru

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\varphi}_1 + k_{\varphi 1}\varphi_1 + k_{\varphi 2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M \,, \\ I_2\ddot{\varphi}_2 - k_{\varphi 2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \,. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Potom matematický model pre rotačný systém s dvoma stupňami podľa Obr. 3.31 zapísaný v maticovom tvare nadobudne tvar

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\varphi 1} + k_{\varphi 2} & -k_{\varphi 2} \\ -k_{\varphi 2} & k_{\varphi 2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.83}$$

Aj pre tento systém aplikujeme **Laplaceovu transformáciu** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\boldsymbol{\dot{\varphi}_1(0) = \varphi_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = \varphi_2(0) = 0}$ na sústavu diferenciálnych rovníc zapísaných v maticovom tvare a dostávame Laplaceovu transformáciu systému v tvare

$$\begin{bmatrix} I_1 s^2 + k_{\varphi 1} + k_{\varphi 2} & -k_{\varphi 2} \\ -k_{\varphi 2} & I_2 s^2 + k_{\varphi 2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[M(s)]. \tag{3.84}$$

V tomto prípade prenosová matica systému $\mathbf{G(s)}$ bude podobne definovaná dvoma prenosovými funkciami systému $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$, ktoré prislúchajú jednotlivým výstupom $\Phi_{\mathbf{1}}(\mathbf{s})$ a $\Phi_{\mathbf{2}}(\mathbf{s})$. Danú prenosovú maticu systému možno obdobným spôsobom nájsť riešením lineárneho systému s pravou stranou zapísaného vo všeobecnom tvare

$$A \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Phi_1(s)}{M(s)} \\ \frac{\Phi_2(s)}{M(s)} \end{bmatrix} = b \Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_1(s)}{M(s)} \\ \frac{\Phi_2(s)}{M(s)} \end{bmatrix} = A^{-1}b, \tag{3.85}$$

kde matica **A** predstavuje

$$A = \begin{bmatrix} I_1 s^2 + k_{\varphi 1} + k_{\varphi 2} & -k_{\varphi 2} \\ -k_{\varphi 2} & I_2 s^2 + k_{\varphi 2} \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

a vektor pravej strany **b** predstavuje,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.87}$$

Prenosová matica systému **G(s)** zapísaná vo všeobecnom tvare ako

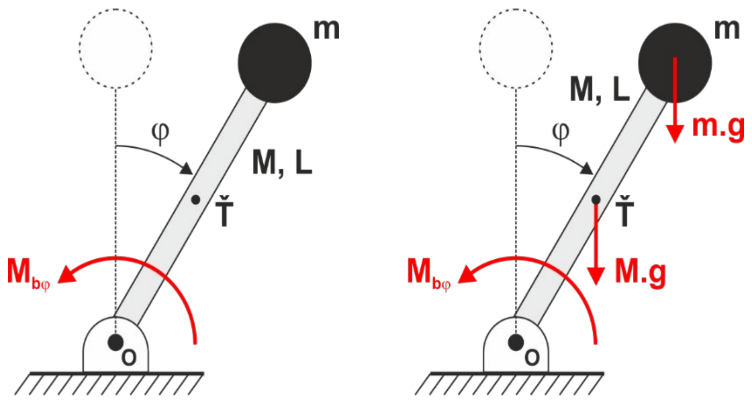
$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_1(s)}{M(s)} \\ \frac{\Phi_2(s)}{M(s)} \end{bmatrix}, \tag{3.88}$$

nadobúda riešením tvar dvoch prenosových funkcií zapísaných v tvare vektora **G(s)**

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{I_2 s^2 + k_{\varphi 2}}{I_1 I_2 s^4 + \left[(I_1 + I_2)k_{\varphi 2} + I_2 k_{\varphi 1}\right]s^2 + k_{\varphi 1}k_{\varphi 2}} \\ \dfrac{k_{\varphi 2}}{I_1 I_2 s^4 + \left[(I_1 + I_2)k_{\varphi 2} + I_2 k_{\varphi 1}\right]s^2 + k_{\varphi 1}k_{\varphi 2}} \end{bmatrix}. \quad (3.89)$$

Príklad č. 3.13. Inverzné kyvadlo

Inverzné kyvadlo, ktorého hmotný bod **m** je pripojený k štíhlej tyčke hmotnosti **M** a dĺžky **L** , je zobrazené na Obr. 3.34. Hmota tyčky kyvadla je sústredená v ťažisku **Ť**. Inverzné kyvadlo rotuje okolo bodu **O**. Pri pohybe uvažujeme trenie v podobe viskózneho tlmiča s koeficientom **B**.



Obr. 3.34. Inverzné kyvadlo

Systém pozostáva z guličky hmotnosti **m** a štíhlej tyčky hmotnosti **M**. Celkový moment zotrvačnosti k bodu rotácie **O** je

$$I_O = I_{O\_m} + I_{O\_M} , \quad (3.90)$$

kde $\mathbf{I_{O\_m}}$ je moment zotrvačnosti guľôčky s hmotnosťou **m** rotujúcej na ramene s dĺžkou **L**

$$I_{O\_m} = mL^2. \quad (3.91)$$

$\mathbf{I_{O\_M}}$ je moment zotrvačnosti tyčky k bodu rotácie **O** vypočítaný na základe **Steinerovej vety**

$$I_{O\_M} = I_{M\check{T}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 . \quad (3.92)$$

Napokon celkový moment zotrvačnosti $\mathbf{I_O}$ možno vypočítať ako

$$\mathrm{I_O} = \mathrm{I_{O\_m}} + \mathrm{I_{O\_M}} = \mathrm{mL^2} + \frac{1}{3}\mathrm{ML^2} = \left(\mathrm{m} + \frac{\mathrm{M}}{3}\right)\mathrm{L^2}. \tag{3.93}$$

Napíšme teraz matematický model **rotačného systému inverzného kyvadla**, ktorý možno opísať jednou pohybovou rovnicou

$$\mathrm{I_O}\ddot{\varphi} = \mathrm{mgL}\sin\varphi + \mathrm{Mg}\frac{\mathrm{L}}{2}\sin\varphi - \mathrm{B}\dot{\varphi}\,. \tag{3.94}$$

Dosadením do predchádzajúcej diferenciálnej rovnice za vypočítaný moment zotrvačnosti $\mathbf{I_O}$ celej sústavy k osi rotácie **O** dostávame

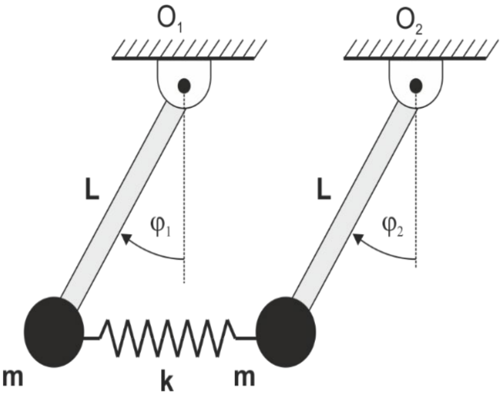
$$\left(\mathrm{m} + \frac{\mathrm{M}}{3}\right)\mathrm{L^2}\ddot{\varphi} + \mathrm{B}\dot{\varphi} - \left(\mathrm{m} + \frac{\mathrm{M}}{2}\right)\mathrm{Lg}\sin\varphi = 0\,. \tag{3.95}$$

Túto výslednú diferenciálnu rovnicu v nelineárnom tvare možno linearizovať. Pre veľmi malé uhly $\boldsymbol{\varphi < 5}$° platí, že $\boldsymbol{\sin\varphi = \varphi}$. Linearizáciou predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\left(\mathrm{m} + \frac{\mathrm{M}}{3}\right)\mathrm{L^2}\ddot{\varphi} + \mathrm{B}\dot{\varphi} - \left(\mathrm{m} + \frac{\mathrm{M}}{2}\right)\mathrm{Lg}\varphi = 0\,. \tag{3.96}$$

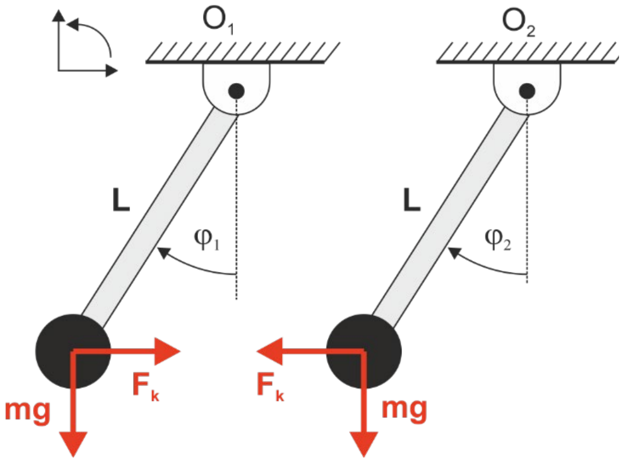
Príklad č. 3.14:

Kmitajúci systém **dvoch spojených** (spriahnutých) **kyvadiel** s dvoma stupňami voľnosti je znázornený na Obr. 3.35. Kyvadlá sú spojené translačnou pružinou s tuhosťou **k**. Každé kyvadielko pozostáva z hmoty **m** sústredenej v ťažisku a bezhmotnej tyčky dĺžky **L** (hmotnosť tyčiek nie je v tomto prípade významná). Nakreslite obrazec uvoľnenia a odvoďte matematický model takéhoto kmitajúceho systému.



Obr. 3.35. Systém dvoch kyvadiel spojených pružinou

Pre vybrané natočenia systému $\boldsymbol{\varphi_1}$ a $\boldsymbol{\varphi_2}$ budeme uvažovať, že $\boldsymbol{\varphi_1 > \varphi_2 > 0}$. Obrazec uvoľnenia je znázornený na nasledujúcom Obr. 3.36.



Obr. 3.36. Uvoľnený systém dvoch kyvadiel

Pre kmitajúci **systém dvoch kyvadiel** na základe obrazca uvoľnenia možno napísať túto sústavu diferenciálnych rovníc. Každá rovnica prislúcha jednému kyvadielku

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi}_1 &= mL^2\ddot{\varphi}_1 = -mgL\sin\varphi_1 - F_kL\cos\varphi_1 \,, \\ I\ddot{\varphi}_2 &= mL^2\ddot{\varphi}_2 = -mgL\sin\varphi_2 + F_kL\cos\varphi_2 \,. \end{aligned} \qquad (3.97)$$

V predchádzajúcich rovniciach sa momentálne nachádza jedna neznáma veličina, ktorou je sila $\mathbf{F_k}$. Táto predstavuje silu v pružine umiestnenú medzi dvoma pohybujúcimi sa bodmi. Pre túto silu spriahnutých kyvadiel musí platiť tento vzťah

$$F_k = k(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)L \,. \qquad (3.98)$$

Dosadením do sústavy diferenciálnych rovníc za $\mathbf{F_k}$, dostávame

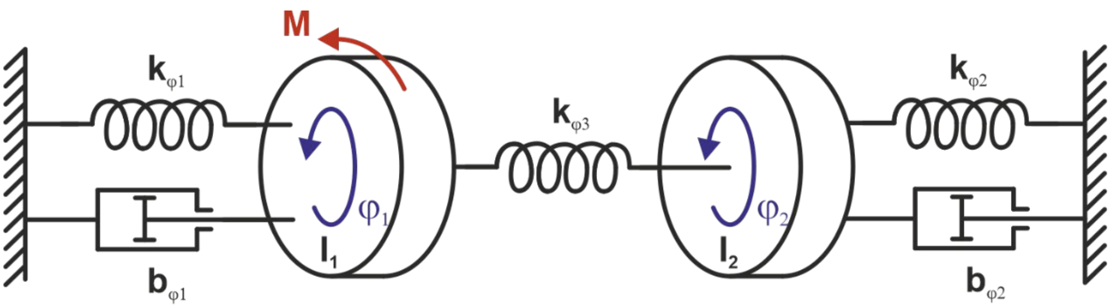
$$\begin{aligned} mL^2\ddot{\varphi}_1 &= -mgL\sin\varphi_1 - kL^2\cos\varphi_1\,(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \,, \\ mL^2\ddot{\varphi}_2 &= -mgL\sin\varphi_2 + kL^2\cos\varphi_1\,(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \,. \end{aligned} \qquad (3.99)$$

Podobne ako pre predchádzajúcom príklade možno túto sústavu diferenciálnych rovníc linearizovať s uvažovaním, že pre malé uhly $\boldsymbol{\varphi < 5°}$ platí $\boldsymbol{\sin\varphi \approx \varphi}$, $\boldsymbol{\cos\varphi \approx 1}$

$$\begin{aligned} mL^2\ddot{\varphi}_1 + mgL\varphi_1 + kL^2(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \,, \\ mL^2\ddot{\varphi}_2 + mgL\varphi_2 - kL^2(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \,. \end{aligned} \qquad (3.100)$$

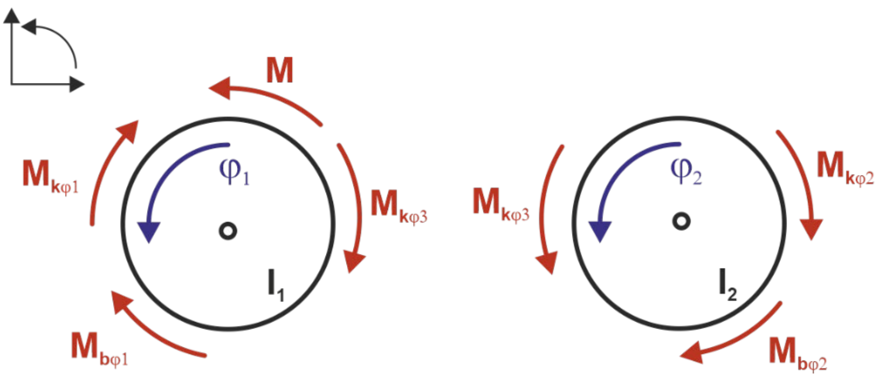
Príklad č. 3.15:

Torzný systém dvoch diskov s momentami zotrvačnosti $\mathbf{I_1}$ a $\mathbf{I_2}$ znázornený na Obr. 3.37 je zaťažený krútiacim momentom **M**. Ak predpokladáme, že všetky tuhostné a tlmiace charakteristiky tohto systému sú známe nájdite matematický model takéhoto systému.



Obr. 3.37. Rotačný mechanický systém s dvoma stupňami voľnosti

Torzný systém diskov uvoľníme opäť v rovine tak, že pre každý disk zvlášť nakreslíme obrazec uvoľnenia so zakreslením vonkajších a vnútorných momentov od pružín a tlmičov. Obrazce uvoľnenia pre disky $\mathbf{I_1}$ a $\mathbf{I_2}$ sú znázornené na Obr. 3.38.



Obr. 3.38. Uvoľnené telesá rotujúcich diskov

Ak uvažujeme, že pre rotačné posunutia platí $\boldsymbol{\varphi_1} > \boldsymbol{\varphi_2} > \mathbf{0}$, potom musia platiť tieto zložkové rovnice pre momenty od torzných pružín a tlmičov

$$
\begin{aligned}
M_{k\varphi1} &= k_{\varphi1}(\varphi_1 - 0) = k_{\varphi1}\varphi_1 \,, \\
M_{b\varphi1} &= b_{\varphi1}(\dot{\varphi}_1 - 0) = b_{\varphi1}\dot{\varphi}_1 \,, \\
M_{k\varphi3} &= k_{\varphi3}(\varphi_1 - \varphi_2) \,, \\
M_{k\varphi2} &= k_{\varphi2}(\varphi_2 - 0) = k_{\varphi2}\varphi_2 \,, \\
M_{b\varphi2} &= b_{\varphi2}(\dot{\varphi}_2 - 0) = b_{\varphi2}\dot{\varphi}_2 \,.
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

V ďalšom pristúpime k napísaniu diferenciálnych rovníc zvlášť pre každú hmotu na základe **II. Newtonovho** zákona pohybu,

pre hmotu $\mathbf{I_1}$ platí

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\varphi}_1 &= M - M_{k1\varphi} - M_{b1\varphi} - M_{k3\varphi}\,, \\ I_1\ddot{\varphi}_1 &= M - k_{\varphi 1}\varphi_1 - b_{\varphi 1}\dot{\varphi}_1 - k_{\varphi 3}(\varphi_1 - \varphi_2)\,, \\ I_1\ddot{\varphi}_1 + k_{\varphi 1}\varphi_1 + b_{\varphi 1}\dot{\varphi}_1 + k_{\varphi 3}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M \end{aligned} \qquad (3.102)$$

a **pre hmotu $\mathbf{I_2}$** platí

$$\begin{aligned} I_2\ddot{\varphi}_2 &= M_{k3\varphi} - M_{k2\varphi} - M_{b2\varphi}\,, \\ I_2\ddot{\varphi}_2 &= k_{\varphi 3}(\varphi_1 - \varphi_2) - k_{\varphi 2}\varphi_2 - b_{\varphi 2}\dot{\varphi}_2\,, \\ I_2\ddot{\varphi}_2 + k_{\varphi 2}\varphi_2 + b_{\varphi 2}\dot{\varphi}_2 - k_{\varphi 3}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0\,. \end{aligned} \qquad (3.103)$$

Po predchádzajúcich matematických úpravách možno dospieť k výslednej sústave diferenciálnych rovníc, ktoré tvoria matematický model pre daný torzný systém podľa Obr. 3.37

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\varphi}_1 + b_{\varphi 1}\dot{\varphi}_1 + k_{\varphi 1}\varphi_1 + k_{\varphi 3}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M\,, \\ I_2\ddot{\varphi}_2 + b_{\varphi 2}\dot{\varphi}_2 + k_{\varphi 2}\varphi_2 - k_{\varphi 3}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0\,. \end{aligned} \qquad (3.104)$$

Výsledný systém dvoch diferenciálnych rovníc možno upraviť a zapísať do tohoto systému v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{\varphi 1} & 0 \\ 0 & b_{\varphi 2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\varphi 1} + k_{\varphi 3} & -k_{\varphi 3} \\ -k_{\varphi 3} & k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.105)$$

Ak pre tento systém v maticovom tvare aplikujeme **Laplaceovu transformáciu** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_\mathbf{1}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{1}(\mathbf{0}) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}_\mathbf{2}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{2}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a dostávame Laplaceovu transformáciu systému

$$\begin{bmatrix} I_1 s^2 + b_{\varphi 1}s + k_{\varphi 1} + k_{\varphi 3} & -k_{\varphi 3} \\ -k_{\varphi 3} & I_2 s^2 + b_{\varphi 2}s + k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[M(s)]\,. \qquad (3.106)$$

V tomto prípade prenosová matica systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ bude opäť definovaná dvoma prenosovými funkciami systému $\mathbf{G_1}(\mathbf{s})$ a $\mathbf{G_2}(\mathbf{s})$, ktoré prislúchajú jednotlivým výstupom $\Phi_\mathbf{1}(\mathbf{s})$ a $\Phi_\mathbf{2}(\mathbf{s})$. Vypočítanú prenosovú maticu systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ možno obdobným spôsobom nájsť riešením lineárneho systému s pravou stranou zapísaného vo všeobecnom tvare

$$A \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\Phi_1(s)}{M(s)} \\ \dfrac{\Phi_2(s)}{M(s)} \end{bmatrix} = b \Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\Phi_1(s)}{M(s)} \\ \dfrac{\Phi_2(s)}{M(s)} \end{bmatrix} = A^{-1}b, \tag{3.107}$$

kde matica **A** predstavuje

$$A = \begin{bmatrix} I_1 s^2 + b_{\varphi 1} s + k_{\varphi 1} + k_{\varphi 3} & -k_{\varphi 3} \\ -k_{\varphi 3} & I_2 s^2 + b_{\varphi 2} s + k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3} \end{bmatrix} \tag{3.108}$$

a vektor pravej strany **b** predstavuje

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.109}$$

Prenosová matica systému **G(s)**, ktorú možno vo všeobecnom tvare zapísať ako

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Phi_1(s)}{M(s)} \\ \dfrac{\Phi_2(s)}{M(s)} \end{bmatrix}, \tag{3.110}$$

potom nadobúda riešením lineárneho systému tento tvar

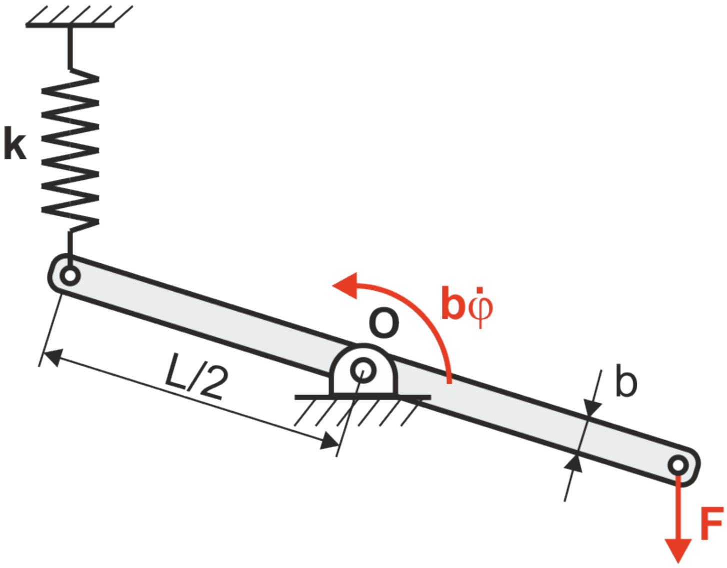
$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{I_2 s^2 + b_{\varphi 2} s + k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3}}{I_1 I_2 s^4 + (I_1 b_{\varphi 2} + I_2 b_{\varphi 1}) s^3 + [I_1 (k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3}) + I_2 (k_{\varphi 1} + k_{\varphi 3}) + b_{\varphi 1} b_{\varphi 2}] s^2 + (b_{\varphi 1} + b_{\varphi 2})(k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3}) s + k_{\varphi 1}(k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3}) + k_{\varphi 2} k_{\varphi 3}} \\ \dfrac{k_{\varphi 3}}{I_1 I_2 s^4 + (I_1 b_{\varphi 2} + I_2 b_{\varphi 1}) s^3 + [I_1 (k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3}) + I_2 (k_{\varphi 1} + k_{\varphi 3}) + b_{\varphi 1} b_{\varphi 2}] s^2 + (b_{\varphi 1} + b_{\varphi 2})(k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3}) s + k_{\varphi 1}(k_{\varphi 2} + k_{\varphi 3}) + k_{\varphi 2} k_{\varphi 3}} \end{bmatrix}. \tag{3.111}$$

Príklad č. 3.16:

Mechanický kmitajúci **pákový systém** je zobrazený na nasledujúcom Obr. 3.39. Tento pákový systém tvorí páka dĺžky **L** a šírky **b**, ktorá je pripojená k pružine s tuhosťou **k** fixovanej k základovému rámu.

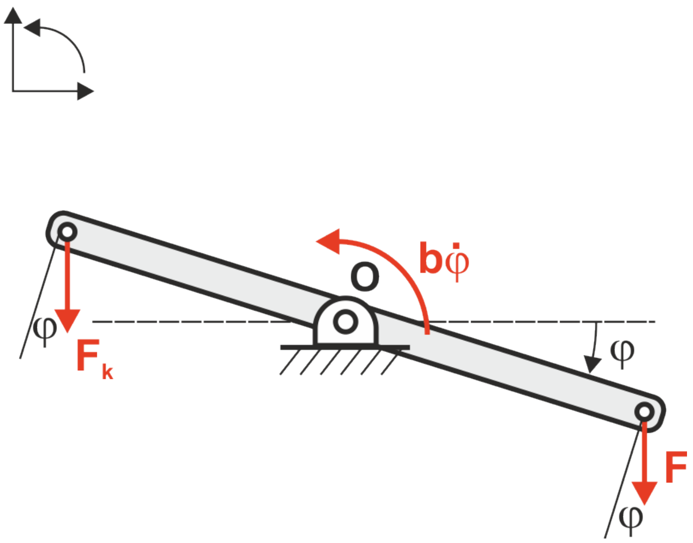
Páku tohto čisto rotačného systému prakticky možno považovať za dokonale tuhé teleso so zanedbateľnou hrúbkou. Ako možno vidieť na Obr. 3.39, tak páka rotuje okolo bodu rotácie **O**, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti **L/2** jej celkovej dĺžky. Pákový systém je zaťažený na pravej strane silou **F**.

Ak pri pohybe páky uvažujeme dynamický odpor v podobe tlmiča pôsobiaceho v bode rotácie **O,** odvoďte matematický model takéhoto systému.



Obr. 3.39. Pákový systém

Pákový systém uvoľníme nahradením pružiny za komponentný silový účinok $\mathbf{F_k}$ a navyše v mieste rotácie **O** budeme uvažovať moment od tlmiča $\mathbf{b\dot{\varphi}}$, ktorý vytvára odpor proti pohybu páky ako je znázornené na obrazci uvoľnenia Obr. 3.40.



Obr. 3.40. Uvoľnenie systému páky

Posunutia jednotlivých bodov páky sú závislé od natočenia danej páky okolo bodu rotácie **O**. To znamená, že posunutia na oboch koncoch stranách páky budú rovnaké. V prípade, že uvažujeme relatívne malé uhlové natočenia pre $\boldsymbol{\varphi} < \mathbf{5°}$, potom platí, že $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi} \approx \boldsymbol{\varphi}$. Linearizáciou nelineárneho posunutia ľavého bodu páky **x** v smere osi **x** musí platiť, že

$$x = \frac{L}{2}\sin\varphi \approx \frac{L}{2}\varphi\,. \tag{3.112}$$

Pre komponentnú rovnicu opisujúcu veľkosť sily $\mathbf{F_k}$ v pružine platí táto závislosť od uhlu natočenia $\boldsymbol{\varphi}$

$$F_k = k \cdot x = k\frac{L}{2}\sin\varphi \approx k\frac{L}{2}\varphi\,. \tag{3.113}$$

Aby bolo možné napísať výslednú diferenciálnu rovnicu pohybu, je nutné vypočítať moment zotrvačnosti páky $\mathbf{I_O}$ k bodu rotácie **O**. Keďže páku uvažujeme ako tuhé teleso so zanedbateľnou hrúbkou potom musí platiť, že

$$I_O = \frac{1}{12}m(L^2 + b^2)\,. \tag{3.114}$$

V tomto štádiu môžeme pristúpiť k tvorbe **matematického modelu** pre daný rotačný systém **pákového mechanizmu**, ktorý rotuje okolo bodu **O**. Pohyb páky možno opísať jednou diferenciálnou rovnicou, nakoľko ide o čisto rotačný pohyb telesa. Platí teda, že

$$\begin{gathered} I_O\ddot{\varphi} = F\cos\varphi\frac{L}{2} - F_k\cos\varphi\frac{L}{2} - b\dot{\varphi}\,,\\ \left[\frac{1}{12}m(L^2+b^2)\right]\ddot{\varphi} = F\cos\varphi\frac{L}{2} - k\frac{L^2}{4}\sin\varphi\cos\varphi - b\dot{\varphi}\,,\\ \left[\frac{1}{12}m(L^2+b^2)\right]\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\frac{L^2}{4}\sin\varphi\cos\varphi = F\cos\varphi\frac{L}{2}\,. \end{gathered} \tag{3.115}$$

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch sme dospeli k jednej nelineárnej diferenciálnej rovnici. Na zjednodušenie riešenia pristúpime k linearizácii tejto diferenciálnej rovnice s uvažovaním kmitania pre malé uhlové natočenia $\boldsymbol{\varphi < 5°}$. Linearizáciou dostávame výslednú rovnicu pohybu v tomto tvare

$$\left[\frac{1}{12}m(L^2+b^2)\right]\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\frac{L^2}{4}\varphi = F\frac{L}{2}\,. \tag{3.116}$$

Aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\boldsymbol{\dot{\varphi}(0) = \varphi(0) = 0}$ pre danú diferenciálnu rovnicu tohto rotačného systému bude platiť

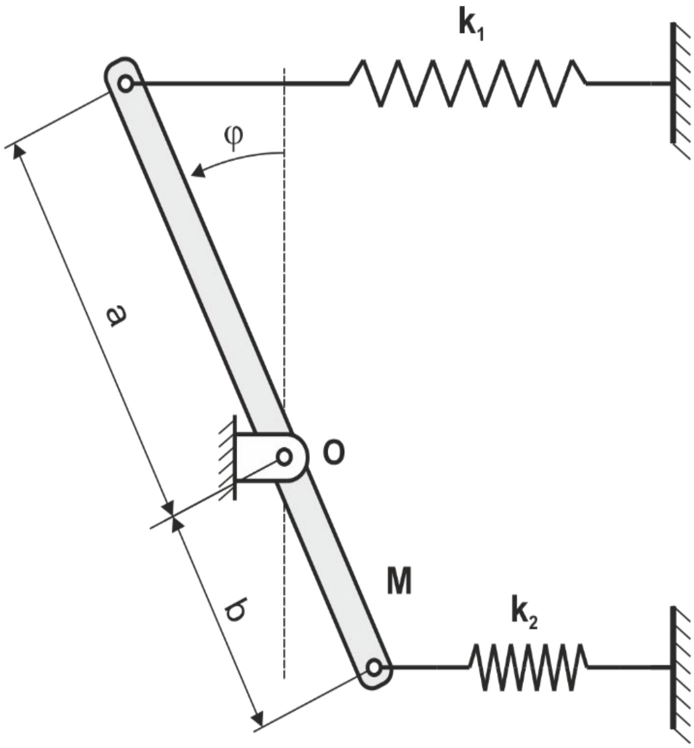
$$\left[\frac{1}{12}m(L^2+b^2)\right]s^2\Phi(s) + b\cdot s\Phi(s) + k\frac{L^2}{4}\Phi(s) = F(s)\frac{L}{2} \tag{3.117}$$

a teda prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ tohto systému mechanického modelu bude mať tvar

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)} = \frac{\frac{L}{2}}{\left[\frac{1}{12}m(L^2 + b^2)\right]s^2 + bs + k\frac{L^2}{4}} \,. \qquad (3.118)$$

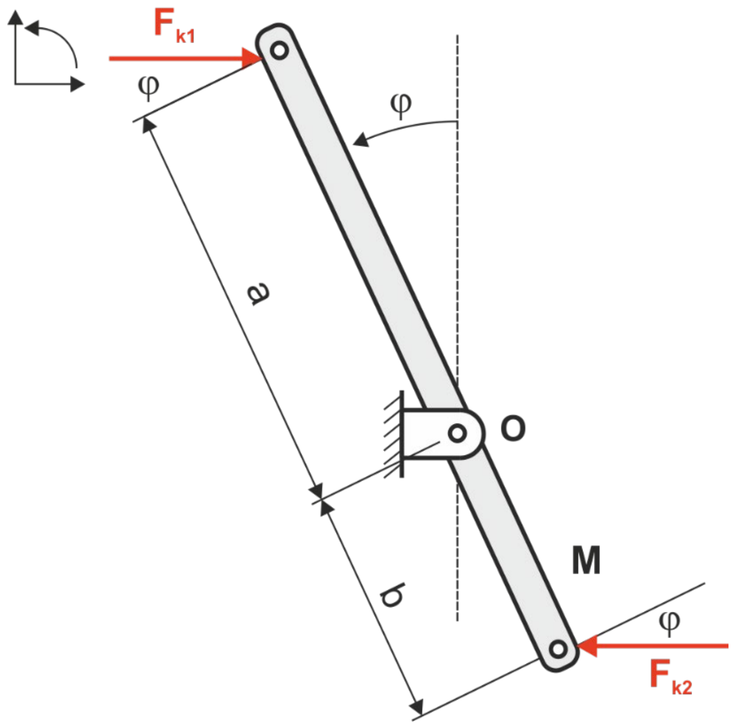
Príklad č. 3.17:

Pákový systém zobrazený na nasledujúcom Obr. 3.41 pozostáva z páky známej hmotnosti **M** štíhleho prierezu s ramenami **a**, **b**. Páka rotuje okolo bodu **O**, v ktorom je pripevnená k základu. Ako možno vidieť na Obr. 3.41, tak páka je ďalej pripevnená k základu z druhej strany prostredníctvom dvoch pružín so známymi tuhosťami $\mathbf{k_1}$ a $\mathbf{k_2}$. Odvoďte matematický model takéhoto kmitajúceho systému páky so zanedbaním trenia.



Obr. 3.41. Pákový systém

Pred napísaním matematického modelu pristúpime k uvoľneniu pákového systému a to zámenou pružinových prvkov za vnútorné účinky $\mathbf{F_{k1}}$ a $\mathbf{F_{k2}}$ ako je znázornené na nasledujúcom Obr. 3.42.



Obr. 3.42. Uvoľnenie systému páky

Posunutia jednotlivých bodov páky sú závislé od natočenia danej páky vzhľadom na bod rotácie **O**. V tomto prípade posunutie na oboch koncoch nebude rovnaké, nakoľko máme **asymetrický pákový mechanizmus**. V prípade, že pre natočenie páky uvažujeme uhlové natočenie **φ**, potom pre deformácie pružín musia platiť tieto závislosti

$$x_1 = a \sin \varphi \approx a\varphi ,$$
$$x_2 = b \sin \varphi \approx b\varphi . \tag{3.119}$$

Na základe deformácií pružín možno v tomto štádiu napísať zložkové rovnice pre sily $\mathbf{F_{k1}}$ a $\mathbf{F_{k2}}$, ktoré vzniknú v jednotlivých pružinách. Podľa Obr. 3.41 uvažujeme dve fixované pružiny k základu, pre ktoré musí platiť

$$F_{k1} = k_1 x_1 = k_1 a \sin \varphi \approx k_1 a\varphi ,$$
$$F_{k2} = k_2 x_2 = k_2 b \sin \varphi \approx k_2 b\varphi . \tag{3.120}$$

Predtým, než napíšeme pohybovú rovnicu je nutné ešte vypočítať moment zotrvačnosti páky k bodu rotácie **O**. V tomto prípade budeme uvažovať, že páka je **štíhly prút** s hmotnosťou **M**. Keďže sa páka otáča okolo posunutej osi k osi rotácie, ktorá nie je totožná s ťažisko je nutné využiť Steinerovú vetu, a teda pre výsledný moment zotrvačnosti k osi rotácie prechádzajúcej bodom **O** platí, že

$$I_O = I_{\check{T}} + M\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M(a+b)^2 + \frac{M}{4}(a-b)^2 = \frac{M}{3}(a^2 - ab + b^2)\,. \qquad (3.121)$$

Páka koná čisto rotačný pohyb, tzn. že jej pohyb bude definovaný jednou pohybovou rovnicou opisujúcou rotačný pohyb. Aplikáciou **II. Newtonovho zákona** pre rotačný pohyb musí pre páku rotujúcu okolo osi rotácie prechádzajúcej bodom **O** platiť diferenciálna rovnica

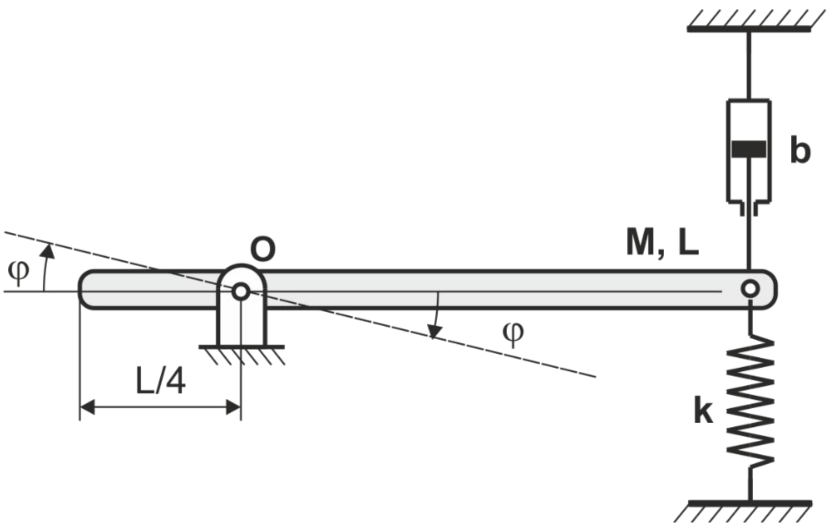
$$\begin{gathered} I_O\ddot{\varphi} = -F_{k1}\cos\varphi\, a - F_{k2}\cos\varphi\, b\,, \\ \left[\frac{M}{3}(a^2 - ab + b^2)\right]\ddot{\varphi} = -k_1a^2\sin\varphi\cos\varphi - k_2b^2\sin\varphi\cos\varphi\,, \\ \left[\frac{M}{3}(a^2 - ab + b^2)\right]\ddot{\varphi} + (k_1a^2 + k_2b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0\,. \end{gathered} \qquad (3.122)$$

V prípade veľmi malých uhlov natočenia možno daný model opäť linearizovať a dospieť tak k výslednej lineárnej diferenciálnej rovnici, ak $\sin\boldsymbol{\varphi} \approx \boldsymbol{\varphi}$, $\cos\boldsymbol{\varphi} \approx \mathbf{1}$, potom

$$\left[\frac{M}{3}(a^2 - ab + b^2)\right]\ddot{\varphi} + (k_1a^2 + k_2b^2)\varphi = 0\,. \qquad (3.123)$$

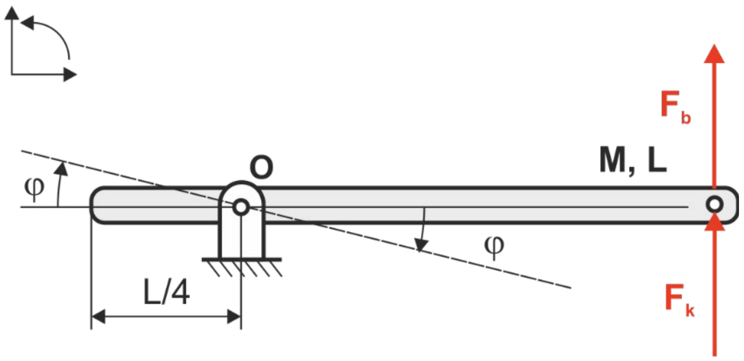
Príklad č. 3.18:

Pákový systém zobrazený na Obr. 3.43 pozostáva z páky hmotnosti **M** štíhleho profilu celkovej dĺžky **L** so zanedbateľnou hrúbkou. Páka je pripevnená vo vzdialenosti **L/4** svojej celkovej dĺžky k základu v bode **O**, ktorý je bodom jej rotácie a ďalej pripevnená na ľavej strane k základu prostredníctvom pružiny s tuhosťou **k** a tlmiča s tlmením **b**. Odvoďte matematický model takéhoto pákového systému so zanedbaním trenia.



Obr. 3.43. Pákový systém – páka, pružina a tlmič

Daný pákový systém uvoľníme zámenou pružiny a tlmiča za vnútorné silové účinky $\mathbf{F_k}$ a $\mathbf{F_b}$ ako je znázornené na obrazci uvoľnenia, pozri Obr. 3.44.



Obr. 3.44. Uvoľnenie systému páky

Ako v predchádzajúcich príkladoch, tak aj v tomto prípade sú posunutia jednotlivých koncových bodov páky závislé od natočenia danej páky vzhľadom na os rotácie **O**. V tomto prípade pákového systému však posunutia na oboch koncoch nebudú rovnaké, nakoľko v tomto prípade máme opäť **asymetrický pákový mechanizmus** (páka je excentricky upevnená v bode **O**).

Pre deformáciu **pružiny** a **tlmiča** možno napísať dve nelineárne rovnice. Rovnica, ktorá platí pre tlmič je časovou deriváciou deformácie pružiny. Pre veľmi malé uhlové natočenia $\boldsymbol{\varphi < 5°}$, kde $\mathbf{sin\,\varphi \approx \varphi, cos\,\varphi \approx 1}$ možno daný systém linearizovať

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{4} L \sin\varphi \approx \frac{3}{4} L\varphi\,, \\ \dot{x} &= \frac{3}{4} L\dot{\varphi} \cos\varphi \approx \frac{3}{4} L\dot{\varphi}\,. \end{aligned} \qquad (3.124)$$

Na základe predchádzajúcich rovníc možno v tomto štádiu zadefinovať zložkové rovnice pre silu v pružine $\mathbf{F_k}$ a silu v tlmiči $\mathbf{F_b}$, ktoré sú fixované k základu

$$\begin{aligned} F_k &= kx = \frac{3}{4} kL \sin\varphi \approx \frac{3}{4} kL \cdot \varphi\,, \\ F_b &= b\dot{x} = \frac{3}{4} bL\dot{\varphi} \cos\varphi \approx \frac{3}{4} bL\dot{\varphi}\,. \end{aligned} \qquad (3.125)$$

Predtým, než pristúpime k tvorbe matematického modelu vypočítajme ešte celkový moment zotrvačnosti páky $\mathbf{I_O}$ k bodu rotácie **O**. V tomto prípade uvažujeme, že páka predstavuje **štíhly prút** s celkovou hmotnosťou **M**. Keďže aj v tomto prípade sa páka otáča okolo posunutej osi rotácie (neprechádzajúcej ťažiskom), preto je nutné použiť **Steinerovú vetu**.

Potom pre moment zotrvačnosti k posunutej osi **O** platí, že

$$I_O = I_{\check{T}} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{16}ML^2 = \frac{7}{48}ML^2 \,. \qquad (3.126)$$

Pohyb páky je daný jednou diferenciálnou rovnicou rotačného pohybu okolo osi rotácie prechádzajúcej bodom **O**

$$\begin{aligned} I_O\ddot{\varphi} &= -F_k\cos\varphi\frac{3}{4}L - F_b\cos\varphi\frac{3}{4}L \,, \\ \frac{7}{48}ML^2\ddot{\varphi} &= -\frac{9}{16}kL^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{9}{16}bL^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi \,, \\ \frac{7}{48}ML^2\ddot{\varphi} &+ \frac{9}{16}kL^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{9}{16}bL^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi = 0 \,. \end{aligned} \qquad (3.127)$$

V prípade linearizácie predchádzajúcej rovnice pre veľmi malé uhly $\boldsymbol{\varphi < 5°}$, kde $\boldsymbol{\sin\varphi \approx \varphi}$, $\boldsymbol{\cos\varphi \approx 1}$ možno diferenciálnu rovnicu zjednodušiť na tvar

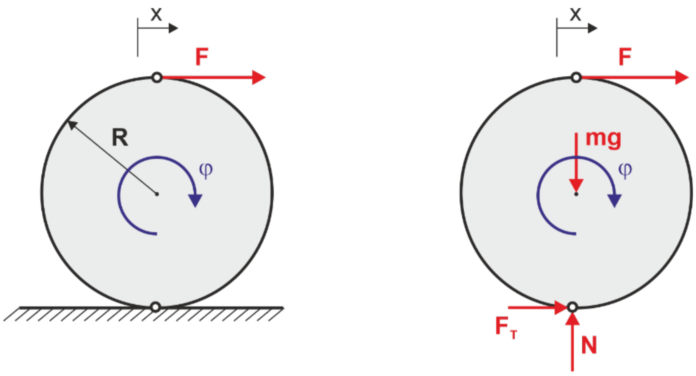
$$7ML^2\ddot{\varphi} + 27bL^2\dot{\varphi} + 27kL^2\varphi = 0 \,. \qquad (3.128)$$

3.10 VALIVÝ POHYB

Kolesá sú bežné vyskytujúce sa mechanické systémy, ktoré konajú všeobecný pohyb. Nasledujúci Obr. 3.45 znázorňuje disk valiaci sa v horizontálnej rovine. Ak neexistuje preklzávanie medzi diskom a podložkou, potom disk koná čisto **valivý pohyb**. Bod, v ktorom sa valec dotýka podložky je bodom rotácie, v ktorom sa obvodová rýchlosť **v** rovná nule.

Príklad č. 3.19:

Rotujúci valec zobrazený na Obr. 3.45 s polomerom **R** a hmotnosťou **m**, vykonáva valivý pohyb v horizontálnej rovine **bez preklzu**. V hornej časti pôsobí na tento valec pri jeho pohybe budiaca sila **F**. Odvoďte matematický model takého systému konajúceho všeobecný pohyb.



Obr. 3.45. Valivý pohyb valca

Moment zotrvačnosti valca k bodu rotácie $\mathbf{I_O}$ vypočítame použitím **Steinerovej vety**. Ak uvažujeme, že valec je disk s polomerom **R** a poznáme moment zotrvačnosti k jeho ťažisku $\mathbf{I_{Ť}}$, potom

$$I_O = I_{Ť} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \tag{3.129}$$

Rotáciu valca možno opísať jednou diferenciálnou rovnicou aj keď daný valec vo všeobecnosti koná v rovine **všeobecný pohyb**. V tomto prípade uvažujeme ako jednu nezávislú súradnicu natočenie **φ**, ktorou možno kompletne opísať celý pohyb

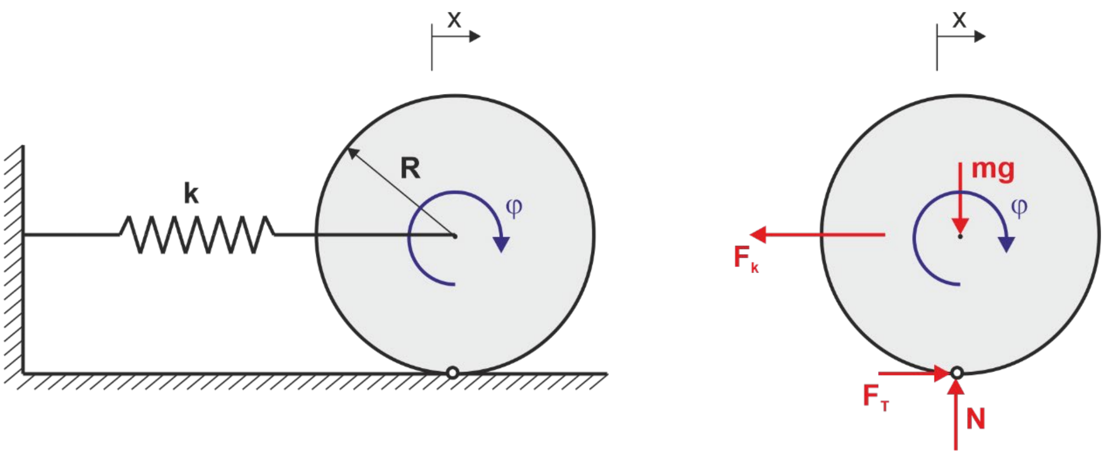
$$\begin{gathered} I_O \cdot \ddot{\varphi} = 2RF\,, \\ \frac{3}{2}mR^2 \cdot \ddot{\varphi} = 2RF\,, \\ \ddot{\varphi} = \frac{4F}{3mR}\,. \end{gathered} \tag{3.130}$$

Pohyb tohto valca v smere osi **x** je potom daný kinematickou väzbou rovnicou

$$x = R\varphi\,. \tag{3.131}$$

Príklad č. 3.20:

Valec s polomerom **R** a hmotnosťou **m**, ktorý fixovaný k základovému rámu prostredníctvom pružiny je zobrazený na Obr. 3.46. Valec koná v rovine valivý pohyb, v horizontálnym smere osi **x bez preklzu**. Ak je takýto kmitajúci valec fixovaný k základu pružinou známej s tuhosťou **k**, odvoďte matematický model takéhoto mechanického systému.



Obr. 3.46. Valivý pohyb valca s pružinou

Moment zotrvačnosti valca k bodu rotácie $\mathbf{I_O}$ možno podobným spôsobom vypočítať aplikovaním **Steinerovej vety** ako v predchádzajúcom príklade. Ak poznáme moment zotrvačnosti valca k ťažisku $\mathbf{I_{\check{T}}}$ a hmotnosť valca **m**, potom platí

$$I_O = I_{\check{T}} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \qquad (3.132)$$

Posunutie valca v smere osi **x** je definované kinematickou väzbou rovnicou, ktorá opisuje lineárny vzťah medzi pootočením **φ** a posunutím valca v smere os **x**

$$x = R\varphi\,. \qquad (3.133)$$

Pre silu v pružine, ktorou je valec fixovaný z pravej strany k základu musí platiť táto komponentná rovnica

$$F_k = kx = kR\varphi\,. \qquad (3.134)$$

Rotačný pohyb valca je teda možné opísať jednou diferenciálnou rovnicou aj v tom prípade, keď je zrejmé, že valec koná vo všeobecnosti v rovine **všeobecný pohyb** a teda

$$\begin{aligned} I_{IC}\ddot{\varphi} &= -F_k R\,, \\ \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} &= -kR^2\varphi\,, \\ \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} + kR^2\varphi &= 0\,. \end{aligned} \qquad (3.135)$$

3.11 ZMIEŠANÉ TRANSLAČNÉ A ROTAČNÉ MECHANICKÉ SYSTÉMY

V nasledujúcich kapitolách sa budeme zaoberať **zmiešanými mechanickými systémami**, ktoré pozostávajú z členov konajúcich súčasne pohyby **rotačné** aj **translačné**. Tieto typy systémov sú v praxi veľmi rozšírené a má preto význam sa im venovať.

Existencia kombinácie pohybu **translačného** a **rotačného** prípadne všeobecného pohybu, v tomto prípade povedie na zložitejšie matematické modely, ktoré budeme zapisovať z dôvodu väčšieho počtu diferenciálnych rovníc do **maticového tvaru**.

Systém, ktorý vzniká kombináciou telies konajúcich translačný a zároveň rotačný pohyb možno rozložiť na systémy konajúce čisto translačný alebo rotačný pohyb a aplikovať tak zvlášť **II. Newtonov zákon** pre translačný a rotačný pohyb, ktorý nakoniec superpozíciou vytvorí výsledný matematický model pre pohyb telesa.

Vo všeobecnosti v **zmiešaných systémoch** možno očakávať aj telesá konajúce **všeobecný pohyb**, ktorý možno rozložiť na translačný pohyb v smere jednotlivých osí **x**, **y** a rotáciu telesa kolmú na rovinu pohybu okolo osi **z**. Princíp tvorby matematického modelu pre zmiešané systémy si ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

3.12 SILOVÉ A MOMENTOVÉ ROVNICE VŠEOBECNÉHO POHYBU

Predpokladajme mechanický systém pozostávajúci z dokonale tuhého telesa, ktoré koná v rovine **všeobecný pohyb**. Všeobecný pohyb tohto telesa možno rozložiť na **translačný pohyb** v jednotlivých smeroch osí **x** a **y** a **rotačný pohyb** okolo osi **z** kolmej na rovinu pohybu **x-y**. Pri odvodzovaní platného matematického modelu pre dokonale tuhého teleso so známou hmotnosťou **m a momentom zotrvačnosti** $\mathbf{I_{\check{T}}}$, ktoré vykonáva v rovine **všeobecný pohyb** vychádzame z definície **II. Newtonov zákona**, ktorý aplikujeme zvlášť pre čisto **translačný pohyb** (v jednotlivých smeroch osí **x** a **y**)

$$\sum F_x = m \cdot a_{\check{T}x}, \quad \sum F_y = m \cdot a_{\check{T}y} \tag{3.136}$$

a samostatne pre **rotačný pohyb** v podobe momentovej rovnice v tejto forme

$$\sum M_{\check{T}} = I_{\check{T}} \cdot \alpha, \tag{3.137}$$

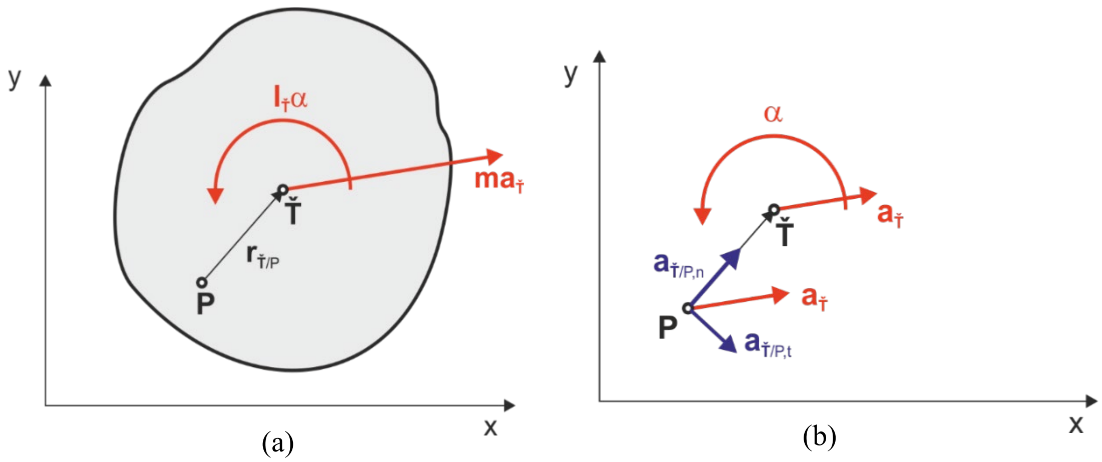
ktorú možno takisto zapísať v tomto tvare

$$\sum M_P = I_{\check{T}} \cdot \alpha + m \cdot r_{\check{T}/P} \times a_{\check{T}}\,. \tag{3.138}$$

Hoci predchádzajúca rovnica vyzerá byť odlišná od rovnice, ktorú sme definovali pre všeobecný pohyb v prípade rovinného pohybu $\sum \mathbf{M_P} = \mathbf{I_P}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{m}\mathbf{r}_{\check{T}/P} \times \mathbf{a_p}$, dá sa dokázať, že tieto dve rovnice sú úplne identické.

Obr. 3.47 (a) zobrazuje pohyb dokonale tuhého telesa v rovine. Aplikovaním rovnice pre všeobecný pohyb dostávame celkový moment k bodu **P** definovaný vzťahom

$$\sum M_P = I_P \cdot \alpha + m \cdot r_{\check{T}/P} \times a_p \,. \tag{3.139}$$



Obr. 3.47. (a) Tuhé teleso pri pohybe v rovine, (b) kinematika pohybu

Podľa **Steinerovej vety** vieme, že moment zotrvačnosti k posunutej osi rotácie prechádzajúcej bodom **P** možno vypočítať ako

$$I_P = I_{\check{T}} + m \cdot r_{\check{T}/P}^2 \,. \tag{3.140}$$

Ak prenásobíme túto rovnicu uhlovým zrýchlením $\boldsymbol{\alpha}$, potom platí

$$I_P\alpha = I_{\check{T}}\alpha + m \cdot r_{\check{T}/P}^2\alpha \,. \tag{3.141}$$

Predchádzajúci moment nadobúda smer uhlového zrýchlenia $\boldsymbol{\alpha}$ proti smeru hodinových ručičiek. Z kinematického obrazca tuhých telies podľa Obr. 3.47 (b) takisto vyplýva, že celkové zrýchlenie $\mathbf{a_P}$ bodu **P** je dané súčtom čiastkových zrýchlení pohybu telesa. Pre toto zrýchlenie $\mathbf{a_P}$ bude platiť vzťah

$$a_P = a_{\check{T}} + \left(a_{P/\check{T}}\right)_t + \left(a_{P/\check{T}}\right)_n, \tag{3.142}$$

kde $\mathbf{a}_{\check{T}}$ je zrýchlenie ťažiska, $\left(\mathbf{a}_{P/\check{T}}\right)_t$ je tangenciálna zložka zrýchlenia bodu **P**, ktorá je kolmá na polohový vektor $\mathbf{r}_{\check{T}/P}$ s veľkosťou $\left(\mathbf{a}_{P/\check{T}}\right)_t = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\check{T}/P}$ a $\left(\mathbf{a}_{P/\check{T}}\right)_n$ je normálová zložka zrýchlenia bodu **P** rovnobežná so smerom polohového vektora a teda $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{\check{T}/P} \times \left(\mathbf{a}_{\check{T}/P}\right)_n = \mathbf{0}$.

To znamená, že rovnicu všeobecného pohybu možno zapísať aj v nasledovnom tvare, ktorý dostaneme dosadením rovnice zrýchlenia za $\mathbf{a}_P$

$$\sum M_P = I_P \cdot \alpha + m \cdot r_{\check{T}/P} \times a_p = I_P\alpha + m \cdot r_{\check{T}/P} \times a_{\check{T}} + m \cdot r_{\check{T}/P} \times \left(a_{P/\check{T}}\right)_t + m \cdot r_{\check{T}/P} \times \left(a_{P/\check{T}}\right)_n , \tag{3.143}$$

kde hodnota vektorového súčinu $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{\check{T}/P} \times \left(\mathbf{a}_{P/\check{T}}\right)_t = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}^2_{\check{T}/P}\, \boldsymbol{\alpha}$ pôsobí teda v opačnom smere.

Avšak hodnota vektorového súčinu $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{\check{T}/P} \times \left(\mathbf{a}_{P/\check{T}}\right)_n = \mathbf{0}$ (z dôvodu, že normálové zrýchlenie $\left(\mathbf{a}_{P/\check{T}}\right)_n$ je rovnobežné so smerom polohového vektora $\mathbf{r}_{\check{T}/P}$), tzn. že rovnica nadobudne tvar

$$\sum M_P = I_P \cdot \alpha + m \cdot r_{\check{T}/P} \times a_{\check{T}} - m \cdot r^2_{\check{T}/P}\, \alpha . \tag{3.144}$$

Ak teraz dosadíme za moment zotrvačnosti $\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_{\check{T}} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}^2_{\check{T}/P}$, dokázali sme, že dostávame identickú rovnicu pre rovinný pohyb

$$\sum M_P = I_{\check{T}} \cdot \alpha + m \cdot r_{\check{T}/P} \times a_{\check{T}} . \tag{3.145}$$

Predpokladajme **zložitý systém**, ktorý pozostáva z viacerých hmôt, konajúcich v rovine **všeobecný pohyb**. V takomto prípade možno silové rovnice pre celý systém napísať v tvare

$$\sum F_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (a_{\check{T}i})_x, \quad \sum F_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (a_{\check{T}i})_y , \tag{3.146}$$

kde **n** je počet hmôt a $\mathbf{a}_{\check{T}i}$ zrýchlenie pohybu individuálnej **í-tej** hmoty.

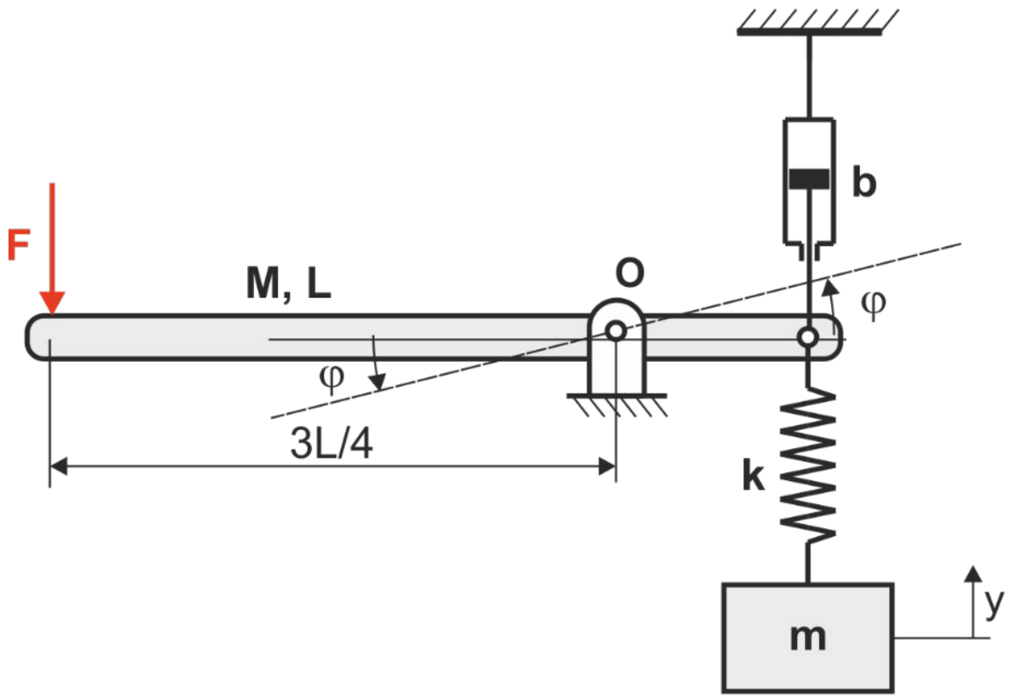
Podobne ako sa zmenili silové rovnice sa zmení aj momentová rovnica vzhľadom na bod **P** rotácie, ktorá nadobudne tvar

$$\sum M_P = \sum_{i=1}^{n} I_{\check{T}i} \cdot \alpha + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_{\check{T}i/P} \times a_{\check{T}i} . \tag{3.147}$$

Príklad č. 3.21. Pákový mechanizmus

Pákový systém zobrazený na nasledujúcom Obr. 3.48, pozostáva z páky celkovej hmotnosti **M** a dĺžky **L** (páku možno pokladať za **štíhly prút** so zanedbateľnou hrúbkou), ktorá je na ľavej strane zaťažená silou **F**. Sila pôsobí na ramene vo vzdialenosti **3/4L** od bodu rotácie **O** pákového mechanizmu, v ktorom je páka pripojená rotačným kĺbom k rámu.

Na pravej strane je páka fixovaná k rámu prostredníctvom tlmiča s konštantou tlmenia **b** a navyše v spodnej časti je k tejto páke prostredníctvom pružiny s tuhosťou **k** pripojená kmitajúca hmota **m**. Nájdite matematický model takéhoto systému.

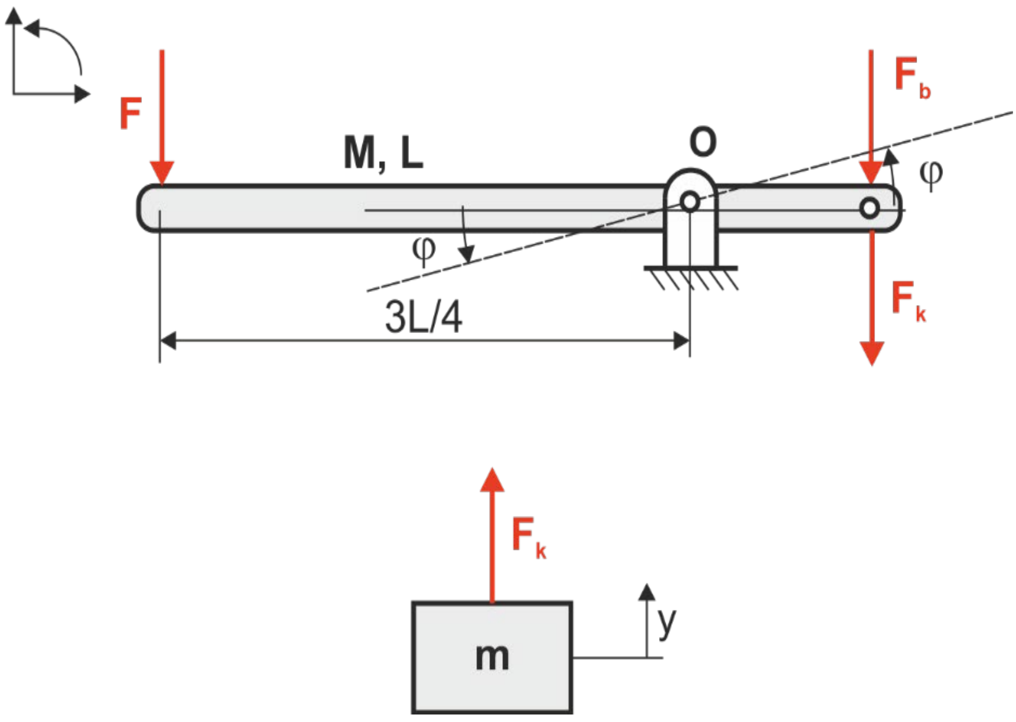


Obr. 3.48. Pákový systém – páka pružina, tlmič a hmota

Poznamenajme, že na nájdenie matematického modelu pre **zmiešané systémy** máme viac možností a metód, ktoré možno aplikovať (metóda uvoľňovania a metóda redukcie). V tomto prípade si ukážeme odvodenie matematického modelu **postupným uvoľnením všetkých telies systému** a ďalším napísaním matematických rovníc pre všetky uvoľnené telesá.

Pákový mechanizmus podľa Obr. 3.48 predstavuje sústavu dvoch kmitajúcich telies. Páka koná čisto rotačný pohyb, zatiaľ čo hmota kmitá translačným pohybom. Tieto telesá sú navzájom previazané.

Na nájdenie matematického modelu nakreslíme obrazce uvoľnenia zvlášť pre pákový systém a samostatne pre hmotu **m** s vyznačením vnútorných silových účinkov $\mathbf{F_b}$ a $\mathbf{F_k}$ ako je znázornené na nasledujúcom Obr. 3.49.



Obr. 3.49. Uvoľnenie telies – systému páky

Podobne ako v predchádzajúcich príkladoch **pákových mechanizmov**, tak aj v tomto prípade bude posunutie jednotlivých koncových bodov páky závislé od natočenia páky okolo bodu rotácie **O**.

Keďže ide opäť o asymetricky uložený **pákový mechanizmus**, tak posunutia na oboch koncoch páky nebudú opäť rovnaké a budú závisieť od uhlového natočenia $\boldsymbol{\varphi}$. Pre deformácie pružiny a tlmiča budú platiť nasledujúce nelineárne vzťahy, ktoré je však možné zjednodušiť linearizáciou. Ak uvažujeme pomerne malé uhlové natočenia $\boldsymbol{\varphi < 5°}$, kde $\boldsymbol{\sin\varphi \approx \varphi}$, $\boldsymbol{\cos\varphi \approx 1}$. Potom platí, že

$$\begin{aligned} \text{Ak} \quad y_b &= \frac{L}{4}\sin\varphi \Rightarrow \dot{y}_b = \frac{L}{4}\dot{\varphi}\cos\varphi \approx \frac{L}{4}\dot{\varphi}\,, \\ y_k &= \frac{L}{4}\sin\varphi - y \approx \frac{L}{4}\varphi - y\,. \end{aligned} \tag{3.148}$$

Využitím vypočítaných deformácií pre pružinu a rýchlosti pre tlmič možno zadefinovať zložkové rovnice silových účinkov $\mathbf{F_k}$ a $\mathbf{F_b}$ v pružine a tlmiči

$$\begin{aligned} F_k &= k \cdot y_k = k\left(\frac{L}{4}\sin\varphi - y\right) \approx k\left(\frac{L}{4}\varphi - y\right), \\ F_b &= b\dot{y}_b = \frac{L}{4}b\dot{\varphi}\cos\varphi \approx \frac{L}{4}b\dot{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3.149}$$

Predtým, než pristúpime k tvorbe samotného matematického modelu vypočítajme ešte celkový moment zotrvačnosti páky $\mathbf{I_O}$ k bodu rotácie páky **O**. V tomto prípade možno uvažovať páku ako štíhly prút s celkovou hmotnosť **M**. Páka sa otáča okolo posunutej osi, ktorá neprechádza ťažiskom, tzn. že podľa **Steinerovej vety** platí, že

$$I_O = I_{\check{T}} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{16}ML^2 = \frac{7}{48}ML^2. \tag{3.150}$$

Hmota **m** koná čisto translačný pohyb a teda aplikovaním **II. Newtonovho zákona** musí pre túto hmotu platiť táto diferenciálna rovnica

$$\begin{gathered} m\ddot{y} = F_k\,, \\ m\ddot{y} = k\left(\frac{L}{4}\sin\varphi - y\right), \\ m\ddot{y} + ky - k\frac{L}{4}\sin\varphi = 0\,. \end{gathered} \tag{3.151}$$

V prípade, že túto **nelineárnu diferenciálnu rovnicu** linearizujeme možno dospieť k výslednej rovnici opisujúcej kmitanie hmoty **m** v tvare

$$m\ddot{y} + ky - k\frac{L}{4}\varphi = 0\,. \tag{3.152}$$

Ďalej pristúpime k napísaniu matematického modelu pre **rotačný systém páky**. Páka koná čisto rotačný pohyb okolo osi rotácie prechádzajúcej bodom **O**, a teda

$$\begin{gathered} I_O\ddot{\varphi} = \frac{3}{4}LF\cos\varphi - F_k\cos\varphi\frac{L}{4} - F_b\cos\varphi\frac{L}{4}, \\ \frac{7}{48}ML^2\ddot{\varphi} = \frac{3}{4}LF\cos\varphi - k\frac{L}{4}\left(\frac{L}{4}\sin\varphi - y\right)\cos\varphi - \frac{L^2}{16}b\dot{\varphi}\cos^2\varphi\,, \\ \frac{7}{48}ML^2\ddot{\varphi} + k\frac{L}{4}\left(\frac{L}{4}\sin\varphi - y\right)\cos\varphi + \frac{L^2}{16}b\dot{\varphi}\cos^2\varphi = \frac{3}{4}LF\cos\varphi\,. \end{gathered} \tag{3.153}$$

V prípade veľmi malých uhlov natočenia možno daný model linearizovať a dospieť k tejto diferenciálnej rovnici, ak $\boldsymbol{\sin\varphi \approx \varphi}$, $\boldsymbol{\cos\varphi \approx 1}$, potom

$$\begin{gathered} \frac{7}{48}ML^2\ddot{\varphi} + k\frac{L^2}{16}\varphi - k\frac{L}{4}y + \frac{L^2}{16}b\dot{\varphi} = \frac{3}{4}LF\,, \\ 7ML^2\ddot{\varphi} + 3kL^2\varphi - 12kLy + 3bL^2\dot{\varphi} = 36FL\,. \end{gathered} \tag{3.154}$$

To znamená, že výsledný matematický model pre daný **dvoj hmotný systém páky** je daný sústavou dvoch diferenciálnych rovníc

$$\begin{gathered} m\ddot{y} + ky - k\frac{L}{4}\varphi = 0\,, \\ 7ML^2\ddot{\varphi} + 3bL^2\dot{\varphi} + 3kL^2\varphi - 12kLy = 36FL\,. \end{gathered} \tag{3.155}$$

Matematický model opisujúci kmitavý pohyb **pákového mechanizmu** podľa Obr. 3.48, prepíšeme do výsledného maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 7ML^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3bL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & k\frac{L}{4} \\ -12kL & 3kL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 36FL \end{bmatrix}. \tag{3.156}$$

Pre tento systém v maticovom tvare teraz aplikujeme **Laplaceovu transformáciu** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{\dot{y}(0) = \dot{\varphi}(0) = y(0) = \varphi(0) = 0}$

$$\begin{bmatrix} ms^2 + k & k\frac{L}{4} \\ -12kL & 7ML^2s^2 + 3bL^2s + 3kL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(s) \\ \Phi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 36L \end{bmatrix}[F(s)]\,. \tag{3.157}$$

V tomto prípade prenosová matica systému $\mathbf{G(s)}$ bude opäť definovaná dvoma prenosovými funkciami systému $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$, ktoré prislúchajú jednotlivým výstupom $\mathbf{y(s)}$ a $\mathbf{\Phi(s)}$. Prenosovú maticu systému možno obdobným spôsobom nájsť vyriešením lineárneho systému s pravou stranou zapísaného vo všeobecnom tvare

$$A \cdot \begin{bmatrix} \frac{y(s)}{F(s)} \\ \frac{\Phi(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = b \Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \frac{y(s)}{F(s)} \\ \frac{\Phi(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = A^{-1}b\,, \tag{3.158}$$

kde matica **A** predstavuje

$$A = \begin{bmatrix} ms^2 + k & k\frac{L}{4} \\ -12kL & 7ML^2s^2 + 3bL^2s + 3kL^2 \end{bmatrix} \tag{3.159}$$

a vektor pravej strany **b** predstavuje

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 36L \end{bmatrix}. \tag{3.160}$$

Prenosová matica systému **G(s)**, ktorú možno vo všeobecnom tvare zapísať ako

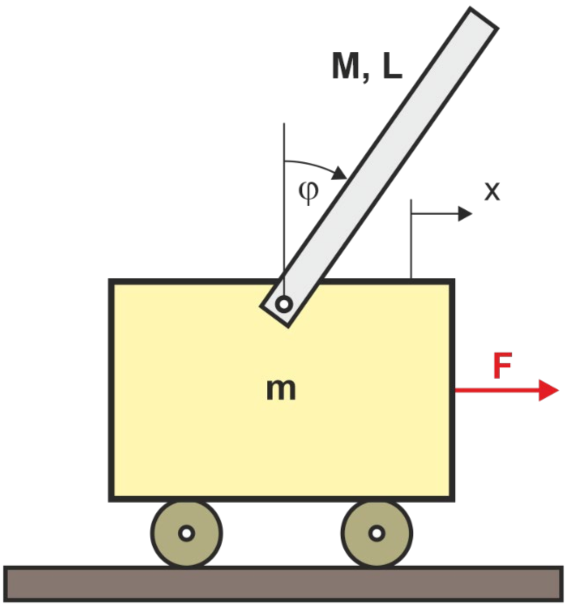
$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{y(s)}{F(s)} \\ \dfrac{\Phi(s)}{F(s)} \end{bmatrix}, \tag{3.161}$$

nadobúda riešením lineárneho systému nasledovný tvar

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{7M \cdot s^2 + 3b \cdot s + 3k}{7MLm \cdot s^4 + 3Lbm \cdot s^3 + [7LMk + 3Lkm] \cdot s^2 + 3Lbk \cdot s + 6Lk^2} \\ \dfrac{12k}{7MLm \cdot s^4 + 3Lbm \cdot s^3 + [7LMk + 3Lkm] \cdot s^2 + 3Lbk \cdot s + 6Lk^2} \end{bmatrix}. \tag{3.162}$$

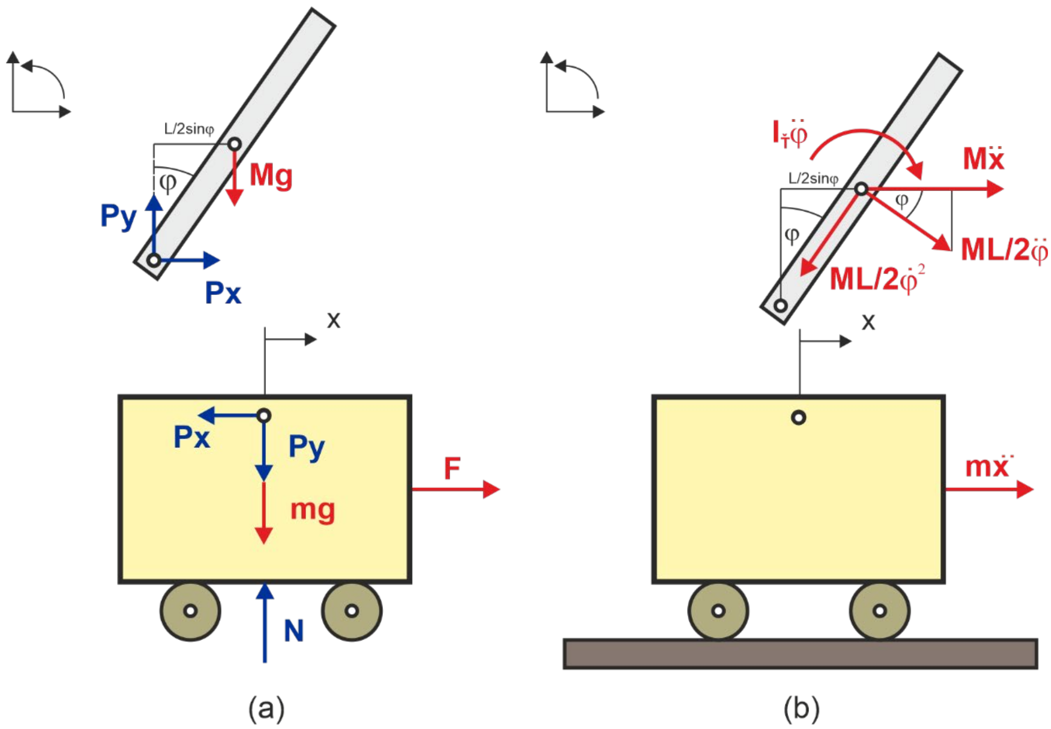
Príklad č. 3.22. Vozík s inverzným kyvadlom

Mechanický systém zobrazený na nasledujúcom Obr. 3.50, pozostáva z kyvadla hmotnosti **M** a dĺžky **L**, ktoré je pripojené k vozíku hmotnosti **m**, na ktorý pôsobí vonkajšia zaťažujúca sila **F**. Nájdite matematický model takéhoto systému.



Obr. 3.50. Vozík s inverzným kyvadlom

Systém kmitajúcich telies vozíka uvoľníme a nakreslíme obrazce uvoľnenia pre jednotlivé telesá zvlášť, tak ako možno vidieť na nasledujúcom Obr. 3.51 (a).



Obr. 3.51. (a) systém uvoľnených telies, (b) kinematický obrazec

Systém vozíka znázornený na Obr. 3.50 je mechanický systém pozostávajúci z dvoch hmôt. Pohyb **vozíka** je čisto **translačným pohybom**, na druhej strane **kyvadlo** koná všeobecný pohyb (**rotačný** a **translačný** pohyb súčasne).

Poznamenajme, že v ťažisku kyvadla pôsobia tri komponenty zrýchlení a to na jednej strane **celkové zrýchlenie ťažiska**, z dôvodu toho, že kyvadlo sa súčasne pohybuje s vozíkom so zrýchlením $\ddot{\mathbf{x}}$ a na druhej strane rotuje okolo bodu **P** s uhlovým zrýchlením $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$. To znamená, že naň pôsobí **tangenciálne** a **normálového** zrýchlenie, pozri kinematický obrazec Obr. 3.51 (b).

Relatívne uhlové zrýchlenie teda pozostáva z komponenty **tangenciálneho zrýchlenia** $\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2}}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha}$ a **normálového zrýchlenia** $\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2}}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}$, kde **R** je polomer zakrivenia dráhy.

Aplikovaním silovej rovnice na celý systém v smere osi **x** musí platiť

$$\sum F_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (a_{Ti})_x \,, \tag{3.163}$$

dosadením do danej rovnice možno dospieť k rovnici v tomto tvare

$$F = m\ddot{x} + M\ddot{x} - M\frac{L}{2}\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + M\frac{L}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi \,. \tag{3.164}$$

Sily v bode **P** sa navzájom zrušia vzájomným pôsobením vnútorných účinkov. Napíšme teraz momentovú rovnicu pre kyvadlo rotujúce okolo bodu **P**. Keďže máme len jedno rotujúce teleso okolo bodu **P**, potom možno použiť zjednodušený tvar momentovej rovnice pre jedno teleso

$$\sum \mathrm{M_P} = \mathrm{I_{\check{T}}} \cdot \alpha + \mathrm{m} \cdot \mathrm{r_{\check{T}/P}} \times \mathrm{a_{\check{T}}} \tag{3.165}$$

a po dosadení do tejto rovnice na základe obrázka Obr. 3.51 musí platiť, že

$$\mathrm{Mg} \cdot \frac{\mathrm{L}}{2} \sin\varphi = \frac{1}{12}\mathrm{ML}^2\ddot{\varphi} + \mathrm{M}\ddot{\mathrm{x}}\frac{\mathrm{L}}{2}\cos\varphi + \mathrm{M}\frac{\mathrm{L}}{2}\ddot{\varphi}\frac{\mathrm{L}}{2}. \tag{3.166}$$

Usporiadaním predchádzajúcej sústavy dvoch rovníc a aplikovaním matematických úprav dostávame túto sústavu diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} (\mathrm{m}+\mathrm{M})\ddot{\mathrm{x}} + \frac{1}{2}\mathrm{ML}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}\mathrm{M}\dot{\varphi}^2\sin\varphi &= \mathrm{F}\,, \\ \frac{1}{3}\mathrm{ML}^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\mathrm{M}\ddot{\mathrm{x}}\cos\varphi - \frac{1}{2}\mathrm{MgL}\sin\varphi &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.167}$$

V prípade veľmi malých uhlov natočenia možno daný model rovnako linearizovať a dospieť k zjednodušenej sústave dvoch diferenciálnych rovníc, kde $\boldsymbol{\sin\varphi \approx \varphi}$, $\boldsymbol{\cos\varphi \approx 1}$, $\boldsymbol{\dot{\varphi}^2\varphi \approx 0}$

$$\begin{aligned} (\mathrm{m}+\mathrm{M})\ddot{\mathrm{x}} + \frac{1}{2}\mathrm{ML}\ddot{\varphi} &= \mathrm{F}\,, \\ \frac{1}{3}\mathrm{ML}^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\mathrm{M}\ddot{\mathrm{x}} - \frac{1}{2}\mathrm{MgL}\varphi &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.168}$$

Predchádzajúcu sústavu dvoch diferenciálnych rovníc reprezentujúcich matematický model systému vozíka s inverzným kyvadlom podľa Obr. 3.50 možno zapísať do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathrm{m}+\mathrm{M} & \frac{1}{2}\mathrm{ML} \\ \frac{1}{2}\mathrm{M} & \frac{1}{3}\mathrm{ML}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathrm{x}} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\mathrm{MgL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.169}$$

Pre tento systém v maticovom tvare teraz aplikujeme **Laplaceovu transformáciu** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a dostávame Laplaceovu transformáciu tohoto systému

$$\begin{bmatrix} (m+M)s^2 & \frac{1}{2}MLs^2 \\ \frac{1}{2}Ms^2 & \frac{1}{3}ML^2s^2 - \frac{1}{2}MgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ \Phi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [F(s)]\,. \tag{3.170}$$

Prenosová matica systému $\mathbf{G(s)}$ bude definovaná dvoma prenosovými funkciami systému $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$, ktoré prislúchajú jednotlivým výstupom $\mathbf{y(s)}$ a $\mathbf{\Phi(s)}$. Danú prenosovú maticu systému $\mathbf{G(s)}$ možno obdobným spôsobom nájsť vyriešením lineárneho systému s pravou stranou zapísaného vo všeobecnom tvare

$$A \cdot \begin{bmatrix} \frac{X(s)}{F(s)} \\ \frac{\Phi(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = b \Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \frac{X(s)}{F(s)} \\ \frac{\Phi(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = A^{-1}b, \tag{3.171}$$

kde matica **A** predstavuje

$$A = \begin{bmatrix} (m+M)s^2 & \frac{1}{2}MLs^2 \\ \frac{1}{2}Ms^2 & \frac{1}{3}ML^2s^2 - \frac{1}{2}MgL \end{bmatrix} \tag{3.172}$$

a vektor pravej strany **b** predstavuje

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.173}$$

Prenosová matica systému **G(s)**, ktorú možno vo všeobecnom tvare zapísať ako

,

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x(s)}{F(s)} \\ \frac{\Phi(s)}{F(s)} \end{bmatrix}, \tag{3.174}$$

nadobúda riešením lineárneho systému nasledovný tvar

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{4L \cdot s^2 - 6g}{(4Lm - 3M + 4LM) \cdot s^4 - 6g[M+m] \cdot s^2} \\ \dfrac{12k}{(4L^2M + 4L^2m - 3LM) \cdot s^2 - 6gL[M+m]} \end{bmatrix}. \tag{3.175}$$

3.13 ENERGETICKÉ METÓDY

Už vieme, že diferenciálnu rovnicu pohybu možno pre mechanický systém získať **silovo-momentovým prístupom** na základe **II. Newtonovho zákona** pohybu. Alternatívnou cestou je získanie diferenciálnych rovníc analytickými metódami, ktoré sú založené na **energetických princípoch**. Pre systém **hmota-pružina** v prípade zanedbaného trenia a tlmenia princíp **zachovania mechanickej energie** hovorí, že

$$E_k + E_p = \text{konšt.} \tag{3.176}$$

alebo

$$\frac{d}{dt}\left(E_k + E_p\right) = 0\,, \tag{3.177}$$

kde $\mathbf{E_k}$ je kinetická energia a $\mathbf{E_p}$ potenciálna energia, ktorá zahŕňa potenciálnu energiu od **gravitačných síl** a potenciálnu energiu z dôvodu **pružnosti** celej sústavy. Pripomeňme, že vo všeobecnosti, ak tuhé teleso koná všeobecný pohyb, tak potom jeho kinetická energia $\mathbf{E_k}$ je daná súčtom kinetickej energie pre **translačný** a **rotačný** pohyb podľa vzťahu

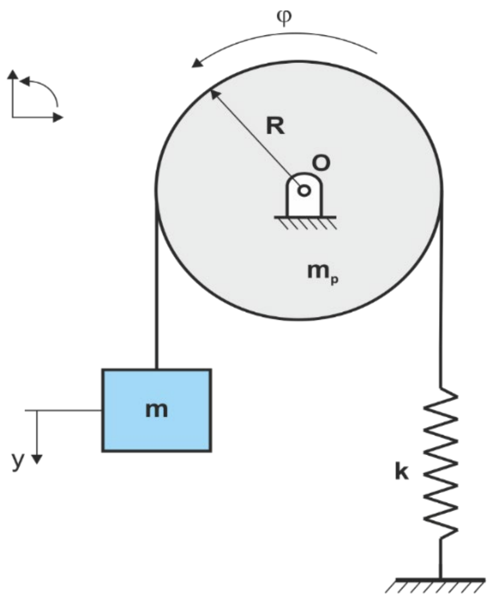
$$E_k = \frac{1}{2}mv_{\check{T}}^2 + \frac{1}{2}I_{\check{T}}\omega^2. \tag{3.178}$$

Príklad č. 3.23. Systém kladky

Na Obr. 3.52 je znázornený **kladkový systém**, ktorého hmota **m** je pripevnená k základovému rámu prostredníctvom lana a translačnej pružiny s tuhosťou **k**. Lano je navinuté na kladke s hmotnosťou $\mathbf{m_p}$ a polomeru **R**. Kladka má možnosť rotovať okolo bodu rotácie **O**.

Využite energetickú metódu na nájdenie diferenciálnej rovnice, ktorá opisuje pohyb takéhoto systému **jednoduchého kladkového systému**.

Pri tvorbe modelu uvažujte, že systém je v stave počiatočnej relaxácie (stav maximálneho natiahnutia pružiny, tzn. že potenciálnu energiu $\mathbf{E_{pg}}$ od tiažovej sily v tomto prípade neuvažujeme).



Obr. 3.52. Kladkový systém

Statické predĺženie pružiny od tiažovej sily je už zahrnuté v potenciálnej energii pružiny $\mathbf{E_{pg}}$

$$E_{pg} = -mgy = -mgR\varphi \,. \tag{3.179}$$

Potenciálnu energiu $\mathbf{E_{pe}}$ (z dôvodu existencie pružného člena s tuhosťou **k)** v kladovom systéme možno vypočítať ako

$$E_{pe} = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kR^2\varphi^2. \tag{3.180}$$

Napokon, pre celkovú potenciálnu energiu sústavy $\mathbf{E_p}$, ktorá je tvorená iba potenciálnou energiou od pružného člena $\mathbf{E_{pe}}$, musí platiť, že

$$E_p = E_{pe} = \frac{1}{2}kR^2\varphi^2 \,. \tag{3.181}$$

Vyjadrime teraz kinetickú energiu sústavy $\mathbf{E_k}$, ktorá pozostáva z kinetickej energie translačného pohybu hmoty **m** a rotačného pohybu kladky s hmotnosťou $\mathbf{m_p}$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_o\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_pR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_p}{2}\right)R^2\dot{\varphi}^2 \,. \tag{3.182}$$

Celková energia celej sústavy je daná súčtom **kinetickej** a **potenciálnej energie**, pre ktorú platí, že

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_p}{2}\right)R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}kR^2\varphi^2 \,. \tag{3.183}$$

Zderivovaním predchádzajúcej rovnice podľa času **t** možno dospieť k matematickému modelu pohybu kladového systému podľa Obr. 3.52

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(E_k + E_p\right) = 0 \,, \\
\left(m + \frac{m_p}{2}\right)R^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + kR^2\varphi\dot{\varphi} = 0 \,, \\
\left(m + \frac{m_p}{2}\right)R^2\ddot{\varphi} + kR^2\varphi = 0 \,.
\end{gathered} \tag{3.184}$$

Poznamenajme, že tento systém bol systémom s jedným stupňom voľnosti, ktorý vyžadoval na kompletný opis iba jednu nezávislú súradnicu (**x** alebo **φ**). To znamená, že na nájdenie matematického modelu na základe **energetického prístupu** bolo v tomto prípade možné uskutočniť výpočet jednou časovou deriváciou súčtu **kinetickej** a **potenciálnej** energie

$$\frac{d}{dt}\left(E_k + E_p\right) = 0\,. \qquad (3.185)$$

Týmto spôsobom sme odvodili diferenciálnu rovnicu pohybu tohto systému. Je nutné poznamenať, že nie vždy bude možné odvodiť matematický model takto pomerne jednoduchým spôsobom. Zvlášť, ak pôjde o systémy komplexnejšie resp. systémy s viac stupňami voľnosti. V prípade týchto systémov bude vhodnejšie použiť **Lagrangeove rovnice II. druhu**.

3.14 LAGRANGEOVE ROVNICE II. DRUHU

Pre systém s **n-stupňami** voľnosti uvažujeme **n-nezávislých zovšeobecnených (nezávislých)** súradníc $\mathbf{q_i}$, ktoré zadefinujeme pre daný systém za účelom získania sústavy diferenciálnych rovníc a to aplikovaním metódy **Lagrangeových rovníc**. Lagrangeove rovnice založené na energetickom prístupe. Aby bolo možné odvodiť matematický model systémom **Lagrangeových rovníc II. druhu** je nevyhnutné poznať kinetickú $\mathbf{E_k}$ a potenciálnu energiu $\mathbf{E_p}$ celej sústavy pre daný systém s konečným stupňom voľnosti **n**.

Kinetická energia $\mathbf{E_k}$ v Lagrangeových rovniciach je vo všeobecnosti funkciou posunutí a rýchlosti v tvare

$$E_k = E_k(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n)\,, \qquad (3.186)$$

na druhej strane potenciálna energia $\mathbf{E_p}$ je len funkciou zovšeobecnených posunutí

$$E_p = E_p(q_1, \dots, q_n)\,. \qquad (3.187)$$

Najjednoduchšia forma **Lagrangeových rovníc II. druhu** pre systémy bez tlmenia a pôsobenia vonkajších síl resp. momentov má tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n, \qquad (3.188)$$

kde $\mathbf{q_i}$ je **i-tá** zovšeobecnená súradnica.

V prípade, že uvažujeme systém bez tlmenia s vonkajšími zovšeobecnenými silami (momentami) $\mathbf{Q_i}$ pôsobiacimi v smere zovšeobecnej súradnice $\mathbf{q_i}$, potom platia tieto Lagrangeove rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i\,, \qquad i = 1,2,\dots,n, \tag{3.189}$$

kde $\mathbf{q_i}$ je **í-ta** zovšeobecnená súradnica a $\mathbf{Q_i}$ je **í-ta** zovšeobecnená sila (moment) v smere **í-tej zovšeobecnej súradnice**.

V prípade existencie disipatívnej sily bez existencie akýchkoľvek vonkajších síl resp. momentov prechádzajú **Lagrangeove rovnice II. druhu** do tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0\,, \qquad i = 1,2,\dots,n, \tag{3.190}$$

kde $\mathbf{D = D(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)}$ nazývame **disipatívnou silou**, ktorá je funkciou rýchlosti zovšeobecných súradníc $\mathbf{\dot{q}_i}$.

Napr., ak v systéme existuje nejaký disipatívny člen v tvare **lineárneho tlmiča**, táto disipatívna sila **D** nadobudne tvar štandardnej funkcie $\mathbf{D = \frac{1}{2} b\dot{x}}$, pre danú zovšeobecnenú súradnicu **x**.

Najvšeobecnejší prípad **Lagrangeových rovníc II. druhu** pre systém s n stupňami voľnosti, ktorý predpokladá existenciu tlmenia a konečný počet zovšeobecnených pôsobiacich síl a momentov $\mathbf{Q_i}$ v danom smere zovšeobecnej súradnice $\mathbf{q_i}$ možno zapísať v tvare

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i\,, \qquad i = 1,2,\dots,n\,. \tag{3.191}$$

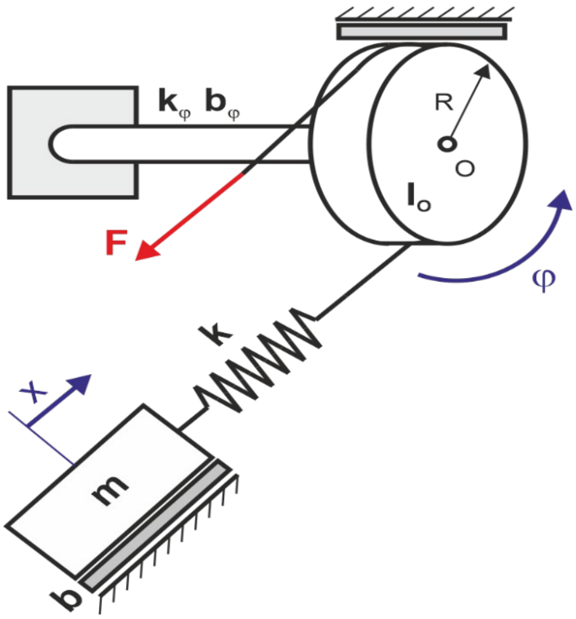
Princíp odvodenia matematického modelu použitím **Lagrangeových rovníc II. druhu** si ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad č. 3.24:

Translačno-rotačný mechanický systém je zobrazený na nasledujúcom Obr. 3.53. Systém pozostáva z rotujúceho disku polomeru **R** fixovaného k základovému rámu, ktorého moment zotrvačnosti k osi rotácie $\mathbf{I_o}$ je známa veličina.

Rotujúci disk je pevne spojený s torzným hriadeľom tuhosti $\mathbf{k_\varphi}$ a pripojený prostredníctvom translačnej pružiny tuhosti **k** ku kmitajúcej hmote s hmotnosťou **m**. Disk je počas svojho rotačného pohybu utlmovaný viskóznym torzným tlmičom $\mathbf{b_\varphi}$.

V prípade translačného pohybu hmoty **m** uvažujeme vplyv trenia, ktoré možno modelovať viskóznym tlmičom **b**. Ak vieme, že systém je vstave počiatočnej relaxácie (maximálneho natiahnutia pružiny), odvoďte matematický model využitím energetickej metódy **Lagrangeových rovníc II. druhu**.



Obr. 3.53. Mechanický systém disk-torzný hriadeľ a kmitajúca hmota

Systém podľa Obr. 3.53 pozostáva z dvoch hmôt, z ktorých jedna koná čisto translačný pohyb – **hmota m** a rotačného disku s momentom zotrvačnosti $\mathbf{I_o}$, ktorý vykonáva čisto rotačný pohyb. Pohyb medzi hmotou **m** a rotujúcim diskom $\mathbf{I_o}$ je previazaný kinematickou rovnicou

$$x = R\varphi \Longrightarrow \dot{x} = R\dot{\varphi}\,. \qquad (3.192)$$

V prvom rade nájdeme pre daný systém kinetickú energiu $\mathbf{E_k}$ celej sústavy. Kinetická energia $\mathbf{E_k}$ pozostáva z kinetickej energie $\mathbf{E_{k\_m}}$ hmoty **m** a kinetickej energie $\mathbf{E_{k\_disk}}$ rotujúceho disku $\mathbf{I_o}$. To znamená, že musí platiť táto rovnica

$$\begin{gathered} E_k = E_{k_m} + E_{k_{disk}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2\,, \\ E_k = \frac{1}{2}(mR^2 + I_O)\dot{\varphi}^2\,. \end{gathered} \qquad (3.193)$$

Potenciálnu energiu od tiažovej sily opakovane v tomto prípade neuvažujeme, pretože predpokladáme systém v **stave počiatočnej relaxácie**. To znamená, že statické predĺženie pružiny je už zahrnuté v počiatočnom predĺžení pružiny **k**. Avšak možno vypočítať potenciálnu energiu $\mathbf{E_{pe}}$ z dôvodu pružnosti sústavy, a to

$$E_p = E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_\varphi\varphi^2 = \frac{1}{2}kR^2\varphi^2 + \frac{1}{2}k_\varphi\varphi^2, \qquad (3.194)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left(kR^2 + k_\varphi\right)\varphi^2 \,.$$

V sústave sa navyše vyskytujú aj **disipatívné účinky** straty energie. Všetky disipatívné vplyvy zahrnieme v tejto rovnici

$$D = \frac{1}{2}b_\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}b\dot{x}^2 = \frac{1}{2}b_\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}bR^2\dot{\varphi}^2 \,,$$
$$D = \frac{1}{2}\left(b_\varphi + bR^2\right)\dot{\varphi}^2 \,. \qquad (3.195)$$

V tomto štádiu pristúpime k aplikácií **Lagrangeových rovníc II. druhu** v tomto tvare. Pre zadefinovanie nám postačuje jedna zovšeobecnená súradnica $\boldsymbol{\varphi}$, nakoľko systém je systémom s jedným stupňom voľnosti

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = Q \,. \qquad (3.196)$$

Vypočítajme čiastkové parciálne derivácie **kinetickej a potenciálnej energie**, čím dostávame

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (mR^2 + I_O)\ddot{\varphi},$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = \left(kR^2 + k_\varphi\right)\varphi, \qquad (3.197)$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = \left(bR^2 + b_\varphi\right)\dot{\varphi},$$
$$Q = F \cdot R \,.$$

Dosadením čiastkových derivácií do všeobecnej **Lagrangeovej rovnice II. druhu** dostávame priamo matematický model opisujúci pohyb sústavy znázornenej na Obr. 3.53

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = Q \,,$$
$$(mR^2 + I_O)\ddot{\varphi} + \left(bR^2 + b_\varphi\right)\dot{\varphi} + \left(kR^2 + k_\varphi\right)\varphi = F \cdot R \,. \qquad (3.198)$$

Pre tento systém podobným spôsobom nájdeme prenosovú funkciu systému aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pre danú diferenciálnu rovnicu systému v Laplaceovom tvare bude platiť

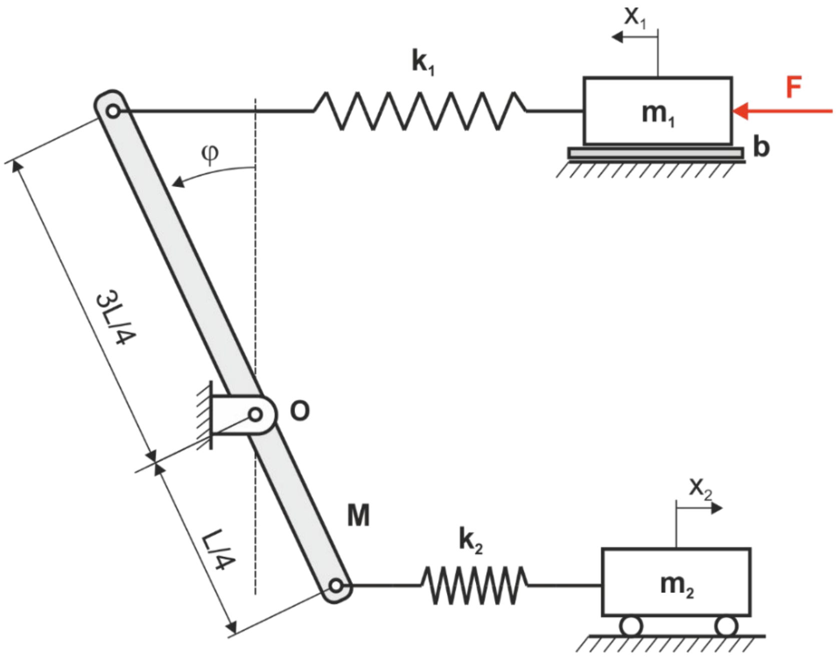
$$(mR^2 + I_O)s^2\Phi(s) + (bR^2 + b_\varphi)s\Phi(s) + (kR^2 + k_\varphi)\Phi(s) = F(s) \cdot R \tag{3.199}$$

a teda prenosová funkcia $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ systému rotačného mechanického modelu bude mať tvar

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)} = \frac{R}{(mR^2 + I_O)s^2 + (bR^2 + b_\varphi)s + (kR^2 + k_\varphi)} . \tag{3.200}$$

Príklad č. 3.25:

V tomto príklade budeme uvažovať mechanický systém pákového mechanizmu s viac stupňami voľnosti pozostávajúceho z troch členov a to **páky**, ktorá koná čisto rotačný pohyb a dvoch hmôt $\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}$ konajúcich čisto translačný pohyb ako je znázornené na nasledujúcom Obr. 3.54.



Obr. 3.54. Pákový systém s dvoma hmotami

Systém pozostáva z páky hmotnosti **M** a dĺžky **L**, ktorá sa otáča okolo pevného bodu **O** vo vzdialenosti **3/4L**. Páka je spojená s dvoma pohyblivými hmotami $\mathbf{m_1}$ a $\mathbf{m_2}$ prostredníctvom dvoch lineárnych pružín s tuhosťami $\mathbf{k_1}$ a $\mathbf{k_2}$ v hornej a dolnej časti. Pri translačnom pohybe hmoty $\mathbf{m_1}$ na ňu pôsobí vonkajšia zaťažujúca sila **F**, pozri Obr. 3.54.

Navyše pri pohybe tejto hmoty $\mathbf{m_1}$ uvažujeme vplyv pôsobenia trenia, ktoré možno modelovať použitím **lineárneho viskózneho tlmiča** s konštantou tlmenia **b**. Na hmotu $\mathbf{m_2}$ nepôsobí žiadna vonkajšia sila a v tomto prípade, neuvažujeme ani žiadny vplyv trenia. Ak predpokladáme, že opísaný systém je v čase **t = 0** v **stave počiatočnej relaxácie** odvoďte použitím metódy **Lagrangeových rovníc II. druhu** matematický model takejto sústavy.

Pre napísanie Lagrangeových rovníc budeme v tomto prípade potrebovať zaviesť tri zovšeobecnené súradnice a to $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \boldsymbol{\varphi}$. Pre moment zotrvačnosti páky $\mathbf{I_o}$, ktorá excentricky rotuje okolo osi rotácie **O** platí nasledovný vzťah s uvažovaním **Steinerovej vety**,

$$\mathrm{I_O} = \mathrm{I_{\check{T}}} + \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{L}}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}\mathrm{ML}^2 + \frac{1}{16}\mathrm{ML}^2 = \frac{7}{48}\mathrm{ML}^2\,. \tag{3.201}$$

Nájdime kinetickú energiu $\mathbf{E_k}$ celej sústavy, ktorá je súčtom kinetickej energie rotačného pohybu páky a translačného pohybu obidvoch hmôt. Pre kinetickú energiu platí táto rovnica

$$\mathrm{E_k} = \mathrm{E_{k\_x1}} + \mathrm{E_{k\_x2}} + \mathrm{E_{k\_\varphi}} = \frac{1}{2}\mathrm{m_1}\dot{\mathrm{x}}_1^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m_2}\dot{\mathrm{x}}_2^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I_O}\dot{\varphi}^2\,. \tag{3.202}$$

Pre celú sústavu možno nájsť potenciálnu energiu $\mathbf{E_p}$, ktorú v sústave tvoria pružné členy v podobe pružín. Potom potenciálna energia $\mathbf{E_p}$ z dôvodu pružnosti sústavy je daná ako

$$\mathrm{E_p} = \mathrm{E_{p\_k1}} + \mathrm{E_{p\_k2}} = \frac{1}{2}\mathrm{k_1}\left(\frac{3}{4}\varphi\mathrm{L} - \mathrm{x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k_2}\left(\mathrm{x_2} - \frac{\mathrm{L}}{4}\varphi\right)^2\,. \tag{3.203}$$

V sústave sa okrem iného vyskytujú aj **disipatívne prvky**, ktorými sústava stráca časť energie. Tieto vplyvy v podobe tlmenia zhrnieme v tejto rovnici

$$\mathrm{D} = \frac{1}{2}\mathrm{b}\dot{\mathrm{x}}_1^2\,. \tag{3.204}$$

Pre napísanie matematického modelu vychádzame z najvšeobecnejšieho tvaru **Lagrangeových rovníc II.**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{E_k}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{i}}\right) - \frac{\partial \mathrm{E_k}}{\partial \mathrm{q_i}} + \frac{\partial \mathrm{E_p}}{\partial \mathrm{q_i}} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{i}} = \mathrm{Q_i}, \quad \mathrm{i} = 1,2,3\,. \tag{3.205}$$

Vypočítaním čiastkových parciálnych derivácií **kinetickej a potenciálnej energie** pre jednotlivé zovšeobecnené súradnice, dostávame

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) = I_O\ddot{\varphi} = \frac{7}{48}ML^2\ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_1, x_2, \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = -k_1\left(\frac{3}{4}\varphi L - x_1\right), \qquad \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = k_2\left(x_2 - \frac{L}{4}\varphi\right), \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = \frac{3}{4}Lk_1\left(\frac{3}{4}\varphi L - x_1\right) - \frac{L}{4}k_2\left(x_2 - \frac{L}{4}\varphi\right), \tag{3.206}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = b\dot{x}_1, \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2, \dot{\varphi}} = 0\,,$$

$$Q_1 = F\,.$$

Potom dosadením do **Lagrangeových rovníc II. druhu** dospejeme k tejto sústave troch diferenciálnych rovníc

$$\begin{gathered} m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 - k_1\left(\frac{3}{4}L\varphi - x_1\right) = F\,, \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2\left(x_2 - \frac{L}{4}\varphi\right) = 0\,, \\ \frac{7}{48}ML^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{4}Lk_1\left(\frac{3}{4}L\varphi - x_1\right) - \frac{L}{4}k_2\left(x_2 - \frac{L}{4}\varphi\right) = 0\,. \end{gathered} \tag{3.207}$$

Na zjednodušenie zápisu prepíšeme predchádzajúcu sústavu diferenciálnych rovníc do maticového tvaru, ktorý tvorí matematický model sústavy podľa Obr. 3.54

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{48}ML^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -\frac{3}{4}Lk_1 \\ 0 & k_2 & -\frac{L}{4}k_2 \\ -\frac{3}{4}Lk_1 & -\frac{L}{4}k_2 & \frac{L^2}{16}(9k_1 + k_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.208}$$

Aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{x}}_1(\mathbf{0}) = \dot{\mathbf{x}}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_2(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, dostávame túto transformáciu systému

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + bs + k_1 & 0 & -\frac{3}{4}Lk_1 \\ 0 & m_2 s^2 + k_2 & -\frac{L}{4}k_2 \\ -\frac{3}{4}Lk_1 & -\frac{L}{4}k_2 & \frac{7}{48}ML^2 s^2 + \frac{L^2}{16}(9k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \Phi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [F(s)]\,. \qquad (3.209)$$

V tomto prípade prenosová matica systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ bude definovaná tromi prenosovými funkciami systému $\mathbf{G_1}(\mathbf{s})$, $\mathbf{G_2}(\mathbf{s})$ a $\mathbf{G_3}(\mathbf{s})$, ktoré prislúchajú jednotlivým výstupom $\mathbf{X_1}(\mathbf{s})$, $\mathbf{X_2}(\mathbf{s})$ a $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{s})$. Danú prenosovú maticu systému možno obdobným spôsobom nájsť vyriešením lineárneho systému s pravou stranou symbolickým počítaním v Matlabe a to vo všeobecnom tvare ako

$$A \cdot \begin{bmatrix} \frac{X_1(s)}{F(s)} \\ \frac{X_2(s)}{F(s)} \\ \frac{\Phi(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = b \Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \frac{X_1(s)}{F(s)} \\ \frac{X_2(s)}{F(s)} \\ \frac{\Phi(s)}{F(s)} \end{bmatrix} = A^{-1} b\,, \qquad (3.210)$$

kde matica **A** predstavuje

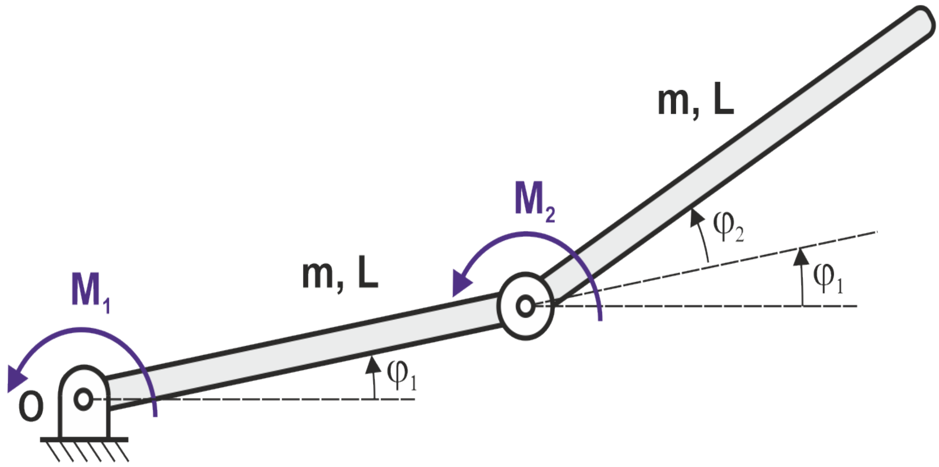
$$A = \begin{bmatrix} m_1 s^2 + bs + k_1 & 0 & -\frac{3}{4}Lk_1 \\ 0 & m_2 s^2 + k_2 & -\frac{L}{4}k_2 \\ -\frac{3}{4}Lk_1 & -\frac{L}{4}k_2 & \frac{7}{48}ML^2 s^2 + \frac{L^2}{16}(9k_1 + k_2) \end{bmatrix} \qquad (3.211)$$

a vektor pravej strany **b** predstavuje

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.212)$$

Príklad č. 3.26:

Robotická ruka pozostávajúca z dvoch členov s hmotnosťou **m** a dĺžky **L** spojených rotačným kĺbom je znázornená na Obr. 3.55. Uvažujeme, že v kĺbe **O**, ktorým je robotická ruka pripevnená k rámovej konštrukcií pôsobí krútiaci moment $\mathbf{M_1}$ a v rotačnom kĺbovom spojení oboch ramien pôsobí krútiaci moment $\mathbf{M_2}$. Ak uvažujeme ideálny prípad bez existencie trenia a tlmenia odvoďte matematický model použitím metódy **Lagrangeových rovníc II. druhu**.



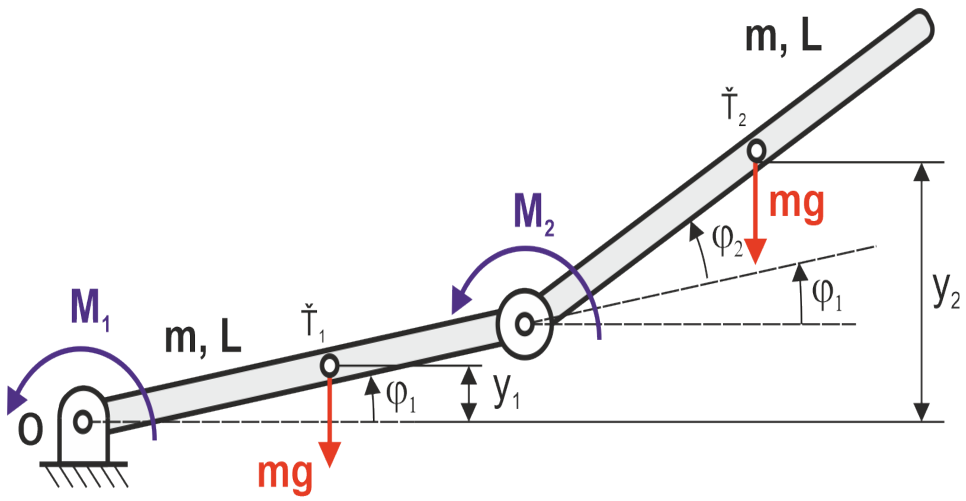
Obr. 3.55. Robotická ruka zaťažená momentami generovanými motorčekmi v kĺbových spojeniach

Pre napísanie **Lagrangeových rovníc** zavedieme v tomto prípade dve zovšeobecnené súradnice $\boldsymbol{\varphi_1}$ a $\boldsymbol{\varphi_2}$, ktoré predstavujú natočenia jednotlivých ramien robotického systému. Momenty zotrvačnosti jednotlivých členov robotickej ruky, ktoré rotujú okolo pevných bodov rotácie sú rovnaké pre obidve ramená

$$I = I_1 = I_2 = I_{\check{T}} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2 \,. \tag{3.213}$$

Nájdime kinetickú energiu $\mathbf{E_k}$ celej sústavy robotickej ruky, ktorá pozostáva z kinetickej energie rotačného pohybu jedného ramena $\mathbf{E_{k_{\varphi1}}}$ a takisto kinetickej energie druhého ramena $\mathbf{E_{k_{\varphi2}}}$. Pre kinetickú energiu $\mathbf{E_k}$ musí platiť

$$\begin{gathered} E_k = E_{k_{\varphi1}} + E_{k_{\varphi2}} = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 = \frac{1}{6}mL^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6}mL^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 \,, \\ E_k = \frac{1}{6}mL^2[\dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2] \,. \end{gathered} \tag{3.214}$$



Obr. 3.56. Model robotickej ruky s uvažovaním vlastnej tiaže

Potenciálnu energiu $\mathbf{E_p}$ celkovej sústavy z dôvodu existencie gravitačných síl, ktoré pôsobia pri pohybe na jednotlivé ramená robotickej ruky odvodíme na základe Obr. 3.56. Celková potenciálna energia $\mathbf{E_p}$ pozostáva z potenciálnej energie prvého a druhého ramena a teda

$$
\begin{aligned}
E_p &= E_{p_{\varphi 1}} + E_{p_{\varphi 2}} = mgy_1 + mgy_2\,, \\
E_p &= mg\frac{L}{2}\sin\varphi_1 + mg\left[L\sin\varphi_1 + \frac{L}{2}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] \\
&= mg\frac{L}{2}\sin\varphi_1 + mgL\sin\varphi_1 + mg\frac{L}{2}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,, \\
E_p &= \frac{3}{2}mgL\sin\varphi_1 + mg\frac{L}{2}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,.
\end{aligned}
\tag{3.215}
$$

Pre napísanie matematického modelu využime **Lagrangeove rovnice II. druhu** v tomto tvare s uvažovaním vonkajších zovšeobecnených momentov

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1{,}2\,. \tag{3.216}
$$

Pre zovšeobecnené vonkajšie zaťažujúce momenty v tomto prípade konkrétnych zovšeobecnených súradníc bude platiť, že

$$
\mathbf{Q_{\varphi 1}} = \mathbf{M_1}, \quad \mathbf{Q_{\varphi 2}} = \mathbf{M_2}\,. \tag{3.217}
$$

Vypočítaním príslušných čiastkových parciálnych derivácií kinetickej a potenciálnej energie, dostávame

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{1}{3} mL^2(2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{1}{3} mL^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2),$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1, \varphi_2} = 0, \qquad (3.218)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = \frac{3}{2} mgL\cos\varphi_1 + mg\frac{L}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = mg\frac{L}{2}[3\cos\varphi_1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]\,,$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_2} = mg\frac{L}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\,.$$

a potom dosadením do **Lagrangeových rovníc** dostávame sústavu dvoch diferenciálnych rovníc v nelineárnom tvare

$$\frac{1}{3} mL^2(2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + mg\frac{L}{2}[3\cos\varphi_1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)] = M_1\,,$$

$$\frac{1}{3} mL^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + mg\frac{L}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = M_2\,. \qquad (3.219)$$

Z dôvodu zložitosti systému za účelom odvodenia prenosovej funkcie systému Laplaceovou transformáciou je nutné vykonať linearizáciu matematického modelu s uvažovaním pre malé uhly $\boldsymbol{\varphi_1}$, $\boldsymbol{\varphi_2}$, kde $\mathbf{cos(\boldsymbol{\varphi})} \approx \mathbf{1}$, ináč by nebolo možné odvodiť pre takýto systém jeho prenosovú funkciu

$$\frac{1}{3} mL^2(2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + 2mgL = M_1\,,$$

$$\frac{1}{3} mL^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + mg\frac{L}{2} = M_2\,. \qquad (3.220)$$

Túto sústavu zapíšeme do nasledovného maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} mL^2 & \frac{1}{3} mL^2 \\ \frac{1}{3} mL^2 & \frac{1}{3} mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 - 2mgL \\ M_2 - \frac{1}{2} mgL \end{bmatrix}. \qquad (3.221)$$

Ak označíme výraz $\mathbf{m \cdot g}$ ako tiažovú silu $\mathbf{F_g}$, potom **Laplaceovou transformáciou** pri nulových počiatočných podmienok $\boldsymbol{\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0}$ dostávame

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}mL^2s^2 & \frac{1}{3}mL^2s^2 \\ \frac{1}{3}mL^2s^2 & \frac{1}{3}mL^2s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2L \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \\ F_g(s) \end{bmatrix}. \tag{3.222}$$

V tomto prípade prenosová matica systému $\mathbf{G(s)}$ bude definovaná šiestimi prenosovými funkciami systému $\mathbf{G_{11}(s)}, \mathbf{G_{12}(s)}, \mathbf{G_{13}(s)}, \mathbf{G_{21}(s)}, \mathbf{G_{22}(s)}$ a $\mathbf{G_{23}(s)}$, ktoré prislúchajú jednotlivým výstupom $\mathbf{\Phi_1(s)}$ a $\mathbf{\Phi_2(s)}$. Danú prenosovú maticu systému možno obdobným spôsobom ako v predchádzajúcich prípadoch nájsť vyriešením lineárneho systému s pravou stranou zapísaného vo všeobecnom tvare

$$A \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Phi_1(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_1(s)}{M_2(s)} & \frac{\Phi_1(s)}{F_g(s)} \\ \frac{\Phi_2(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_2(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_2(s)}{F_g(s)} \end{bmatrix} = b \Longrightarrow G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_1(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_1(s)}{M_2(s)} & \frac{\Phi_1(s)}{F_g(s)} \\ \frac{\Phi_2(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_2(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_2(s)}{F_g(s)} \end{bmatrix} = A^{-1}b\,, \tag{3.223}$$

kde matica **A** predstavuje

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mL^2s^2 & \frac{1}{3}mL^2s^2 \\ \frac{1}{3}mL^2s^2 & \frac{1}{3}mL^2s^2 \end{bmatrix} \tag{3.224}$$

a matica pravej strany **b** predstavuje

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2L \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}L \end{bmatrix}. \tag{3.225}$$

Prenosová matica systému **G(s)**, ktorú možno vo všeobecnom tvare zapísať ako

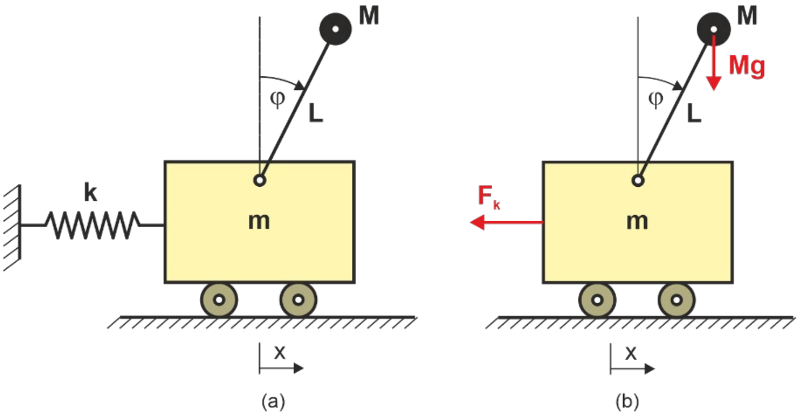
$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_1(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_1(s)}{M_2(s)} & \frac{\Phi_1(s)}{F_g(s)} \\ \frac{\Phi_2(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_2(s)}{M_1(s)} & \frac{\Phi_2(s)}{F_g(s)} \end{bmatrix}, \tag{3.226}$$

nadobúda vyriešením nasledovný tvar prenosovej matice

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{mL^2 \cdot s^2} & \frac{-3}{mL^2 \cdot s^2} & \frac{-9}{mL^2 \cdot s^2} \\ \frac{-3}{mL^2 \cdot s^2} & \frac{6}{mL^2 \cdot s^2} & \frac{3}{mL^2 \cdot s^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{mL^2s^2} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -9 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.227}$$

Príklad č. 3.27:

Kmitajúci mechanický systém pozostávajúci z vozíka hmotnosti **m** fixovaného k základu pružinou s tuhosťou **k** je znázornený na Obr. 3.57 (a). Na vozíku je umiestnené inverzné kyvadlo hmotnosti **M** a dĺžky **L**. Odvoďte matematický model použitím **Lagrangeových rovníc II. druhu**.



Obr. 3.57. (a) Vozík s inverzným kyvadlom (b) uvoľnený systém vozíka

Na napísanie **Lagrangeových rovníc II. druhu** zavedieme v tomto prípade dve zovšeobecnené súradnice **x**, **φ**. Polohu bodu **M** v rovine možno opísať nasledovnými súradnicami polohy podľa Obr. 3.57 (a).Na základe týchto súradníc možno určiť kinetickú a potenciálnu energiu hmoty **M**

$$\begin{aligned} x_2 &= x + L\sin\varphi\,, \qquad & y_2 &= L\cos\varphi\,, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x} + L\cos\varphi\,\dot{\varphi}, \qquad & \dot{y}_2 &= -L\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{3.228}$$

Nájdime kinetickú energiu $\mathbf{E_k}$ celej sústavy pre **vozík** a **inverzné kyvadlo**. Kinetická energia pozostáva z kinetickej energie hmoty **m**, ktorá koná čisto translačný pohyb a z kinetickej energie kyvadielka s hmotnosťou **M**, ktoré vykonáva všeobecný pohyb (**rotačný** a **translačný**)

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k_x} + E_{k_M} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_2^2\,, \\ E_k &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x} + L\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}ML^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2\,. \end{aligned} \tag{3.229}$$

Potenciálnu energiu celej sústavy $\mathbf{E_p}$ tvorí potenciálna energia $\mathbf{E_{p_M}}$ z dôvodu existencie gravitačných síl a potenciálna energia $\mathbf{E_{p_{k1}}}$ z dôvodu pružnosti sústavy, pre ktorú platí, že

$$E_p = E_{p_{k1}} + E_{p_M} = \frac{1}{2}kx^2 + MgL\cos\varphi\,. \tag{3.230}$$

Na napísanie výsledného matematického modelu využime **Lagrangeove rovnice II. druhu** v tomto tvare

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2\,. \tag{3.231}$$

Vypočítaním čiastkových parciálnych derivácií **kinetickej** a **potenciálnej energie** dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} + M(\ddot{x} - L\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + L\cos\varphi\,\ddot{\varphi}),\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= \frac{d}{dt}[M(\dot{x} + L\cos\varphi\,\dot{\varphi})L\cos\varphi + ML^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}]\\
&= \frac{d}{dt}[M\dot{x}L\cos\varphi + ML^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} + ML^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}]\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= M\ddot{x}L\cos\varphi - M\dot{x}L\sin\varphi\,\dot{\varphi} - 2ML^2\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + ML^2\cos^2\varphi\,\ddot{\varphi}\\
&\quad + 2ML^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + ML^2\sin^2\varphi\,\ddot{\varphi}
\end{aligned} \tag{3.232}$$

a ďalšími matematickými úpravami možno dospieť k rovniciam

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} + M(\ddot{x} - L\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + L\cos\varphi\,\ddot{\varphi})\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= M\ddot{x}L\cos\varphi - M\dot{x}L\sin\varphi\,\dot{\varphi} + ML^2\cos^2\varphi\,\ddot{\varphi} + ML^2\sin^2\varphi\,\ddot{\varphi}\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= ML^2\ddot{\varphi} + M\ddot{x}L\cos\varphi - M\dot{x}L\sin\varphi\,\dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{3.233}$$

a takisto k čiastkovým parciálnym deriváciám **kinetickej** a **potenciálnej** energie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} &= -M(\dot{x} + L\cos\varphi\,\dot{\varphi})L\dot{\varphi}\sin\varphi + ML^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\\
&= -M\dot{x}L\sin\varphi\,\dot{\varphi} - ML^2\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + ML^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2,\\
\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} &= -M\dot{x}L\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,,\\
\frac{\partial E_p}{\partial x} &= kx, \qquad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = -MgL\sin\varphi\,.
\end{aligned} \tag{3.234}$$

Potom dosadením vypočítaných výrazov do všeobecných **Lagrangeových rovníc II. druhu** možno dospieť k sústave dvoch diferenciálnych rovníc

$$
\begin{gathered}
(m+M)\ddot{x} - ML\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + ML\ddot{\varphi}\cos\varphi + kx = 0\,,\\
ML^2\ddot{\varphi} + M\ddot{x}L\cos\varphi - M\dot{x}L\sin\varphi\,\dot{\varphi} + M\dot{x}L\sin\varphi\,\dot{\varphi} - MgL\sin\varphi = 0\,.
\end{gathered}
\tag{3.235}
$$

Ďalšími matematickými úpravami možno odvodiť výsledný matematický model **nelineárneho charakteru** v tvare

$$
\begin{gathered}
(m+M)\ddot{x} + ML\ddot{\varphi}\cos\varphi - ML\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + kx = 0\,,\\
ML^2\ddot{\varphi} + ML\ddot{x}\cos\varphi - MgL\sin\varphi = 0\,.
\end{gathered}
\tag{3.236}
$$

Pre malé uhly do $\boldsymbol{\varphi < 5°}$ možno danú sústavu **linearizovať** a dospieť k **linearizovanému** matematickému modelu

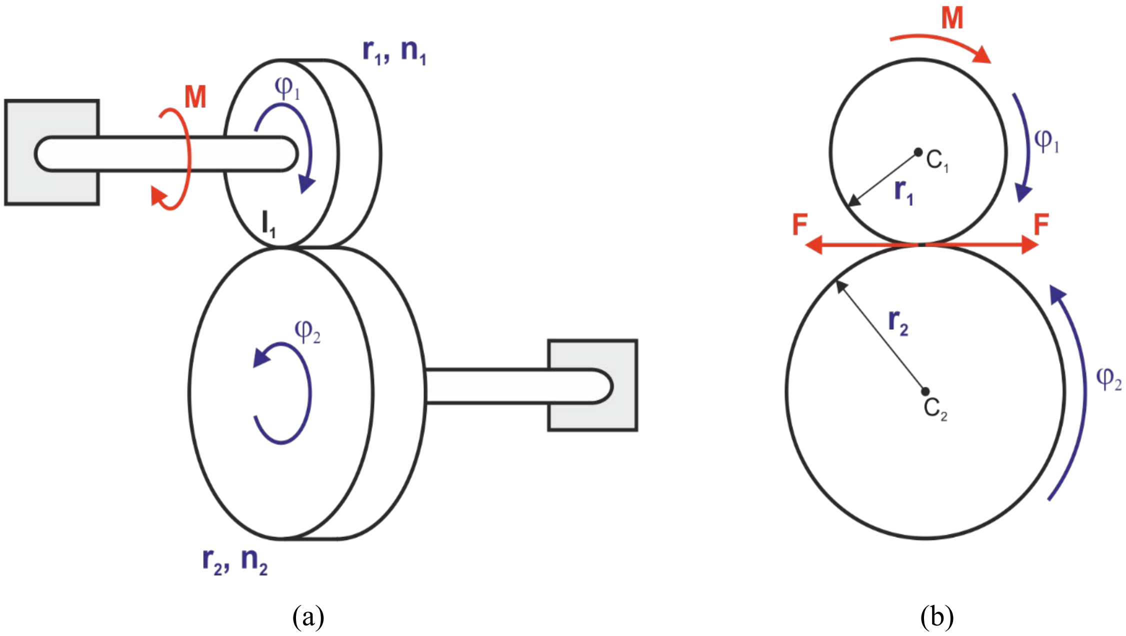
$$
\begin{gathered}
(m+M)\ddot{x} + ML\ddot{\varphi} + kx = 0\,,\\
ML^2\ddot{\varphi} + ML\ddot{x} - MgL\varphi = 0\,.
\end{gathered}
\tag{3.237}
$$

Predchádzajúcu linearizovanú sústavu diferenciálnych rovníc možno napokon zapísať do výsledného maticového tvaru

$$
\begin{bmatrix} m+M & ML \\ ML^2 & ML^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -MgL \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.238}
$$

3.15 PREVODOVÉ MECHANIZMY

Rotačné prevodové systémy sú veľmi dôležité a často sa vyskytujú sa v mnohých inžinierskych aplikáciách. V tejto kapitole si na príkladoch ukážeme ako odvodiť matematický model pre vybrané **prevodové systémy**. Nasledujúci Obr. 3.58 zobrazuje pár ozubených kolies, ktoré uvažujeme ako dokonalé tuhé telesá. Ozubený prevod budeme tiež pokladať za dokonalý a to bez akéhokoľvek preklzu.



Obr. 3.58. Ozubený prevod: (a) fyzikálny model, (b) uvoľnený model

Moment **M** vyvolaný motorom pôsobí na koleso **č. 1**, ktoré rotuje uhlovým natočením $\boldsymbol{\varphi_1}$ a núti druhé koleso rotovať opačným smerom s uhlovým natočením $\boldsymbol{\varphi_2}$. Pre sústavu kolies platí **geometrická väzbová rovnica**

$$r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2 \,, \tag{3.239}$$

ktorú možno takisto prepísať do tohto tvaru

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = N \,, \tag{3.240}$$

kde **N** nazývame **prevodovým pomerom**.

Pre prevodový pomer **N** definovaný predchádzajúcim vzťahom možno pre ozubené kolesá definovať aj nasledujúci ekvivalentný vzťah

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = N\,, \tag{3.241}$$

kde $\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}$ sú otáčky kolies a $\boldsymbol{\omega_1}, \boldsymbol{\omega_2}$ sú uhlové rýchlosti kolies. Ak prevodové číslo **N>0** dostávame prevod do **pomala** a naopak, ak **N<0** potom dostávame prevod do **rýchla**.

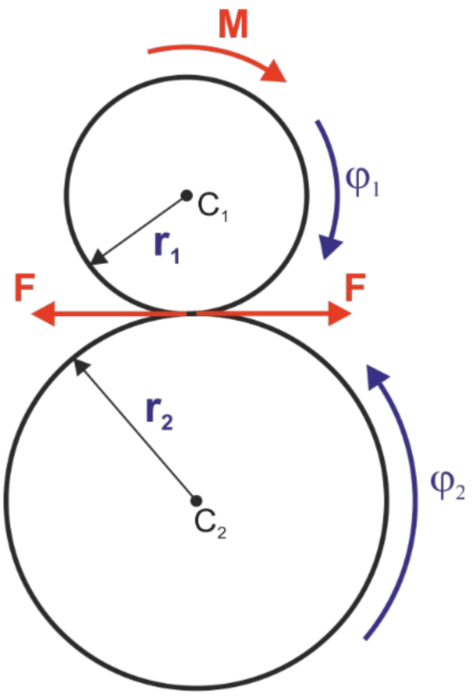
Príklad č. 3.28. Ozubený prevod s jedným stupňom voľnosti

Pre **ozubený prevod** zobrazený na predchádzajúcom obrázku Obr. 3.58 odvoďte matematický model, ak predpokladáme, že poznáme momenty zotrvačnosti ozubených kolies k ich bodom rotácie a to $\mathbf{I_{c1}}, \mathbf{I_{c2}}$.

Pripomeňme, že pre daný prevodový mechanizmus platí geometrická väzbová rovnica

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = N\,. \tag{3.242}$$

Pre daný ozubený prevod nakreslíme obrazec uvoľnenia s vyznačením vonkajších a vnútorných pôsobiacich síl a momentov, pozri Obr. 3.59.



Obr. 3.59. Ozubený prevod – uvoľnený model

Na základe obrazca uvoľnenia napíšme pohybové rovnice pre jednotlivé hmoty konajúce čisto rotačný pohyb.

Pre hmotu č. 1 platí

$$\sum M_{C1} = I_{C1} \cdot \alpha\,, \qquad (3.243)$$
$$I_{C1} \cdot \ddot{\varphi}_1 = M - F \cdot r_1$$

a **pre hmotu č. 2** platí

$$\sum M_{C2} = I_{C2} \cdot \alpha\,, \qquad (3.244)$$
$$I_{C2} \cdot \ddot{\varphi}_2 = F \cdot r_2\,.$$

Ako si možno všimnúť, tak v predchádzajúcich rovniciach sa vyskytuje neznáma veličina sily **F** (sila v ozubení), ktorú možno z oboch rovníc eliminovať. V prípade, že tieto dve rovnice skombinujeme do jednej rovnice, potom platí

$$F = \frac{I_{C2}\ddot{\varphi}_2}{r_2} \Longrightarrow I_{C1}\ddot{\varphi}_1 + I_{C2}\frac{r_1}{r_2}\ddot{\varphi}_2 = M\,. \qquad (3.245)$$

Zavedením **geometrickej väzbovej** rovnice možno rovnicu ďalej upraviť na tento tvar

$$\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\varphi_1 \Longrightarrow \left[I_{C1} + I_{C2}\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]\ddot{\varphi}_1 = M, \qquad (3.246)$$

a potom ďalšími matematickými úpravami možno dospieť k výslednému matematickému modelu

$$\left[I_{C1} + I_{C2}\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]\ddot{\varphi}_1 = M\,. \qquad (3.247)$$

Pre tento prevodový mechanizmus možno obdobným spôsobom nájsť prenosovú funkciu systému aplikovaním **Laplaceovej transformácie**

$$\left[I_{C1} + I_{C2}\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]s^2\Phi_1(s) = M(s)\,. \qquad (3.248)$$

Potom prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ ozubeného prevodu nadobudne tvar

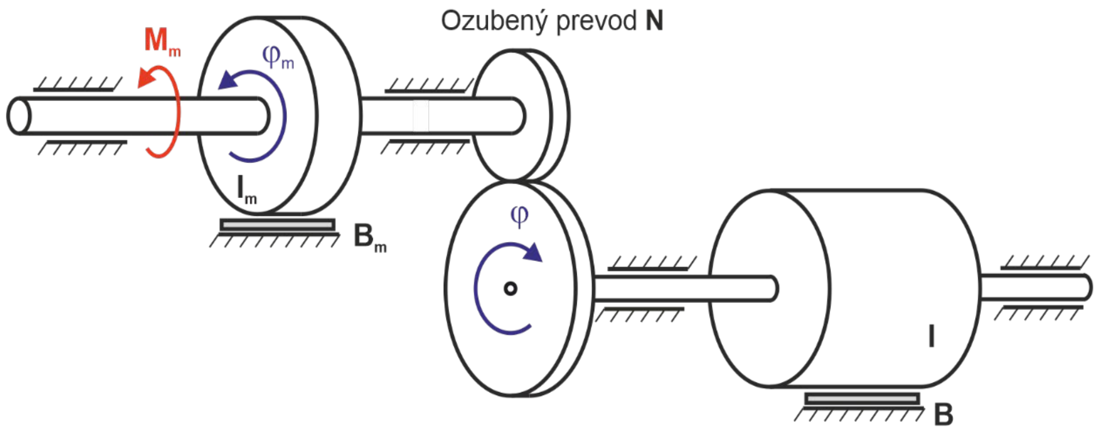
$$G(s) = \frac{\Phi_1(s)}{M(s)} = \frac{1}{\left[I_{C1} + I_{C2}\frac{r_1^2}{r_2^2}\right] s^2}. \qquad (3.249)$$

Príklad č. 3.29. Jednočlenná robotická ruka s motorom

Mechanický model robotickej ruky budenej krútiacim momentom $\mathbf{M_m}$ vyvolaným elektromotorom, pozostáva z ozubeného prevodu so známym prevodovým pomerom **N** ako je znázornené na nasledujúcom Obr. 3.60. V tomto prípade máme spojené dva **rotačné systémy s ozubeným prevodom** so zanedbateľným momentom zotrvačnosti.

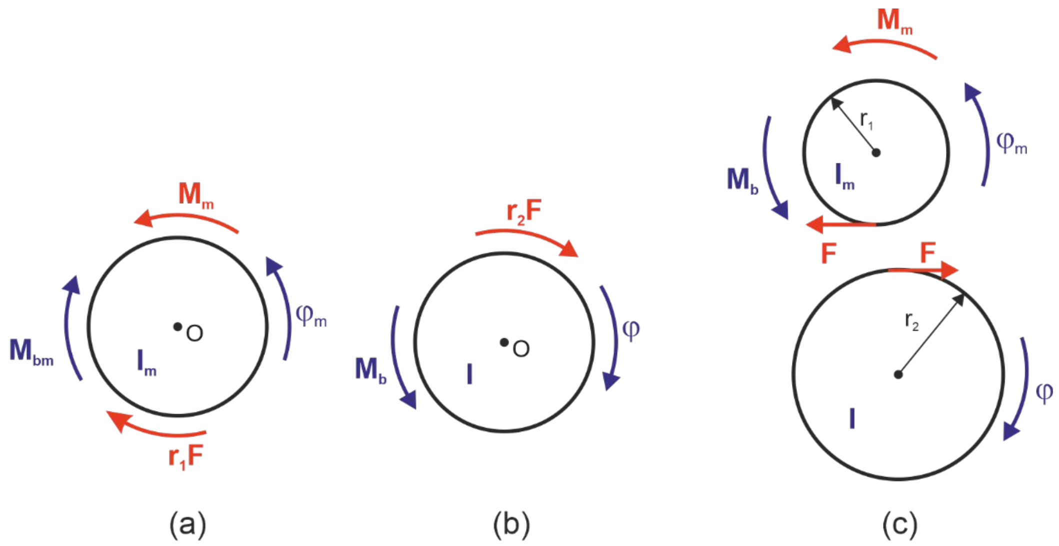
Moment zotrvačnosti motora a záťaže uvažujeme ako $\mathbf{I_m}$ resp. **I**. Na strane motora, ďalej uvažujeme viskózne tlmenie, ktoré označíme ako $\mathbf{B_m}$. Zatiaľ čo na strane záťaže budeme uvažovať tlmenie **B**.

Predpokladajme, že systém je budený krútiacim momentom $\mathbf{M_m}$ na strane motora. Ak vieme, že prevodový pomer **N** medzi ozubenými kolesami je definovaný ako $\mathbf{N = r_1/r_2}$, odvoďte pre daný mechanický systém matematický model, ak zanedbávame hmotnosť ozubeného prevodu.



Obr. 3.60. Robotická ruka budená elektrickým motorom

Predtým, než odvodíme matematický model nakreslíme si obrazec uvoľnenia jednotlivých hmôt podľa nasledujúceho Obr. 3.61 a to s vyznačením vnútorných a vonkajších účinkov pôsobiacich na jednotlivé hmoty systému. Medzi ozubeným kolesami budeme uvažovať kontaktné momenty od sily **F**, konkrétne momenty $\mathbf{r_1 F}$ a $\mathbf{r_2 F}$.



Obr. 3.61. Uvoľnené hmoty robotickej ruky: (a) motor, (b) záťaž, (c) ozubený prevod

Aplikovaním **II. Newtonovho zákona** dynamiky napíšme pohybové rovnice pre jednotlivé hmoty. Pre budiacu časť od **motora** platí

$$\begin{gathered} \sum M_O = I_O \alpha \,, \\ I_m \ddot{\varphi}_m = M_m - M_{bm} - r_1 F \,, \\ I_m \ddot{\varphi}_m = M_m - B_m \dot{\varphi}_m - r_1 F \end{gathered} \qquad (3.250)$$

a pre časť na strane **záťaže** platí, že

$$\begin{gathered} \sum M_O = I_O \alpha \,, \\ I \ddot{\varphi} = -M_b + r_2 F \,, \\ I \ddot{\varphi} = -B \dot{\varphi} + r_2 F \,. \end{gathered} \qquad (3.251)$$

Z druhej rovnice možno vyjadriť silu pôsobiacu v ozubení **F**, ktorá je daná vzťahom

$$I \ddot{\varphi} = -B \dot{\varphi} + r_2 F \Longrightarrow F = \frac{I \ddot{\varphi} + B \dot{\varphi}}{r_2} \,, \qquad (3.252)$$

dosadením tejto sily **F** do prvej rovnice možno dospieť k diferenciálnej rovnici

$$I_m \ddot{\varphi}_m = M_m - B_m \dot{\varphi}_m - \frac{r_1}{r_2} (I \ddot{\varphi} + B \dot{\varphi}) \,. \qquad (3.253)$$

V tomto štádiu využijeme známe geometrické väzbové rovnice ozubených kolies, pre ktoré musí platiť, že

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varphi}{\varphi_m} = N \Longrightarrow \varphi = \frac{r_1}{r_2}\varphi_m = N\varphi_m \,, \qquad (3.254)$$
$$\dot{\varphi} = N\dot{\varphi}_m, \qquad \ddot{\varphi} = N\ddot{\varphi}_m,$$

kde **N** je prevodový pomer. Dosadením do rovnice za $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ a $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ dostávame

$$I_m\ddot{\varphi}_m = M_m - B_m\dot{\varphi}_m - \frac{r_1}{r_2}(I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi}) = M_m - B_m\dot{\varphi}_m - N(IN\ddot{\varphi}_m + BN\dot{\varphi}_m)\,, \qquad (3.255)$$
$$I_m\ddot{\varphi}_m = M_m - B_m\dot{\varphi}_m - N^2(I\ddot{\varphi}_m + B\dot{\varphi}_m)\,.$$

Ďalšími matematickými úpravami možno dospieť k výslednej diferenciálnej rovnici definovanej v zmysle natočenia motora

$$(I_m + N^2 I)\ddot{\varphi}_m + (B_m + N^2 B)\dot{\varphi}_m = M_m\,. \qquad (3.256)$$

Pre tento prípad mechanizmus robotickej ruky aplikovaním **Laplaceovej transformácie** na diferenciálnu rovnicu ďalej platí,

$$(I_m + N^2 I)s^2 \cdot \Phi_m(s) + (B_m + N^2 B)s \cdot \Phi_m(s) = M_m(s) \qquad (3.257)$$

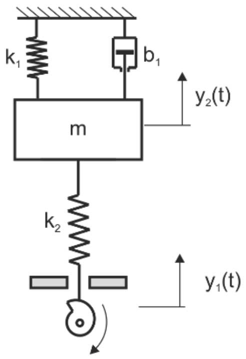
a napokon prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ pre riešený systém robotickej ruky má tvar

$$G(s) = \frac{\Phi_m(s)}{M_m(s)} = \frac{1}{(I_m + N^2 I)s^2 + (B_m + N^2 B)s}\,. \qquad (3.258)$$

Úlohy na riešenie

Problém 3.1:

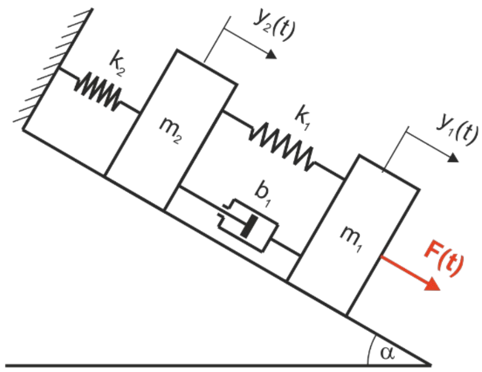
Predpokladajme mechanický systém kmitajúcej hmoty zobrazený na Obr. 3.62. Odvoďte metódou postupného uvoľňovania matematický model tohto systému a nájdite prenosovú funkciu systému **G(s)**.



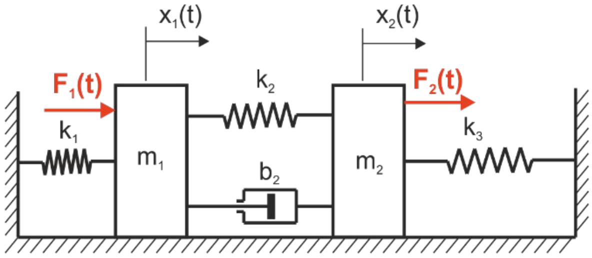
Obr. 3.62. Mechanický systém č. 1

Problém 3.2:

Predpokladajme mechanický systém sústavy dvoch hmôt, ktoré kmitajú na naklonenej rovine podľa Obr. 3.63. Odvoďte matematický model metódou uvoľňovania a zapíšte tento model do maticového tvaru. Nájdite prenosovú maticu systému matematického modelu **G(s)**.



Obr. 3.63. Mechanický systém č. 2



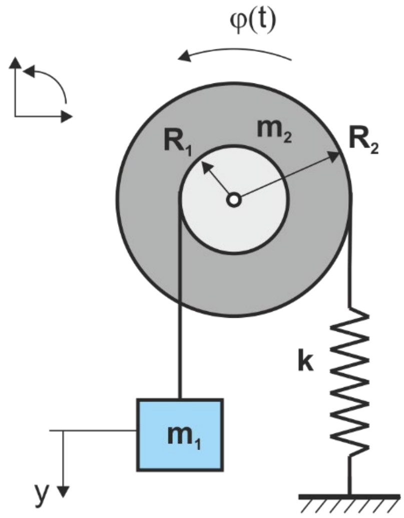
Obr. 3.64. Mechanický systém č. 3

Problém 3.3:

Predpokladajme mechanický systém sústavy dvoch hmôt, ktoré kmitajú bez uvažovania trenia v horizontálnom smere ako je znázornené na Obr. 3.64. Použitím metódy postupného uvoľňovania nájdite matematický model, zapíšte ho do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.

Problém 3.4:

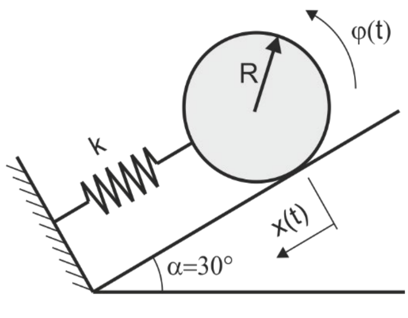
Na Obr. 3.65 je znázornený kladkový systém pozostávajúci z telesa hmotnosti $\mathbf{m_1}$ a remenice hmotnosti $\mathbf{m_2}$, cez ktorú je natiahnuté lano s tuhosťou **k** fixované k základu. Použitím energetickej metódy odvoďte matematický model a zapíšte do maticového tvaru. Určte prenosovú maticu daného kladkového systému **G(s)** z odvodeného matematického modelu.



Obr. 3.65. Kladkový systém

Problém 3.5:

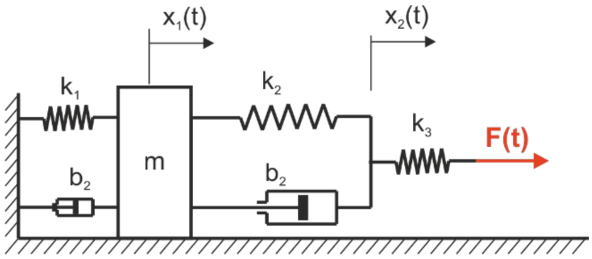
Na Obr. 3.66 je znázornený kmitajúci systém pozostávajúci z valca polomeru **R**, ktorý sa pohybuje po naklonenej rovine. Ak vieme, že tento valec je v spodnej časti fixovaný k základu pružinou s tuhosťou **k** použitím metódy uvoľňovania odvoďte matematický model a nájdite prenosovú funkciu systému **G(s)**.



Obr. 3.66. Valec na naklonenej rovine

Problém 3.6:

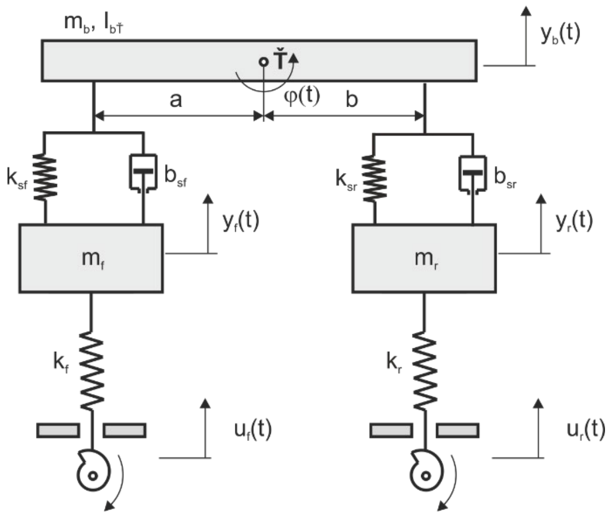
Na Obr. 3.67 je znázornený kmitajúci systém pozostávajúci z hmoty **m**, ktorá kmitá na podložke bez uvažovania trenia. Použitím metódy uvoľňovania odvoďte matematický model, zapíšte do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 3.67. Mechanický systém č. 4

Problém 3.7:

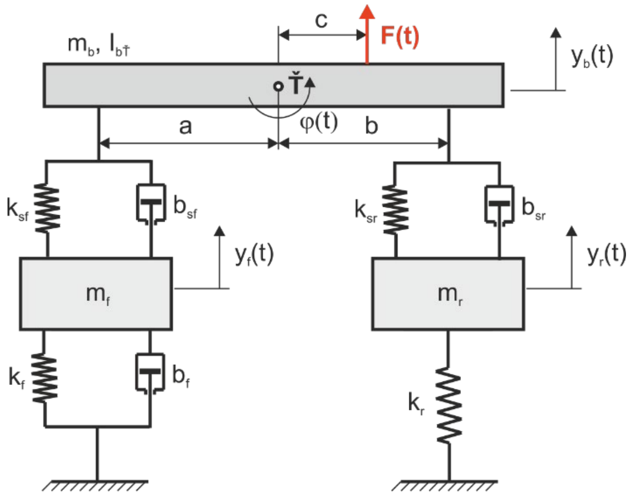
Predpokladajme kmitajúci mechanický systém zobrazený na Obr. 3.68, ktorý pozostáva z troch hmôt a v spodnej časti je budený kinematickým budením. Použitím metódy uvoľňovania odvoďte matematický model a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)** zapísaného v maticovom tvare.



Obr. 3.68. Mechanický systém č. 5

Problém 3.8:

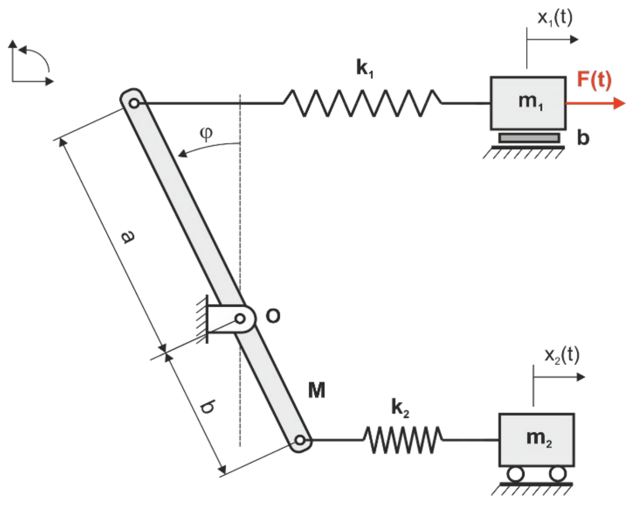
Predpokladajme mechanický systém zobrazený na Obr. 3.69, ktorý pozostáva z troch hmôt a je zaťažený harmonicky meniacou sa silou **F(t)**. Použitím metódy uvoľňovania odvoďte matematický model a určte prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 3.69. Mechanický systém č. 6

Problém 3.9:

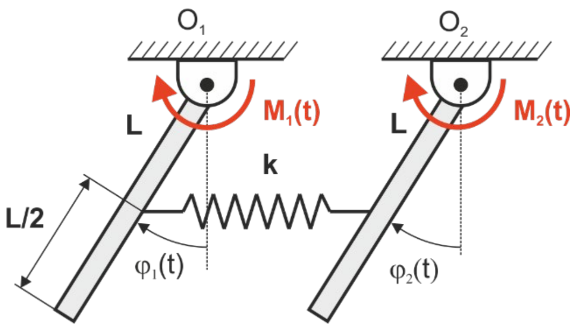
Predpokladajme pákový mechanizmus zobrazený na Obr. 3.70 pozostávajúci z páky zanedbateľnej hrúbky a ďalších dvoch hmôt, z ktorých jedna je budená harmonicky meniacou sa silou **F(t)**. Použitím metódy uvoľňovania odvoďte matematický model tohto systému, zapíšte do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 3.70. Pákový mechanizmus č. 1

Problém 3.10:

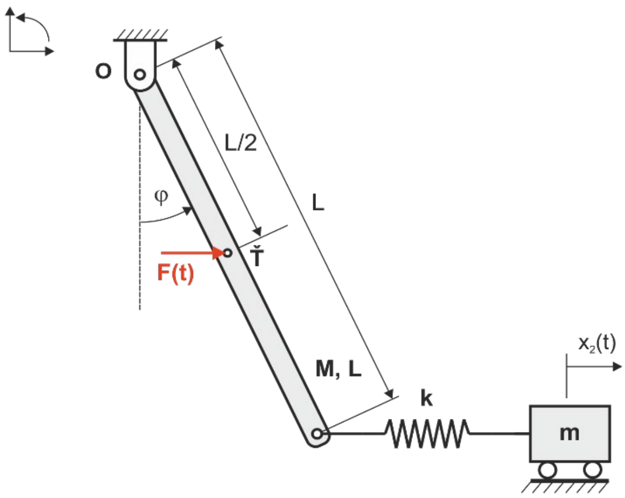
Predpokladajme kmitajúci systém dvoch kyvadiel spojených pružinou s tuhosťou **k** ako je znázornené na Obr. 3.71. Použitím energetickej metódy Lagrangeových rovníc nájdite matematický model takéhoto systému a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 3.71. Systém kyvadiel

Problém 3.11:

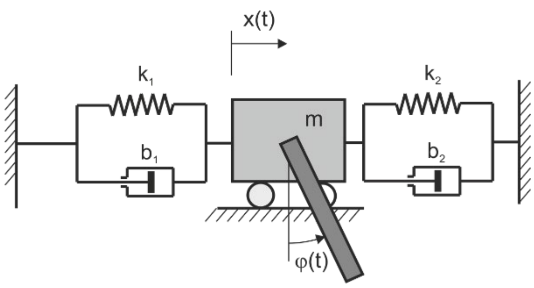
Predpokladajme pákový mechanizmus, ktorý je znázornený na Obr. 3.72. Použitím energetickej metódy odvoďte matematický model takéhoto systému a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 3.72. Pákový mechanizmus č. 2

Problém 3.12:

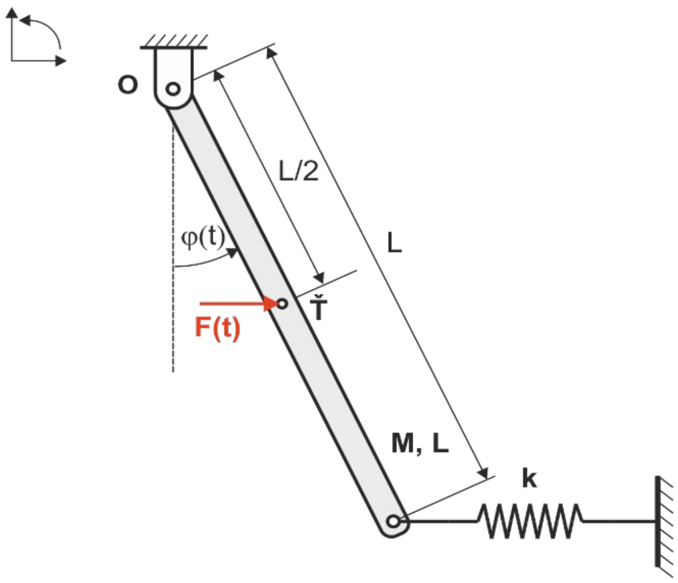
Predpokladajme kmitajúci mechanizmus vozíka a kyvadielka, ktorý je znázornený na Obr. 3.73. Použitím energetickej metódy odvoďte matematický model takéhoto systému, zapíšte do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 3.73. Vozík s kyvadielkom

Problém 3.13:

Predpokladajme pákový mechanizmus, ktorý je znázornený na Obr. 3.74. Páka tohto mechanizmu je v dolnej časti fixovaná k základu pružinou s tuhosťou **k**. Použitím metódy uvoľňovania odvoďte matematický model takéhoto systému, zapíšte do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 3.74. Pákový mechanizmus č. 3

4 ELEKTRICKÝ SYSTÉM

Mnohé inžinierske systémy majú **elektrické**, **elektronické** alebo **elektro-mechanické** subsystémy ako ich dôležité komponenty. Sú to napr. **zdroje elektrickej energie**, **elektro-motory**, **senzory** a **regulátory**. **Elektrické obvody**, ktoré sa v súčasnosti používajú v aplikáciách mnohých inžinierskych systémov, sú neoddeliteľnou súčasťou prakticky každého moderného mechatronického systému. Má teda veľký význam venovať týmto systémom patričnú pozornosť. Z toho dôvodu sa v tejto kapitole budeme zaoberať práve modelovaniu systémov **elektrickej fyzikálnej podstaty**. Ukážeme si, ako tvoriť matematické modely pre jednoduché príklady elektrických obvodov.

V úvode kapitoly si podobne ako v prípade mechanického systému zadefinujeme teoretické základy, ktoré platia pre dané elektrické systémy a takisto zadefinujeme vzťahy pre základné stavebné prvky elektrického systému.

Medzi základné stavebné prvky elektrického systému radíme **rezistory**, **cievky** a **kondenzátory**. Pri tvorbe matematického modelu budeme využívať dva základné fyzikálne zákony a to **Kirchhoffove zákony** pre **napätie** a **elektrický prúd**.

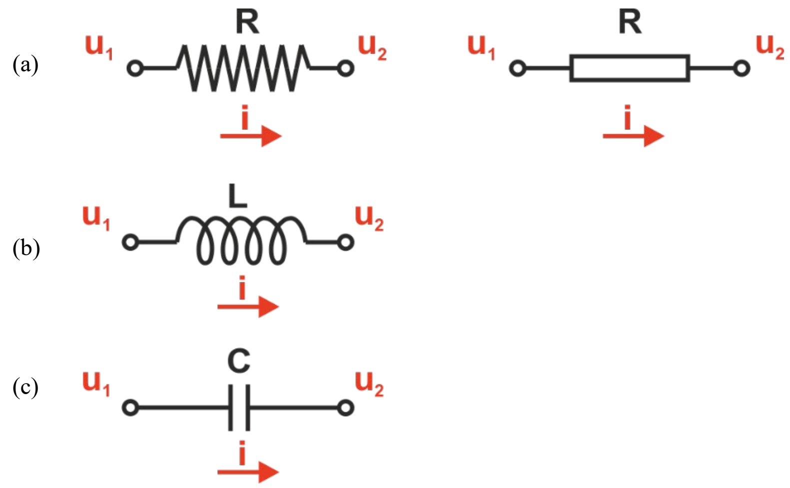
Okrem jednoduchých elektrických obvodov sa zameriame takisto na elektrické obvody, ktoré vo svojich schémach obsahujú jednoduché typy **operačných zosilňovačov**. Na jednoduchých príkladoch si ukážeme význam zapojenia takýchto **aktívnych prvkov** do elektrického obvodu a vysvetlíme spôsob tvorby matematického modelu, ktorý takýto operačný zosilňovač obsahuje.

V samostatnej podkapitole na záver si vysvetlíme princíp modelovania elektro-mechanických systémov, ktorý je prepojením **elektrického** a **mechanického** systému. Spôsob modelovania **elektro-mechanického systému** si vysvetlíme a ukážeme na modelovaní jednoduchých typov elektromotorov.

4.1 ZÁKLADNÉ PRVKY ELEKTRICKÉHO SYSTÉMU

Elektrické systémy a **elektrické obvody** možno charakterizovať ako prepojenie sústredených základných elektrických elementov, ktorými sú **cievky** predstavujúce **indukčné prvky**, ďalej **kondenzátory**, ktoré predstavujú **kapacitné prvky** a napokon **rezistory**, ktoré charakterizujeme ako **odporové prvky**. Okrem týchto základných prvkov sa v elektrických obvodoch nachádzajú rôzne zdroje elektrickej energie a to buď **napäťové** alebo **prúdové**.

Rezistory, **kondenzátory** a **cievky** dokážu **elektrickú energiu** uchovávať alebo ju pohlcovať, nedokážu však elektrickú energiu do elektrického obvodu priviesť príp. ju zosilniť. Z tohto dôvodu tieto prvky elektrického systému nazývame **pasívne** prvky. Na druhej strane v elektrickom obvode môžu byť zapojené aj také prvky, ktoré dokážu elektrickú energiu do systému dodať, ovplyvniť alebo zosilniť. Takéto prvky elektrických obvodov potom nazývame **aktívne** prvky, napr. **elektrický zdroj, tranzistor, dióda, transformátor** a iné. Schematické značky základných elektrických stavebných prvkov, ktoré sa používajú pri tvorbe elektrických obvodov sú znázornené na nasledujúcom Obr. 4.1.



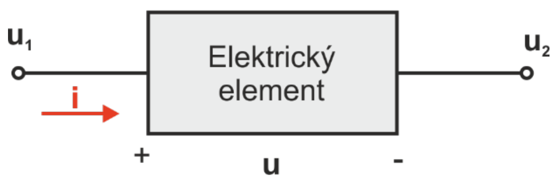
Obr. 4.1. Stavebné prvky elektrického systému, (a) odpor, (b) cievka, (c) kondenzátor

Medzi dve základné fyzikálne veličiny, ktoré sa používajú na opis dynamického správania sa elektrického systému radíme **elektrický prúd i** a **elektrické napätie u**. Elektrický prúd je definovaný ako zmena **elektrického náboja** za jednotku času:

$$i = \frac{dq}{dt}, \tag{4.1}$$

kde **q** je náboj fyzikálnej jednotky **Coulomb (C)** a **i** je elektrický prúd fyzikálnej jednotky **Ampér (A)**.

Pre jeden dvojterminálový elektrický element (element, ktorý má dva terminály na zapojenie do elektrického obvodu, na ktorých nameriame potenciály napätí $\mathbf{u_1}$ a $\mathbf{u_2}$) zobrazený na Obr. 4.2 musí platiť, že **elektrický prúd** vstupujúci na jednom konci vstupného terminálu sa musí rovnať **elektrickému prúdu** vystupujúceho z elementu na výstupnom terminály. Smer toku elektrického prúdu elementom je označený šípkou. Poznamenajme, že elektrický prúd vždy smeruje od **kladného** pólu k **zápornému** pólu (kladný pól sa vždy považuje za pól s vyšším potenciálom).



Obr. 4.2. Elektrický element

Elektrické napätie v ľubovoľnom bode elektrického obvodu meriame ako **potenciálový rozdiel** medzi meraným a referenčným bodom, ktorý nazývame **uzemnenie** (z angl. **ground** – miesto s nulovým potenciálom). Jednotka napätia je jeden volt **(V)**. Ak má niektorý bod v elektrickom obvode rovnaký potenciál ako uzemnenie, potom je jeho napätie vždy nulové. Ak má **dvoj-terminálovým elektrickým** elementom podľa Obr. 4.2 pretekať elektrický prúd musí platiť, že napätia na oboch jeho koncoch majú rozdielne potenciály.

Potom napätie na tomto elemente je dané práve týmto potenciálovým rozdielom

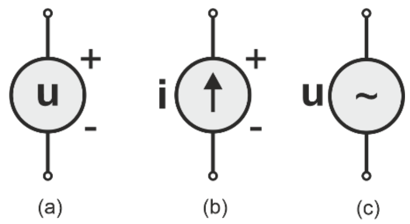
$$u = u_1 - u_2\,, \qquad (4.2)$$

kde **u** je celkové napätie na elemente. Zmysel indikovaného napätia je daný smerom od kladného k zápornému znamienku. **Terminál** s **kladným** znamienkom má vždy vyšší potenciál ako potenciál na terminály so znamienkom **mínus**. To znamená, že kladný smer elektrického prúdu je uvažovaný vždy od terminálu s vyšším napätím k terminálu s nižším potenciálom napätia.

Privedená elektrická energia je elektrickým elementom buď **pohltená** alebo **uchovaná**. V tomto prípade tieto elementy nazývame **pasívne elementy**. V prípade **aktívneho elementu** elektrický prúd prúdi v opačnom smere poklesu napätia a dodáva energiu zvyšku elektrickému obvodu. Energia dodaná **aktívnym prvkom** alebo spotrebovaná a uchovaná **pasívnym prvkom** je daná výkonom, ktorý je definovaný vzťahom:

$$P = u \cdot i\,. \qquad (4.3)$$

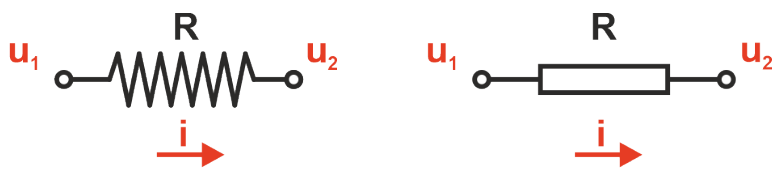
Aktívny prvok elektrického obvodu možno modelovať ako **ideálny prúdový** alebo **napäťový zdroj** ako je znázornené na nasledujúcom Obr. 4.3.



Obr. 4.3: Schematické značky zdrojov: (a) napäťový, (b) prúdový, (c) zdroj striedavého napätia

4.2 ELEKTRICKÝ ODPOR – REZISTOR

Elektrický odpor je fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje schopnosť materiálu brániť prechodu elektricky nabitých častíc. Schematická značka elektrického odporu je znázornená na Obr. 4.4.



Obr. 4.4. Schematická značka elektrického odporu (rezistora)

Ak je na zariadenie privedené **elektrické napätie** schopnosť viesť elektrický prúd závisí od konštrukcie zariadenia. **Ideálny izolant** nevedie žiaden **elektrický prúd**; nakoľko nedochádza v jeho prípade k výmene a pohybu elektrónov. Izolanty (ako sú sklo, drevo, guma, plasty a iné) izolujú elektrické napätie od elektricky nabitých komponentov a chránia ich pred elektrických šokom.

Na druhej strane, **dokonalý vodič** (zlato, striebro, meď a pod.) dokáže viesť elektrický prúd bez akýchkoľvek obmedzí pohybu jeho elektrónov. Niekde medzi dokonalými izolantmi a vodičmi sa nachádzajú **elektrické odpory**, pri ktorých možno očakávať určitý stupeň obmedzenia pohybu elektrónov. Tieto elementy v elektrických obvodoch nazývame **elektrické rezistory**.

Elektrický prúd v **elektrickom rezistore** je limitovaný a jeho veľkosť je priamo úmerná privedenému elektrickému napätiu. Medzi elektrickým prúdom **i**, ktorý prechádza odporom a napätím **u** platí lineárny vzťah daný **Ohmovým zákonom**

$$\begin{aligned} u &= R \cdot i\,, \\ u_1 - u_2 &= R \cdot i\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

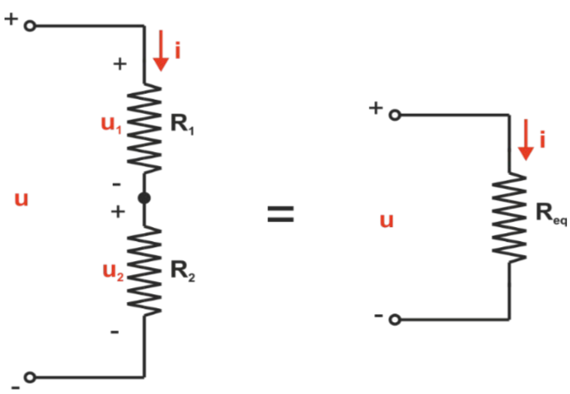
Rezistor v elektrickom obvode pohlcuje časť elektrickej energie a transformuje ju na iný druh energie, napr. **tepelnú** alebo **svetelnú**. Rezistor nemá v elektrickom obvode schopnosť túto energiu uchovávať. Výkon pohltenej energie možno vyjadriť nasledovný vzťahom:

$$P = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R}\,. \tag{4.5}$$

V mnohých elektrických systémoch sa používajú multi-rezistory, ktoré môžu byť usporiadané v mnohých konfiguráciách napr. **sériovo, paralelne** alebo ich **kombináciou**. Nájdením ekvivalentného rezistora sa dajú elektrické schémy zjednodušiť. Nasledujúci Obr. 4.5 znázorňuje zapojenie **rezistorov v sérií**.

4.2.1 Ekvivalentný odpor n-sériovo zapojených elektrických odporov

Pri sériovom zapojení platí, že **elektrický prúd i**, ktorý prechádza rezistorom $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$ je rovnaký. Nájdime vzťah pre ekvivalentný rezistor $\mathbf{R_{eq}}$, ktorým možno nahradiť rezistory $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$.



Obr. 4.5. Sériové zapojenie rezistorov

Ak rezistormi prechádza rovnaký elektrický prúd, potom napätia na jednotlivých rezistoroch možno vypočítať na základe **Ohmovho zákona**, podľa ktorého platí

$$u_1 = R_1 \cdot i, \quad u_2 = R_2 \cdot i, \tag{4.6}$$

kde $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ predstavujú napätia merané na jednotlivých odporoch. Pre **celkové napätie** v elektrickom obvode musí platiť, že napätie na zdroji sa rozloží rovnomerne na jednotlivé odpory

$$u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2) \cdot i\,. \tag{4.7}$$

Porovnaním tohto výsledku s **ekvivalentným elektrickým obvodom**, kde $\mathbf{u = R_{eq} \cdot i}$ podľa Obr. 4.5 musí platiť, že

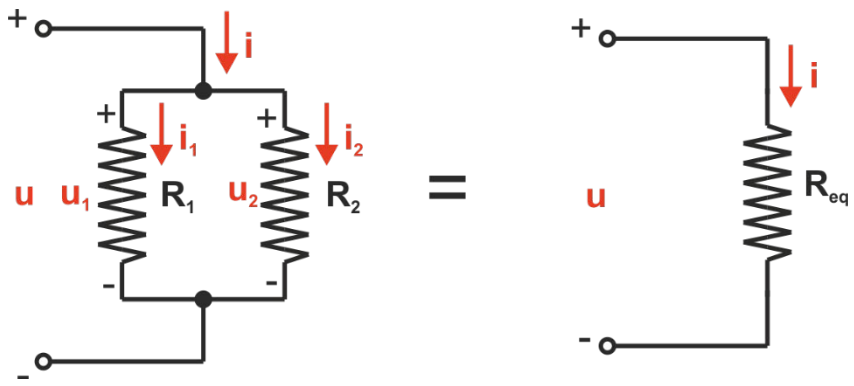
$$R_{eq} = R_1 + R_2\,. \tag{4.8}$$

Zovšeobecnením predchádzajúcej rovnice pre **n-sériovo zapojených rezistorov** bude potom platiť, že

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i\,. \tag{4.9}$$

4.2.2 Ekvivalentný odpor n-paralelne zapojených elektrických odporov

Elektrický obvod dvoch **paralelne zapojených rezistorov** je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.6. Nájdime **ekvivalentný elektrický odpor**, ktorým možno tieto dva odpory nahradiť.



Obr. 4.6. Paralelne zapojené rezistory

Poznamenajme, že **paralelne zapojené rezistory** zdieľajú terminály. To znamená, že napätie na každom rezistore musí byť rovnaké $\mathbf{u = u_1 = u_2}$.

Na základe **Ohmovho zákona** platí, že

$$u_1 = u = R_1 \cdot i_1, \quad u_2 = u = R_2 \cdot i_2, \tag{4.10}$$

kde $\mathbf{i_1}, \mathbf{i_2}$ predstavujú elektrické prúdy pretekajúce jednotlivými odpormi. Aplikovaním **zákona zachovania elektrického náboja** resp. **I. Kirchhoffovho zákona** pre uzlový bod v elektrickom obvode musí platiť, že

$$i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) u\,. \tag{4.11}$$

Porovnaním tohto výsledku s ekvivalentným elektrickým obvodom podľa Obr. 4.6, kde $\mathbf{i} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{R_{eq}}}$ dostávame, že

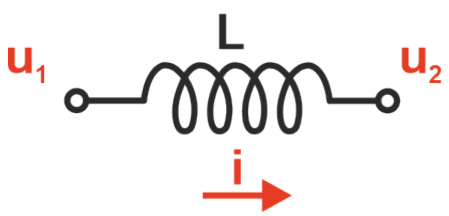
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\,. \tag{4.12}$$

Zovšeobecnením predchádzajúcej rovnice pre **n-paralelne zapojených rezistorov** bude platiť

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\,. \tag{4.13}$$

4.3 INDUKČNÝ PRVOK – CIEVKA

Cievka (z angl. **induktor**), ktorej schematická značka je znázornená na nasledujúcom Obr. 4.7. predstavuje v elektrickom obvode **indukčný stavebný prvok**.



Obr. 4.7. Schematická značka elektrickej cievky (induktora)

Ak uvažujeme, že cievka je ideálny induktor, potom vzťah medzi napätím na cievke **u** možno opísať ako proporcionálnu závislosť napätia **u** k zmene elektrického prúdu **i**, ktorý danou cievkou prechádza v čase **t**.

To znamená, že ak poznáme indukčnosť danej cievky **L**, potom pre cievku platí tento vzťah daný **Joule-Lenzovým zákonom**

$$u = L\frac{di}{dt} = LDi\,,$$
$$u_1 - u_2 = L\frac{di}{dt} = LDi \tag{4.14}$$

alebo

$$i = \frac{1}{L}\int u\,dt = \frac{u}{LD}\,,$$
$$i = \frac{1}{L}\int (u_1 - u_2)\,dt = \frac{u_1 - u_2}{LD}\,, \tag{4.15}$$

kde **D** je operátor derivácie, ktorý prevádza diferenciálnu rovnicu na algebrickú formu a **L** je indukčnosť cievky, ktorej fyzikálna jednotka je **1 Henry (H).** Cievka v elektrickom obvode na rozdiel od rezistora dokáže **uchovávať elektrickú energiu** vo forme **magnetického poľa**. Množstvo takto uchovanej energie $\mathbf{E(t)}$ možno vypočítať integrovaním výkonu

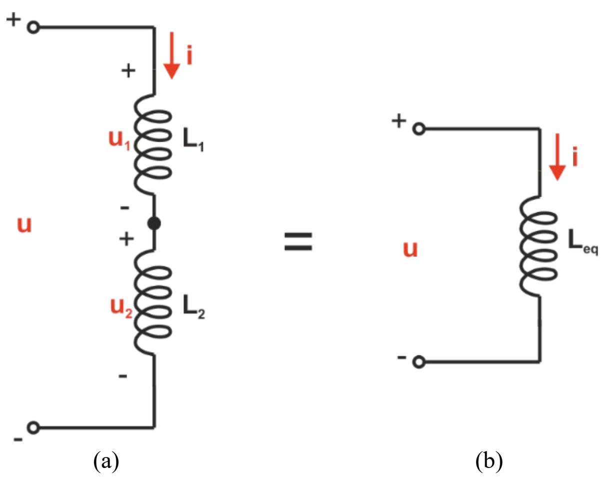
$$P = u \cdot i = \left(L\frac{di}{dt}\right) \cdot i\,. \tag{4.16}$$

Ak uvažujeme, že v čase **t = 0** prechádzal cievkou nulový prúd $\mathbf{i(0) = 0}$, potom platí, že

$$E(t) = \int_0^t P(t)dt = \int_0^t \left(L\frac{di}{dt}\right) \cdot idt = \int_0^t L \cdot i(t)\,di = \frac{1}{2}L[i^2(t)]_0^t = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(0)$$
$$= \frac{1}{2}Li^2(t)\,. \tag{4.17}$$

4.3.1 Ekvivalentná indukčnosť n-sériovo zapojených cievok

Nasledujúci Obr. 4.8 (a) znázorňuje zapojenie **cievok v sérií**. Pri sériovom zapojení **elektrický prúd i**, ktorý prechádza cievkou s indukčnosťou $\mathbf{L_1}$ a $\mathbf{L_2}$ je rovnaký.



Obr. 4.8. (a) Sériové zapojenie cievok, (b) ekvivalentná cievka

Podobným spôsobom ako pre **rezistory** možno odvodiť **ekvivalentnú indukčnosť L_{eq}** podľa Obr. 4.8 (b), tak aj pre cievky zapojené v sérií a teda musí platiť, že

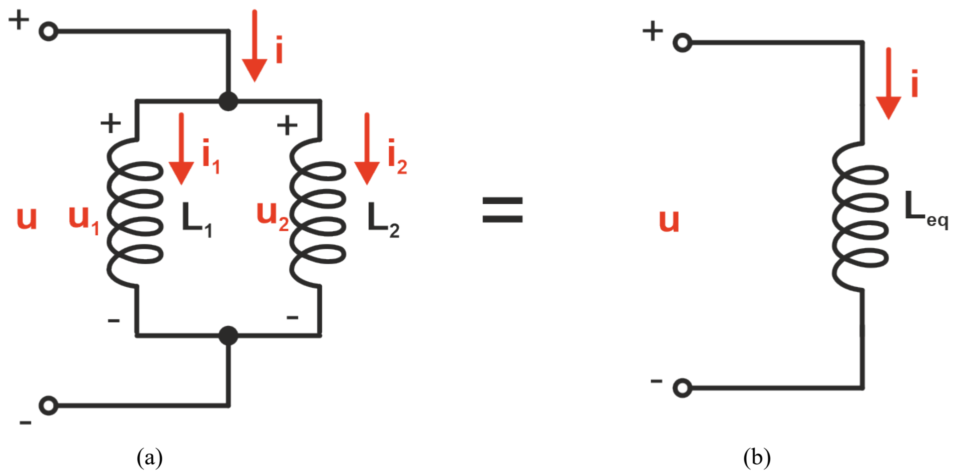
$$L_{eq} = L_1 + L_2\,, \tag{4.18}$$

potom pre **n-sériovo zapojené cievky** bude platiť

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^{n} L_i\,. \tag{4.19}$$

4.3.2 Ekvivalentná indukčnosť n-paralelne zapojených cievok

Elektrický obvod **dvoch paralelne zapojených cievok** je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.9 (a), nájdime vzťah pre **ekvivalentnú indukčnosť**, ktorou možno tieto dve cievky nahradiť.



Obr. 4.9. (a) Paralelne zapojené cievky, (b) ekvivalentná cievka

V tomto prípade bude platiť, že **ekvivalentnú indukčnosť L_{eq}** podľa Obr. 4.9 (b) možno vypočítať na základe vzťahu

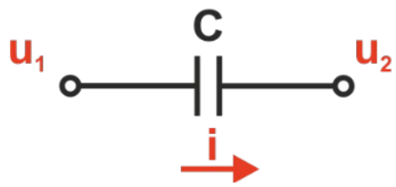
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \Rightarrow L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{4.20}$$

a v prípade **n-paralelne zapojených cievok** pre ekvivalentnú indukčnosť bude platiť tento vzťah

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}\,. \tag{4.21}$$

4.4 KAPACITNÝ PRVOK – KONDENZÁTOR

Elektrická kapacita je schopnosť elektrického komponentu (elektrického kondenzátora) uchovávať elektrický náboj. Elektrický **kondenzátor** dokáže uchovať elektrický náboj na dvoch paralelných platniach, ktoré sú navzájom oddelené **dielektrickým materiálom**. Schematická značka **kondenzátora** (z angl. kapacitora) je znázornená na nasledujúcom Obr. 4.10.



Obr. 4.10. Schematická značka kondenzátora

Elektrická kapacita kondenzátora je daná veľkosťou náboja, ktorý je kondenzátor schopný uchovať medzi platňami. **Celkový elektrický náboj**, ktorý dokáže kondenzátor uchovať medzi platňami je daný počtom elektrónov naakumulovanými medzi týmito platňami. Medzi elektrickým napätím **δU** privedeným na svorky kondenzátora a elektrickým prúdom **i** existuje priamoúmerný vzťah daný nasledujúcou integrálnou rovnicou

$$\delta U = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I\,dt\,. \qquad (4.22)$$

Pre kondenzátor je v každom čase **potenciálny rozdiel napätia** závislý od zmeny elektrického náboja medzi platňami kondenzátora. Potom musí platiť, že

$$u = \frac{q}{C} \Longrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}i\,, \qquad (4.23)$$

kde **C** nazývame **elektrickou kapacitou kondenzátora**. Fyzikálna jednotka kapacity je **1 Farad (F)**.

Ak teda kondenzátorom preteká elektrický prúd **i**, medzi napätím **u** a elektrickým prúdom **i** platí tento vzťah

$$\begin{aligned} i &= C\frac{du}{dt} = CDu\,, \\ i &= C\frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = CD(u_1 - u_2) \end{aligned} \qquad (4.24)$$

alebo

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{i}{CD}\,, \\ u_1 - u_2 &= \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{i}{CD}\,. \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Kondenzátor podobne ako **cievka** dokáže uchovávať **elektrickú energiu**. V tomto prípade vo forme **elektrického náboja**. Veľkosť **elektrickej energie**, ktorú je kondenzátorom schopný naakumulovať možno vypočítať integrovaním výkonu

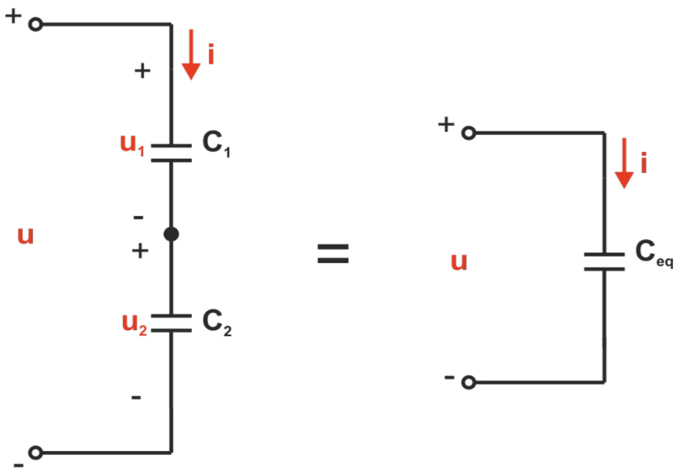
$$P = u \cdot i = u \cdot \left(C \frac{du}{dt}\right), \qquad (4.26)$$

ak uvažujeme, že v čase **t = 0** bolo počiatočné napätie na kondenzátore nulové, tzn. že $\mathbf{u(0) = 0}$, potom musí platiť, že

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^t P(t)dt = \int_0^t u \cdot \left(C \frac{du}{dt}\right) dt = \int_0^t C \cdot u(t)\, du = \frac{1}{2} C [u^2(t)]_0^t \\ &= \frac{1}{2} L u^2(t) - \frac{1}{2} L u^2(0) = \frac{1}{2} L u^2(t)\,. \end{aligned} \qquad (4.27)$$

4.4.1 Ekvivalentný kondenzátor n-sériovo zapojených kondenzátorov

Nasledujúci Obr. 4.11 (a) znázorňuje zapojenie **kondenzátorov v sérií**. Pri sériovom zapojení **elektrický prúd i**, ktorý prechádza kondenzátormi s kapacitou $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$ je rovnaký.



(a) (b)

Obr. 4.11. (a) Sériové zapojenie kondenzátorov, (b) ekvivalentný kondenzátor

Podobným spôsobom ako pre **rezistory** možno odvodiť **ekvivalentnú kapacitu** $\mathbf{C_{eq}}$ podľa Obr. 4.11 (b). Pre kondenzátory zapojené v sérií bude platiť

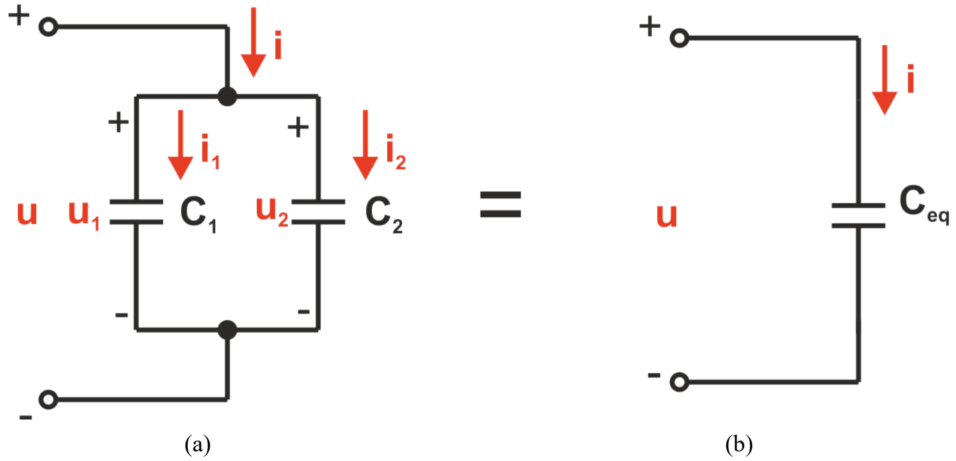
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,. \qquad (4.28)$$

a pre **n-sériovo zapojených kondenzátorov** bude platiť, že

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \tag{4.29}$$

4.4.2 Ekvivalentný kondenzátor n-paralelne zapojených kondenzátorov

Elektrický obvod **paralelne zapojených kondenzátorov** je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.12 (a). Nájdime ekvivalentnú kapacitu, ktorou možno tieto dva kondenzátory nahradiť.



Obr. 4.12. (a) Paralelne zapojené kondenzátory, (b) ekvivalentný kondenzátor

V tomto prípade bude platiť, že **ekvivalentnú kapacitu C_{eq}** podľa Obr. 4.12 (b) možno vypočítať na základe vzťahu

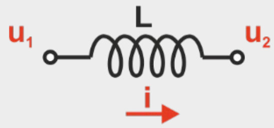
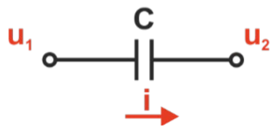
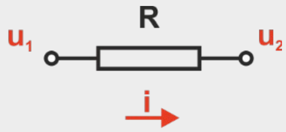
$$C_{eq} = C_1 + C_2 \tag{4.30}$$

a v prípade **n-paralelne zapojených kondenzátorov** bude zase platiť tento vzťah

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i\,. \tag{4.31}$$

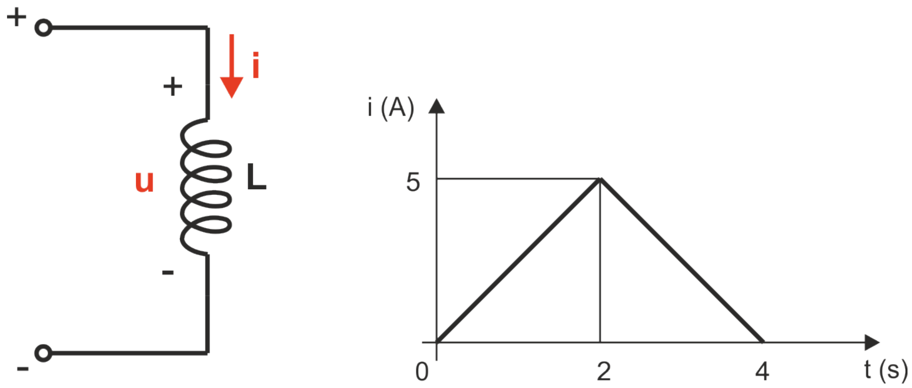
V nasledujúcej tabuľke sú zhrnuté všetky komponentné vzťahy pre jednotlivé stavebné bloky elektrického systému ako sú **rezistor, kondenzátor** a **cievka**, ktoré možno využiť pre modelovanie elektrických systémov.

Tabuľka 4.1. Základné stavebné prvky elektrického systému

Stavebný prvok	Opis rovnice	Uchovaná alebo pohltená energia
Cievka 	$u = L\frac{di}{dt} = LDi$ $u_1 - u_2 = L\frac{di}{dt} = LDi$ alebo $i = \frac{1}{L}\int u\,dt = \frac{u}{LD}$ $i = \frac{1}{L}\int (u_1 - u_2)\,dt = \frac{u_1 - u_2}{LD}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$
Kondenzátor 	$u = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{i}{CD}$ $u_1 - u_2 = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{i}{CD}$ alebo $i = C\frac{du}{dt} = CDu$ $i = C\frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = CD(u_1 - u_2)$	$E = \frac{1}{2}Cu^2$
Rezistor  	$i = \frac{u}{R} = \frac{u_1 - u_2}{R}$ $u = i \cdot R$ $u_1 - u_2 = i \cdot R$	$P = \frac{u^2}{R}$

Príklad č. 4.1:

Elektrický prúd prechádzajúci cievkou s indukčnosťou **L = 10 mH** sa mení podľa grafu zobrazeného na Obr. 4.13. Vypočítajte, ako sa mení napätie na cievke a takisto veľkosť elektrickej energie cievkou uchovanej v čase **t = 2 s** a **t = 4 s**.



Obr. 4.13. Cievka s indukčnosťou L a priebeh elektrického prúdu i(t)

Nájdime najskôr matematickú funkciu, ktorá opisuje priebeh elektrického prúdu **i(t)** v čase **t**. Pre elektrický prúd **i(t)** možno nájsť túto zloženú matematickú funkciu:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}t & t \in \langle 0,2 \rangle \\ -\frac{5}{2}t + 10 & t \in \langle 2,4 \rangle . \end{cases} \tag{4.32}$$

Pre napätie **u** na cievke musí platiť rovnica

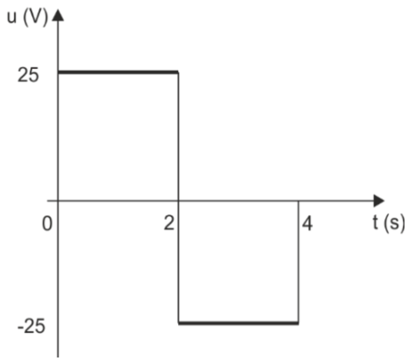
$$u = L\frac{di}{dt}, \tag{4.33}$$

to znamená, že pre náš prípad **u** napätie na cievke je definované ako

$$u(t) = \begin{cases} 25 & t \in \langle 0,2 \rangle \\ -25 & t \in \langle 2,4 \rangle . \end{cases} \tag{4.34}$$

Priebeh zmeny napätia **u(t)** je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.14. Teraz vypočítame veľkosť uchovanej energie v čase **t = 2 s** a **t = 4 s** týmto spôsobom

$$\begin{gathered} E(t=2) = \frac{1}{2}Li^2(t=2) = \frac{1}{2}10\ \mathrm{mH}\cdot\frac{25}{4}2^2 = 125\ \mathrm{mHs}^2\,, \\ E(t=4) = \frac{1}{2}Li^2(t=4) = \frac{1}{2}10\ \mathrm{mH}\cdot\left[-\frac{5}{2}4+10\right]^2 = 0\ \mathrm{mHs}^2\,. \end{gathered} \tag{4.35}$$



Obr. 4.14. Priebeh napätia na kondenzátore u(t)

4.5 ELEKTRICKÉ OBVODY

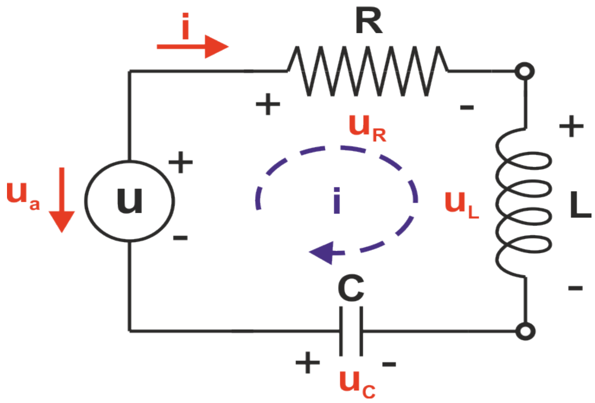
Keď sú elektrické komponenty zapojené do formy elektrického obvodu – matematický model dynamického systému možno odvodiť použitím **napäťovo-prúdových** vzťahov medzi elementami opisovanými na základe fyzikálnych zákonov. Vo fyzike, poznáme dva základne fyzikálne zákony **I. Kirchhoffov zákon** pre elektrický prúd a **II. Kirchhoffov zákon** pre elektrické napätie.

4.5.1 II. Kirchhoffov zákon

II. Kirchhoffov zákon (o napätí, o slučkách) formuluje pre elektrické obvody **zákon zachovania elektrickej energie**; hovorí, že súčet úbytkov napätí na spotrebičoch sa v uzavretej časti elektrického obvodu (slučke) rovná súčtu **elektromotorických napätí zdrojov** v tejto časti obvodu, tzn. že súčet všetkých napätí na zdrojoch a jednotlivých elementov v danej slučke musí byť rovný nule

$$\sum_{j} u_j = 0\,, \qquad (4.36)$$

kde $\mathbf{u_j}$ je napätie na **j-tom** prvku slučky obvodu. Ako príklad pre aplikovania **II. Kirchhoffovho zákona pre napätie** predpokladáme sériovo zapojený **RLC obvod** zobrazený na nasledujúcom Obr. 4.15.



Obr. 4.15. Sériový RLC obvod

Podľa **II. Kirchhoffovho zákona** pre tento obvod platí, že súčet napätí v slučke musí byť rovný nule a teda

$$u_a = u_R + u_L + u_C \quad \text{alebo} \quad u_R + u_L + u_C - u_a = 0\,. \tag{4.37}$$

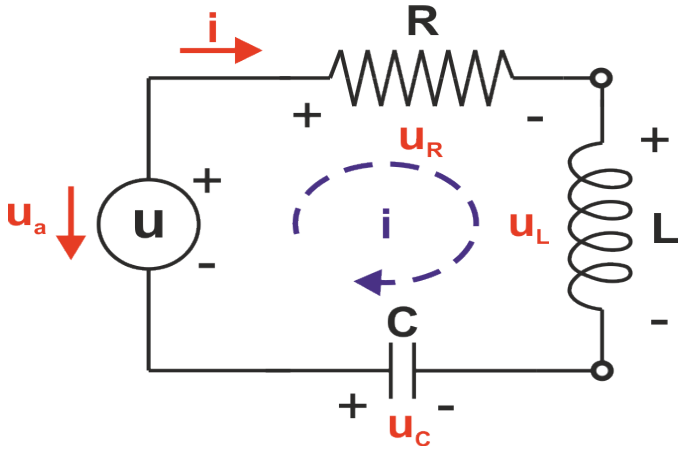
Príklad č. 4.2. Sériový RLC obvod

Sériový RLC obvod je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.16. Vykonajte tieto úlohy:

a) odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje zmenu elektrického prúdu **i** v danom obvode,

b) nájdite prenosovú funkciu $\mathbf{I(s)/U_a(s)}$, ktorá opisuje vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$ a elektrickým prúdom **i(t)**,

c) nájdite prenosovú funkciu $\mathbf{U_C(s)/U_a(s)}$, ktorá opisuje vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$ a napätím na kondenzátore $\mathbf{u_c(t)}$



Obr. 4.16. Sériový RLC obvod

Už vieme, že aplikovaním **II. Kirchhoffovho zákona** pre uzavretú slučku tohto **RLC elektrického obvodu** v smere hodinových ručičiek platí, že

$$u_R + u_L + u_C - u_a = 0\,. \tag{4.38}$$

V prípade sériového zapojenia jednotlivých komponentov preteká obvodom rovnaký elektrický prúd **i**. Teda možno napísať tieto zložkové rovnice pre jednotlivé prvky ako

$$\begin{aligned} u_R &= Ri\,, \\ u_L &= L\frac{di}{dt}\,, \\ u_C &= \frac{1}{C}\int i\,dt\,. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Dosadením komponentných rovníc do slučkovej do rovnice dostávame

$$\begin{aligned} u_R + u_L + u_C - u_a &= 0\,, \\ Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt &= u_a\,. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Poznamenajme, že v tomto prípade sme odvodili **integračno-diferenciálnu rovnicu**, ktorá nie je čisto diferenciálnou rovnicou. Aby sme eliminovali integrál derivujme celú rovnicu podľa času **t**.

$$\begin{aligned} L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} &= \frac{du_a}{dt}\,, \\ L\ddot{i}(t) + R\dot{i}(t) + \frac{i(t)}{C} &= \dot{u}_a(t)\,, \end{aligned} \tag{4.41}$$

ak $\mathbf{u_a}$ je konštantné, potom sa dá rovnica zjednodušiť na tvar

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0\,. \tag{4.42}$$

Nájdime teraz **prenosovú funkciu** systému využitím **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok pre elektrický prúd $\mathbf{\frac{di}{dt}(0) = i(0) = 0}$ a dostávame

$$Ls^2I(s) + RsI(s) + \frac{1}{C}I(s) = sU_a(s)\,. \tag{4.43}$$

To znamená, že prenosová funkcia opisujúca vzťah medzi elektrickým prúdom a vstupným napätím $\mathbf{I(s)/U_a(s)}$ je daná ako

$$\begin{aligned} \left[Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}\right]I(s) &= sU_a(s)\,, \\ G(s) = \frac{I(s)}{U_a(s)} &= \frac{s}{Ls^2 + Rs + 1/C}\,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Poznamenajme, že **napätie na kondenzátore** $\mathbf{u_C}$ sa nevyskytuje priamo v odvodenej diferenciálnej rovnici. Pre určenie prenosovej funkcie $\mathbf{U_C(s)/U_a(s)}$, preto využijeme výsledok predchádzajúcej prenosovej funkcie $\mathbf{I(s)/U_a(s)}$ a aplikujeme vzťah pre kondenzátor

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt\,. \tag{4.45}$$

Použitím **Laplaceovej transformácie** na prechádzajúci vzťah definujúci kondenzátor platí, že

$$\mathrm{U_C(s)} = \frac{\mathrm{I(s)}}{\mathrm{Cs}} \Longrightarrow \mathrm{I(s)} = \mathrm{CsU_C(s)} \tag{4.46}$$

a teda napokon dosadením tohto výrazu do predchádzajúceho výsledku dostávame hľadanú **prenosovú funkciu** opisujúcu vzťah medzi napätím na kondenzátore $\mathbf{u_C}$ a napätím na zdroji $\mathbf{u_a}$ v tvare

$$\begin{gathered}\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{I(s)}}{\mathrm{U_a(s)}} = \frac{\mathrm{Cs \cdot U_C(s)}}{\mathrm{U_a(s)}} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{Ls^2 + Rs + 1/C}}, \\ \frac{\mathrm{U_C(s)}}{\mathrm{U_a(s)}} = \frac{1}{\mathrm{Cs}}\frac{\mathrm{I(s)}}{\mathrm{U_a(s)}} = \frac{1}{\mathrm{LCs^2 + RCs + 1}}.\end{gathered} \tag{4.47}$$

4.5.2 I. Kirchhoffov zákon

I. Kirchhoffov zákon opisuje zákon zachovania elektrického náboja; hovorí, že v každom bode (uzle) elektrického obvodu platí, že súčet prúdov vstupujúcich do uzla sa rovná súčtu prúdov z uzla vystupujúcich. Ak terminály dvoch alebo viacerých elementov elektrického obvodu sú navzájom spojené spoločne, potom tento bod spojenia nazývame **uzlom**. Pre ľubovoľný uzol v elektrickom obvode možno **I. Kirchhoffov zákon**, matematicky zapísať ako

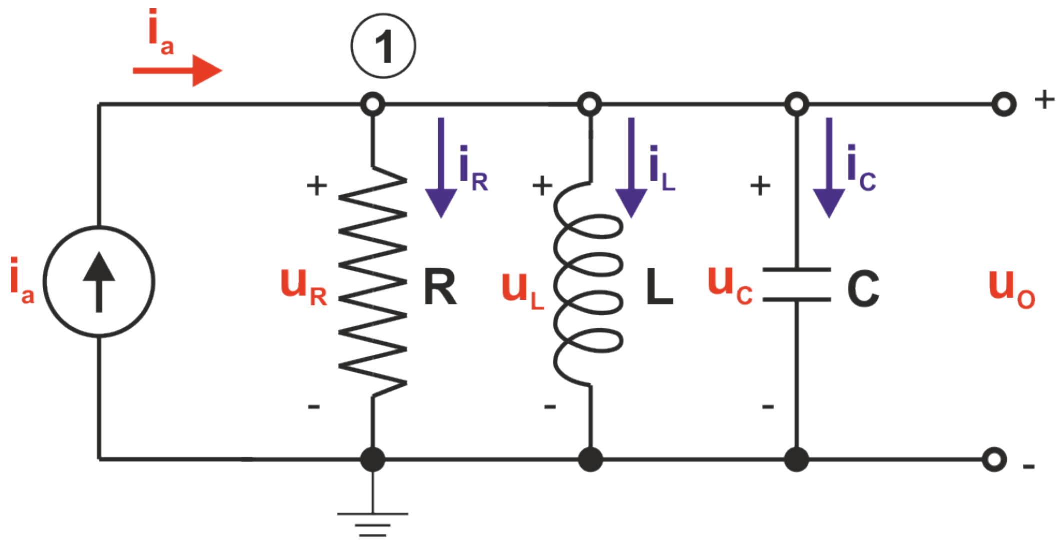
$$\sum_{\mathrm{j}} \pm \mathrm{i_j} = 0\,, \tag{4.48}$$

kde $\mathbf{i_j}$ je elektrický prúd **j-tého** elementu v uzle.

Príklad č. 4.3. Paralelný RLC obvod

Paralelný RLC obvod je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.17. Elektrický obvod je budený ideálnym prúdovým zdrojom $\mathbf{i_a(t)}$. Vykonajte tieto úlohy:

a) odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje zmenu napätia $\mathbf{u_o(t)}$ na výstupe pre vstupný prúd $\mathbf{i_a(t)}$,
b) nájdite prenosovú funkciu $\mathbf{U_o(s)/I_a(s)}$, ktorá opisuje vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_o(t)}$ a elektrickým prúdom $\mathbf{i_a(t)}$,
c) nájdite prenosovú funkciu $\mathbf{I_L(s)/I_a(s)}$, ktorá opisuje vzťah medzi elektrickým prúdom na cievke $\mathbf{i_L(t)}$ a vstupným elektrickým prúdom $\mathbf{i_a(t)}$.



Obr. 4.17. Paralelný RLC obvod

Pre tri elektrické prúdy možno vybrať jeden spoločný **referenčný uzol** (nezávislý uzol – označený č. 1), pre ktorý podľa Obr. 4.17 možno napísať túto rovnicu na základe **I. Kirchhoffovho zákona**

$$i_a - i_R - i_L - i_C = 0 \,. \tag{4.49}$$

V prípade **paralelného zapojenia** platí, že napätie bude rovnaké na svorkách každého elementu $\mathbf{u_o = u_R = u_L = u_C}$. Pre jednotlivé prvky elektrického obvodu možno teda napísať tieto zložkové rovnice

$$\begin{aligned} i_R &= \frac{u_o}{R}, \\ i_L &= \frac{1}{L}\int u_o \, dt \,, \\ i_C &= C\frac{du_o}{dt}, \end{aligned} \tag{4.50}$$

ktoré dosadíme za príslušné elektrické prúdy v rovnici napísanej pre referenčný uzol č. 1, čím dostávame

$$\begin{aligned} i_a - i_R - i_L - i_C &= 0 \,, \\ \frac{u_o}{R} + \frac{1}{L}\int u_o \, dt + C\frac{du_o}{dt} &= i_a \,. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Poznamenajme, že v tomto prípade opäť dostávame **integračno-diferenciálnu rovnicu**. Aby sme eliminovali integrál derivujme celú rovnicu podľa času **t**

$$C\frac{d^2u_o}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{du_o}{dt}+\frac{u_o}{L}=\frac{di_a}{dt}\,,$$
$$C\ddot{u}_o(t)+\frac{1}{R}\dot{u}_o+\frac{1}{L}u_o=i_a(t)\,. \tag{4.52}$$

Nájdime teraz prenosovú funkciu systému využitím **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok, ak $\mathbf{\dot{u}_0(0)=u_0(0)=0}$, potom platí, že

$$Cs^2U_o(s)+\frac{1}{R}sU_o(s)+\frac{1}{L}U_o(s)=sI_a(s)\,. \tag{4.53}$$

Z čoho prenosová funkcia opisujúca systému $\mathbf{U_o(s)/I_a(s)}$ je daná ako

$$\left[Cs^2+\frac{1}{R}s+\frac{1}{L}\right]U_o(s)=sI_a(s)\,,$$
$$G(s)=\frac{U_o(s)}{I_a(s)}=\frac{s}{Cs^2+(1/R)s+(1/L)}\,. \tag{4.54}$$

Pre určenie prenosovej funkcie systému, ktorá opisuje vzťah medzi elektrickým prúdom prechádzajúcim cievkou a elektrickým prúdom na zdroji $\mathbf{I_L(s)/I_a(s)}$ využijeme výsledok prenosovej funkcie $\mathbf{U_o(s)/I_a(s)}$ a aplikujeme vzťah pre cievku

$$i_L=\frac{1}{L}\int u_o\,dt\,. \tag{4.55}$$

Aplikovaním **Laplaceovej transformácie** na tento vzťah bude platiť, že

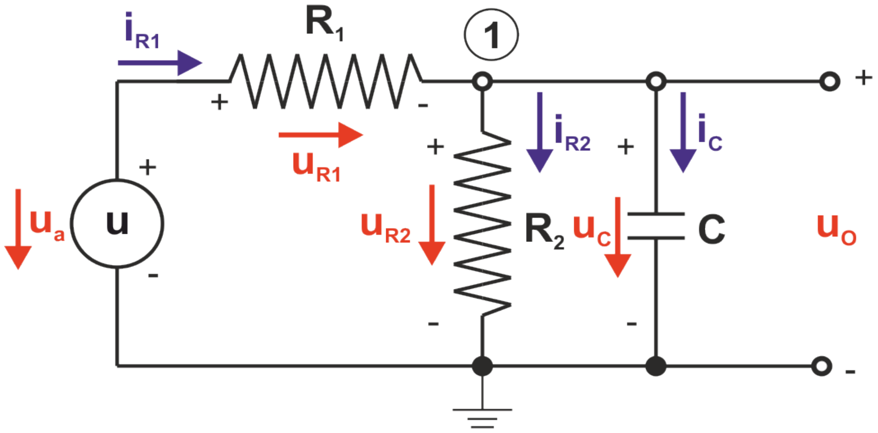
$$I_L(s)=\frac{U_o(s)}{Ls}\Longrightarrow U_0(s)=LsI_L(s) \tag{4.56}$$

a dosadením tohto výrazu do predchádzajúceho výsledku prenosovej funkcie dostávame prenosovú funkciu $\mathbf{I_L(s)/I_a(s)}$ v tvare

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{I_a(s)}=\frac{Ls\cdot I_L(s)}{I_a(s)}=\frac{s}{Cs^2+(1/R)s+(1/L)}\,,$$
$$\frac{I_L(s)}{I_a(s)}=\frac{1}{Ls}\frac{U_o(s)}{I_a(s)}=\frac{1}{LCs^2+(L/R)s+1}\,. \tag{4.57}$$

Príklad č. 4.4. RC obvod

Nájdite matematický model elektrického systému, ktorý predstavuje **RC elektrický obvod** znázornený na nasledujúcom Obr. 4.18. Odvoďte diferenciálnu rovnicu tohto elektrického obvodu, ktorá opisuje vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_o(t)}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$.



Obr. 4.18. Paralelný RC obvod

Pre tri elektrické prúdy podľa predchádzajúceho obrázku možno pre jeden vybraný **referenčný uzol č. 1** napísať túto rovnicu

$$i_{R1} = i_{R2} + i_C \,. \tag{4.58}$$

Napíšme zložkové rovnice pre jednotlivé prvky s uvažovaním napätia na termináloch, ktoré sa bude meniť v bodoch spojení jednotlivých elementov

$$\begin{aligned} i_{R1} &= \frac{u_{R1}}{R_1} = \frac{u_a - u_o}{R_1}, \\ i_{R2} &= \frac{u_{R2}}{R_1} = \frac{u_o - 0}{R_2} = \frac{u_o}{R_2}, \\ i_C &= C\frac{d(u_o - 0)}{dt} = C\frac{du_o}{dt}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Dosadením týchto komponentných rovníc do uzlovej rovnice dostávame

$$\begin{gathered} i_{R1} = i_{R2} + i_C \,, \\ \frac{u_a - u_o}{R_1} = \frac{u_o}{R_2} + C\frac{du_o}{dt}. \end{gathered} \tag{4.60}$$

Usporiadaním výrazov v predchádzajúcej rovnici možno dospieť k diferenciálnej rovnici opisujúcej vzťah medzi napätím na výstupe $\mathbf{u_o}(\mathbf{t})$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a}(\mathbf{t})$

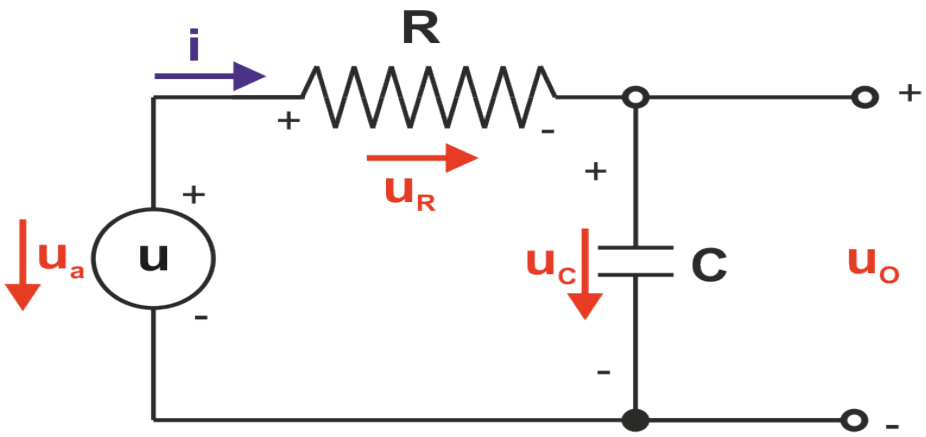
$$C\frac{du_o}{dt}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_o=\frac{u_a}{R_1}. \qquad (4.61)$$

Príklad č. 4.5. RC obvod

Pre **RC elektrický obvod** elektrického systému, ktorý je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.19, odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá

a) opisuje vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_o}(\mathbf{t})$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a}(\mathbf{t})$,

b) a diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_a}(\mathbf{t})$ a elektrickým prúdom **i(t)**.



Obr. 4.19. Sériový RC obvod

V tomto prípade máme sériovo zapojený **RC elektrický obvod**. Vetvou elektrického obvodu cez prvky rezistora a kondenzátora tečie rovnaký elektrický prúd **i(t)**. Pre daný obvod možno teda napísať túto rovnicu pre elektrický prúd podľa **I. Kirchhoffovho zákona**

$$i=i_R=i_C\,. \qquad (4.62)$$

Napíšme zložkové rovnice pre jednotlivé prvky s uvažovaním napätí na termináloch, ktoré možno zadefinovať pre rôzne napätia v bodoch spojení jednotlivých elementov

$$\begin{aligned} i_R&=\frac{u_R}{R}=\frac{u_a-u_o}{R},\\ i_C&=C\frac{d(u_o-0)}{dt}=C\frac{du_o}{dt}. \end{aligned} \qquad (4.63)$$

Dosadením do rovnice pre elektrické prúdy musí platiť tento vzťah

$$i = \frac{u_a - u_o}{R} = C\frac{du_o}{dt}\,. \tag{4.64}$$

Usporiadaním výrazov v rovnici potom dostávame diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi napätím na výstupe $\mathbf{u_o(t)}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$ v tvare

$$C\frac{du_o}{dt} + \frac{1}{R}u_o = \frac{u_a}{R}\,. \tag{4.65}$$

Pre prípad konštantného vstupného napätia $\mathbf{u_a(t)}$ sa dá rovnica zjednodušiť na tvar

$$RC\frac{du_o}{dt} + u_o = 0\,. \tag{4.66}$$

Teraz nájdime diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi **zmenou elektrického prúdu i(t)** v elektrickom obvode a vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$. Budeme vychádzať zo slučkovej rovnice podľa **II. Kirchhoffovho zákona**

$$u_R + u_C = u_a\,. \tag{4.67}$$

Potom pre zložkové rovnice jednotlivých prvkov s uvažovaním rovnakého elektrického prúdu tečúceho vetvou obvodu musí platiť, že

$$\begin{aligned} u_R &= Ri\,, \\ u_C &= \frac{1}{C}\int i \cdot dt\,. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Dosadením do tejto rovnice za jednotlivé napätia s uvažovaním menovitého elektrického prúdu $\mathbf{i = i_R = i_C}$, ktorý preteká danou vetvou dostávame

$$i \cdot R + \frac{1}{C}\int i \cdot dt = u_a\,. \tag{4.69}$$

Ako možno vidieť tak táto rovnica je v tvare **integrálnej rovnice**, aby sme sa zbavili integrálu zderivujeme túto rovnicu podľa času **t**, dostávame

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=\frac{du_a}{dt}. \tag{4.70}$$

Z tejto rovnice možno vypočítať hodnotu menovitého elektrického prúdu v prípade, že poznáme budiacu funkciu napäťového zdroja $\mathbf{u(t)}$. Ak je vstupné napätie $\mathbf{u_a}$ konštantné, potom v prípade jednosmerného elektrického obvodu možno danú rovnicu zjednodušiť na tento tvar

$$RC\frac{di}{dt}+i=0. \tag{4.71}$$

4.6 UZLOVÁ METÓDA NA VÝPOČET NAPÄTÍ

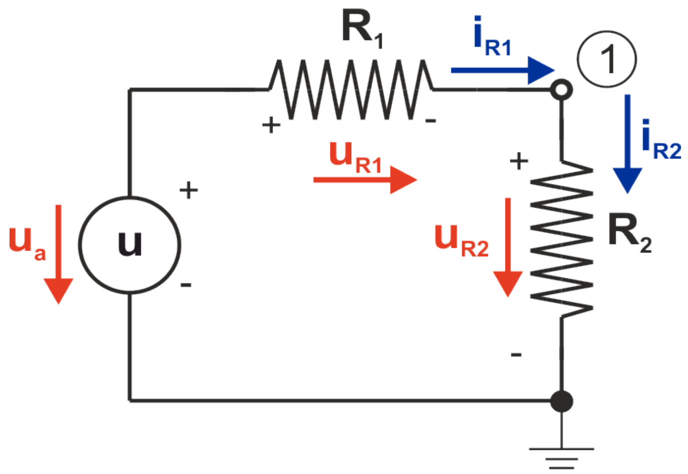
Uzlovú metódu (založenú na princípe I. Kirchhoffovho zákona) vo všeobecnosti používame vtedy, ak chceme opísať vzťah medzi napätiami prostredníctvom diferenciálnych rovníc. Inak povedané, ak chceme vypočítať napätia v ľubovoľných bodoch elektrického obvodu.

Pri **uzlovej metóde** začíname pomenovaním a vyznačením smerov všetkých elektrických prúdov pre vybrané nezávislé (referenčné) uzly. Pričom vynecháme tie uzlové body, ktoré sú uzemnené.

Pre zadefinované nezávislé uzlové spojenia napíšeme uzlové rovnice podľa **I. Kirchhoffovho zákona**. Ďalej napíšeme zložkové rovnice individuálne pre každý pasívny prvok elektrického obvodu, ktoré následne dosadíme do uzlových rovníc za jednotlivé elektrické prúdy a zjednodušením rovníc získame sústavu diferenciálnych rovníc, ktorú kvôli prehľadnosti systému zvyčajne zapisujeme do maticového tvaru.

Príklad č. 4.6. Napäťový delič

Elektrický obvod, ktorý nazývame **napäťovým deličom** pozostáva zo sériového zapojenia dvoch rezistorov podľa Obr. 4.20. Nájdite matematický model takéhoto elektrického systému.



Obr. 4.20. Napäťový delič

Pre elektrické prúdy podľa predchádzajúceho obrázku Obr. 4.20 možno pre jeden vybraný referenčný **uzol č. 1** napísať túto rovnicu

$$i_{R1} = i_{R2}\,. \qquad (4.72)$$

Napíšme ďalej zložkové rovnice pre jednotlivé prvky s uvažovaním napätia na termináloch, ktoré sa bude meniť v bodoch spojení jednotlivých elementov

$$\begin{aligned} i_{R1} &= \frac{u_{R1}}{R_1} = \frac{u_a - u_1}{R_1}, \\ i_{R2} &= \frac{u_{R2}}{R_2} = \frac{u_1 - 0}{R_2} = \frac{u_1}{R_2}. \end{aligned} \qquad (4.73)$$

Dosadením týchto rovníc do uzlovej rovnice dostávame

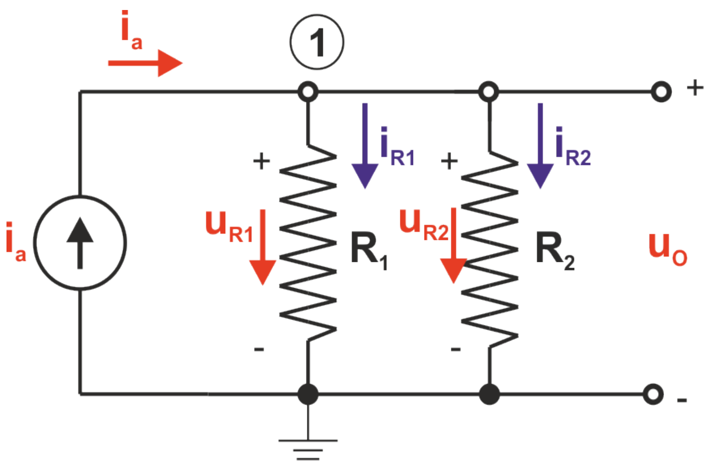
$$\frac{u_a - u_1}{R_1} = \frac{u_1}{R_2} \Rightarrow \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} u_1 = \frac{u_a}{R_1} \qquad (4.74)$$

a ďalšou matematickou úpravou predchádzajúcej rovnice možno odvodiť vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_1}$ a vstupným napätím na zdroji $\mathbf{u_a}$

$$u_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_a\,. \qquad (4.75)$$

Príklad č. 4.7. Prúdový delič

Paralelný obvod, ktorý nazývame **prúdovým deličom** pozostáva z dvoch paralelne zapojených rezistorov znázornený ako je znázornené na Obr. 4.21. Nájdite matematický model tohto elektrického systému.



Obr. 4.21. Prúdový delič

Pre elektrické prúdy podľa predchádzajúceho Obr. 4.21 možno pre jeden vybraný **referenčný uzol č. 1** napísať túto rovnicu

$$i_a - i_{R1} - i_{R2} = 0 \,. \tag{4.76}$$

Zložkové rovnice pre jednotlivé prvky elektrického obvodu s uvažovaním napätí na termináloch, ktoré v tomto prípade nebude rovnaké na daných terminálových spojenia jednotlivých elementov, nakoľko v referenčnom uzle 1 nameriame napätie $\mathbf{u_1 = u_o}$. Naopak v spodnej časti sú terminály pripevnené k uzemneniu, z toho dôvodu na týchto termináloch nameriame nulový potenciál napätia. A teda pre elektrické prúdy bude platiť, že

$$\begin{aligned} i_{R1} &= \frac{u_{R1}}{R_1} = \frac{u_o - 0}{R_1} = \frac{u_o}{R_1}, \\ i_{R2} &= \frac{u_{R2}}{R_2} = \frac{u_o - 0}{R_2} = \frac{u_o}{R_2}. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Dosadením do uzlovej rovnice pre elektrické prúdy dostávame rovnicu **prúdového deliča**

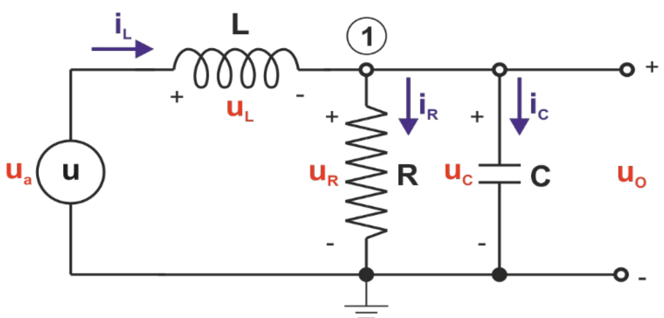
$$i_a - \frac{u_o}{R_1} - \frac{u_o}{R_2} = 0 \,, \tag{4.78}$$

ktorej ďalšou matematickou úpravou možno odvodiť vzťah medzi napätím na výstupe $\mathbf{u_o}$ a napätím na vstupe $\mathbf{u_a}$

$$i_a = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} u_o \,. \tag{4.79}$$

Príklad č. 4.8:

Pre **RLC elektrický obvod** znázornený na nasledujúcom Obr. 4.22, odvoďte diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_o(t)}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$.



Obr. 4.22. RCL obvod

Pre tri elektrické prúdy, ktoré prechádzajú jednotlivými vetvami elektrického obvodu podľa Obr. 4.22 možno pre jeden vybraný **referenčný uzol č. 1** napísať na základe **I. Kirchhoffovho zákona** túto rovnicu

$$i_L - i_R - i_C = 0\,. \tag{4.80}$$

Zložkové rovnice pre jednotlivé prvky s uvažovaním napätí na termináloch, ktoré sa bude meniť v bodoch spojeniach jednotlivých elementov sú definované ako

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{1}{L}\int (u_a - u_o)\,dt\,,\\ i_R &= \frac{u_R}{R} = \frac{u_o - 0}{R} = \frac{u_o}{R}\,,\\ i_C &= C\frac{d(u_o - 0)}{dt} = C\frac{du_o}{dt}\,. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Dosadením týchto komponentných rovníc do rovnice pre elektrické prúdy dostávame túto rovnicu

$$\begin{gathered} i_L - i_R - i_C = 0\,,\\ \frac{1}{L}\int (u_a - u_o)\,dt - \frac{u_o}{R} - C\frac{du_o}{dt} = 0\,. \end{gathered} \tag{4.82}$$

Zderivovaním predchádzajúcej **integrálno-derivačnej** rovnice podľa času **t** dostávame diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi vstupným $\mathbf{u_a(t)}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_0(t)}$

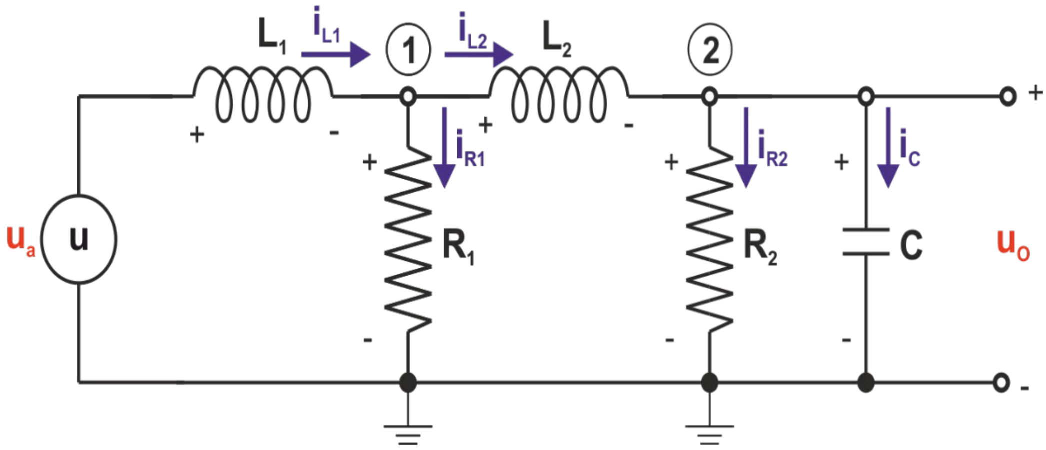
$$C\frac{d^2u_o}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{du_o}{dt} + \frac{1}{L}u_o = \frac{1}{L}u_a\,. \tag{4.83}$$

Zjednodušením predchádzajúcej diferenciálnej rovnice možno dospieť k diferenciálnej rovnici opisujúcej vzťah medzi napätím na výstupe $\mathbf{u_o(t)}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$

$$\begin{gathered} RLC\frac{d^2u_o}{dt^2} + L\frac{du_o}{dt} + Ru_o = Ru_a\,,\\ RLC\ddot{u}_o + L\dot{u}_o + Ru_o = Ru_a\,. \end{gathered} \tag{4.84}$$

Príklad č. 4.9:

Komplikovanejší **elektrický obvod**, ktorý pozostáva z viacerých vetiev je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.23. Odvoďte pre tento **elektrický obvod** matematický model, ktorý bude opisovať vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_o(t)}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$.



Obr. 4.23. Elektrický obvod

Pre dva vybrané **referenčné uzly č. 1 a č. 2** možno napísať tieto dve prúdové rovnice podľa **I. Kirchhoffovho zákona**

$$\begin{aligned} i_{L1} - i_{L2} - i_{R1} &= 0\,, \\ i_{L2} - i_{R2} - i_C &= 0\,. \end{aligned} \qquad (4.85)$$

Zložkové rovnice pre jednotlivé prvky s uvažovaním napätí na termináloch, ktoré sa bude meniť v bodoch spojeniach jednotlivých elementov sú definované ako

$$\begin{aligned} i_{L1} &= \frac{1}{L_1}\int (u_a - u_1)dt\,, \\ i_{L2} &= \frac{1}{L_2}\int (u_1 - u_2)dt\,, \\ i_{R1} &= \frac{u_1 - 0}{R_1} = \frac{u_1}{R_1}\,, \\ i_{R2} &= \frac{u_2 - 0}{R_2} = \frac{u_2}{R_2}\,, \\ i_C &= C\frac{d(u_2 - 0)}{dt} = C\frac{du_2}{dt}\,. \end{aligned} \qquad (4.86)$$

Dosadením komponentných rovníc do **prvej rovnice** zo sústavy rovníc pre uzlové body elektrického obvodu dostávame

$$\begin{gathered} i_{L1} - i_{L2} - i_{R1} = 0\,, \\ \frac{1}{L_1}\int (u_a - u_1)dt - \frac{1}{L_2}\int (u_1 - u_2)dt - \frac{u_1}{R_1} = 0\,. \end{gathered} \tag{4.87}$$

Zderivovaním tejto **integrálno-derivačnej rovnice** dostávame prvú diferenciálnu rovnicu matematického modelu

$$\frac{u_a - u_1}{L_1} - \frac{u_1 - u_2}{L_2} - \frac{\dot{u}_1}{R_1} = 0\,. \tag{4.88}$$

Vykonajme teraz podobné operácie s druhou rovnicou sústavy, pre ktorú bude platiť, že

$$\begin{gathered} i_{L2} - i_{R2} - i_C = 0\,, \\ \frac{1}{L_2}\int (u_1 - u_2)dt - \frac{u_2}{R_2} - C\frac{du_2}{dt} = 0\,. \end{gathered} \tag{4.89}$$

A jej ďalším zderivovaním podľa času dostávame **druhú diferenciálnu rovnicu** sústavy rovníc

$$C\ddot{u}_2 + \frac{1}{R_2}\dot{u}_2 - \frac{u_1 - u_2}{L_2} = 0\,. \tag{4.90}$$

Sústava diferenciálnych rovníc predstavujúca matematický model elektrického systému podľa Obr. 4.23 má teda tvar

$$\begin{gathered} \frac{\dot{u}_1}{R_1} - \frac{u_a - u_1}{L_1} + \frac{u_1 - u_2}{L_2} = 0\,, \\ C\ddot{u}_2 + \frac{1}{R_2}\dot{u}_2 - \frac{u_1 - u_2}{L_2} = 0\,. \end{gathered} \tag{4.91}$$

Túto **sústavu diferenciálnych rovníc** zapíšeme do výsledného maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}u_a \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.92}$$

Nájdime **prenosovú maticu systému** pre tento elektrický obvod aplikovaním **Laplaceovej transformácie** predchádzajúceho systému v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}s + \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{L_2} & Cs^2 + \frac{1}{R_2}s + \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} U_a(s)\,, \tag{4.93}$$

potom prenosová matica systému má tvar

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{U_1(s)}{U_a(s)} \\ \frac{U_2(s)}{U_a(s)} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \frac{CR_1R_2L_2s^2 + L_2R_1s + R_1R_2}{CL_1L_2R_2s^3 + (L_1L_2 + CR_1R_2L_1 + CR_1R_2L_2)s^2 + (L_1R_1 + L_1R_2 + L_2R_1)s + R_1R_2} \\ \frac{R_1R_2}{CL_1L_2R_2s^3 + (L_1L_2 + CR_1R_2L_1 + CR_1R_2L_2)s^2 + (L_1R_1 + L_1R_2 + L_2R_1)s + R_1R_2} \end{bmatrix}. \tag{4.94}$$

4.7 SLUČKOVÁ METÓDA NA VÝPOČET ELEKTRICKÝCH PRÚDOV

Slučkovú metódu založenú na princípe **II. Kirchhoffovho zákona** používame vtedy, ak chceme opísať vzťah medzi vstupnými napätiami (elektrickými prúdmi) a elektrickými prúdmi, ktoré pretekajú jednotlivými vetvami elektrického obvodu. Inak povedané slučkovú metódu využívame, ak chceme vypočítať hodnoty elektrických prúdoch vo všetkých vetvách elektrického obvodu.

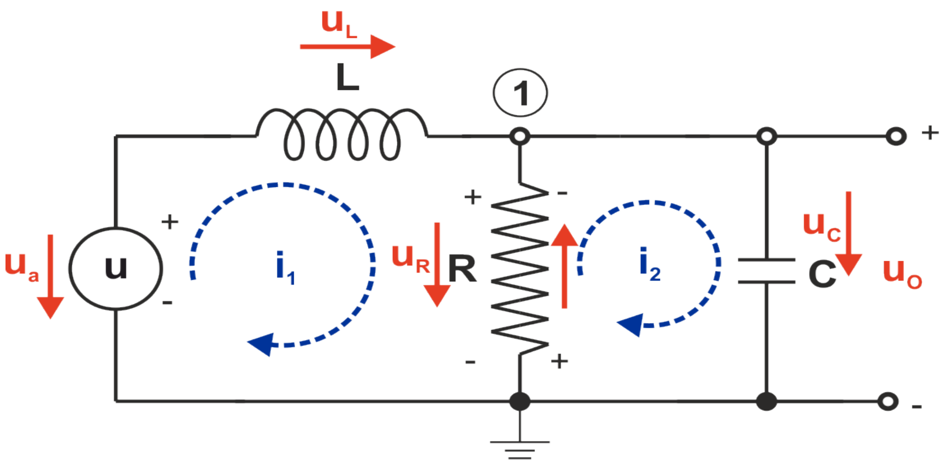
V prípade **slučkovej metódy** začneme v prvom rade voľbou a označením **nezávislých slučkových prúdov** vo vybraných nezávislých vetvách elektrického obvodu, ktoré vyznačíme ako prúdy obtekajúce touto vetvou. Vo všeobecnosti uvažujeme, že všetky neznáme elektrické prúdy prúdia v smere hodinových ručičiek a všetky známe prúdy prúdia v smere prúdových zdrojov.

Pre všetky nezávislé vetvy elektrického obvodu, v ktorých sme vyznačili obtekajúce neznáme elektrické prúdy aplikujeme **II**. **Kirchhoffov zákon pre napätia**. Potom napíšeme zložkové rovnice pre každý individuálny pasívny prvok elektrického obvodu v zmysle napätia zadefinovaného prostredníctvom neznámych elektrických (menovitých) prúdov, ktoré tečú jednotlivými vetvami.

Napokon tieto získané zložkové rovnice dosadíme do slučkových rovníc pre každú nezávislú slučku. Takto získané rovnice skombinujeme a matematicky upravujeme, až do napísania výsledného matematického modelu. Princíp **slučkovej metódy** si ukážeme na ďalších príkladoch elektrických obvodov.

Príklad č. 4.10:

RLC elektrický obvod pozostáva z **odporu R**, cievky s **indukčnosťou L** a kondenzátora s **kapacitou C**, pozri Obr. 4.24. Nájdite matematický model, ktorý opisuje vzťah medzi elektrickými prúdmi, ktoré tečú jednotlivými vetvami a vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$. Určite prenosovú funkciou systému, ktorá opisuje vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_o(t)}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$**.**



Obr. 4.24. RCL obvod

V elektrickom obvode možno identifikovať dve nezávislé vetvy, ktorými tečú dva nezávislé menovité elektrické prúdy $\mathbf{i_1}$ a $\mathbf{i_2}$ podľa Obr. 4.24. Aplikovaním **II. Kirchhoffovho zákona** pre **slučku č. 1** musí platiť, že

$$u_L + u_R - u_a = 0\,. \qquad (4.95)$$

Zapísaním jednotlivých napätí v predchádzajúcej rovnici v zmysle slučkových prúdov a ich dosadením do tejto rovnice dostávame

$$L\frac{di_1}{dt} + R(i_1 - i_2) - u_a = 0\,. \qquad (4.96)$$

Podobným spôsobom podľa **II. Kirchhoffovho zákona** pre napätia napíšeme rovnicu pre **slučku č. 2**, pre ktorú platí, že

$$u_C + u_R = 0\,. \qquad (4.97)$$

Podobne ako pre **1. slučku**, tak aj v prípade **2. slučkovej rovnice** dosadíme za jednotlivé napätia hodnoty napätí v zmysle slučkových prúdov, čím možno dospieť k **druhej diferenciálnej rovnici sústavy**

$$\frac{1}{C}\int i_2\,dt + R(i_2 - i_1) = 0\,. \tag{4.98}$$

Rovnica pre 2. slučku je **integračno-derivačnou** rovnicou, tzn. že jej derivovaním podľa času **t** možno dospieť k diferenciálnej rovnici v tvare

$$\frac{1}{C}i_2 + R\frac{di_2}{dt} - R\frac{di_1}{dt} = 0\,. \tag{4.99}$$

Matematický model daného elektrického obvodu tvoria dve diferenciálne rovnice v tvare

$$\begin{aligned} &L\dot{i_1} + R(i_1 - i_2) = u_a,\\ &R\dot{i_2} - R\dot{i_1} + \frac{1}{C}i_2 = 0, \end{aligned} \tag{4.100}$$

ktoré možno prepísať do maticového tvaru opisujúceho vzťah medzi menovitými elektrickými prúdmi $\mathbf{i_1}$ a $\mathbf{i_2}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a}$

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ -R & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ \dot{i_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & -R \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.101}$$

Pripomeňme, že výstupné napätie $\mathbf{u_o}$ má vzťah definovaný rovnicou pre kondenzátor. A teda platí, že $\mathbf{u_o} = \frac{1}{C}\int \mathbf{i_2\,dt}$ alebo $\mathbf{U_o(s)} = \frac{\mathbf{I_2(s)}}{\mathbf{Cs}}$. Vykonaním **Laplaceovej transformácie** sústavy maticového systému dostávame

$$\begin{bmatrix} Ls + R & -R \\ -Rs & Rs + \frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a(s) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

a potom využitím **Cramerovho pravidla** možno vypočítať obraz elektrického prúdu v Laplaceovom tvare $\mathbf{I_2(s)}$ ako

$$I_2(s) = \frac{Rs}{RLs^2 + \frac{L}{C}s + \frac{R}{C}}U_a(s)\,. \tag{4.103}$$

Pre napätie $\mathbf{U_o(s)}$ platí,

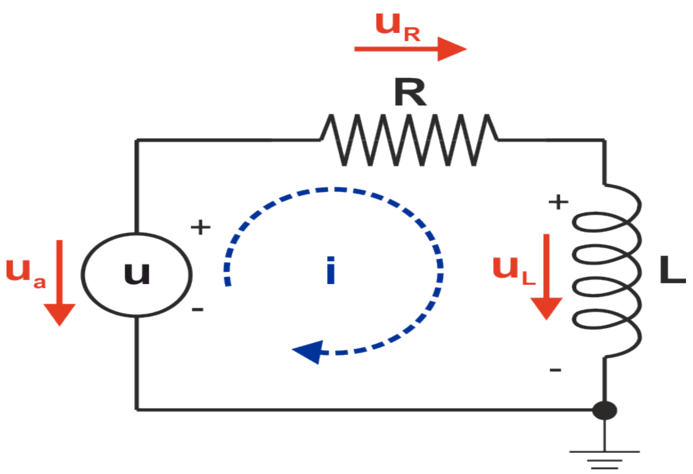
$$U_o(s) = \frac{1}{Cs} I_2(s) = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R} U_a(s) \,. \tag{4.104}$$

Vykonaním **inverznej Laplaceovej transformácie** možno dospieť k nasledovnej diferenciálnej rovnici definovanej v časovej oblasti **t**

$$RLC\ddot{u}_o + L\dot{u}_o + Ru_o = Ru_a \,. \tag{4.105}$$

Príklad č. 4.11:

Aplikovaním slučkovej metódy pre **RL elektrický obvod** znázornený na nasledujúcom Obr. 4.25 odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_a(t)}$ a menovitým elektrickým prúdom **i**, ktorý preteká elektrickým obvodom. Určte prenosovú funkciu systému, ktorá definuje vzťah $\mathbf{I(s)/U_a(s)}$.



Obr. 4.25. RL obvod

Aplikovaním **II. Kirchhoffovho zákona** pre jednu nezávislú uzavretú slučku vetvy elektrického obvodu dostávame

$$u_R + u_L - u_a = 0 \,. \tag{4.106}$$

Vyjadrením jednotlivých napätí v zmysle **slučkových prúdov** a ich ďalším dosadením do predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\begin{gathered} L\frac{di}{dt} + R \cdot i = u_a \,, \\ L\dot{i} + R \cdot i = u_a \,. \end{gathered} \tag{4.107}$$

Laplaceovou transformáciou predchádzajúcej diferenciálnej rovnice dostávame

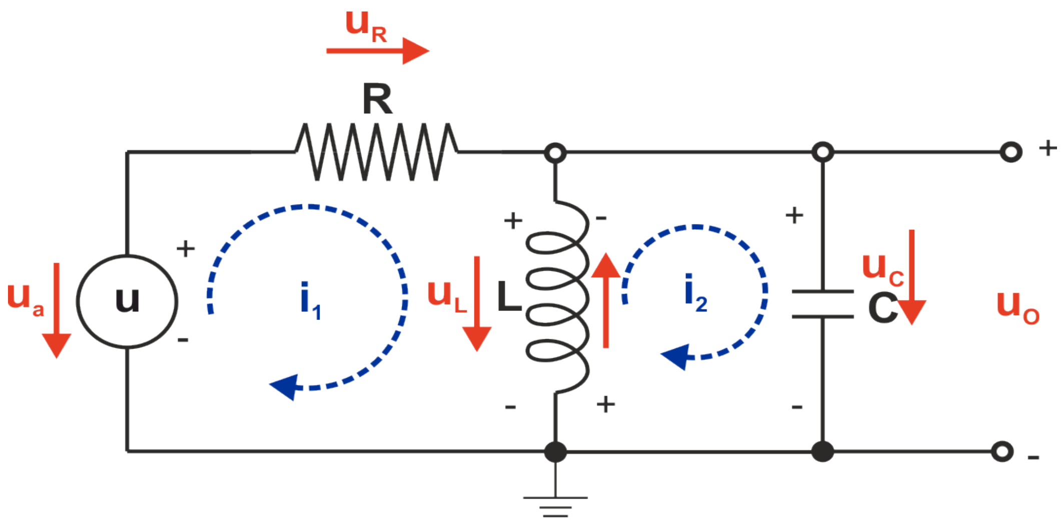
$$Ls \cdot I(s) + R \cdot I(s) = U_a(s) \tag{4.108}$$

a potom možno vypočítať prenosovú funkciu systému $\mathbf{I(s)/U_a(s)}$ v tvare

$$\frac{I(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{Ls + R}. \tag{4.109}$$

Príklad č. 4.12:

Pre RLC elektrický obvod znázornený na nasledujúcom Obr. 4.26 nájdite matematický model, ktorý opisuje vzťah medzi menovitými elektrickými prúdmi, ktoré tečú jednotlivými vetvami elektrického obvodu a vstupným napätím $\mathbf{u_a}$ využitím slučkovej metódy. Odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje vzťah medzi výstupným $\mathbf{u_0}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a}$ elektrického obvodu.



Obr. 4.26. RLC elektrický obvod

Aplikovaním **II. Kirchhoffovho zákona** pre napätia v prípade prvej nezávislej **slučky č. 1** dostávame

$$u_R + u_L - u_a = 0. \tag{4.110}$$

Vyjadrením jednotlivých napätí v zmysle **slučkových prúdov** a ich dosadením do predchádzajúcej rovnice dostávame prvú diferenciálnu rovnicu sústavy v tvare

$$Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} - L\frac{di_2}{dt} - u_a = 0. \tag{4.111}$$

Podobným spôsobom aplikovaním **II. Kirchhoffovho zákona** pre nezávislú **slučku č. 2** a dostávame

$$u_C + u_L = 0\,. \tag{4.112}$$

A dosadením vyjadrených napätí v zmysle slučkových prúdov do predchádzajúcej rovnice dostávame **druhú integračno-derivačnou rovnicu sústavy**

$$\frac{1}{C}\int i_2\,dt + L\frac{di_2}{dt} - L\frac{di_1}{dt} = 0\,. \tag{4.113}$$

Keďže táto rovnica nie je priamo diferenciálnou rovnicou, ale opäť **integračno-derivačnou** rovnicou musíme je derivovať podľa času **t**

$$\frac{1}{C}i_2 + R\frac{d^2 i_2}{dt^2} - R\frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0\,. \tag{4.114}$$

Matematický model teda tvorí **sústava dvoch diferenciálnych rovníc**

$$\begin{aligned} L\dot{i}_1 - L\dot{i}_2 + Ri_1 &= u_a\,, \\ R\ddot{i}_2 - R\ddot{i}_1 + \frac{1}{C}i_2 &= 0, \end{aligned} \tag{4.115}$$

ktorú prepíšeme do maticového tvaru. Tento opisuje vzťah medzi menovitými elektrickými prúdmi $\mathbf{i_1}$ a $\mathbf{i_2}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -R & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{i}_1 \\ \ddot{i}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & -L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.116}$$

Pripomeňme, že výstupné napätie $\mathbf{u_o}$ je definované vo vzťahu pre kondenzátor. A teda platí, že $\mathbf{u_o} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C}}\int \mathbf{i_2\,dt}$ alebo $\mathbf{U_o(s)} = \frac{\mathbf{I_2(s)}}{\mathbf{Cs}}$. Vykonaním **Laplaceovej transformácie** celej sústavy maticového systému dostávame

$$\begin{bmatrix} Ls + R & -Ls \\ -Rs^2 & Rs^2 + \frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.117}$$

Z tejto sústavy v **Laplaceovom tvare** možno aplikovaním **Cramerovho pravidla** vypočítať obraz elektrického prúdu $\mathbf{I_2(s)}$ v **Laplaceovom tvare**. To znamená, že

$$\mathrm{I_2(s)} = \frac{\mathrm{RCs^2}}{\mathrm{CR^2s^2 + Ls + R}}\mathrm{U_a(s)}\,. \qquad (4.118)$$

A potom dosadením do vzťahu pre kondenzátor možno odvodiť vzťah medzi vstupným a výstupným napätím

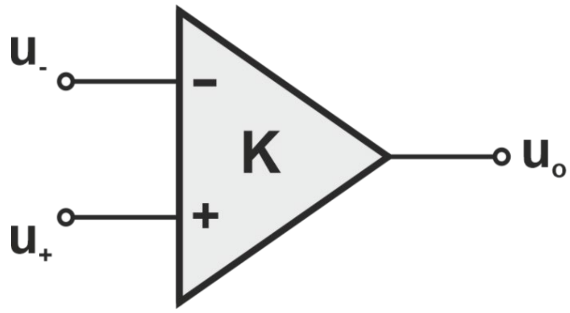
$$\mathrm{U_o(s)} = \frac{1}{\mathrm{Cs}}\mathrm{I_2(s)} = \frac{\mathrm{Rs}}{\mathrm{CR^2s^2 + Ls + R}}\mathrm{U_a(s)}\,. \qquad (4.119)$$

Potom vykonaním inverznej Laplaceovej transformácie možno previesť prenosový tvar funkcie $\mathbf{U_o(s)}$ z roviny **s** a zistiť diferenciálnu rovnicu v časovej oblasti **t**, ktorá opisuje vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_0}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a}$ elektrického obvodu.

$$\mathrm{CR^2\ddot{u}_o + L\dot{u}_o + Ru_o = R\dot{u}_a}\,. \qquad (4.120)$$

4.8 OPERAČNÉ ZOSILŇOVAČE

Operačný zosilňovač (Op-amp) je elektronický element, ktorý sa používa na zosilnenie elektrického signálu a budenie fyzikálneho systému. Nasledujúci Obr. 4.27 zobrazuje schematickú značku **operačného zosilňovača**, ktorý je charakterizovaný ako **napäťový zosilňovač** so zosilnením **K**.



Obr. 4.27. Operačný zosilňovač so zosilnením K

Schematická značka na Obr. 3.27 neznázorňuje všetky terminály tohto fyzikálneho systému. Zosilňovač má len dva vstupné terminály a jeden výstupný terminál. **Výstupné napätie** $\mathbf{u_o}$ je dané vzťahom

$$\mathrm{u_o = K(u_+ - u_-)}\,, \qquad (4.121)$$

kde **K** je veľmi veľké kladné číslo (typická hodnota od $\mathbf{10^5}$ až $\mathbf{10^6}$).

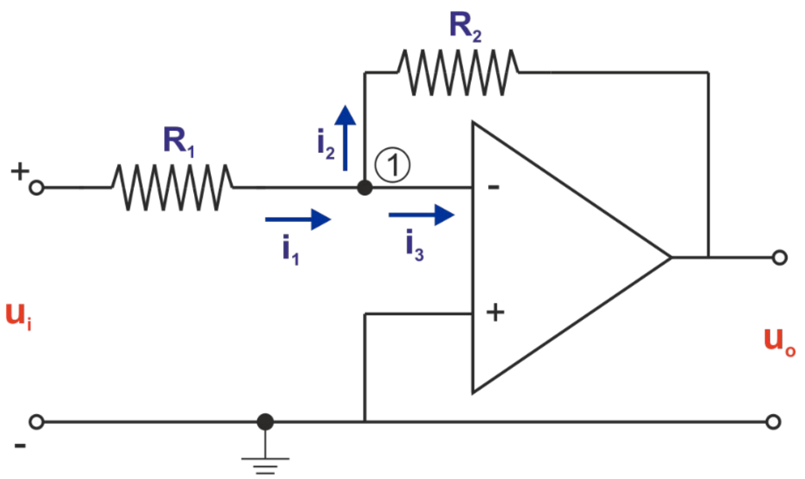
Z dôvodu, že napätie na výstupe $\mathbf{u_o}$ musí byť konečné číslo a **K** je veľmi veľké číslo, potom rozdiel napätí na termináloch konverguje k nule. A teda platí, že

$$u_+ \approx u_- \,. \tag{4.122}$$

Poznamenajme, že na Obr. 4.27 je znázornená len schematická značka **operačného zosilňovača**, ktorý bežne pozostáva z mnohých ďalších elektrických komponentov ako sú **rezistory**, **cievky** a **kondenzátory** a to vhodne pozapájaných na integrovanom čipe.

Príklad č. 4.13:

Elektrický obvod s jedným **operačným zosilňovačom so** zosilnením **K** je paralelne zapojený k rezistoru $\mathbf{R_2}$ ako je zobrazené na nasledujúcom Obr. 4.28. Výstupný paralelný obvod je v sériovom zapojení s ďalším rezistorom $\mathbf{R_1}$, pozri Obr. 4.28. Určte vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_0}$.



Obr. 4.28. Operačný zosilňovač typu násobič

Tento elektrický obvod je známy ako **násobič** a je často používaný v riadiacich systémoch. Obvod má iba jeden významný referenčný **uzol č. 1**. Aplikovaním **I. Kirchhoffovho zákona pre elektrické prúdy** vybraného uzla č. 1 dostávame

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \,. \tag{4.123}$$

Keďže odber prúdu je pomerne veľmi malý, inak povedané ak elektrický prúd $\mathbf{i_3}$ je približne nulový $\mathbf{i_3 \approx 0}$, potom pre zostávajúce uzlové elektrické prúdy musí platiť, že

$$i_1 \approx i_2 \,. \tag{4.124}$$

Použitím vzťahov **komponentných rovníc** pre jednotlivé elektrické prvky rezistorov možno dospieť k tejto rovnici

$$\frac{u_i - u_1}{R_1} = \frac{u_1 - u_o}{R_2} \,. \tag{4.125}$$

Poznamenajme, že **vstupný terminál** označený s kladným znamienkom je pripojený k zemi (uzemnený). Ak z rovnice pre operačný zosilňovač platí, že $\mathbf{u_+} \approx \mathbf{u_-}$, potom musí platiť, že

$$u_1 = u_- \approx u_+ = 0 \,. \tag{4.126}$$

Rovnica, ktorá opisuje vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$ má tento tvar

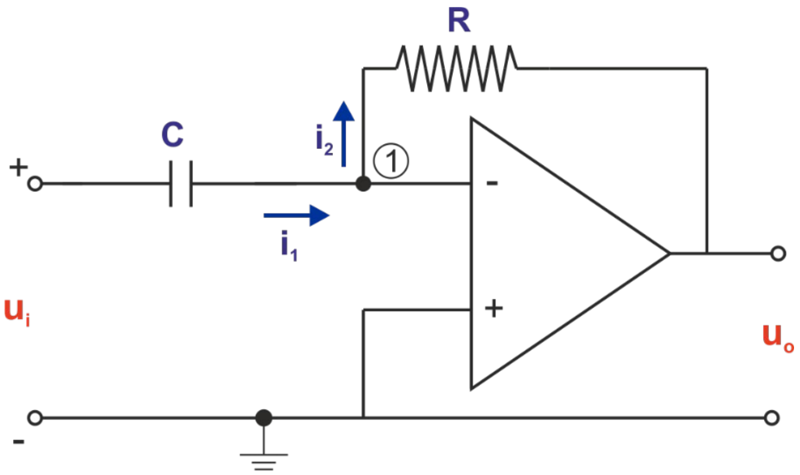
$$\frac{u_i}{R_1} = -\frac{u_o}{R_2} \tag{4.127}$$

alebo

$$u_o = -\frac{R_2}{R_1} u_i \,. \tag{4.128}$$

Príklad č. 4.14. Operačný zosilňovač typu derivátor

Elektrický obvod s operačným zosilňovačom so zosilnením **K** je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.29. Odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$.



Obr. 4.29. Operačný zosilňovač typu derivátor

Keďže, odber prúdu je pomerne veľmi malý, tzn. že elektrický prúd $\mathbf{i_3} \approx \mathbf{0}$, potom podľa **I. Kirchhoffovho zákona** platí, že

$$i_1 = i_2 \,. \qquad (4.129)$$

Použitím vzťahov pre **zložkové rovnice** prvkov elektrického obvodu dostávame

$$C\frac{d}{dt}(u_i - u_1) = \frac{u_1 - u_o}{R} \,. \qquad (4.130)$$

Pretože, **vstupný terminál** označený s kladným znamienkom je pripojený k zemi. Z rovnice pre operačný zosilňovač platí, že $\mathbf{u_+} \approx \mathbf{u_-}$, a teda

$$u_1 = u_- \approx u_+ = 0 \,. \qquad (4.131)$$

Potom vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$ je daný rovnicou

$$C\dot{u}_i = -\frac{u_o}{R} \qquad (4.132)$$

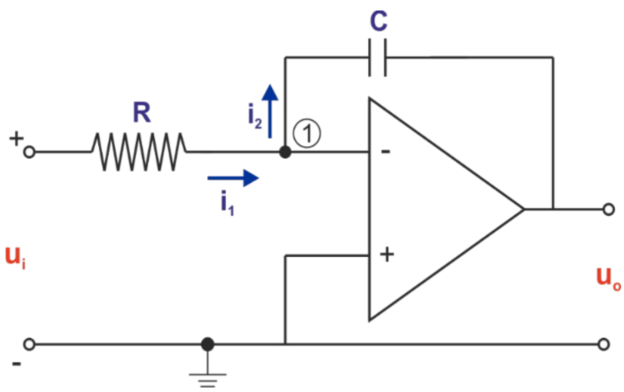
alebo

$$u_o = -RC\dot{u}_i \,. \qquad (4.133)$$

Toto implikuje, že výstupné napätie $\mathbf{u_o}$ je proporcionálnou deriváciou vstupného napätia $\mathbf{u_i}$. Preto sa tento elektrický obvod nazýva obvod typu **derivátor**.

Príklad č. 4.15. Operačný zosilňovač typu integrátor

Pre elektrický obvod s operačným zosilňovačom podľa nasledujúceho Obr. 4.30 odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$.



Obr. 4.30. Operačný zosilňovač typu integrátor

Podobnou úvahou ako v predchádzajúcich príkladoch možno dospieť k diferenciálnej rovnici opisujúcej správanie sa uvažovaného elektrického obvodu. To znamená, že keďže odber prúdu je veľmi malý, tzn. že elektrický prúd $\mathbf{i_3} \approx \mathbf{0}$, potom aplikovaním **I. Kirchhoffovho zákona** musí platiť, že

$$\mathrm{i}_1 = \mathrm{i}_2 \tag{4.134}$$

a dosadením **komponentných vzťahov** pre stavebné bloky elektrického obvodu do predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\frac{\mathrm{u_i} - \mathrm{u_1}}{\mathrm{R}} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{u_1} - \mathrm{u_o})\,. \tag{4.135}$$

Pretože, vstupný terminál označený s kladným znamienkom je pripojený k zemi. Z rovnice pre operačný zosilňovač musí platiť, že $\mathbf{u_+} \approx \mathbf{u_-}$, potom platí, že

$$\mathrm{u_1} = \mathrm{u_-} \approx \mathrm{u_+} = 0\,. \tag{4.136}$$

Napokon vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$ je daný rovnicou

$$\frac{\mathrm{u_i}}{\mathrm{R}} = -\mathrm{C}\dot{\mathrm{u}}_\mathrm{o} \tag{4.137}$$

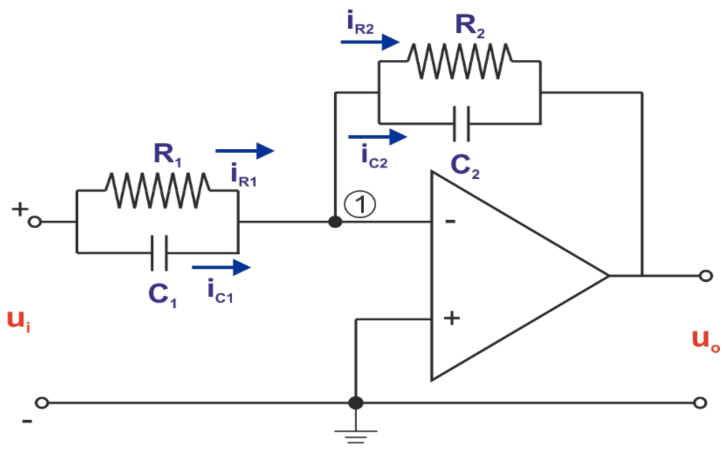
alebo

$$\dot{\mathrm{u}}_\mathrm{o} = -\frac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{u_i} \Rightarrow \mathrm{u_o} = -\frac{1}{\mathrm{RC}}\int \mathrm{u_i}\ \mathrm{dt}\,. \tag{4.138}$$

Toto implikuje, že výstupné napätie $\mathbf{u_o}$ je proporcionálne integrálu vstupného napätia $\mathbf{u_i}$. Preto sa tento elektrický obvod nazýva **integrátorom**.

Príklad č. 4.16. Elektrický obvod s operačným zosilňovačom

Elektrický obvod so zapojeným operačným zosilňovačom so zosilnením K, ktorý je znázornený na nasledujúcom Obr. 4.31. Odvoďte pre daný elektrický obvod s takto zapojeným zosilňovačom diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje vzťah medzi privedeným vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$.



Obr. 4.31. Operačný zosilňovač

Obvod má iba jeden významný **uzol č. 1**, tzn. že aplikovaním **I. Kirchhoffovho zákona** pre elektrické prúdy možno dospieť k tejto rovnici

$$i_{R1} + i_{C1} - i_{R2} - i_{C2} = 0 \qquad (4.139)$$

a ďalej dosadením vzťahov **komponentných rovníc** pre jednotlivé stavebné prvky daného systému dostávame diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\frac{u_i - u_1}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt}(u_i - u_1) - \frac{u_1 - u_o}{R_2} - C_2 \frac{d}{dt}(u_1 - u_o) = 0\,. \qquad (4.140)$$

Poznamenajme, že vstupný terminál označený s **kladným znamienkom** je pripojený k zemi. Z rovnice pre operačný zosilňovač preto platí, že $\mathbf{u_+} \approx \mathbf{u_-}$, a teda platí

$$u_1 = u_- \approx u_+ = 0\,. \qquad (4.141)$$

Napokon možno odvodiť vzťah opisujúci vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$, ktorý je daný diferenciálnou rovnicou v tomto tvare

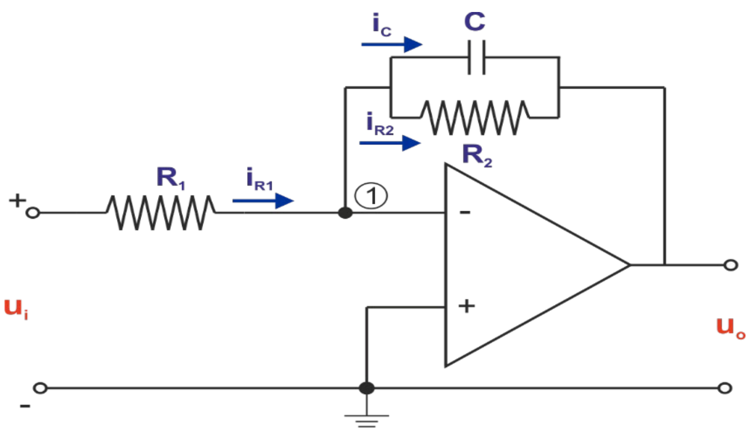
$$\frac{u_i}{R_1} + C_1 \dot{u}_i + \frac{u_o}{R_2} + C_2 \dot{u}_o = 0 \qquad (4.142)$$

alebo

$$C_2 \dot{u}_o + \frac{u_o}{R_2} = -C_1 \dot{u}_i - \frac{u_i}{R_1}\,. \qquad (4.143)$$

Príklad č. 4.17. Dolno priepustný filter

Elektrický obvod s operačným zosilňovačom podľa nasledujúceho Obr. 4.32 predstavuje **dolno priepustný filter**. Odvoďte diferenciálnu rovnicu pre takýto typu elektrického systému, ktorá opisuje vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$.



Obr. 4.32. Operačný zosilňovač – dolno priepustný filter

Obvod má iba jeden významný referenčný **uzol č. 1** a napísaním rovnice podľa **I. Kirchhoffovho zákona** pre elektrické prúdy dostávame

$$i_{R1} - i_C - i_{R2} = 0 \qquad (4.144)$$

a potom dosadením zadefinovaných **komponentných rovníc** do predchádzajúcej rovnice možno dospieť k diferenciálnej rovnici

$$\frac{u_i - u_1}{R_1} - C\frac{d}{dt}(u_1 - u_o) - \frac{u_1 - u_o}{R_2} = 0\,. \qquad (4.145)$$

Poznamenajme, že vstupný terminál označený s kladným znamienkom je pripojený k zemi, z toho vyplýva, že na základe rovnice pre operačný zosilňovač musí platiť $\mathbf{u_+ \approx u_-}$, a teda

$$u_1 = u_- \approx u_+ = 0\,. \qquad (4.146)$$

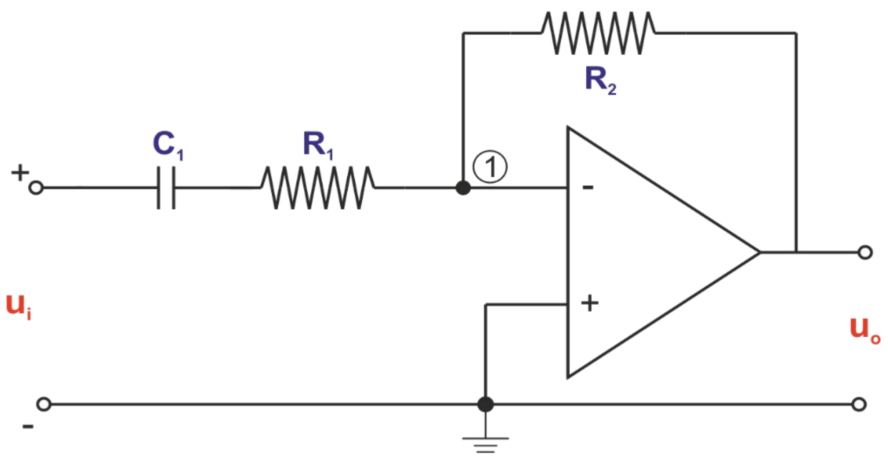
Z čoho vyplýva diferenciálna rovnica, ktorá opisuje vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_i}$ a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$

$$\frac{u_i}{R_1} + C\dot{u}_o + \frac{u_o}{R_2} = 0 \qquad (4.147)$$

alebo

$$C\dot{u}_o + \frac{u_o}{R_2} = -\frac{u_i}{R_1}. \qquad (4.148)$$

Tento typ operačného zosilňovača sa nazýva **dolno-priepustným filtrom**. Na ďalšom Obr. 4.33 je znázornený ďalší typ filtra známy tiež ako **horno-priepustný filter**, pre ktorý možno podobným spôsobom odvodiť matematickú rovnicu.

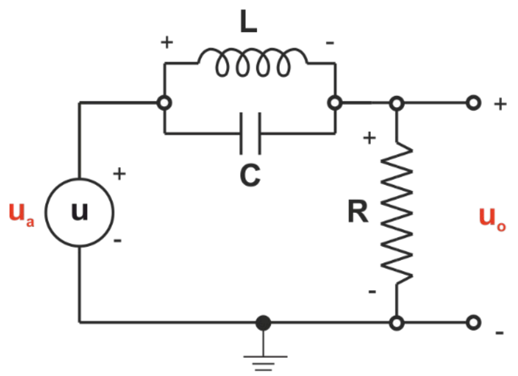


Obr. 4.33. Operačný zosilňovač – horno-priepustný filter

Úlohy na riešenie

Problém 4.1:

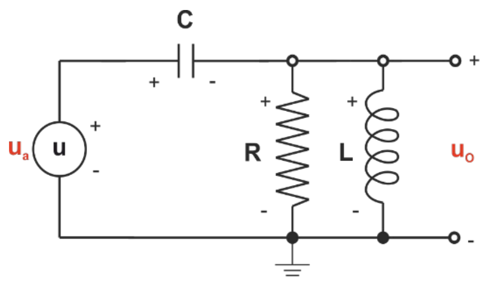
Odvoďte matematický model pre RLC obvod zobrazený na Obr. 4.34 a nájdite prenosovú funkciu **G(s)** v Laplaceovom tvare.



Obr. 4.34. RLC obvod č. 1

Problém 4.2:

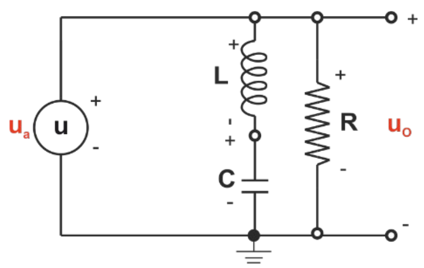
Odvoďte matematický model pre RLC obvod zobrazený na Obr. 4.35, zapíšte do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 4.35. RLC obvod č. 2

Problém 4.3:

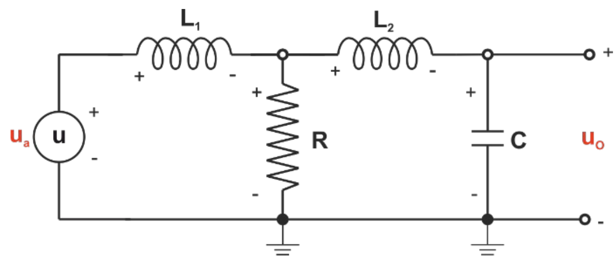
Odvoďte matematický model pre elektrický obvod zobrazený na Obr. 4.36, zapíšte matematický model do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)** v Laplaceovom tvare.



Obr. 4.36. RLC obvod č. 3

Problém 4.4:

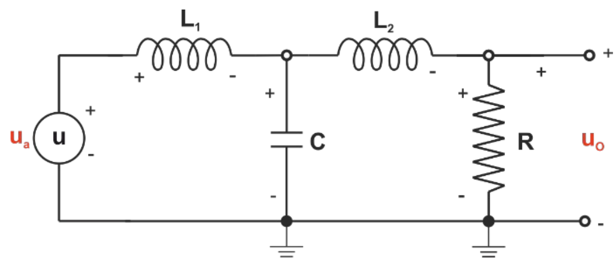
Odvoďte matematický model pre elektrický obvod zobrazený na Obr. 4.37, zapíšte tento model do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 4.37. RLC obvod č. 4

Problém 4.5:

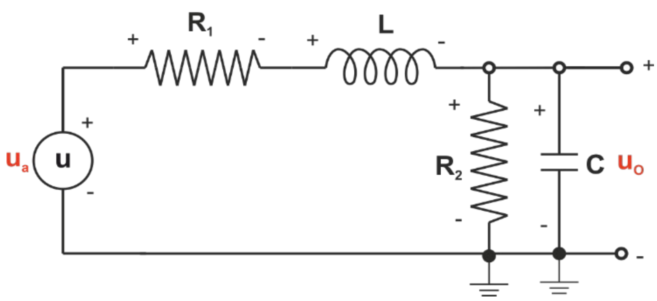
Odvoďte matematický model pre RLC obvod zobrazený na Obr. 4.38, prepíšte do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 4.38. RLC obvod č. 5

Problém 4.6:

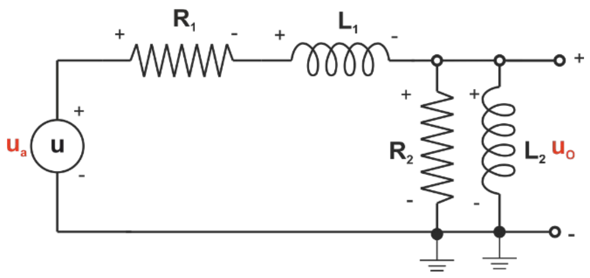
Odvoďte matematický model pre elektrický obvod zobrazený na Obr. 4.39, prepíšte tento model do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 4.39. RLC obvod č. 6

Problém 4.7:

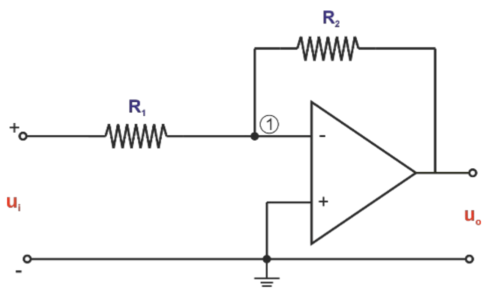
Odvoďte matematický model pre RLC obvod zobrazený na Obr. 4.40, prepíšte do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 4.40. RLC obvod č. 7

Problém 4.8:

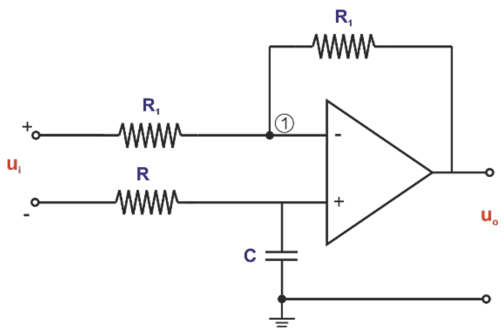
Odvoďte matematický model pre elektrický obvod s operačným zosilňovačom zobrazený na Obr. 4.41.



Obr. 4.41. Obvod s operačným zosilňovačom č. 1

Problém 4.9:

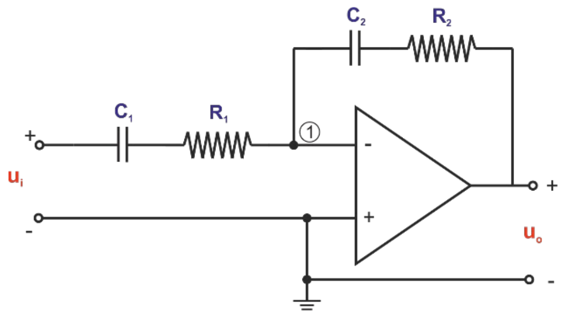
Odvoďte matematický model pre elektrický obvod s operačným zosilňovačom zobrazený na Obr. 4.42.



Obr. 4.42. Obvod s operačným zosilňovačom č. 2

Problém 4.10:

Odvoďte matematický model pre elektrický obvod s operačným zosilňovačom zobrazený na Obr. 4.43.



Obr. 4.43. Obvod s operačným zosilňovačom č. 3

5 ELEKTROMECHANICKÝ SYSTÉM

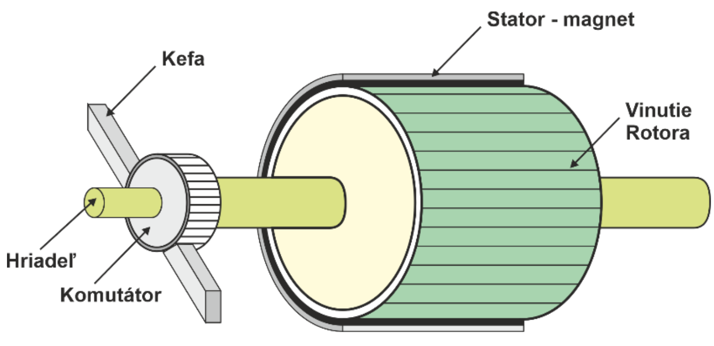
Mnohé užitočné zariadenia ako sú **elektrické motory**, **elektrické generátory**, **reproduktory**, **mikrofóny** alebo **akcelerometre**, sú zariadenia konštruované kombináciou **elektrických** a **mechanických** komponentov. Takéto systémy nazývame **elektromechanickými systémami**. Ide o systémy, ktoré sú vo všeobecnosti kombináciou dvoch systémov rôznej fyzikálnej podstaty a to **mechanického** a **elektrického systému**.

V prípade tvorby matematického modelu systému pre takéto **elektromechanické systémy** je nutné aplikovať dva rôzne fyzikálne prístupy. Oddelene pre **elektrickú časť** systému, keď definujeme rovnice na základe **I.** alebo **II. Kirchhoffovho zákona**. A samostatne pre **mechanickú časť** systému, kedy aplikujeme princíp s využitím **II. Newtonovho zákona**. Systém tvorby modelu spočíva v napísaní matematických rovníc, ktoré sú istým spôsobom prepojené rovnicami, ktoré nazývame **väzbovými rovnicami**. Poznamenajme, že väzbové rovnice možno odvodiť pre každý kombinovaný dynamický systém a to nie len pre elektro-mechanický systém.

V tejto sekcii sa budeme venovať modelovaniu jednosmerných elektrických motorov, ktoré dokážu generovať **sily** alebo **krútiace momenty** princípom superpozície dvoch subsystémov odlišnej fyzikálnej podstaty (elektro a mechanického subsystémov). **Elektromotory**, ktorými sa budeme zaoberať možno nájsť v rôznych reálnych aplikáciách napr. v prípade **riadiacich systémoch**, kde sa tieto elektromotory využívajú ako budiace **akčné členy** pre mechanické časti systémov.

5.1 ZÁKLADNÉ VZŤAHY PRE ELEKTRO-MECHANICKÉ SYSTÉMY

Elektromotor je elektrické zariadenie, ktoré mení elektrickú energiu na mechanickú prácu, resp. na mechanický pohyb – **rotačný** (rotačný motor) alebo **lineárny** (lineárny motor). V prípade elektrického motora sú jeho elektrické a mechanické časti navzájom previazané **magnetickým poľom**. Nasledujúci Obr. 5.1 zobrazuje schému jednoduchého jednosmerného motora, ktorý pozostáva zo základných častí ako sú **rotor, stator** a **komutátor**.



Obr. 5.1. Jednosmerný elektrický motor

Rotor elektromotora, ktorý môže voľne rotovať v priestore statora je tvorený **permanentným magnetom** alebo **elektromagnetom**, ktorý pozostáva zo špeciálne navinutých cievok (kombinovaná jednotka navinutých cievok pripojená k rotoru, ktorú nazývame **armatúra**). **Stator** je pevná časť elektromotora, do ktorého je privádzaný striedavý elektrický prúd, ktorý vytvára **pulzujúce rotujúce magnetické pole**. Rotor sa snaží udržať polohu súhlasiacu s týmto magnetickým poľom. Magnet umiestnený v rotore sa snaží uchovať konštantnú polohu voči otáčavému magnetickému poľu generovaného poľom statora.

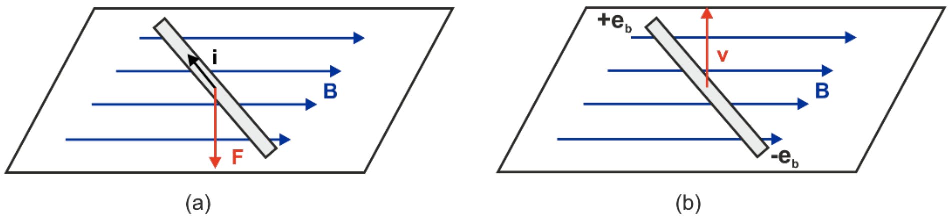
Elektrický prúd je do cievok rotora privádzaný cez komutátor, čo je vlastne **rotačný prepínač**. Jeho úlohou je meniť polaritu elektrického prúdu a tým aj polaritu magnetického poľa prechádzajúceho cievkami. Počet prepínacích plôšok komutátora zodpovedá počtu cievok (najmenej dve). Konštrukcia komutátora zaisťuje, že sily pôsobiace na póly rotora majú stále rovnaký smer. V okamihu prepnutia polarity udržuje beh tohoto motora v správnom smere zotrvačnosť rotora. Počet pólov rotora ovplyvňuje plynulosť chodu motora a silu potrebnú na jeho rozbeh (záberový moment).

Vzťah **magnetickej väzby** medzi **elektrickým** a **mechanickým** subsystémom jednosmerného motora možno odvodiť na základe jednoduchých **elektro-magnetických zákonov**. Ak predpokladáme, že vodič elektrického prúdu je kolmo umiestnený na smer magnetického poľa. Potom na daný vodič bude pôsobiť magnetická sila **F**, ktorej vzťah možno opísať nasledujúcou rovnicou

$$\mathrm{F} = \mathrm{BLi}\,, \qquad (5.1)$$

kde **B** magnetická indukcia v jednotke **Tesla** (1T =1 Wb/m^2), **L** je dĺžka vodiča v magnetickom poli.

Smer magnetickej sily **F** možno určiť **pravidlom pravej ruky** podľa nasledujúceho Obr. 5.2 (a).



Obr. 5.2. (a) Smer magnetickej sily pôsobiacej na vodič v magnetickom poli, (b) indukované elektromotorické napätie na pohybujúcom sa vodiči rýchlosťou v

Ak sa vodič pohybuje v magnetickom poli, potom sa na tomto vodiči **indukuje elektromotorické napätie $\mathbf{e_b}$**. Obr. 5.2 (b) zobrazuje pohyb vodiča v magnetickom poli **B**, ktorý sa pohybuje v tomto magnetickom poli rýchlosťou **v**, ktorá je kolmá na smer magnetického toku. Ak je pohybu vodiča v smere kolmom na smer magnetického poľa **B**, potom medzi indukovaným napätím $\mathbf{e_b}$ a rýchlosťou vodiča **v** pohybujúceho sa v magnetickom poli platí tento vzťah

$$\mathrm{e_b} = \mathrm{BLv}\,. \qquad (5.2)$$

Poznamenajme, že indukované napätie $\mathbf{e_b}$ pôsobí proti smeru elektrickému prúdu **i** a je známe ako tzv. **elektromotorické napätie** $\mathbf{e_b}$. Pre jednosmerný elektrický motor podľa Obr. 5.1 teraz predpokladajme, že elektrický prúd **i** preteká **armatúrou rotora** so známym počtom cievok **n**.

Z rovnice pre magnetickú silu **F**, ktorá pôsobí na rotor s **n** cievkami bude teda pôsobiť magnetická sila **F** daná vzťahom

$$F = nBLi\,. \tag{5.3}$$

Ak uvažujeme, že polomer rotora je **r**. Potom **moment** $\mathbf{M_m}$, ktorý pôsobí na rotor je definovaný vzťahom

$$M_m = F.r = nBLir = K_t i\,, \tag{5.4}$$

kde $\mathbf{K_t = nBLr}$ je konštanta krútiaceho momentu mechanickej časti elektromotora.

Poznamenajme, že lineárna obvodová rýchlosť cievok je priamoúmerná uhlovej rýchlosti pohybu $\mathbf{v = \omega r}$. Využitím rovnice pre **elektromotorické napätie** $\mathbf{e_b}$, ktoré generuje napätie v prípade jedného vodiča a jej aplikovaním pre prípad rotora so známym počtom cievok **n**, potom rovnica nadobudne tvar

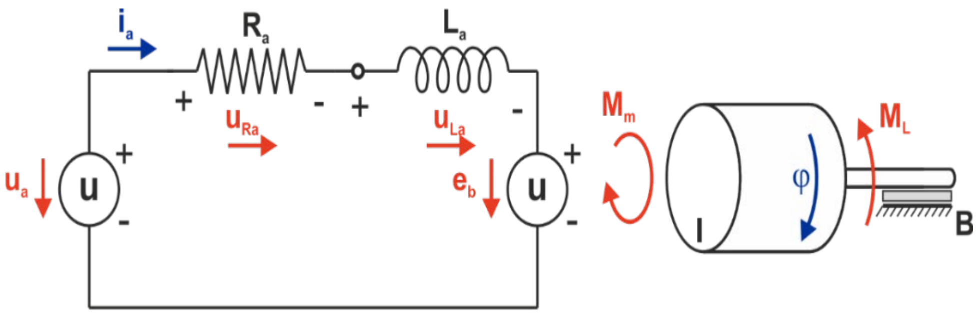
$$e_b = nBLv = nBL\omega r = K_e\omega\,, \tag{5.5}$$

kde $\mathbf{K_e = nBLr}$ je konštanta elektromotorického napätia elektrickej časti elektromotora.

Dve konštanty $\mathbf{K_t}$ a $\mathbf{K_e}$ majú rovnaký fyzikálny význam a takisto rovnakú fyzikálnu jednotku. Predchádzajúce dve rovnice sa používajú ako väzbové rovnice medzi **mechanickým** a **elektrickým** subsystémom. V prípade elektromotorov poznáme viaceré typy. My sa zameriame na **elektrický motor s riadením napätia v statore** a **elektrický motor s riadením napätia na rotore**. Pre tieto dva typy elektrických motorov si odvodíme matematické modely.

5.2 ELEKTRICKÝ MOTOR S RIADENÍM NAPÄTIA NA STATORE

Nasledujúci Obr. 5.3 zobrazuje elektromechanický systém **elektrického motora s riadením napätia v statore**. Elektrický systém je reprezentovaný obvodom statora, ktorý je budený napätím $\mathbf{u_a}$ a ďalej definovaný parametrami $\mathbf{R_a}, \mathbf{L_a}$ a indukovaným elektromotorickým napätím $\mathbf{e_b}$. Mechanická časť je reprezentovaná rotačným mechanickým systémom so známym momentom zotrvačnosti **I** a viskóznym tlmičom **B**. Systém je zaťažený momentom od motora $\mathbf{M_m}$ a krútiacim momentom $\mathbf{M_L}$ od záťaže. Nájdime matematický model takéhoto elektro-mechanického systému.



Obr. 5.3. Model jednosmerného motora s premenlivým magnetickým poľom na statore

Diferenciálne rovnice elektromechanického systému možno odvodiť použitím **II. Kirchhoffovho zákona** a **momentovej rovnice** na základe **II. Newtonovho zákona** pre rotačný systém s využitím elektromechanickými väzbových vzťahov.

Na elektrický obvod aplikujeme **II. Kirchhoffov zákon** a dostávame

$$\sum_j u_j = 0\,,$$
$$R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b - u_a = 0\,. \qquad (5.6)$$

Na **mechanickú časť systému**, ktorá koná rotačný pohyb napíšeme jednu momentovú rovnicu a dostávame

$$\sum M_{\check{T}} = I_{\check{T}} \alpha\,,$$
$$M_m - M_L - B\dot{\varphi} = I\ddot{\varphi}\,. \qquad (5.7)$$

Dosadením väzbových rovníc opisujúcich vzťah medzi elektrickým a mechanickým systémom, ktoré sme si odvodili t. j. $\mathbf{e_b = K_e \omega = K_e \dot{\varphi}}$ a $\mathbf{M_m = K_t i_a}$ dostávame

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_e \dot{\varphi} = u_a\,,$$
$$I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} - K_t i_a = -M_L\,. \qquad (5.8)$$

Keďže v rovniciach sa nevyskytuje žiadna tuhosť, danú sústavu možno takisto vyjadriť v zmysle uhlovej rýchlosti **ω**

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_e \omega = u_a\,,$$
$$I\dot{\omega} + B\omega - K_t i_a = -M_L\,. \qquad (5.9)$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{i_a(0) = \omega(0) = 0}$

$$\begin{aligned} L_a s \cdot I_a(s) + R_a \cdot I_a(s) + K_e \cdot \Omega(s) = U_a(s)\,, \\ Is \cdot \Omega(s) + B \cdot \Omega(s) - K_t I_a(s) = -M_L(s)\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ak predchádzajúcu sústavu zapíšeme do maticového tvaru dostávame

$$\begin{bmatrix} L_a s + R_a & K_e \\ -K_t & Is + B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(s) \\ \Omega(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a(s) \\ -M_L(s) \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

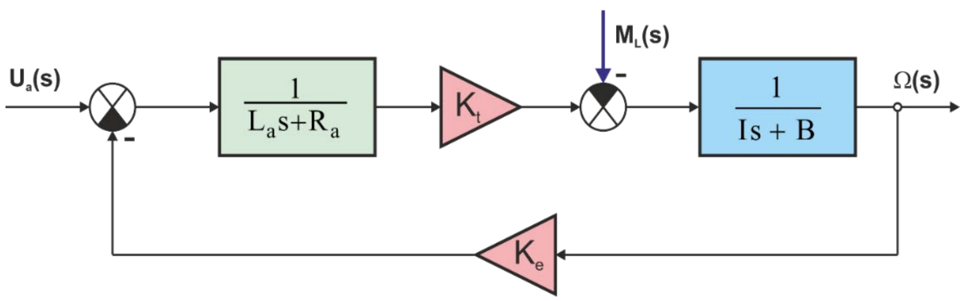
Riešením sústavy možno nájsť prenosovú funkciu $\mathbf{\Omega(s)/U_a(s)}$, príp. prenosovú funkciu $\mathbf{\Omega(s)/M_L(s)}$ v tomto tvare

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} &= \frac{\left[\frac{1}{(L_a s + R_a)}\right] \cdot K_t \cdot \left[\frac{1}{(Is + B)}\right]}{1 + \left[\frac{1}{(L_a s + R_a)}\right] \cdot K_t \cdot \left[\frac{1}{(Is + B)}\right] \cdot K_e} = \\ &= \frac{K_t}{L_a I s^2 + (L_a B + R_a I)s + R_a B + K_t K_e}\,, \end{aligned} \tag{5.12}$$

potom prenosová funkcia $\mathbf{\Omega(s)/M_L(s)}$ je potom daná vzťahom

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(s)}{M_L(s)} &= \frac{\left[\frac{1}{(L_a s + R_a)}\right] \cdot K_t \cdot \left[\frac{1}{(Is + B)}\right]}{1 - \left[\frac{1}{(Is + B)}\right] \cdot (-K_e) \cdot \left[\frac{1}{(L_a s + R_a)}\right] \cdot K_t} = \\ &= \frac{L_a s + R_a}{L_a I s^2 + (L_a B + R_a I)s + R_a B + K_t K_e}\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Na základe prenosovej funkcie $\mathbf{\Omega(s)/U_a(s)}$ možno znázorniť schému blokového riadiaceho diagramu pre daný systém elektrického motora podľa Obr. 5.4.



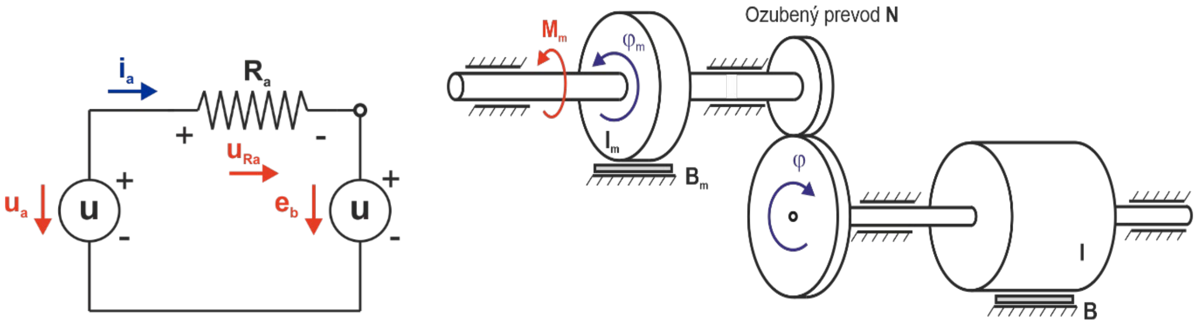
Obr. 5.4. Blokový diagram pre jednosmerný motor

Príklad č. 5.1. Jednočlenná robotická ruka budená jednosmerným motorom

Predpokladajme dynamický systém zobrazený na nasledujúcom Obr. 5.5, v ktorom **jednočlenná robotická ruka** je budená jednosmerným motorom. Predpokladajme, že indukčnosť armatúry je zanedbateľná $\mathbf{L_a} \approx \mathbf{0}$ a konštanty motora $\mathbf{K_t}$ a $\mathbf{K_e}$ sú známe veličiny. Potom,

a) odvoďte diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi napätím $\mathbf{u_a}$ a natočenia robotickej ruky $\boldsymbol{\varphi}$,

b) a určte prenosovú funkciu $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{s})/\mathbf{U_a}(\mathbf{s})$ s uvažovaním nulových počiatočných podmienok.



(a) (b)

Obr. 5.5. Model robotickej ruky budenej jednosmerným motorom: (a) elektrická časť modelu, (b) mechanická časť modelu

Diferenciálna rovnica **robotickej ruky** s uvažovaním natočenia od motora $\boldsymbol{\varphi_m}$ bola odvodená v sekcii pre **mechanické rotačné systémy** v tvare

$$(I_m + N^2 I)\ddot{\varphi}_m + (B_m + N^2 B)\dot{\varphi}_m = M_m\,, \qquad (5.14)$$

kde $\mathbf{I_m}$ a **I** sú momenty zotrvačnosti motora a záťaže resp. $\mathbf{B_m}$ a **B** sú koeficienty viskózneho tlmenia motora a záťaže, $\mathbf{M_m}$ je moment vyvolaný motorom a **N** je prevodový pomer ozubených kolies.

Pre elektrický obvod aplikujeme **II. Kirchhoffov zákon** pre napätia

$$R_a i_a + e_b - u_a = 0\,, \qquad (5.15)$$

kde $\mathbf{e_b} = \mathbf{K_e}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_\mathbf{m}$ s daným prevodovým pomerom

$$\varphi = N \cdot \varphi_m \Rightarrow \varphi_m = \frac{\varphi}{N}\,. \qquad (5.16)$$

Potom dosadením do rovnice pre **elektrickú časť** dostávame

$$R_a i_a = u_a - K_e \frac{\dot{\varphi}}{N} \tag{5.17}$$

a pre elektrický prúd, ktorý tečie armatúrou možno napísať diferenciálnu rovnicu v tvare

$$i_a = \frac{u_a}{R_a} - \frac{K_e}{R_a}\frac{\dot{\varphi}}{N}. \tag{5.18}$$

Model **mechanickej časti** definovaný v zmysle natočenia **φ** je daný ako

$$\begin{aligned}(I_m + N^2 I)\ddot{\varphi}_m + (B_m + N^2 B)\dot{\varphi}_m &= M_m\,,\\ (I_m + N^2 I)\frac{\ddot{\varphi}}{N} + (B_m + N^2 B)\frac{\dot{\varphi}}{N} &= M_m,\end{aligned} \tag{5.19}$$

kde $\mathbf{M_m = K_t i_a}$. Dosadením za **moment motora $\mathbf{M_m}$** dostávame

$$(I_m + N^2 I)\frac{\ddot{\varphi}}{N} + (B_m + N^2 B)\frac{\dot{\varphi}}{N} = K_t i_a\,, \tag{5.20}$$

a ďalším dosadením vzťahu za elektrický prúd platí rovnica

$$(I_m + N^2 I)\frac{\ddot{\varphi}}{N} + (B_m + N^2 B)\frac{\dot{\varphi}}{N} = K_t\left(\frac{u_a}{R_a} - \frac{K_e}{R_a}\frac{\dot{\varphi}}{N}\right). \tag{5.21}$$

Postupnými matematickými úpravami možno dospieť k výslednej **diferenciálnej rovnici systému**

$$(I_m + N^2 I)\ddot{\varphi} + \left(B_m + N^2 B + \frac{K_t K_e}{R_a}\right)\dot{\varphi} = \frac{N K_t}{R_a} u_a\,. \tag{5.22}$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** predchádzajúcej diferenciálnej rovnice

$$\left[(I_m + N^2 I)s^2 + \left(B_m + N^2 B + \frac{K_t K_e}{R_a}\right)s\right]\Phi(s) = \frac{N K_t}{R_a} U_a(s)\,. \tag{5.23}$$

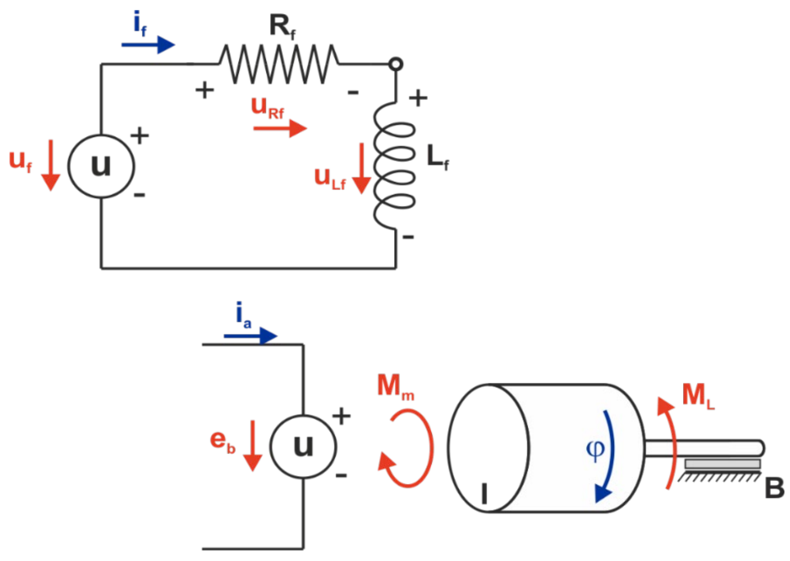
Potom prenosová funkcia systému **G(s) robotickej ruky** vedie na tento tvar

$$\frac{\Phi(s)}{U_a(s)} = \frac{N K_t / R_a}{(I_m + N^2 I)s^2 + (B_m + N^2 B + K_t K_e / R_a)s}. \tag{5.24}$$

5.3 ELEKTRICKÝ MOTOR S RIADENÍM MAGNETICKÉHO POĽA NA ROTORE

Vo všetkých motoroch, ktoré sme doteraz skúmali, bolo magnetické pole vytvorené elektrickým prúdom v separátnom poli vedenia na statore. Pre jednosmerný **elektrický motor s riadením napätia v statore** je teda privádzaný časovo premenlivý elektrický prúd na jednotku **statora**, tzn. napätie na **statore** je premenlivé $\mathbf{u_a}$ a vytvára pulzujúce magnetické pole. Iný spôsob realizácie jednosmerného motora je udržiavanie konštantného elektrického prúdu na statore $\mathbf{i_a}$, zatiaľ čo sa mení napätie na vinutí rotora $\mathbf{u_f}$. Takýto typ elektrického motora nazývame **elektrickým motorom s riadením magnetického poľa** v rotore.

Jednoduchý elektro-mechanický model s riadeným napätia vo vinutí rotora $\mathbf{u_f}$ je znázornený na nasledujúcom Obr. 5.6. Predpokladajme, že mechanická časť motora je reprezentovaná **hnanou časťou** (bez uvažovania tuhosti systému – systém je dokonale tuhý) so známy momentom zotrvačnosti **I**, zaťažujúcim momentom $\mathbf{M_L}$ a viskóznym tlmením charakterizovaným konštantou **B**. **Hnaciu časť** motora pokladáme za dokonale tuhú a bezhmotnú časť mechanického systému (zanedbávame hmotnosť), na ktorú pôsobí moment od motora $\mathbf{M_m}$. Elektrická časť pozostáva z elektrického obvodu reprezentujúceho vinutie rotora, kde $\mathbf{R_f}$ je odpor vinutia, $\mathbf{L_f}$ je indukčnosť vinutia, $\mathbf{u_f}$ je napätie vinutia a $\mathbf{i_f}$ je elektrický prúd vo vinutí.



(a) (b)

Obr. 5.6. Elektrický motor s riadením poľa na vinutí statora: (a) elektrická, (b) mechanická časť

Krútiaci moment $\mathbf{M_m}$ generovaný elektrickým motorom je priamoúmerný s **elektrickým prúdom** $\mathbf{i_f}$ pretekajúcim vinutím rotora a definovaný vzťahom

$$M_m = K_t \cdot i_f \,. \qquad (5.25)$$

Systém má dva vstupy, ktorými sú napätie na rotore $\mathbf{u_f}$ a záťaž $\mathbf{M_L}$. Máme teda dve nezávislé premenné $\mathbf{i_f}$ a $\boldsymbol{\varphi}$, ktoré možno použiť na opis systémov dynamiky. Pre elektrickú časť systému (obvod vinutia rotora) platí **II. Kirchhoffov zákon** pre napätia

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = u_f \,. \tag{5.26}$$

Pre mechanickú časť musí platiť **momentová rovnica** podľa **II. Newtonovho zákona**. Potom platí, že

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} &= M_m - M_L \,, \\ I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} - K_t i_f &= -M_L \end{aligned} \tag{5.27}$$

alebo

$$I\dot{\omega} + B\omega - K_t i_f = -M_L \,. \tag{5.28}$$

To znamená, že máme **systém dvoch diferenciálnych rovníc**, ktoré predstavujú matematický model pre daný typ elektrického motora

$$\begin{aligned} L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f &= u_f \,, \\ I\dot{\omega} + B\omega - K_t i_f &= -M_L \,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** tohto systému s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{i_f(0) = \boldsymbol{\omega}(0) = 0}$

$$\begin{aligned} L_f s \cdot I_f(s) + R_f \cdot I_f(s) &= U_f(s) \,, \\ Is \cdot \Omega(s) + B \cdot \Omega(s) - K_t I_f(s) &= -M_L(s), \end{aligned} \tag{5.30}$$

ktorý potom zapíšme do **maticového tvaru**

$$\begin{bmatrix} L_f s + R_f & 0 \\ -K_t & Is + B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f(s) \\ \Omega(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_f(s) \\ -M_L(s) \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Riešením sústavy možno odvodiť prenosovú maticu systému **G(s)**, ktorá obsahuje dve prenosové funkcie $\mathbf{\Omega(s)/U_f(s)}$ a $\mathbf{\Omega(s)/M_L(s)}$ v tomto tvare

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\Omega(s)}{U_f(s)} \\ \dfrac{\Omega(s)}{M_L(s)} \end{bmatrix}. \tag{5.32}$$

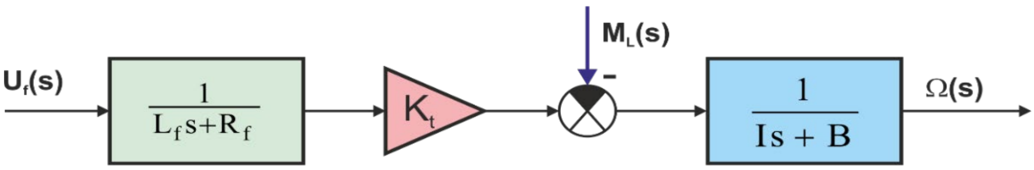
Prenosová funkcia $\boldsymbol{\Omega(s)/U_f(s)}$ má tvar

$$\frac{\Omega(s)}{U_f(s)} = \frac{K_t}{(L_f s + R_f)\cdot(Is + B)} = \frac{K_t}{L_f I s^2 + (L_f B + R_f I)s + R_f B}, \qquad (5.33)$$

a prenosová funkcia $\boldsymbol{\Omega(s)/M_L(s)}$ má tvar

$$\frac{\Omega(s)}{M_L(s)} = -\frac{1}{Is + B}. \qquad (5.34)$$

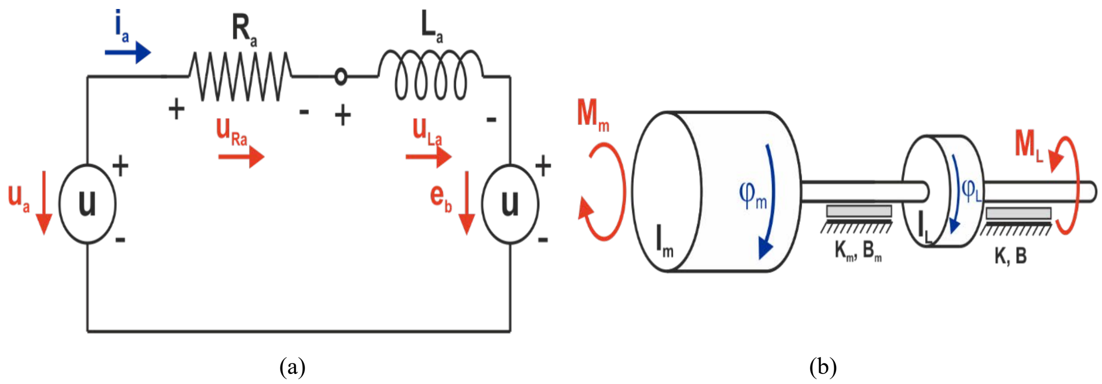
Pre tento systém motora možno takisto nakresliť riadiaci blokový diagram riadenia daného elektromotora, ktorý je znázornený na nasledujúcom Obr. 5.7.



Obr. 5.7. Blokový diagram pre jednosmerný motor s riadením napätia vo vinutí

Príklad č. 5.2:

Elektromechanický systém, v ktorom je systém budený jednosmerným elektro-motorom je zobrazený na nasledujúcom Obr. 5.8. Predpokladajme, že indukčnosť $\mathbf{L_a}$, odpor $\mathbf{R_a}$ a konštanty motora $\mathbf{K_t}$ a $\mathbf{K_e}$ sú známe veličiny. Mechanická časť modelu je reprezentovaná momentami zotrvačnosti $\mathbf{I_m}$ a **I**, tlmičmi viskózneho tlmenia a tuhosťami na strane motora a záťaže $\mathbf{B_m}, \mathbf{K_m}$ a **B**, **K**. Motor je zaťažený na jednej strane momentom od záťaže $\mathbf{M_L}$ a na strane druhej momentom od motora $\mathbf{M_m}$. Odvoďte matematický model opisujúci vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_a}$, zaťažujúcim momentom $\mathbf{M_L}$ a elektrickým prúdom $\mathbf{i_a}$ s uvažovaním natočenia od motora $\boldsymbol{\varphi_m}$ a natočením hmoty záťaže $\boldsymbol{\varphi_L}$.



Obr. 5.8. Model elektro-mechanického systému budeného elektro-motorom: (a) elektrická časť modelu (b) mechanická časť modelu

Pre elektrickú časť elektromechanického systému aplikujeme **II. Kirchhoffov zákon** pre napätia

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b - u_a = 0\,, \tag{5.35}$$

kde $\mathbf{e_b} = \mathbf{K_e \dot{\varphi}_m}$. Potom po dosadení za indikované elektromotorické napätie $\mathbf{e_b}$ platí, že

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = u_a - K_e \dot{\varphi}_m\,. \tag{5.36}$$

Pre **mechanickú časť elektromechanického systému** aplikujeme **II. Newtonov zákon**. Dostávame tento matematický model sústavy dvoch diferenciálnych rovníc pre uvažované hmoty **I** a $\mathbf{I_m}$

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\varphi}_m + B_m(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_L) + K_m(\varphi_m - \varphi_L) &= M_m\,, \\ I_L \ddot{\varphi}_L - B_m(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_L) - K_m(\varphi_m - \varphi_L) + B\dot{\varphi}_L + K\varphi_L &= -M_L, \end{aligned} \tag{5.37}$$

kde $\mathbf{M_m} = \mathbf{K_t i_a}$ je moment od motora, ktorý je priamoúmerný z elektrickým prúdom $\mathbf{i_a}$ a charakterizovaný konštantou mechanickej časti motora $\mathbf{K_t}$.

Dosadením väzbovej rovnice $\mathbf{M_m} = \mathbf{K_t i_a}$ do odvodeného systému diferenciálnych rovníc pre mechanickú časť motora dostávame

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\varphi}_m + B_m(\dot{\varphi}_m - \varphi_L) + K_m(\varphi_m - \varphi_L) &= K_t i_a\,, \\ I_L \ddot{\varphi}_L - B_m(\dot{\varphi}_m - \varphi_L) - K_m(\varphi_m - \varphi_L) + B\dot{\varphi}_L + K\varphi_L &= -M_L\,. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Kombináciou všetkých troch diferenciálnych rovníc dostávame sústavu troch **diferenciálnych rovníc** reprezentujúcich matematický model **elektro-mechanického systému** podľa Obr. 5.8

$$\begin{aligned} I_m \ddot{\varphi}_m + B_m(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_L) + K_m(\varphi_m - \varphi_L) - K_t i_a &= 0\,, \\ I_L \ddot{\varphi}_L - B_m(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_L) - K_m(\varphi_m - \varphi_L) + B\dot{\varphi}_L + K\varphi_L &= -M_L \\ L_a \dot{i}_a + R_a i_a + K_e \dot{\varphi}_m &= u_a\,. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Túto sústavu rovníc možno prepísať do tohoto **maticového tvaru**

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_m \\ \ddot{\varphi}_L \\ \ddot{i}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m & -B_m & 0 \\ -B_m & B_m + B & 0 \\ K_e & 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_m \\ \dot{\varphi}_L \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_m & -K_m & -K_t \\ -K_m & K_m + K & 0 \\ 0 & 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_m \\ \varphi_L \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_L \\ u_a \end{bmatrix}. \tag{5.40}$$

Vykonajme teraz **Laplaceovu transformáciu** predchádzajúceho systému s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{m}}(\mathbf{0}) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{L}}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{L}}(\mathbf{0}) = \mathbf{i}_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a dostávame Laplaceov obraz v rovine **s** danej sústavy diferenciálnych rovníc v tomto tvare

$$\begin{bmatrix} I_m s^2 + B_m s + K_m & -B_m s - K_m & -K_t \\ -B_m s - K_m & I_L s^2 + (B_m + B)s & K_m + K \\ K_e s & 0 & L_a s + R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_m(s) \\ \Phi_L(s) \\ I_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_L(s) \\ U_a(s) \end{bmatrix}. \tag{5.41}$$

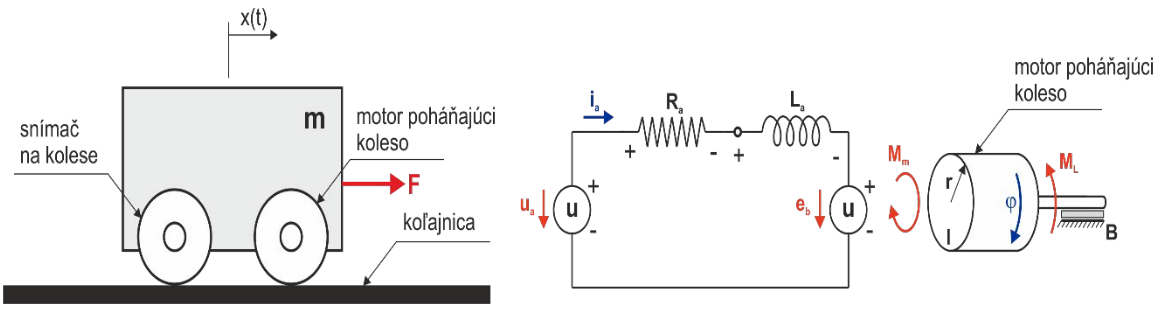
Potom prenosová matica **G(s)** tohto systému nadobúda tvar matice **3 x 2** piatich prenosových funkcií

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_m(s)}{M_L(s)} & \frac{\Phi_m(s)}{U_a(s)} \\ \frac{\Phi_L(s)}{M_L(s)} & \frac{\Phi_L(s)}{U_a(s)} \\ \frac{I_a(s)}{M_L(s)} & \frac{I_a(s)(s)}{U_a(s)} \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

Úlohy na riešenie

Problém 5.1:

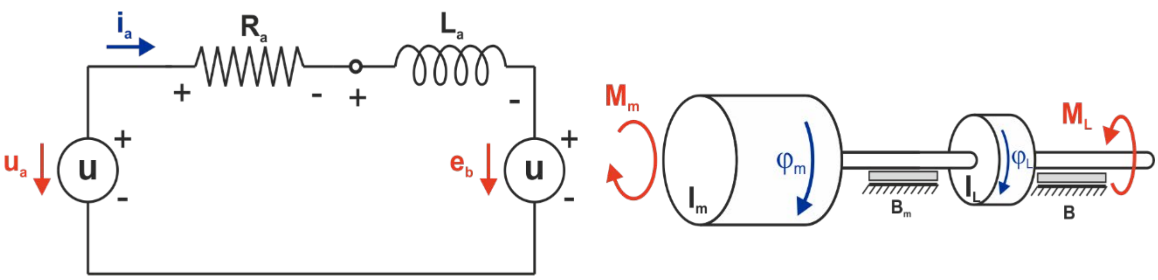
Predpokladajme vozík hmotnosti **m**, ktorý sa pohybuje po koľajniciach ako je zobrazené na Obr. 5.9. Vozík je poháňaný jednosmerným motorom, ktorý vozík poháňa do pohybu krútiacim momentom $\mathbf{M_m}$ pôsobiacim na prednom kolese nápravy s uvažovaním tlmiaceho účinku **B**. Ak predpokladáme, že indukčnosť $\mathbf{L_a}$, odpor $\mathbf{R_a}$ a konštanty motora $\mathbf{K_t}$ a $\mathbf{K_e}$ sú známe odvoďte matematický model elektromechanického systému a zapíšte do maticového tvaru.



Obr. 5.9. Vozík poháňaný jednosmerným motorom

Problém 5.2:

Elektromechanický systém zobrazený na nasledujúcom Obr. 5.10 je budený jednosmerným elektromotorom. Predpokladajme, že indukčnosť $\mathbf{L_a}$, odpor $\mathbf{R_a}$ a konštanty motora $\mathbf{K_t}$ a $\mathbf{K_e}$ sú známe. Mechanická časť modelu pozostáva z momentov zotrvačnosti $\mathbf{I_m}$ a **I** a takisto s tlmičov viskózneho tlmenia $\mathbf{B_m}$ a **B**. Motor je na jednej strane zaťažený momentom od záťaže $\mathbf{M_L}$ a na strane druhej momentom od motora $\mathbf{M_m}$. Nájdite matematický model opisujúci vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_a}$, zaťažujúcim momentom $\mathbf{M_L}$ a elektrickým prúdom $\mathbf{i_a}$ s uvažovaním natočenia od motora $\boldsymbol{\varphi_m}$ a natočenia hmoty na strane záťaže $\boldsymbol{\varphi_L}$. Výsledný matematický model zapíšte do maticového tvaru a nájdite prenosovú maticu tohto systému **G(s)**.



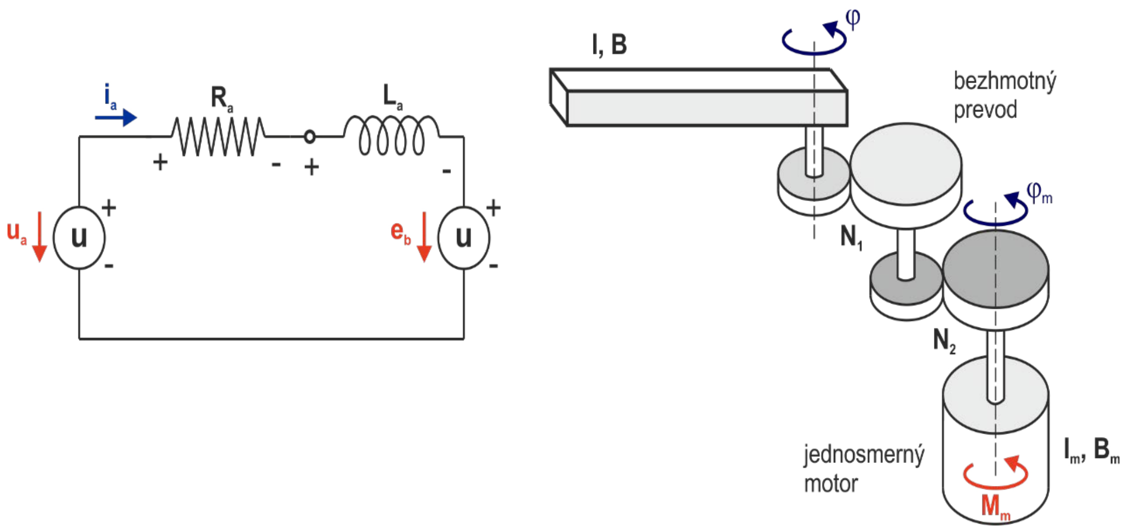
Obr. 5.10. Elektromechanický systém

Problém 5.3:

Dynamický systém **robotickej ruky** budený elektrickým jednosmerným motorom je zobrazený na nasledujúcom Obr. 5.11. Predpokladajme, že indukčnosť na strane statora je zanedbateľná $\mathbf{L_a} \approx \mathbf{0}$ a konštanty motora $\mathbf{K_t}$ a $\mathbf{K_e}$ sú známe veličiny. Potom,

a) odvoďte diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi napätím $\mathbf{u_a}$ a natočením robotickej ruky $\boldsymbol{\varphi}$,

b) a určte prenosovú funkciu tohto systému $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{s})/\mathbf{U_a}(\mathbf{s})$.



Obr. 5.11. Robotická ruka budená jednosmerným elektrickým motorom

6 METÓDA IMPEDANCIE

V tejto kapitole sa budeme zaoberať metódou impedancie, ktorá je ďalšou zo skupiny metód použiteľných na odvodenie matematického modelu dynamických systémov. Koncept **impedancie** je veľmi užitočný hlavne pre **elektrické systémy**, pretože poskytuje alternatívu prenosovým funkciám a diferenciálnym rovniciam Na odvodenie matematického modelu systému.

6.1 IMPEDANCIA ELEKTRICKÝCH KOMPONENTOV

Impedancia je zovšeobecnenie konceptu odporu **R**. Matematicky je elektrická impedancia definovaná ako pomer napätia a elektrického prúdu v oblasti **s**

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}. \tag{6.1}$$

Už vieme, že pre elektrický rezistor elektrického obvodu platí rovnica **Ohmovho zákona** $\mathbf{u = Ri}$, preto impedancia $\mathbf{Z(s)}$ v prípade tohto rezistora je práve konštanta odporu **R**

$$Z(s) = R. \tag{6.2}$$

Pre **indukčný prvok** elektrického obvodu (**cievka**) zase platí rovnica $\mathbf{u = L\frac{di}{dt}}$. Ak vykonáme **Laplaceovu transformáciu** tejto rovnice s uvažovaním nulových počiatočných podmienok, potom táto diferenciálna forma nadobudne tvar $\mathbf{U(s) = LsI(s)}$, a teda impedancia $\mathbf{Z(s)}$ pre cievku je definovaná ako

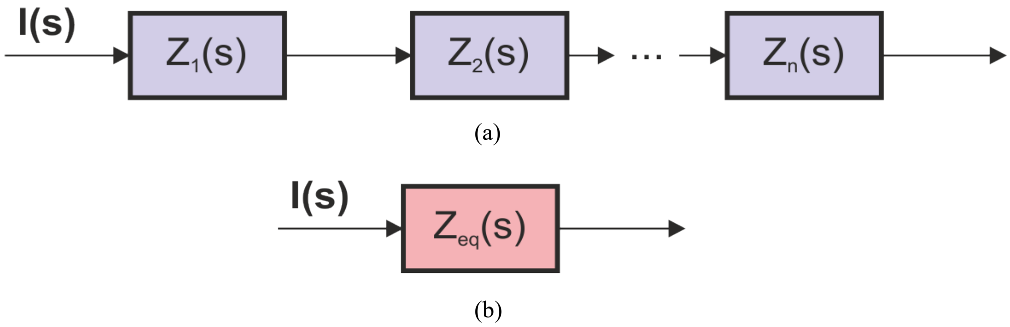
$$Z(s) = Ls. \tag{6.3}$$

Podobným spôsobom pre **kapacitný prvok** (**kondenzátor**), pre ktorý platí rovnica $\mathbf{i = C\frac{du}{dt}}$, možno vykonaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok, odvodiť vzťah $\mathbf{I(s) = CsU(s)}$. Potom pre kapacitný prvok elektrického obvodu bude existovať impedancia $\mathbf{Z(s)}$ daná vzťahom

$$Z(s) = \frac{1}{Cs}. \tag{6.4}$$

6.2 IMPEDANCIA SÉRIOVÉHO A PARALELNÉHO ZAPOJENIA ELEKTRICKÝCH ELEMENTOV

Pretože, **impedanciu** možno charakterizovať vo všeobecnom tvare ako **odpor**, potom možno ľahkým spôsobom nájsť ekvivalentnú impedanciu pre **sériové** alebo **paralelné zapojenie** elektrických elementov. Nasledujúci Obr. 6.1 (a) zobrazuje impedancie v prípade sériového zapojenia elektrických elementov.



Obr. 6.1. (a) Sériovo zapojené impedancie, (b) ekvivalentný obvod

Všimnime si, že rovnaký elektrický prúd preteká všetkými **n impedanciami**. Potom na základe **II. Kirchhoffovho zákona** musí platiť, že celkové napätie $\mathbf{U(s)}$ musí byť dané ako súčet všetkých sériovo zapojených **impedancií**, ktoré sú prenásobené elektrickým prúdom $\mathbf{I(s)}$, ktorý je v tomto prípade rovnaký pre všetky zapojené prvky s impedanciami. A teda platí, že

$$U(s) = I(s)Z_1(s) + I(s)Z_2(s) + \cdots + I(s)Z_n(s)\,. \qquad (6.5)$$

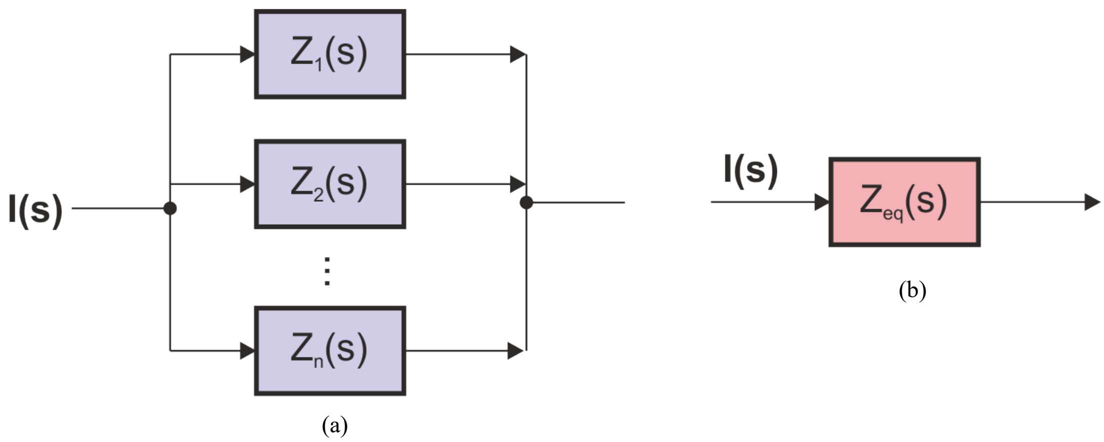
Porovnaním elektrického obvodu s **n-sériovo zapojenými impedanciami** a ekvivalentného elektrického obvodu podľa Obr. 6.1 (b) s jednou **elektrickou impedanciou** $\mathbf{Z_{eq}(s)}$, pre ktorý platí vzťah

$$U(s) = I(s) \cdot Z_{eq}(s), \qquad (6.6)$$

možno odôvodiť vzťah pre **ekvivalentnú impedanciu** n-sériovo zapojených impedancií, ktorá je v tomto prípade daná súčtom všetkých impedancií v sérií

$$Z_{eq}(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + \cdots + Z_n(s)\,. \qquad (6.7)$$

Predpokladajme, že máme v obvode **n paralelne zapojených impedancií** ako je znázornené na nasledujúcom Obr. 6.2 (a).



Obr. 6.2. (a) Paralelne zapojené impedancie, (b) ekvivalentný obvod

Potom pre všetky **impedancie** paralelne zapojené takýmto spôsobom v elektrickom obvode musí platiť, že na týchto impedanciách nameriame rovnaké elektrické napätie $\mathbf{U(s)}$. Na základe **I. Kirchhoffovho zákona** musí ďalej platiť, že **celkový elektrický prúd** $\mathbf{I(s)}$ sa rovnomerne rozdelí na všetky zapojené impedancie (pozn., že elektrické prúdy tečúce jednotlivými impedanciami možno určiť na základe **Ohmovho zákona**) a musí teda platiť toto

$$\mathrm{I(s)} = \frac{\mathrm{U(s)}}{\mathrm{Z_1(s)}} + \frac{\mathrm{U(s)}}{\mathrm{Z_2(s)}} + \cdots + \frac{\mathrm{U(s)}}{\mathrm{Z_n(s)}}. \tag{6.8}$$

Porovnaním elektrického obvodu s **n-paralelne zapojenými impedanciami** a ekvivalentného elektrického obvodu podľa Obr. 6.2 (b) s jednou **elektrickou impedanciou** $\mathbf{Z_{eq}(s)}$, pre ktorý platí vzťah

$$\mathrm{I(s)} = \frac{\mathrm{U(s)}}{\mathrm{Z_{eq}(s)}}, \tag{6.9}$$

možno napokon odôvodiť vzťah pre **ekvivalentnú impedanciu** $\mathbf{Z_{eq}(s)}$ **n-paralelne zapojených impedancií**, ktorá je v tomto prípade daná súčtom prevrátených hodnôt všetkých impedancií v sérii

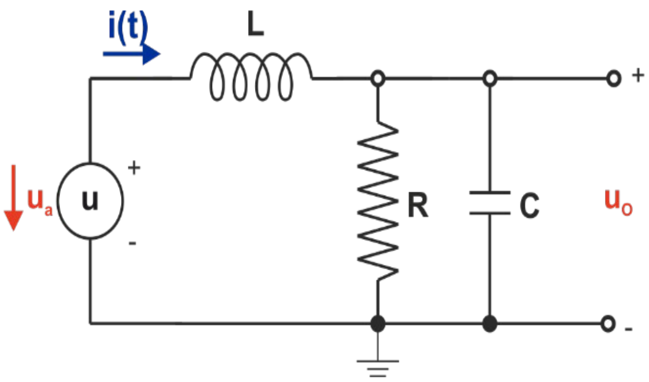
$$\frac{1}{\mathrm{Z_{eq}(s)}} = \frac{1}{\mathrm{Z_1(s)}} + \frac{1}{\mathrm{Z_2(s)}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{Z_n(s)}}. \tag{6.10}$$

Poznamenajme, že **impedancia** je v základe prenosová funkcia definovaná v komplexnej rovine **s**. Táto impedancia však nemá vo svojej definícií žiadne **derivačné** alebo **integračné** operátory.

Ak teda prekreslíme elektrický obvod do **roviny s** jednoduchou zámenou pasívnych prvkov za **impedancie Z(s)**, takýmto spôsobom možno určiť prenosovú funkciu systému **G(s)** jednoduchým použitím **Kirchhoffových zákonov**. Diferenciálnu rovnicu potom možno spätne transformovať do časovej roviny **t** spätnou Laplaceovou transformáciou.

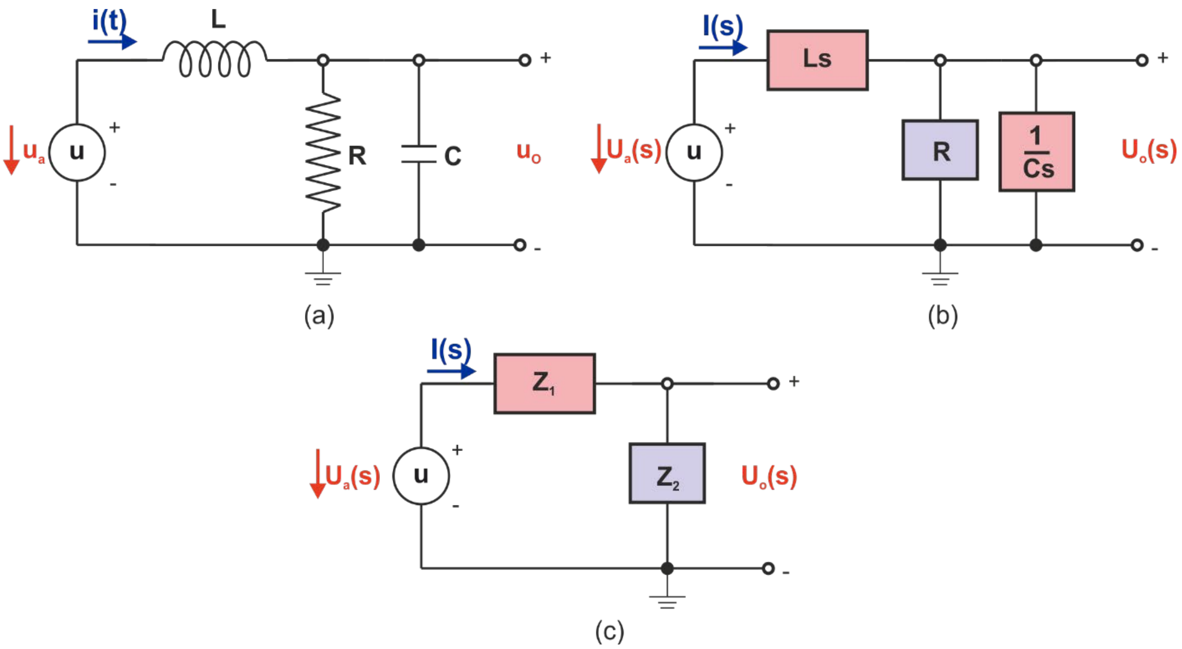
Príklad č. 6.1. RLC obvod riešený metódou impedancie

Pre elektrický obvod znázornený na nasledujúcom Obr. 6.3 odvoďte použitím **metódy impedancie** diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_0}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a}$ s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{u}}_\mathbf{0} = \mathbf{u_0(0)} = \mathbf{0}$.



Obr. 6.3. RLC obvod

Originálny elektrický obvod, ktorý je znázornený na Obr. 6.4 (a) prekreslíme tak, že všetky **pasívne prvky** zameníme za ich odpovedajúce reprezentácie **elektrickej impedancie** v oblasti **s**, pozri Obr. 6.4 (b).



Obr. 6.4. RLC obvod: (a) v časovej oblasti, (b) v oblasti s, (c) použitie impedancie

Poznamenajme, že rezistor **R** je v paralelnom spojení s kondenzátorom, tzn. že ekvivalentné impedancie pre daný elektrický obvod sú

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= Ls\,, \\ \frac{1}{Z_2(s)} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{1/Cs} \end{aligned} \tag{6.11}$$

alebo

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= Ls\,, \\ Z_2(s) &= \frac{R}{RCs+1}\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Pre **ekvivalentný elektrický obvod s impedanciami** podľa Obr. 6.4 (c) aplikujeme **II. Kirchhoffov zákon** pre napätia

$$Z_1(s)I(s) + Z_2(s)I(s) - U_a(s) = 0\,. \tag{6.13}$$

Je nutné poznamenať, že medzi elektrickým prúdom a výstupným napätím existuje vzťah daný rovnicou podľa **Ohmovho zákona**

$$U_0(s) = Z_2(s)I(s) \tag{6.14}$$

a teda po dosadení za **I(s)** dostávame, že

$$Z_1(s)\frac{U_0(s)}{Z_2(s)} + U_0(s) = U_a(s)\,. \tag{6.15}$$

Ďalšími matematickými úpravami možno dospieť k prenosovej funkcii opisujúcej vzťah medzi $\mathbf{U_a(s)}$ a $\mathbf{U_0(s)}$ v tomto tvare

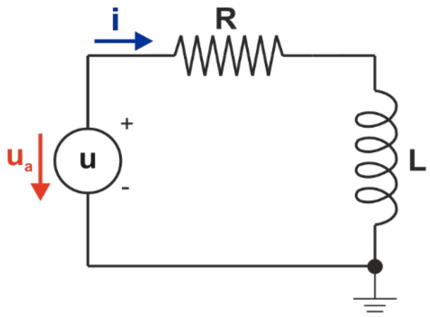
$$\frac{U_0(s)}{U_a(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)} = \frac{\frac{R}{RCs+1}}{Ls + \frac{R}{RCs+1}} = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}\,. \tag{6.16}$$

Aplikovaním **inverznej Laplaceovej transformácie** možno získať diferenciálnu rovnicu v časovej oblasti

$$RLC\ddot{u}_o + L\dot{u}_o + Ru_o = Ru_a\,. \tag{6.17}$$

Príklad č. 6.2. RLC obvod – metódou impedancie

Pre elektrický obvod znázornený na nasledujúcom Obr. 6.5 použitím **metódy impedancie** odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_0}$ a vstupným napätím $\mathbf{u_a}$ s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{u_o(0) = 0}$.

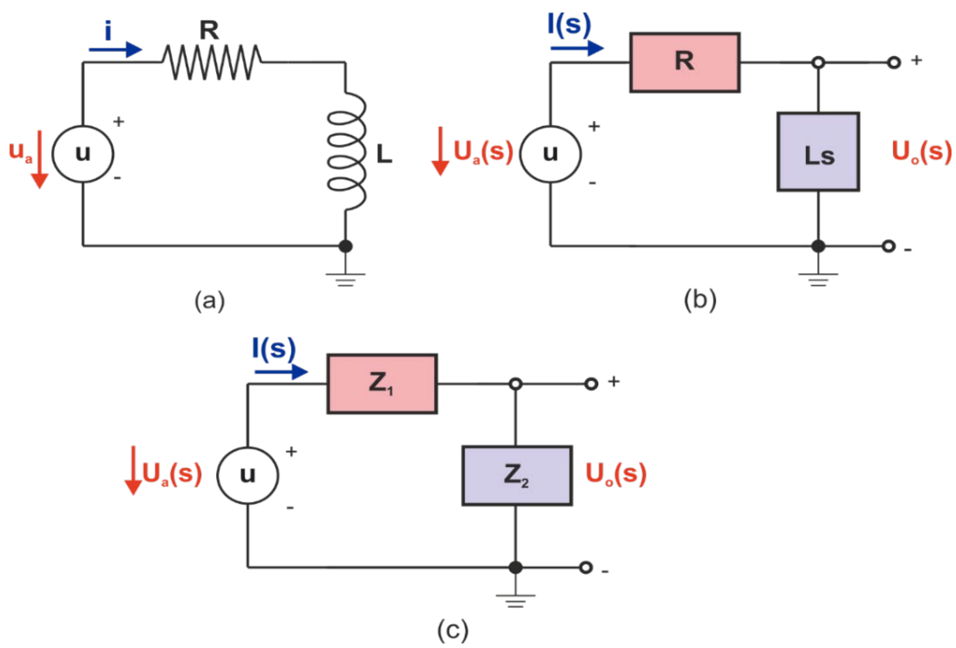


Obr. 6.5. RL obvod v časovej oblasti

Poznamenajme, že rezistor **R** je v sériovom zapojení s cievkou, tzn. že pre jednotlivé **impedancie** musí platiť

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= R\,, \\ Z_2(s) &= Ls\,. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Originálny elektrický obvod, ktorý je znázornený na Obr. 6.6 (a) prekreslíme tak, že všetky **pasívne prvky** zameníme za ich reprezentácie **elektrickej impedancie**, pozri Obr. 6.6 (b).



Obr. 6.6. RL obvod: (a) v časovej oblasti, (b) v oblasti s, (c) použitie impedancie

Pre **ekvivalentný elektrický obvod** podľa Obr. 6.6 (b) prekresleného do oblasti **s** roviny aplikujeme **II. Kirchhoffov zákon** pre napätia

$$Z_1(s)I(s) + Z_2(s)I(s) - U_a(s) = 0\,. \tag{6.19}$$

Poznamenajme, že medzi elektrickým prúdom **i** a výstupným napätím $\mathbf{u_o}$ existuje lineárny vzťah definovaný na základe **Ohmovho zákona**

$$U_o(s) = Z_2(s)I(s)\,. \tag{6.20}$$

Potom po dosadení za elektrickú impedanciu elektrického prúdu **I(s)** dostávame

$$Z_1(s)\frac{U_0(s)}{Z_2(s)} + U_o(s) = U_a(s)\,. \tag{6.21}$$

Ďalšími matematickými úpravami možno dospieť k prenosovej funkcii **G(s)** opisujúcej vzťah medzi $\mathbf{U_a(s)}$ a $\mathbf{U_0(s)}$ a to v nasledovnom tvare

$$\frac{U_0(s)}{U_a(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{Ls}{R + Ls}\,. \tag{6.22}$$

Aplikovaním spätnej **inverznej Laplaceovej transformácie** dostávame diferenciálnu rovnicu definovanú v časovej oblasti **t**

$$\begin{gathered} L\dot{u}_o + Ru_o = L\dot{u}_a \\ \dot{u}_o + \frac{R}{L}u_o = \dot{u}_a\,. \end{gathered} \tag{6.23}$$

6.3 MECHANICKÁ IMPEDANCIA

Analogicky k elektrickej impedancii možno definovať **mechanickú impedanciu** ako:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{F(s)}, \tag{6.24}$$

kde $\mathbf{V(s)}$ a $\mathbf{F(s)}$ sú **Laplaceove transformácie** rýchlosti **v(t)** a sily **F(t)**. To znamená, že aj mechanický systém možno riešiť **metódami impedancie**. Pre viskózny tlmič je tlmiaca sila **F** definovaná vzťahom $\mathbf{F = bv}$ alebo vyjadrená v Laplaceovom tvare rovnicou $\mathbf{F(s) = bV(s)}$. To znamená, že tlmič má mechanickú impedanciu definovanú na základe vzťahu

$$Z(s) = \frac{1}{b}. \tag{6.25}$$

Pre pružný element, ktorý je reprezentovaný pružinou s tuhosťou **k** možno vypočítať silu v pružine na základe vzťahu $\mathbf{F = kx = k\int vdt}$ alebo zapísané v Laplaceovom tvare ako $\mathbf{F(s) = \frac{k}{s}V(s)}$. To znamená, že pružina má mechanickú impedanciu definovanú vzťahom

$$Z(s) = \frac{s}{k}. \tag{6.26}$$

Pre hmotu **m**, ktorá sa pohybuje rýchlosťou **v** (rovnomerne alebo akceleruje) platí **II. Newtonov zákon** pohybu, z ktorého vyplýva, že $\mathbf{F = ma = m\dot{v}}$ alebo zapísané v Laplaceovom tvare ako $\mathbf{F(s) = m \cdot s \cdot V(s)}$. Potom pre hmotu **m**, ktorá sa pohybuje rýchlosťou **v** možno definovať mechanickú impedanciu vzťahom

$$Z(s) = \frac{1}{ms}. \tag{6.27}$$

7 FLUIDNÉ SYSTÉMY

Tekutina je všeobecný termín reprezentujúci **plyn** alebo **kvapalinu**. Tekutinu považujeme za **nestlačiteľnú** v prípade, že **hustota** $\boldsymbol{\rho}$ sa nemení s tlakom **p** to znamená, že $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{f(p)}$ resp. $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{konšt.}$. V opačnom prípade tekutinu považujeme za **stlačiteľnú**, tzn. **hustota** $\boldsymbol{\rho}$ sa mení s tlakom **p**, resp. $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{f(p)}$ a teda $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{konšt.}$ Vo všeobecnosti všetky plyny sú uvažované ako **stlačiteľné** tekutiny, zatiaľ čo kvapaliny uvažujeme ako **nestlačiteľné** tekutiny. Aj keď kvapaliny sú v skutočnosti **stlačiteľné**, zmena hustoty kvapaliny $\boldsymbol{\rho}$ nie je až tak významná pri zmene tlaku tejto kvapaliny **p**.

Fluidné (tekutinové) systémy vo všeobecnosti delíme na dve skupiny:

a) pneumatické systémy

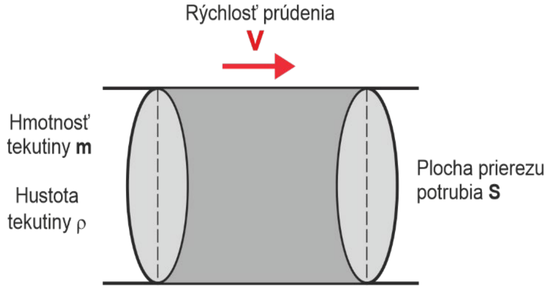
b) hydraulické systémy

Pneumatický systém je systém, pri ktorom tekutinu uvažujeme ako **stlačiteľné médium**, na druhej strane v prípade **hydraulického systému** je tekutina uvažovaná ako **nestlačiteľné médium**. Typickým príkladom hydraulického systému je napr. hydraulický systém, pri ktorom kontrolujeme výšku hladiny kvapaliny v zásobníku, resp. nádrži, ďalším príkladom môžu byť napr. rôzne technické úpravne vody, **hydraulické potrubné** (transportné) systémy prípad. mechanicko-hydraulické systémy, akým je napr. **servo-mechanizmus**, **hydraulický motor** a iné.

V tejto kapitole sa budeme venovať modelovaniu **fluidných systémov** (z angl. **fluid systems**). Zameriame sa na systémy reprezentujúce pneumatické a kvapalinové systémy so zásobníkmi. Predtým, než si začneme vysvetľovať princíp tvorby matematických modelov, pre každý typ tekutinového systému (pneumatického a hydraulického) si zadefinujeme koncept jeho základných stavebných prvkov. V prípade fluidných systémov definujeme hydraulickú (pneumatickú) **kapacitu** resp. **indukčnosť** ako aj o hydraulický (pneumatický) **odpor**, ktoré v tomto predstavujú základné stavebné prvky tekutinových systémov.

7.1 OBJEMOVÝ A HMOTNOSTNÝ PRIETOK

Pre tekutinu s hustotou $\boldsymbol{\rho}$, ktorá prúdi potrubím známeho prierezu **S** rýchlosťou **v** ako je znázornené na Obr. 7.1 možno definovať dve základné fyzikálne veličiny, ktorými možno opísať množstvo pretečenej tekutiny za jednotku času. V prípade tekutín rozlišujeme tzv. **objemový prietok** **q**, resp. **hmotnostný prietok** $\mathbf{q_m}$.



Obr. 7.1. Potrubie, v ktorom prúdi tekutina

Objemový prietok q tekutiny alebo **prietok**, resp. **prietokové množstvo** definujeme ako objem tekutiny **V** (kvapaliny, plynu), prachu, granulátu a podobne, ktoré pretečie daným prierezom **S** za konkrétny čas **t**. Základná jednotka objemového prietoku **q** sú metre kubické za sekundu $[\mathbf{m^3.s^{-1}}]$. Matematicky je **objemový prietok q** definovaný ako

$$q = S \cdot v = \frac{dV}{dt}. \tag{7.1}$$

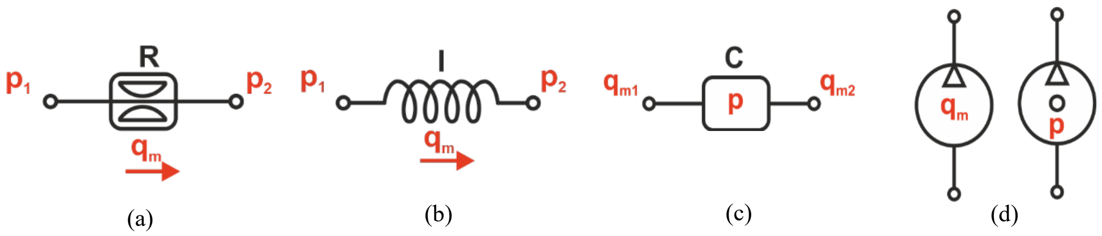
Hmotnostný prietok $\mathbf{q_m}$ tekutiny je definovaný ako hmotnosť tekutiny (kvapaliny, plynu) s hmotnosťou **m** pretečenej daným prierezom **S** za jednotku času **t**. **Hmotnostný prietok** $\mathbf{q_m}$ má teda fyzikálnu jednotku definovanú ako $[\mathbf{kg.s^{-1}}]$. Matematicky **hmotnostný prietok** $\mathbf{q_m}$ možno definovať ako

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \cdot q. \tag{7.2}$$

7.2 PNEUMATICKÉ SYSTÉMY

Pneumatické systémy sú často používané v rôznych aplikáciách v technickej praxi a to najmä ako pneumatické **prepínače**, využívajú sa taktiež napr. v prípade **vzduchových bŕzd** v autobusoch resp. **ťahačoch**, najčastejšie sú však využívané ako pneumatické **akčné členy** (**pneumatické motory**), ktoré slúžia na riadenie polohy mechanických častí kinematických mechanizmov. Základné stavebné prvky pneumatických systémov sú **pneumatická kapacita**, **odpor** a **indukčnosť**.

Pracovným médiom **pneumatického systému** je stlačiteľný plyn (najčastejšie **vzduch)**. Na odvodenie matematického modelu pneumatického systému je nutné pochopiť termodynamické vlastnosti plynov na základe, ktorých sú definované vzťahy pre základné stavebné prvky všetkých pneumatických systémov. Schematické značky základných prvkov **pneumatického systému** s uvažovaním hmotnostného prietoku $\mathbf{q_m}$ sú znázornené na nasledujúcom Obr. 7.2.



Obr. 7.2. Schematické značky pneumatického systému, (a) pneumatický odpor, (b) pneumatická indukčnosť, (c) pneumatická kapacita, (d) zdroje hmotnostného prietoku a tlaku

7.3 IDEÁLNY PLYN

Ideálny plyn nepredpokladá vzájomné pôsobenie častíc plynu, je teda ideálnym hypotetickým plynom, ktorý v skutočnosti neexistuje. Aktuálny stav **ideálneho plynu** je daný jeho stavovými veličinami ako sú **tlak p**, **objem V** a **teplota T**. Inými slovami, **tlak p**, **objem V**, **teplota T** resp. **hmotnosť m** sú veličiny charakterizujúce daný plyn. Stavové veličiny **tlak**, **objem** a **teplota** sú veličiny, ktoré v každom čase **t** definujú stav ideálneho plynu a sú navzájom závislé. Poznamenajme, že omnoho zložitejšie stav plynu možno opísať pre **skutočné plyny**, ktoré sa riadia **Van der Waalsovými** zákonitosťami. Na zjednodušenie výpočtu odozvy pneumatických systémov preto uvažujeme **ideálne plyny**. Vzájomný vzťah veličín **p**, **V**, **T** opisuje rovnica **ideálneho plynu** v tvare

$$\frac{pV}{T} = \text{konšt.}\ , \tag{7.3}$$

kde **p** je **absolútny tlak plynu** v jednotkách **Pascal [Pa]**, **V** je **objem plynu [m³]** a **T** je **absolútna teplota** v stupňoch **Kelvin** [**K**] alebo v stupňoch **Celzius** [**°C**].

Pripomeňme, že všetky reálne plyny sa správajú ako **ideálny plyn** v prípade, že **tlak plynu je dostatočne nízky** a **teplota plynu je dostatočne vysoká**. Pri nízkom tlaku **p** a riadenej teplote **T** potom všetky reálne plyny možno považovať za ideálne plyny, čím sa matematické modely stávajú jednoduchšie a tým sa zákonite zjednodušuje aj získanie riešenia ich diferenciálnych rovníc.

Z poznatkov teoretickej fyziky, ktorá sa zaoberá problémami v oblasti kinetiky plynov (**termodynamika plynov)**, pre **ideálny plyn** platí táto **stavová rovnica ideálneho** plynu

$$pV = nRT, \tag{7.4}$$

kde **n** je **látkové množstvo plynu 1 [mol]**, **R** je **univerzálna plynová konštanta** $[\mathbf{J.K^{-1}.mol^{-1}}]$ a **p tlak, V objem, T teplota** sú stavové veličiny ideálneho plynu.

Jeden mol je také množstvo látky v sústave, ktoré obsahuje presne toľko elementárnych entít, koľko je atómov v **0.012 kg** izotopu uhlíka $^{12}\mathbf{C}$. Tento počet entít v **0.012 kg** uhlíka $^{12}\mathbf{C}$ je približne $\mathbf{N_A = 6.023 \times 10^{23}}$ častíc. Toto číslo sa nazýva **Avogadrovou konštantou**.

Látkove množstvo n je fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje pomer počtu základných častíc látky k počtu častíc v **12 g** izotopu uhlíka $^{12}\mathbf{C}$ a je definované ako

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}, \tag{7.5}$$

kde **m** je **hmotnosť** plynu, **N** je počet základných častíc v látke a **M** je **molárna hmotnosť** plynu (fyzikálna veličina, ktorá udáva hmotnosť jednotkového látkového množstva danej látky).

Univerzálna plynová konštanta R alebo **plynová konštanta**, resp. **molárna plynová konštanta** je fyzikálna konštanta vystupujúca v stavových rovniciach plynu. Numerická hodnota plynovej konštanty je $\mathbf{R = 8314.3\ J.mol^{-1}.K^{-1}}$. Ak teraz využijeme definíciu pre látkové množstvo $\mathbf{n = \frac{m}{M}}$, potom dostávame alternatívnu rovnicu, ktorá platí pre ideálny plyn v tvare

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT = mR_gT \tag{7.6}$$

resp.

$$pV = mR_gT, \tag{7.7}$$

kde $\mathbf{R_g = R/M\ [J.kg^{-1}.K^{-1}]}$ je **špecifická plynová konštanta plynu**, ktorá platí pre konkrétny druh plynu. Napr. pre suchý vzduch je špecifická plynová konštanta $\mathbf{R_g = 287.06\ J.kg^{-1}.K^{-1}}$.

7.4 TEPELNÉ DEJE V IDEÁLNOM PLYNE

Pri tepelných dejoch – stavových zmenách plynu (keď predpokladáme, že sa množstvo plynu nemení) sa môžu meniť tri stavové veličiny **p, V, T**. Počas daného tepelného deja sa privádza alebo odvádza teplo **Q [J]** resp. plyn koná prácu **W [J]**, tzn. že sa mení vnútorná energia **U [J]**.

Pre konkrétny **termodynamický dej**, kedy plyn prechádza zo stavu **1** do stavu **2** musí platiť **stavová rovnica plynu** v tomto tvare

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \text{konšt.}\ . \tag{7.8}$$

Najjednoduchšie sú také zmeny, kedy sa menia len dve zo stavových veličín a tretia zostáva konštantná alebo nenastáva žiadna tepelná výmena s okolím. Takto možno získať nasledujúce štyri najdôležitejšie zmeny stavov plynov:

1. **izotermický** – konštantná teplota **T**,
2. **izochorický** – konštantný objem V,
3. **izobarický** – konštantný tlak **p**,
4. **adiabatický** – nenastáva teplotná výmena s okolím.

V praxi sa skutočné procesy (deje) od týchto ideálnych stavov líšia. Vždy sa však vyberá taký proces (dej), ktorý najlepšie zodpovedá danej skutočnosti stavovej zmene plynu.

7.4.1 Izotermický dej

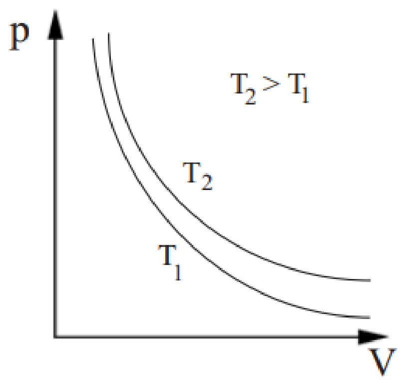
Izotermický dej je taký proces, pri ktorom sa zachováva teplota **($T = $ konšt.)**. Súvislosť tlaku plynu **p** a jeho objemu **V** objavil **Róbert Boyle** a nezávisle od neho **Edme Mariotte**. Hoci je prvenstvo **Boyla** jasné, napriek tomu sa zákon pôvodne nazýval len **Mariottov zákon**, pretože jeho formulácia bola ďaleko jasnejšia. Formulácia **Boylovho-Mariottovho zákona** znie: **súčin tlaku** a **objemu určitého množstva plynu je pri stálej teplote T konštantný**.

Matematicky zapísaný **Boylov-Mariottov** zákon hovorí, že

$$p_1V_1 = p_2V_2 = \text{konšt.}\ , \tag{7.9}$$

kde $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{V_1}$ sú veličiny, ktoré charakterizujú **stav č. 1** (pred vykonaním termodynamického deja) a $\mathbf{p_2}$ a $\mathbf{V_2}$ sú veličiny charakterizujúce **stav č. 2** (po uskutočnení termodynamického deja).

Grafické znázornenie zmien parametrov termodynamického deja zobrazujeme v tzv. **p-V** diagrame, pričom krivka zodpovedajúca danému deju (izotermickému deju) sa nazýva **izoterma**, pozri Obr. 7.3. Klasickým príkladom **izotermického deja** je napr. pomalé stláčanie uzavretej striekačky.



Obr. 7.3. Izotermický dej

Keďže v prípade tohto deja sa nemení teplota plynu **T**, nemení sa ani stredná kinetická energia jeho molekúl. Preto pri **izotermickom deji** je **vnútorná energia U ideálneho plynu** vždy konštantná. Z **I. termodynamického zákona** vyplýva, že teplo **Q** prijaté ideálnym plynom pri izotermickom deji sa rovná práci **W**, ktorú pri tomto deji koná plyn, t. j. **Q = W**. Práca, ktorú plyn vykoná pri svojom rozpínaní sa dá vypočítať ako

$$W = \int p\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mR_gT}{V}\mathrm{d}V = mR_gT\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\mathrm{d}V = mR_gT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \tag{7.10}$$

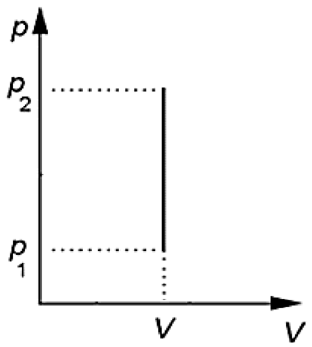
kde **tlak plynu p** sme vyjadrili zo stavovej rovnice reálneho plynu.

7.4.2 Izochorický dej

Ak pri zmene **tlaku p** alebo **teploty T** plynu v nádobe zaistíme konštantný **objem V**, potom proces, ktorým plyn prechádza zo stavu 1 do stavu 2 nazývame **izochorickým dejom ($\mathbf{V = konšt.}$)**. Matematicky tento dej opisuje **Charlesov zákon** ako

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{konšt.} \,, \tag{7.11}$$

kde $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{T_1}$ sú veličiny, ktoré charakterizujú **stav č. 1** (pred vykonaním termodynamického deja) a $\mathbf{p_2}$ a $\mathbf{T_2}$ sú veličiny charakterizujúce **stav č. 2** (po uskutočnení termodynamického deja). Pri **izochorickom deji** s ideálnym plynom stálej hmotnosti **m** je tlak plynu **p** priamoúmerný jeho termodynamickej teplote **T**. Grafické znázornenie závislosti tlaku plynu **p** od objemu **V** pri izochorickom deji sa nazýva **izochora**, pozri Obr. 7.4. Ako príklad tohto deja sa dá uviesť napr. nebezpečenstvo zahrievania plynovej fľaše počas požiaru.



Obr. 7.4. Izochorický dej

Keďže pri tomto deji sa nemení objem plynu **V**, práca vykonaná plynom je nulová $\mathbf{W = 0}$. Po energetickej stránke na základe **I. termodynamického zákona** platí, že

$$dQ = \frac{m}{M} c_V dT + dW = \frac{m}{M} c_V dT = dU \tag{7.12}$$

a integráciou podľa teploty v hraniciach $\mathbf{T_1}$ až $\mathbf{T_2}$ dostávame

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} dQ = \frac{m}{M} c_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} c_V = \frac{m}{M} c_V (T_2 - T_1) \,, \tag{7.13}$$

kde $\mathbf{c_V}$ $[\mathbf{J.kg^{-1}.K^{-1}}]$ je **špecifická tepelná kapacita plynu pri konštantnom objeme.** Zo získaných výsledkov je zrejmé, že pri **izochorickom deji** sa práca nekoná a dodaným teplom **Q** sa zvýši len vnútorná energia plynu **U**.

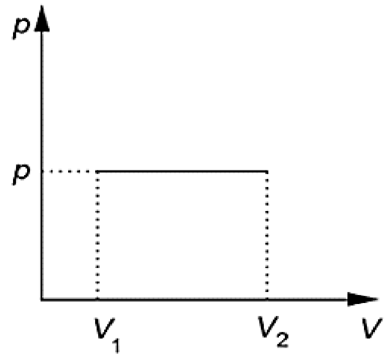
7.4.3 Izobarický dej

Ak pri zmene **objemu V** alebo **teploty T** plynu v nádobe zaistíme konštantný **tlak p**, potom ide o **izobarický dej (p = konšt.)**. Stavovú rovnicu ideálneho plynu možno upraviť do tvaru tzv. **Gayovho-Lussacovho zákona**

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \text{konšt.}\ , \qquad (7.14)$$

kde $\mathbf{V_1}$ a $\mathbf{T_1}$ sú veličiny, ktoré charakterizujú **stav č. 1** (pred vykonaním termodynamického deja) a $\mathbf{V_2}$ a $\mathbf{T_2}$ sú veličiny charakterizujúce **stav č. 2** (po uskutočnení termodynamického deja).

Pri **izobarickom deji** s ideálnym plynom stálej hmotnosti **m** je objem plynu **V** priamoúmerný jeho termodynamickej teplote **T**. Grafické znázornenie závislosti objemu plynu **V** od jeho termodynamickej teploty **T** pri izobarickom deji sa nazýva **izobara**, pozri Obr. 7.5.



Obr. 7.5. Izobarický dej

Práca **W**, ktorú vykonáva plyn zodpovedá obsahu obdĺžnika pod **izobarou**

$$W = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = mR_g\Delta T\,. \qquad (7.15)$$

Pri skúmaní tohto javu z hľadiska energetických pomerov vyjdeme opäť z definície **I. termodynamického zákona**, podľa ktorého platí, že

$$dQ = \frac{m}{M}c_v dT + pdV = \frac{m}{M}c_v dT + mR_g dT = \frac{m}{M}(c_v + R)dT = \frac{m}{M}c_p dT, \qquad (7.16)$$

pričom sme využili **Mayerovu rovnicu**: $\mathbf{c_p = c_v + R}$, kde $\mathbf{c_p}$ $[\mathbf{J.kg^{-1}.K^{-1}}]$ je **špecifická tepelná kapacita plynu pri konštantnom tlaku**, $\mathbf{c_v}$ $[\mathbf{J.kg^{-1}.K^{-1}}]$ je **špecifická tepelná kapacita plynu pri konštantnom objeme V** a R je univerzálna plynová konštanta $[\mathbf{J.K^{-1}.mol^{-1}}]$.

Integráciou predošlej rovnice dostávame vzťah pre **teplo Q** dodané systému

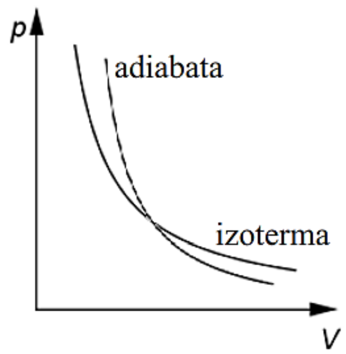
$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} c_p dT = \frac{m}{M} c_p (T_2 - T_1)\,. \tag{7.17}$$

7.4.4 Adiabatický dej

Adiabatický dej je taký, pri ktorom je plyn **tepelne izolovaný**, a preto žiadnu tepelnú energiu zvonku ani neprijíma, ani neodovzdáva. Z **I. termodynamického zákona** teda platí, že

$$\Delta U = W\,. \tag{7.18}$$

Pri **adiabatickej kompresii** sa plyn stláča (prijíma) prácu **W** a takisto sa zohrieva, t. j. narastá jeho vnútorná energia **U**. Ak plyn koná prácu **W**, zväčší svoj objem **V** a súčasne sa **ochladí** hovoríme o **adiabatickej expanzii**. Plyn koná prácu na úkor svojej vnútornej energie **U**. Pri **adiabatickej kompresii** tlak plynu rastie rýchlejšie ako pri **izotermickej zmene**. Krivka, po ktorej sa mení tlak plynu **p**, je znázornená na Obr. 7.6 a nazýva sa **adiabata**. **Adiabata** rastie (klesá) rýchlejšie než **izoterma**.



Obr. 7.6: Adiabatický dej

Pre **adiabatický** dej ideálneho plynu stálej hmotnosti **m** platí tzv. **Poissonov zákon**

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa} = \text{konšt.}\,, \tag{7.19}$$

kde

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{7.20}$$

je **Poissonova konštanta κ**, ktorej hodnota je vždy väčšia ako >**1**, pretože ($\mathbf{c_p > c_v}$). Pre stanovanie hodnoty **Poissonovej konštanty κ** sa používa metóda založená na meraní rýchlosti zvukových vĺn **v** v danom plyne, pričom podľa **Pierra Simona Laplace** platí, že

$$v = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}}\ , \qquad (7.21)$$

kde **ρ** je hustota plynu.

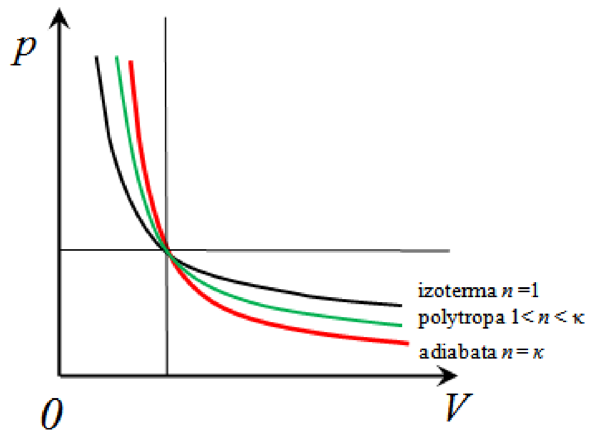
V technickej praxi sa dosahuje **adiabatická kompresia** resp. **expanzia** tak, že tieto deje prebehnú tak rýchlo, že plyn neprijme, ani neodovzdá teplo **Q**. Ochladenie plynu pri adiabatickej expanzii sa využíva na získanie nízkych teplôt. Príkladom **adiabatickej expanzie** je rýchle zväčšenie objemu oxidu uhličitého po otvorení sifónovej bombičky – teleso bombičky sa značne ochladí. Zvýšenie teploty pri **adiabatickej kompresii** spôsobí napr. zapálenie pohonných látok vo valcových vznetových motoroch.

7.4.5 Polytropický dej

Polytropický dej alebo polytropný dej je termodynamický dej, pre ktorý platí rovnica ($\mathbf{p \cdot V^{\kappa} = kon\check{s}t.}$), kde **p** je **tlak** plynu, **V** je **objem** plynu a **κ** je **Poissonova konštanta** plynu. Polytropický dej je najvšeobecnejším termodynamickým dejom, ktorý definovaný rovnicou

$$p\left(\frac{V}{m}\right)^n = \frac{p}{\rho^n} = kon\check{s}t.\ , \qquad (7.22)$$

kde **ρ** je hustota plynu, $\mathbf{n \in \langle 1, \kappa \rangle}$ je **exponent polytropického deja**. Krivka, po ktorej sa mení tlak plynu **p** je znázornená na Obr. 7.7 a nazýva sa **polytropa**.



Obr. 7.7. Polytropický dej

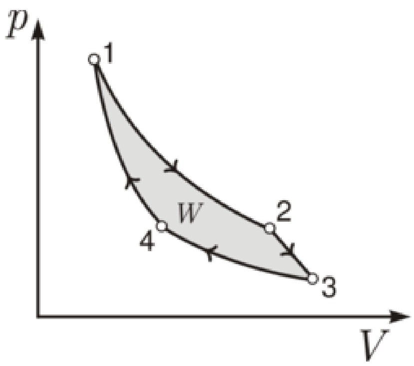
Keďže **polytropický dej** je najvšeobecnejším dejom, z polytropického deja možno odvodiť všetky predchádzajúce základné termodynamické deje.

Pre rôzne hodnoty **exponentu polytropického deja n** platí, že:

- ak $\mathbf{n = 0}$, dostávame **izobarický dej**,
- ak $\mathbf{n = 1}$, dostávame **izotermický dej**,
- ak $\mathbf{n = \kappa}$, dostávame **adiabatický dej**,
- a ak $\mathbf{n \to \infty}$, dostávame **izochorický dej**.

7.4.6 Carnotov cyklus

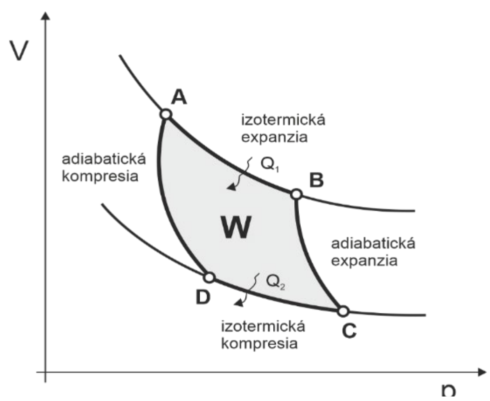
Na princípe kombinácie **izotermického** a **adiabatického** deja je založený tzv. **Carnotov cyklus** alebo **Carnotov proces**. **Carnotov proces** je ideálny tepelný obeh pozostávajúci z vratných zmien (dvoch **adiabatických dejov** a dvoch **izotermických dejov**). Carnotov proces prebieha medzi dvoma stavmi s rôznou teplotou $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$ a má najvyššiu možnú tepelnú účinnosť v danom rozsahu teplôt.



Obr. 7.8. Carnotov proces

Carnotov cyklus opisuje prácu **ideálneho tepelného stroja** a vyvodzuje jeho maximálnu teoretickú účinnosť. Teoreticky tento cyklus prvýkrát opísal **Nicolas Léonard Sadi Carnot**, po ktorom je tento dej aj pomenovaný. Jednotlivé fázy **Carnotovho cyklu** znázorňuje diagram vyjadrujúci závislosť tlaku **p** od objemu **V** v tzv. **p-V diagrame**, pozri obrázky Obr. 7.8 a Obr. 7.9.

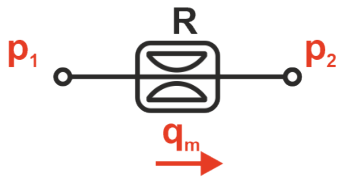
Zanesením všetkých štyroch fáz cyklu do jedného diagramu získame ohraničenú oblasť **dvoma izotermami** a **dvoma adiabatami**. Obsah tejto oblasti zodpovedá práci vykonanej daným tepelným strojom **W**.



Obr. 7.9. Carnotov cyklus

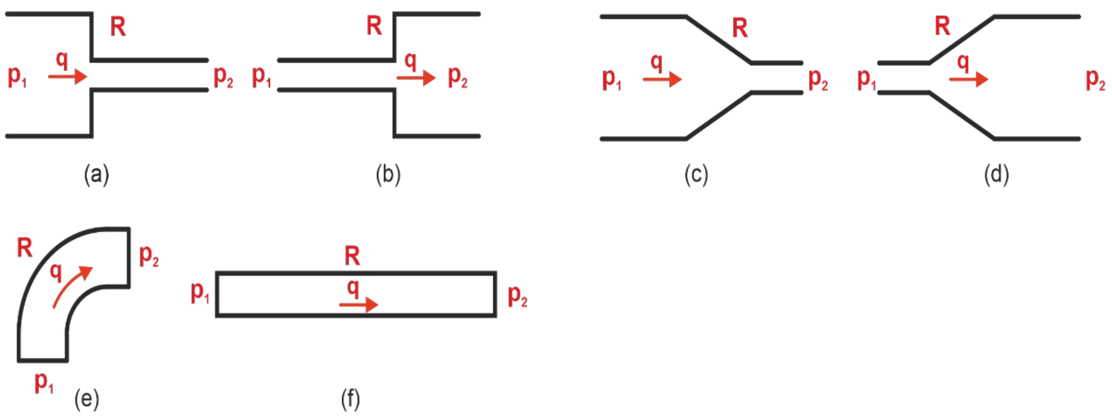
7.5 PNEUMATICKÝ ODPOR

Pneumatický odpor pri prúdení plynu cez **ventil**, **otvor** alebo **pomerne dlhé potrubie** s uvažovaním odporu trenia, predstavuje odpor kladený proti prúdeniu plynu. **Pneumatický odpor** je daný konštantou **pneumatického odporu R** a jeho schematická značka je znázornená na nasledujúcom Obr. 7.10.



Obr. 7.10. Schematická značka pneumatického odporu

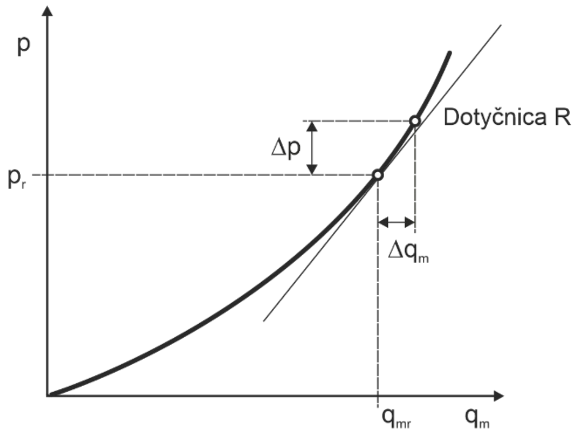
Medzi **pneumatické odpory** možno zahrnúť rôzne ďalšie typy pneumatických odporov napr. rôzne náhle zmeny prierezov potrubí, ako sú **zúženia**, **rozšírenia** a ďalšie iné. Ďalej medzi pneumatické odpory radíme rôzny typy **difúzorov, dýzy, zaoblenia, veľmi dlhé potrubia s uvažovaním trenia** a pod. Niektoré z bežne vyskytujúcich sa pneumatických odporov sú znázornené na nasledujúcich obrázkoch, pozri Obr. 7.11 (a) - (f).



Obr. 7.11. Príklady pneumatických odporov, (a), zúženie, (b) rozšírenie,
(c) dýza, (d) difúzor, (e) koleno, (f) dlhé potrubie

Poznamenajme, že ak plyn prúdi cez **pneumatický odpor** napr. cez **ventil** alebo ďalší iný odporový prvok, ktorý kladie odpor proti prúdeniu média, potom odpor ventilu závisí od tlaku **p [Pa]** a hmotnostného prietoku $\mathbf{q_m}$ **[kg. s^{-1}]**.

Vo všeobecnosti vzťah medzi tlakom **p** a prietokom $\mathbf{q_m}$ je v skutočnosti **nelineárny**. Keďže v našom prípade sa budeme snažiť hľadať zjednodušené riešenie systému, potom odpor budeme uvažovať vždy ako **linearizovaný** a charakterizovaný konštantou **R**. Na zjednodušenie použitia nelineárneho odporu **R**, definujeme odpor na základe **smernice dotyčnice** ku krivke opisujúcej nelineárnu závislosť odporu **R** v závislosti od tlaku **p** a prietoku $\mathbf{q_m}$, ktorá je znázornená na Obr. 7.12.



Obr. 7.12. Linearizácia pneumatického odporu R v okolí pracovného bodu

Aj keď v skutočnosti je pneumatický odpor **R** nelineárny, Na zjednodušenie možno odpor **linearizovať** v okolí prevádzkového bodu, ktorý je definovaný hmotnostným prietokom $\mathbf{q_{mr}}$ a prevádzkovým tlakom $\mathbf{p_r}$, pozri Obr. 7.12. Pre konštantný tlak $\mathbf{p_i}$ na vstupe a konštantný objemový (hmotnostný) prietok $\mathbf{q}$ ($\mathbf{q_m}$), ktorý prúdi cez odpor **R** možno linearizovaný odpor **R** definovať ako

$$R = \frac{\Delta p}{\Delta q_m} = \left.\frac{dp}{dq_m}\right|_{(q_{mr},p_r)} = \frac{p_i - p}{\rho q} = \frac{p_i - p}{q_m} \Rightarrow q_m = \frac{p_i - p}{R}. \tag{7.23}$$

Pre **lineárny pneumatický odpor R** uvažovaný ako pneumatický odpor podľa Obr. 7.11 (a) až (f), ktorý je definovaný pre známy **objemový prietok q**, resp. **hmotnostný prietok** $\mathbf{q_m = \frac{dm}{dt} = \rho q}$ plynu, pri známom tlakovom rozdiely $\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2})$, možno definovať vzťah

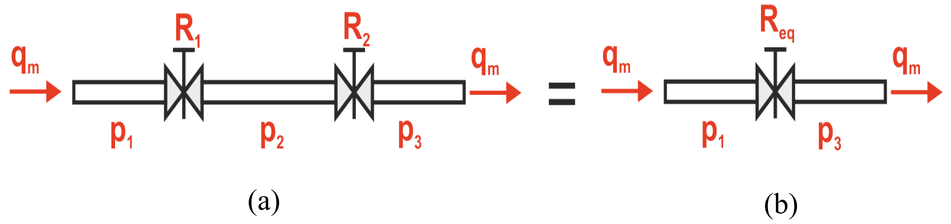
$$R = \frac{\Delta p}{\Delta q_m} = \frac{p_1 - p_2}{\rho q} = \frac{p_1 - p_2}{q_m} \Rightarrow q_m = \rho q = \frac{p_1 - p_2}{R}. \tag{7.24}$$

V mnohých fluidných systémoch, t. j. **pneumatických** alebo **hydraulických** systémoch sa môžu naraz vyskytovať viaceré kombinácie pneumatických odporov napr. **ventilov**, **otvorov** a ďalších iných odporov v rôznych usporiadaniach. Tieto môžu byť usporiadané rôznym spôsobom napr. **sériovo** alebo **paralelne**. Takéto zložité systémy možno zjednodušiť nájdením **ekvivalentného fluidného (pneumatického) odporu** $\mathbf{R_{eq}}$.

Ekvivalentný fluidný odpor možno nájsť podobným spôsobom ako sme si ukazovali v prípade elektrického systému, kedy sme hľadali **ekvivalentný elektrický odpor** pre ekvivalentný elektrický obvod, ktorý možno použiť ako náhradu elektrického obvodu pozostávajúceho z väčšieho množstva rôzne pozapájaných elektrických odporov **R**. Podobný princíp možno aplikovať aj na **pneumatické (fluidné)** systémy.

7.5.1 Ekvivalentný pneumatický odpor sériovo zapojených pneumatických odporov

Predpokladajme **pneumatické odpory**, ktoré sú zapojené v **sériovom spojení**, pozri Obr. 7.13 (a). Nájdime **ekvivalentný pneumatický** odpor podľa Obr. 7.13 (b), ktorým možno túto sústavu nahradiť.



Obr. 7.13. (a) Sériovo zapojené pneumatické odpory, (b) ekvivalentný pneumatický odpor

Pre rozdiel pneumatických tlakov v potrubí pri prúdení cez sériovo zapojené ventily $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$ musia platiť rovnice

$$p_1 - p_2 = R_1 q_m \,,$$

$$p_2 - p_3 = R_2 q_m \,. \tag{7.25}$$

Sčítaním oboch predchádzajúcich rovníc možno nájsť tlakový rozdiel medzi koncovými bodmi potrubia

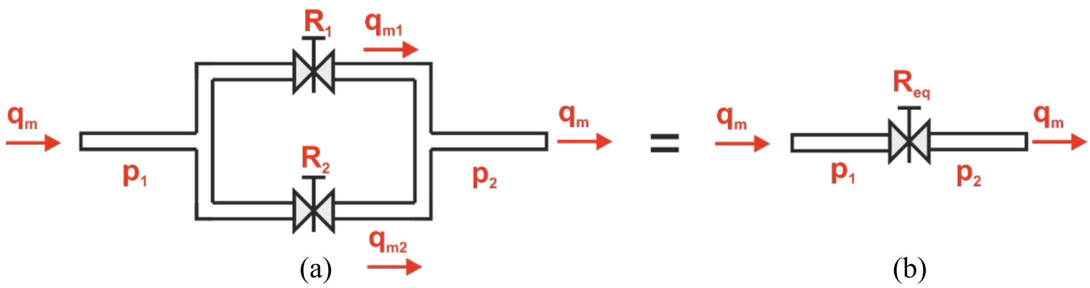
$$p_1 - p_3 = (R_1 + R_2) q_m \,. \tag{7.26}$$

Porovnaním predchádzajúcej rovnice s rovnicou pre jeden **ekvivalentný pneumatický odpor** $\mathbf{R_{eq}}$ podľa Obr. 7.13 (b), pre ktorý platí $\mathbf{p_1 - p_3 = R_{eq} q_m}$, možno odvodiť vzťah pre **ekvivalentný pneumatický** $\mathbf{R_{eq}}$ odpor sériovo zapojených odporov

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \,. \tag{7.27}$$

7.5.2 Ekvivalentný pneumatický odpor paralelne zapojených pneumatických odporov

Predpokladajme, že pneumatické odpory sú v pneumatickom systéme **zapojené paralelne**, pozri Obr. 7.14 (a). Nájdime ekvivalentný pneumatický odpor, ktorým možno túto sústavu nahradiť.



Obr. 7.14. (a) Paralelne zapojené pneumatické odpory, (b) ekvivalentný pneumatický odpor

Pri **paralelnom zapojení pneumatických odporov** pretekajú vetvami pneumatického potrubia cez ventily rôzne hmotnostné prietoky. Ak teda, tieto **hmotnostné prietoky** prúdia cez paralelne zapojené ventily s odpormi $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$, možno ich veľkosť vypočítať na základe týchto vzťahov

$$q_{m1} = \frac{p_1 - p_2}{R_1}, \quad q_{m2} = \frac{p_1 - p_2}{R_2}. \tag{7.28}$$

Pre celkový **hmotnostný prietok** $\mathbf{q_m}$, ktorý preteká obidvoma vetvami pneumatického obvodu, platí **zákon zachovania hmotnosti** na základe, ktorého sa musí daný hmotnostný prietok rovnomerne rozdeliť na jednotlivé vetvy a teda musí platiť, že

$$q_m = q_{m1} + q_{m2} = \frac{p_1 - p_2}{R_1} + \frac{p_1 - p_2}{R_2} = (p_1 - p_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{7.29}$$

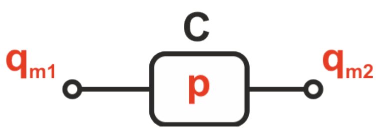
Ak, takto vypočítaný **hmotnostný prietok** $\mathbf{q_m}$ porovnáme s **ekvivalentným pneumatickým systémom s odporom** $\mathbf{R_{eq}}$ podľa Obr. 7.14 (b), pre ktorý je hmotnostný prietok definovaný vzťahom $\mathbf{q_m = \frac{p_1 - p_2}{R_{eq}}}$, potom pre daný ekvivalentný pneumatický odpor musí platiť, že

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{7.30}$$

7.6 PNEUMATICKÁ KAPACITA

Pneumatická kapacita plynu je vzťah medzi akumulovanou hmotnosťou **m** a výsledným tlakom **p** vyvolaným naakumulovaným množstvom plynu. **Pneumatická kapacita C**, ktorej schematická značka je znázornená na nasledovnom obrázku Obr. 7.15, je definovaná ako pomer zmeny hmotnosti **m** a zmeny tlaku **p** vzťahom

$$C = \frac{dm}{dp}. \tag{7.31}$$



Obr. 7.15. Schematická značka pneumatickej kapacity

Pre **zásobník** konštantného objemu plynu **V** s hustotou **ρ** možno predchádzajúcu rovnicu prepísať do tvaru

$$C = \frac{dm}{dp} = \frac{d(\rho V)}{dp} = V\frac{d\rho}{dp}. \tag{7.32}$$

Z rovnice pre **polytropický dej** dostávame, že

$$\frac{p}{\rho^n} = p\left(\frac{V}{m}\right)^n \Rightarrow p = \rho^n p\left(\frac{V}{m}\right)^n . \qquad (7.33)$$

Ak teraz zderivujeme predchádzajúcu rovnicu **polytropického deja** podľa hustoty **ρ** dostávame

$$\frac{dp}{d\rho} = n\rho^{n-1}\frac{p}{\rho^n} = \frac{np}{\rho} . \qquad (7.34)$$

V tomto štádiu využijeme rovnicu pre **ideálny plyn**, ktorú upravíme do tohto tvaru

$$pV = mR_gT$$
$$\frac{pV}{m} = \frac{p}{\rho} = R_gT \Rightarrow \frac{p}{\rho} = R_gT, \qquad (7.35)$$

a dosadením do predchádzajúcej rovnice pre **polytropický dej** dostávame

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{np}{\rho} = nR_gT \Rightarrow \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{nR_gT} . \qquad (7.36)$$

Napokon pre **pneumatickú kapacitu zásobníka** (tlakovej nádoby) musí platí nasledujúci vzťah

$$C = V\frac{d\rho}{dp} = \frac{V}{nR_gT}, \qquad (7.37)$$

kde $\mathbf{R_g}$ je **plynová konštantu plynu** a **n** je **exponent polytropického deja** $\mathbf{n} \in \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{\kappa} \rangle$.

Kapacita pneumatického **zásobníka** (tlakovej nádoby) plynu, ktorá závisí od objemu **V**, teploty plynu **T** a exponentu polytropického deja **n**, je teda definovaná nasledujúcim vzťahom

$$C = \frac{V}{nR_gT} . \qquad (7.38)$$

Príklad č. 7.1:

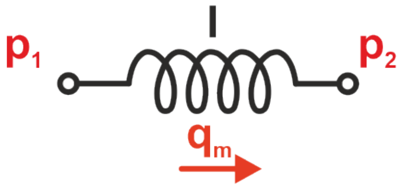
Suchý vzduch prúdi cez ventil do zásobníka s objemom $\mathbf{V = 27\ m^3}$ s konštantnou teplotou **T = 25 °C (298 K).** Termodynamický dej uvažujeme ako **izotermický**. Určite pneumatickú kapacitu **C** zásobníka suchého vzduchu.

Keďže plnenie zásobníka je modelované ako **izotermický dej**, potom z definície rovnice pre **polytropický dej** platí exponent **n = 1**. Pneumatickú kapacitu **C** pri plnení zásobníka možno vypočítať použitím odvodeného vzťahu pre pneumatickú kapacitu ako

$$\frac{p}{\rho} = p\left(\frac{V}{m}\right) \Longrightarrow C = \frac{V}{R_g T} = \frac{27}{287.06 \times 298} = 3.16 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg.m^2.N^{-1}}\,. \qquad (7.39)$$

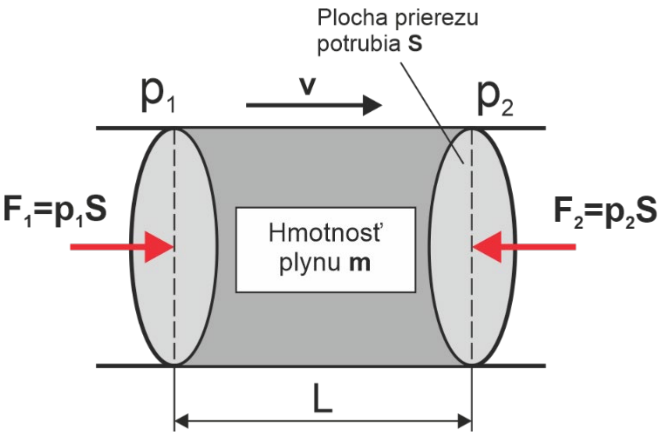
7.7 PNEUMATICKÁ INDUKČNOSŤ

Pneumatická indukčnosť, ktorej schematická značka je znázornená na nasledujúcom Obr. 7.16 vzniká v pneumatickom potrubí z dôvodu **tlakového rozdielu**, ktorý je potrebný na dosiahnutiu akcelerácie plynu.



Obr. 7.16. Schematická značka pneumatickej indukčnosti

Na odvodenie **pneumatickej indukčnosti** budeme uvažovať, že plyn prúdi potrubím známeho prierezu **S** rýchlosťou **v**. Z potrubia si vyberieme element známej dĺžky **L** a známej hmotnosti plynu **m**, pre ktorý na oboch stranách nameriame tlakový rozdiel $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$, pozri Obr. 7.17.



Obr. 7.17. Pneumatická indukčnosť

Keďže plyn v potrubí je reprezentovaný vybraným elementom dĺžky **L** s hmotnosťou plynu **m**, a tento element sa v potrubí pohybuje rýchlosťou **v** resp. akceleruje, potom pri pohybe tohto plynu (elementu plynu), ktorý možno považovať za dokonale tuhé teleso s hmotnosťou **m**, musí platiť **II. Newtonov zákon**.

Na základe **II. Newtonovho zákona** platí, že výslednica tlakových síl **F**, ktorá pôsobí na uvažovaný element plynu je priamoúmerná akcelerácií daného plynu a teda platí, že

$$m \cdot a = \frac{d(mv)}{dt} = F_{p1} - F_{p2}\,. \qquad (7.40)$$

Keďže, v prípade **pneumatických systémov** je sila vyvolaná tlakovým rozdielom $(\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2})$ medzi dvoma polohami, potom ak plocha prierezu potrubia je **S** a blok plynu s hmotnosťou **m** sa pohybuje rýchlosťou **v** podľa Obr. 7.17 musí platiť pohybová rovnica

$$\frac{d(mv)}{dt} = (p_1 - p_2)S\,, \qquad (7.41)$$

kde **m** je hmotnosť plynu, ktorý akceleruje v potrubí medzi dvoma polohami s tlakovým rozdielom $\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2}$, a ktorú možno vypočítať pomocou hustoty **ρ**, dĺžky elementu **L** a plochy prierezu **S** ako

$$m = \rho V = \rho AL\,. \qquad (7.42)$$

Podobným spôsobom možno uvažovať, že pre rýchlosť element plynu **v**, ktorou sa daný element pohybuje v potrubí platí rovnica v zmysle **objemového prietoku** $\mathbf{q} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$. Ak zadefinujeme rýchlosť pohybu **v** na základe **objemového prietoku q** a dosadíme za rýchlosť **v**, potom dostávame

$$v = \frac{q}{S} \Longrightarrow m.v = \rho ALv = \rho AL\frac{q}{A} = \rho Lq\,. \qquad (7.43)$$

Zderivovaním predchádzajúcej rovnice podľa času **t** dostávame

$$\frac{d(m.v)}{dt} = L\frac{d(\rho q)}{dt} = (p_1 - p_2)S\,. \qquad (7.44)$$

Ak **objemový prietok q** v predchádzajúcej rovnici prenásobíme hustotou **ρ,** dostávame **hmotnostný prietok** $\mathbf{q_m} = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}$. Výslednú rovnicu teda možno prepísať do výsledného tvaru ako

$$\begin{gathered} \frac{L}{S}\dot{q}_m = p_1 - p_2\,, \\ \dot{q}_m = \frac{p_1 - p_2}{I}\,, \end{gathered} \qquad (7.45)$$

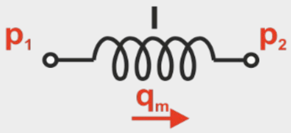
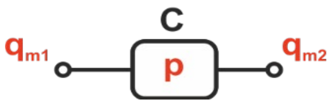
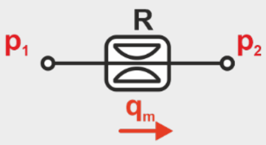
kde **I** nazývame konštantou **indukčnosti** alebo **pneumatickou inertanciou plynu** (z angl. inertance).

Konštanta **pneumatickej indukčnosti** je teda definovaná vzťahom

$$I = \frac{L}{S} \,. \tag{7.46}$$

Rovnice základných stavebných prvkov **pneumatickej indukčnosti**, **pneumatickej kapacity** a **pneumatického odporu** pre pneumatický systém sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

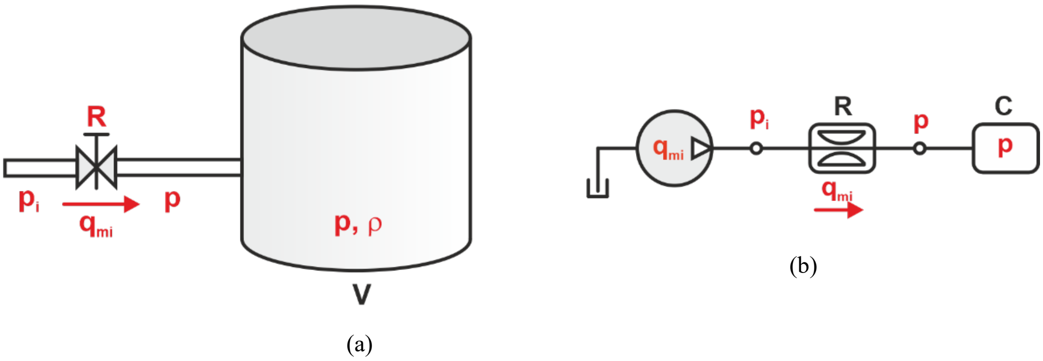
Tabuľka 7.1. Základné stavebné prvky pneumatického systému

<table>
<tr><th>Stavebný prvok</th><th>Opis rovnice</th></tr>
<tr><td>Pneumatická indukčnosť
</td><td>$\dot{q}_m = \rho\dot{q} = \frac{p_1 - p_2}{I}$
$I = \frac{L}{S}$</td></tr>
<tr><td>Pneumatická kapacita
</td><td>$C\frac{dp}{dt} = q_{m1} - q_{m2} = \rho q_1 - \rho q_2$
$C = \frac{V}{nR_gT}$</td></tr>
<tr><td>Pneumatický odpor
</td><td>$q_m = \rho q = \frac{p_1 - p_2}{R}$</td></tr>
</table>

7.8 MODELOVANIE PNEUMATICKÝCH SYSTÉMOV

Poznamenajme, že pneumatické systémy je veľmi obtiažne modelovať z dôvodu ich vysokej dynamickej nelinearity. Na zjednodušenie modelovania, preto každý **zásobník** v pneumatickom systéme realizujeme v podobe **kapacitného elementu C** a odpor v podobe **ventilu, otvoru** resp. iného ďalšieho odporového typu nahradzujeme pneumatickým **odporovým elementom** s konštantou **R**.

Takýto jednoduchý model môže byť adekvátnym modelom na opis správania sa skutočného **pneumatického systému**. Princíp tvorby matematického modelu pre pneumatické systémy si ukážeme na jednoduchom príklade **pneumatického systému** (pozostávajúceho z jedného zásobníka plynu s objemom **V**), ktorý je zobrazený na nasledujúcom Obr. 7.18 (a).



Obr. 7.18. Pneumatický systém (a) fyzikálny model, (b) bloková schéma

Kde $\mathbf{p_i}$ je vstupný tlak, $\mathbf{q_i}$ je objemový prietok cez ventil **R**, **p** a **ρ** sú tlak a hustota plynu v zásobníku plynu konštantného objemu **V**. Plyn prúdi cez ventil do priestoru dokonale tuhého zásobníka na základe tlakového rozdielu $\mathbf{\Delta p = p_i - p}$. Využitím rovnice definovanej pre **pneumatickú kapacitu** zásobníka $\mathbf{C = \frac{V}{nR_gT}}$ možno pneumatický systém realizovať ako **odporovo-kapacitný model** podľa schémy zobrazenej na Obr. 7.18 (b). Diferenciálnu rovnicu systému pre zásobník plynu možno odvodiť aplikovaním **zákona zachovania hmotnosti**

$$\frac{dm}{dt} = q_{mi} - q_{mo} = \rho q_i - \rho q_o \,. \qquad (7.47)$$

Zmena hmotnosti plynu v zásobníku sa rovná rozdielu **hmotnostného prietoku** $\mathbf{q_{mi}}$ vstupujúceho do zásobníka a **hmotnostného prietoku** $\mathbf{q_{mo}}$, ktorý daný zásobník opúšťa. Poznamenajme, že postupnými úpravami ľavej strany diferenciálnej rovnice možno odvodiť výslednú diferenciálnu formu, ktorá opisuje závislosť zmeny tlaku **p** v zásobníku s uvažovaním pneumatickej kapacity **C** v tomto tvare

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dp}\frac{dp}{dt} = V\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dt} = C\frac{dp}{dt}\,. \qquad (7.48)$$

Pre vstupný **hmotnostný prietok $\mathbf{q_{mi}}$**, ktorý prúdi do zásobníka musí cez ventil s **pneumatickým odporom R** platiť, že

$$q_{mi} = \rho_i q_i = \frac{p_i - p}{R}. \tag{7.49}$$

Pre náš prípad **pneumatického systému** platí, že hmotnostný prietok von zo zásobníka je nulový $\mathbf{q_{mo} = 0}$. Potom diferenciálnu rovnicu možno prepísať do tvaru

$$\begin{gathered}\frac{dm}{dt} = C\frac{dp}{dt} = q_{mi} - q_{mo} = q_{mi} = \frac{p_i - p}{R},\\ C\frac{dp}{dt} = \frac{p_i - p}{R}\end{gathered} \tag{7.50}$$

alebo

$$RC\frac{dp}{dt} + p = p_i . \tag{7.51}$$

Predchádzajúci matematický model predstavuje diferenciálnu rovnicu 1. rádu nezávislej premennej **p**. Ak zavedieme do výpočtu vzťah, ktorý platí pre **pneumatickú kapacitu zásobníka** $\mathbf{C = \frac{V}{nR_gT}}$, potom dostávame

$$\frac{RV}{nR_gT}\frac{dp}{dt} + p = p_i . \tag{7.52}$$

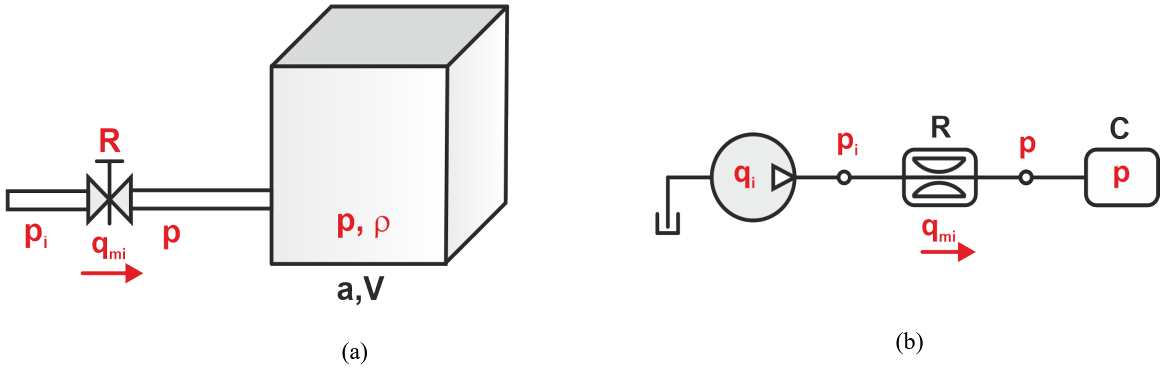
Obidve diferenciálne rovnice predstavujú matematický model **pneumatického systému**. Druhá z nich predstavuje **diferenciálnu rovnicu ideálneho plynu pre polytropický dej**. Táto rovnica je všeobecná rovnica, ktorá platí pre **izobarický**, **izochorický**, **izotermický** a **adiabatický dej**, kde **n** je exponent **polytropického deja**, ktorý môže nadobúdať hodnoty.

- pre izobarický n=0
- pre izochorický n=∞
- pre izotermický n=1
- pre adiabatický n=κ

Príklad č. 7.2:

Suchý vzduch konštantnej teploty **20 °C (293 K)** prúdi cez ventil do zásobníka tvaru kocky so stranou **a = 1 m** podľa Obr. 7.19. Tlak $\mathbf{p_i}$ na vstupe ventilu je konštantný a väčší ako tlak **p** vo vnútri zásobníka. Odpor ventilu je definovaný konštantou pneumatického odporu **R = 1000 Pa.s.kg^{-1}**.

Predpokladajme, že proces plnenia zásobníka je procesom pri konštantnej teplote, t. j. proces plnenia prebieha pri **izotermickom deji**. V prípade, že proces prebieha pri **izotermickom plnení**, potom z rovnice pre **polytropický de**j uvažujeme exponent **n = 1**. Odvoďte matematický model systému , ktorý opisuje ako sa mení tlak **p** v zásobníku počas procesu plnenia tohto zásobníka.



Obr. 7.19. Pneumatický systém (a) fyzikálny model, (b) bloková schéma

Aplikovaním **zákona zachovania hmotnosti** musí platiť tento vzťah

$$\frac{dm}{dt} = C\frac{dp}{dt} = q_{mi} - q_{mo} = q_{mi} = \rho_i q_i \, , \qquad (7.53)$$

poznamenajme, že

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dp}\frac{dp}{dt} = V\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dt} = C\frac{dp}{dt} . \qquad (7.54)$$

Vzduch pri izbovej teplote **T** a pri nízkom tlaku **p** možno aproximovať ako **ideálny plyn**. Pre **izotermický dej** potom **pneumatickú kapacitu** zásobníka možno vypočítať na základe rovnice

$$C = \frac{V}{nR_g T} = \frac{V}{R_{vzduch} T} \, . \qquad (7.55)$$

Poznamenajme, že v schéme **pneumatického systému** je zapojený lineárny ventil s pneumatickým odporom **R**. Tento možno využiť na výpočet **hmotnostného prietoku q_{mi}**, ktorý preteká daným ventilom s odporom **R** ako

$$R = \frac{p_i - p}{\rho_i q_i} = \frac{p_i - p}{q_{mi}} \Rightarrow q_{mi} = \rho_i q_i = \frac{p_i - p}{R} \, . \qquad (7.56)$$

Potom, využitím **zákona zachovania hmotnosti** možno zadefinovať pre daný pneumatický systém matematický model, ktorý je opisovaný touto diferenciálnou rovnicou

$$C\frac{dp}{dt} = q_{mi} - 0 = q_{mi} = \frac{p_i - p}{R} \tag{7.57}$$

resp.

$$C\frac{dp}{dt} = \frac{p_i - p}{R}. \tag{7.58}$$

Dosadením vypočítanej pneumatickej kapacity za **C** dostávame diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\frac{V}{R_{vzduch}T}\frac{dp}{dt} = \frac{p_i - p}{R} \tag{7.59}$$

resp.

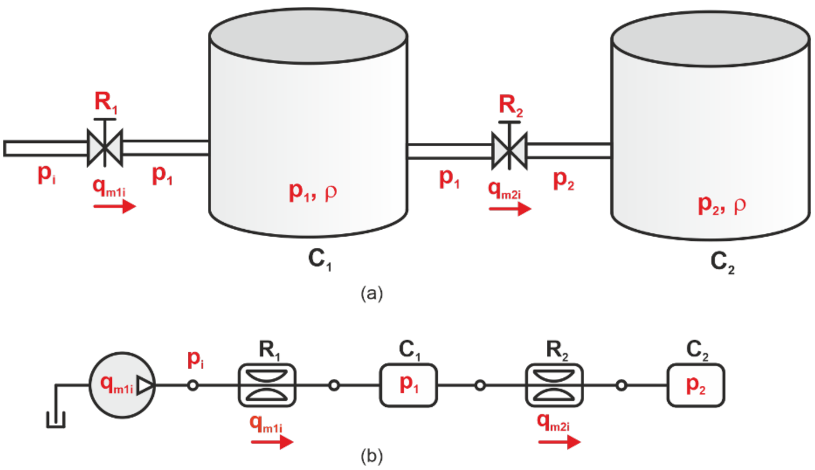
$$\frac{RV}{R_{vzduch}T}\frac{dp}{dt} + p = p_i\,, \tag{7.60}$$

kde parameter pri $\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dt}}$ nadobúda hodnotu $\frac{\mathbf{RV}}{\mathbf{R_{vzduch}\cdot T}} = \mathbf{1000} \times \frac{\mathbf{1^3}}{\mathbf{(287.06\times293)}} = \mathbf{1.19} \times \mathbf{10^{-2}}$. Potom pre **pneumatický systém** podľa Obr. 7.19 platí matematický model definovaný touto diferenciálnou rovnicou v tvare

$$1.19 \times 10^{-2}\frac{dp}{dt} + p = p_i\,. \tag{7.61}$$

Príklad č. 7.3:

Nasledujúci Obr. 7.20 (a) zobrazuje pneumatický systém, ktorý pozostáva z dvoch zásobníkov plynu s kapacitami $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$.



Obr. 7.20. Pneumatický systém (a) fyzikálny model, (b) bloková schéma modelu

Suchý vzduch konštantnej teploty **T** prúdi cez ventil s odporom $\mathbf{R_1}$ do **zásobníka č. 1**. Tlak $\mathbf{p_i}$ na vstupe ventilu je konštantný a väčší ako tlak $\mathbf{p_1}$ v **zásobníku č. 1**. Vzduch ďalej tečie zo **zásobníka č. 1** do **zásobníka č. 2** cez ventil s konštantným odporom $\mathbf{R_2}$. Odvoďte diferenciálne rovnice systému pre tlaky $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ a zapíšte ich do maticového tvaru. Nájdite prenosové funkcie systému $\mathbf{P_1(s)/P_i(s)}$ a $\mathbf{P_2(s)/P_i(s)}$.

Aplikovaním **zákona zachovania hmotnosti** pre **zásobník č. 1** musí platiť vzťah

$$\frac{dm_1}{dt} = C_1 \frac{dp_1}{dt} = q_{m1i} - q_{m2i} \tag{7.62}$$

a pre **zásobník č. 2**

$$\frac{dm_2}{dt} = C_2 \frac{dp_2}{dt} = q_{m2i} \,. \tag{7.63}$$

Poznamenajme, že v schéme **pneumatického systému** je zapojený lineárny ventil s odporom $\mathbf{R_1}$ na základe, ktorého možno zadefinovať vzťah pre hmotnostný prietok $\mathbf{q_{mi1}}$, ktorý preteká daným ventilom

$$R_1 = \frac{p_i - p_1}{q_{m1i}} \Rightarrow q_{m1i} = \frac{p_i - p_1}{R_1} \tag{7.64}$$

a analogicky pre hmotnostný prietok $\mathbf{q_{m2i}}$, ktorý preteká ventilom s odporom $\mathbf{R_2}$ musí platiť

$$R_2 = \frac{p_1 - p_2}{q_{m2i}} \Rightarrow q_{m2i} = \frac{p_1 - p_2}{R_2} \,. \tag{7.65}$$

Dosadením vypočítaných hmotnostných prietokov $\mathbf{q_{mi1}}$ a $\mathbf{q_{m2i}}$ do diferenciálnych rovníc pre jednotlivé zásobníky **pneumatického systému** dostávame sústavu dvoch diferenciálnych rovníc v tomto tvare

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dp_1}{dt} &= q_{m1i} - q_{m2i} = \frac{p_i - p_1}{R_1} - \frac{p_1 - p_2}{R_2} \,, \\ C_2 \frac{dp_2}{dt} &= q_{m2i} = \frac{p_1 - p_2}{R_2} \,. \end{aligned} \tag{7.66}$$

Ďalšími matematickými úpravami možno dospieť k **sústave diferenciálnych rovníc** v tvare

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dp_1}{dt} + \frac{p_1}{R_1} + \frac{p_1 - p_2}{R_2} &= \frac{p_i}{R_1} \,, \\ C_2 \frac{dp_2}{dt} - \frac{p_1 - p_2}{R_2} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Zapíšme predchádzajúci matematický model do **maticového tvaru**, potom dostávame tento maticový tvar sústavy diferenciálnych rovníc

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_i}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.68)$$

Pre nájdenie prenosových funkcií vykonajme **Laplaceovu transformáciu** celej sústavy zapísaného systému v maticovom tvare pri uvažovaní nulových počiatočných podmienok $\mathbf{p_1(0) = p_2(0) = 0}$. Po vykonaní Laplaceovej transformácie dostávame

$$\begin{bmatrix} C_1 s + \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & C_2 s + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1(s) \\ P_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} P_i(s). \quad (7.69)$$

Poznamenajme, že pre **pneumatický systém** boli vypočítané prenosové funkcie $\mathbf{P_1(s)/P_i(s)}$ a $\mathbf{P_2(s)/P_i(s)}$ a to využitím symbolického počítaním v Matlabe v tomto tvare

$$\frac{P_1(s)}{P_i(s)} = \frac{C_2R_2s+1}{C_1C_2R_1R_2s^2+(C_1R_1+C_2R_1+C_2R_2)s+1},$$
$$\frac{P_2(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2+(C_1R_1+C_2R_1+C_2R_2)s+1}. \quad (7.70)$$

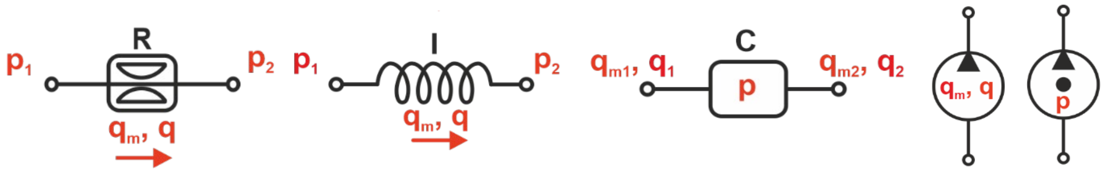
Prenosové funkcie tvoria **maticu prenosu $\mathbf{G(s)}$** zapísanú do stĺpcového vektora v tomto tvare

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_1(s)}{P_i(s)} \\ \frac{P_2(s)}{P_i(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_2R_2s+1}{C_1C_2R_1R_2s^2+(C_1R_1+C_2R_1+C_2R_2)s+1} \\ \frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2+(C_1R_1+C_2R_1+C_2R_2)s+1} \end{bmatrix}. \quad (7.71)$$

7.9 HYDRAULICKÉ SYSTÉMY

Kvapaliny na rozdiel od plynov sú teoreticky **nestlačiteľné tekutiny**. To, že kvapaliny uvažujeme ako nestlačiteľné, veľmi uľahčuje modelovanie **hydraulických systémov**. Všeobecná kategória hydraulických systémov sú **hydraulické systémy** opisujúce zmenu výšky hladiny v nádobe počas času **t**, ktoré sa môžu vyskytnúť v napr. **úpravniach** a **zásobárňach vôd** a v ďalších iných aplikáciách, napr. v **chemickom priemysle** (rôzne typy komplikovaných potrubných systémov).

Schematické značky, ktoré používame pri zostavovaní **hydraulického systému** sú znázornené na nasledujúcom Obr. 7.21.



(a) (b) (c) (d)

Obr. 7.21. Schematické značky hydraulického systému, (a) hydraulický odpor, (b) hydraulická indukčnosť, (c) hydraulická kapacita, (d) zdroje hmotnostného (objemového) prietoku a tlaku

Dynamické správanie sa hydraulického systému s úrovňou hladiny kvapaliny **h** možno opísať použitím **objemového (hmotnostného) prietoku q** $(\mathbf{q_m})$, **tlaku p** a aktuálnej výšky hladiny **h** v hydraulickom zásobníku. Poznamenajme, že pri modelovaní hydraulických systémov sa často uplatňuje **hydrostatický tlak** vo viacerých prípadoch, skôr než tlak **dynamický**. **Hydrostatický tlak** je definovaný ako tlak $\mathbf{p_h}$, ktorý vzniká v kvapaline v jej pokoji a je spôsobený vlastnou tiažou samotnej kvapaliny. Z **teórie hydrostatiky kvapalín** vieme, že **hydrostatický tlak** sa mení lineárne s výškou hladiny **h**. Pripomeňme, že absolútny tlak kvapaliny **p**, ktorý nameriame v kvapaline so známou hustotou **ρ** v hĺbke **h**, pri pôsobení atmosférického tlaku $\mathbf{p_a}$, závisí od **hydrostatického tlaku** $\mathbf{p_h}$. Pre **absolútny tlak kvapaliny** musí teda platiť vzťah

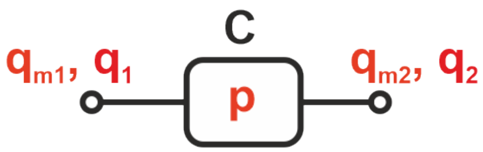
$$p = p_a + p_h = p_a + \rho g h\,, \qquad (7.72)$$

kde **p** je **absolútny tlak**, $\mathbf{p_h}$ je **hydrostatický tlak** a $\mathbf{p_a}$ je **atmosférický tlak vzduchu** alebo **barometrický tlak (**atmosférický tlak spôsobený atmosférou planéty Zem). **Atmosférický tlak** je vyvolaný tiažou vzduchového stĺpca siahajúceho od nadmorskej výšky, v ktorej tlak meriame, až po hornú hranicu atmosféry. Tlak vzduchu je závislý od nadmorskej výšky, od veľkosti tiažového zrýchlenia **g** a od **hrúbky**, **teploty** a **hustoty atmosféry** v danom mieste.

Z dôvodu ľahšieho porovnávania výsledkov rôznych meraní **barometrického tlaku** bol zavedený tzv. **normálny tlak vzduchu** (normálny atmosférický tlak), ktorý je definovaný ako približná priemerná hodnota tlaku vzduchu pri morskej hladine na **45° s. š.** pri teplote **15 °C** a tiažovom zrýchlení $\mathbf{g = 9.80665\,m.s^{-2}}$. Hodnota normálneho atmosférického tlaku je $\mathbf{p_a = 101\,325\,Pa}$, resp. $\mathbf{p_a = 101.325\,kPa}$.

7.10 HYDRAULICKÁ KAPACITA

V predchádzajúcej kap. 7.6 sme už raz zadefinovali fyzikálny význam fluidnej kapacity, ktorý sme uviedli pre pneumatický systém. Zmysel fluidnej kapacity možno podobným spôsobom uplatniť aj v prípade **hydraulickej kapacity**, ktorú teraz zadefinujeme pre hydraulický systém. **Hydraulickú kapacitu** hydraulického systému definujeme pre tento typ fluidného systému ako pomer zmeny uchovanej **hmotnosti m** hydraulickou **kvapalinou** ku zmene **tlaku p**. Pretože, hustota $\boldsymbol{\rho}$ kvapaliny je konštantná (pre nestlačiteľnú kvapalinu $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{konšt.}$), potom zmena hmotnosti kvapaliny v nádobe **dm** závisí len od zmeny objemu kvapaliny v nádobe $\boldsymbol{\rho}\mathbf{dV}$. Schematická značka **hydraulickej kapacity C** je znázornená na nasledujúcom Obr. 7.22.



Obr. 7.22. Schematická značka hydraulickej kapacity

V niektorých vedeckých publikáciách sa **kapacita hydraulických systémov** zvykne definovať skôr v zmysle objemu **V**, než v zmysle hmotnosti **m** a teda platí, že

$$C_v = \frac{dV}{dp}\,. \tag{7.73}$$

Táto rovnica prislúcha tvaru diferenciálnej rovnice, ktorá je definovaná v zmysle hmotnosti **m** a to v tomto tvare

$$C = \frac{dm}{dp} = \rho\frac{dV}{dp} \Rightarrow C = \rho C_v\,. \tag{7.74}$$

Poznamenajme, že definíciu kapacity **C** v zmysle hmotnosti **m** možno aplikovať pre oba typy systémov, tak pre **pneumatické** a **hydraulické systémy**. Na nájdenie definície kapacity **C** pre hydraulický systém uvažujeme otvorený zásobník kvapaliny, ktorý je umiestnený v atmosférickom tlaku $\mathbf{p_a}$. Predpokladajme, že prierezová plocha nádoby $\mathbf{S(h)}$ sa mení s **výškou kvapaliny h**.

Potom, celkovú hmotnosť kvapaliny $\mathbf{m(h)}$ uchovanej v zásobníku možno vypočítať integrovaním výrazu $\boldsymbol{\rho}\mathbf{S(h)}$ od dna zásobníka po celej výške **h** týmto spojitým integrálom

$$m = m(h) = \int_0^h \rho S(y)\,dy\,. \tag{7.75}$$

Ak teraz využijeme vzťah zadefinovaný pre **kapacitu zásobníka C**, musí platiť, že

$$C = \frac{dm(h)}{dp} = \frac{dm(h)}{dh}\frac{dh}{dp}\ . \tag{7.76}$$

Poznamenajme, že rovnica pre hmotnosť kvapaliny $\mathbf{m(h)}$, ktorá závisí od výšky $\mathbf{h}$ a je definovaná na základe vzťahu $\mathbf{m(h) = \int_0^h \rho S(y)\, dy}$, naznačuje vzťah $\frac{\mathbf{dm(h)}}{\mathbf{dh}}$ pre zmenu hmotnosti po výške zásobníka v predchádzajúcom vzťahu pre **hydraulickú kapacitu C**. Na základe predchádzajúceho musí teda platiť, že

$$\frac{dm}{dh} = \rho S(h)\ . \tag{7.77}$$

Rovnako zderivovaním rovnice, ktorá platí pre **absolútny tlak** $\mathbf{p = p_a + \rho g h}$ podľa premennej výšky **h** dostávame, že

$$\frac{dp}{dh} = \frac{d}{dh}(p_a + \rho g h) = \rho g\ . \tag{7.78}$$

A tak, pre **hydraulickú kapacitu zásobníka C** musí platiť výsledný vzťah, ktorý definuje kapacitu ako pomer plochy zásobníka **S(h)** a gravitačného zrýchlenia **g**

$$C = \frac{dm}{dp} = \frac{dm}{dh}\frac{dh}{dp} = \rho S(h)\frac{1}{\rho g} = \frac{S(h)}{g} \tag{7.79}$$

alebo

$$C = \frac{S(h)}{g}\ . \tag{7.80}$$

Ak prierezová plocha zásobníka **S** je konštantná a nemení sa po výške zásobníka, potom možno definovať pre **kapacitu hydraulického zásobníka C** zjednodušený tvar rovnice

$$C = \frac{S}{g}\ . \tag{7.81}$$

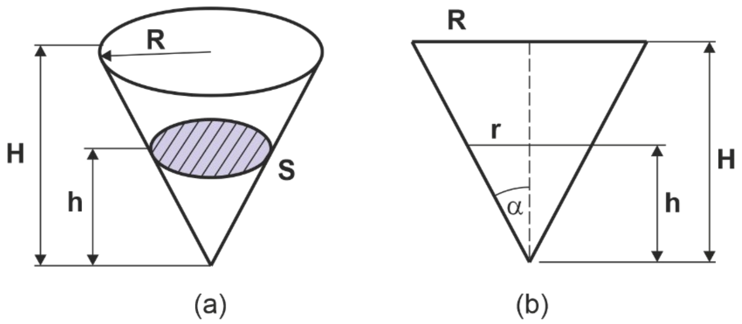
Poznamenajme, že na rozdiel od **pneumatickej kapacity C**, ktorá závisí od druhu použitého plynu a jeho teploty **T**, tak **hydraulická kapacita** v tomto prípade vôbec nezávisí od vlastností danej hydraulickej kvapaliny, ktorá sa v zásobníku nachádza, dokonca nezávisí ani od hustoty **ρ** danej kvapaliny.

Príklad č. 7.4. Hydraulická kapacita kužeľovej nádoby

Odvoďte kapacitu hydraulického zásobníka, ktorý má tvar **kužeľovej nádoby** zobrazenej na nasledujúcom Obr. 7.23. Porovnajte riešenie využitím oboch metód podľa definície hydraulickej kapacity a to:

a) výpočtom na základe vzťahu **C = dm/dp**,

b) a použitím vzťahu **C = S(h)/g** .



Obr. 7.23. Kužeľový zásobník: (a) priestorový pohľad, (b) rez kužeľom

Podľa Obr. 7.23 (b) pre polomer **r** v mieste prierezovej plochy **S**, ktorá sa nachádza vo výške **h** meranej od vrcholu kužeľa, musí platiť geometrický vzťah

$$r = h \tan \alpha = h \frac{R}{H} . \tag{7.82}$$

Pre objem kvapaliny **V(h)**, ktorý sa mení s výškou hladiny **h**, možno zadefinovať tento vzťah

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \frac{\pi R^2}{H^2} h^3 . \tag{7.83}$$

Na základe objemu kvapaliny $\mathbf{V(h)}$ možno vypočítať **hmotnosť kvapaliny** $\mathbf{m(h)}$ v zásobníku po výšku hladiny **h**

$$m(h) = \rho V(h) = \frac{1}{3} \frac{\rho \pi R^2}{H^2} h^3 . \tag{7.84}$$

Pripomeňme, že **absolútny tlak p** v nádobe závisí od **atmosférického tlaku** $\mathbf{p_a}$ a **hydrostatického tlaku** $\mathbf{p_h}$, ktorý sa mení po výške kvapaliny **h**. **Absolútny tlak p** je definovaný ako

$$p = p_a + \rho g h . \tag{7.85}$$

Zderivovaním rovnice pre **absolútny tlak p** podľa premennej **h** dostávame

$$\frac{dp}{dh} = \rho g\,. \qquad (7.86)$$

Napokon, **hydraulickú kapacitu kužeľového zásobníka C** možno vypočítať podľa vzťahu $\mathbf{C = dm/dp}$, pre ktorý platí

$$C = \frac{dm}{dp} = \frac{dm}{dh}\frac{dh}{dp} = \left(\frac{\rho\pi R^2}{H^2}h^2\right)\frac{1}{\rho g} = \frac{\pi R^2 h^2}{H^2 g}\,. \qquad (7.87)$$

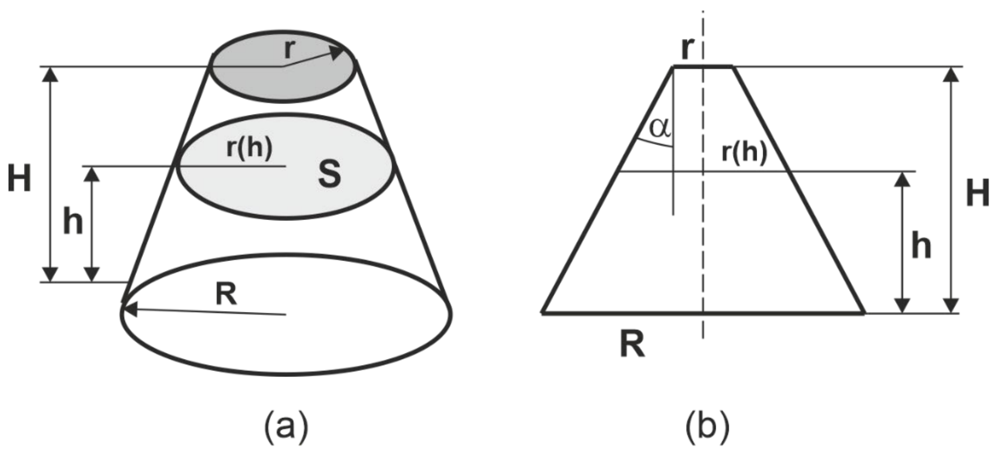
V prípade, že na výpočet **hydraulickej kapacity zásobníka C** použijeme odvodený vzťah $\mathbf{C = \frac{S(h)}{g}}$, možno dospieť k identickému výsledku a to omnoho rýchlejším spôsobom

$$C = \frac{S(h)}{g} = \frac{\pi r^2}{g} = \frac{\pi}{g}\left(\frac{R^2}{H^2}h^2\right) = \frac{\pi R^2 h^2}{H^2 g}\,. \qquad (7.88)$$

Príklad č. 7.5. Hydraulická kapacita zrezanej kužeľovej nádoby

Odvoďte **kapacitu hydraulického zásobníka** zrezanej kužeľovej nádoby zobrazenej na nasledujúcom Obr. 7.24 (a). Porovnajte riešenie využitím oboch metód podľa definície a to:

a) výpočtom na základe vzťahu **C = dm/dp**,
b) a použitím vzťahu **C = S(h)/g** .



Obr. 7.24. Zrezaný kužeľový zásobník: (a) priestorový pohľad, (b) rez kužeľom

Podľa Obr. 7.24 (b) z geometrickej podobnosti trojuholníkov možno odvodiť túto závislosť pre polomer $\mathbf{r(h)}$

$$\frac{R-r}{H}=\frac{R-r(h)}{h}\Longrightarrow r(h)=R-\frac{R-r}{H}h=\frac{HR-(R-r)h}{H}. \tag{7.89}$$

Potom, na základe vypočítaného polomeru $\mathbf{r(h)}$ možno vypočítať objem kvapaliny $\mathbf{V(h)}$ po výšku **h**, ktorý je definovaný vzťahom

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr(h)+r(h)^2) = \\ &= \frac{1}{3}\pi h\left[\left(\frac{R-(R-r)h}{H}\right)^2+R\left(\frac{R-(R-r)h}{H}\right)+R^2\right]. \end{aligned} \tag{7.90}$$

Celková hmotnosť kvapaliny $\mathbf{m(h)}$ uchovaná v danom objeme $\mathbf{V(h)}$ je definovaná na základe matematického vzťahu

$$m(h)=\rho V(h)=\frac{1}{3}\rho\pi h\left[\left(\frac{R-(R-r)h}{H}\right)^2+R\left(\frac{R-(R-r)h}{H}\right)+R^2\right]. \tag{7.91}$$

Zderivovaním predchádzajúceho vzťahu pre hmotnosť kvapaliny $\mathbf{m(h)}$ v zásobníku podľa premennej **h** výšky hladiny dostávame

$$\frac{dm(h)}{dh}=\pi\rho\left[\frac{HR+hr-Rh}{H}\right]^2. \tag{7.92}$$

Pripomeňme, že **absolútny tlak p** závisí od **atmosférického tlaku $\mathbf{p_a}$** a **hydrostatického tlaku $\mathbf{p_h}$**, ktorý sa mení po výške kvapaliny **h**. Jeho zderivovaním podľa **h** platí, že

$$\frac{dp}{dh}=\rho g\,. \tag{7.93}$$

Potom **hydraulickú kapacitu zásobníka zrezanej kužeľovej nádoby** podľa Obr. 7.24 (a) možno vypočítať na základe definície kapacity **C** týmto vzťahom

$$C=\frac{dm}{dp}=\frac{dm}{dh}\frac{dh}{dp}=\pi\rho\left[\frac{HR+hr-Rh}{H}\right]^2\frac{1}{\rho g}=\frac{\pi}{g}\left[\frac{HR+hr-Rh}{H}\right]^2 \tag{7.94}$$

resp.

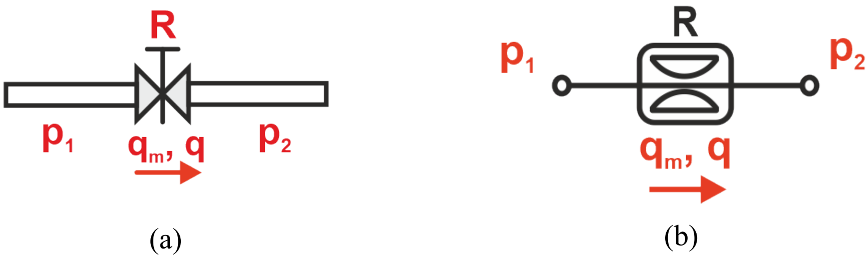
$$C=\frac{\pi}{g}\left[\frac{HR+hr-Rh}{H}\right]^2. \tag{7.95}$$

K rovnakému výsledku pre **hydraulickú kapacitu zásobníka C** možno dospieť použitím vzťahu $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{S(h)}}{\mathbf{g}}$

$$C = \frac{S(h)}{g} = \frac{\pi r(h)^2}{g} = \frac{\pi}{g}\left[\frac{HR + hr - Rh}{H}\right]^2 . \qquad (7.96)$$

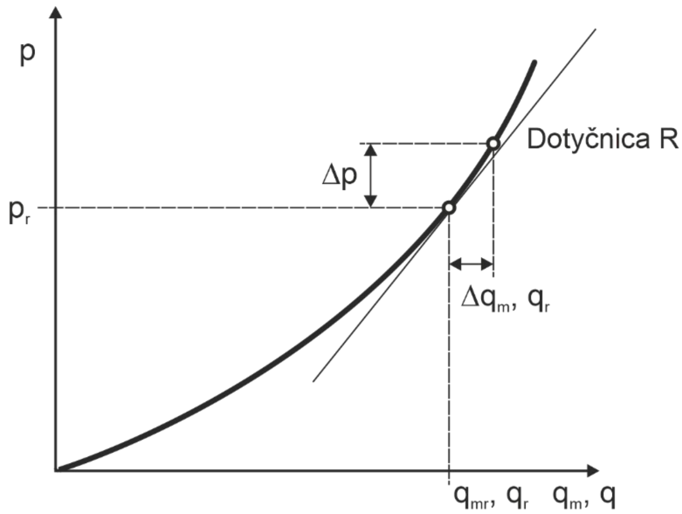
7.11 HYDRAULICKÝ ODPOR

Keď kvapalina prúdi **potrubím**, **ventilom** alebo **otvorom** musí prekonávať odpor **R**, ktorý spôsobuje pokles tlaku. **Hydraulický odpor R**, ktorý pri prúdení kvapaliny napr. cez **ventil**, **otvor** alebo **pomerne dlhé potrubie** s uvažovaním odporu trenia reprezentuje odpor proti prúdeniu kvapaliny. Na zobrazenie odporu v blokovej schéme **hydraulického obvodu** možno použiť tieto schematické značky s konštantou **R** podľa Obr. 7.25 (a) alebo (b).



Obr. 7.25. Schematická značka hydraulického odporu

Tlakový rozdiel je asociovaný s **hmotnostným** resp. **objemovým** prietokom $\mathbf{q_m}$ **(q)** v nelineárnom vzťahu $\mathbf{p = f(q_m) = \rho \cdot f(q)}$ podobne ako sme uvažovali v prípade pneumatických systémov, pozri Obr. 7.26.



Obr. 7.26. Linearizácia hydraulického odporu R v okolí prevádzkového bodu

Dotyčnica ku krivke, ktorá je definovaná pre **hydraulický odpor R** závisí od **hmotnostného** prietoku $\mathbf{q_m}$ resp. **objemového** prietoku **q** a referenčného tlaku $\mathbf{p_r}$. Pre hydraulický odpor **R** v okolí prevádzkového bodu $(\mathbf{q_{mr}}, \mathbf{p_r})$ platí tento vzťah

$$R = \frac{dp}{dq_m}\bigg|_{q_{mr},p_r} = \frac{dp}{\rho dq}\bigg|_{q_r,p_r}, \qquad (7.97)$$

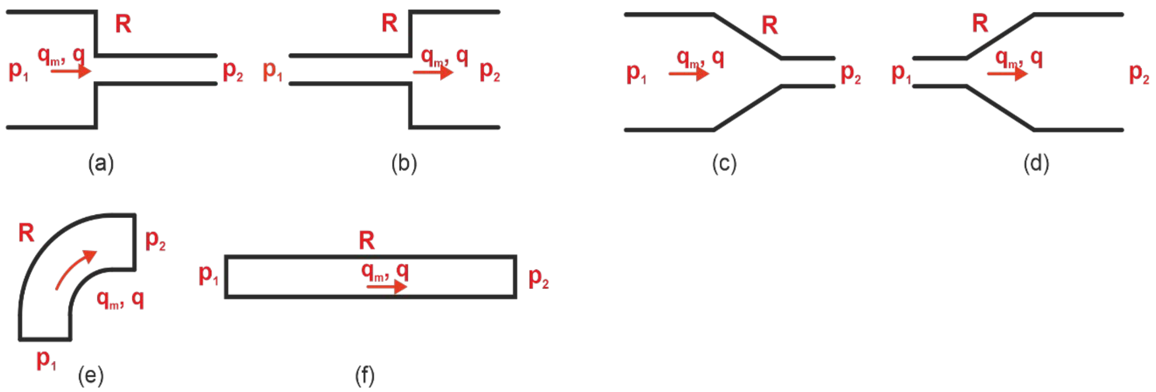
ktorý sme rovnako definovali pre **pneumatické systémy**. V okolí prevádzkového bodu možno vykonať **linearizáciu** daného **hydraulického odporu R**, pre ktorý platí, že

$$R = \frac{\Delta p}{\Delta q_m} = \frac{\Delta p}{\rho \Delta q} = \frac{p - p_r}{q_m - q_{mr}} = \frac{p - p_r}{\rho(q_m - q_{mr})}. \qquad (7.98)$$

Pre **hydraulický odpor R**, cez ktorý prúdi kvapalina, a ktorý uvažujeme ako odpor lineárneho typ s konštantou **R**, potom možno definovať tento vzťah

$$R = \frac{\Delta p}{\Delta q_m} = \frac{\Delta p}{\rho \Delta q} = \frac{p_1 - p_2}{q_m} = \frac{p_1 - p_2}{\rho q} \Rightarrow q_m = \rho q = \frac{p_1 - p_2}{R}. \qquad (7.99)$$

Medzi **hydraulické odpory** možno podobne ako pre pneumatické odpory zaradiť i ďalšie typy hydraulických odporov, ako sú napr. **náhle zmeny** prierezov potrubí, resp. **zúženia (rozšírenia)** a ďalšie iné. Ďalej sú to hydraulické odpory v podobe **difúzorov**, **dýz**, **zaoblení**, **T profilov** a pod.. Niektoré z bežne vyskytujúcich sa **hydraulických odporov** v hydraulických obvodoch sú znázornené na nasledujúcich obrázkoch v podobe schematických značiek, pozri obrázky Obr. 7.27 (a) až (f).

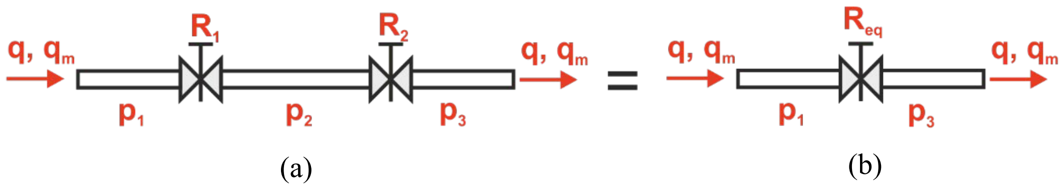


Obr. 7.27. Príklady hydraulických odporov, (a), zúženie, (b) rozšírenie, (c) dýza, (d) difúzor, (e) koleno, (f) dlhé potrubie

V mnohých fluidných systémoch **pneumatických** alebo **hydraulických** sa môžu naraz vyskytovať viaceré kombinácie odporov, napr. **ventily**, **otvory** a ďalšie iné typy fluidných odporov v rôznych usporiadaniach. Tieto môžu byť usporiadané rôznym spôsobom napr. **sériovo** alebo **paralelne**. Takéto zložité systémy možno zjednodušiť nájdením **ekvivalentného fluidného odporu**. Ekvivalentný fluidný odpor možno nájsť podobným spôsobom, aký sme si ukazovali v prípade elektrického odporu.

7.11.1 Ekvivalentný hydraulický odpor pre sériovo zapojené hydraulické odpory

Hydraulické odpory sú zapojené v **sériovom spojení** podľa Obr. 7.28 (a). Nájdime **ekvivalentný hydraulický odpor** podľa Obr. 7.28 (b), ktorým možno danú sústavu nahradiť.



Obr. 7.28. (a) Sériovo zapojené hydraulické odpory, (b) ekvivalentný hydraulický odpor

Pre rozdiel **hydraulických tlakov** v potrubí pri prúdení cez sériovo zapojené hydraulické ventily $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$ musia platiť tieto rovnice

$$p_1 - p_2 = R_1 \rho q = R_1 q_m \,,$$
$$p_2 - p_3 = R_2 \rho q = R_2 q_m \,. \tag{7.100}$$

Sčítaním oboch predchádzajúcich rovníc možno vypočítať tlakový rozdiel medzi koncovými dvoma bodmi potrubia

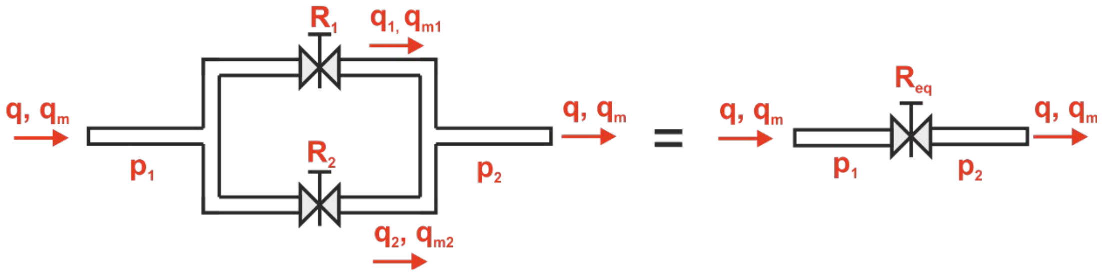
$$p_1 - p_3 = (R_1 + R_2) q_m = (R_1 + R_2) \rho q \,. \tag{7.101}$$

Porovnaním predchádzajúcej rovnice s rovnicou pre **ekvivalentný hydraulický systém** jedného hydraulického odporu $\mathbf{R_{eq}}$ podľa Obr. 7.28 (b), pre ktorý musí platiť rovnica $\mathbf{p_1 - p_3 = R_{eq} \rho q = R_{eq} q_m}$, možno odvodiť vzťah, ktorý platí pre ekvivalentný hydraulický odpor $\mathbf{R_{eq}}$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \,. \tag{7.102}$$

7.11.2 Ekvivalentný hydraulický odpor pre paralelne zapojené hydraulické odpory

Ďalej budeme predpokladať, že hydraulické odpory sú **zapojené paralelne**, ako je znázornené na Obr. 7.29 (a). Nájdime ekvivalentný hydraulický odpor podľa Obr. 7.29 (b), ktorým možno danú sústavu nahradiť.



Obr. 7.29. (a) Paralelne zapojené hydraulické odpory, (b) ekvivalentný hydraulický odpor

Pri paralelnom zapojení hydraulických odporov tečú vetvami hydraulického obvodu cez ventily rôzne objemové prietoky. Ak teda tieto objemové prietoky prúdia cez paralelne zapojené ventily s odpormi $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$, potom ich veľkosť možno vypočítať na základe týchto vzťahov

$$q_{m1} = \rho q_1 = \frac{p_1 - p_2}{R_1}, \quad q_{m2} = \rho q_2 = \frac{p_1 - p_2}{R_2}. \tag{7.103}$$

Pre celkový objemový prietok **q**, ktorý preteká obidvoma vetvami hydraulického obvodu musí platiť **zákon zachovania hmotnosti**. Zo zákona zachovania hmotnosti vyplýva, že daný objemový (hmotnostný) prietok $\mathbf{q(q_m)}$ sa musí rovnomerne rozdeliť na jednotlivé vetvy a teda platí, že

$$q_m = \rho q = q_{m1} + q_{m2} = \rho q_1 + \rho q_2 \,,$$

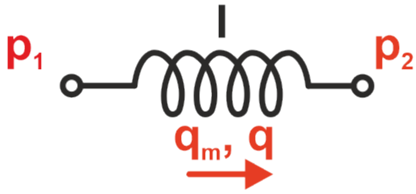
$$q_m = \frac{p_1 - p_2}{R_1} + \frac{p_1 - p_2}{R_2} = (p_1 - p_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{7.104}$$

Ak takto vypočítaný **hmotnostný prietok** $\mathbf{q_m = \rho q}$ porovnáme s **ekvivalentným hydraulickým systémom** s hydraulickým odporom $\mathbf{R_{eq}}$ podľa Obr. 7.29 (b), pre ktorý je hmotnostný prietok definovaný vzťahom $\mathbf{q_m = \rho q = \frac{p_1 - p_2}{R_{eq}}}$, potom pre daný ekvivalentný hydraulický odpor $\mathbf{R_{eq}}$ musí platiť vzťah

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{7.105}$$

7.12 HYDRAULICKÁ INDUKČNOSŤ

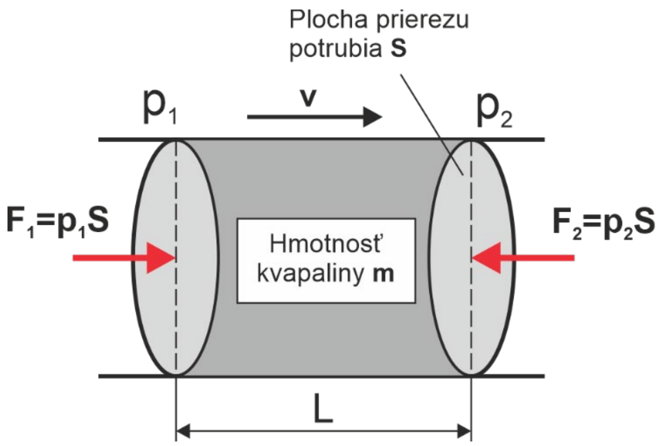
Hydraulická indukčnosť je ekvivalentná indukčnému prvku v elektrických systémoch (cievke) alebo pružnému členu v **mechanickom systéme**. Schematická značka hydraulickej indukčnosti je znázornená na Obr. 7.30.



Obr. 7.30. Schematická značka hydraulickej indukčnosti

Ako v prípade pneumatických systémov, tak aj v prípade hydraulických systémov, ak je nevyhnutné nejaké fluidné médium, t. j. **hydraulickú kvapalinu** urýchliť **v pohybe** alebo **zvýšiť** jej **rýchlosť** pohybu v potrubí, tak potrebujeme v kvapaline vyvolať tlak. Na vyvolanie pohybu je nutné vyvolať v tlakovú silu **F**.

Na odvodenie hydraulickej indukčnosti budeme uvažovať, že kvapalina prúdi potrubím známeho prierezu **S** rýchlosťou **v**. Z potrubia si vyberieme element známej dĺžky **L** a známej hmotnosti kvapaliny **m**, pre ktorý na oboch stranách nameriame tlakový rozdiel $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$, pozri Obr. 7.31.



Obr. 7.31. Hydraulická indukčnosť

Keďže kvapalina v potrubí je reprezentovaná vybraným elementom dĺžky **L** s hmotnosťou plynu **m**, pri pohybe tohto objemu kvapaliny (elementu kvapaliny) musí platiť **II. Newtonov zákon**.

Výslednicu síl, ktorá pôsobí na daný blok kvapaliny medzi dvoma rozdielnymi tlakmi $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ v čase **t**, možno vyjadriť týmto spôsobom

$$\mathrm{F_1 - F_2 = p_1S - p_2S = (p_1 - p_2)S = \Delta p \cdot S}\,, \tag{7.106}$$

kde $\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2})$ je tlakový rozdiel po oboch stranách a **S** je plocha prierezu potrubia.

Táto výsledná sila **F** spôsobuje, že daná kvapalina sa uvádza do pohybu, a teda musí na daný element pôsobiť **zotrvačná sila**, ktorá hmotnostný element urýchľuje (blok kvapaliny sa pohybuje rýchlosťou **v**). Na základe **II. Newtonovho zákona** musí pre daný blok kvapaliny, ktorý sa pohybuje rýchlosťou **v** platiť táto rovnica pohybu

$$\frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} = \rho V\frac{dv}{dt} = (p_1 - p_2)S\,. \tag{7.107}$$

Hmota kvapaliny predstavuje určitý konkrétny objem kvapaliny **V** s hustou $\boldsymbol{\rho}$, ktorý vieme vypočítať na základe vzťahu $\mathbf{S \cdot L}$, kde **L** je dĺžka uvažovaného bloku kvapaliny alebo vzdialenosť medzi dvoma bodmi s rozdielnymi tlakmi $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$. Potom, celkovú hmotnosť **m** uvažovanej kvapaliny so špecifickou hodnotou hustoty $\boldsymbol{\rho}$ možno vypočítať hmotnosť ako $\mathbf{m = S \cdot L \cdot \boldsymbol{\rho}}$. Dosadením vypočítanej hmotnosti **m** kvapaliny do predchádzajúcej diferenciálnej rovnice bude platiť

$$m\frac{dv}{dt} = SL\rho\frac{dv}{dt} = (p_1 - p_2)S\,. \tag{7.108}$$

Ak zo vzťahu pre hmotnostný (objemový) prietok $\mathbf{q_m = \boldsymbol{\rho} q = \boldsymbol{\rho} S v}$ (kde $\mathbf{q = S.v}$) vyjadríme rýchlosť **v** a dosadíme do prechádzajúcej rovnice, potom musí platiť, že

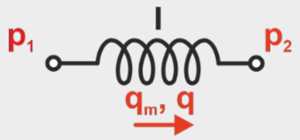
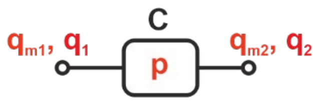
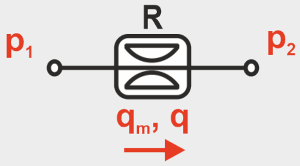
$$\begin{gathered}
m\frac{dv}{dt} = SL\rho\frac{dv}{dt} = (p_1 - p_2)S\,,\\
\frac{SL}{S}\frac{dq_m}{dt} = \frac{SL\rho}{S}\frac{dq}{dt} = (p_1 - p_2)S\,,\\
L\frac{dq_m}{dt} = \frac{L\rho}{S}\frac{dq}{dt} = (p_1 - p_2)\,,\\
I\frac{dq_m}{dt} = I\rho\frac{dq}{dt} = I_h\frac{dq}{dt} = (p_1 - p_2)\,,
\end{gathered} \tag{7.109}$$

kde $\mathbf{I_h = I\boldsymbol{\rho} = \frac{L\boldsymbol{\rho}}{S}}$ nazývame **hydraulickou indukčnosťou** alebo **hydraulickou inertanciou** (z angl. **inertance**), ktorá je definovaná vzťahom

$$I_h = I\rho = \frac{L\rho}{S}\,. \tag{7.110}$$

Rovnice základných stavebných prvkov **pneumatickej indukčnosti**, **pneumatickej kapacity** a **pneumatického odporu** pre pneumatický systém možno nájsť zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 7.2. Základné stavebné prvky hydraulického systému

Stavebný prvok	Opis rovnice
Hydraulická indukčnosť 	$\frac{dq_m}{dt} = \frac{(p_1 - p_2)}{I}$ $\frac{dq}{dt} = \frac{(p_1 - p_2)}{I_h}$ $I_h = I\rho = \frac{L\rho}{S}$
Hydraulická kapacita 	$C\frac{dp}{dt} = q_{m1} - q_{m2} = \rho q_1 - \rho q_2$ $C = \frac{dm}{dp}, C = \frac{S(h)}{g}$
Hydraulický odpor 	$q_m = \rho q = \frac{p_1 - p_2}{R}$

7.13 MODELOVANIE HYDRAULICKÝCH SYSTÉMOV

Na vytvorenie jednoduchého hydraulického modelu s úrovňou hladiny použijeme kapacitu zásobníka na modelovanie nádrže a odporové elementy pre definovanie ventilov daného systému. Výsledný matematický model dokáže adekvátnym spôsobom opísať správanie sa skutočného systému.

Podobným spôsobom ako pri modelovaní pneumatických systémov t. j. aplikovaním **zákona zachovania hmotnosti**, je matematický model pre **hydraulický zásobník** definovaný diferenciálnou rovnicou

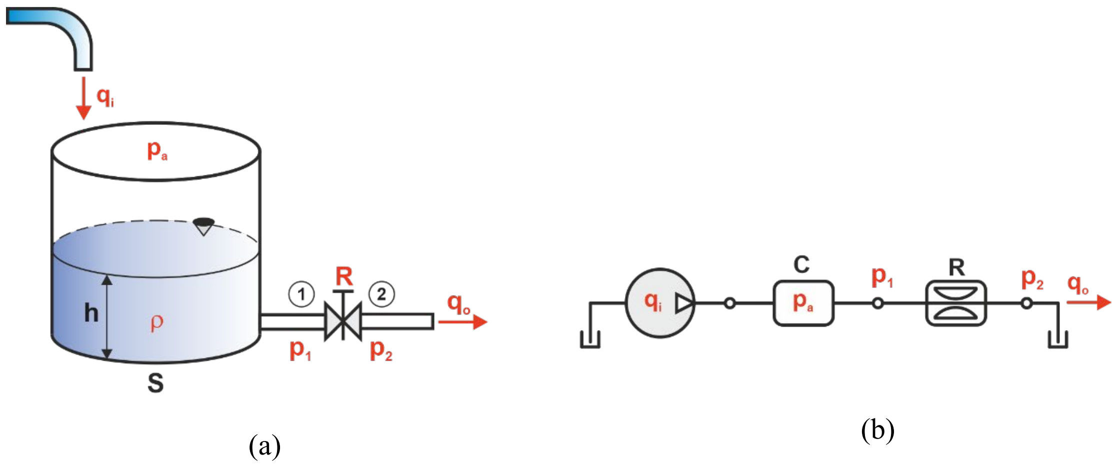
$$\frac{dm}{dt} = q_{mi} - q_{mo} \, . \tag{7.111}$$

To znamená, že zmena hmotnosti **m** je daná rozdielom **hmotnostného prietoku** $\mathbf{q_{mi}}$ kvapaliny do nádoby vtekajúceho a **hmotnostného odtoku** $\mathbf{q_{mo}}$ kvapaliny z nádoby odtekajúceho. Pravá strana rovnice opisujúcej matematický model pre **hydraulický zásobník** na základe **zákona zachovania hmotnosti**, na základe ktorého platí

$$q_{mi} - q_{mo} = \rho q_i - \rho q_o \, , \tag{7.112}$$

kde $\mathbf{q_i}$ je vstupný **objemový prítok** a $\mathbf{q_o}$ výstupný **objemový odtok** kvapaliny.

Hydraulický systém s jednou nádržou je znázornený na Obr. 7.34 (a), kde $\mathbf{p_a}$ je atmosférický tlak a $\mathbf{q_i}, \mathbf{q_o}$ sú objemové prítoky (odtoky) na vstupe (výstupe). Prierezová plocha nádoby je **S** a výška hladiny je **h**. Kvapalina hustoty $\boldsymbol{\rho}$ odteká z nádrže cez ventil hydraulického odporu **R**.



Obr. 7.32. (a) Systém s jednou nádržou a ventilom, (b) bloková schéma

Na príklade jednoduchého zásobníka zobrazeného na Obr. 7.32 (a) si ukážeme odvodenie diferenciálnej rovnice systému aplikovaním **zákona zachovania hmotností**. Poznamenajme, že celková hmotnosť kvapaliny v nádrži je $\boldsymbol{\rho}$**Sh**. Pre konštantnú prierezovú plochu **S** a konštantnú hodnotu hustoty $\boldsymbol{\rho}$, možno ľavú stranu diferenciálnej rovnice prepísať do tvaru

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho A h) = \rho A \frac{dh}{dt}. \qquad (7.113)$$

Označením bodu **č. 1** ako miesto tlaku **proti prúdu kvapaliny** na ľavej strane ventilu a bodu **č. 2** ako miesto tlaku na pravej strane ventilu, je potom možné na základe vypočítaného tlakového rozdielu po oboch stranách tohto ventilu, vypočítať hydraulický odpor **R** ako

$$R = \frac{\Delta p}{\Delta q_m} = \frac{p_1 - p_2}{\rho q_o}. \qquad (7.114)$$

Pre absolútny tlak $\mathbf{p_1}$ od kvapaliny, ktorý na ľavej strane tlačí na ventil s odporom **R** musí platiť vzťah

$$p_1 = p_a + \rho g h. \qquad (7.115)$$

Keďže na pravej strane ventilu **R** vyteká kvapalina priamo do atmosférického tlaku $\mathbf{p_a}$, potom pre tlak $\mathbf{p_2}$ musí platiť, že $\mathbf{p_2} = \mathbf{p_a}$. Dosadením vypočítaných hodnôt tlakov $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ do rovnice pre odpor **R** dostávame hodnotu **výstupného objemového výtoku** z nádoby $\mathbf{q_o}$

$$R = \frac{p_1 - p_2}{\rho q_o} = \frac{p_a + \rho g h - p_a}{\rho q_o} = \frac{gh}{q_o} \Rightarrow q_o = \frac{gh}{R}. \tag{7.116}$$

Potom dosadením výstupného objemového výtoku $\mathbf{q_o}$ do pravej strany diferenciálnej rovnice opisujúcej matematický model zásobníka dostávame

$$\rho q_i - \rho q_o = \rho q_i - \frac{\rho g h}{R} \tag{7.117}$$

alebo

$$q_{mi} - q_{mo} = \rho q_i - \frac{\rho g h}{R}. \tag{7.118}$$

Ak teraz tieto výrazy dosadíme do diferenciálnej rovnice, ktorá platí pre hydraulický zásobník, ktorá je definovaná na základe **zákona zachovania hmotnosti**, možno dospieť k tejto rovnici

$$\begin{gathered}\frac{dm}{dt} = \rho S \frac{dh}{dt} = q_{mi} - q_{mo} = \rho q_i - \frac{\rho g h}{R}, \\ \rho S \frac{dh}{dt} = \rho q_i - \frac{\rho g h}{R}.\end{gathered} \tag{7.119}$$

Potom, usporiadaním výrazov dostávame

$$\frac{RS}{g}\frac{dh}{dt} + h = \frac{R}{g} q_i. \tag{7.120}$$

Výsledkom je **diferenciálna rovnica 1. rádu**, ktorá opisuje vzťah, ako sa mení výška hladiny **h** od vstupného objemového prítoku $\mathbf{q_i}$. Ak zavedieme vzťah pre **hydraulickú kapacitu zásobníka** na základe $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{g}}$, potom platí

$$RC\frac{dh}{dt} + h = \frac{R}{g} q_i. \tag{7.121}$$

Vykonajme, teraz **Laplaceovu transformáciu** tejto diferenciálnej rovnice s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{h(0) = 0}$:

$$RCsH(s) + H(s) = \frac{R}{g} Q_i(s), \tag{7.122}$$

potom prenosová funkcia systému $\mathbf{H(s)/Q_i(s)}$ nadobudne tvar

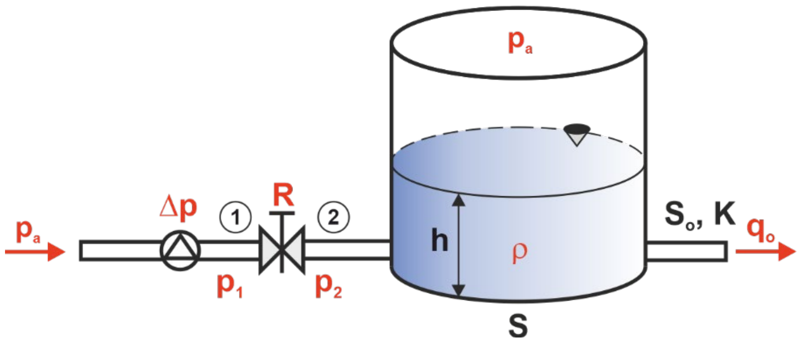
$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R/g}{RCs + 1}. \tag{7.123}$$

Hydraulické systémy sú bežne napájané **čerpadlami**, ktoré môžu byť uvažované ako **zdroje tlaku**. Nasledujúci príklad ukazuje, ako odvodiť diferenciálnu rovnicu pre hydraulický systém s nádržou, do ktorej je kvapalina pumpovaná prostredníctvom **čerpadla**.

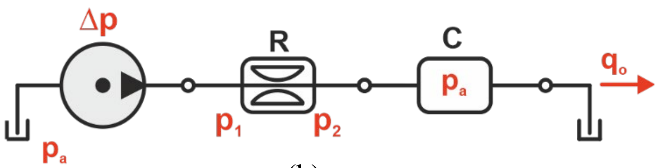
Príklad č. 7.6. Systém jednej nádrže s čerpadlom

Hydraulický systém s jednou nádržou, ktorý je znázornený na Obr. 7.35 (a), pozostáva z **čerpadla**, ktoré v spodnej časti nádrže pumpuje kvapalinu do nádoby cez ventil s odporom **R**. Vstup do čerpadla je otvorený do atmosféry a tlak v kvapaline narastá prechodom cez čerpadlo s tlakom $\mathbf{\Delta p}$.

Odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje ako sa mení výška hladiny **h** v nádobe v závislosti od vstupného tlaku čerpadla $\mathbf{\Delta p}$, ak prierezová plocha nádrže je **S**, hustota kvapaliny je $\boldsymbol{\rho}$, plocha prierezu otvoru, cez ktorý kvapalina voľne odteká z nádrže do voľného priestoru atmosférického tlaku je $\mathbf{S_o}$ a odtokový súčiniteľ je **K**.



(a)



(b)

Obr. 7.33. Hydraulický systém s čerpadlom (a) fyzikálny model, (b) bloková schéma

Pri tvorbe matematického modelu začneme napísaním diferenciálnej rovnice pre nádobu na základe **zákona zachovania hmotnosti**, potom pre zásobník kvapaliny musí platiť

$$\frac{dm}{dt} = q_{mi} - q_{mo} \,. \tag{7.124}$$

Hmotnosť kvapaliny v nádobe je $\boldsymbol{\rho Sh}$. Pre konštantnú hustotu $\boldsymbol{\rho}$ a prierezovú plochu **S** nádrže platí, že

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho ASh) = \rho S \frac{dh}{dt} \,. \tag{7.125}$$

Vstupný **objemový prítok** $\mathbf{q_{mi}}$ do nádrže možno vypočítať na základe tlakového rozdielu a odporu ventilu **R**, pre ktorý platí

$$q_{mi} = \frac{p_1 - p_2}{R} \,, \tag{7.126}$$

kde $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ sú tlaky na oboch stranách ventilu s odporom **R**, ktoré možno vypočítať na základe týchto vzťahov s uvažovaním tlaku čerpadla $\boldsymbol{\Delta p}$

$$\begin{aligned} p_1 &= p_a + \Delta p \,, \\ p_2 &= p_a + \rho g h \,. \end{aligned} \tag{7.127}$$

Po dosadení vypočítaných tlakov $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ do diferenciálnej rovnice možno vypočítať **vstupný objemový prítok** $\mathbf{q_{mi}}$ do nádrže na základe vzťahu

$$q_{mi} = \frac{p_1 - p_2}{R} = \frac{p_a + \Delta p - (p_a + \rho g h)}{R} = \frac{\Delta p - \rho g h}{R} \,. \tag{7.128}$$

Hmotnostný odtok $\mathbf{q_{mo}}$, ktorým kvapalina voľne vyteká z nádrže do atmosférického tlaku možno zapísať v zmysle hmotnostného odtoku $\mathbf{q_{mo}}$, ktorý závisí od výtokovej rýchlosti $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{2gh}}$ (vypočítanej na základe zachovania **kinetickej** a **potenciálnej** energie). Pre $\mathbf{q_{mo}}$ platí, že

$$q_{mo} = \rho K S_o \sqrt{2gh} \,, \tag{7.129}$$

kde $\mathbf{q_{mo}}$ voľný **hmotnostný odtok z nádrže cez otvor** pri pôsobení atmosférického tlaku na hladinu kvapaliny, **K** je súčiniteľ odtoku z nádrže, $\mathbf{S_o}$ je plocha prierezu výtokového otvoru. Dosadením odvodených výrazov do **diferenciálnej rovnice systému** a vykonaním matematických úprav možno dospieť k tomuto matematickému modelu

$$\frac{dm}{dt} = \rho S \frac{dh}{dt} = q_{mi} - q_{mo} = \frac{\Delta p - \rho g h}{R} - \rho K S_o \sqrt{2gh}\,,$$
$$\rho S \frac{dh}{dt} = \frac{\Delta p - \rho g h}{R} - \rho K S_o \sqrt{2gh}\,. \qquad (7.130)$$

Ďalším usporiadaním výrazov dostávame diferenciálnu rovnicu v nelineárnom tvare

$$\rho S \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g}{R} h + \rho K S_o \sqrt{2gh} = \frac{\Delta p}{R}\,. \qquad (7.131)$$

S uvažovaním diferenciálnej rovnice v zmysle hydraulickej kapacity $\mathbf{C = S/g}$ a vykonaním ďalších matematických úprav možno dospieť k výslednej diferenciálnej rovnici systému

$$\frac{\rho S}{g}\frac{dh}{dt} + \frac{\rho}{R} h + \frac{\rho K S_o}{g}\sqrt{2gh} = \frac{\Delta p}{gR}\,,$$
$$RC \frac{dh}{dt} + h + \frac{R K S_o}{g}\sqrt{2gh} = \frac{\Delta p}{\rho g}\,. \qquad (7.132)$$

Príklad č. 7.7. Systém dvoch nádrží s čerpadlom

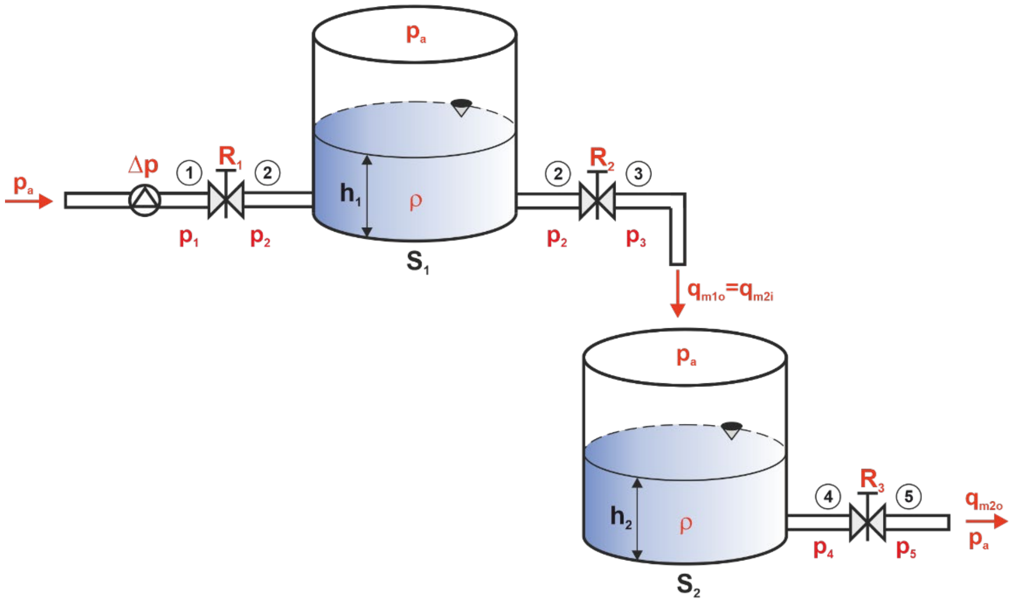
Nasledujúci Obr. 7.34 zobrazuje hydraulický systém dvoch nádrží s prierezovými plochami $\mathbf{S_1}$ a $\mathbf{S_2}$. Čerpadlo je pripojené v spodnej časti **nádrže č. 1** k ventilu s odporom $\mathbf{R_1}$. Kvapalina vteká z **nádrže č. 1** do **nádrže č. 2** cez ventil s odporom $\mathbf{R_2}$ a opúšťa **nádrž č. 2** cez ventil s odporom $\mathbf{R_3}$. Hustota kvapaliny je $\boldsymbol{\rho}$. Odvoďte diferenciálne rovnice v zmysle $\mathbf{h_1}$ a $\mathbf{h_2}$, ktoré zapíšte do maticového tvaru.

Pri tvorbe matematického modelu podľa Obr. 7.34, začneme s **aplikovaním zákona zachovania hmotnosti** pre **nádrž č. 1**, pre ktorú musí platiť, že

$$\frac{dm_1}{dt} = q_{m1i} - q_{m1o}\,. \qquad (7.133)$$

Ľavá strana diferenciálnej rovnice po dosadení za hmotnosť kvapaliny $\mathbf{m_1}$ nadobudne tvar

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho S_1 h_1) = \rho S_1 \frac{dh_1}{dt}\,. \qquad (7.134)$$



Obr. 7.34. Hydraulický systém dvoch nádrží s čerpadlom

Pre hmotnostný prítok $\mathbf{q_{m1i}}$, ktorý vstupuje do nádrže **č. 1** musí platiť tento vzťah

$$q_{mi1} = \frac{p_1 - p_2}{R_1}, \qquad (7.135)$$

kde $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ sú **absolútne tlaky**, ktoré možno vypočítať na základe vzťahov

$$\begin{aligned} p_1 &= p_a + \Delta p\,, \\ p_2 &= p_a + \rho g h_1 \end{aligned} \qquad (7.136)$$

a po ich dosadení do predchádzajúceho vzťahu potom možno vypočítať hodnotu **hmotnostného prítoku** $\mathbf{q_{m1i}}$

$$q_{m1i} = \frac{p_1 - p_2}{R_1} = \frac{p_a + \Delta p - (p_a + \rho g h_1)}{R_1} = \frac{\Delta p - \rho g h_1}{R_1}. \qquad (7.137)$$

Výstupný **hmotnostný odtok** $\mathbf{q_{m1o}}$ z nádrže **č. 1** možno vypočítať prostredníctvom hodnôt tlakov $\mathbf{p_2}$ a $\mathbf{p_3}$, ktoré pôsobia po oboch stranách ventilu s odporom $\mathbf{R_2}$. Pre jednotlivé tlaky platí,

$$\begin{aligned} p_2 &= p_a + \rho g h_1\,, \\ p_3 &= p_a\,. \end{aligned} \qquad (7.138)$$

Dosadením vypočítaných tlakov $\mathbf{p_2}$ a $\mathbf{p_3}$ do rovnice výstupného hmotnostného odtoku $\mathbf{q_{m1o}}$ platí

$$q_{m1o} = \frac{p_2 - p_3}{R_2} = \frac{p_a + \rho g h_1 - p_a}{R_2} = \frac{\rho g h_1}{R_2}. \tag{7.139}$$

Ak dosadíme vypočítané hmotnostné odtoky (prítoky) do diferenciálnej rovnice pre **nádrž č. 1**, potom dostávame

$$\begin{gathered} \frac{dm_1}{dt} = \rho S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{m1i} - q_{m1o} = \frac{\Delta p - \rho g h_1}{R_1} - \frac{\rho g h_1}{R_2}, \\ \rho S_1 \frac{dh_1}{dt} = \frac{\Delta p - \rho g h_1}{R_1} - \frac{\rho g h_1}{R_2}. \end{gathered} \tag{7.140}$$

Usporiadaním predchádzajúcej rovnice možno dospieť k prvej diferenciálnej rovnici matematického modelu v tvare

$$\rho S_1 \frac{dh_1}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \rho g h_1 = \frac{\Delta p}{R_1}. \tag{7.141}$$

Odvoďme teraz diferenciálnu rovnicu pre nádrž **č. 2**. Aplikovaním **zákona zachovania hmotnosti** pre **nádrž č. 2** musí platiť

$$\frac{dm_2}{dt} = q_{m2i} - q_{m2o}, \tag{7.142}$$

kde $\mathbf{q_{m2i}} = \mathbf{q_{m1o}} = \frac{\boldsymbol{\rho g h_1}}{\mathbf{R_2}}$. Ľavá strana diferenciálnej rovnice po dosadení za hmotnosti kvapaliny $\mathbf{m_2}$ nadobudne tvar

$$\frac{dm_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho A_2 h_2) = \rho A_2 \frac{dh_2}{dt}. \tag{7.143}$$

Výstupný **hmotnostný odtok** $\mathbf{q_{m2o}}$ z **nádrže č. 2** možno vypočítať na základe vzťahu

$$q_{m2o} = \frac{p_4 - p_5}{R_3}, \tag{7.144}$$

kde $\mathbf{p_4}$ a $\mathbf{p_5}$ sú tlaky na oboch stranách ventilu s odporom $\mathbf{R_3}$, definované na základe vzťahov

$$p_4 = p_a + \rho g h_2, \qquad p_5 = p_a. \tag{7.145}$$

Po vypočítaní tlakov $\mathbf{p_4}$ a $\mathbf{p_5}$ a ich dosadení do vzťahu pre **hmotnostný odtok** $\mathbf{q_{m2o}}$ dostávame

$$q_{m2o} = \frac{p_4 - p_5}{R_3} = \frac{p_a + \rho g h_2 - p_a}{R_3} = \frac{\rho g h_2}{R_3}\,. \tag{7.146}$$

Dosadením odvodených výrazov vypočítaných hmotnostných **prítokov (odtokov)** $\mathbf{q_{m2i}}$ a $\mathbf{q_{m2o}}$ do diferenciálnej rovnice pre nádobu **č. 2** dostávame

$$\begin{gathered}\frac{dm_2}{dt} = \rho S_2 \frac{dh_2}{dt} = q_{m2i} - q_{m2o} = \frac{\rho g h_1}{R_2} - \frac{\rho g h_2}{R_3}\,,\\ \rho S_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{\rho g h_1}{R_2} - \frac{\rho g h_2}{R_3}\,.\end{gathered} \tag{7.147}$$

Usporiadaním predchádzajúcej rovnice, potom dostávame **druhú diferenciálnu rovnicu** matematického modelu v tvare

$$\rho S_2 \frac{dh_2}{dt} - \frac{\rho g h_1}{R_2} + \frac{\rho g h_2}{R_3} = 0\,. \tag{7.148}$$

Výsledná **sústava diferenciálnych rovníc** pre daný hydraulický systém je daná sústavou dvoch diferenciálnych rovníc v tvare

$$\begin{gathered}\rho S_1 \frac{dh_1}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\rho g h_1 = \frac{\Delta p}{R_1}\,,\\ \rho S_2 \frac{dh_2}{dt} - \frac{\rho g h_1}{R_2} + \frac{\rho g h_2}{R_3} = 0\,.\end{gathered} \tag{7.149}$$

Ak zapíšeme danú sústavu diferenciálnych rovníc s uvažovaním **hydraulických kapacít** $\mathbf{C_1 = S_1/g}$ a $\mathbf{C_2 = S_2/g}$, potom platí

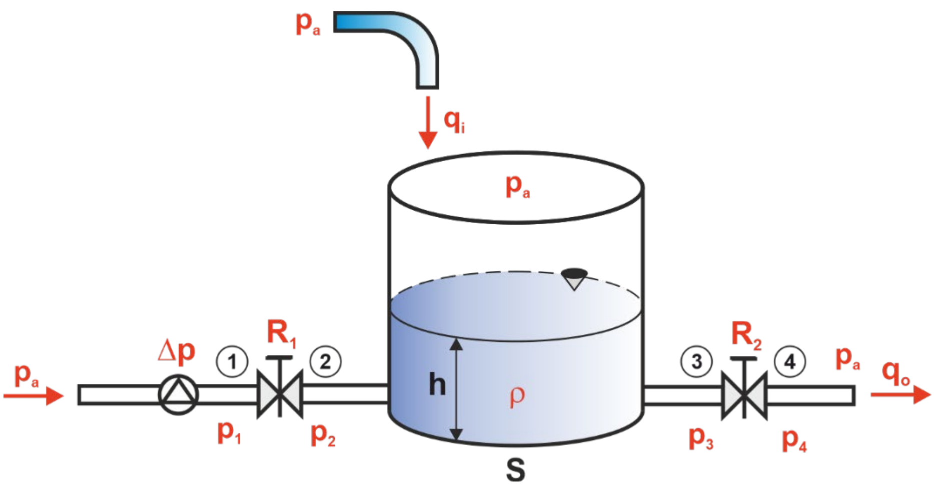
$$\begin{gathered}C_1 \frac{dh_1}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) h_1 = \frac{\Delta p}{R_1 \rho g}\,,\\ C_2 \frac{dh_2}{dt} - \frac{h_1}{R_2} + \frac{h_2}{R_3} = 0\,.\end{gathered} \tag{7.150}$$

Výsledný matematický model zapísaný do maticového tvaru nadobúda tvar

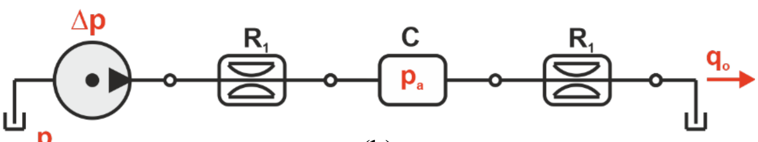
$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta p}{R_1 \rho g} \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.151)$$

Príklad č. 7.8. Systém s jednou nádržou a čerpadlom

Systém s jednou nádržou a čerpadlom, ktorý je znázornený na Obr. 7.37 (a), pozostáva z **čerpadla** s tlakom $\mathbf{\Delta p}$, ktoré je pripojené v spodnej časti nádrže k ventilu s odporom $\mathbf{R_1}$. Kvapalina z nádoby odteká cez ventil s odporom $\mathbf{R_2}$. Odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje, ako sa mení výška hladiny **h** od objemového prítoku $\mathbf{q_i}$, ak je daná prierezová plocha nádrže **S** a hustota kvapaliny $\boldsymbol{\rho}$.



(a)



(b)

Obr. 7.35. Hydraulický systém s čerpadlom (a) fyzikálny model, (b) bloková schéma

Na napísanie matematického modelu začneme s diferenciálnou rovnicou definovanou na základe rovnice kontinuity toku podľa **zákona zachovania hmotnosti**. Pre nádrž zobrazenú na Obr. 7.37 (a), musí teda platiť

$$\frac{dm}{dt} = \rho q_i + q_{mi} - q_{mo}. \qquad (7.152)$$

Hmotnosť kvapaliny v nádobe je $\boldsymbol{\rho Sh}$. Pre konštantnú hustotu $\boldsymbol{\rho}$ a prierezovú plochu nádrže **S** platí, že

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho Sh) = \rho S \frac{dh}{dt}\,. \tag{7.153}$$

Vstupný **objemový prítok** $\mathbf{q_{mi}}$, ktorý vteká do nádrže cez ventil **R₁** je daný vzťahom

$$q_{mi} = \frac{p_1 - p_2}{R_1}\,, \tag{7.154}$$

kde $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ sú tlaky pôsobiace na oboch stranách tohto ventilu a definované vzťahmi

$$\begin{aligned} p_1 &= p_a + \Delta p\,, \\ p_2 &= p_a + \rho g h\,. \end{aligned} \tag{7.155}$$

Ak dosadíme hodnoty týchto vypočítaných tlakov $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ do rovnice pre **hmotnostný objemový prítok** $\mathbf{q_{mi}}$, potom ostávame

$$q_{mi} = \frac{p_1 - p_2}{R_1} = \frac{p_a + \Delta p - (p_a + \rho g h)}{R_1} = \frac{\Delta p - \rho g h}{R_1}\,. \tag{7.156}$$

Pre **hmotnostný odtok** z nádoby $\mathbf{q_{mo}}$, ktorý vyteká z nádrže cez ventil $\mathbf{R_2}$ musí platiť tento vzťah

$$q_{mo} = \frac{p_3 - p_4}{R_2}\,, \tag{7.157}$$

kde $\mathbf{p_3}$ a $\mathbf{p_4}$ sú tlaky pôsobiace na oboch stranách ventilu $\mathbf{R_2}$ a pre tieto tlaky platia vzťahy

$$\begin{aligned} p_3 &= p_2 = p_a + \rho g h\,, \\ p_4 &= p_a\,. \end{aligned} \tag{7.158}$$

Ak hodnoty týchto vypočítaných tlakov $\mathbf{p_3}$ a $\mathbf{p_4}$ dosadíme do vzťahu pre hmotnostný odtok $\mathbf{q_{mo}}$, dostávame

$$q_{mo} = \frac{p_3 - p_4}{R_2} = \frac{p_a + \rho g h - p_a}{R_2} = \frac{\rho g h}{R_2}\,. \tag{7.159}$$

Potom dosadením vypočítaných hmotnostných prítokov (odtokov) $\mathbf{q_{mi}}$ a $\mathbf{q_{mo}}$ do diferenciálnej rovnice pre **hydraulický zásobník** dostávame tvar

$$\frac{dm}{dt} = \rho S\frac{dh}{dt} = \rho q_i + q_{mi} - q_{mo} = \rho q_i + \frac{\Delta p - \rho g h}{R_1} - \frac{\rho g h}{R_2},$$
$$\rho S\frac{dh}{dt} = \rho q_i + \frac{\Delta p - \rho g h}{R_1} - \frac{\rho g h}{R_2}. \qquad (7.160)$$

Usporiadaním výrazov v predchádzajúcej diferenciálnej rovnici možno dospieť k výslednému matematickému modelu

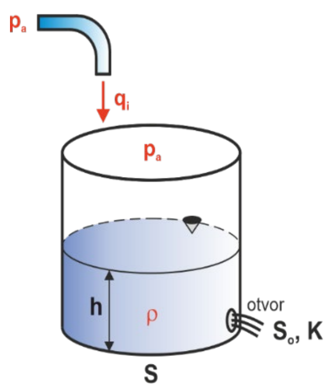
$$\rho S\frac{dh}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\rho g h = \rho q_i + \frac{\Delta p}{R_1}. \qquad (7.161)$$

Uvažovaním diferenciálnej rovnice v zmysle **hydraulickej kapacity** $\mathbf{C = S/g}$, potom musí platiť

$$C\frac{dh}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h = \frac{q_i}{g} + \frac{\Delta p}{R_1 \rho g}. \qquad (7.162)$$

Príklad č. 7.9. Systém jednej nádrže s otvorom

Do systému s jednou nádržou s otvorom, ktorá je znázornená na Obr. 7.36, voľne vteká kvapalina so vstupným objemovým prítokom $\mathbf{q_i}$. Kvapalina z nádoby voľne odteká otvorom s prierezom $\mathbf{S_o}$. Označme **K** ako **odtokový súčiniteľ**, ktorý opisuje vzťah medzi aktuálnym a teoretickým hmotnostným prietokom. Súčiniteľ **K** predstavuje hodnotu v rozmedzí **0<K<1** a funguje ako súčiniteľ efektu trenia. Odvoďte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje, ako sa mení výška hladiny **h** v závislosti od objemového prítoku $\mathbf{q_i}$, ak je daná prierezová plocha nádrže **S** a hustota kvapaliny **ρ**.



Obr. 7.36. Hydraulický systém s nádobou s otvorom

Na základe **zákona zachovania hmotnosti** musí pre nádrž platiť táto diferenciálna rovnica

$$\frac{dm}{dt} = \rho q_i - q_{mo} \,. \qquad (7.163)$$

Hmotnosť kvapaliny v nádobe je $\boldsymbol{\rho Sh}$, potom pre konštantnú hodnotu hustoty $\boldsymbol{\rho}$ a prierezovú plochu nádrže **S** bude platiť

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho Sh) = \rho S\frac{dh}{dt} \,. \qquad (7.164)$$

Hmotnostný výtok z nádrže $\mathbf{q_{mo}}$ závisí od tlaku kvapaliny, ktorým kvapalina vyteká cez otvor s prierezovou plochou $\mathbf{S_o}$. Veľkosť tohto výtoku $\mathbf{q_{mo}}$ možno odvodiť od rýchlosti výtoku **v**, ktorou kvapalina voľne opúšťa nádobu pod tlakom vyvolaným vlastnou tiažou kvapaliny. Túto rýchlosť možno vypočítať na základe **zákona zachovania kinetickej** a **potenciálnej** energie. Musí platiť, že

$$E_k = E_p \,,$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - y) \,, \qquad (7.165)$$

kde **y** je poloha otvoru meraná od spodku nádoby (v našom prípade **y = 0**). To znamená, že pre rýchlosť výtoku **v** musí platiť

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - y) \Longrightarrow v = \sqrt{2g(h - y)} = \sqrt{2gh} \,. \qquad (7.166)$$

Hodnota **hmotnostného výtoku** z nádrže $\mathbf{q_{mo}}$ závisí od rýchlosti výtoku $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{2gh}}$, ďalej od veľkosti prierezovej plochy otvoru $\mathbf{S_o}$ a takisto od odtokového súčiniteľa trenia **K**. Potom hmotnostný odtok z nádrže $\mathbf{q_{mo}}$ možno vypočítať na základe tohto vzťahu

$$q_{mo} = \rho q_o = \rho K S_o v = \rho K S_o \sqrt{2gh} \,,$$
$$q_{mo} = \rho K S_o \sqrt{2gh} \,. \qquad (7.167)$$

Dosadením vypočítaných výrazov priamo do rovnice modelu opisujúcej zmenu výšky hladiny v nádobe **h** v závislosti od času **t** dostávame

$$\frac{dm}{dt} = \rho S\frac{dh}{dt} = \rho q_i - q_{mo} = \rho q_i - \rho K S_o \sqrt{2gh} \,, \qquad (7.168)$$

resp.

$$S\frac{dh}{dt} = q_i - KS_o\sqrt{2gh} \tag{7.169}$$

a ďalším usporiadaním príslušných výrazov diferenciálne rovnice dostávame

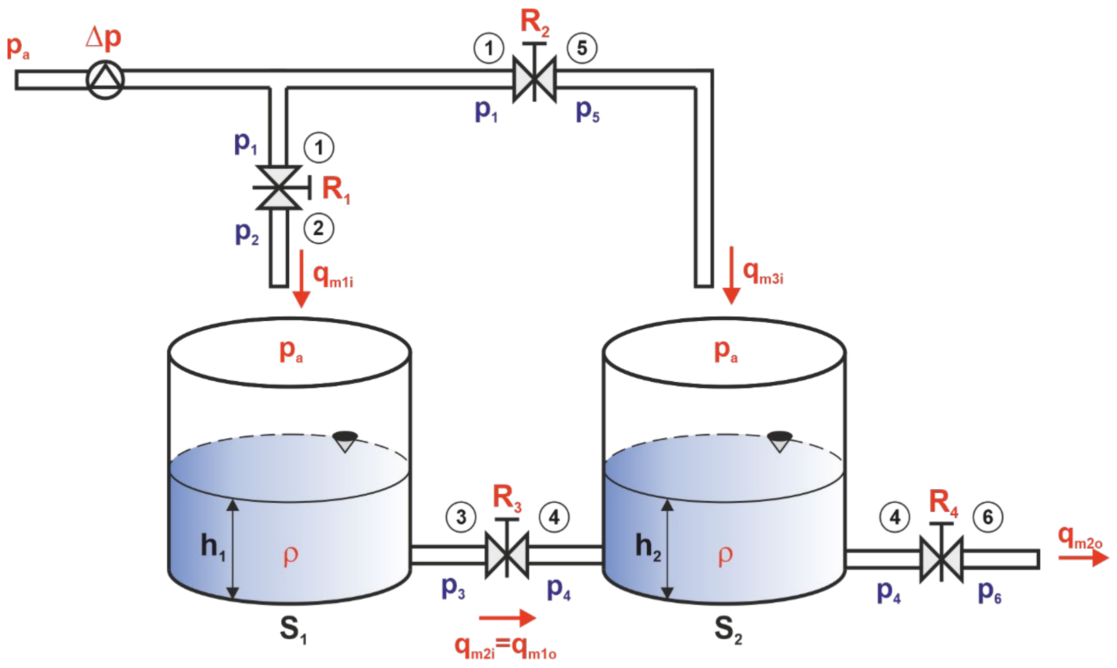
$$S\frac{dh}{dt} + KS_o\sqrt{2gh} = q_i\,. \tag{7.170}$$

V prípade uvažovania diferenciálnej rovnice v zmysle **hydraulickej kapacity** $\mathbf{C = S/g}$ možno diferenciálnu rovnicu prepísať do tvaru

$$C\frac{dh}{dt} + \frac{KS_o}{g}\sqrt{2gh} = \frac{q_i}{g}\,. \tag{7.171}$$

Príklad č. 7.10. Systém dvoch nádrží s čerpadlom

Nasledujúci Obr. 7.37 zobrazuje hydraulický systém dvoch nádrží s plochami prierezu $\mathbf{S_1}$ a $\mathbf{S_2}$. Čerpadlo v hornej časti pumpuje zároveň kvapalinu do nádoby **č. 1** cez ventil s odporom $\mathbf{R_1}$ a do nádrže **č. 2** cez ventil s odporom $\mathbf{R_2}$. Obe nádrže sú v spodnej časti prepojené prostredníctvom ventilu s odporom $\mathbf{R_3}$, a to tak že kvapalina cez tento ventil má možnosť prúdiť do nádoby **č. 2**. Z nádoby **č. 2** vyteká kvapalina cez ventil s odporom $\mathbf{R_4}$ priamo do atmosférického tlaku. Hustota kvapaliny je $\boldsymbol{\rho}$. Odvoďte diferenciálne rovnice v zmysle $\mathbf{h_1}$ a $\mathbf{h_2}$ a zapíšte ich do maticového tvaru.



Obr. 7.37. Hydraulický systém s čerpadlom

Aplikovaním **zákona zachovania hmotnosti** pre nadrž **č. 1** musí platiť, že

$$\frac{dm_1}{dt} = q_{m1i} - q_{m1o} \, , \tag{7.172}$$

kde

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho S_1 h_1) = \rho S_1 \frac{dh_1}{dt} \, . \tag{7.173}$$

Vstupný **hmotnostný prítok $\mathbf{q_{m1i}}$**, ktorý vteká do nádrže **č. 1** je daný týmto vzťahom

$$q_{mi1} = \frac{p_1 - p_2}{R_1} \, , \tag{7.174}$$

kde $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ sú tlaky, ktoré pôsobia po oboch stranách ventilu s odporom $\mathbf{R_1}$ a sú definované vzťahmi

$$p_1 = p_a + \Delta p, \qquad p_2 = p_a \, . \tag{7.175}$$

Dosadením vypočítaných tlakov $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_2}$ do rovnice pre **hmotnostný prítok $\mathbf{q_{m1i}}$** dostávame

$$q_{m1i} = \frac{p_1 - p_2}{R_1} = \frac{p_a + \Delta p - p_a}{R_1} = \frac{\Delta p}{R_1} \, . \tag{7.176}$$

Výstupný hmotnostný odtok $\mathbf{q_{m1o}}$ z nádrže **č. 1** možno vypočítať na základe tlakov $\mathbf{p_3}$ a $\mathbf{p_4}$, ktoré pôsobia po oboch stranách ventilu s odporom $\mathbf{R_3}$, pre ktoré platia vzťahy

$$\begin{aligned} p_3 &= p_a + \rho g h_1 \, , \\ p_4 &= p_a + \rho g h_2 \, . \end{aligned} \tag{7.177}$$

Dosadením týchto vypočítaných tlakov $\mathbf{p_3}$ a $\mathbf{p_4}$ do rovnice **hmotnostného odtoku $\mathbf{q_{m1o}}$** dostávame

$$q_{m1o} = \frac{p_3 - p_4}{R_3} = \frac{p_a + \rho g h_1 - (p_a + \rho g h_2)}{R_3} = \frac{\rho g h_1 - \rho g h_2}{R_3} \, . \tag{7.178}$$

Napokon, dosadením vypočítaných hmotnostných prítokov (odtokov) $\mathbf{q_{m1i}}$ a $\mathbf{q_{m1o}}$ do diferenciálnej rovnice matematického modelu pre nádrž **č. 1** možno dospieť k tvaru

$$\frac{dm_1}{dt} = \rho S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{mi1} - q_{m1o} = \frac{\Delta p}{R_1} - \frac{\rho g h_1 - \rho g h_2}{R_3},$$

$$\rho S_1 \frac{dh_1}{dt} = \frac{\Delta p}{R_1} - \frac{\rho g h_1 - \rho g h_2}{R_3}. \tag{7.179}$$

Usporiadaním predchádzajúcej rovnice možno odvodiť prvú diferenciálnu rovnicu sústavy v tomto tvare

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} + \frac{g h_1}{R_3} - \frac{g h_2}{R_3} = \frac{\Delta p}{\rho R_1}. \tag{7.180}$$

Odvoďme ďalej diferenciálnu rovnicu pre nádrž **č. 2**. Na základe **zákona zachovania hmotnosti** pre nádrž **č. 2** platí, že

$$\frac{dm_2}{dt} = q_{m2i} + q_{m3i} - q_{m2o}, \tag{7.181}$$

kde $\mathbf{q_{m2i} = q_{m1o}}$ a $\mathbf{q_{m3i}}$ je vstupný **hmotnostný prítok** do nádrže **č. 2**, ktorý je definovaný na základe vzťahu

$$q_{m3i} = \frac{p_1 - p_5}{R_2}, \tag{7.182}$$

kde $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_5}$ sú tlaky na oboch stranách ventilu s odporom $\mathbf{R_2}$, ktoré možno vypočítať na základe nasledovných ako

$$p_1 = p_a + \Delta p,$$

$$p_5 = p_a. \tag{7.183}$$

Dosadením týchto vyčítaných tlakov $\mathbf{p_1}$ a $\mathbf{p_5}$ do rovnice pre **hmotnostný prítok** $\mathbf{q_{m3i}}$ dostávame

$$q_{m3i} = \frac{p_1 - p_5}{R_2} = \frac{p_a + \Delta p - p_a}{R_2} = \frac{\Delta p}{R_2}. \tag{7.184}$$

Podobným spôsobom možno vypočítať výstupný **hmotnostný odtok** $\mathbf{q_{m2o}}$ z nádrže **č. 2**, ktorý je definovaný na základe vzťahu

$$q_{m2o} = \frac{p_4 - p_6}{R_4}, \tag{7.185}$$

kde $\mathbf{p_4}$ a $\mathbf{p_6}$ sú tlaky na oboch stranách ventilu s odporom $\mathbf{R_4}$, ktoré možno vypočítať na základe týchto vzťahov

$$\begin{aligned} p_4 &= p_a + \rho g h_2 \,, \\ p_6 &= p_a \,. \end{aligned} \tag{7.186}$$

Dosadením týchto vypočítaných tlakov $\mathbf{p_4}$ a $\mathbf{p_6}$ do rovnice pre hmotnostný odtok $\mathbf{q_{m2o}}$ dostávame

$$q_{m2o} = \frac{p_4 - p_6}{R_4} = \frac{p_a + \rho g h_2 - p_a}{R_4} = \frac{\rho g h_2}{R_4}, \tag{7.187}$$

a potom dosadením do diferenciálnej rovnice, ktorá platí pre nádrž **č. 2**, potom platí, že

$$\begin{aligned} \frac{dm_2}{dt} = \rho S_2 \frac{dh_2}{dt} = q_{m2i} + q_{m3i} - q_{m2o} = \frac{\rho g h_1 - \rho g h_2}{R_3} + \frac{\Delta p}{R_2} - \frac{\rho g h_2}{R_4}\,, \\ \rho S_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{\rho g h_1 - \rho g h_2}{R_3} + \frac{\Delta p}{R_2} - \frac{\rho g h_2}{R_4}\,. \end{aligned} \tag{7.188}$$

Usporiadaním výrazov v predchádzajúcej rovnici možno dospieť k **druhej diferenciálnej rovnici** sústavy

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} - \frac{g h_1}{R_3} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) g h_2 = \frac{\Delta p}{\rho R_2}\,. \tag{7.189}$$

Výsledná **sústava diferenciálnych rovníc** pre daný systém je potom definovaná týmto tvarom diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} S_1 \frac{dh_1}{dt} + \frac{g h_1}{R_3} - \frac{g h_2}{R_3} = \frac{\Delta p}{\rho R_1}\,, \\ S_2 \frac{dh_2}{dt} - \frac{g h_1}{R_3} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) g h_2 = \frac{\Delta p}{\rho R_2}\,. \end{aligned} \tag{7.190}$$

Ak túto výslednú sústavu dvoch diferenciálnych rovníc zapíšeme v zmysle hydraulických kapacít $\mathbf{C_1 = S_1/g}$ a $\mathbf{C_2 = S_2/g}$, potom možno dospieť nasledovnému výslednému tvaru sústavy dvoch diferenciálnych rovníc v zmysle hydraulickej kapacity

$$C_1\frac{dh_1}{dt}+\frac{h_1}{R_3}-\frac{h_2}{R_3}=\frac{\Delta p}{\rho g R_1},$$
$$C_2\frac{dh_2}{dt}-\frac{h_1}{R_3}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)h_2=\frac{\Delta p}{\rho g R_2},\qquad (7.191)$$

ktorý napokon prepíšeme do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\Delta p}{\rho g R_1} \\ \frac{\Delta p}{\rho g R_2} \end{bmatrix}. \qquad (7.192)$$

Preveďme predchádzajúcu sústavu diferenciálnych rovníc v maticovom tvare do **Laplaceovho tvaru** za účelom nájdenia prenosových funkcií systému $\mathbf{H_1(s)/\Delta P(s)}$ a $\mathbf{H_2(s)/\Delta P(s)}$

$$\begin{bmatrix} C_1 s+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & C_2 s+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\Delta P(s)}{\rho g R_1} \\ \frac{\Delta P(s)}{\rho g R_2} \end{bmatrix}. \qquad (7.193)$$

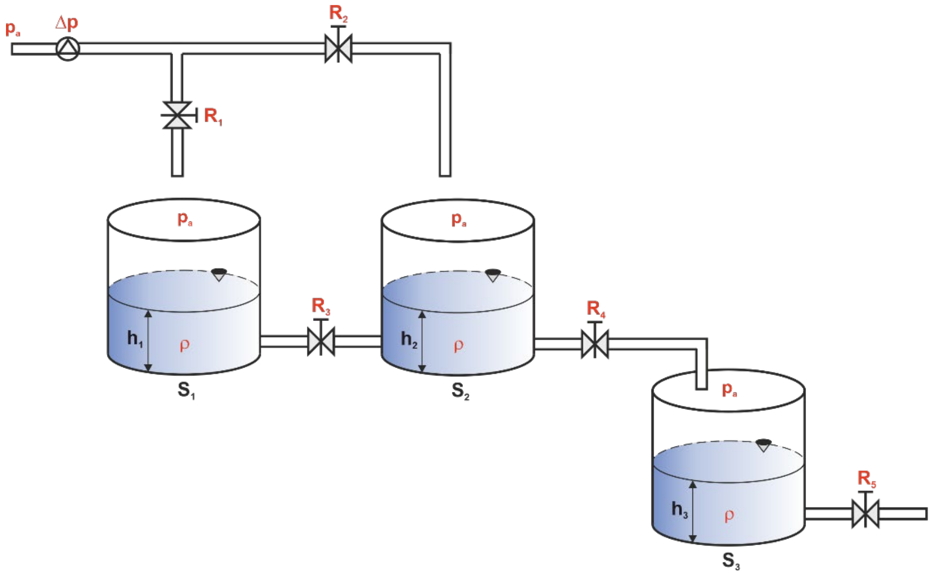
Potom výsledné tvary prenosových funkcií vypočítaných symbolickým počítaním v Matlabe $\mathbf{H_1(s)/\Delta P(s)}$ a $\mathbf{H_2(s)/\Delta P(s)}$ majú tento tvar

$$\frac{H_1(s)}{\Delta P(s)}=\frac{C_2R_2R_3R_4s+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4}{R_1R_2\rho g[C_1C_2R_3R_4s^2+(C_1R_3+C_1R_4+C_2R_4)s+1]}$$
$$\frac{H_2(s)}{\Delta P(s)}=\frac{C_1R_1R_3s+R_1R_4+R_2R_4}{R_1R_2\rho g[C_1C_2R_3R_4s^2+(C_1R_3+C_1R_4+C_2R_4)s+1]}. \qquad (7.194)$$

Úlohy na riešenie

Problém 7.1:

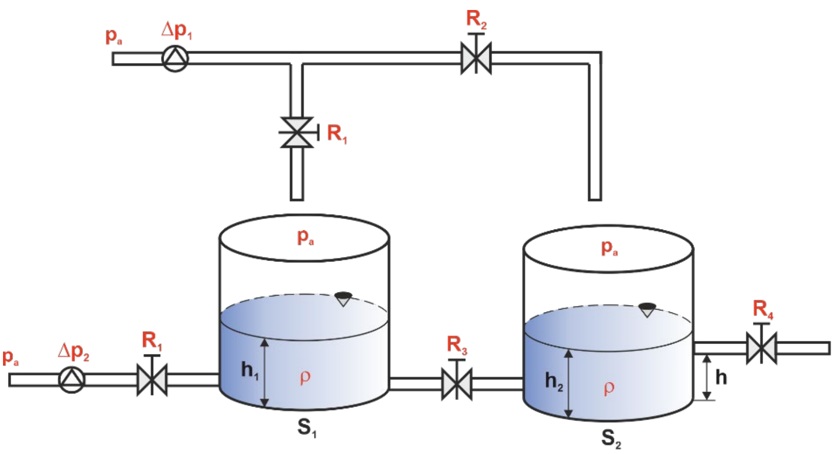
Predpokladajme hydraulický systém s tromi nádobami podľa Obr. 7.38. Kvapalina je pumpovaná prostredníctvom čerpadla s tlakom $\Delta\mathbf{p}$ cez ventil s odporom $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$ do nádoby **č. 1** a **č. 2**. Odvoďte matematický model takéhoto systému, zapíšte ho do maticového tvaru a určte prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 7.38. Hydraulický systém pozostávajúci s troch nádob s čerpadlom

Problém 7.2:

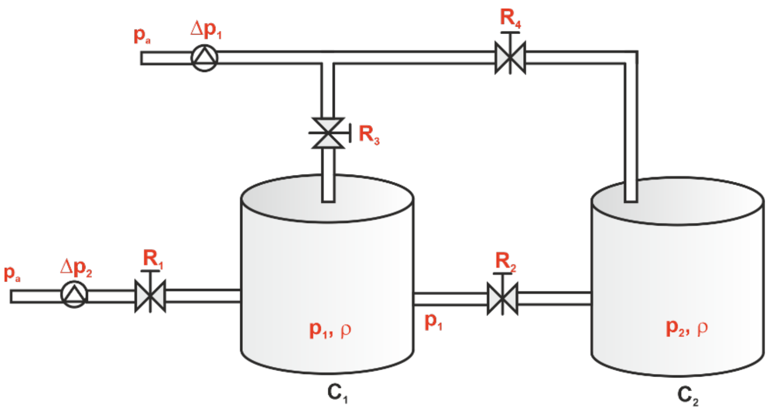
Predpokladajme hydraulický systém s dvoma nádobami podľa Obr. 7.39. Ak je kvapalina čerpaná prostredníctvom sústavy čerpadiel s tlakmi $\Delta\mathbf{p_1}$ a $\Delta\mathbf{p_2}$ cez ventily s odporom $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$ do nádoby **č. 1** a **č. 2**, odvoďte matematický model takéhoto systému. Zapíšte matematický model do maticového tvaru a určte prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 7.39. Hydraulický systém s dvomi čerpadlami

Problém 7.3:

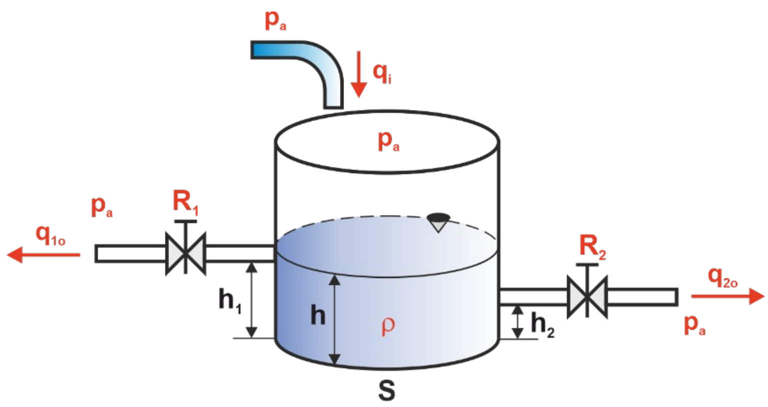
Predpokladajme pneumatický systém dvoch zásobníkov podľa Obr. 7.40. Plyn prúdi cez čerpadlo s tlakom $\Delta\mathbf{p_1}$ a ďalej cez sústavu ventilov s odporom $\mathbf{R_3}$ a $\mathbf{R_4}$ do tlakovej nádoby **č. 1** a **č. 2**. Do nádoby **č. 1** je navyše čerpaný plyn prostredníctvom čerpadla so vstupným tlakom $\Delta\mathbf{p_2}$ a to cez ventil s odporom $\mathbf{R_1}$. Odvoďte matematický model takéhoto pneumatického systému, zapíšte ho do maticového tvaru a určte prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 7.40. Pneumatický systém s čerpadlami

Problém 7.4:

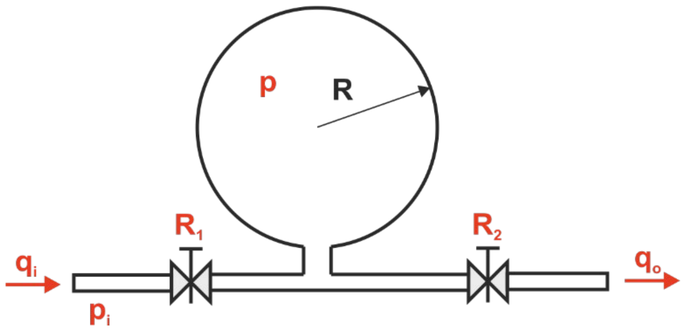
Predpokladajme hydraulický systém nádoby podľa Obr. 7.41. Ak vieme, že do nádoby prúdi voľne kvapalina s prítokom $\mathbf{q_i}$, nájdite matematický model takéhoto hydraulického systému a určte jeho prenosovú funkciu **G(s)**.



Obr. 7.41. Hydraulický systém

Problém 7.5:

Predpokladajme pneumatický systém guľovej nádoby s polomerom **R** podľa Obr. 7.42. Ak vieme, že do tlakovej nádoby prúdi plyn s prítokom $\mathbf{q_i}$ a opúšťa nádobu s odtokom $\mathbf{q_o}$, nájdite matematický model takéhoto pneumatického systému a určte prenosovú funkciu daného matematického modelu systému **G(s)**.



Obr. 7.42. Pneumatický systém guľovej nádoby

8 TEPELNÉ SYSTÉMY

Tepelné systémy sú také systémy, v ktorých dochádza k procesom, ktoré sú charakterizované prenosom tepla medzi objektom na iný objekt. Ak sa objekt s **teplotou T** nachádza v prostredí s rozdielnou teplotou okolia alebo sa nachádza v blízkosti iný objekt, ktorý má inú teplotu, potom nastáva **prenos** tepla z objektu s **vyššou teplotou na objekt s nižšou teplotou**, ktorý je daný **II. termodynamickým zákonom**. Pre **tepelný systém** existujú len dva základne stavebné prvky a to **tepelný odpor** a **tepelná kapacita**. **Tepelná indukčnosť** v prípade tepelných systémov neexistuje.

Ako príklady tepelných systémov možno uviesť napr. **vykurovacie telesá**, **klimatizácie**, **chladiace systémy** a iné. Je nutné poznamenať, že zákonitosti tepelných systémov sa riadia podobnými princípmi, ktoré platia pre **fluidné systémy** (pneumatické alebo hydraulické). Pripomeňme si, že v prípade fluidných systémov sme definovali ako stavebné prvky **fluidnú kapacitu** a **fluidný odpor**.

Ak hovoríme o tepelných systémoch, potom pre tieto systémy zadefinujeme **tepelnú kapacitu** a **tepelný odpor**. Kým princíp modelovania fluidných systémov sa riadi **zákonom zachovania hmotnosti**, tak správanie sa tepelných systémov opisuje **I.** a **II. termodynamický zákon**.

8.1 TEPELNÝ POHYB V LÁTKACH

Pohyb častíc v látke sa dá opísať tromi experimentálne overenými poznatkami a to:

- Látky ktoréhokoľvek skupenstva sa skladajú z častíc.
- Častice sa v látkach neustále neusporiadane pohybujú.
- Častice na seba navzájom pôsobia silami. Tieto sily sú pri malých vzdialenostiach **odpudivé**, pri väčších vzdialenostiach **príťažlivé** (ako popísal **Van der Waals**).

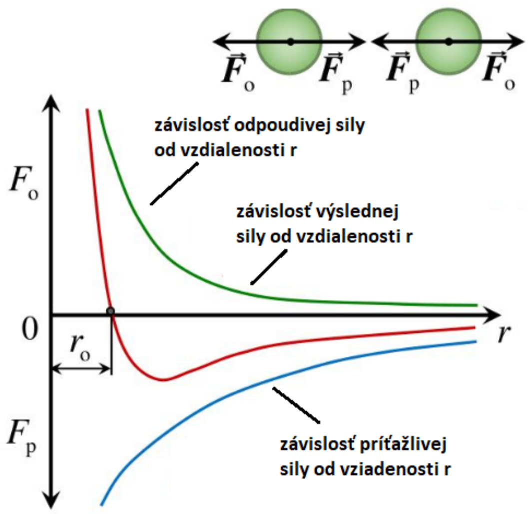
Medzi častice zaraďujeme **atómy**, **molekuly** alebo **ióny**. Rozmery častíc sú rádovo $\mathbf{10^{-10}\ m = 0.1\ mm}$. V $\mathbf{1\ m^3}$ vzduchu je napríklad za normálneho tlaku asi $\mathbf{30 \times 10^{15}}$ molekúl. Objemy týchto častíc a ich vzájomné vzdialenosti sú rôzne. V **atmosfére** pri povrchu **Zeme** je vo vzduchu **99 %** priestoru bez molekúl a len **1 %** zaujímajú molekuly plynu, z ktorých je vzduch zložený.

Častice môžu vykonávať **posuvný pohyb** (napr. v plyne), **otáčavý pohyb** (viacatómové molekuly plynu) alebo **kmitavý pohyb** (napr. v pevných látkach alebo kvapalinách). Pri telesách, ktoré sú v pokoji, neprevláda v danom okamihu žiadny definovaný smer pohybu, ktorým by sa pohybovala väčšina častíc. **Neustály** a **neusporiadaný** pohyb častíc v látkach sa nazýva **tepelným pohybom**.

Dôkazy o **tepelnom pohybe** môžeme pozorovať ako **difúziu** (difúzia je samovoľné prenikanie častíc jednej látky medzi častice druhej látky rovnakého skupenstva), **tlak plynu** alebo **Brownov pohyb** (častice vykonávajú **trhavý**, úplne **nepravidelný** pohyb, ktorý je spôsobený pôsobením ostatných častíc alebo molekúl, ktoré zo všetkých strán do seba narážajú. Smer pohybu častíc sa veľmi rýchlo mení.). **Tlak plynu** je vyvolaný nárazmi molekúl dopadajúcich na steny nádoby s **plynom**. Pri vyššej teplote **T** sa molekuly **pohybujú rýchlejšie** a preto **tlak plynu p** narastá s **teplotou T**.

Častice sú zložité objekty mikrosveta a nedá sa medzi nimi merať veľkosť síl. Preto si musíme situáciu vhodne zjednodušiť. Zameriame sa len na vzájomné pôsobenie medzi dvoma atómami, ktorých **kladne nabité jadra** sú obklopené **záporne nabitými elektrónmi**. Pri vzájomnom približovaní oboch atómov pôsobia medzi sebou elektrónové obaly a kladne nabité jadrá oboch atómov. Z teoretických úvah vyplýva, že výsledkom vzájomného pôsobenia je vznik **príťažlivej** a **odpudivej** elektrickej sily.

Pri veľkom približovaní sa začne prevládať sila brániaca ďalšiemu približovaniu (**odpudivá sila**), naopak pri vzďaľovaní atómov registrujeme vznik **príťažlivej sily**, pozri Obr. 8.1. Poznamenajme, že existuje určitý **rovnovážny stav**, keď sa tieto sily vykompenzujú.



Obr. 8.1. Príťažlivé a odpudivé sily medzi atómami

8.2 TEPLOTA A JEJ MERANIE

Teplota je fyzikálna veličina, ktorá je prístupná našim zmyslom. **Teplota látok** vytvára v ľudskom organizme subjektívne pocity, ktoré sú závislé od **tepelnej vodivosti látok** a taktiež od stavu detektora, ktorým býva najčastejšie pokožka na rukách. Molekuly látok sa nachádzajú v neustálom pohybe. Rýchlostiam molekúl zodpovedajú určité **kinetické energie**, ktorých priemerná hodnota v rovnovážnom stave je vždy veličina konštantná. Táto priemerná hodnota neusporiadaného pohybu molekúl potom určuje aj výslednú **teplotu látky**.

Pomocou **rovnovážneho stavu sústavy** (veličiny charakterizujúce sústavu sú konštantné) definujeme fyzikálnu veličinu **teplota** a jej **meranie**. Predpokladajme dve sústavy, ktoré sú v určitom rovnovážnom stave. Ak tieto dve sústavy spojíme a **izolujeme** od okolia, budú medzi sebou interagovať.

Môžu nastať dva prípady. Buď sa ich **rovnovážny stav** zmení, potom im priradíme rovnakú teplotu **T** alebo sa pôvodné rovnovážne stavy zmenia, teda mali na začiatku rôznu teplotu **T**. Obe sústavy však po určitom čase samovoľne prejdú do nového spoločného **rovnovážneho stavu**, ktorý je charakterizovaný rovnakou **teplotou T**. Pod **definíciou teploty T** teda rozumieme **nasledujúce tvrdenie**: Látkam, ktoré sú pri vzájomnom styku v rovnovážnom stave, priraďujeme rovnakú **teplotu**

T. **Teplota T** sa udáva pomocou **teplotnej stupnice**. Aby teplotná stupnica bola jednoznačne definovaná, je potrebné určiť dva údaje – **základný bod stupnice** a **jednotku teplotného rozdielu**. Vo fyzike sa používajú viaceré teplotné stupnice. Prvá je absolútna **Kelvinova** stupnica, druhá je **Celziova** stupnica a tretia je **Fahrenheitova** stupnica.

Jednotkou teplotného rozdielu v absolútnej teplotnej stupnici je teplotný stupeň nazývaný **kelvin (K)**. Jeden **kelvin** je definovaný ako **273.16** diel teplotného rozdielu medzi **absolútnou nulou** a teplotou **trojného bodu vody**. Základným bodom tejto stupnice je **trojný bod** (rovnovážny stav sústavy **ľad + voda + nasýtená para**, **0.01 °C**), ktorému zodpovedá teplota **273.16 K**.

Absolútna teplota sa v literatúre zvykne označovať ako **T**. Pri teplote **0 K** nadobúda **kinetická energia častíc** sústavy najnižšiu možnú hodnotu, nie je však nulová. V blízkosti teploty **0 K** sa značne menia vlastnosti látok, napr. **elektrická vodivosť**. Najnižšie teploty, ktoré sa podarilo dosiahnuť sú menšie ako **1 μK**.

V dennej praxi používame na meranie teploty **Celziovu teplotnú stupnicu**, ktorá ma dve základné teploty. Jej prvým základným bodom je **bod topenia ľadu** pri normálnom tlaku **1.013 x 10^5 Pa**, ktorému dohodou priraďujeme teplotu **0 °C = 273.15 K**. Podobne rovnovážnemu stavu vody a pary za normálneho tlaku priraďujeme druhú teplotu **100 °C**. Medzi týmito teplotami je stupnica rozdelená na **100** rovnakých dielikov. Jednotkou teplotného rozdielu je teplotný stupeň nazývaný **celzius [°C]** a je rovnako veľký ako teplotný rozdiel zodpovedajúci jednému **kelvinu**. V súčasnej fyzike sa **Celziova teplota T** v **°C** definuje pomocou termodynamickej teploty **T** definičným vzťahom

$$\mathrm{T(°C) = T(K) - 273.15\,.} \qquad (8.1)$$

8.3 TEPLOTNÁ ROZŤAŽNOSŤ LÁTOK

Teplotná rozťažnosť sa prejavuje pri látkových telesách všetkých troch skupenstiev a je spôsobená tým, že parametre tepelného pohybu častíc látky závisia od **teploty T**.

Častice **tuhej látky** kmitajú okolo rovnovážnych polôh v **kryštalickej mriežke**. Pri zväčšení teploty látky sa zväčšuje energia kmitavého pohybu a súčasne narastá aj amplitúda kmitavého pohybu. Tým narastá i stredná vzdialenosť častíc. Zmena strednej vzdialenosti častíc so zmenou teploty je príčinou tzv. **teplotnej rozťažnosti**. Pri zmene teploty pevného telesa sa menia jeho rozmery. Tento jav nazývame **teplotná dĺžková rozťažnosť**.

Predpokladajme tyč, ktorá ma dĺžku $\mathbf{l_0}$ pri teplote $\mathbf{T_0}$. Ak tyč zohrejeme o teplotu **ΔT**, jej dĺžka sa zmení o **Δl**, čo sa dá vyjadriť vzťahom

$$\Delta \mathrm{l} = \alpha \cdot \mathrm{l}_0 \cdot \Delta \mathrm{T}\,, \qquad (8.2)$$

kde **α** je konštantou úmernosti a nazýva sa **teplotným súčiniteľom dĺžkovej rozťažnosti [$\mathbf{K^{-1}}$]**.

Hodnota **teplotného súčiniteľa dĺžkovej rozťažnosti** je rádovo $\mathbf{10^{-5}}$. Ak označíme prírastok dĺžky ako $\mathbf{\Delta l}$, potom

$$\Delta l = l - l_0 \,, \tag{8.3}$$

kde **l** je dĺžka tyče pri teplote **T**. Potom, môžeme vyjadriť dĺžku tyče **l** pri tejto teplote v tvare

$$l = l_0[1 + \alpha(T - T_0)] \,. \tag{8.4}$$

Tento vzťah platí pre také teplotné rozdiely $\mathbf{\Delta T}$, pri ktorých možno predpokladať, že v intervale teplôt $\mathbf{\Delta T}$ je zmena dĺžky telesa **lineárna**. Ukazuje sa, že pre väčšie teplotné rozdiely dĺžkovú rozťažnosť lepšie vyjadruje **kvadratická závislosť**.

Ak sa zvýši **teplota telesa** z tuhej látky pri stálom tlaku **p**, zväčší sa jeho objem **V**. Pokusy ukazujú, že vo vhodnom teplotnom intervale je zväčšenie objemu **V** dané vzťahom

$$\Delta V = V - V_0 \,, \tag{8.5}$$

priamoúmerné zväčšeniu teploty $\mathbf{\Delta T = T - T_0}$ a objemu telesa $\mathbf{V_0}$ pri teplote $\mathbf{T_0}$, platí teda, že

$$\Delta V = \beta \cdot V \cdot \Delta T \,, \tag{8.6}$$

a po úprave dostávame

$$V = V_0[1 + \beta(T - T_0)] \,, \tag{8.7}$$

kde koeficient $\boldsymbol{\beta}$ sa nazýva **teplotným súčiniteľom objemovej rozťažnosti**. V prípade **izotropného telesa** sa dá tento koeficient zapísať ako: $\boldsymbol{\beta = 3 \cdot \alpha}$.

Keďže so zmenou teploty dochádza k zmene objemu telies, musí sa meniť aj ich hustota $\boldsymbol{\rho}$, nakoľko hmotnosť nepohybujúcich sa telies **m** je konštantná. Ak teda,

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0} \tag{8.8}$$

je hustota telesa pri teplote $\mathbf{T_0}$ a $\boldsymbol{\beta}$ je jeho teplotný **súčiniteľ objemovej rozťažnosti**, potom jednoduchými úpravami a zanedbaním členov vyšších rádov zmeny teploty $\mathbf{\Delta T}$, môžeme vzťah pre hustotu telesa $\boldsymbol{\rho}$ pri teplote **T** zapísať ako

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T) \,. \tag{8.9}$$

Väčšina látok má teplotný koeficient objemovej rozťažnosti kladný, takže s narastajúcou teplotou ich hustota klesá. Ale sú aj výnimky napr. **voda** – anomália vody.

8.4 TEPLO A TEPELNÁ KAPACITA

Teplo je forma prenosu energie. Podľa **molekulárno-kinematickej teórie** zodpovedá teplo celkovej kinetickej energii neusporiadaného pohybu **molekúl**. Podľa teórie dochádza k premene mechanickej práce na **teplo** tak, že sa mení **energia** usporiadaného mechanického pohybu (napr. pohyb pri trení dvoch telies) na energiu neusporiadaného pohybu atómov alebo molekúl telies. Taktiež pri styku dvoch telies s rozdielnou teplotou sa **kinetická energia** molekúl teplejšieho telesa odovzdáva molekulám s nižšou kinetickou energiou **chladnejšieho telesa**, čo vnímame ako **prenos tepla**. Pri **prenose tepla** sa určuje množstvo tepelnej energie, ktoré je dodané alebo odobraté určitému telesu. Toto množstvo **tepelnej energie** sa zvykne označovať ako **Q**.

Uveďme si niekoľko príkladov. Predpokladajme, že máme nádobu, ktorú plníme teplou vodou. Po čase zistíme, že nádoba aj naliata voda majú rovnakú teplotu a budú v **rovnovážnom stave**. Vložme do tejto sústavy nejaké teleso. Znova po určitom čase sa ich teploty vyrovnajú. Ak teraz nádobu s vodou a telesom postavíme na elektrickú platničku, bude sa sústava zohrievať ako celok.

Vo všetkých prípadoch telesá **odovzdali/prijali** určité množstvo **tepelnej energie**. Z experimentálnych meraní vyplýva, že toto množstvo energie závisí od typu telesa, od jeho hmotnosti a od rozdielu teplôt. Na základe experimentálnych meraní môžeme množstvo tepla **Q**, **odovzdaného** alebo **prijatého**, pri zmene teploty o hodnotu **ΔT** vyjadriť v tvare

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T \,, \tag{8.10}$$

kde **c** je **merná tepelná kapacita látky**, **m** je **hmotnosť telesa** a **ΔT** je **teplotný rozdiel**. Jednotkou tepla je jeden **joule [J]**. Staršou technickou jednotkou pre množstvo tepla je **kilokalória [kcal]**, ktorá predstavuje množstvo tepla potrebného na ohriatie **1 kg** čistej vody z **14.5 °C** na **15.5 °C**. Jedna **kcal** predstavuje asi **4,18 kJ**.

Tabuľka 8.1. Merná tepelná kapacita vybraných látok

Látka	**c [$J.kg^{-1}.K^{-1}$]**	**Látka**	**c [$J.kg^{-1}.K^{-1}$]**
voda	4186	ľad	2100
glycelor	2400	betón	880
petrolej	2100	oceľ	460
etán	2400	meď	380
ortuť	140	olovo	130

Množstvo **tepla** potrebného na zvýšenie **teploty látky** teda závisí od hmotnosti tejto látky, **chemického zloženia**, **vnútornej štruktúry** (stavby). Ako to v roku 1760 zistil **Joseph Black** pri pokusoch s vodou a ortuťou. Množstvo tepla, ktoré musíme telesu **dodať (odobrať)**, aby sme **zvýšili (znížili)** jeho teplotu o jeden **kelvin** (jeden stupeň **celzia**), nazývame **tepelnou kapacitou** telesa **C**, ktorá je definovaná vzťahom

$$C = \frac{dQ}{dT} \; . \tag{8.11}$$

Jednotkou tepelnej kapacity je **[J.K^{-1}]**. V bežnej praxi sa častejšie používa **merná tepelná kapacita c** definovaná ako

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \; , \tag{8.12}$$

kde **m** je hmotnosť telesa. **Merná tepelná kapacita c** udáva množstvo tepla **Q**, ktoré je potrebné na ohriatie jedného kilogramu látky o jeden **teplotný stupeň**. Jednotkou mernej tepelnej kapacity je **[J.kg^{-1}.K^{-1}]**.

Ako už bolo povedané, **merná tepelná kapacita c** je veličina charakteristická pre danú látku. **Merná tepelná kapacita c** pevných a kvapalných látok je funkciou teploty **T**. Pri plynoch je situácia zložitejšia. Merná tepelná kapacita závisí nielen od teploty **T**, ale taktiež od tlaku **p** a hlavne podmienok, počas ktorých plyn **prijíma /odovzdáva** teplo **Q**. Podľa tohto rozlišujeme mernú tepelnú kapacitu **c za stáleho tlaku c_p** a mernú tepelnú kapacitu **za stáleho objemu c_v**.

Vzťah (8.10) je správny iba v tom prípade, ak **c** ostáva konštantné v teplotnom intervale Δ**T**. Z presných meraní sa však ukázalo, že **merná tepelná kapacita** všetkých látok mierne závisí od teploty. Ak je nutné pri výpočtoch uvažovať teplotnú závislosť mernej tepelnej kapacity látok, potom vzťah (8.10) prejde na tvar

$$\Delta Q = m \int c(T)dT \; . \tag{8.13}$$

8.5 KALORIMETRICKÁ ROVNICA

Kalorimetria je veda, ktorá sa zaoberá meraním tepla pri chemických reakciách alebo fyzikálnych zmenách látok. Tieto merania sa uskutočňujú v zariadení, ktoré sa nazýva **kalorimeter**. **Kalorimeter** je vlastne tepelne izolovaná nádoba, v ktorej možno uskutočňovať tepelnú výmenu medzi telesami pri súčasnom meraní ich teplôt. **Tepelné vlastnosti kalorimetra** sa charakterizujú tepelnou kapacitou kalorimetra **C_k**.

Majme dve telesá s hmotnosťami $\mathbf{m_1}$ a $\mathbf{m_2}$ s mernými tepelnými kapacitami $\mathbf{c_1}$ a $\mathbf{c_2}$ a teplotami $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$, pričom pre teploty platí, že $\mathbf{T_1} > \mathbf{T_2}$. Ak tieto telesá privedieme do vzájomného kontaktu a predpokladáme, že daná sústava je **tepelne izolovaná** od okolia, nastane tepelná výmena medzi danými telesami.

Teplo bude prechádzať z teplejšieho telesa na chladnejšie teleso, pričom po určitej dobe sa ustáli ich teplota na rovnakej hodnote teploty **T**, pre ktorú platí $\mathbf{T_1} > \mathbf{T} > \mathbf{T_2}$. Ak predpokladáme, že **merné tepelné kapacity** telies sú v uvažovanom teplotnom rozsahu konštantné, môžeme množstvo tepla, ktoré odovzdá **teplejšie** teleso **chladnejšiemu** telesu vyjadriť v tvare

$$\Delta Q_1 = c_1 m_1 (T_1 - T)\,. \tag{8.14}$$

Na druhej strane, **chladnejšie** teleso od **teplejšieho** prijme teplo **Q**, ktoré môžeme vyjadriť v tvare

$$\Delta Q_2 = c_2 m_2 (T - T_2)\,. \tag{8.15}$$

Keďže telesá sú tepelne izolované od okolia, množstvo odovzdaného tepla telesom s hmotnosťou $\mathbf{m_1}$ sa rovná množstvu prijatého tepla telesom s hmotnosťou $\mathbf{m_2}$, tzn. že

$$\begin{gathered} \Delta Q_1 = \Delta Q_2 \\ c_1 m_1 (T_1 - T) = c_2 m_2 (T - T_2)\,. \end{gathered} \tag{8.16}$$

Rovnica sa nazýva **kalorimetrická rovnica**. Ak dochádza k skupenským zmenám látok, je potrebné ešte zahrnúť do kalorimetrickej rovnice i toto množstvo tepla.

Ak budeme predpokladať, že aj nádoba, kde prebieha tepelná výmena, prijíma nejaké čiastkové teplo, treba ho zahrnúť takisto do kalorimetrickej rovnice. Výsledná rovnica bude mať potom tvar

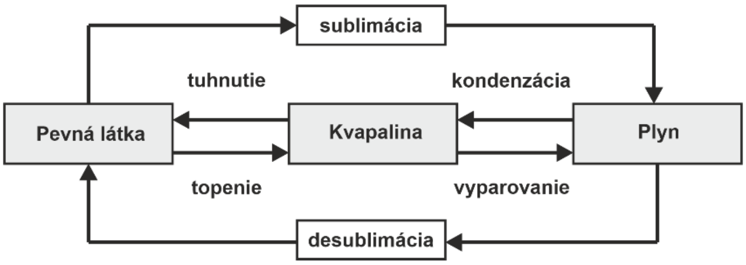
$$c_1 m_1 (T_1 - T) = c_2 m_2 (T - T_2) + C\,(T - T_2)\,, \tag{8.17}$$

kde veličina $\mathbf{C\,(T - T_2)}$ predstavuje **teplo Q**, ktoré prijal kalorimeter s príslušenstvom.

8.6 ZMENY SKUPENSTVA LÁTKY

Pevná látka, **kvapalina** a **plyn** sú termodynamické sústavy, ktoré sa skladajú z veľkého počtu častíc. Ak má sústava v rovnovážnom stave vo všetkých častiach rovnaké fyzikálne a chemické vlastnosti (napr. rovnakú hustotu, štruktúru, chemické zloženie), tento stav sa nazýva **fázou**. Pod **fázami** rozumieme jednotlivé skupenstvá (pevná ortuť, kvapalná ortuť, ortuťové pary).

Jednotlivé fázy sú spravidla od seba oddelené ostrým rozhraním, no sú stavy i s väčším počtom fáz. Sústavami s väčším počtom fáz sú napr. **voda + ľad + vodná para**, **pevný jód + jódové pary**, **kvapalná ortuť + ortuťové pary** a pod.



Obr. 8.2. Typy premien fáz

Prechod látky z jednej fázy do druhej nazývame **fázovou premenou**. **Fázová zmena** je napr. **topenie kovu**, **vyparovania kvapaliny**, ale taktiež premena grafitu na diamant a pod. Ďalej sa budeme zaoberať len fázovými premenami, ktoré sa nazývajú **zmeny skupenstva**.

Tieto zmeny patria medzi **fázové zmeny prvého druhu**, ktoré sú charakterizované tým, že pri nich dochádza k **pohlcovaniu** alebo **uvoľňovaniu tepla** a tým, že sa objem pri zmene jednej fázy na druhú mení skokom. Medzi zmeny skupenstva patrí **topenie**, **tuhnutie**, **vyparovanie**, **kondenzácia**, **sublimácia** a **desublimácia**. Všetky tieto zmeny sú zobrazené v diagrame na Obr. 8.2.

Ak zohrievame teleso z kryštalickej látky, zvyšuje sa jeho teplota **T** a po dosiahnutí **teploty topenia** $\mathbf{T_t}$ (teplota topenia závisí od vonkajšieho tlaku) sa mení na **kvapalinu**. Dodané teplo potrebné pre zmenu pevného telesa o hmotnosti **m** zahriateho na teplotu topenia $\mathbf{T_t}$ na kvapalinu tej istej teploty sa volá **skupenské teplo topenia** $\mathbf{L_t}$. Pretože skupenské teplo topenia $\mathbf{L_t}$ závisí od hmotnosti telesa **m**, zavádzame veličinu **merné skupenské teplo topenia** $\mathbf{l_t}$, ktoré je definované vzťahom

$$\mathrm{l_t} = \frac{\mathrm{L_t}}{\mathrm{m}}. \tag{8.18}$$

Jednotkou **merného skupenského tepla topenia** $\mathbf{l_t}$ je **[J.kg^{-1}]**. Merné skupenské teplo topenia je tepelnou konštantou látok a má pre rôzne látky rôznu hodnotu, napr. pre ľad je $\mathbf{l_t = 334\ kJ.kg^{-1}}$.

Pri každej teplote existujú v kvapalinách aj tuhých látkach molekuly s takou kinetickou energiou, že sú schopné prekonať príťažlivú silu od susedných častíc a uvoľniť sa z látky. Pri kvapalinách tomuto javu hovoríme **vyparovanie** a pri tuhých látkach **sublimácia**. Vyparovanie je teda dej, pri ktorom sa mení kvapalina na **paru**. Tento dej prebieha pri každej teplote. S narastajúcou teplotou pri zachovaní ostatných parametrov rýchlosť vyparovania vzrastá, lebo v látke je stále viac molekúl s dostatočnou energiou na opustenie látky.

Pri vyparovaní sa z kvapaliny uvoľňujú molekuly s vyššou **kinetickou energiou**. To spôsobuje, že **celková kinetická energia** pohybu molekúl kvapaliny klesá, čo sa makroskopicky prejavuje poklesom teploty kvapaliny. Pri **vyparovaní** sa teda kvapalina **ochladzuje**. Ak ju chceme udržovať stále na rovnakej teplote, musíme jej dodávať teplo z vonkajšieho prostredia. Toto teplo sa pri vyparovaní kvapaliny nazýva **skupenským teplom vyparovania** a pri vare kvapaliny **skupenské teplo varu**. Toto teplo možno určiť pomocou vzťahu v tvare

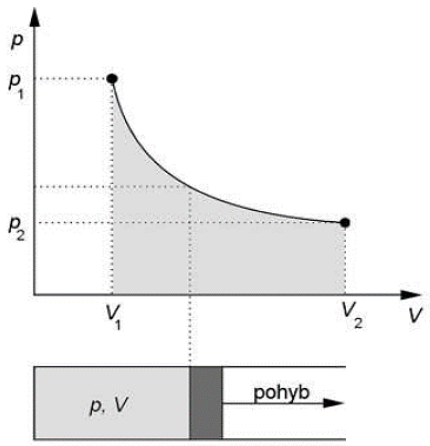
$$L = m \cdot l_v\,, \tag{8.19}$$

kde **m** predstavuje hmotnosť vyparenej kvapaliny a $\mathbf{l_v}$ predstavuje **merné skupenské teplo vyparovania** alebo **varu** kvapaliny. Merné skupenské teplo vyparovania (varu) predstavuje množstvo tepla, ktoré musíme dodať **1 kg** kvapaliny s teplotou **T**, aby sa premenila na paru s tou istou teplotou. Merné skupenské teplo vyparovania závisí od druhu látky a teploty (s klesajúcou teplotou klesá). Ak sa para premieňa na kvapalinu, hovoríme o **kondenzácii**.

8.7 TERMODYNAMICKÉ VELIČINY A ZÁKONY

8.7.1 Práca plynu

Plyn s dostatočne veľkým tlakom uzavretý vo valci s pohyblivým piestom môže rozpínaním konať prácu **W** podľa Obr. 8.3.



Obr. 8.3. Zmena tlaku pri zmene objemu. Práca plynu pri posúvaní piesta.

Pri **stlačení (zmenšení objemu)** plyn prijíma prácu **W**. Ak je v nádobe tlak plynu **p**, potom na piest pôsobí tlaková sila

$$F = p \cdot S\,, \tag{8.20}$$

kde **S** je **plocha piesta** a **p** je tlak. Pri malom posunutí piesta $\Delta\mathbf{s}$ sa tlak plynu **p** zreteľne nezmení a vykonaná práca **W** sa dá zapísať ako

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = p \cdot S \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V\,, \tag{8.21}$$

pričom $\mathbf{\Delta V = S \cdot \Delta s}$ je zmena objemu.

Pokiaľ zabezpečíme, že sa počas deja nebude meniť tlak plynu (**izobarický dej**), tak potom predchádzajúci vzťah predstavuje prácu, ktorú vykoná plyn pri zväčšení objemu z $\mathbf{V_1}$ na $\mathbf{V_2}$, teda $\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}$. Ak sa počas daného deja zmenšuje objem, práca **W** je potom záporná, čo znamená, že plyn prijíma prácu.

Ak sa počas deja mení tlak plynu (**izotermický dej**) potom elementárna práca **dW**, ktorú musíme vykonať je daná vzťahom

$$\mathrm{dW} = \mathrm{p(V)dV}\,. \tag{8.22}$$

Výsledná práca **W**, ktorú vykoná plyn pri zväčšení objemu sa vypočíta pomocou spojitého integrálu v hraniciach $\mathbf{V_1}$ a $\mathbf{V_2}$

$$\mathrm{W} = \int_{\mathrm{V_1}}^{\mathrm{V_2}} \mathrm{p\,dV}\,. \tag{8.23}$$

8.7.2 Vnútorná energia

Pri štúdiu mechaniky definujeme **kinetickú** a **potenciálnu** energiu telesa. Každé látkové teleso má však tiež energiu **E**, ktorá súvisí s jeho vnútornou časticovou štruktúrou. Túto energiu nazývame **vnútornou energiou U** telesa (v termodynamike je teleso považované za termodynamickú sústavu, preto je to tiež vnútorná energia termodynamickej sústavy).

Už vieme, že častice látky (atómy, molekuly, ióny) konajú neustály a neusporiadaný pohyb (posuvný, otáčavý, kmitavý). Teda **celková kinetická energia** všetkých neusporiadane sa pohybujúcich častíc látky je jednou zložkou **vnútornej energie U** sústavy (telesa). Ďalšia zložka **vnútornej energie U** sústavy je **celková potenciálna energia** $\mathbf{E_k}$ všetkých častíc, ktorá závisí od vzájomných polôh častíc a pôsobiacich síl medzi nimi.

Tieto dve uvedené zložky **vnútornej energie** sú rozhodujúce pri vyšetrovaní dejov, ktoré budeme ďalej študovať. Pre úplnosť je treba ešte uviesť ďalšie zložky **vnútornej energie** telies, aj keď ich nebudeme v ďalšom výklade brať do úvahy, pretože sa tieto energie pri študovaných dejoch nebudú meniť. Medzi tieto zložky radíme napr. **energiu chemickú**, ktorá je príčinou vzájomných chemických väzieb, ďalej **elektrickú energiu**, ktorú majú elektricky nabité častice, ak sa sústava nachádza v elektrickom poli a ďalšie iné.

Vnútornú energiu U sústavy telesa budeme definovať ako súčet **celkovej kinetickej energie** $\mathbf{E_k}$ neusporiadane sa pohybujúcich častíc sústavy a **celkovej potenciálnej energie** $\mathbf{E_p}$ vzájomnej polohy jeho častíc. **Vnútorná energia U** patrí medzi stavové veličiny a jej jednotkou je **1 [J]**. Vnútorná energia **U** nie je všeobecne konštantnou veličinou.

Deje, pri ktorých sa mení **vnútorná energia** sústavy **U**, možno rozdeliť do dvoch skupín:

- deje, pri ktorých sa mení vnútorná energia konaním práce **W**,
- a deje, pri ktorých nastáva zmena vnútornej energie tepelnou výmenou **Q**.

Pri konaní práce **W** sa mení **kinetická** alebo **potenciálna energia** telesa na jeho **vnútornú energiu U** alebo naopak, napr. pri trení dvoch telies, pri stlačení plynu v tepelne izolovanej nádobe, pri ohýbaní drôtu, pri nepružnom náraze telies na podložku a pod. Ak dej prebieha v **izolovanej sústave**, zostáva súčet **kinetickej** a **potenciálnej** energie, t. j. **vnútornej energie** konštantný. **Celkovú kinetickú energiu plynu** možno vypočítať vzťahom

$$\varepsilon = \sum_{i}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} N \cdot m \cdot v_k^2 = \frac{3}{2} N \cdot k \cdot T\,, \qquad (8.24)$$

kde **m** je hmotnosť a $\mathbf{v_i}$ je rýchlosť **i-tej** častice, $\mathbf{v_k}$ je **stredná kvadratická rýchlosť molekúl**, **k** je **Stefan-Boltzmannova** konštanta $\mathbf{k = 1.38 \times 10^{-23}\ J.K^{-1}.mol^{-1}}$ a **N** je celkový počet častíc plynu.

Základným predpokladom kinetickej teórie plynov je dokonalá neusporiadanosť molekulového pohybu (v našom prípade posuvného resp. rotačného pohybu). Ani jeden typ z daných pohybov nemá prednosť pred druhým. Ak teda zoberieme časticu ako **jednoatómovú molekulu** s 3 stupňami voľnosti, potom jej **priemerná kinetická energia** je

$$\frac{\varepsilon}{N} = \frac{3}{2} k \cdot T\,, \qquad (8.25)$$

toto predstavuje pomer $\boldsymbol{\varepsilon/N}$.

Tzn. na každý stupeň voľnosti pripadá energia: $\mathbf{\frac{1}{2}kT}$. Pri tepelných výpočtoch v prípade plynov používame tepelnú kapacitu vzhľadom na **1 mol** látky, ktorú nazývame **molárnou tepelnou kapacitou pri konštantnom objeme** $\mathbf{C_v}$ $\mathbf{[J.mol^{-1}.K^{-1}]}$. Pre, ktorú platí vzťah

$$C_v = \frac{i}{2} R\,, \qquad (8.26)$$

kde **i = 3, 5, 6** je počet stupňov voľnosti molekuly plynu.

Celková kinetická energia častíc systému závisí len od teploty **T**. Potom, so zmenou teploty sa mení aj **vnútorná energia** systému **U** a musí teda platiť, že

$$\Delta U = \Delta \varepsilon\,. \qquad (8.27)$$

Ak spojíme rovnicu pre **celkovú kinetickú energiu plynu** (8.38) s vyjadrením molárnej tepelnej kapacity $\mathbf{C_v}$ pre **tri stupne voľnosti** podľa (8.26), potom zmenu vnútornej energie $\mathbf{\Delta U}$ pre **n** molov, resp. **m** kilogramov plynu možno vypočítať ako

$$\Delta U = nC_v\Delta T = \frac{m}{M}C_v\Delta T\,, \qquad (8.28)$$

kde **n** je **látkové množstvo** plynu, $\mathbf{C_v}$ je **molárna tepelná kapacita** pri konštantnom objeme a **M** je **molárna hmotnosť**.

V technickej praxi sú dôležité také deje, pri ktorých sústava **prijíma** alebo **odovzdáva** energiu oboma smermi tzn. **tepelnou výmenou** i **konaním práce**. Napr., plyn vo valci stláčame piestom a súčasne zahrievame stykom s teplejším telesom. Vzťah medzi veličinami **W**, $\mathbf{\Delta U}$ a **Q** vyjadruje **I. termodynamický zákon**.

8.8 I. A II. TERMODYNAMICKÝ ZÁKON

Ako už vieme, **vnútorná energia U** sa môže meniť buď konaním práce **W** alebo dodaním tepla **Q**. Najčastejšie sa však mení oboma spôsobmi naraz. Túto skutočnosť opisuje **I. termodynamický zákon**, ktorý hovorí: **Vnútorná energia** systému **U** narastie, ak mu okolie dodá **teplo Q** a klesne, v prípade, že systém vykoná nejakú **prácu W**. Zákon môžeme matematicky definovať vzťahom

$$\Delta U = Q - W\,, \qquad (8.29)$$

kde $\mathbf{\Delta U}$ je zmena **vnútornej energie** sústavy, **Q** je **dodané** a **odobraté teplo** sústavy a **W** je práca **dodaná** alebo **vykonaná** sústavou.

Ak sústave dodáme **teplo Q** a vykonáme na nej nejakú **prácu W** (zmenšíme jej objem), jej **vnútorná energia U** narastie. Ak sústava odovzdáva **teplo Q** alebo vykoná **prácu W** (expanduje), jej **vnútorná energia U** klesá. Ak sústava koná prácu, potom prácu považujeme za **kladnú** a naopak, ak na sústave koná prácu vonkajšia sila **F**, potom bude práca uvažovaná so záporným znamienkom.

V predchádzajúcej rovnici je veličina **Q kladná** v prípade, že teplo do systému dodávame, v opačnom prípade teplo **Q** je **záporné**. Práca **W** je **kladná** veličina, ak prácu koná sústava a **záporná**, ak **práca W** je do sústavy dodaná. Na základe týchto znamienok potom musí platiť, že

$$\Delta U = (Q_{\text{dodané}} - Q_{\text{odvedené}}) - (W_{\text{vykonaná}} - W_{\text{dodaná}})\,. \qquad (8.30)$$

I. termodynamický zákon možno formulovať aj iným spôsobom: nie možno zostrojiť také zariadenie, tzv. **perpetuum mobile I. druhu**, ktoré by vykonávalo prácu bez zmeny svojej energie alebo energie okolia.

Doslova názov **perpetuum mobile** znamená niečo, čo sa neustále (samo od seba) pohybuje, pričom v prípade termodynamiky, ešte navyše koná užitočnú prácu.

Podobné znenie má aj **II. termodynamický zákon**, ktorý hovorí: Nie možno zostrojiť periodicky pracujúci **tepelný stroj**, ktorý by len prijímal teplo od určitého **telesa** (**ohrievača**) a vykonával rovnako veľkú **prácu**. Teda nemožno zostrojiť **perpetuum mobile II. druhu** (termodynamické; I. druhu je mechanické).

Pre **tepelné systémy** s čisto tepelným prenosom bez akéhokoľvek konania práce, keď systém nekoná mechanickú prácu t. j. $\mathbf{W_{dodan\acute{a}} = W_{vykon\acute{a}} = 0}$, možno predchádzajúcu rovnicu prepísať do tohto tvaru

$$\Delta U = Q = (Q_{dodané} - Q_{odvedné}) \tag{8.31}$$

alebo v diferenciálnom tvare ako

$$\frac{dU}{dt} = q_{ti} - q_{to}\,, \tag{8.32}$$

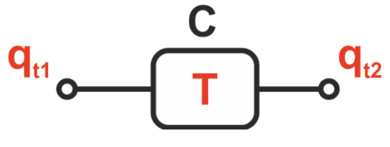
kde $\mathbf{q_t = \frac{dQ}{dt}}$ je **tepelný tok** s fyzikálnou jednotkou **[J.s^{-1}]** alebo **1 Watt** [**W**]. Potom, $\mathbf{q_{ti}}$ je tepelný tok privedený do systému a $\mathbf{q_{to}}$ je tepelný tok systémom odovzdaný.

8.9 TEPELNÁ KAPACITA

Pre objekt základného prvku **tepelného systému** – **tepelnej kapacity C** zobrazenej na nasledujúcom Obr. 8.4 so schematickou značkou tepelnej kapacity, je **tepelná kapacita C** definovaná ako pomer zmeny tepelného toku $\mathbf{q_t}$ v závislosti od zmeny teploty **T**

$$C = \frac{dq_t}{dT}\,, \tag{8.33}$$

kde **C** má jednotku **[J.K^{-1}], [J.°C^{-1}].**



Obr. 8.4. Schematická značka tepelnej kapacity

Už vieme, že **tepelná kapacita** je miera tepla potrebného na zvýšenie teploty objektu za určitý časový interval. V prípade, že uvažujeme **izochorický proces**, keď systém nekoná žiadnu prácu **W** a všetko **teplo Q** sa prejaví iba v zmene **vnútornej energie U** potom platí, že

$$Q = \Delta U = mc_V\Delta T\,, \tag{8.34}$$

kde **m** je hmotnosť látky, $\mathbf{c_v}$ je **merná tepelná kapacita** za konštantného objemu **[J.K^{-1}.kg^{-1}, J.kg^{-1}.°C^{-1}]** a $\Delta\mathbf{T} = (\mathbf{T} - \mathbf{T_0})$ je teplotný rozdiel. Na druhej strane, ak uvažujeme, že proces je **izobarický** s konštantným tlakom **p**, potom

$$Q = \Delta H = mc_p\Delta T\,, \tag{8.35}$$

kde veličina **H** je nazývaná **entalpiou** a $\mathbf{c_p}$ je **merná tepelná kapacita** za konštantného tlaku **p**. Z predchádzajúcich rovníc možno odvodiť vzťah pre tepelnú kapacitu **C** v tvare

$$C = mc_v \tag{8.36}$$

alebo

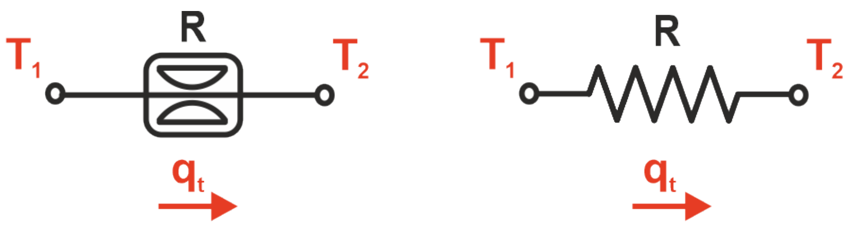
$$C = mc_p\,. \tag{8.37}$$

Pri **nestlačiteľných tekutinách** a **tuhých telesá**, keď nedochádza k zmene objemu nemá zmysel uvažovať **tepelnú kapacitu** pre konštantnom **objeme** $\mathbf{c_v}$ resp. **tlaku** $\mathbf{c_p}$. Nakoľko platí, že $\mathbf{c} = \mathbf{c_v} = \mathbf{c_p}$, tzn. že pre známu hustotu $\boldsymbol{\rho}$ a objem **V**, potom pre kapacitu **C** bude platiť tento vzťah

$$C = mc = \rho Vc\,. \tag{8.38}$$

8.10 TEPELNÝ ODPOR

Aj v prípade tepelného systému možno podobne ako v prípade iných **fyzikálnych systémov**, definovať **tepelný odpor**. Pre objekt tepelného odporu s konštantou **R** používame schematickú značku zobrazenú na nasledujúcom Obr. 8.5.



Obr. 8.5. Schematická značka tepelného odporu

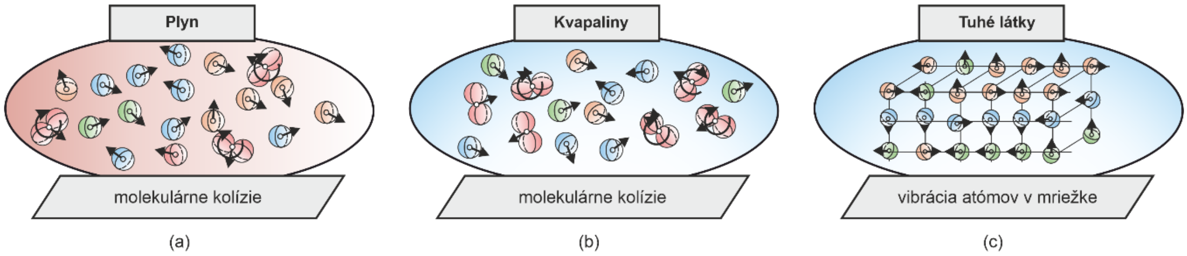
Tepelný odpor R opisuje vzájomný vzťah medzi **zmenou teploty** a **tepelným tokom** medzi dvoma meranými bodmi systému.

V prípade **tepelných systémov** je nutné pre správne stanovenie konštanty **tepelného odporu R**, identifikovať typ **tepelného prenosu**, pred samotným použitím konštanty **R** v matematických rovniciach.

Vo všeobecnosti vo fyzike rozlišujeme tri základné spôsoby **prenosu** resp. **šírenia tepelného toku** v **tuhých látkach**, **plynoch** a **kvapalinách** ako sú:

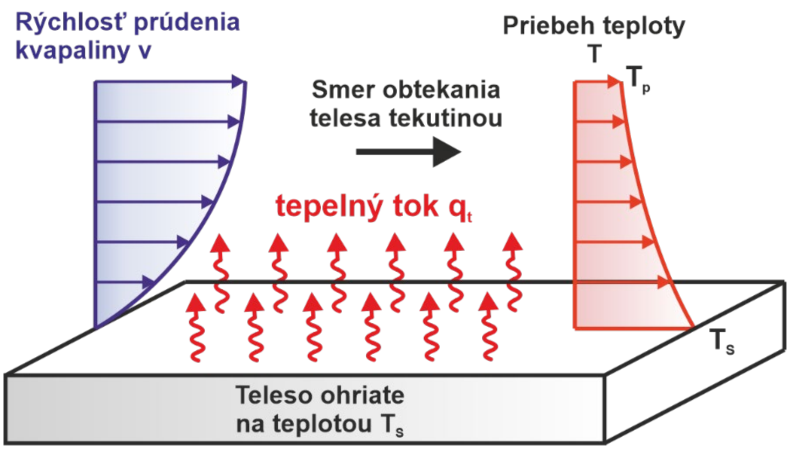
- vedenie tepla **(kondukcia)**
- prúdenie tepla **(konvekcia)**
- sálanie alebo radiácia.

Vedenie tepla je jeden zo základných princípov **prenosu tepla** v **tuhých látkach**, **plynoch** a **kvapalinách**. Pri tomto spôsobe tepelného prenosu si častice látky (molekuly, atómy, ióny) pri vzájomných zrážkach odovzdávajú časť **kinetickej energie**, pozri Obr. 8.6.



Obr. 8.6. Prenos tepla kondukciou, (a) v plyne, (b) v kvapaline a (c) v tuhej látke

Mechanizmus odovzdávania tepla **prúdením** nazývame **konvekciou**, ktorý je ďalším spôsobom prenosu tepla medzi systémami. Tento proces odovzdávania tepla možno zaznamenať hlavne v prípade **plynov** a **kvapalín**. **Konvekcia** je založená na tom, že hustota látky sa významne mení s teplotou **T** a preto v prostredí s rôznou **teplotu T** dochádza vplyvom gravitačných síl k prirodzenému prúdeniu a potom premiešavaniu a vyrovnávaniu **teplôt**, pozri Obr. 8.7.



Obr. 8.7. Mechanizmus tepelného prenosu pri obtekaní telesa

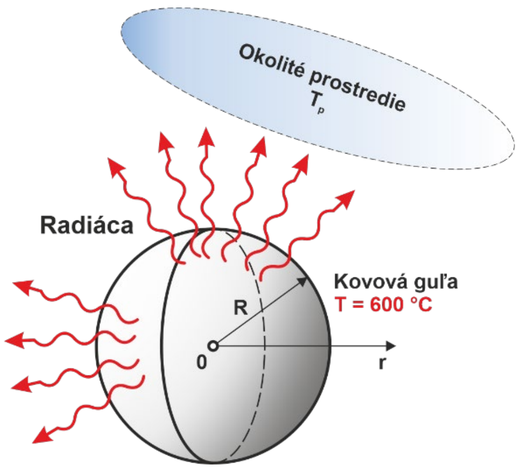
Ku konvekcii, t. j. **vzájomnému odovzdávaniu energií** dochádza v prevažnej miere pri prúdení kvapalín alebo plynov. **Konvekciu** môžeme pozorovať napr. v hrnci s vodou pri zohrievaní na sporáku (keď zohriata a ľahšia voda stúpa nahor, naopak chladnejšia voda klesá nadol z vyšších vrstiev kvapaliny).

V beztiažovom stave k procesu **konvekcie** vôbec nedochádza, nakoľko v tomto beztiažovom stave nie je možný proces prirodzeného premiešavania tekutín a teda **konvekcia** v takomto stave vôbec neprebieha.

Sálanie (vyžarovanie) alebo **radiácia** je mechanizmus prenosu tepla, ktorý spočíva v **emisii** a **absorpcii** tepelného žiarenia medzi vzdialenými objektami. Tento princíp prenosu je založený na elektromagnetickom vyžarovaní tepla z objektu na iný objekt.

Sálanie je jediný spôsob prenosu tepla, pri ktorom nie je potrebné sprostredkujúce látkové prostredie. Teleso s nenulovou teplotou vyžaruje elektromagnetické žiarenie podľa **Planckovho zákona**. Celkové množstvo vyžiarenej energie z jednotky plochy telesa rastie s teplotou povrchu, pozri Obr. 8.8. Od **teploty** závisí aj výsledné spektrum žiarenia, ktoré sa pri náraste teploty posúva ku kratším (okom pozorovateľným) vlnovým dĺžkam.

Príkladom môže byť napr. infračervené (okom neviditeľné) žiarenie z povrchu radiátora, resp. okom pozorovateľné svetlo vyžarované z povrchu Slnka alebo vláknom žiarovky zahriatym na vysokú teplotu **T**.



Obr. 8.8. Mechanizmus sálania (vyžarovania)

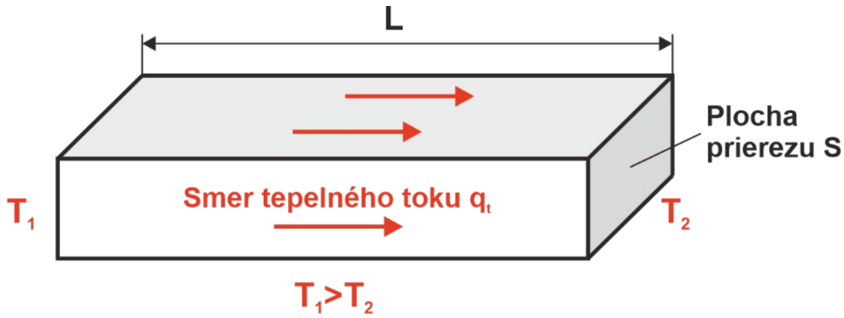
Z predchádzajúceho vyplýva, že **kondukcia** je proces prenosu **tepla Q** medzi látkami, ktoré sú v priamom kontakte, zatiaľ čo **konvekcia** je proces prenosu **tepla Q**, ktorý vzniká pri prúdení tekutín, ktorými môžu byť plyny alebo kvapaliny. Ďalej sa bližšie pozrieme na princíp **kondukcie** a **konvekcie** z pohľadu tepelného odporu. **Tepelný odpor R** v prípade prenosu tepla možno definovať týmto vzťahom ako pomer zmeny teploty **ΔT** v závislosti od tepelného toku **ΔQ**

$$R = \frac{dT}{dq_t}, \qquad (8.39)$$

kde **R** je **tepelný odpor**, ktorý má fyzikálnu jednotku definovanú ako **[K.s.J^{-1}]** alebo **[°C.s.J^{-1}]**. Pre jednoduchý typ vedenia tepla v jednom smere podľa Obr. 8.9 možno definovať, tzv. **Fourierov zákon** známy tiež ako **zákon tepelnej kondukcie**

$$q_t = kS\frac{\Delta T}{L} = kS\frac{T_1 - T_2}{L}, \qquad (8.40)$$

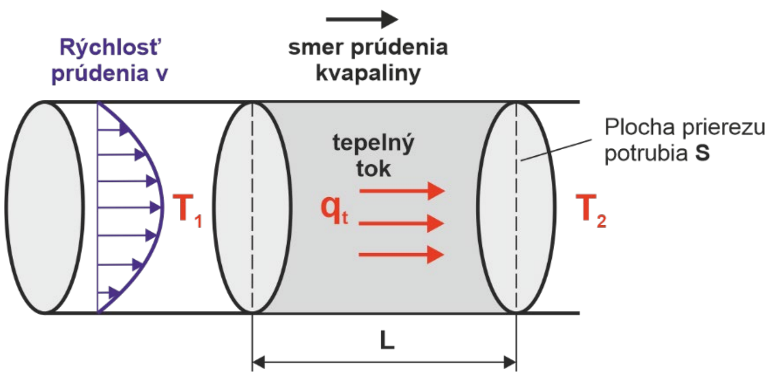
kde **L** je dĺžka telesa v smere tepelného toku, **S** je prierezová plocha kolmá na smer tepelného toku, **ΔT** je tepelný rozdiel pozdĺž dĺžky **L**, **k** je **súčiniteľ tepelnej kondukcie** materiálu, cez ktorý dochádza k tepelnému toku. **Súčiniteľ tepelnej kondukcie k** má fyzikálnu jednotku definovanú ako **[W.m^{-1}.K^{-1}]** alebo [**W.m^{-1}.°C^{-1}**].



Obr. 8.9. Kondukcia v jednom smere; tepelný tok prebieha smerom od vyššej teploty k nižšej teplote

Táto **Fourierova rovnica** je často používaná pre tuhé telesá, ale je takisto použiteľná aj pre tekutiny. Z **Fourierovej rovnice** pre tepelnú kondukciu možno odvodiť definíciu pre **tepelný odpor R**, ktorý platí v prípade procesu prenosu tepla **vedením**, resp. **tepelnou kondukciou**

$$R = \frac{L}{k \cdot S}. \qquad (8.41)$$



Obr. 8.10. Prenos tepla konvekciou

Prenos tepla konvekciou, t. j. proces tepelného prenosu medzi telesom a tekutinou (napr. medzi potrubím a tekutinou určitej teploty **T**, ktorá prúdi v potrubí s prierezom **S**, pozri

Obr. 8.10), resp. **prenos tepla pri obtekaní telesa** plynom alebo kvapalinou, matematicky možno opísať ako priamoúmerný vzťah medzi tepelným tokom $\mathbf{q_t}$ a zmenou teploty $\mathbf{\Delta T}$ v tvare rovnice

$$q_t = h \cdot S \cdot \Delta T = h \cdot S(T_s - T_r)\,, \tag{8.42}$$

kde **S** je plocha prierezu, ktorou je teplo **prijímané/odovzdávané**, $\mathbf{T_s}$ je teplota telesa, $\mathbf{T_r}$ je okolitá teplota prostredia a **h** je **súčiniteľ tepelnej konvekcie [W.m^{-2}.K^{-1}]** alebo **[W.m^{-2}.°C^{-1}]**.

Na základe predchádzajúcej rovnice opisujúcej vzťah pre **tepelný tok** $\mathbf{q_t}$, ku ktorému dochádza v prípade **tepelného prenosu systémom konvekcie** (prúdením tekutín), možno určiť vzťah pre tepelný odpor **R**, ktorý definujeme pre proces tejto **tepelnej konvekcie** ako

$$R = \frac{1}{h \cdot S}\,. \tag{8.43}$$

Množstvo tepla vyžiareného plochou **S** za jednotku času **Q [W]** absolútne čiernym telesom s teplotou **T** opisuje **Stefanov-Boltzmanov zákon**

$$q_t = k \cdot T^4 \cdot S\,, \tag{8.44}$$

kde **k** nazývame **Stefanova-Boltzmanova** konštanta $\mathbf{k = 5.67 \text{ x } 10^{-8}\ W.K^{-4}.m^{-2}}$.

Teplo, ktoré vyžaruje **reálne teleso** pri tej istej teplote, je vo všeobecnosti menšie. Túto skutočnosť vyjadrujeme **emisivitou telesa** $\boldsymbol{\varepsilon < 1}$. Pre reálne **teleso** možno napísať tento vzťah, ktorý opisuje množstvo vyžiareného tepla telesom do okolitého prostredia, resp. na iné teleso so známymi teplotami

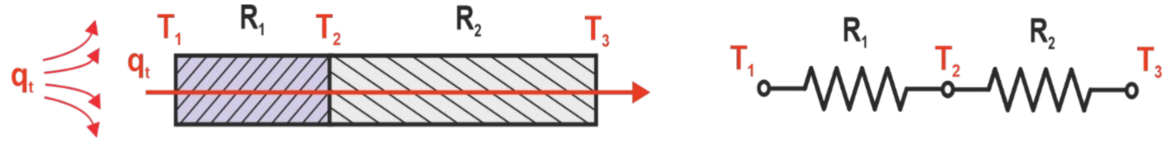
$$q_t = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S(T_1^4 - T_2^4)\,, \tag{8.45}$$

kde $\mathbf{T_1}$ je teplota telesa, $\mathbf{T_2}$ je teplota okolia (telesa), $\boldsymbol{\varepsilon}$ je emisivita telesa. Na zjednodušenie riešenia je v prípade **tepelného odporu** veľmi užitočné používať koncept v zmysle tepelných odporových obvodov. Tepelný tok $\mathbf{q_t}$ je analogický **elektrickému prúdu** a tepelný rozdiel $\mathbf{\Delta T}$ je analogický **elektrickému napätiu**. Napokon **tepelný odpor R** je analogický **elektrickému odporu R.**

8.10.1 Ekvivalentný tepelný odpor pre sériovo usporiadané tepelné odpory

Obr. 8.11 (a) zobrazuje prenos tepla cez dva rôzne materiály s rôznymi tepelnými odpormi $\mathbf{R_1, R_2}$, ktorý môže byť reprezentovaný sieťou **sériových tepelných odporov**, pozri Obr. 8.11 (b). V tomto prípade platí, že tepelný tok $\mathbf{q_t}$ je rovnaký pre každý komponent daného systému. Ak uvažujeme, že tepelné odpory jednotlivých prvkov systému sú $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$, potom s uvažovaním teplotného rozdielu po oboch stranách podľa Obr. 8.11 (b), pre **tepelné odpory** $\mathbf{R_1}$ a $\mathbf{R_2}$, ktoré sú sériovo zapojené musí platiť, že

$$T_1 - T_2 = R_1 q_t \,,$$
$$T_2 - T_3 = R_2 q_t \,. \qquad (8.46)$$



(a) (b)

Obr. 8.11. (a) Tepelný tok cez sériovo spojené materiály, (b) odporový model sériovo zapojených tepelných odporov

Ak sčítame predchádzajúce dve rovnice dostávame

$$T_1 - T_3 = (R_1 + R_2) q_t \,. \qquad (8.47)$$

Predpokladajme, že existuje **ekvivalentný tepelný systém** pozostávajúci len z jedného materiálu so známym tepelným odporom $\mathbf{R_{eq}}$, ktorý je náhradou predchádzajúceho kombinovaného systému. Potom pre tento systém musí platiť, že

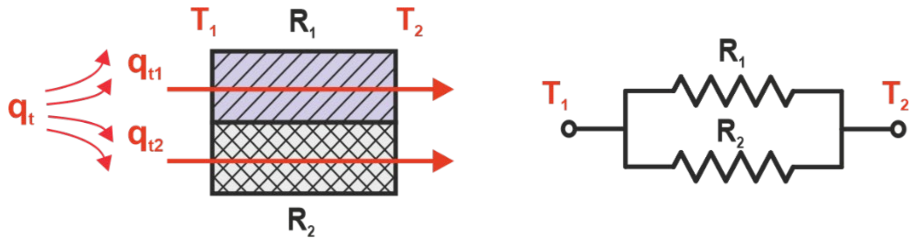
$$T_1 - T_3 = R_{eq} \cdot q_t \,. \qquad (8.48)$$

Porovnaním predchádzajúcich dvoch rovníc možno odvodiť vzťah pre ekvivalentný tepelný odpor $\mathbf{R_{eq}}$ **sériovo usporiadaných tepelných odporov**

$$R_{eq} = R_1 + R_2 . \qquad (8.49)$$

8.10.2 Ekvivalentný tepelný odpor pre paralelne usporiadané tepelné odpory

Nasledujúci Obr. 8.12 (a) zobrazuje prenos tepla cez stenu dvoch rozličných materiálov, ktoré sú usporiadané **paralelným spôsobom**.



(a) (b)

Obr. 8.12. (a) Tepelný tok cez paralelne spojené materiály, (b) odporový model paralelne zapojených tepelných odporov

Túto kombináciu spojenia materiálov možno reprezentovať ekvivalentným sieťovým modelom paralelne zapojených tepelných odporov podľa Obr. 8.12 (b). Poznamenajme, že pre každý materiál musí v tomto prípade platiť, že po oboch stranách majú rovnaký teplotný rozdiel $\mathbf{T_1 - T_2}$.

Celkový **tepelný tok $\mathbf{q_t}$** sa teda rovnomerne rozdelí na dva tepelné toky $\mathbf{q_{t1}}$ a $\mathbf{q_{t2}}$, ktoré sa šíria jednotlivými materiálmi, pozri Obr. 8.12 (a). Pre tieto neznáme tepelné toky $\mathbf{q_{t1}}$ a $\mathbf{q_{t2}}$ šíriace sa cez jednotlivé materiály, možno napísať tieto rovnice na základe uvažovaných tepelných odporov **R_1** a **R_2**

$$q_{t1} = \frac{T_1 - T_2}{R_1}, \qquad q_{t2} = \frac{T_1 - T_2}{R_2}\,. \tag{8.50}$$

Potom, pre **celkový tepelný tok $\mathbf{q_t}$**, ktorý je súčtom tepelných tokov $\mathbf{q_{t1}}$ a $\mathbf{q_{t2}}$ musí platiť, že

$$q_t = q_{t1} + q_{t2} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(T_1 - T_2)\,. \tag{8.51}$$

Ak budeme uvažovať, že existuje **ekvivalentný tepelný systém** pozostávajúci len z jedného materiálu so známym **ekvivalentným tepelným odporom $\mathbf{R_{eq}}$**, ktorý je náhradou predchádzajúceho kombinovaného systému, potom pre tento systém musí platiť, že

$$T_1 - T_2 = R_{eq} \cdot q_t\,. \tag{8.52}$$

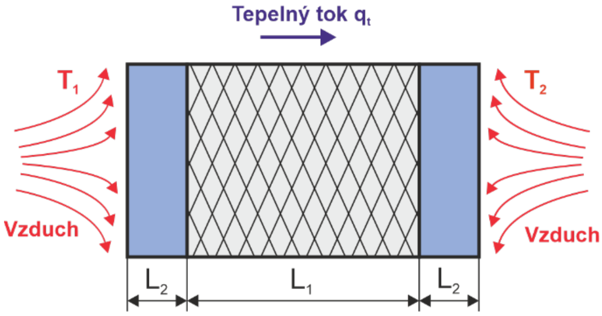
Porovnaním predchádzajúcich dvoch rovníc možno odvodiť vzťah pre **ekvivalentný tepelný odpor $\mathbf{R_{eq}}$ paralelne zapojených tepelných odporov**, pre ktorý platí, že

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,. \tag{8.53}$$

Príklad č. 8.1. Tepelný odpor

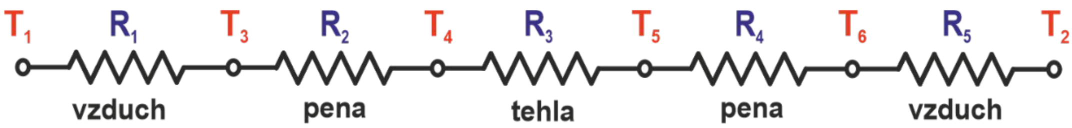
Tepelný tok $\mathbf{q_t}$ prúdi cez zaizolovanú stenu podľa nasledujúceho Obr. 8.13. Stena je vyrobená z vrstvy tehly s tepelnou vodivosťou **k_1** a dvoch vrstiev izolačnej peny s tepelnou vodivosťou **k_2**. Ľavá strana steny teploty **T_1** je vystavená obtekaniu vzduchu so známym **súčiniteľom konvekcie h_1**. Pravá strana steny s teplotou **T_2** je vystavená obtekaniu vzduchu so známym **súčiniteľom konvekcie h_2**. Predpokladajme, že parametre **k_1 = 0,5 W/(m.°C), k_2 = 0,17 W/(m.°C), h_1 = h_2 = 10 W/(m^2.°C), T_1= 38 °C, a T_2= 20 °C** sú známe veličiny.

Poznáme hrúbku tehly $\mathbf{L_1 = 0.1\ m}$, hrúbka každej penovej izolačnej vrstvy je $\mathbf{L_2 = 0.03\ m}$ a prierezová plocha obtekanej steny je $\mathbf{S = 16\ m^2}$. Určte hodnotu výsledného tepelného toku cez stenu $\mathbf{q_t}$ a vypočítajte rozloženie teploty po celej dĺžke steny.



Obr. 8.13. Tepelný tok cez izolovanú stenu

Prenos tepelného toku $\mathbf{q_t}$ cez izolovanú stenu možno realizovať použitím odporového modelu s piatimi **sériovo zapojenými odpormi** ako je zobrazené na nasledujúcom Obr. 8.14.



Obr. 8.14. Ekvivalentný odporový model izolovanej steny

V tomto prípade musíme uvažovať dva typy tepelných prenosov a to **konvekciu** a **kondukciu**. Odpovedajúce **tepelné odpory** možno vypočítať na základe nasledovných vzťahov podľa Obr. 8.14

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R_5 = \frac{1}{h_1 A} = \frac{1}{h_2 A} = 6.25 \times 10^{-3}\ \text{°C.s/J}\,, \\
R_2 &= R_4 = \frac{L_2}{k_2 A} = \frac{0.03}{0.17 \times 16} = 1.10 \times 10^{-2}\ \text{°C.s/J}\,, \\
R_3 &= \frac{L_1}{k_1 A} = \frac{0.1}{0.5 \times 16} = 1.25 \times 10^{-2}\ \text{°C.s/J}\,.
\end{aligned}
\tag{8.54}
$$

Celkový **tepelný odpor** $\mathbf{R_{eq}}$ možno vypočítať ako súčet všetkých **tepelných odporov zapojených v sérií**

$$
R_{eq} = \sum_{i=1}^{5} R_i = 4.70 \times 10^{-2}\ \text{°C.s/J}\,, \tag{8.55}
$$

potom pre celkový tepelný tok $\mathbf{q_t}$ cez izolovanú stenu platí, že

$$
q_t = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{38 - 20}{4.70 \times 10^{-2}} = 382.98\ \text{W}\,. \tag{8.56}
$$

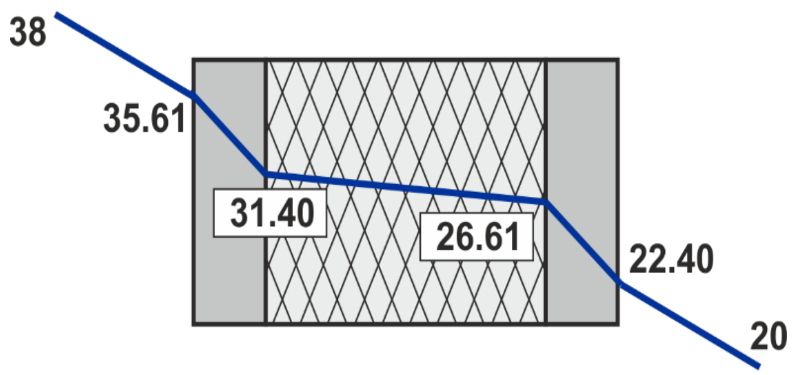
Poznamenajme, že tepelný tok $\mathbf{q_t}$ je rovnaký cez celú izolovanú stenu. Takže pre každú vrstvu musia platiť tieto vzťahy

$$\begin{aligned} \textbf{vzduch}&: \quad q_t R_1 = T_1 - T_3 \Rightarrow T_3 = T_1 - q_t R_1 \,, \\ \textbf{pena}&: \quad q_t R_2 = T_3 - T_4 \Rightarrow T_4 = T_3 - q_t R_2 \,, \\ \textbf{tehla}&: \quad q_t R_3 = T_4 - T_5 \Rightarrow T_5 = T_4 - q_t R_3 \,, \\ \textbf{pena}&: \quad q_t R_4 = T_5 - T_6 \Rightarrow T_6 = T_5 - q_t R_4 \,. \end{aligned} \tag{8.57}$$

Potom pre uvažované vstupné okrajové teploty $\mathbf{T_1 = 38\ °C}$ a $\mathbf{T_2 = 20\ °C}$ dostávame hodnoty teplôt na hraniciach každého tepelného odporu v tvare

$$\begin{aligned} \textbf{vzduch}&: \quad T_3 = 35.61\ °C \,, \\ \textbf{pena}&: \quad T_4 = 31.40\ °C \,, \\ \textbf{tehla}&: \quad T_5 = 26.61\ °C \,, \\ \textbf{pena}&: \quad T_6 = 22.40\ °C \,. \end{aligned} \tag{8.58}$$

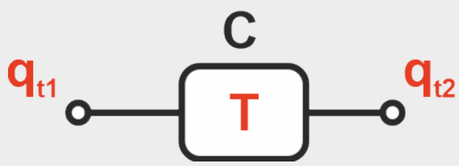
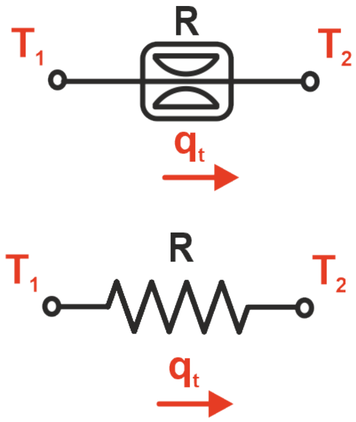
Na základe vypočítaných hodnôt teplôt možno nakresliť rozloženie teplôt po dĺžke izolovanej steny ako je znázornené na Obr. 8.15.



Obr. 8.15. Rozloženie teplôt po dĺžke izolovanej steny

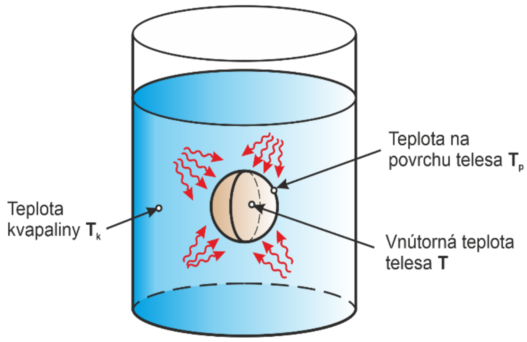
Všetkých vzťahy, ktoré platia pre odvodené **stavebné prvky tepelného systému** možno nájsť v tabuľke na nasledujúcej strane.

Tabuľka 8.2. Základné stavebné prvky tepelného systému

Stavebný prvok	Opis rovnice
Tepelná kapacita 	$C = mc = \rho V c$ $C = \frac{dQ}{dT}$ $\frac{dU}{dt} = \frac{d(CT)}{dt} = C\frac{dT}{dt} = q_{ti} - q_{to}$
Tepelný odpor 	$q_t = \frac{T_1 - T_2}{R}$ **a) kondukcia** $R = \frac{L}{S \cdot k}$ **b) konvekcia** $R = \frac{1}{S \cdot h}$ **c) sálanie** $q_t = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot (T_1^4 - T_2^4)$

8.11 MODELOVANIE TEPELNÝCH SYSTÉMOV

Matematický model **tepelného systému** je často komplikovaný z dôvodu zložitého rozloženia teploty v celom systéme. Aby sme zjednodušili analýzu **tepelných systémov**, pri modelovaní takýchto tepelných systémov, budeme uvažovať systémy nie ako systémy s **rozptýlenými parametrami**, ale ako systémy so **sústredenými parametrami**, ktoré dokážu aproximovať dynamiku hrubého systému. Uvažujeme teda, že teplota vo všetkých bodoch telesa je konštantná a nemení sa v závislosti od polohy **x, y** a **z** v priestore telesa.



Obr. 8.16. Teleso ponorené do kvapaliny

Predpokladajme, že dokonale tuhé teleso je ponorené do **horúcej kvapaliny**, ktorej teplota je $\mathbf{T_k}$ ako je znázornené na predchádzajúcom Obr. 8.16. Teplotu steny telesa uvažujeme ako $\mathbf{T_p}$ a teplotu **T** ako teplotu v ľubovoľnom vybranom bode vo vnútri ponoreného telesa. Predpokladajme, že v tomto prípade existujú dva typy prenosu tepla a to prenos tepla **kondukciou (prenos tepla vedením** vo vnútri daného telesa) a **konvekcia** (prenos tepla medzi telesom a kvapalinou).

Tepelný tok $\mathbf{q_t}$ pre oba typy tepelných prenosov možno na ploche telesa pokladať za približne rovnaký, musí teda platiť, že

$$\frac{k \cdot S}{L}\left(T_p - T\right) \approx h \cdot S\left(T_k - T_p\right), \tag{8.59}$$

kde **h** je **súčiniteľ konvekcie** tepla, **k** je **súčiniteľ kondukcie**, **S** je **plocha telesa** a **L** je vzdialenosť medzi stenou a bodom telesa, v ktorom meriame **teplotu telesa T**. Potom, pre pomer **teplotných rozdielov** pre jednotlivé typy tepelných prenosov musí platiť, že

$$\frac{T_p - T}{T_k - T_p} \approx \frac{h \cdot L}{k}. \tag{8.60}$$

Poznamenajme, že teplotný rozdiel v rámci telesa možno zanedbať v prípade, že objekt je dostatočne **tenký** resp. **dostatočne malý**. Ako kritérium na posúdenie toho, či nejaké teleso možno považovať za dostatočne **malé**, slúži tzv. **charakteristický rozmer** $\mathbf{B_i}$

$$B_i = \frac{h \cdot L_c}{k}, \tag{8.61}$$

kde $\mathbf{L_c}$ je **charakteristická veľkosť dokonale tuhého telesa**, ktorá je definovaná ako pomer objemu telesa **V** a jeho plochy **S**

$$L_c = \frac{V}{S}. \tag{8.62}$$

Ak pre teleso platí, že jeho **charakteristický rozmer** $\mathbf{B_i < 0.1}$, potom teleso možno pokladať za dostatočne malé, tzn. že teplota vo všetkých bodoch tohto telesa nezávisí od polohy (x, y, z), ale takúto teplotu uvažujeme za konštantnú v každom bode telesa.

Príklad č. 8.2. Tepelná dynamika ohriateho telesa

Oceľová guľa s polomerom $\mathbf{r = 0.01\,m}$ je ponorená do horúcej tekutiny so známym koeficientom **prenosu tepla konvekciou h = 350 W/(m^2.°C)**. Pre oceľ uvažujeme nasledovné parametre pre hustotu $\boldsymbol{\rho = 7850\,kg.m^{-3}}$, mernú tepelnú kapacitu $\mathbf{c = 440\,J./(kg.°C)}$ a súčiniteľ **tepelnej kondukcie** $\mathbf{k = 43\,W/(m.°C)}$. Teplota vody je $\mathbf{T_k = 100\,°C}$ a počiatočná teplota gule je $\mathbf{T_0 = 25\,°C}$. **Tepelný tok** $\mathbf{q_{to}}$ odvádzaný telesom gule do kvapaliny pokladajte za zanedbateľný.

a) Zistite, či možno teplotu gule považovať za rovnakú v rámci celého telesa
b) Odvoďte diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi teplotou gule **T** a teplotou vody $\mathbf{T_k}$.

Vypočítajme **charakteristický rozmer** $\mathbf{L_C}$ pre guľu ako

$$L_C = \frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r = \frac{0.01}{3}, \tag{8.63}$$

potom pre danú guľu možno vypočítať charakteristické číslo $\mathbf{B_i}$ ako

$$B_i = \frac{h \cdot L_c}{k} = \frac{350}{43}\frac{0.01}{3} = 2.71 \times 10^{-2} < 0.1\,. \tag{8.64}$$

Keďže platí, že $\mathbf{B_i = 2.71 \times 10^{-2} < 0.1}$, potom guľu v tomto prípade možno uvažovať za **systém so sústredenými parametrami**, tzn. že teplota v každom bode tohto telesa bude konštantná (nie je nutné definovať vzťah teploty na základe parciálnych diferenciálnych rovníc).

Dynamický model teploty gule sa riadi **I. termodynamickým zákonom** v tvare

$$\frac{dU}{dt} = q_{ti} - q_{to}\,, \tag{8.65}$$

pripomeňme, že vnútornú energia tepelného systému možno zapísať v tvare

$$U = mcT = \rho VcT \tag{8.66}$$

a teda zderivovaním vnútornej energie systému podľa času **t** dostávame,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d(\rho VcT)}{dt} = \rho Vc\frac{dT}{dt} = C\frac{dT}{dt}\,. \tag{8.67}$$

Tepelný tok $\mathbf{q_t}$ do smerujúci do telesa gule možno vypočítať na základe tepelného odporu **R**

$$q_{ti} = \frac{T_k - T}{R}, \tag{8.68}$$

ak predpokladáme, že **tepelný tok $\mathbf{q_t}$** odvádzaný telesom gule je prakticky nulový $\mathbf{q_{to} \cong 0}$. Potom diferenciálna rovnica systému prejde do tvaru

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = q_{ti} - q_{to} = \frac{T_k - T}{R} \ . \tag{8.69}$$

Ak v danej rovnici budeme uvažovať tepelnú kapacitu **C** ako $\mathbf{C = \rho Vc = mc}$, potom

$$RC \frac{dT}{dt} + T = T_k \ . \tag{8.70}$$

Tepelnú kapacitu C gule možno vypočítať dosadením vstupných hodnôt do vzťahu pre tepelnú kapacitu **C**

$$C = \rho V c = 7850 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0.01)^3 \cdot 440 = 14.47 \ \mathrm{J/°C} \ . \tag{8.71}$$

a pre **tepelný odpor R** v prípade konvekcie platí,

$$R = \frac{1}{h \cdot A} = \frac{1}{350 \cdot 4\pi \cdot (0.01)^2} = 2.27 \ \mathrm{°C.s/J} \ . \tag{8.72}$$

Potom výsledná diferenciálna rovnica nadobudne tvar,

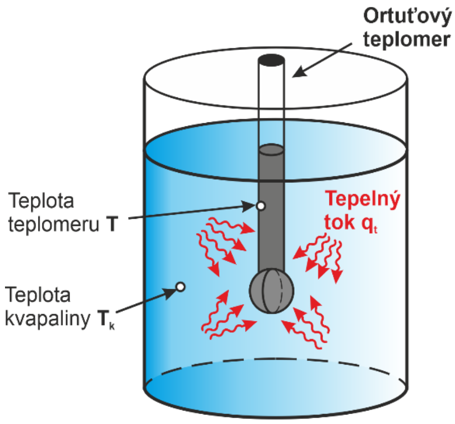
$$32.85 \frac{dT}{dt} + T = 100 \ . \tag{8.73}$$

Príklad č. 8.3. Ortuťový teplomer

Odvoďme matematický model tepelného systému, ktorý predstavuje ortuťový teplomer vložený do kvapaliny s teplotou $\mathbf{T_k}$ podľa Obr. 8.17. Predpokladajme, že teplomer má známy **tepelný odpor** s konštantou **R** a takisto je známy **súčiniteľ tepelnej konvekcie h**, ktorý opisuje vlastnosti teplomera pri prenose tepla konvekciou s kvapaliny do telesa teplomeru. Pri výpočte uvažujte, že poznáme plochu teplomera **S** a **tepelný tok $\mathbf{q_{to}}$** odvádzaný telesom teplomera do kvapaliny pokladáme za zanedbateľný. Nájdite prenosovú funkciu systému **G(s)**.

Ak neznámu teplotu teplomera označíme ako **T** a teplotu kvapaliny uvažujeme ako $\mathbf{T_k}$, potom pre známu veličinu **súčiniteľa prenosu tepla konvekciou h**, ktorý smeruje do teplomera z kvapaliny vyššej teploty, možno vypočítať **tepelný odpor**

$$R = \frac{1}{h \cdot S} \,. \qquad (8.74)$$



Obr. 8.17. Ortuťový teplomer ponorený v kvapaline

Na základe vypočítaného odporu **R** možno zadefinovať vzťah pre **tepelný tok** $\mathbf{q_t}$ medzi kvapalinou teploty $\mathbf{T_k}$ a teplomerom **teploty T** ako

$$q_{ti} = \frac{T_k - T}{R} \,, \qquad (8.75)$$

kde $\mathbf{q_{ti}}$ je **celkový tepelný tok tepelného systému teplomera** ponoreného v kvapaline. Pre **tepelnú kapacitu** $\mathbf{C = \rho Vc = mc}$ teplomera, ďalej platí táto rovnica

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d(\rho VcT)}{dt} = \rho Vc\frac{dT}{dt} = C\frac{dT}{dt} = q_{ti} - q_{to} \,, \qquad (8.76)$$

keďže uvažujeme, že dochádza k prestupu tepla iba medzi kvapalinou a teplomerom a vieme, že $\mathbf{q_{to} = 0}$. Potom, platí, že

$$C\frac{dT}{dt} = q_{ti} = \frac{T_k - T}{R} \,. \qquad (8.77)$$

Usporiadaním danej rovnice možno dospieť k tejto **diferenciálnej rovnici 1. rádu**

$$RC\frac{dT}{dt} + T = T_k \,. \qquad (8.78)$$

Táto diferenciálna rovnica **1. rádu** opisuje, ako sa mení **teplota teplomeru T** v čase **t** po jeho vložení do kvapaliny s teplotou $\mathbf{T_k}$. V tomto prípade systému sme uvažovali, že daný systém je **systémom so sústredenými parametrami**.

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** pri uvažovaní nulových počiatočných podmienok $\mathbf{T(0) = 0}$.

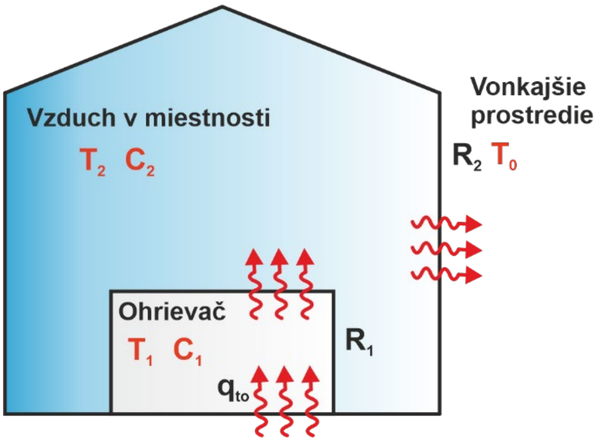
$$RC \cdot sT(s) + T(s) = T_k(s)\,, \tag{8.79}$$

potom prenosová funkcia systému $\mathbf{G(s)}$ nadobúda tvar

$$G(s) = \frac{T(s)}{T_k(s)} = \frac{1}{RC \cdot s + 1}\,. \tag{8.80}$$

Príklad č. 8.4. Tepelný prenos v dome s ohrievačom

Izba znázornená na Obr. 8.18, obsahuje vo svojom vnútri ohrievač so vstupným tepelným tokom $\mathbf{q_{to}}$. **Tepelné kapacity** ohrievača a vzduchu v miestnosti sú $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$. Ďalej poznáme **tepelný odpor** prestupu tepla $\mathbf{R_1}$ (medzi ohrievačom a vzduchom v miestnosti) a **tepelný odpor** $\mathbf{R_2}$ prestupu tepla medzi stenou a vonkajším prostredím.



Obr. 8.18. Izba s ohrievačom

Ak teploty ohrievača a vzduchu v miestnosti označíme ako $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$ a poznáme okolitú vonkajšiu $\mathbf{T_0}$ teplotu, ktorá sa mení v čase **t**. Odvoďte matematický model, ktorý opisuje vzťah medzi teplotami $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$, vstupným **tepelným tokom** $\mathbf{q_{to}}$ a okolitou vonkajšou teplotou $\mathbf{T_0}$. Potom:

a) zapíšte sústavu rovníc do maticového tvaru a preveďte aplikovaním Laplaceovej transformácie do roviny s,
b) napokon nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.

Aplikovaním **I. termodynamického zákona** pre prenos tepla medzi ideálnym ohrievačom a teplotou v miestnosti podľa Obr. 8.18, musí platiť, že

$$\frac{dU}{dt} = C_1 \frac{dT_1}{dt} = q_{t1i} - q_{t1o}\,, \qquad (8.81)$$

musí platiť, že

$$\begin{gathered} q_{t1i} = q_{to}\,, \\ \frac{dU}{dt} = C_1 \frac{dT_1}{dt} = q_{t1i} - q_{t1o}\,, \end{gathered} \qquad (8.82)$$

kde $\mathbf{q_{t1i} = q_{to}}$ je známy **vstupný tepelný tok** ohrievača a $\mathbf{q_{t1o}}$ je **tepelný prestup tepla** pri výmene tepla medzi ohrievačom s teplotou $\mathbf{T_1}$ a teplotou v miestnosti $\mathbf{T_2}$ s uvažovaným tepelným odporom $\mathbf{R_1}$ definovaným ako

$$q_{t1o} = \frac{T_1 - T_2}{R_1}\,, \qquad (8.83)$$

Dosadením tohto vypočítaného **tepelného toku** $\mathbf{q_{t1o}}$ do diferenciálnej rovnice systému, dostávame

$$\begin{gathered} C_1 \frac{dT_1}{dt} = q_{t1i} - q_{t1o}\,, \\ C_1 \frac{dT_1}{dt} = q_{to} - \frac{T_1 - T_2}{R_1}\,. \end{gathered} \qquad (8.84)$$

Usporiadaním výrazov v tejto diferenciálnej rovnici dostávame **prvú diferenciálnu rovnicu** sústavy diferenciálnych rovníc, ktorá opisuje ako sa mení teplota ohrievača $\mathbf{T_1}$

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} + \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_1} = q_{to}\,. \qquad (8.85)$$

Odvoďme teraz **druhú diferenciálnu rovnicu**, ktorá opisuje, ako sa mení teplota v miestnosti $\mathbf{T_2}$. Opätovným aplikovaním **I. termodynamického zákona** pre tepelnú výmenu medzi izbou a vonkajším prostredím podľa Obr. 8.18, musí platiť, že

$$\frac{dU}{dt} = C_2 \frac{dT_2}{dt} = q_{t2i} - q_{t2o}\,, \qquad (8.86)$$

kde $\mathbf{q_{t2i} = q_{t1o}}$ je známy vypočítaný **tepelný tok** medzi ohrievačom a izbou a $\mathbf{q_{t2o}}$ je **tepelný tok** medzi izbou s teplotou $\mathbf{T_1}$ a vonkajším prostredím so vstupnou teplotou $\mathbf{T_0}$.

Tento **tepelný tok $\mathbf{q_{t2o}}$** možno vypočítať na základe tepelného odporu steny $\mathbf{R_2}$ ako

$$q_{t2o} = \frac{T_2 - T_0}{R_2}, \tag{8.87}$$

potom dosadením do predchádzajúcej diferenciálnej rovnice dostávame **druhú diferenciálnu rovnicu** matematického modelu v tvare

$$\begin{aligned} C_2 \frac{dT_2}{dt} &= q_{t2i} - q_{t2o}\,, \\ C_2 \frac{dT_2}{dt} &= \frac{T_1 - T_2}{R_1} - \frac{T_2 - T_0}{R_2}\,. \end{aligned} \tag{8.88}$$

Usporiadaním výrazov v predchádzajúcej diferenciálnej rovnici možno dospieť k nasledovnému tvaru

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} - \frac{T_1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) T_2 = \frac{T_0}{R_2} \tag{8.89}$$

Matematický model tepelného systému podľa Obr. 8.18, potom tvorí systém dvoch **diferenciálnych rovníc prvého rádu**, ktoré opisujú správanie sa daného systému

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dT_1}{dt} + \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_1} &= q_{to}\,, \\ C_2 \frac{dT_2}{dt} - \frac{T_1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) T_2 &= \frac{T_0}{R_2}\,. \end{aligned} \tag{8.90}$$

Prepíšme tento systém diferenciálnych rovníc do **maticového tvaru** v tomto tvare

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{to} \\ \frac{T_0}{R_2} \end{bmatrix}. \tag{8.91}$$

Pre nájdenie prenosovej matice **G(s)** systému, preveďme daný systém aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{T_1(0) = T_2(0) = 0}$ do Laplaceovho tvaru maticového systému.

$$\begin{bmatrix} C_1 s + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & C_2 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} [Q_{to}(s) \quad T_0(s)]. \qquad (8.92)$$

Z predchádzajúceho systému možno vypočítať **prenosovú maticu G(s)** systému, ktorá bude mať rozmer 4 x 4 nakoľko máme tepelný systém s dvoma vstupmi a dvoma výstupmi

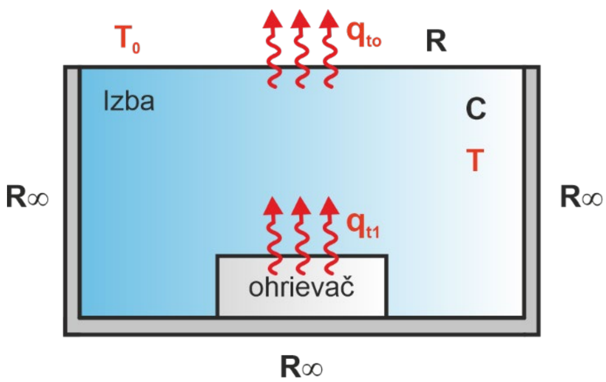
$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{T_1(s)}{Q_{to}(s)} & \frac{T_1(s)}{T_0(s)} \\ \frac{T_2(s)}{Q_{to}(s)} & \frac{T_2(s)}{T_0(s)} \end{bmatrix}, \qquad (8.93)$$

Jednotlivé prenosové funkcie boli vypočítane symbolickým počítaním v Matlabe, a teda výsledná prenosová matica **G(s)** ma tvar

$$G(s) = \\ = \begin{bmatrix} \frac{C_2R_1R_2s + R_1 + R_2}{C_1C_2R_1R_2s^2 + (C_1R_1 + C_1R_2 + C_2R_2)s + 1} & \frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2 + (C_1R_1 + C_1R_2 + C_2R_2)s + 1} \\ \frac{R_2}{C_1C_2R_1R_2s^2 + (C_1R_1 + C_1R_2 + C_2R_2)s + 1} & \frac{C_1R_1s + 1}{C_1C_2R_1R_2s^2 + (C_1R_1 + C_1R_2 + C_2R_2)s + 1} \end{bmatrix}. \qquad (8.94)$$

Príklad č. 8.5:

Tepelný systém izby podľa Obr. 8.19 pozostáva z elektrického radiátora so známym **tepelným tokom q_{t1}** umiestneného v izbe s tepelnou kapacitou **C**. Predpokladajme, že vonkajšia teplota je **T_0**, ktorá sa v čase môže meniť a teplota v miestnosti je daná teplotou **T**. Teplo uniká z miestnosti do okolitého prostredia cez jednu stenu s **tepelným odporom R** (ostatné steny uvažujeme ako dokonale izolované). Odvoďte diferenciálnu rovnicu opisujúcu vzťah medzi teplotou v miestnosti **T** a vstupným **tepelným tokom q_{t1}** a vonkajšou teplotou **T_0** a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 8.19. Izba vyhrievaná výhrevným telesom

Aplikovaním **I. termodynamického zákona** pre miestnosti s kapacitou **C** musí platiť táto diferenciálna rovnica

$$\frac{dU}{dt} = q_{ti} - q_{to}\,, \tag{8.95}$$

kde jednotlivé výrazy $\mathbf{q_{ti}}$ a $\mathbf{q_{to}}$ predstavujú **tepelné toky** od ohrievača a von z miestnosti do vonkajšieho prostredia cez stenu s **tepelným odporom R**, ktoré sú definované na základe týchto rovníc

$$\begin{aligned} q_{ti} &= q_{t1}\,, \\ q_{to} &= \frac{T - T_0}{R}\,. \end{aligned} \tag{8.96}$$

Dosadením týchto vzťahov pre jednotlivé tepelné toky do diferenciálnej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = C\frac{dT}{dt} &= q_{ti} - q_{to}\,, \\ C\frac{dT}{dt} &= q_{t1} - \frac{T - T_0}{R}\,. \end{aligned} \tag{8.97}$$

Usporiadaním výrazov v predchádzajúcej diferenciálnej rovnici, dostávame matematický model pre **tepelný systém** v tvare

$$RC\frac{dT}{dt} + T = Rq_{t1} + T_0\,. \tag{8.98}$$

Tento matematický model možno prepísať do **maticového tvaru** v tomto tvare

$$[RC][\dot{T}] + [1][T] = [R \quad 1]\begin{bmatrix} q_{t1} \\ T_0 \end{bmatrix}. \tag{8.99}$$

Aby sme určili prenosovú maticu systému **G(s)**, preveďme daný systém aplikovaním **Laplaceovej transformácie** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{T(0) = 0}$ do **Laplaceovho tvaru**

$$[RC \cdot s + 1][T(s)] = [R \quad 1]\begin{bmatrix} Q_{t1}(s) \\ T_0(s) \end{bmatrix}. \tag{8.100}$$

Potom prenosová matica systému **G(s)** pre tento tepelný systém nadobúda tento tvar

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{T(s)}{Q_{t1}(s)} & \frac{T(s)}{T_0(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{CRs + 1} & \frac{1}{CRs + 1} \end{bmatrix}. \quad (8.101)$$

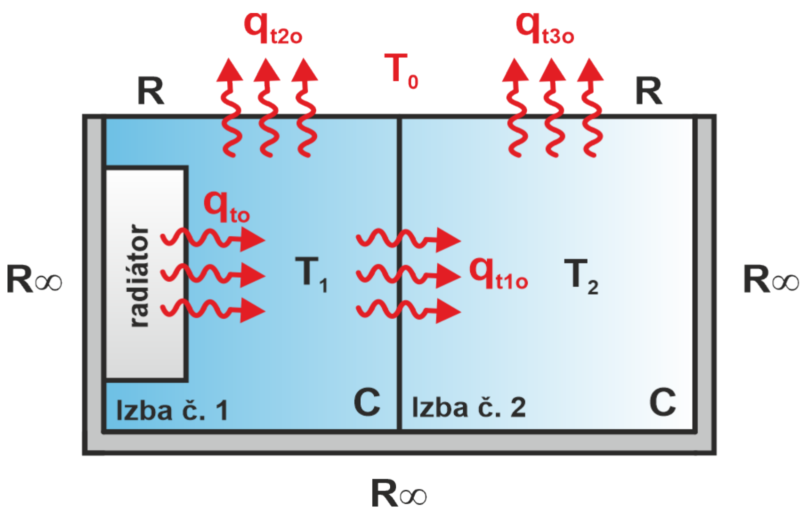
Príklad č. 8.6:

V jednej z dvoch izieb štandardného dvojizbového bytu, ktorého zjednodušený model je znázornený na Obr. 8.20, sa nachádza výhrevné teleso so **vstupným tepelným tokom q_{to}**. Predpokladajme, že izby majú rovnaké tepelné kapacity **C**, a že vonkajšia teplota, ktorá sa mení s časom je $\mathbf{T_0}$. Odvoďte matematický model, ktorý opisuje, ako sa mení teplota v jednotlivých miestnostiach $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$, ak teplo z miestnosti **č. 1** a **č. 2** má možnosť prenikať medzi jednotlivými miestnosťami bytu a takisto do okolitého prostredia cez stenu s uvažovaným **tepelným odporom R**.

Pre daný tepelný systém,

a) odvoďte diferenciálne rovnice opisujúce vzťah medzi teplotami $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$, vstupným **tepelným tokom q_{to}** a vonkajšou teplotou $\mathbf{T_0}$

b) a nájdite prenosovú maticu systému **G(s)**.



Obr. 8.20. Model dvojizbového bytu

Pre **miestnosť č. 1** možno na základe **I. termodynamického zákona** napísať túto diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dU}{dt} = q_{ti} - q_{t1o} - q_{t2o}. \quad (8.102)$$

V predchádzajúcej rovnici veličiny $\mathbf{q_{ti}}$, $\mathbf{q_{t1o}}$ a $\mathbf{q_{h2o}}$ predstavujú jednotlivé uvažované **tepelné toky**, ktoré vstupujú alebo opúšťajú **miestnosť č. 1** cez steny s **tepelným odporom R**. Pre zmenu **vnútornej energie U** na základe tepelnej kapacity **C** pre **miestnosť č. 1** teda platí, že

$$\frac{dU}{dt} = C\frac{dT_1}{dt} = q_{ti} - q_{t1o} - q_{t2o}\,,$$

pričom tepelné toky sú

$$q_{ti} = q_{to}\,, \qquad (8.103)$$
$$q_{t1o} = \frac{T_1 - T_2}{R}\,,$$
$$q_{t2o} = \frac{T_1 - T_0}{R}\,.$$

Ak teraz predchádzajúce výrazy využijeme a dosadíme do matematického modelu systému, tak potom možno dospieť k prvej z dvoch **diferenciálnych rovníc sústavy**

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= C\frac{dT_1}{dt} = q_{ti} - q_{t1o} - q_{t2o}\,, \\ C\frac{dT_1}{dt} &= q_o - \frac{T_1 - T_2}{R} - \frac{T_1 - T_0}{R}\,. \end{aligned} \qquad (8.104)$$

Usporiadaním výrazov v predchádzajúcej diferenciálnej rovnici dostávame

$$RC\frac{dT_1}{dt} + 2T_1 - T_2 = q_{to} \cdot R + T_0\,. \qquad (8.105)$$

Nájdime teraz matematický model, ktorý opisuje správanie sa **tepelného systému v miestnosti č. 2**. Na základe **I. termodynamického zákona** musí pre **miestnosť č. 2** platiť, že

$$\frac{dU}{dt} = C\frac{dT_2}{dt} = q_{t1o} - q_{t3o}\,, \qquad (8.106)$$

kde **C** je rovnaká tepelná kapacita ako v prípade prvej miestnosti, výraz $\mathbf{q_{t1o}}$ je známym **tepelným tokom**, ktorý prúdi z miestnosti č. 1 do miestnosti č. 2 cez stenu s **tepelným odporom R**, zatiaľ čo $\mathbf{q_{t3o}}$ je ešte stále neznámy **tepelný tok**, ktorý opúšťa **miestnosť č. 2** do voľného priestoru cez stenu s odporom **R**. Tento možno vypočítať týmto vzťahom

$$q_{t3o} = \frac{T_2 - T_0}{R}\,. \qquad (8.107)$$

Ak predchádzajúce dva výrazy dosadíme do matematického modelu, ktorý platí pre **miestnosť č. 2**, potom možno dospieť tejto **diferenciálnej rovnici**

$$C\frac{dT_2}{dt} = q_{t1o} - q_{t3o}\,,$$
$$C\frac{dT_2}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R} - \frac{T_2 - T_0}{R}\,. \tag{8.108}$$

Usporiadaním výrazov v predchádzajúcej rovnici dospejeme k **druhej diferenciálnej rovnici** systému diferenciálnych rovníc v tvare

$$RC\frac{dT_2}{dt} - T_1 + 2T_2 = T_0\,. \tag{8.109}$$

Matematický model, ktorý opisuje správanie sa tepelného systému dvoch izieb podľa Obr. 8.20, je definovaný **systémom dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu** v tvare

$$RC\frac{dT_1}{dt} + 2T_1 - T_2 = q_{to}R + T_0\,,$$
$$RC\frac{dT_2}{dt} - T_1 + 2T_2 = T_0\,. \tag{8.110}$$

Prepíšme tento systém diferenciálnych rovníc do **maticového tvaru** v nasledovnom tvare

$$\begin{bmatrix} RC & 0 \\ 0 & RC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{to} & T_0 \end{bmatrix}. \tag{8.111}$$

Aby bolo možné vypočítať prenosovú maticu systému **G(s)**, preveďme teraz daný systém do **Laplaceovho tvaru** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{T_1(0) = T_2(0) = 0}$

$$\begin{bmatrix} RCs + 2 & -1 \\ -1 & RCs + 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{to}(s) & T_0(s) \end{bmatrix}. \tag{8.112}$$

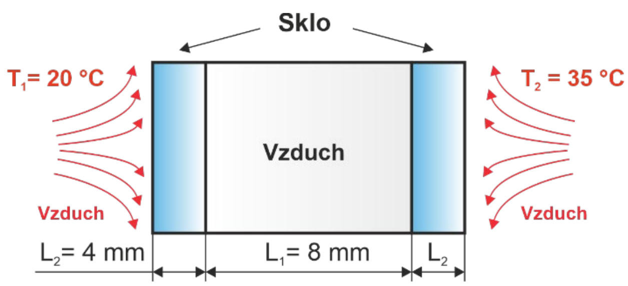
Potom **prenosová matica systému $\mathbf{G(s)}$** pre daný tepelný systém s viacerými vstupmi a výstupmi, bude predstavovať maticu 2 x2, ktorá má nasledovný tvar

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{T_1(s)}{Q_{to}(s)} & \frac{T_1(s)}{T_0(s)} \\ \frac{T_2(s)}{Q_{to}(s)} & \frac{T_2(s)}{T_0(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R^2Cs + 2R}{R^2C^2s^2 + 4RCs + 3} & \frac{1}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} \\ \frac{R}{R^2C^2s^2 + 4RCs + 3} & \frac{1}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} \end{bmatrix}. \tag{8.113}$$

Úlohy na riešenie

Problém 8.1:

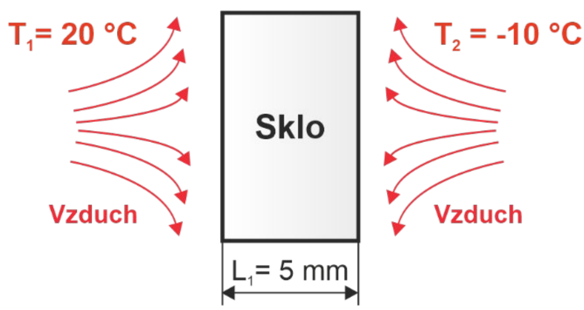
Okno je vyrobené z dvoch vrstiev skla, medzi ktorými sa nachádza izolačná vrstva vzduchu s **tepelnou vodivosťou k_2**, pričom vieme, že sklo má **tepelnú vodivosť k_1**. Ľavá strana okna v miestnosti teploty T_1 je vystavená vzduchu so **súčiniteľom prestupu tepla h_1**. Pravá strana okna s teplotou T_2 je vystavená vzduchu so súčiniteľom prestupu tepla h_2. Predpokladajme, že poznáme tieto vstupné parametre $k_1 = 1.35$ **W.m^{-1}.K^{-1}**, $k_2 = 0.0262$ **W.m^{-1}.K^{-1}**, $h_1 = 0.599$ **W.m^{-2}.K^{-1}**, $h_2 = 0.632$ **W.m^{-2}.K^{-1}** a prierezovú plochú okna $S = 3$ **m^2**. Určte celkový tepelný tok cez okno a rozloženie teplôt po šírke okna, pozri Obr. 8.21.



Obr. 8.21. Izolované okno

Problém 8.2:

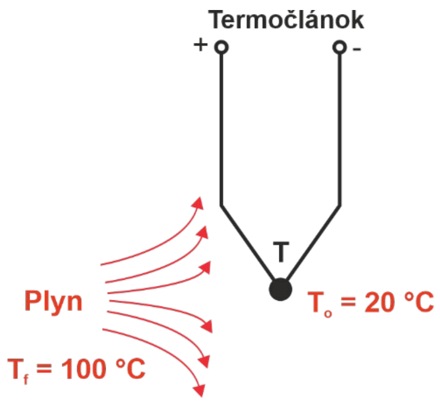
Neizolované okno je vyrobené z jednej vrstvy skla, ktoré má tepelnú vodivosť k_1. Ľavá strana okna v miestnosti teploty T_1 je vystavená vzduchu so **súčiniteľom prestupu tepla h_1**, zatiaľ čo pravá strana okna s teplotou T_2 je vystavená vzduchu so **súčiniteľom prestupu tepla h_2**. Predpokladajme, že poznáme tieto vstupné parametre $k_1 = 1.46$ **W.m^{-1}.K^{-1}**, $h_1 = 0.554$ **W.m^{-2}.K^{-1}**, $h_2 = 0.658$ **W.m^{-2}.K^{-1}** a prierezovú plochu okna $S = 3.5$ **m^2**. Určte celkový tepelný tok cez okno a rozloženie teplôt po šírke okna, pozri Obr. 8.22.



Obr. 8.22. Nezaizolované okno

Problém 8.3:

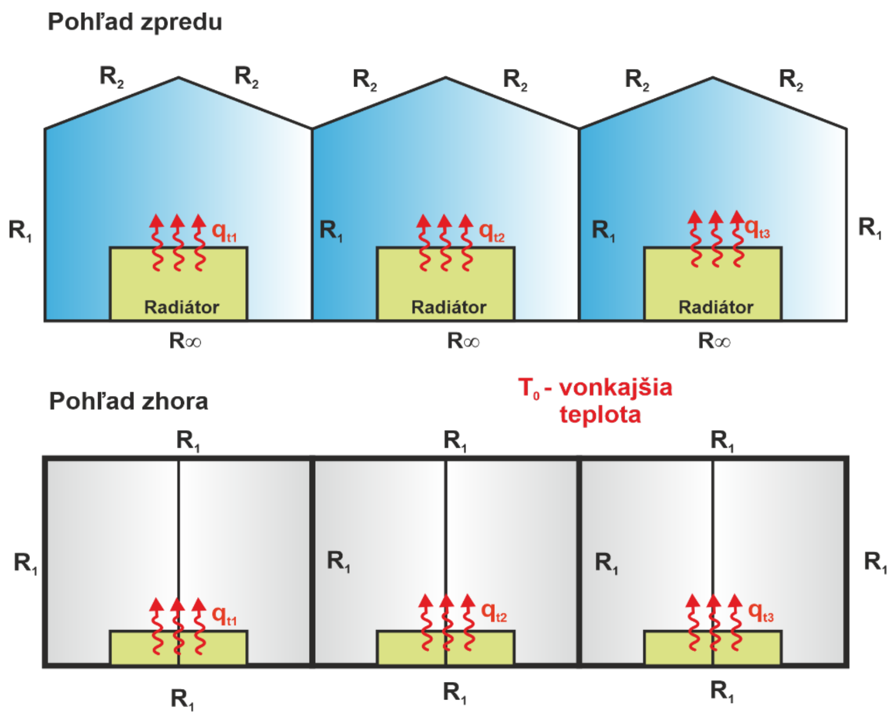
Spoj termočlánku možno aproximovať ako guličku s priemerom **D = 1 mm**, pozri Obr. 8.23. Termočlánok sa používa na meranie teploty tečúceho prúdu plynu. Pre spoj sú známe parametre hustota $\boldsymbol{\rho = 8500\,kg.m^{-3}}$, hmotnostná tepelná kapacita $\mathbf{c = 320\,J/(kg.{}^{\circ}C)}$, ďalej súčiniteľ tepelnej vodivosti $\mathbf{k} = \mathbf{40}$ **W.m**$^{-1}$**.°C**$^{-1}$. Teplota plynu je $\mathbf{T_f} = \mathbf{100}$ **°C** a počiatočná teplota guličky bola $\mathbf{T_0} = \mathbf{20}$ °C. Súčiniteľ prestupu tepla vzduchu je $\mathbf{h} = \mathbf{70}$ **W.m**$^{-2}$**.°C**$^{-1}$. Určte, či možno teplotu uvažovať ako rovnakú v každom bode a odvoďte diferenciálnu rovnicu spoja opisujúcu vzťah medzi teplotou $\mathbf{T_f}$ a teplotou v spoji $\mathbf{T(t)}$.



Obr. 8.23. Termočlánok

Problém 8.4:

Predpokladajme, že chceme matematicky opísať, ako sa mení teplota v radovej zástavbe domov podľa Obr. 8.24. Nájdite matematický model, ktorý predstavuje fyzikálny model zmeny teplôt v domoch takejto radovej zástavby, ak vieme, že vonkajšia teplota je $\mathbf{T_0}$ a v každom dome sa nachádza výhrevné teleso s tepelným výkonom $\mathbf{q_{t1}}$, $\mathbf{q_{t2}}$, $\mathbf{q_{t3}}$. Pri tvorbe modelu uvažujte, že tepelný odpor stien je $\mathbf{R_1}$ a tepelný odpor strechy je $\mathbf{R_2}$. Nájdite matematický model a zapíšte ho do maticového tvaru.



Obr. 8.24. Radová zástavba domov

9 ODOZVA DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV

9.1 MODELOVANIE DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV

Najdôležitejšou funkciou navrhnutého modelu systému napr. **meracieho** alebo **riadiaceho systému** je schopnosť modelu predpovedať, aká hodnota sa prejaví na **výstupe** zo systému v čase **t**, ak na vstup tohto systému privedieme ľubovoľný **vstupný signál u(t)**.

Obr. 9.1. Systém

Ak hovoríme o **dynamickom systéme**, potom reakcia systému nie je spravidla **statickou reakciou**, nakoľko systém nemusí reagovať (a spravidla ani nereaguje) na vstupné podnety (rušenia) v danom okamihu, ale až po uplynutí určitého času **t**. Odozva tohto systému teda dosiahne **ustálený stav**, až po uplynutí tzv. **času ustálenia**. Každému vstupu **u(t)** zodpovedá vždy výstup **y(t)** (reprezentujúci funkciu výstupného signálu). V prípade dynamických systémov budú signály **výstupu y(t)** a **signály vstupov u(t)** prakticky vždy premenlivé časovo závislé signály.

Dynamické systémy a poznanie ich modelov dokáže zodpovedať mnohé otázky o sledovanom systéme. Napr., ako sa bude daný vyšetrovaný systém správať a reagovať na rôzne vstupné podnety príp. rušenia. Pomocou modelu možno takisto vyšetriť vplyv zmeny parametrov systému na výslednú odozvu systému. Pri vyšetrovaní systémov možno pre rôzne prípady dynamických systémov položiť tieto otázky:

1. Ako sa napr. bude meniť priebeh meranej **teploty T** v miestnosti, ak na riadenie takéhoto tepelného systému použijeme **PID regulátor** ?
2. Ako a kedy má **termostat** v miestnosti zareagovať a vyslať signál pre upravenie aktuálnej teploty novú teplotu **T** ?
3. V prípade riadiaceho systému sa môžeme spýtať: Ako sa bude meniť **výstup riadeného tepelného systému domu** v čase **t**, keď požadovanú hodnotu na **termostate (regulátore)** nastavíme na **novú požadovanú hodnotu T** ?

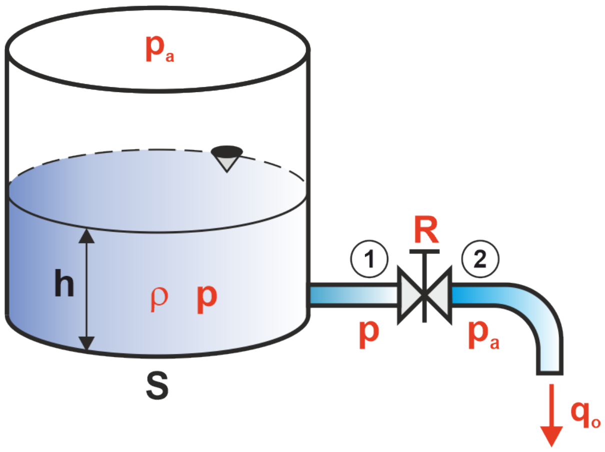
V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali tvorbou **matematických modelov** pre základné fyzikálne systémy ako sú **mechanický systém**, **elektrický systém**, **fluidný systém** a **tepelný systém**. Všetky matematické modely, ktoré boli výsledkom modelovania predstavovali modely **dynamických systémov**, kde **vstupom** do systémov bol časovo premenlivý **vstup u(t)**.

Odvodzovaním matematických modelov pre jednoduché fyzikálne systémy sme identifikovali, že modely takýchto základných fyzikálnych systémov vedú prevažne na **diferenciálne rovnice (sústavy diferenciálnych rovníc) 1. resp. 2 rádu**. Teraz sa budeme zaoberať výpočtom **odozvy y(t)** týchto systémov, tzn. že sa zameriame sa na vyšetrovanie odozvy matematických modelov s časovo premenlivým vstupom **u(t)**.

Na jednoduchých príkladoch matematických modelov si ukážeme viaceré spôsoby, ako vypočítať **odozvu odvodeného matematického modelu**. V prvom prípade sa zameriame na klasické spôsoby riešenia odozvy diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami s budiacou pravou stranou. Ďalej sa pozrieme na výpočet odozvy využitím metódy **Laplaceovej transformácie**. Ukážeme si, ako možno využiť **prenosovú funkciu systému** na riešenie odozvy pre ľubovoľný vstupný signál **u(t)**. Na riešenie využijeme softvérový balík **Matlab (Control Toolbox)**, ktorý umožňuje vyriešiť odozvu systému nielen využitím skriptov, ale takisto interaktívnym spôsobom tvorby modelov prostredníctvom blokových schém **Matlab (Simulink resp. Simscape)**. V našom prípade v rámci tejto knihy sa zameriame iba na písanie simulačných skriptov pre všetky vyšetrované systémy, tzn. že sa nebudeme zaoberať tvorbou simulačných schém.

9.2 VLASTNÁ A NÚTENÁ ODOZVA SYSTÉMU

Na nasledujúcom Obr. 9.2 je znázornený **hydraulický systém jednej nádoby**, z ktorej kvapalina odteká z nádrže priamo do atmosférického tlaku $\mathbf{p_a}$, cez hydraulický odpor s konštantou R. Už vieme, že tento príklad **hydraulického systému s nádržou** predstavuje **systém 1. rádu**.



Obr. 9.2. Dynamický systém s vlastnou odozvou

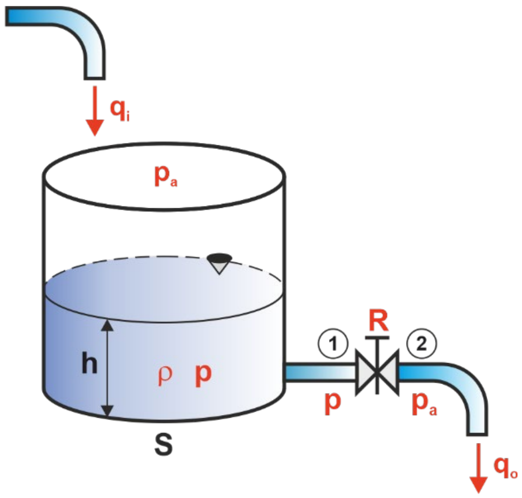
Pre tento systém hydraulickej nádrže, z ktorej odteká hydraulická kvapalina s hustotou $\boldsymbol{\rho}$ cez ventil s odporom **R** priamo do atmosférického tlaku $\mathbf{p_a}$, platí nasledovná **diferenciálna rovnica 1. rádu**

$$\frac{dh}{dt} + \frac{h\rho g}{AR} = 0\,,$$
$$\dot{h} + \frac{h\rho g}{AR} = 0\,. \tag{9.1}$$

Odvodená diferenciálna rovnica predstavuje **diferenciálnu rovnicu 1. rádu** s nulovou pravou stranou. V tomto prípade máme teda systém bez pravej strany, ktorého odozva bude pozostávať iba, z tzv. **vlastnej odozvy** (nakoľko systém nie je budený žiadnou budiacou funkciou **u(t)** na pravej strane rovnice). **Vlastná odozva** systému, ktorá je časťou celkovej odozvy budeného systému po uplynutí určitého času, úplne zanikne. Vlastná odozva (prechodová odozva) systému závisí od počiatočných podmienok systému a takisto vstupných rušení na začiatku sledovania systému.

V nasledujúcom príklade budeme uvažovať podobný **hydraulický systém s jednou nádržou**, avšak budeme predpokladať, že v tomto prípade do nádoby v každom čase **t** priteká rovnaké množstvo kvapaliny, ktoré je dané vstupným **objemovým prítokom** $\mathbf{q_i}$, pozri Obr. 9.3. V tomto prípade bude odtok z nádrže, ktorý vyteká cez ventil s odporom **R** závisieť nielen od počiatočných podmienok $(\mathbf{h(0)} = \mathbf{h_0})$, ale aj od tvaru budiacej funkcie $\mathbf{u(t)} = \mathbf{q_i}$. To znamená, že situácia sa v tomto prípade diametrálne zmení.

Systém s budiacou funkciou $\mathbf{u(t)} = \mathbf{q_i}$, ktorý je vstupný prítokom do nádoby s kvapalinu hustoty $\boldsymbol{\rho}$ je znázornený na Obr. 9.3.



Obr. 9.3. Systém s budiacou funkciou

V tomto prípade systému možno odvodiť **diferenciálnu rovnicu 1. rádu** s pravou stranou **u(t)**. Na pravej strane sa bude teraz nachádzať **budiaca funkcia** systému **u(t)** v podobe známeho **objemového prítoku** $\mathbf{q_i}$ a teda táto rovnica nadobudne tvar

$$\begin{gathered}\frac{dh}{dt} + \frac{h\rho g}{AR} = \frac{q_i}{A}, \\ \dot{h} + \frac{h\rho g}{AR} = \frac{q_i}{A}.\end{gathered} \tag{9.2}$$

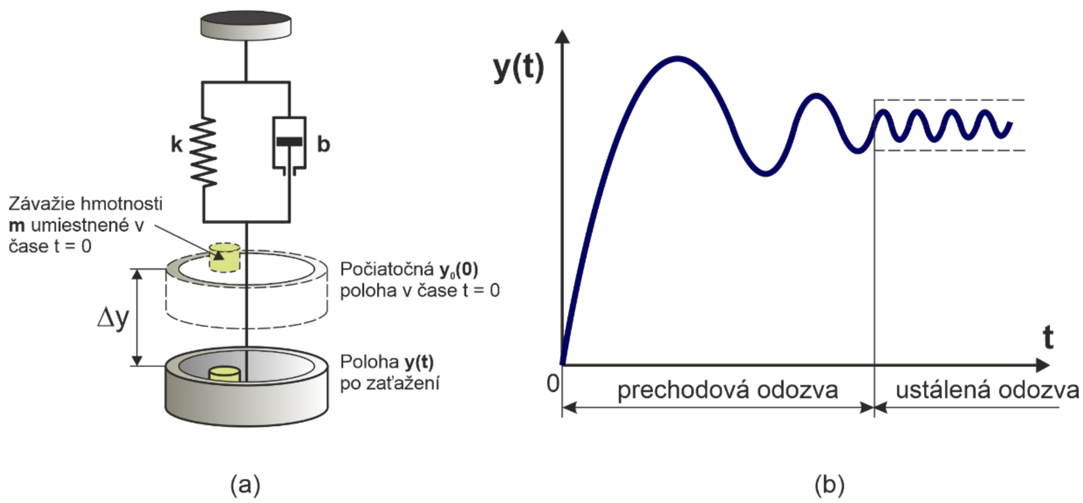
Ako iný príklad systému s pravou stranou možno uviesť napr. **teplomer**, ktorý je umiestnený do kvapaliny s teplotou $\mathbf{T_k}$. Diferenciálna rovnica, ktorá opisuje, ako sa bude meniť teplota **T** teplomera s časom **t** v závislosti od teploty kvapaliny $\mathbf{T_k}$, je rovnako opisovaná **diferenciálnou rovnicou 1. rádu** s pravou stranou

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{RC} = \frac{T_L}{RC},$$
$$\dot{T} + \frac{T}{RC} = \frac{T_L}{RC}. \tag{9.3}$$

9.3 PRECHODOVÁ A USTÁLENÁ ODOZVA SYSTÉMU

Celková odozva každého **dynamického systému** pozostáva vždy z dvoch typov odozvy. Jednu z nich nazývame **prechodovou (dočasnou) odozvou** systému a druhú nazývame **ustálenou (trvalou) odozvou** systému. **Prechodová odozva** systému je tá časť celkovej odozvy systému, ktorá sa na výstupe systému **y(t)** objaví z dôvodu zmeny vstupnej veličiny **u(t)** alebo z dôvodu aplikovania počiatočných podmienok systému (hovoríme o vlastnej nenútenej odozve systéme), táto odozva prakticky vždy po uplynutí určitého času zanikne.

Ustálená odozva systému na druhej strane je tou časťou celkovej odozvy systému, ktorú systém nadobudne, potom ako zaniknú všetky prechodové stavy tohto systému. Rozdiel medzi **ustálenou** a **prechodovou** odozvou možno ukázať na jednoduchom príklade odozvy **mechanického systému pružina-hmota (systém váh so závažím)**, ktorý je zobrazený na Obr. 9.4.



Obr. 9.4. (a) Systém váh so závažím, (b) prechodová a ustálená odozva systému

Náhle umiestnenie závažia hmotnosti **m** na podporné váhy podľa Obr. 9.4 (a) spôsobí, že systém sa náhle rozkmitá a po určitom čase ustáli. Položenie závažia hmotnosti **m** na váhy v počiatočnom momente (**čase t = 0**) náhle zväčší posunutie tejto hmoty **y(t)**. Ako možno vidieť tak hmota **m** sa začne v prvom štádiu pohybovať väčšími výchylkami – hmota osciluje **prechodovou odozvou**, až do momentu, kedy výchylka odozvu systému postupne neustáli a nedosiahne tzv. **ustálený stav**, t. j. stav oscilácie výchylky v pásme ± **2** % ustálenej hodnoty odozvy systému. Poznamenajme, že **ustálená hodnota odozvy** je odozva systému, ktorou bude netlmený systém oscilovať v ustálenom stave teoreticky nekonečne dlhý čas, kým nenastane ďalšie zmena jeho vstupu **u(t)**.

9.4 VYŠETROVANIE ODOZVY DIFERENCIÁLNEJ FUNKCIE

Obe funkcie **vstupu u(t)** alebo **výstupu y(t)** uvažujeme v prípade dynamického systému vždy za časovo závislé premenlivé funkcie. Všetky budeme teda zapisovať ako závislé premenné funkcie času **f(t)**, kde **f** je funkcia a **(t)** hovorí o časovej závislosti premennej **t**. Predpokladajme systém **n-tého rádu** podľa nasledujúceho Obr. 9.5. Tento systém označujeme vo všeobecnosti systémom s jedným vstupom **u(t)** a jedným výstupom **y(t)**.

Obr. 9.5. Systém n-tého rádu

Systém **n-tého rádu** je najvšeobecnejším typom systému, ktorý opisujeme všeobecnou diferenciálnou rovnicou **n-tého rádu s konštantnými koeficientami**. Táto vo všeobecnosti definuje vzťah medzi **vstupnou funkciou** $\mathbf{u(t)}$ a výstupnou funkciou $\mathbf{y(t)}$. Pre **systém n-tého rádu** je diferenciálna rovnica definovaná v tomto tvare

$$a_n \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}} + a_{n-2}\frac{d^{(n-2)}y(t)}{dt^{(n-2)}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^{(m)}u(t)}{dt^{(m)}} + b_{m-1}\frac{d^{(m-1)}u(t)}{dt^{(m-1)}} + b_{n-2}\frac{d^{(m-2)}u(t)}{dt^{(m-2)}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)\,, \tag{9.4}$$

kde $\mathbf{a_0}, \dots, \mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_0}, \dots, \mathbf{b_m}$ sú konštanty. Systém opísaný takouto diferenciálnou rovnicou nazývame **lineárnym časovo závislým dynamickým systémom**.

V niektorých prípadoch môžu byť predchádzajúce konštantné parametre systému $\mathbf{a_0}, \dots, \mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_0}, \dots, \mathbf{b_m}$, aj časovo závislé funkcie $\mathbf{a_0(t)}, \dots, \mathbf{a_n(t)}$ alebo $\mathbf{b_0(t)}, \dots, \mathbf{b_m(t)}$, resp. tieto parametre systému môžu byť v niektorých prípadoch nielen časovo závislé funkcie, ale takisto funkcie, ktoré sú závislé od premennej **y(t)**. Poznamenajme, že ak parametre systému $\mathbf{a_0}, \dots, \mathbf{a_n}$ sú funkciami časovo závislými na premennej **y(t)**, potom systém takéhoto typu nadobudne charakter **nelineárneho typu systému**. Poznamenajme, že **reálne realizovateľné systémy** v praxi sú len tie, ktoré spĺňajú podmienku, že stupeň diferenciálnej rovnice (t. j. stupeň najväčšej derivácie premennej y(t) na ľavej strane rovnice), je väčší ako stupeň derivácie budiacej funkcie **u(t)** na pravej strane $\mathbf{n \geq m}$.

Ďalej budeme predpokladať, že predchádzajúci systém definovaný rovnicou (9.1) je časovo závislým systémom **n-tého rádu s pravou stranou**, ktorý je opísaný jednoduchou diferenciálnou rovnicou s budiacou funkciou $\mathbf{u_1 = b_0 \cdot u(t)}$ na pravej strane, ktorá neobsahuje žiadne derivácie vstupnej premennej $\mathbf{u(t)}$

$$a_n \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}} + a_{n-2} \frac{d^{(n-2)}y(t)}{dt^{(n-2)}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 \cdot u(t) \,. \tag{9.5}$$

Riešenie takejto diferenciálnej rovnice **n-tého rádu** vo všeobecnosti pozostáva z dvoch častí a to:

- zo všeobecného riešenia (riešenia diferenciálnej rovnice bez pravej strany),
- a z riešenia partikulárneho integrálu (riešenia diferenciálnej rovnice s pravou stranou).

Potom, celkové riešenie $\mathbf{y(t)}$ odozvy daného systému **n-tého rádu** možno zapísať ako súčet **všeobecného riešenia** $\mathbf{y_0(t)}$ (homogénneho riešenia) a **partikulárneho integrálu** $\mathbf{y_P(t)}$. Platí, že

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \,. \tag{9.6}$$

9.5 VŠEOBECNÉ RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $\mathbf{y_0(t)}$ je riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou v tvare

$$a_n \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}} + a_{n-2} \frac{d^{(n-2)}y(t)}{dt^{(n-2)}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \,. \tag{9.7}$$

Pretože, táto forma homogénnej diferenciálnej rovnice nezávisí od budiacej funkcie $\mathbf{u(t)}$, ale len od parametrov systému, potom riešenie $\mathbf{y_0(t)}$ je takisto nazývané aj **vlastnou** alebo **nenútenou odozvou** systému. Riešenie **homogénnej diferenciálnej rovnice** možno vo všeobecnosti zapísať v tomto tvare

$$y_0(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \cdots + C_n y_n(t) \,, \tag{9.8}$$

kde $\mathbf{C_1, C_2, \cdots, C_n}$ sú konštanty závislé od vstupných **počiatočných** alebo **okrajových podmienok**. Funkcie $\mathbf{y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)}$ sú závislé od koreňov tzv. **charakteristickej algebrickej rovnice**

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0 \,. \tag{9.9}$$

Ak všetky korene **charakteristickej rovnice** $\mathbf{r_1, r_2, \cdots, r_n}$ sú reálne čísla, potom **í-te** riešenie charakteristickej rovnice možno zapísať v tvare

$$y_i(t) = C_i e^{r_i t}, \quad i = 1,2,\cdots,n\,. \tag{9.10}$$

A teda, **celkové všeobecné riešenie** homogénnej diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou je, potom definované v tvare

$$y_0(t) = C_1\, e^{r_1 t} + C_2\, e^{r_2 t} + \cdots + C_n\, e^{r_n t}\,. \tag{9.11}$$

Pretože, korene **charakteristickej rovnice** nemusia byť vždy len **reálne čísla**, ale vo všeobecnosti môže ísť o **komplexné čísla**. V tomto prípade môžeme rozlíšiť rôzne formy čiastkových funkcií pre jednotlivé prípady koreňov **charakteristickej rovnice**. Na základe charakteru vypočítaného koreňa charakteristickej rovnice možno rozlíšiť viacero prípadov. Podľa **i-tého** vypočítaného koreňa $\mathbf{r_i}$ možno odhadnúť budúci tvar funkcie $\mathbf{y_i(t)}$, ktorý opisuje čiastkovú odozvu systému. Pre prípady **reálnych** koreňov resp. **komplexných** koreňov, ktoré môžu byť aj **k-násobné korene**, možno rozlíšiť tieto prípady:

1. pre **reálny nenásobný koreň r**: bude mať funkcia tvar $\mathbf{e^{rt}}$
2. pre **reálny k-násobný koreň r**: je nutné pre každý takýto **k**-násobný koreň definovať **k** funkcií v tvare $\mathbf{e^{rt}, t\, e^{rt}, \cdots, t^{k-1}\, e^{rt}}$
3. pre **nenásobný komplexný koreň** $r \pm j\omega$: je potrebné uvažovať dve funkcie v harmonickom tvare $\mathbf{e^{rt} \cos \omega t}$ a $\mathbf{e^{rt} \sin \omega t}$
4. a napokon pre **k-násobný komplexný koreň** $r \pm j\omega$: je nutné zadefinovať **k** funkcií v tvare $\mathbf{e^{rt} \cos \omega t,\ e^{rt} \sin \omega t, t\, e^{rt} \cos \omega t, , t\, e^{rt} \sin \omega t, \cdots, t^{k-1}\, e^{rt} \cos \omega t, t^{k-1}\, e^{rt} \sin \omega t}$.

Príklad č. 9.1:

Nájdite riešenie nasledovnej homogénnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = 0\,. \tag{9.12}$$

Pre túto diferenciálnu rovnicu možno napísať zodpovedajúcu **charakteristickú rovnicu** v tomto tvare

$$r^3 - 3r - 2 = 0 \tag{9.13}$$

alebo v tvare

$$(r+1)^2(r-2) = 0\,. \tag{9.14}$$

Riešením charakteristickej rovnice sú tri reálne korene $\mathbf{r_{1,2,3} = -1, -1}$ a $\mathbf{2}$, kde jeden z koreňov je duplicitným $\mathbf{k = 2}$ násobným reálnym koreňom $\mathbf{r = -1}$. Potom všeobecné riešenie tejto diferenciálnej rovnice zapísanej na základe predchádzajúcich prípadov nadobudne tvar

$$y_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2\, t\, e^{-t} + C_3 e^{2t}\,, \tag{9.15}$$

kde C_1, C_2, C_3 sú **integračné konštanty**.

9.6 PARTIKULÁRNE RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE

Pozrime sa teraz na **partikulárne riešenie** diferenciálnej rovnice (9.16) s pravou stranou **u(t)**.

$$a_n \frac{d^{(n)} y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + a_{n-2} \frac{d^{(n-2)} y(t)}{dt^{(n-2)}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)\,. \tag{9.16}$$

Partikulárny integrál $\mathbf{y_p(t)}$ pri hľadaní riešenia diferenciálnej rovnice závisí (9.16) od tvaru alebo typu **budiacej funkcie** $\mathbf{u(t)}$ na pravej strane. Z mnohých metód určovania partikulárneho integrálu možno uviesť napr. **metódu neurčitých koeficientov**, ktorá sa využíva pre analýzu dynamických systémov. Budiace funkcie bežne vyskytujúce sa v reálnom živote inžinierskych systémov sú: exponenciálne $\mathbf{e^{rt}}$, polynomické $\mathbf{x^2}$ alebo harmonické $\mathbf{\sin \omega t}$ resp. $\mathbf{\cos \omega t}$. Mnohé ďalšie typy budiacich funkcií možno získať aproximáciou týchto funkcií alebo ich kombináciou. V prípade metódy neurčitých koeficientov predpokladáme riešenie tvaru partikulárneho integrálu $\mathbf{y_p(t)}$ v tvare budiacej funkcie **u(t)**. Tvar partikulárneho integrálu $\mathbf{y_p(t)}$ určíme podľa nasledujúcej tabuľky.

Tabuľka 9.1. Predpokladané tvary partikulárneho integrálu $y_p(t)$

Budiaca funkcia u(t)	Tvar partikulárneho integrálu $y_p(t)$
Exponenciálna funkcia $\mathbf{K \cdot e^{rt}}$	$\mathbf{A \cdot e^{rt}}$, ak **r** nie je koreňom charakteristickej rovnice
	$\mathbf{A \cdot t \cdot e^{rt}}$, ak **r** je **nenásobným koreňom** charakteristickej rovnice
	$\mathbf{A \cdot t^k \cdot e^{rt}}$, ak **r** je **násobný koreň** charakteristickej rovnice
Polynomická funkcia $\mathbf{K \cdot t^k}$	**polynóm:** $\mathbf{A_0 + A_1 t + \cdots + A_k t^k}$, ak charakteristická rovnica nemá nulové riešenie
	polynóm: $\mathbf{A_0 + A_1 t + \cdots + A_k t^k}$ alebo **integrál polynómu**, ak nula je riešením charakteristickej rovnice
Harmonická funkcia $\mathbf{K \cdot \cos \omega t}$, $\mathbf{K \cdot \sin \omega t}$	$\mathbf{A \cos \omega t + B \sin \omega t}$

Príklad č. 9.2:

Nájdite partikulárne riešenie nasledujúcej diferenciálnej rovnice

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = t^3 + t\,. \tag{9.17}$$

Keďže pravá strana diferenciálnej rovnice má tvar polynomickej funkcie podľa tabuľky zo strany 290, potom predpokladáme riešenie **partikulárneho integrálu $\mathbf{y_p(t)}$** v tomto tvare

$$y_p(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3\,. \tag{9.18}$$

Nájdime príslušné derivácie prechádzajúcej funkcie podľa času **t,** až po stupeň derivácie druhého stupňa, ktoré dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice

$$\begin{gathered}\dot{y}_p(t) = A_1 + 2A_2t + 3A_3t^2\,,\\ \ddot{y}_p(t) = 2A_2 + 6A_3t\,,\\ 2A_2 + 6A_3t + 2(A_1 + 2A_2t + 3A_3t^2) + A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 = t^3 + t\,.\end{gathered} \tag{9.19}$$

Usporiadaním jednotlivých výrazov podľa mocnín premennej **t** (t. j. zoradením od najvyššej po najnižšiu mocninu) dostávame

$$A_3t^3 + (A_2 + 6A_3)t^2 + (A_1 + 4A_2 + 6A_3)t + A_0 + 2A_1 + 2A_2 = t^3 + t\,. \tag{9.20}$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách **t** na oboch stranách predchádzajúcej rovnice dostávame systém lineárnych rovníc v tvare

$$\begin{aligned}&A_0 + 2A_1 + 2A_2 = 0\,,\\ &A_1 + 4A_2 + 6A_3 = 1\,,\\ &A_2 + 6A_3 = 0\,,\\ &A_3 = 1\,,\end{aligned} \tag{9.21}$$

ktorý zapísaný do maticového tvaru nadobúda tvar

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_0\\ A_1\\ A_2\\ A_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}. \tag{9.22}$$

Riešením predchádzajúceho lineárneho systému dostávame výsledky pre neznáme koeficienty $\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ a $\mathbf{A_3}$

$$A_0 = -26, A_1 = 19, A_2 = -6 \text{ a } A_3 = 1\,. \tag{9.23}$$

Potom **partikulárny integrál $\mathbf{y_p(t)}$** nadobudne tvar

$$y_p(t) = -26 + 19t - 6t^2 + t^3\,. \tag{9.24}$$

Príklad č. 9.3:

Nájdite partikulárne riešenie $\mathbf{y_p}$ nasledovnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{dy}{dt} + y = 2e^{2t}\cos 3t\,. \tag{9.25}$$

Keďže pravá strana diferenciálnej rovnice má tvar **harmonickej funkcie** podľa tabuľky zo strany 290, predpokladáme riešenie **partikulárneho integrálu $\mathbf{y_p}$** v tomto tvare

$$y_p(t) = Ae^{2t}\cos 3t + Be^{2t}\sin 3t\,. \tag{9.26}$$

Nájdime prvú deriváciu partikulárnej funkcie $\mathbf{y_p(t)}$ podľa času **t** v tomto tvare

$$\begin{aligned} \dot{y}_p(t) &= 2Ae^{2t}\cos 3t - 3Ae^{2t}\sin 3t + 2Be^{2t}\sin 3t + 3B\,e^{2t}\cos 3t\,, \\ &= e^{2t}\cos 3t\,(2A + 3B) + e^{2t}\sin 3t\,(2B - 3A)\,, \end{aligned} \tag{9.27}$$

ktorú následne dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice. Musí teda platiť, že

$$e^{2t}\cos 3t\,(2A + 3B) + e^{2t}\sin 3t\,(2B - 3A) + Ae^{2t}\cos 3t + Be^{2t}\sin 3t = 2e^{2t}\cos 3t\,. \tag{9.28}$$

Usporiadaním jednotlivých výrazov podľa podobných tvarov funkcií **cos** a **sin**, dostávame

$$(3A + 3B)\cos 3t + (3B - 3A)\sin 3t = 2\cos 3t\,. \tag{9.29}$$

A potom porovnaním koeficientov pri príslušných výrazoch $\mathbf{\cos 3t}$ a $\mathbf{\sin 3t}$ na oboch stranách rovnice dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{gathered} 3A + 3B = 2\,, \\ 3B - 3A = 0 \;\Rightarrow A = B\,, \end{gathered} \tag{9.30}$$

ktorého riešením sú koeficienty

$$A = B = \frac{1}{3}\,. \tag{9.31}$$

Napokon výsledný **partikulárny integrál** nadobúda tento tvar

$$y_p(t) = \frac{e^{2t}}{3}(\cos 3t + \sin 3t)\,. \tag{9.32}$$

9.7 POČIATOČNÉ PODMIENKY A KOMPLETNÉ RIEŠENIE

Kompletné riešenie **diferenciálnej rovnice** je dané ako súčet všeobecného $\mathbf{y_0(t)}$ a partikulárneho riešenia $\mathbf{y_p(t)}$ diferenciálnej rovnice. Platí, že

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = C_1\, e^{r_1 t} + C_2\, e^{r_2 t} + \cdots + C_n\, e^{r_n t} + y_p(t)\,. \tag{9.33}$$

Toto riešenie, však ešte stále obsahuje neznáme konštanty $\mathbf{C_1, C_2, \cdots, C_n}$. Tieto hodnoty by mali platiť aspoň pre jeden prípad riešenia. Aby sme vedeli vypočítať konštanty $\mathbf{C_1, C_2, \cdots, C_n}$, musíme poznať hodnotu funkcie **y(t)** v čase **t** a takisto hodnoty všetkých jej derivácií až po $\mathbf{(n-1)}$ deriváciu v tom istom uvažovanom čase **t**. Bežne za počiatočný čas, v ktorom počítame tieto hodnoty uvažujeme čas $\mathbf{t = 0}$. Potom hodnota $\mathbf{y(t = 0) = y_0}$ a jej derivácie $\mathbf{\dot{y}(0) = y_1, \ddot{y}(0) = y_2, \frac{dy^{(3)}}{dt^{(3)}}(0) = y_3, \ldots, \frac{dy^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(0) = y_{n-1}}$ po stupeň derivácie (n-1) v čase **t = 0** nazývame **počiatočnými podmienkami**.

$$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_1, \ddot{y}(0) = y_2, \frac{dy^{(3)}}{dt^{(3)}}(0) = y_3, \ldots, \frac{dy^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}(0) = y_{n-1}\,. \tag{9.34}$$

Poznatok týchto počiatočných podmienok alebo okrajových podmienok je nutné k výpočtu neznámych konštánt $\mathbf{C_1, C_2, \cdots, C_n}$.

Príklad č. 9.4:

Vypočítajte celkové riešenie diferenciálnej rovnice z predchádzajúceho príkladu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = t^3 + t\,, \tag{9.35}$$

pre ktorú poznáme jej riešenie **partikulárneho integrálu $\mathbf{y_p(t)}$** v tvare

$$y_p(t) = -26 + 19t - 6t^2 + t^3 . \tag{9.36}$$

Pri riešení uvažujte tieto počiatočné podmienky

$$y(0) = -25 \quad \text{a}\ \dot{y}(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 2 . \tag{9.37}$$

Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice s pravou stranou bude mať tvar

$$\begin{gathered} r^2 + 2r + 1 = 0 , \\ (r+1)^2 = 0 . \end{gathered} \tag{9.38}$$

Potom riešením charakteristickej rovnice je jeden $\mathbf{k = 2}$ násobný reálny koreň $\mathbf{r_{1,2} = -1}$. To znamená, že funkcia všeobecného riešenia $\mathbf{y_0}$ bude mať tvar podľa tabuľky na s. 290

$$y_0 = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} . \tag{9.39}$$

Celkové riešenie vo všeobecnom tvare získame súčtom **všeobecného riešenia** a **riešenia partikulárneho integrálu** ako

$$y(t) = y_0 + y_P = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - 26 + 19t - 6t^2 + t^3. \tag{9.40}$$

Poďme teraz vypočítať neznáme konštanty $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$, potom dokážeme vypočítať kompletné riešenie odozvy systému $\mathbf{y(t)}$ s uvažovaním počiatočných podmienok. Uvažovaním počiatočnej podmienky v čase $\mathbf{y(0) = 25}$, možno vypočítať neznámu konštantu $\mathbf{C_1}$ nasledovným spôsobom

$$y(0) = C_1 - 26 = -25 . \tag{9.41}$$

Riešením je teda konštanta $\mathbf{C_1 = 1}$. Druhú konštantu $\mathbf{C_1}$ vypočítame, použitím druhej počiatočnej podmienky pre prvú deriváciu $\mathbf{\dot{y}(0) = 2}$. Zderivujme funkciu podľa času **t**

$$\frac{dy}{dt} = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - C_2 t e^{-t} + 19 - 12t + 3t^2 . \tag{9.42}$$

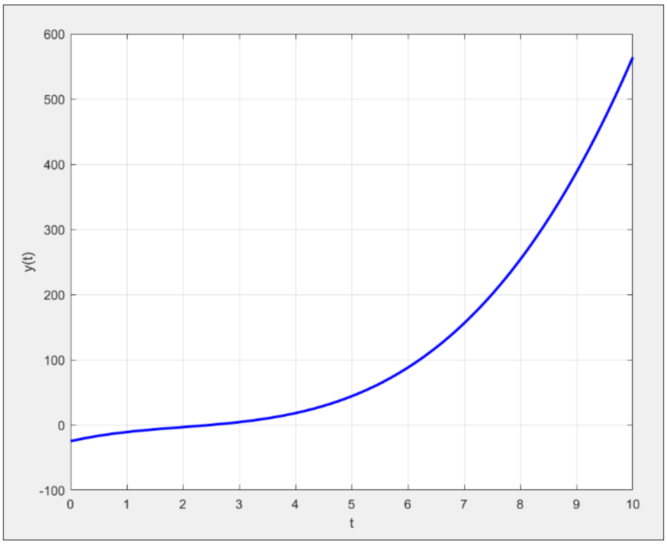
Ak teda v čase $\mathbf{t = 0}$ platí druhá počiatočná podmienka, potom musí platiť, že

$$\dot{y}(0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = -C_1 + C_2 + 19 = 20\,, \tag{9.43}$$

potom hodnota $\mathbf{C_2 = 2}$. Kompletné riešenie odozvy daného systému $\mathbf{y(t)}$, ktoré je znázornené na nasledujúcom Obr. 9.6, je definované funkciou v tomto tvare

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t} - 26 + 19t - 6t^2 + t^3\,. \tag{9.44}$$

```
clc
clear

t=0:0.01:10;
y=exp(-t)+2*t.*exp(-t)-
26+19*t-6*t.^2+t.^3;

figure(1)
plot(t,y,'b','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



Obr. 9.6. Riešenie odozvy systému y(t)

Úlohy na riešenie:

Problém 9.1:

Nájdite a zobrazte všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou

$$5\frac{d^3y}{dt^3} + 25\frac{d^2y}{dt^2} + 15\frac{dy}{dt} - 10y = 0\,, \qquad (9.45)$$

ak uvažujeme počiatočné podmienky $\mathbf{y(0) = -2}, \frac{\mathbf{dy(0)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}$ **a** $\frac{\mathbf{d^2y(0)}}{\mathbf{dt^2}} = \mathbf{3}$.

Problém 9.2:

Nájdite a zobrazte všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou

$$10\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = 0\,, \qquad (9.46)$$

ak uvažujeme počiatočné podmienky $\mathbf{y(0) = 1}, \frac{\mathbf{dy(0)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}, \frac{\mathbf{d^2y(0)}}{\mathbf{dt^2}} = \mathbf{-2}$.

Problém 9.3:

Nájdite a zobrazte všeobecné a partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou

$$5\frac{d^2y}{dt^3} + 10\frac{dy}{dt} - 5y = 5e^{2t}\cos 3t + 10e^{2t}\sin 3t\,, \qquad (9.47)$$

ak predpokladáme počiatočné podmienky $\mathbf{y(0) = -1}, \frac{\mathbf{dy(0)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}$.

Problém 9.4:

Nájdite a zobrazte všeobecné a partikulárne diferenciálnej rovnice s pravou stranou

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{dy}{dt} - y = 2t^3 + t\,, \qquad (9.48)$$

ak predpokladáme počiatočné podmienky $\mathbf{y(0) = -1}, \frac{\mathbf{dy(0)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{2}, \frac{\mathbf{d^2y(0)}}{\mathbf{dt^2}} = \mathbf{-2}$.

10 SYSTÉM 1. RÁDU

Nakoľko, všetky matematické modely fyzikálnych systémov, ktorými sme sa do tohto momentu zaoberali boli opisované diferenciálnymi rovnicami resp. sústavou diferenciálnych rovníc **1.** a **2.** rádu, obmedzíme sa pri vyšetrovaní práve na tieto dynamické systémy **1.** a **2. rádu**. V prípade týchto systémov si predstavíme spôsob nájdenia všeobecného riešenia a partikulárne riešenia diferenciálnej rovnice. V tejto kapitole sa bližšie pozrieme na vyšetrovanie odozvy **systému 1. rádu**. Poznamenajme, že všetky ostatné dynamické systémy vyšších rádov sú kombináciou práve systémov **1.** a **2. rádu**. Systémami vyšších rádov sa však zaoberať nebudeme, nakoľko ako sme uviedli sú vo všeobecnosti kombináciou systémov **1.** a **2. rádu**.

Predpokladajme **systém 1. rádu** podľa Obr. 10.1 s jedným vstupom $\mathbf{u(t)}$ a jedným výstupom $\mathbf{y(t)}$, v prípade, ktorého predpokladáme budiacu funkciu $\mathbf{u_1(t)}$ v tvare $\mathbf{u_1(t) = b_0u(t)}$.

Obr. 10.1. Systém 1. rádu

Tento **systém 1. rádu** možno opísať touto diferenciálnou funkciou v tvare

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \,, \qquad (10.1)$$

kde $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}$ a $\mathbf{b_0}$ sú konštanty.

Nájdime celkové riešenie tejto diferenciálnej rovnice určením jej **všeobecného riešenia** a **partikulárneho integrálu**, v tvare $\mathbf{y = y_0 + y_P}$. Na nájdenie všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice, prepíšme predchádzajúcu diferenciálnu rovnicu **1. radu** do homogénneho tvaru (diferenciálnej rovnice s nulou pravou stranou). **Homogénna diferenciálna rovnica** systému **1. rádu** bude mať tvar

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \,, \qquad (10.2)$$

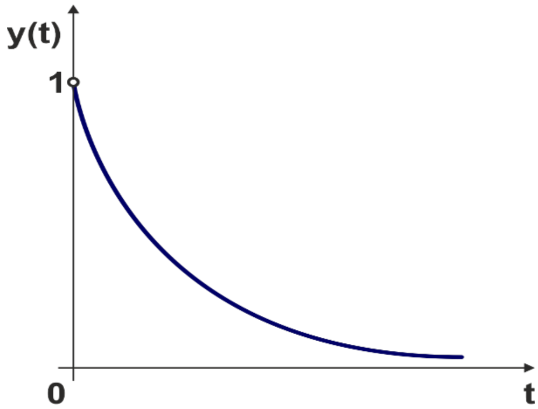
kde $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}$ sú parametre systému. Nájdime riešenie tejto diferenciálnej rovnice bez pravej strany. **Charakteristická rovnica**, ktorá zodpovedá tejto diferenciálnej rovnici bude mať tvar

$$a_1 r + a_0 = 0 \,. \qquad (10.3)$$

To znamená, že riešením predchádzajúcej lineárnej rovnice je jeden reálny koreň $\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{a_0}}{\mathbf{a_1}}$ a teda **všeobecné riešenie homogénnej rovnice** možno napísať v tomto tvare

$$y_0 = Ae^{-\frac{a_0}{a_1}t}. \tag{10.4}$$

Hodnotu konštanty **A** možno vypočítať využitím uvažovaných počiatočných podmienok. Ak teda, predpokladáme, že $\mathbf{y(0) = 1}$, potom $\mathbf{A = 1}$. Nasledujúci Obr. 10.2 zobrazuje vlastnú (nenútenú) odozvu daného **systému 1. rádu**, ktorá je popísaná exponenciálnou tlmenou funkciou.



Obr. 10.2. Nenútená (vlastná) odozva systému

Ďalej budeme predpokladať, že diferenciálna rovnica má na jej pravej strane **budiacu funkciu** $\mathbf{u_1(t)}$, v tvare $\mathbf{u_1(t) = b_0u(t)}$, kde $\mathbf{u(t)}$ má tvar skokovej funkcie $\mathbf{u(t) = K}$

$$a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = u_1(t) = b_0u(t) = b_0K. \tag{10.5}$$

Predpokladáme, že riešenie tejto diferenciálne rovnice pozostáva z dvoch častí a to zo **všeobecného riešenia** homogénnej diferenciálnej rovnice a **partikulárneho integrálu** v tvare $\mathbf{y = y_0 + y_p}$. Riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice sme už vyriešili v predchádzajúcom kroku

$$a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = 0 \tag{10.6}$$

a zistili, že toto riešenie nadobúda tvar **exponenciálnej funkcie**

$$y_0 = C \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1}t}. \tag{10.7}$$

Vypočítajme teraz **partikulárny integrál** danej **diferenciálnej rovnice 1. rádu** s pravou stranou. Na nájdenie tvaru **partikulárneho integrálu $\mathbf{y_p}$**, je nutné poznať tvar budiacej funkcie **u(t)**. Predpokladajme, že tvar budiacej funkcie predstavuje skokový signál **u(t)=K**, pre ktorý konštanta **A** je tvarom partikulárneho integrálu

$$y_p = A\,. \tag{10.8}$$

Zderivovaním tejto funkcie $\mathbf{y_p}$ podľa času **t** a jej dosadením do pôvodnej diferenciálnej rovnice dostávame

$$\begin{gathered} \dot{y}_p = 0\,, \\ 0 + a_0 A = b_0 K\,, \end{gathered} \tag{10.9}$$

potom pre konštantu **A** musí platiť, že

$$A = \frac{b_0}{a_0} K\,. \tag{10.10}$$

Hľadaný **partikulárny integrál $\mathbf{y_p}$** teda nadobudne tvar

$$y_p = A = \frac{b_0}{a_0} K\,. \tag{10.11}$$

Potom, pre **celkové riešenie systému 1. rádu**, ktoré je dané ako súčet **všeobecného riešenia a partikulárneho integrálu $\mathbf{y = y_0 + y_p}$**, musí platiť

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} t} + \frac{b_0}{a_0} k\,. \tag{10.12}$$

Na nájdenie kompletného riešenia, je nutné ešte určiť hodnotu neznámej integračnej konštanty **C** s uvažovaním počiatočných podmienok. Predpokladajme jednu nulovú počiatočnú podmienku v čase $\mathbf{t = 0}$ t. j. $\mathbf{y(0) = 0}$, potom platí

$$0 = C + \frac{b_0}{a_0} K\,, \tag{10.13}$$

z čoho vyplýva konštanta $\mathbf{C = -\frac{b_0}{a_0} K}$.

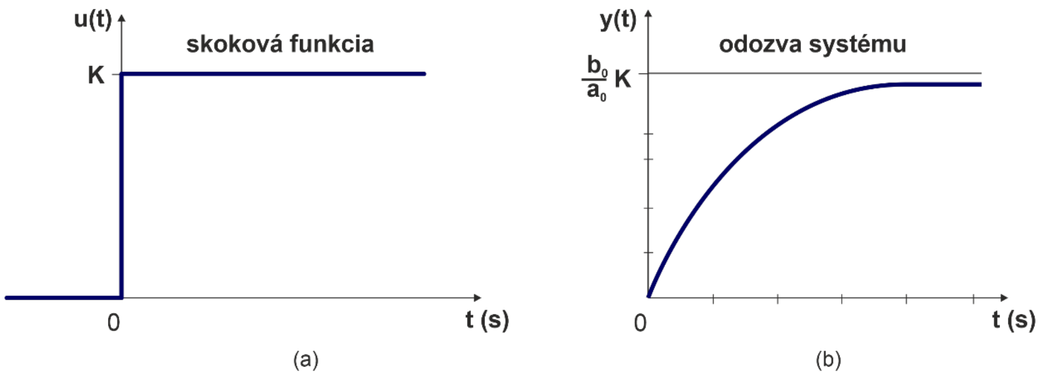
Napokon, riešenie **systému 1. rádu** možno napísať v tomto tvare časovo závislej premennej funkcie

$$y = \frac{b_0}{a_0} K \left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right), \tag{10.14}$$

kde pre $\mathbf{t} \to \infty$ exponenciálny tvar riešenia konverguje k nulovej hodnote. **Exponenciálny výraz** vo výslednej odozve systému predstavuje **prechodové riešenie odozvy systému**. **Ustálenú odozvu systému** predstavuje hodnota riešenia **y** pre čas $\mathbf{t} \to \infty$, ktorá má tvar $\mathbf{y}_\infty = \frac{\mathbf{b_0}}{\mathbf{a_0}}\mathbf{K}$. Potom riešenie systému prvého rádu možno takisto prepísať do tvaru

$$y = y_\infty \left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right) = \frac{b_0}{a_0} K \left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right). \tag{10.15}$$

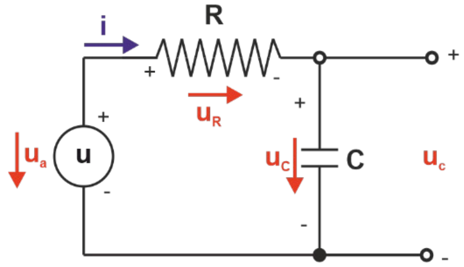
Nasledujúci Obr. 10.3 (b) zobrazuje grafický priebeh odozvy **systému 1. rádu** v prípade uvažovanej jednotkovej skokovej funkcie $\mathbf{u(t) = K}$, pozri Obr. 10.3 (a).



Obr. 10.3. (a) jednotková skoková funkcia u(t) = K, (b) riešenie odozvy systému

Príklad č. 10.1:

Elektrický systém, ktorý pozostáva z elektrického odporu **R** a kondenzátora kapacity **C**, ktoré sú zapojené v sérii je znázornený na Obr. 10.4. Ak predpokladáme, že vstupným napätím je budiaca funkcia $\mathbf{u(t) = u_a}$ so skokovou zmenou napätia $\mathbf{u_a}$, nájdite výstupnú funkciu **y(t)**, ktorá opisuje, ako sa mení napätie $\mathbf{u_c}$ na kondenzátore **C**.



Obr. 10.4. RC obvod

Daný systém možno opísať **diferenciálnou rovnicu 1. rádu**. Systém je teda typickým príkladom **systému 1. rádu**, pre ktorý platí tento tvar diferenciálnej rovnice

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u(t) = u_a \, . \tag{10.16}$$

Na nájdenie odozvy tohto systému využijeme odvodený všeobecný tvar odozvy systému **1. rádu**. Na základe porovnania so všeobecnou **diferenciálnou rovnicou 1. rádu**

$$a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \, , \tag{10.17}$$

možno identifikovať parametre daného elektrického systému. To znamená, že pre náš prípad je $\mathbf{a_1 = RC, a_0 = 1}$ a $\mathbf{b_0 = 1}$. Potom na základe známej všeobecnej funkcie $\mathbf{y(t)}$, ktorá opisuje tvar riešenia **systému 1. rádu**, kde vstupom je **skoková funkcia** $\mathbf{u_1(t) = b_0 u(t)}$, musí platiť, že

$$y = \frac{b_0}{a_0}K\left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right) \tag{10.18}$$

a teda tvar riešenia pre nami uvažovaný **elektrický systém (RC obvodu)** možno napísať v tomto tvare

$$u_c = u_a\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) . \tag{10.19}$$

Príklad č. 10.2:

Ďalej budeme uvažovať podobný elektrický RC obvod, ktorý pozostáva z elektrického odporu $\mathbf{R = 1\ M\Omega}$, zapojeného v sérií s kondenzátorom kapacity $\mathbf{C = 2\ \mu F}$ podľa Obr. 10.4. V čase $\mathbf{t = 0}$ začneme tento elektrický obvod budiť lineárne rastúcou funkciu v čase $\mathbf{u(t) = 4t\ V}$. Určite, ako sa mení napätie na kondenzátore $\mathbf{u_c(t)}$ s časom $\mathbf{t}$.

Diferenciálna rovnica, ktorá opisuje odozvu systému v tomto prípade predstavuje opäť **diferenciálnu rovnicu 1. rádu**, ktorú možno odvodiť v tomto tvare

$$\begin{gathered} RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u_a \, , \\ 2\frac{du_c}{dt} + u_c = 4t \, . \end{gathered} \tag{10.20}$$

Pre túto diferenciálnu rovnicu možno, na základe charakteristickej rovnice, predpokladať všeobecné riešenie homogénne diferenciálnej rovnice v tvare $\mathbf{u_{c0}(t) = C \cdot e^{rt}}$. Použitím tejto funkcie a jej dosadením do diferenciálnej rovnice s nulovou pravou musí platiť, že

$$
\begin{gathered}
2Cre^{rt} + Ce^{rt} = 0\,, \\
2r = -1\,.
\end{gathered}
\tag{10.21}
$$

Z čoho možno vypočítať koreň c**harakteristickej rovnice** $\mathbf{r = -\frac{1}{2}}$ a potom zadefinovať riešenie **diferenciálnej rovnice 1. rádu** vo všeobecnom tvare $\mathbf{u_{c0}(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t}}$.

Pre nútenú odozvu diferenciálnej rovnice s pravou stranou, kde budiaca funkcia $\mathbf{u(t) = 4t}$ (má tvar polynómu 1. stupňa), budeme predpokladať riešenie v tvare lineárnej funkcie $\mathbf{u_p = A + Bt}$ ($\mathbf{u_p}$ **partikulárny integrál** podľa tabuľky na s. 290). Dosaďme tento tvar partikulárneho integrálu do pôvodnej diferenciálnej rovnice 1. rádu, potom dostávame

$$
(2B + A) + Bt = 4t\,. \tag{10.22}
$$

Usporiadaním jednotlivých členov predchádzajúcej rovnice podľa mocnín premennej **t** a následne porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách **t** po oboch stranách rovnice možno určiť **systém dvoch lineárnych rovníc**, z ktorých možno vypočítať koeficienty **A** a **B**

$$
\begin{gathered}
2B + A = 0 \Rightarrow A = -2B = -8\,, \\
B = 4\,.
\end{gathered}
\tag{10.23}
$$

Potom, hľadaná nútená odozva (reprezentovaná partikulárnym integrálom) **systému 1. rádu** nadobudne tvar

$$
u_p = -8 + 4t\,, \tag{10.24}
$$

po dosadení za partikulárny integrál v rovnici celkovej odozvy systému, možno dospieť k tejto rovnici, ktorá predstavuje celkové riešenie odozvy systému

$$
u_c(t) = u_{c0}(t) + u_p(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t} + 4t - 8\,. \tag{10.25}
$$

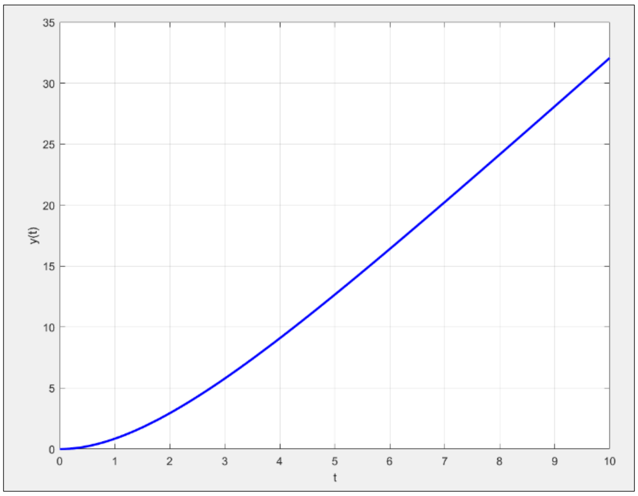
Na nájdenie neznámej konštanty **C**, budeme ďalej uvažovať, že poznáme počiatočnú podmienku pre napätie $\mathbf{u_c(0) = 0}$ v čase $\mathbf{t = 0}$, aplikovaním, ktorej možno vypočítať konštantu **C**

$$u_c(0) = 0 = C \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} + 4 \cdot 0 - 8 \Longrightarrow C = 8. \tag{10.26}$$

Potom výsledná odozva daného elektrického systému, ktorá je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.5, nadobudne tvar funkcie

$$u_c(t) = 8e^{-\frac{1}{2}t} + 4t - 8\,. \tag{10.27}$$

```
clc
clear

t=0:0.01:10;
y=8*exp(-1/2*t)+4*t-8;

figure(1)
plot(t,y,'b','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



Obr. 10.5. Odozva elektrického systému

10.1 ČASOVÁ KONŠTANTA A ZOSILNENIE SYSTÉMU 1. RÁDU

Už vieme, že pre systém 1. rádu, ktorého vstupom je jednotková skoková funkcia s veľkosťou skoku $\mathbf{u(t) = K = 1}$, riešenie systému možno opísať funkciou

$$y = \frac{b_0}{a_0}\left(1 - e^{-\frac{a_0 t}{a_1}}\right) \tag{10.28}$$

alebo

$$y = y_\infty \left(1 - e^{-\frac{a_0 t}{a_1}}\right), y_\infty = \frac{b_0}{a_0}. \tag{10.29}$$

Ak vyjdeme z prechádzajúcej odozvy, ktorá platí pre **systém 1. rádu**, potom musí platiť, že pre čas $\mathbf{t = \frac{a_1}{a_0}}$, nadobúda exponenciálny výraz v odozve systému hodnotu $\mathbf{e^{-1} = 0.37}$ a teda platí, že

$$y = y_\infty(1 - 0.37) = 0.63 \cdot y_\infty, \qquad y_\infty = \frac{b_0}{a_0}. \tag{10.30}$$

V tomto čase výstupná hodnota dosahuje $\mathbf{0.63 \cdot y_\infty}$ t. j. **63 %** ustálenej hodnoty. Tento čas nazývame **časovou konštantou systému 1. rádu** a označujeme ako $\boldsymbol{\tau}$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0}. \tag{10.31}$$

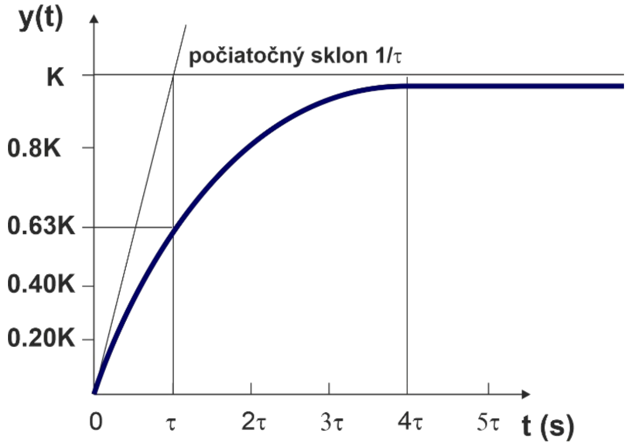
V ďalšom čase $\mathbf{2\frac{a_1}{a_0} = 2\tau}$, exponenciálny výraz nadobúda hodnotu $\mathbf{e^{-2} = 0.14}$, potom odozvu v danom čase $\mathbf{t = 2\frac{a_1}{a_0}}$ možno vypočítať ako

$$y = y_\infty(1 - 0.14) = 0.86 \cdot y_\infty, y_\infty = \frac{b_0}{a_0}. \tag{10.32}$$

V tomto čase nadobudne odozva hodnotu $\mathbf{0.86 \cdot y_\infty}$ t. j. **86 %** ustálenej odozvy. Podobným spôsobom možno identifikovať ďalšie hodnoty odoziev v časoch **3τ, 4τ, 5τ** atď. Výsledky hodnôt pre uvažované ďalšie časy možno nájsť v nasledujúcej tabuľke. Na základe týchto vypočítaných hodnôt pre jednotlivé časy možno **priebeh odozvy systému 1. rádu**, ktorá je znázornená na Obr. 10.6.

Tabuľka 10.1: Tabuľka odozvy systému 1. rádu v jednotlivých časoch

Čas T	Odozva
0	0
1τ	0.63
2τ	0.86
3τ	0.95
4τ	0.98
5τ	0.99



Obr. 10.6. Priebeh odozvy systému 1. rádu na jednotkový vstup u(t)

V zmysle **časovej konštanty $\boldsymbol{\tau}$**, je teda možné prepísať rovnicu odozvy **systému 1. rádu** do tohto tvaru

$$y = y_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{10.33}$$

Časová konštanta $\boldsymbol{\tau}$ je rovná $\frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{a_0}}$. Ak teraz predelíme diferenciálnu rovnicu **systému 1. rádu** koeficientom pravej strany diferenciálnej rovnice $\mathbf{b_0}$, potom možno pôvodnú diferenciálnu rovnicu prepísať na tvar s **časovou konštantou**

$$\frac{a_1}{b_0}\frac{dy}{dt} + \frac{a_0}{b_0}y = u(t)\,, \tag{10.34}$$

alebo

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = \frac{b_0}{a_0}u(t)\,, \tag{10.35}$$

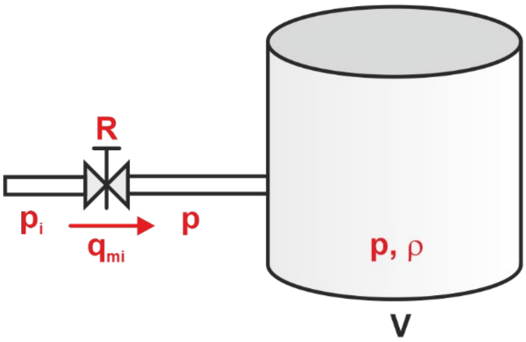
kde výraz $\mathbf{y}_\infty = \frac{\mathbf{b_0}}{\mathbf{a_0}}$ predstavuje priamo ustálenú hodnotu odozvy daného systému. Tento výraz nazývame **ustáleným zosilnením systému** a označujeme ako $\mathbf{G_{SS}}$. Ak označíme tento výraz ako $\mathbf{G_{SS}} = \frac{\mathbf{b_0}}{\mathbf{a_0}}$, potom **diferenciálna rovnica 1. rádu** nadobudne nový tvar

$$\tau\frac{dy}{dt} + y = G_{SS}\cdot u(t)\,. \tag{10.36}$$

Úlohy na riešenie

Problém 10.1:

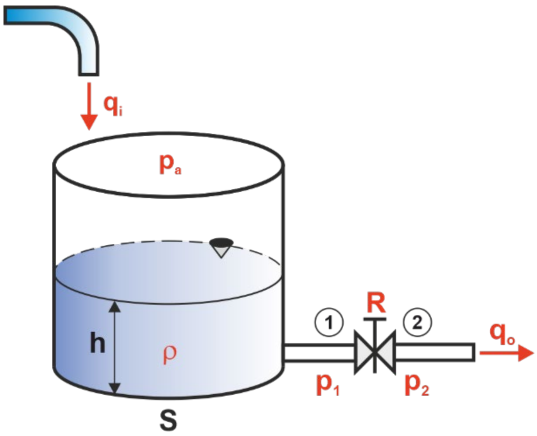
Suchý vzduch konštantnej teploty **20 °C (293 K)** prúdi cez ventil do zásobníka tvaru valca s polomerom $\mathbf{r = 2\,m}$ a výšky $\mathbf{h = 3\,m}$, pozri Obr. 10.7. Tlak $\mathbf{p_i}$ na vstupe ventilu je konštantný a väčší ako tlak $\mathbf{p}$ vo vnútri nádoby. Odpor ventilu je definovaný konštantou $\mathbf{R = 1000\,Pa.s.kg^{-1}}$. Predpokladajme, že proces plnenia je **izotermickým dejom**. To znamená, že v rovnici pre polytropický dej uvažujeme exponent $\mathbf{n = 1}$. Odvoďte matematický model systému pre tlak $\mathbf{p}$ plnenia zásobníka a vypočítajte odozvu systému 1. rádu, ak vieme, že tlak na vstupe je $\mathbf{p_i = 1\,MPa}$.



Obr. 10.7. Pneumatický systém

Problém 10.2:

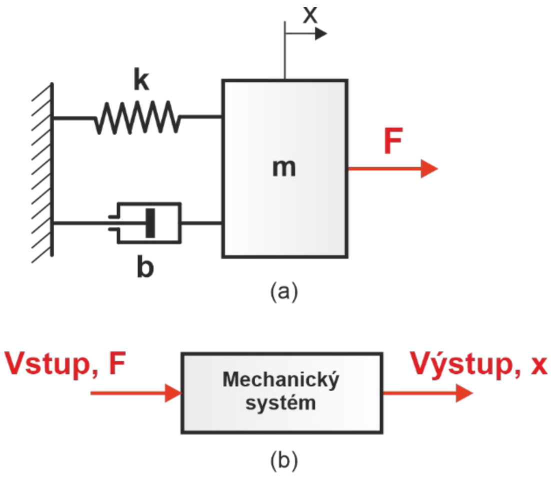
Hydraulický systém pozostávajúci z jednej nádrže je znázornený na Obr. 10.8, kde $\mathbf{p_a = 10^5\,Pa}$ je atmosférický tlak, $\mathbf{q_i = 3\,m^3.s^{-1}}$ a $\mathbf{q_o}$ sú objemové prítoky (odtoky) na vstupe a výstupe z hydraulickej nádrže. Prierezová plocha nádoby je $\mathbf{S = 2\,m^2}$ a výška hladiny je neznáma veličina $\mathbf{h(t)}$. Kvapalina, ktorá prúdi do nádrže má hustotu $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1000\,kg.m^{-3}}$ a opúšťa nádrž cez ventil hydraulického odporu $\mathbf{R = 10^5\,Pa.s.kg^{-1}}$. Odvoďte matematický model systému, ktorý opisuje zmenu hladiny $\mathbf{h(t)}$ v nádrži a vypočítajte odozvu tohto **systému 1. rádu**.



Obr. 10.8. Systém s jednou nádržou s ventilom

11 SYSTÉM 2. RÁDU

Systémy 2. rádu sú systémy, ktoré opisujeme **diferenciálnou rovnicou 2. rádu**. Typickým príkladom systému 2. rádu sú kmitavé **mechanické systémy**, ktoré pozostávajú z **pružiny**, **hmoty** a **tlmiča**, pozri Obr. 11.1. Takýto typ systému je najčastejším prípadom **systému 2. rádu**, ktorý je definovaný práve **diferenciálnou rovnicou 2. rádu**.



Obr. 11.1. Systém pružina-tlmič-hmota

Mechanický typ **systému hmota-pružina-tlmič** sme už analyzovali a vieme pre takýto systém napísať matematický model prostredníctvom diferenciálnej rovnice. Diferenciálna rovnica, ktorá opisuje vzťah medzi vstupnou silou **F(t)** a výstupným posunutím **x(t)** je definovaná ako

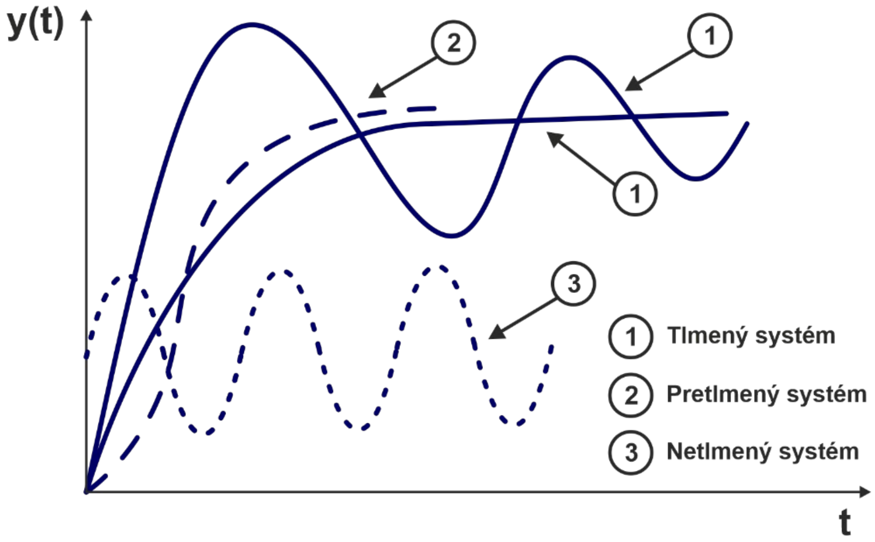
$$m\frac{dx(t)^2}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)\,, \tag{11.1}$$

kde **m** je **hmotnosť**, **b konštanta tlmenia** a **k** je **konštanta pruženia**. Spôsob, akým sa výsledné posunutie **x(t)** bude meniť v čase, závisí od veľkosti tlmenia aplikovaného v danom mechanickom systéme. Ak, silu **F(t)** aplikujeme v podobe jednoduchej **skokovej funkcie vstupu** a v systéme neexistuje žiadne tlmenie, potom má hmota s hmotnosťou **m** možnosť voľne oscilovať a oscilácie budú pokračovať prakticky do nekonečna. Žiadne tlmenie znamená, že $\mathbf{b = 0}$ a teda aj člen $\mathbf{\frac{dx}{dt}}$ je rovný nule

$$m\frac{dx(t)^2}{dt^2} + kx(t) = F(t)\,. \tag{11.2}$$

V prípade, že v systéme existuje tlmenie, oscilácie postupne zaniknú alebo sa utlmia po dosiahnutí **ustáleného stavu** odozvy systému. Naopak, ak je **tlmenie** príliš vysoké, nenastane žiadna oscilácia hmoty a posunutie hmoty len mierne pomaly narastie v čase, hmota sa postupne vráti do svojej rovnovážnej polohy.

Nasledujúci Obr. 11.2 zobrazuje typické príklady odozvy pre **systém 2. rádu y(t)**, ktorými môže hmota s hmotnosťou **m** kmitať v čase **t**, pre rôzne stupňa tlmenia **b**.



Obr. 11.2. Vplyv efektu tlmenia na odozvu systému

11.1 DIFERENCIÁLNA ROVNICA SYSTÉMU 2. RÁDU

Predpokladajme hmotu s hmotnosťou **m**, ktorá osciluje na voľnom konci pružiny s **tuhosťou k** bez existencie tlmenia **b = 0** a takisto budiacej funkcie **F(t) = 0**. V tomto prípade absencie akéhokoľvek tlmenia a budiacej sily (bez núteného vstupu) vieme, že hmota bude vykonávať voľnú osciláciu nekonečne dlhý čas. Tento pohyb nazývame **jednoduchým harmonickým kmitaním**, ktorý možno opísať touto matematickou funkciou

$$y(t) = A \sin \omega_n t\,, \tag{11.3}$$

kde $\mathbf{y(t)}$ je poloha hmoty v čase **t**, **A** je amplitúda oscilácie a $\boldsymbol{\omega_n}$ nazývame **vlastnou uhlovou frekvenciou netlmeného kmitavého pohybu**. Ak túto rovnicu zderivujeme podľa času **t** dostávame

$$\frac{dy}{dt} = \omega_n A \cos \omega_n t\,. \tag{11.4}$$

Druhou deriváciou predchádzajúcej rovnice podľa času **t** platí, že

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_n^2 A \sin \omega_n t = -\omega_n^2 \cdot y\,. \tag{11.5}$$

Predchádzajúcu rovnicu možno preskupením jej členov upraviť na tento tvar

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_n^2 y = 0 \,. \tag{11.6}$$

Z predchádzajúcej kap. 3, ktorá sa zaoberala teóriou mechanických systémov vieme, že pre hmotu s hmotnosťou **m**, ktorá kmitá na pružine s tuhosťou **k**, možno napísať matematický model v tomto tvare

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky \,, \tag{11.7}$$

ktorý možno ďalej upraviť do tvaru diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \,. \tag{11.8}$$

Ak teraz, porovnáme predchádzajúce dve diferenciálne rovnice, ktorých riešením je rovnaká funkcia $\mathbf{y = A\sin\omega_n t}$, potom možno definovať vlastnú uhlovú frekvenciu kmitania systému ako

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \,. \tag{11.9}$$

Ďalej budeme uvažovať prípad s existenciou tlmenia $\mathbf{b \neq 0}$ a takisto budiacej sily **F(t)**. V tomto prípade, je pohyb hmoty s hmotnosťou **m** možné opísať touto diferenciálnou rovnicou

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = F(t) \,. \tag{11.10}$$

Nájdime riešenie tejto **diferenciálnej rovnice 2. rádu** metódami na riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré sme uviedli v predchádzajúcej kap. 9. Budeme predpokladať, že riešenie pozostáva z dvoch častí, **prechodovej** a **ustálenej odozvy systému** alebo $\mathbf{y = y_0 + y_p}$. Nájdime najskôr všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou v tvare

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0 \,. \tag{11.11}$$

Už vieme, že na nájdenie všeobecnej odozvy systému musíme poznať jej charakteristickú rovnicu. Potom, pre túto **diferenciálnu rovnicu 2. rádu** možno napísať **charakteristickú rovnicu** v tomto tvare

$$mr^2 + br + k = 0\,. \tag{11.12}$$

Korene tejto **charakteristickej rovnice** možno vypočítať na základe tohto vzťahu na výpočet koreňov kvadratickej rovnice

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}\,, \\ r_{1,2} &= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\,, \\ r_{1,2} &= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{b^2}{4mk}\right) - \frac{k}{m}}\,. \end{aligned} \tag{11.13}$$

Keďže vieme, že $\boldsymbol{\omega_n^2 = \frac{k}{m}}$ a takisto, ak označíme výraz $\boldsymbol{\frac{b^2}{4mk}}$ ako $\boldsymbol{\zeta^2 = \frac{b^2}{4mk}}$, potom možno predchádzajúcu rovnicu upraviť do tvaru

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{b^2}{4mk}\right) - \frac{k}{m}}\,, \\ r_{1,2} &= -\frac{b}{2\sqrt{mk}}\sqrt{\frac{k}{m}} \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\zeta^2 - 1}\,, \\ r_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\,, \end{aligned} \tag{11.14}$$

kde $\boldsymbol{\zeta}$ nazývame **súčiniteľom tlmenia**.

Veľkosť **súčiniteľa tlmenia** $\boldsymbol{\zeta}$ závisí od veľkosti výrazu pod odmocninou. A teda, ak ($\boldsymbol{\zeta^2 > 1}$), potom výraz pod odmocninou nadobúda **kladnú hodnotu** a v prípade, že ($\boldsymbol{\zeta^2 < 1}$), potom výraz pod odmocninou nadobúda **zápornú hodnotu**. **Súčiniteľ tlmenia** $\boldsymbol{\zeta}$ určuje to, či výraz pod odmocninou nadobudne **kladnú** alebo **zápornú** formu a teda určuje aj celkovú povahu daného systému. V prípade, že $\boldsymbol{\zeta > 1}$, potom sú výsledkom dva reálne korene $\mathbf{r_1}$ a $\mathbf{r_2}$

$$\begin{aligned} r_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\,, \\ r_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\,. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Výsledné všeobecné riešenie $\mathbf{y_0}$ systému pre prvý prípad nadobudne tento tvar

$$y_0 = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = Ae^{\left(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + Be^{\left(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}\,, \tag{11.16}$$

taký typ dynamického systému nazývame **pretlmeným systémom**. V prípade, že $\boldsymbol{\zeta = 1}$, potom riešením je jeden dvojnásobný koreň $\mathbf{r_1 = r_2 = -\omega_n}$. V takomto prípade, dostávame systém s **kritickým tlmením**, pre ktorý odozva systému nadobudne tvar

$$y_0 = (At + B)e^{-\omega_n t}\,. \tag{11.17}$$

a napokon v prípade, že $\boldsymbol{\zeta < 1}$, potom riešením charakteristickej rovnice sú dva **komplexné združené korene**, a teda

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\,, \\ r_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\,. \end{aligned} \tag{11.18}$$

Ak, na zjednodušenie predchádzajúceho výrazu označíme výraz $\boldsymbol{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$ ako

$$\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\,, \tag{11.19}$$

potom výsledok riešenia charakteristickej rovnice pre prípad **dvoch komplexne združených koreňov** možno zapísať v tvare

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega \tag{11.20}$$

a teda dostávame **komplexne združené korene**

$$\begin{aligned} r_1 &= -\zeta\omega_n + j\omega\,, \\ r_2 &= -\zeta\omega_n - j\omega\,. \end{aligned} \tag{11.21}$$

Výraz $\boldsymbol{\omega}$ nazývame uhlovou frekvenciu **tlmeného kmitania** a jej hodnota závisí od súčiniteľa tlmenia $\boldsymbol{\zeta}$. Riešenie pre prípad dvoch komplexne združených koreňov nadobudne tvar

$$\begin{aligned} y_0 &= Ae^{(-\zeta\omega_n + j\omega)t} + Be^{(-\zeta\omega_n - j\omega)t}\,, \\ y_0 &= e^{-\zeta\omega_n t}\left(Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}\right). \end{aligned} \tag{11.22}$$

Ak, označíme výraz $\mathbf{e^{j\omega t}}$ ako $\mathbf{e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t}$ a výraz $\mathbf{e^{-j\omega t}}$ ako $\mathbf{e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t}$, potom dostávame, že

$$
\begin{aligned}
y_0 &= e^{-\zeta\omega_n t}[A(\cos\omega t + j\sin\omega t) + B(\cos\omega t - j\sin\omega t)] \\
&= e^{-\zeta\omega_n t}[(A+B)\cos\omega t + j(A-B)\sin\omega t]\,.
\end{aligned}
\tag{11.23}
$$

Ďalším zavedením dvoch konštánt **P** a **Q**, ktoré predstavujú formu $(\mathbf{A+B})$ a $\mathbf{j(A-B)}$, možno zápis výsledného riešenia zjednodušiť na tvar

$$y_0 = e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t)\,. \tag{11.24}$$

Tento prípad, ktorý nastáva pri riešení dvoch komplexne združených koreňoch v teórii systémov nazývame **tlmeným systémom**.

Do tohoto bodu sme sa venovali, len výpočtu riešenia diferenciálnej rovnice bez pravej strany. Poďme teraz uvažovať, že na pravej strane diferenciálnej rovnice máme budiacu funkciu **F(t)**. Nájdime riešenie **partikulárneho integrálu** $\mathbf{y_p}$.

Ďalej budeme predpokladať, že vstupom je skoková zmena v podobe funkcie **F(t) = F**. Pre tento prípad možno identifikovať tvar partikulárneho integrálu v tvare $\mathbf{y_p = A}$, kde **A** je konštanta. A teda,

$$
\begin{aligned}
y_p &= A\,, \\
\frac{dy_p}{dt} &= \frac{d^2y_p}{dt^2} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{11.25}
$$

Dosadením predchádzajúcich výrazov do pôvodnej diferenciálnej rovnice systému dostávame

$$0 + 0 + kA = F\,, \tag{11.26}$$

potom

$$A = \frac{F}{k}\,. \tag{11.27}$$

Napokon pre **partikulárny integrál** $\mathbf{y_p}$ musí platiť, že

$$y_p = A = \frac{F}{k}\,. \tag{11.28}$$

Teda celková odozva systému $\mathbf{y(t)}$, ktoré je daná súčtom homogénneho riešenia $\mathbf{y_0}$ a partikulárneho integrálu $\mathbf{y_p}$, bude pre jednotlivé prípady systémov nadobúdať nasledovné tvary:
t. j. pre **pretlmený systém**, ak $\boldsymbol{\zeta > 1}$

$$y = Ae^{\left(-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + Be^{\left(-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + \frac{F}{k}, \tag{11.29}$$

pre systém **s kritickým tlmením**, ak $\boldsymbol{\zeta = 1}$

$$y = (At + B)e^{-\omega_n t} + \frac{F}{k} \tag{11.30}$$

a napokon pre **tlmený systém**, ak $\boldsymbol{\zeta < 1}$

$$y = e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) + \frac{F}{k}. \tag{11.31}$$

Pripomeňme, že v prípade, ak $\mathbf{t} \to \infty$, potom všetky predchádzajúce riešenia konvergujú na tvar riešenia $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{k}}$, ktorý nazývame **ustálenou odozvou systému**. Ďalej budeme uvažovať, že diferenciálna rovnica **systému 2. rádu** je definovaná vo všeobecnom tvare.

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x. \tag{11.32}$$

Porovnajme túto rovnicu s predchádzajúcim tvarom **diferenciálnej rovnice pre kmitajúci tlmený systém**

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = F(t). \tag{11.33}$$

Z porovnania diferenciálnych rovníc vyplývajú hodnoty koeficientov $\mathbf{a_0 = m}, \mathbf{a_1 = b}, \mathbf{a_2 = k}$, na základe, ktorý možno identifikovať výrazy pre vlastnú uhlovú frekvenciu kmitania $\boldsymbol{\omega_n^2} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}$ a súčiniteľ tlmenia $\boldsymbol{\zeta^2} = \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{4mk}}$ ako

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{a_0}{a_2}, \\ \zeta^2 &= \frac{a_1^2}{4a_2a_0}. \end{aligned} \tag{11.34}$$

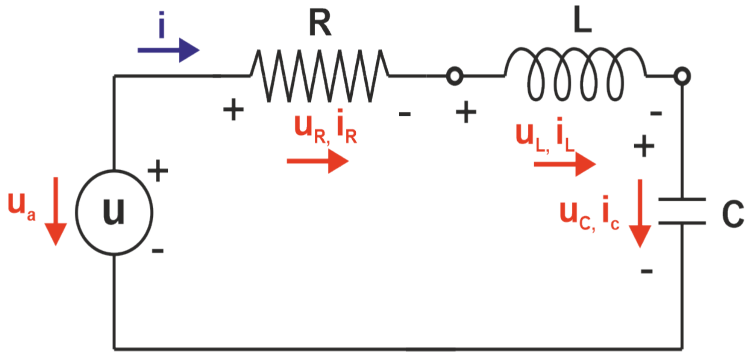
To znamená, že pre **systém 2. rádu** bude platiť táto **všeobecná diferenciálna rovnica 2. rádu** v tvare

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = G_x\,, \tag{11.35}$$

kde $\boldsymbol{\zeta}$ je **súčiniteľ tlmenia**, $\boldsymbol{\omega_n}$ je **vlastná uhlová frekvencia pohybu** a $\mathbf{G_x}$ je **zosilnenie systému**.

Príklad č. 11.1:

Sériový RLC obvod zobrazený na Obr. 11.3, pozostáva z odporu $\mathbf{R = 100\ \Omega}$, cievky s indukčnosťou $\mathbf{L = 2.0\ H}$ a kondenzátora s kapacitou $\mathbf{C = 20\ \mu F}$. Nájdite odozvu elektrického prúdu **i**, ktorý preteká týmto elektrickým obvodom, ak vstupom je skokové napätie $\mathbf{u_a(t)}$.



Obr. 11.3. RLC obvod

Elektrický prúd **i(t)** v obvode je daný nasledujúcou **diferenciálnou rovnicou 2. rádu**

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{u_a(t)}{LC}\,, \tag{11.36}$$

kde vstupom je skokové napätie na hodnotu $\mathbf{u_a(t)}$. Ak, túto diferenciálnu rovnicu porovnáme so všeobecnou diferenciálnou rovnicou, ktorá platí pre **systém 2. rádu**

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = G_x\,, \tag{11.37}$$

potom **vlastnú uhlovú frekvenciu kmitania** $\boldsymbol{\omega_n}$, možno vypočítať zo vzťahu pre **systém 2. rádu**

$$\omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2} = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2.0 \cdot 20e^{-6}} = 25000 \Longrightarrow \omega_n = 158\ \text{Hz} \tag{11.38}$$

a podobne **súčiniteľ tlmenia $\boldsymbol{\zeta}$** možno vypočítať vzťahom

$$\zeta^2 = \frac{a_1^2}{4a_2a_0} = \frac{\left(\frac{R}{L}\right)^2}{4\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{LC}\right)} = \frac{R^2C}{4L} = \frac{100^2\cdot 20e^{-6}}{4\cdot 2.0} = 0.025 \Longrightarrow \zeta = 0.16\,. \tag{11.39}$$

Pretože $\boldsymbol{\zeta < 1}$, máme prípad **tlmeného systému**. **Uhlová frekvencia tlmeného** pohybu $\boldsymbol{\omega}$ je daná vzťahom

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 158\cdot\sqrt{1-0.16^2} = 156\text{ Hz}\,. \tag{11.40}$$

Keďže máme **3. prípad systému s tlmením**, potom riešenie nadobúda nasledujúcu formu

$$y = e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) + u_a \tag{11.41}$$

a teda

$$i = e^{-0.16\cdot 158\cdot t}(P\cos 156\cdot t + Q\sin 156\cdot t) + u_a\,. \tag{11.42}$$

Ďalej ak uvažujeme nulové počiatočné podmienky $\mathbf{i(0) = 0}$ a $\mathbf{\frac{di}{dt}(0) = 0}$, potom $\mathbf{0 = 1(P + 0) + u_a}$. A teda $\mathbf{P = -u_a}$. Zderivovaním funkcie podľa času **t**, dostávame

$$\frac{di}{dt} = e^{-\zeta\omega_n t}(\omega P\sin\omega t - \omega Q\cos\omega t) - \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) \tag{11.43}$$

a teda, $\boldsymbol{0 = 1(-\omega Q) - \zeta\omega_n(P + 0)}$. Z čoho vyplýva, že

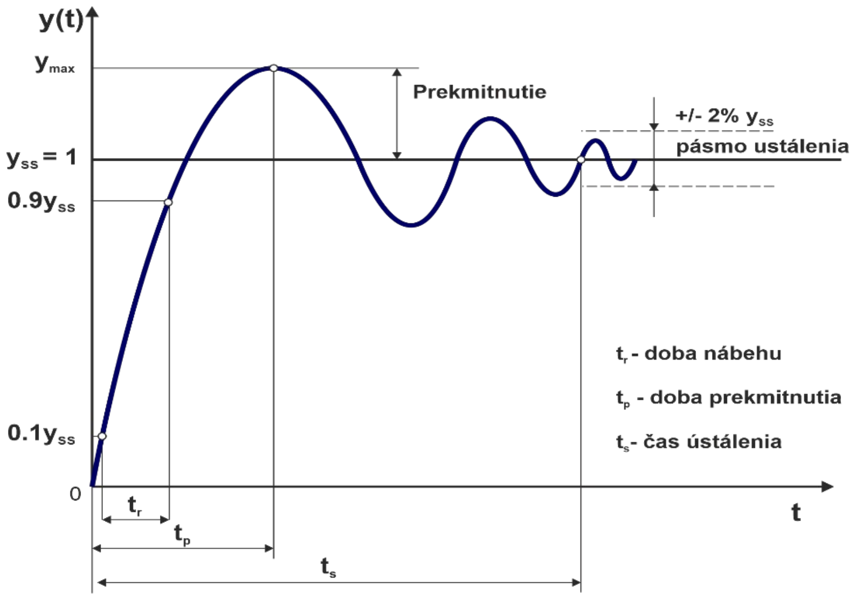
$$Q = \frac{\zeta\omega_n P}{\omega} = -\frac{\zeta\omega_n u_a}{\omega} = -\frac{0.16\cdot 158\ \cdot u_a}{156} = -0.16\,u_a\,. \tag{11.44}$$

Potom, celkové riešenie diferenciálnej rovnice opisujúcej zmenu elektrického prúdu v **RLC obvode** má tento tvar

$$i(t) = u_a\cdot\left[1 - e^{-22.3t}\cdot[\cos(156\cdot t) + 0.16\cdot\sin(156\cdot t)]\right]. \tag{11.45}$$

11.2 PARAMETRE SYSTÉMU 2. RÁDU

Nasledujúci Obr. 11.4 zobrazuje typickú odozvu **tlmeného systému 2. rádu** na jednotkový skok **u(t) = 1**. Poďme si ďalej zadefinovať niektoré z parametrov, ktoré používame na posúdenie kvality odozvy daného systému 2. rádu.



Obr. 11.4. Parametre systému 2. rádu

Doba nábehu $\mathbf{t_r}$, je čas, za ktorý odozva **y(t)** systému narastie z hodnoty **0** na ustálenú hodnotu $\mathbf{y_{SS}}$. Tento čas charakterizuje rýchlosť reakcie systému 2. rádu na vstupné rušenie. Je to teda čas, keď odozva systému **y(t)** prekoná štvrť cyklus alebo $\mathbf{1/2\ \pi}$. Potom,

$$\omega \cdot t_r = \frac{1}{2}\pi \, . \tag{11.46}$$

Doba prekmitu $\mathbf{t_p}$, je čas, keď hodnota odozvy systému **y(t)** narastie z hodnoty **0** na prvý vrchol (najvyššia hodnota odozvy systému). Je to čas potrebný na dosiahnutie celého pol cyklu alebo $\boldsymbol{\pi}$. A teda

$$\omega \cdot t_p = \pi \, . \tag{11.47}$$

Prekmitnutie je maximálna hodnota odozvy systému, ktorú veličina dosiahne v prvom vykmite. Je to hodnota meraná od hodnoty ustálenej odozvy, až po najvyšší vrchol (amplitúda prvého vrcholu). **Prekmit** mnohokrát špecifikujeme v percentuálnej miere ustálenej hodnoty odozvy.

Pre tlmený systém možno napísať, že

$$y = e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) + y_{SS}\,. \tag{11.48}$$

Ak uvažujeme, že $\mathbf{y(0) = 0}$, potom

$$0 = 1(P + 0) + y_{SS} \tag{11.49}$$

a teda $\mathbf{P = -y_{SS}}$. Prekmitnutie sa objaví v čase $\boldsymbol{\omega t = \pi}$, platí teda, že

$$y = e^{-\zeta\omega_n\frac{\pi}{\omega}}(P + 0) + y_{SS}\,. \tag{11.50}$$

Prekmitnutie je rozdiel medzi hodnotou v čase **prekmitnutia** a **ustálenou hodnotou** odozvy systému. Potom, pre prekmit musí platiť, že

$$\text{Prekmit} = y_{SS}\, e^{-\zeta\omega_n\pi/\omega}\,. \tag{11.51}$$

Ak vieme, že $\boldsymbol{\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, potom možno dosadením za $\boldsymbol{\omega}$ rovnicu pre prekmit prepísať do tohto tvaru

$$\text{Prekmit} = y_{SS}\exp\left(\frac{-\zeta\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = y_{SS}\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right). \tag{11.52}$$

Vyjadrením prekmitu v percentuálnom tvare, bude platiť, že

$$\text{Prekmit}\,\% = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\cdot 100\,\%\,. \tag{11.53}$$

Čas ustálenia $\mathbf{t_s}$, je čas, ktorý dosiahne odozvy systému, potom ako zaniknú všetky prechodové stavy. Je to čas, od ktorého sa odozvy systému začne pohybovať v pásme ± 2 % ustálenej hodnoty

$$y = e^{-\zeta\omega_n t}(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) + y_{SS}\,. \tag{11.54}$$

Ak teda, $\mathbf{P = -y_{SS}}$. **2 %** ustálenie meranej veličiny nastáva v **čase ustálenia $\mathbf{t_s}$**, t. j. v momente, ak ustálená odozva dosahuje **2 %** hodnoty $\mathbf{y_{SS}}$ alebo $\mathbf{0.02y_{SS}}$, potom platí, že

$$0.02y_{SS} = e^{-\zeta\omega_n t_s}(y_{SS}\cdot 1 + 0)\,. \tag{11.55}$$

Zlogaritmovaním možno dospieť k rovnici $\mathbf{\ln 0.02 = -\zeta\omega_n t_s}$. Ak, vieme, že $\mathbf{\ln 0.02 = -3.9}$, čo predstavuje približne hodnotu rovnú číslu **4**, potom pre čas ustálenia $\mathbf{t_s}$ bude platiť vzťah

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}. \tag{11.56}$$

V prípade, že percentom ustálenia bude hranica **5 %**, potom rovnica pre čas ustálenia $\mathbf{t_s}$ nadobudne tvar

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}. \tag{11.57}$$

V čase ustálenia $\mathbf{t_s}$ možno vypočítať počet oscilácií, ktoré funkcia nadobudne do tohto špecifického času a to na základe vzťahu

$$N = \frac{4/\zeta\omega_n}{2\pi/\omega}. \tag{11.58}$$

Pričom ak, za frekvenciu kmitania dosadíme výraz $\boldsymbol{\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, potom

$$N = \frac{4/\zeta\omega_n}{2\pi/\omega} = \frac{2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta\omega_n} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}. \tag{11.59}$$

Príklad č. 11.2:

Na ukážku posúdenia kvality systému, predpokladajme **systém 2. rádu**, pre ktorý vieme, že hodnota jeho **vlastnej frekvencie kmitania** je $\boldsymbol{\omega_n = 2.0}$ **Hz** a hodnota **uhlovej frekvencie tlmenia** je $\boldsymbol{\omega = 1.8}$ **Hz**. Vypočítajte pre tento systém parametre charakterizujúce kvalitu jeho odozvy.

Keďže, daný systém má nenulovú uhlovú frekvenciu tlmenia $\boldsymbol{\omega}$, potom využitím vzťahu pre tlmenú frekvenciu $\boldsymbol{\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, možno určiť **súčiniteľ tlmenia** $\boldsymbol{\zeta}$

$$1.8 = 2.0\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{11.60}$$

Vyjadrením súčiniteľa tlmenia z prechádzajúcej rovnice a vypočítaním jeho hodnoty možno dospieť k hodnote $\boldsymbol{\zeta = 0.44}$. Keďže $\boldsymbol{\omega t_r = \frac{1}{2}\pi}$, potom **čas nábehu** $\mathbf{t_r}$ daného systému je

$$t_r = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2 \cdot 1.8} = 0.87\ \text{s}. \tag{11.61}$$

Percentuálne prekmitnutie uvažovaného systému možno vypočítať použitím odvodeného vzťahu ako

$$\text{Prekmit}\,\% = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\cdot 100\,\% = \exp\left(\frac{-0.44\pi}{\sqrt{1-0.44^2}}\right)\cdot 100\,\% = 21\,\%\,. \quad (11.62)$$

Percentuálne prekmitnutie systému je teda **21 %**. Pre **čas ustálenia t_s**, t. j. čas keď odozva dosiahne max. **2 %** ustálenej odozvy, platí vzťah

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.44\cdot 2.0} = 4.5\ \text{s} \quad (11.63)$$

a napokon **počet oscilácií N** do času ustálenia **t_s** vypočítame použitím tohto vzťahu

$$N = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{0.44^2}-1} = 1.33\,. \quad (11.64)$$

Príklad č. 11.3:

Ak poznáme ďalšiu prenosovú funkciu **systému 2. rádu**, zobrazte jeho odozvu a vypočítajte parametre, ktoré charakterizujú kvalitu takéhoto systému (t. j. **čas ustálenia t_s**, **čas prekmitnutia t_p** a **veľkosť prekmitu M_p**).

$$G(s) = \frac{50}{s^2+6s+25}\,. \quad (11.65)$$

Predtým, než začneme z výpočtom parametrov systému, upravme **prenosovú funkciu G(s)** do kanonického tvaru a porovnajme so **všeobecnou prenosovou funkciou systému 2. rádu**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\,. \quad (11.66)$$

Pre náš prípad **prenosovej funkcie G(s)** teda musí platiť, že

$$G(s) = 2\left[\frac{25}{s^2+6s+25}\right] = K\left[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right]. \quad (11.67)$$

Z takto upravenej prenosovej funkcie sme schopní teraz identifikovať parametre systému ako sú zosilnenie **K = 2** a takisto vlastná uhlová frekvencia kmitania systému $\boldsymbol{\omega_n}$, pre ktorú platí, že

$$\omega_n^2 = 25 \Longrightarrow \omega_n = 5\,, \tag{11.68}$$

potom pre pomerný **súčiniteľ útlmu $\boldsymbol{\zeta}$** musí platiť,

$$2\zeta\omega_n = 6 \Longrightarrow \zeta = \frac{3}{\omega_n} = \frac{3}{5} = 0.6\,. \tag{11.69}$$

Na základe **vlastnej frekvencie kmitania $\boldsymbol{\omega_n}$**, možno v tomto štádiu vypočítať hodnotu **tlmenej frekvencie kmitania ω**

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 5 \cdot \sqrt{1-0.6^2} = 4\,. \tag{11.70}$$

Vypočítaním základných parametrov systému, možno pristúpiť k výpočtu parametrov kvality tohto systému. Vypočítajme najskôr **čas prvého prekmitu $\mathbf{t_p}$**

$$t_p = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785\ \mathrm{s}\,, \tag{11.71}$$

ďalej **čas ustálenia $\mathbf{t_s}$**

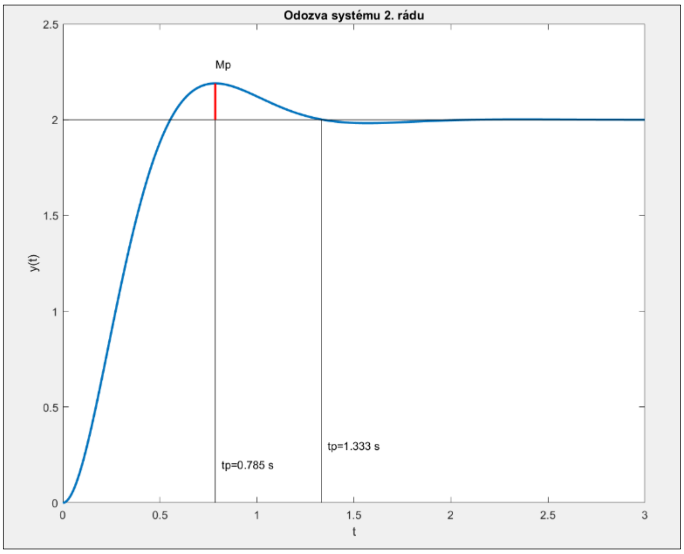
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.6 \cdot 5} \approx 1.33\ \mathrm{s} \tag{11.72}$$

a napokon **veľkosť prekmitu $\mathbf{M_p}$**

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{0.6\pi}{\sqrt{1-0.6^2}}} \approx 0.095\,. \tag{11.73}$$

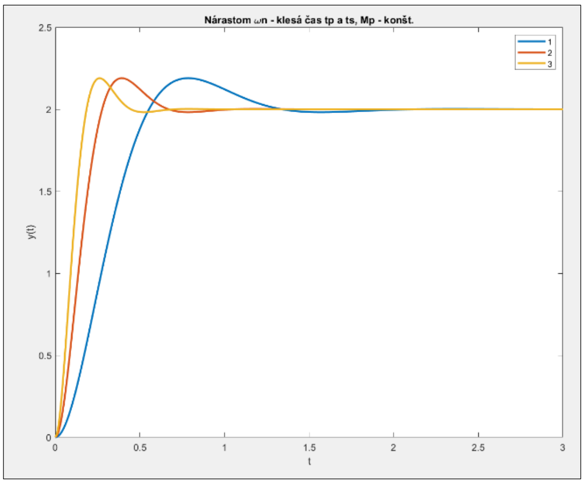
Vypočítať a zobraziť odozvu tohto **systému 2. rádu**, ako aj vypočítať charakteristické parametre systému, ktoré charakterizujú kvalitu odozvy tohto systému 2. rádu, možno uskutočniť prostredníctvom **Matlab skriptu** na druhej strane. Potom priebeh vypočítanej výslednej odozvy systému, ktorá bola vyšetrená na jednotkový skok, je zobrazená na nasledujúcom grafe, ktorý je znázornený na Obr. 11.5.

```
clc
clear
close all

K=2;
gs=tf([25],[1 6 25]);

wn=5;
zeta=6/(2*wn);
wd=wn*sqrt(1-zeta^2);

tp=pi/wd;
ts=4/(zeta*wn);
Mp=exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2));
t=0:0.01:3;
y=step(K*gs,t);

figure(1)
plot(t,y,'LineWidth',2)
hold on
plot(t, t*0+K,'-k')
plot([tp tp],K*[1
Mp+1],'r','LineWidth',2)
plot([tp tp],K*[0 1],'k')
plot([ts ts],K*[0 1],'k')
text(tp,K*(Mp+1)+0.1,'Mp')
text(tp,0.2, sprintf('  tp=%0.3f s',tp))
text(ts,0.3, sprintf('  tp=%0.3f s',ts))
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('Odozva systému 2. rádu')
```



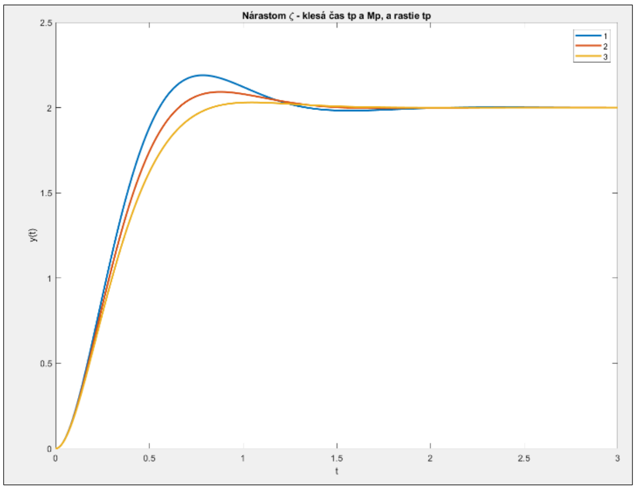
Obr. 11.5. Vykreslenie odozvy systému s vyznačením dôležitých parametrov

Vyšetrime teraz, aký vplyv má na odozvu systému, ak budeme meniť jeden z dvoch parametrov **systému 2. rádu**. V prvom prípade vyšetrime vplyv na zmenu vlastnej uhlovej frekvencie kmitania $\boldsymbol{\omega_n}$, pri konštantnom súčiniteli útlmu $\boldsymbol{\zeta}$. Ak, bude narastať hodnota vlastnej frekvencie $\boldsymbol{\omega_n}$, pri konštantnom útlme $\boldsymbol{\zeta}$, potom bude klesať čas výskytu prvého **prekmitu** $\mathbf{t_p} = \frac{\pi}{\omega_d}$ a takisto čas ustálenia $\mathbf{t_s} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$, pozri Obr. 11.6.



Obr. 11.6. Vplyv zmeny ω_n na odozvu systému 2. rádu

V druhom prípade budeme uvažovať, že vlastná uhlová frekvencia $\boldsymbol{\omega_n}$ bude konštantná a meniť budeme **súčiniteľ útlmu** $\boldsymbol{\zeta}$. S nárastom $\boldsymbol{\zeta}$ pri rovnakej hodnote $\boldsymbol{\omega_n}$, bude klesať čas ustálenia $\mathbf{t_s} = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{\zeta\omega_n}}$ a takisto veľkosť prekmitu $\mathbf{M_p}$, naopak narastať bude hodnota času prekmitu $\mathbf{t_p} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\omega_d}}$, pozri Obr. 11.7.



Obr. 11.7. Vplyv zmeny ζ na odozvu systému 2. rádu

Prechádzajúce grafy boli vypočítané a zobrazené prostredníctvom ďalšieho skriptu zadefinovaného Matlabe.

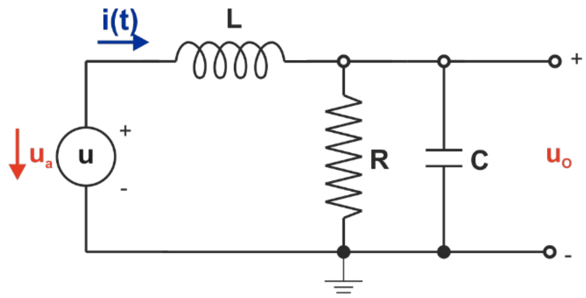
```
clc
clear
close all

K=2;
wn=5;
zeta=0.6;
t=0:0.01:3;
```

```
%Nárast wn pri konštantnom zeta
for i=1:3
   gs=tf((wn*i)^2,[1 2*wn*i*zeta (wn*i)^2]);
   y(:,i)=step(K*gs,t);
   wd(i)=wn*i*sqrt(1-zeta^2);
   tp1(i)=pi/wd(i);
   ts1(i)=4/(zeta*i*wn);
   Mp1(i)=exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2));
end

figure(1)
plot(t,y,'LineWidt',2)
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('Nárastom \omegan - klesá čas tp a ts, Mp - konšt.')
legend('1','2','3')

clear
K=2;
wn=5;
zeta=0.6;
t=0:0.01:3;
zeta=[0.6 0.7 0.8];

for i=1:3
   gs=tf(wn^2,[1 2*zeta(i)*wn wn^2]);
   y(:,i)=step(K*gs,t);
   wd(i)=wn*sqrt(1-zeta(i)^2);
   tp1(i)=pi/wd(i);
   ts1(i)=4/(zeta(i)*wn);
   Mp1(i)=exp(-zeta(i)*pi/sqrt(1-zeta(i)^2));
end

figure(2)
plot(t,y,'LineWidt',2)
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('Nárastom \zeta - klesá čas tp a Mp, a rastie tp')
legend('1','2','3')
```

Úlohy na riešenie

Problém 11.1:

Sériový RLC obvod zobrazený na Obr. 11.8, pozostáva z odporu $\mathbf{R = 150\ \Omega}$, cievky s indukčnosťou $\mathbf{L = 200\ mH}$ a kondenzátora s kapacitou $\mathbf{C = 100\ \mu F}$. Nájdite parametre systému $\boldsymbol{\omega_n, \omega, \zeta}$, a určte **všeobecnú diferenciálnu rovnicu 2. rádu**. Vyšetrite odozvu elektrického napätia $\mathbf{u_o}$, v závislosti od vstupného napätia $\mathbf{u_a = 12\ V}$.



Obr. 11.8. RLC obvod

Problém 11.2:

A poznáme diferenciálnu rovnicu **mechanického systému 2. rádu** v tomto tvare

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)\,, \tag{11.74}$$

kde $\mathbf{m = 15\ kg}$, $\mathbf{b = 35\ N.s/m}$ a $\mathbf{k = 3500\ N/m}$. Vypočítajte pre tento systém všetky parametre charakterizujúce kvalitu jeho odozvy.

Problém 11.3:

Ak poznáme nasledovnú **prenosovú funkciu G(s) systému 2. rádu**, zobrazte odozvu tohto systému a vypočítajte všetky parametre systému, ktoré charakterizujú kvalitu odozvy takéhoto systému 2. rádu, t. j. **čas ustálenia $\mathbf{t_s}$, čas prekmitnutia $\mathbf{t_p}$** a veľkosť **prekmitu $\mathbf{M_p}$**.

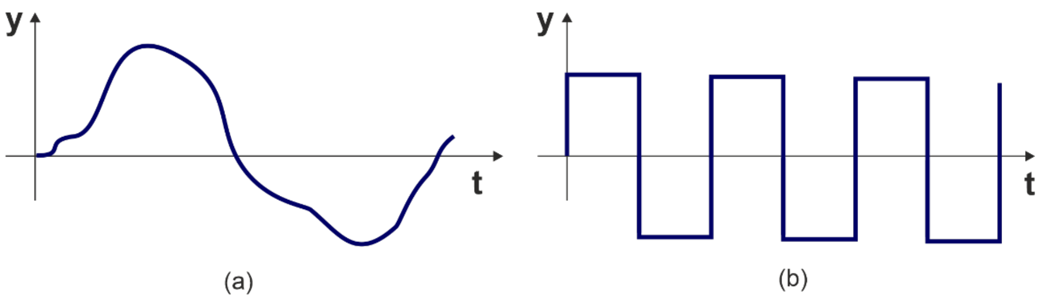
$$G(s) = \frac{100}{2s^2 + 10s + 48}\,. \tag{11.75}$$

12 FOURIEROVE RADY

Fourierove rady sú jedným zo silných nástrojov široko používaných v **elektronickom priemysle**, ale takisto používané na analýzu **periodických signálov**, nájdenie frekvenčnej odozvy **lineárnych dynamických systémov**.

V oblastiach ako je **riadenie**, **komunikácia**, **sieťová analýza** a pod., výsledná **ustálená odozva** systémov vedie spravidla na **sínusové tvary signálov**. A to z dôvodu, že sínusové signály sa objavujú prirodzene v prípade týchto dynamických systémov. Odozva systému na tieto signály odhaľuje veľmi dôležitú vlastnosť **lineárnych systémov**. Mimo sínusových typov signálov sa v moderných elektrických systémov používajú aj nesínusové periodické signály (pulzný signál).

Na poli výkonovej elektroniky, kde veľké množstvo súčiastok, ako sú napr. **tyristory**, **výkonové tranzistory** a pod., sú odozvy systémov mnohokrát opisované práve nesínusovými typmi signálov. Pripomeňme, že nárast používania digitálnych systémov podnietil používanie týchto tzv. obdĺžnikových **pulzných signálov**. Niektoré príklady nesínusových signálov sú zobrazené na Obr. 12.1.



Obr. 12.1. (a) Nesínusový periodický signál, (b) pulzný nesínusový periodický signál

Na prácu s takýmito typmi signálov boli vynájdené techniky **Fourierových radov** a **Fourierových transformácií**, ktoré sa bežne používajú v praxi. V tejto a nasledujúcej kap. 13 si priblížime techniku práce s **Fourierovými radmi** a **Fourierovými transformáciami**. Začneme odvodením **Fourierovho radu pre periodicky** opakujúci sa signál daný funkciou **f(t).**

Predpokladajme, že $\mathbf{f(t)}$ je ľubovoľná periodická funkcia premennej času $\mathbf{t}$ s periódou opakovania **T**. Asociáciou periódy **T** s frekvenciu $\boldsymbol{\omega}$, dostávame, že $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}}$. **Fourierovo pravidlo** hovorí, že ľubovoľná funkcia môže byť rozvinutá do **nekonečného Fourierovho radu** v tvare

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\,, \end{aligned} \tag{12.1}$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je frekvencia danej funkcie $\mathbf{f(t)}$, ktorú nazývame základnou frekvenciou, $\mathbf{a_n}, \mathbf{b_n}$ sú **Fourierove koeficienty**.

Ak zavedieme toto

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = c_n \cos(n\omega t + \phi_n)\,, \tag{12.2}$$

kde $\mathbf{c_n} = \sqrt{\mathbf{a_n^2} + \mathbf{b_n^2}}$ je amplitúda **n-tého** komponentu a $\boldsymbol{\phi_n} = -\mathbf{tan^{-1}}\left(\frac{\mathbf{b_n}}{\mathbf{a_n}}\right)$ je **fázový uhol**. Potom možno **Fourierov rad** zadefinovať v tomto tvare

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{c_0}{2} + c_1\cos(\omega t + \phi_1) + c_2\cos(2\omega t + \phi_2) + \cdots = \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n \cos(n\omega t + \phi_n)]\,. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Na zadefinovanie **Fourierovho nekonečného radu** musíme poznať koeficienty $\mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_n}$, pre **n = 1, 2, 3,...** . Na odvodenie vzťahov na výpočet **Fourierových koeficientov** budeme uvažovať, že **periodická funkcia f(t)** pre ktorú počítame **Fourierove koeficienty** je definovaná na intervale $\langle -\mathbf{T/2}, \mathbf{T/2}\rangle$. Prenásobením oboch strán predchádzajúceho **Fourierovho rozvoja funkcie** $\mathbf{f(t)}$ súčiniteľom $\mathbf{cos(m \cdot \omega t)}$, kde $\mathbf{m = 1, 2, 3, ..}$ a ďalším integrovaním tohto Fourierovho rozvoja v hraniciach od $-\mathbf{T/2}$ do $\mathbf{T/2}$ dostávame

$$\begin{aligned} &\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(m\cdot\omega t) = \\ &\qquad = \frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(m\cdot\omega t) + \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos(n\cdot\omega t)\cos(m\cdot\omega t) \\ &\qquad + \int_{-T/2}^{T/2}\sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin(n\cdot\omega t)\cos(m\cdot\omega t)\,. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Vypočítaním integrálov v predchádzajúcej rovnici sa dá dokázať, že **prvý** a **tretí integrál** na pravej strane rovnice sú vždy nulové pre ľubovoľné hodnoty **m** a **n**. Potom, **druhý integrál** sa rovná nule, len v prípade, že $\mathbf{m \neq n}$, avšak pre rovnaké hodnoty **m** a **n**, keď $\mathbf{m = n}$ hodnota tohto integrálu konverguje k hodnote $\mathbf{T/2 \cdot a_n}$. Na základe tohto, potom pre koeficient $\mathbf{a_n}$ musí platiť, že

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\, dt\,, n = 0,1,2, \dots\,. \tag{12.5}$$

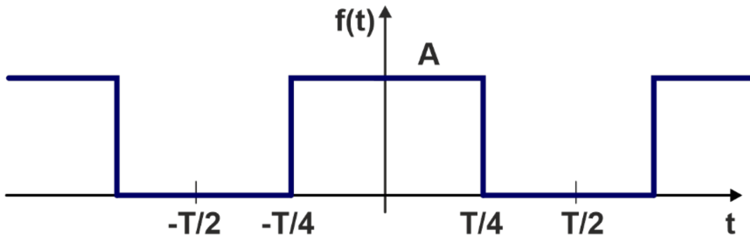
Poznamenajme, že ak $\mathbf{n = 0}$ nadobúda tento výraz hodnotu $\mathbf{a_0} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T}}\int_{-\mathbf{T/2}}^{\mathbf{T/2}}\mathbf{f(t)dt}$. Podobným spôsobom prenásobením oboch strán rozvoja funkcie $\mathbf{f(t)}$ výrazom $\mathbf{sin(m\omega t)}$, možno dospieť ku vzťahu, ktorý platí pre koeficient $\mathbf{b_n}$,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\cdot\omega t)\,dt\,, n = 0,1,2,\dots\ . \qquad (12.6)$$

V okamihu, ak poznáme koeficienty $\mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_n}$, ktoré možno vypočítať na základe predchádzajúcich vzťahov (12.5) a (12.6), potom definícia **Fourierovho radu** pre periodickú funkciu $\mathbf{f(t)}$, je kompletne zadefinovaná rozvojom podľa vzťahu (12.1), resp. (12.3).

Príklad č. 12.1:

Pulzný signál periodicky opakujúcej sa funkcie **f(t)** je zobrazený na nasledujúcom Obr. 12.2. Nájdite **Fourierov rad** pre túto periodicky opakujúcu sa funkciu **f(t)**.



Obr. 12.2. Periodická funkcia f(t)

Graf zobrazuje periodickú funkciu s periódou opakovania $\mathbf{T/2}$, pulzného tvaru s obdĺžnikovým pulzom so šírkou **50 %** z cyklu. Pre túto funkciu možno vypočítať Fourierove koeficienty $\mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_n}$ týmto spôsobom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} A\cos n\omega t\,dt = \frac{2A}{n\omega T}\left[\sin n\omega t\right]_{-T/4}^{T/4} \\ &= \frac{\omega 2A}{n\omega 2\pi}\left[2\cdot\sin n\omega\frac{T}{4}\right] = \frac{2A}{n\pi}\left[\sin n\omega\frac{2\pi}{4\omega}\right] = \frac{2A}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, n = 0,1,2,\dots\ , \end{aligned} \qquad (12.7)$$

potom $a_1 = \frac{2A}{\pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{2A}{3\pi}, a_4 = 0, \dots$.

Ak, dosadíme za $\mathbf{n = 0}$, potom dostávame vo výraze neurčitý výraz $\mathbf{a_0 = \frac{0}{0}}$, tzn. že na výpočet koeficientu $\mathbf{a_0}$, je nutné použiť **L´Hospitalovho pravidlo**. Potom,

$$a_0 = \lim_{n\to 0}\frac{2A\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi} = A \qquad (12.8)$$

a podobným spôsobom možno vypočítať koeficienty $\mathbf{b_n}$. V tomto prípade sa dá dokázať, že všetky koeficienty $\mathbf{b_n}$ (pre všetky n = 1,2,3,...) konvergujú k nulovým hodnotám.

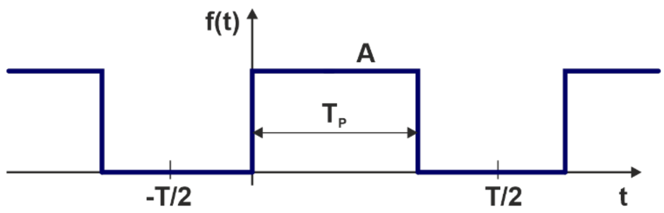
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} A\sin n\omega t\,dt = 0\,. \tag{12.9}$$

Výsledný **Fourierov rad** rozvoja funkcie **f(t)** bude mať tvar

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\cos\omega t - \frac{2A}{3\pi}\cos 3\omega t + \frac{2A}{5\pi}\cos 5\omega t - \cdots = 0\,. \tag{12.10}$$

Príklad č. 12.2:

Predpokladajme posunutú funkciu pulzného signálu **f(t)**, ktorá je zobrazená na Obr. 12.3. Nájdite **Fourierov rad** pre túto periodicky opakujúcu sa funkciu **f(t)**.



Obr. 12.3. Posunutá periodická funkcia

Pre túto funkciu **f(t)** možno vypočítať Fourierove koeficienty $\mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_n}$ týmto spôsobom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} A\cos n\omega t\,dt = \frac{2A}{n\omega T}[\sin n\omega t]_0^{T/2} = \frac{\omega 2A}{n\omega 2\pi}\left[\sin n\omega\frac{T}{2} - 0\right] \\ &= \frac{A}{n\pi}\sin n\omega\frac{2\pi}{2\omega} = \frac{A}{n\pi}\sin n\pi = 0, n = 1,2,3,\dots\,. \end{aligned} \tag{12.11}$$

a opäť aplikovaním **L´Hospitalovho pravidla**, dostávame pre koeficient $\mathbf{a_0 = A}$

$$a_0 = \lim_{n\to 0}\frac{A\cdot\pi\cdot\cos n}{\pi} = A\,. \tag{12.12}$$

Ďalej, pre koeficienty $\mathbf{b_n}$ bude platiť, že,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A\sin n\omega t\,dt = \frac{2A}{n\omega T}[-\cos n\omega t]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{\omega 2A}{n\omega 2\pi}\left[-\cos n\omega\frac{T}{2} + 1\right] = \frac{A}{n\pi}\left[-\cos n\omega\frac{2\pi}{2\omega} + 1\right] \\ &= \frac{A}{n\pi}[1 - \cos n\pi], n = 1,2,3\,\dots\,. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Pre rôzne hodnoty **n = 1,2,3, ...**, potom pre koeficienty $\mathbf{b_n}$, platí, že

$$b_1 = \frac{2A}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{2A}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{2A}{5\pi} \,. \tag{12.14}$$

Napokon výsledný **Fourierov rad** rozvoja pre uvažovanú funkciu **f(t)** dostávame v tvare

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sin\omega t + \frac{2A}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{2A}{5\pi}\sin 5\omega t + \cdots \,. \tag{12.15}$$

12.1 EXPONENCIÁLNY (KOMPLEXNÝ) FOURIEROV RAD

Poznamenajme, že do **reálneho Fourierovho radu** z predchádzajúcej kapitoly možno rozvinúť aj signály **sínusového**, resp. **kosínusového** tvaru. Nakoľko počítanie koeficientov $\mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_n}$, pre takýto **reálny Fourierov rad** je v prípade harmonických funkcií zdĺhavejšie, je výhodnejšie v prípade harmonických funkcií definovať, tzv. **exponenciálny (komplexný) Fourierov rad**.

Pre tieto typy **harmonických signálov goniometrického typu** boli teda zavedené **Fourierove rady v exponenciálnom** tvare, ktoré urýchľujú výpočet integrálov s goniometrickými funkciami. Nakoľko integrály exponenciálnych funkcií sa počítajú omnoho rýchlejšie ako integrály definované na základe funkcie **sínus** resp. **kosínus**, kde v prípade násobenia takýchto funkcií z inou goniometrickou funkciou, je nutné využiť **metódu per partes**. Aby bolo možné na výpočet koeficientov využiť definíciu exponenciálnych **Fourierových radov**, je nevyhnuté poznať pre výpočet **Fourierových koeficientov** zodpovedajúci tvar periodicky opakujúcich sa funkcií **sínus** resp. **kosínus** v tomto exponenciálnom komplexnom tvare

$$\begin{aligned} \sin n\omega t &= \frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}\right), \\ \cos n\omega t &= \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}\right). \end{aligned} \tag{12.16}$$

V tvare týchto exponenciálnych výrazov potom možno zadefinovať, tzv. **exponenciálny komplexný Fourierov rad**, pre ktorý platí, že

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-jn\omega t}\right). \tag{12.17}$$

Koeficienty pri exponenciálnych výrazoch v exponenciálnom komplexom Fourierovom rade sú takisto komplexne čísla, ktoré predstavujú dve komplexne združené čísla zadefinované na základe **Fourierových koeficientov** vychádzajúcich z **reálneho Fourierovho radu** $\mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_n}$.

Na zjednodušenie zápisu možno použiť výrazy nahradiť jedným **komplexne združeným parametrom $\boldsymbol{\alpha_n}$**, kde

$$\alpha_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{a} \quad \alpha_{*n} = \frac{a_n + jb_n}{2}. \tag{12.18}$$

Poznamenajme, že na základe symetrie **Fourierovho radu**, ak nultý koeficient $\boldsymbol{\alpha_0}$ je definovaný ako $\boldsymbol{\alpha_0} = \frac{a_0}{2}$, potom predchádzajúcu rovnicu možno zjednodušiť na tento tvar **exponenciálneho Fourierovho radu**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t}, \tag{12.19}$$

kde koeficienty $\boldsymbol{\alpha_n}$ sú definované na základe tohto komplexného vzťahu

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega t} dt, \quad n = -\infty, \dots, -1,0,1,2, \dots, \infty. \tag{12.20}$$

Rovnica (12.19) a (12.20) predstavujú definíciu pre tzv. **exponenciálny komplexný Fourierov rad**. Fourierove koeficienty $\boldsymbol{\alpha_n}$ sú komplexné čísla, ktoré sa vzťahujú ku koeficientom $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ a takisto $\mathbf{c_n}$. Medzi týmito koeficientami platí tento vzťah

$$|\alpha_n| = \frac{c_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}. \tag{12.21}$$

12.2 FREKVENČNÉ SPEKTRUM

V predchádzajúcich kapitolách (12) a (12.1) sme uviedli, že **Fourierove rady** majú dve formy, a to formu **reálnu**, ktorá je daná rovnicou

$$\begin{gathered} f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n), \\ c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right), \end{gathered} \tag{12.22}$$

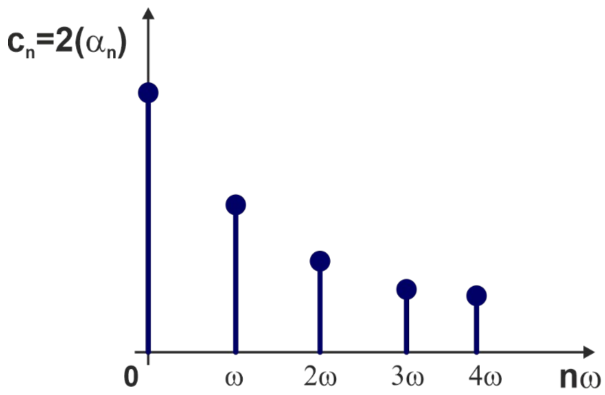
ako aj **komplexnú** formu, danú **exponenciálnym komplexným radom**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t} \tag{12.23}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega t} dt,\ \ n = -\infty, \dots, -1,0,1,2, \dots, \infty$$

Tieto reprezentácie naznačujú, že **Fourierove komponenty** majú veľkosť **amplitúdy** $\mathbf{c_n = 2|\alpha_n|}$ a **fázový uhol** $\boldsymbol{\phi_n}$. Nakreslením amplitúdy $\mathbf{c_n}$ pre rôzne **harmonické frekvencie** $\mathbf{n \cdot \omega}$, možno zobraziť, tzv. **amplitúdovo frekvenčné spektrum** funkcie **f(t)**.

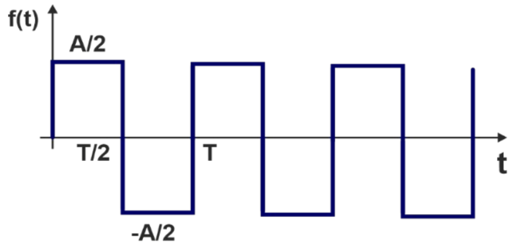
Podobne zobrazením **fázového uhlu** $\boldsymbol{\phi_n}$, pre rôzne harmonické frekvencie $\mathbf{n \cdot \omega}$ možno zobraziť **fázové spektrum funkcie**. Tieto dva grafy spoločne tvoria tzv. **Fourierovo** alebo **frekvenčné spektrum** danej funkcie **f(t)**. Poznamenajme, že v mnohých prípadoch **fázové spektrum** nie je veľmi dôležité, ale skôr nás bude zaujímať práve **amplitúdové spektrum**. Fázový spektrom funkcie **f(t)** sa ďalej nebudeme zaoberať. Pripomeňme, že rovnice, ktoré sme zadefinovali pre **Fourierove rady**, kde sme uvažovali harmonické frekvencie $\boldsymbol{\omega}$, boli integrálmi definovanými pre nezávislú premennú $\mathbf{n \cdot \omega}$. Vo frekvenčnom spektre $\mathbf{c_n = 2|\alpha_n|}$ sú, potom hodnoty definované diskrétnymi hodnotami pre **n = 0, 1, 2, 3,...** . To znamená, že $\mathbf{n \cdot \omega}$ bude v tomto prípade predstavovať diskrétnu premennú. Príklad amplitúdového frekvenčného spektra pre ľubovoľnú nešpecifikovanú funkciu je znázornený na nasledujúcom Obr. 12.4. **Frekvenčné spektrum** vo všeobecnosti tvoria čiary s rozstupom daným harmonickou frekvenciou $\boldsymbol{\omega}$. Takéto spektrum, potom nazývame **čiarovým spektrom funkcie f(t)**. Ako určiť takéto čiarové spektrum funkcie pre funkciu **f(t)** si ukážeme na nasledujúcom príklade.



Obr. 12.4. Frekvenčné čiarové spektrum funkcie f(t)

Príklad č. 12.3:

Vypočítajte a nakreslite Fourierove čiarové spektrum pre štvorcový signál zobrazený na Obr. 12.5.



Obr. 12.5. Štvorcový signál f(t)

Z definície pre **exponenciálny Fourierový rad**, pre spektrum funkcie f(t), dostávame

$$\alpha_n = \alpha(n\omega) = \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}\left(-\frac{A}{2}\right)e^{-jn\omega t}dt + \int_{0}^{T/2}\left(\frac{A}{2}\right)e^{-jn\omega t}dt\right], \tag{12.24}$$

kde pre **n = 0**, musí platiť, že

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}\left(-\frac{A}{2}\right)dt + \int_{0}^{T/2}\left(\frac{A}{2}\right)dt\right] = \frac{1}{T}\left[-\frac{A}{2}\left(0+\frac{T}{2}\right)+\frac{A}{2}\left(\frac{T}{2}+0\right)\right] = 0. \tag{12.25}$$

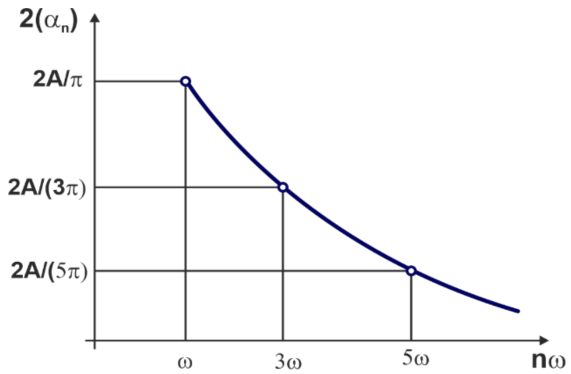
Potom pre ďalšie všetky hodnoty **n = 1, 2, 3**,..., zámenou periódy **T** vo výraz za $\mathbf{2\pi/\omega}$, možno vypočítať $\boldsymbol{\alpha_n}$, v tomto tvare

$$\begin{aligned}\alpha_n = \alpha(n\omega) &= \frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{A}{2}\left[-\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{0}e^{-jn\omega t}dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{\omega}}e^{-jn\omega t}dt\right] = \\ &= \frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{A}{2}\left[\left(\frac{-e^{-jn\omega t}}{-jn\omega}\right)_{-\frac{\pi}{\omega}}^{0} + \left(\frac{e^{-jn\omega t}}{-jn\omega}\right)_{0}^{\frac{\pi}{\omega}}\right] = \frac{A}{2}\frac{(1-\cos n\pi)}{jn\pi}.\end{aligned} \tag{12.26}$$

Keďže, pre všetky párne čísla **n** je $\mathbf{\cos n\pi = 1}$, potom $\boldsymbol{\alpha(n\omega) = 0}$. Na druhej strane, pre všetky nepárne čísla **n** je $\mathbf{\cos n\pi = -1}$, tzn. že $\boldsymbol{\alpha(n\omega) = \frac{A}{jn\pi}}$. Potom, pre **amplitúdu** a **fázový** uhol frekvenčného spektra, musí platiť, že

$$\begin{gathered}|\alpha_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \Longrightarrow 2|\alpha_n| = \frac{2A}{n\pi}, \\ \phi_n = -\frac{\pi}{2}.\end{gathered} \tag{12.27}$$

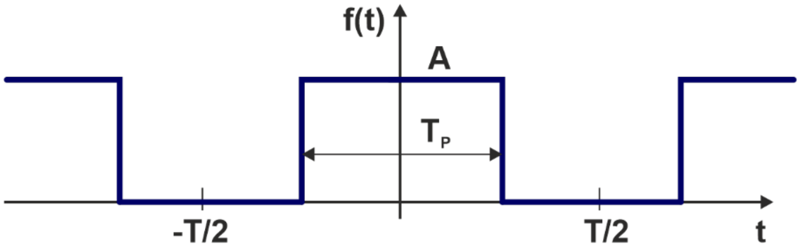
Nasledujúci Obr. 12.6 zobrazuje **amplitúdovo frekvenčné spektrum** danej funkcie pulzného signálu **f(t)**.



Obr. 12.6. Amplitúdové spektrum funkcie f(t)

Príklad č. 12.4:

Určite a nakreslite **čiarové Fourierove spektrum** pre obdĺžnikový signál podľa Obr. 12.7.



Obr. 12.7. Obdĺžnikový signál so šírkou pulzu T_P

Z definície pre **Fourierov komplexný rad**, pre $\boldsymbol{\alpha_n}$ dostávame

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T_P/2}^{T_P/2} A e^{-jn\omega t} dt\,, \tag{12.28}$$

kde pre **n = 0** možno vypočítať $\boldsymbol{\alpha_0}$ ako

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_P/2}^{T_P/2} A dt = \frac{1}{T}[At]_{-T_P/2}^{T_P/2} = \frac{AT_P}{T}\,. \tag{12.29}$$

Pre indexy **n = 1, 2, 3, ...**, možno vypočítať $\boldsymbol{\alpha_n}$, integrovaním funkcie **f(t) = A** v hraniciach $\boldsymbol{\langle -T_P/2, T_P/2\rangle}$

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T_P/2}^{T_P/2} A e^{-jn\omega t} dt = \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{-jn\omega}\right]_{-\frac{T_P}{2}}^{\frac{T_P}{2}} = \frac{A}{jn\omega T}\left[e^{\frac{jn\omega T_P}{2}} - e^{-\frac{jn\omega T_P}{2}}\right] =$$
$$= \frac{\omega A}{jn\omega 2\pi}\left[e^{\frac{jn\omega T_P}{2}} - e^{-\frac{jn\omega T_P}{2}}\right] = \frac{\omega A}{jn\omega 2\pi}\left[e^{\frac{jn2\pi T_P}{2T}} - e^{-\frac{jn2\pi T_P}{2T}}\right] = \frac{A}{n\pi}\sin\left(n\pi\frac{T_P}{T}\right). \tag{12.30}$$

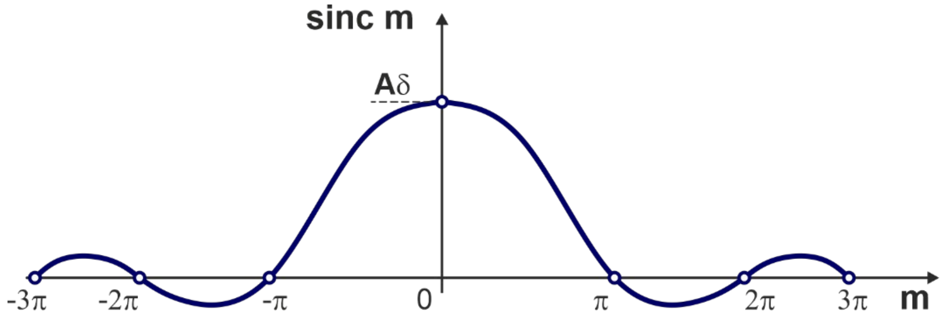
Výsledný vzťah pre vypočítané $\boldsymbol{\alpha_n}$ možno prepísať do tvaru

$$\alpha_n = A\frac{T_P}{T}\frac{\sin\left(n\pi\frac{T_P}{T}\right)}{n\pi\frac{T_P}{T}}\,. \tag{12.31}$$

Ak ďalej zavedieme parameter $\boldsymbol{\delta}$, ktorý zadefinujeme pre pomer šírky pulzu $\mathbf{T_P}$ a periódy signálu $\mathbf{T}$, ako $\boldsymbol{\delta} = \frac{\mathbf{T_P}}{\mathbf{T}}$, potom zavedením matematickej funkcie **sinc** (upravená funkcia **sínus**) možno predchádzajúci vzťah pre $\boldsymbol{\alpha_n}$, upraviť do výsledného tvaru

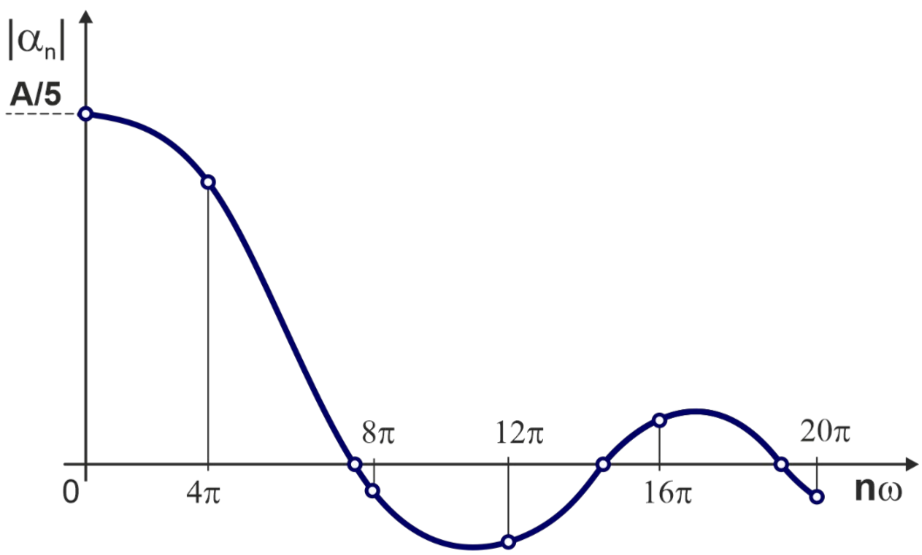
$$\alpha_n = A\delta \frac{\sin(n\delta\pi)}{n\delta\pi} = A\delta\,\mathrm{sinc}(n\delta\pi)\,. \qquad (12.32)$$

Predchádzajúca rovnica opisuje, ako sa mení $\boldsymbol{\alpha_n}$ v závislosti od $\mathbf{n \cdot \boldsymbol{\delta}}$. Táto variácia je daná formou funkcie $\mathbf{sin(m)\,/m}$. Matematická funkcia, ktorá definuje pomer $\mathbf{(sin\,m)/m}$ je nazývaná ako funkcia $\mathbf{sinc(m)}$. Príklad priebehu funkcie $\mathbf{sinc(m)}$ je znázornený na nasledujúcom Obr. 12.8.



Obr. 12.8. Sinc funkcia

Na zobrazenie spektra pre náš prípad všeobecného pulzného signálu **f(t)**, budeme predpokladať hodnoty $\mathbf{T_p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$ a $\mathbf{T} = \mathbf{1/2}$. Potom $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{1/5}$ a $\boldsymbol{\alpha_n} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{5}}\mathbf{sinc}\left(\frac{\mathbf{n\pi}}{\mathbf{5}}\right)$. Frekvencia signálu **f(t)** je $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}} = \mathbf{4\pi}$. To znamená, že rozpätie čiar čiarového spektra pre túto funkciu bude $\mathbf{4\pi}$. Výsledné **čiarové spektrum** pre daný pulzný signál **f(t)** je znázornené na nasledujúcom Obr. 12.9.



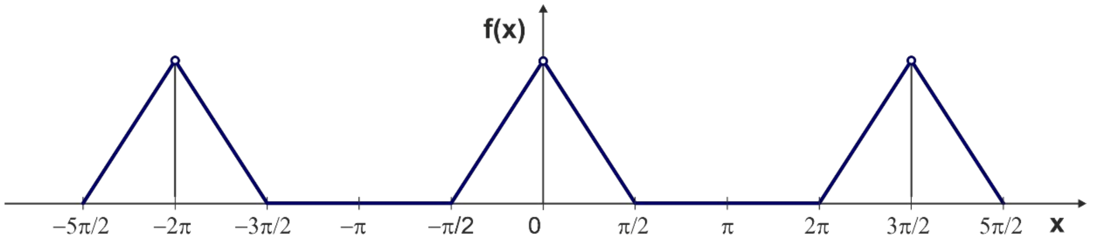
Obr. 12.9. Spektrum obdĺžnikového signálu

Úlohy na riešenie

Problém 12.1:

Nájdite rozvoj funkcie **f(x)** zobrazenej na Obr. 12.10 do **exponenciálneho komplexného Fourierovho radu** a zobrazte graf súčtovej funkcie tohto radu na grafe. Funkciu zobrazenú na Obr. 12.10 možno matematicky opísať ako

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \ , \\ 0, & x \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle \ . \end{cases} \qquad (12.33)$$



Obr. 12.10. Periodická funkcia f(x)

Problém 12.2:

V úlohách 1. až 8. rozviňte dané funkcie **f(x)** na definovanom intervale do **exponenciálneho komplexného Fourierovho radu**.

1. $f(x) = \cos^4 x, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$
2. $f(x) = \cos\frac{x}{2}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$
3. $f(x) = x, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$
4. $f(x) = e^x, \quad x \in \langle -k, k \rangle, k > 0$
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1, & x \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0, & x \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0, & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0, & x \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$

13 FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

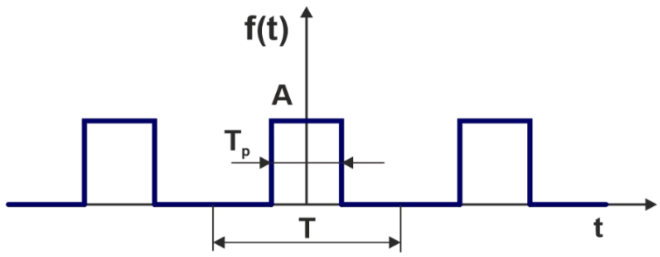
V tejto kapitole sa zameriame na **Fourierovú transformáciou** signálov, ktorá je odvodená na základe **Fourierových radov**. Kým v rozvoji **Fourierových radov** sme používali symbol $\boldsymbol{\omega}$ na označenie frekvencie periodického signálu napr. $\mathbf{2\omega, 3\omega, 4\omega}, \ldots$, tak pri definovaní **Fourierovej transformácie** budeme musieť rozlišovať medzi harmonickou frekvenciou daného signálu a všeobecnou frekvenciou. Z tohto dôvodu pre označenie **harmonickej frekvencie** budeme od tohto bodu používať symbol $\boldsymbol{\omega_0}$ a pre označenie **všeobecnej premennej** si rezervujeme symbol $\boldsymbol{\omega}$.

V prípade, že zameníme symbol $\boldsymbol{\omega}$ za symbol $\boldsymbol{\omega_0}$, v definícii exponenciálneho komplexného radu **Fourierovho radu**, potom tento rad bude definovaný nasledujúcimi vzťahmi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \, e^{jn\omega_0 t} \quad \text{a} \quad \alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \,, \tag{13.1}$$

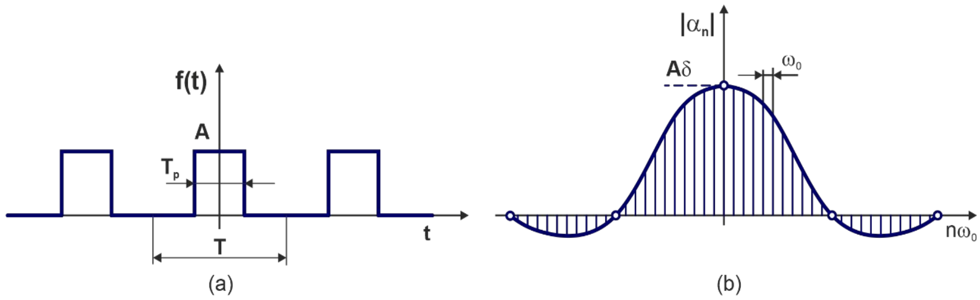
kde $\boldsymbol{\omega_0} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}}$ a **T** je **perióda opakovania** pre daný periodicky opakujúci sa signál **f(t)**.

Aby bolo možné rozšíriť **Fourierovú metódu** rozvoja Fourierových radov od **periodických** k **neperiodickým** signálom **f(t)**, pri odvodení **Fourierovej transformácie** začneme s periodicky opakujúcim sa obdĺžnikovým (pulzným) signálom, ktorý sa opakuje s periódou **T** a má definovanú šírkou pulzu ako $\mathbf{T_p}$. Tento periodický signál je zobrazený na nasledujúcom Obr. 13.1.



Obr. 13.1. Obdĺžnikový periodický signál

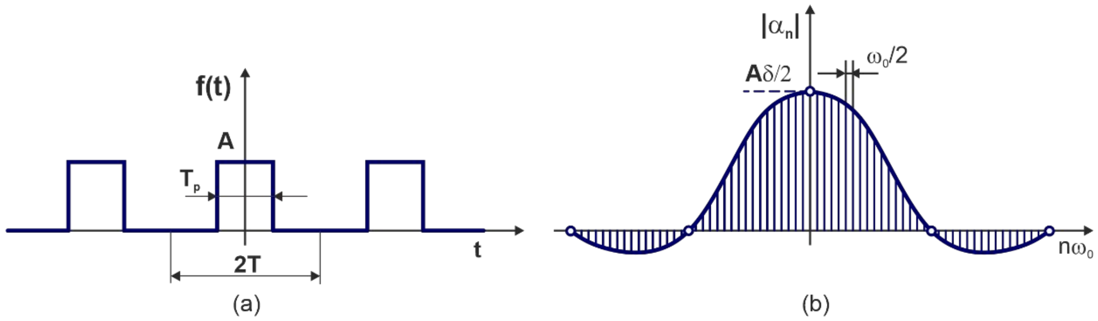
Ako už vieme, tak **frekvenčné spektrum** tohto signálu predstavuje **čiarové spektrum** s frekvenciou $\boldsymbol{\omega_0}$, ktorá definuje rozostup medzi jednotlivými čiarami. Graf signálu a jeho výsledné **čiarové frekvenčné spektrum** sú znázornené na obrázkoch Obr. 13.2 (a) a (b).



Obr. 13.2. (a) obdĺžnikový signál, (b) frekvenčné spektrum obdĺžnikového signálu

Ďalej budeme predpokladať, že perióda $\mathbf{T}$ sa zdvojnásobí na hodnotu $\mathbf{2T}$ a to s ponechanou veľkosťou šírky pulzu $\mathbf{T_p}$. Harmonická frekvencia $\boldsymbol{\omega_0}$ v toto prípade bude polovičnou hodnotou pôvodnej frekvencie, $\boldsymbol{\omega_0} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{2T}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{T}} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega_0/2}$.

Zmenou harmonickej frekvencie $\boldsymbol{\omega_0}$ sa podobným spôsobom zmení aj **frekvenčné čiarové spektrum signálu**, ktoré v tomto prípade bude hustejšie, nakoľko rozstup čiar bude menší ($\boldsymbol{\omega_0/2}$), výsledkom je hustejšie čiarové spektrum, ktoré je zobrazené na Obr. 13.3 (b).



Obr. 13.3. (a) obdĺžnikový signál s periódou 2T, (b) frekvenčné pásmo

Predpokladajme, že tento proces zväčšovania periódy $\mathbf{T}$ (s konštantnou šírkou pulzu $\mathbf{T_p}$) bude pokračovať ďalej, až kým $\mathbf{T}$ nadobudne nekonečnú hodnotu. To znamená, že v tomto prípade sa presúvame od **periodického signálu** k **neperiodickému signálu** a to z dôvodu, že v procese postupného zväčšovania periódy $\mathbf{T}$, pomer $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{T_p/T} \to \mathbf{0}$ a frekvencia $\boldsymbol{\omega_0} = \mathbf{2\pi/T}$ sa stáva stále menšou a menšou. Povedané inými slovami, premenná frekvencia $\boldsymbol{\omega_0}$ sa stáva nekonečne malou veličinou, resp. $\boldsymbol{\omega_0} \to \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$. Možno teda napísať, že

$$\frac{1}{T} = \frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{13.2}$$

Keďže **čiarové spektrum** sa stáva stále viac a viac hustejším s rozstupom stále menším a menším medzi spektrálnymi čiarami, potom rozostup medzi čiarami konverguje k nekonečne malej hodnote $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$. Inými slovami, diskrétna premenná frekvencie $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega_0}$ pôvodného frekvenčného spektra sa v tomto prípade stáva spojitou premennou $\boldsymbol{\omega}$.

S týmito zavedenými zmenami v prípade **Fourierových radov** sa funkcie **Fourierovho radu** $\boldsymbol{\alpha_n}$ a **f(t)** stávajú funkciami spojitej premennej $\boldsymbol{\omega}$. To znamená, že

$$\alpha_n = \alpha(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\,. \tag{13.3}$$

Dosadením hodnoty $\boldsymbol{\alpha_n}$ do výrazu $\mathbf{f(t)}$, potom dostávame

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right] e^{jn\omega_0 t}\,. \tag{13.4}$$

S premennou $\mathbf{n \cdot \omega_0}$, ktorú zmeníme za spojitú premennú $\boldsymbol{\omega}$ sa znak sumy v predchádzajúcom výraze mení na symbol integrálu a teda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right] e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right] e^{j\omega t}d\omega\,. \tag{13.5}$$

Veličina medzi zátvorkami bude funkciou premennej $\boldsymbol{\omega}$. Ak pomenujeme túto veličinu ako $\mathbf{F(\boldsymbol{\omega})}$, potom bude platiť, že

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega\,. \tag{13.6}$$

Túto rovnicu budeme nazývať **Fourierovým integrálom**. V predchádzajúcom odvodzovaní sme teda ukázali, že rovnice Fourierových radov možno pretransformovať na **Fourierove integrály**, ktoré platia aj pre **neperiodické signály**.

Vráťme sa teraz na chvíľu späť k **čiarovému spektru funkcií f(t)**. Už vieme, že ak sa čiary čiarového spektra k sebe približujú redukuje sa spektrálna veličina. V hranici $\mathbf{T \to \infty,\ \boldsymbol{\alpha_n} \to 0}$. Preto namiesto $\boldsymbol{\alpha_n}$ zadefinujme výraz $\boldsymbol{\alpha_n} \cdot \mathbf{T}$ ako nové **čiarové spektrum**. Táto veličina bude konečná veličina. Z rovnice (13.1) a takisto z definície pre $\mathbf{F(\boldsymbol{\omega})}$ vyplýva, že v nekonečne bude sa $\boldsymbol{\alpha_n} \cdot \mathbf{T}$ rovnať $\mathbf{F(\boldsymbol{\omega})}$. Potom funkcia $\mathbf{F(\boldsymbol{\omega})}$ bude definovaná ako

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\,, \tag{13.7}$$

je spojitou funkciou premennej $\boldsymbol{\omega}$ a budem ju nazývať **Fourierovou transformáciou** funkcie $\mathbf{f(t)}$.

Fourierova transformácia podľa definície pre $\mathbf{F(\boldsymbol{\omega})}$ umožňuje reprezentovať funkciu **f(t)** definovanú v časovej **t** ako funkciu $\mathbf{F(\boldsymbol{\omega})}$ definovanú vo frekvenčnej oblasti $\boldsymbol{\omega}$. Zodpovedajúci vzťah (13.6) sa nazýva **inverznou Fourierovou transformáciou** funkcie $\mathbf{F(\boldsymbol{\omega})}$. Tento výraz poskytuje metódu pre prevod funkcie definovanej vo frekvenčnej oblasti $\boldsymbol{\omega}$ na funkciu definovanú v časovej oblasti **t**.

Predchádzajúce dva vzťahy sa nazývajú **Fourierovým transformačným párom**. Tento pár je reprezentovaný ako $\mathbf{f(t)} \leftrightarrow \mathbf{F(\omega)}$ čo znamená, že $\mathbf{F(\omega)}$ je **Fourierova transformácia** $\mathbf{f(t)}$ a $\mathbf{f(t)}$ je **inverznou Fourierovou transformáciou** funkcie $\mathbf{F(\omega)}$. Tento vzájomný vzťah možno opísať ako

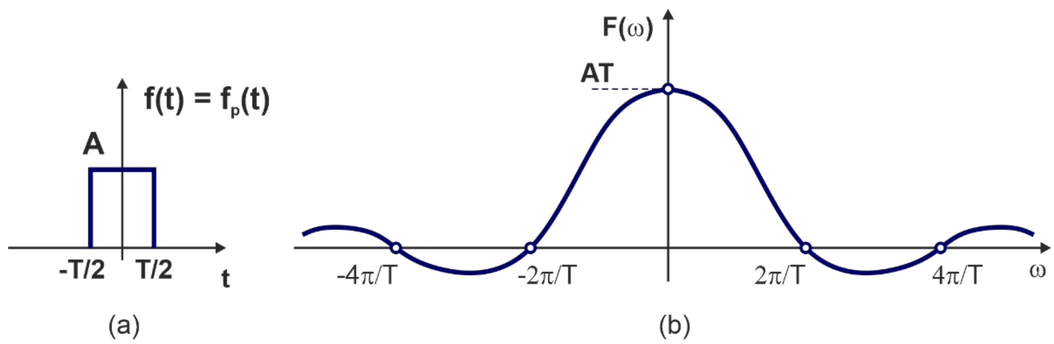
$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad \text{a} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]\,. \tag{13.8}$$

Poznamenajme, že obe funkcie v **časovej oblasti** $\mathbf{f(t)}$ a vo **frekvenčnej oblasti** $\mathbf{F(\omega)}$ pre signál **f(t)**, obsahujú všetky informácie o danom signály a sú ekvivalentné pre reprezentáciu tohto signálu **f(t)**.

13.1 FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA SIGNÁLOV

13.1.1 Obdĺžnikový pulzný signál

Obdĺžnikový pulzný signál s amplitúdou **A** a šírkou pulzu, ktorý je definovaný na intervale $\langle -\mathbf{T/2}\,,\mathbf{T/2}\rangle$, je znázornený na nasledujúcom Obr. 13.4. Nájdime **Fourierovú** transformáciu tohto signálu **f(t)**.



Obr. 13.4. Obdĺžnikový signál: (a) pulzný signál, (b) frekvenčné spektrum

Pretože sa tento signál vyskytuje pomerne často v prípade fyzikálnych systémov, možno mu priradiť špeciálne označenie symbolom $\mathbf{f_p(t)}$. Odvodenie **Fourierovej transformácie** pre tento typ signálu **f(t)** bude v tvare

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A\, e^{-j\omega t}\, dt = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{-j\omega}\left[e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega\frac{T}{2}}\right]$$
$$= AT\frac{\sin(\omega\, T/2)}{(\omega\, T/2)} = AT\,\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}\,. \tag{13.9}$$

Ak je pulzný obdĺžnikový signál zobrazený na Obr. 13.4, posunutý vpravo o veľkosť periódy $\mathbf{T/2}$, potom dĺžka trvania pulzu je $\langle \mathbf{0}, \mathbf{T}\rangle$ a jeho **Fourierova transformácia** bude definovaná ako

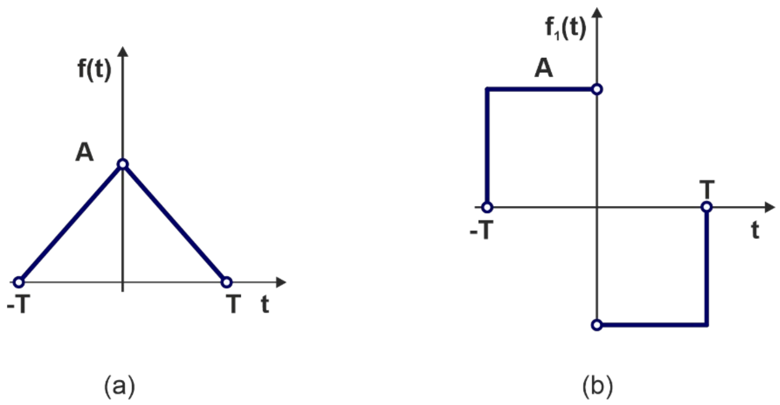
$$F(\omega) = \int_0^T A\, e^{-j\omega t}\, dt = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_0^T = -\frac{A}{j\omega}\left[e^{-j\omega T} - 1\right] = AT\frac{\sin\frac{(\omega T)}{2}}{\frac{(\omega T)}{2}} e^{-\frac{j\omega T}{2}}$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2} e^{-\frac{j\omega T}{2}}. \qquad (13.10)$$

Výsledok ukazuje, že **amplitúdovo frekvenčné spektrum** zostáva rovnaké, ale posunuté o **fázový uhol** $\angle \frac{\boldsymbol{\omega T}}{\mathbf{2}}$. Toto je všeobecná vlastnosť **Fourierovej transformácie**, keď hovoríme o tzv. posúvaní o veľkosť času $\mathbf{t_0}$. Toto posunutie sa prejaví ako násobenie členom $\mathbf{e^{-j\omega t_0}}$. To znamená, že ak $\mathbf{f(t)} \leftrightarrow \mathbf{F(\omega)}$, potom $\mathbf{f(t - t_0)} \leftrightarrow \mathbf{F(\omega)e^{-j\omega t_0}}$. Toto nazývame vlastnosťou **posúvania Fourierovej transformácie**.

13.1.2 Trojuholníkový pulzný signál

Predtým, než začneme počítať **Fourierovú transformáciu** pre trojuholníkový pulzný signál, ktorý je zobrazený na nasledujúcom Obr. 13.5 (a). Poznamenajme, že **Fourierovú transformáciu** tohto signálu možno získať integrovaním párovej funkcie **štvorcového pulzu** ako je znázornené na Obr. 13.5 (b).



Obr. 13.5. (a) Trojuholníkový signál, (b) štvorcový signál

Nech $\mathbf{f(t)} \leftrightarrow \mathbf{F(\omega)}$. Potom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega\,. \qquad (13.11)$$

Derivovaním oboch strán rovnice podľa času **t** dostávame

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [j\omega\, F(\omega)]e^{j\omega t}\, d\omega\,. \qquad (13.12)$$

Z tohto vyplýva, že keď je nejaká funkcia **f(t)** derivovaná, jej **Fourierova transformácia** je prenásobená výrazom $\mathbf{j\omega}$. V prípade, že je funkcia **f(t)** derivovaná **n-krát** podľa času **t**, potom jej **Fourierova transformácia** je prenásobená výrazom $(\mathbf{j\omega})^{\mathbf{n}}$ alebo platí formula

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)\,. \tag{13.13}$$

Analogicky, ak funkcia **f(t)** je integrovaná, potom jej **Fourierova transformácia** je naopak podelená výrazom $\mathbf{j\omega}$ alebo platí, že

$$\int f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}\,. \tag{13.14}$$

V tomto štádiu sa vrátime späť k **trojuholníkovému pulzu**, ktorý je znázornený na Obr. 13.5 (a). **Fourierovú transformáciu** tohto trojuholníkového pulzu možno získať integrovaním párovej funkcie **štvorcového pulzu**, ktorý je znázornený na Obr. 13.5 (b). Poznamenajme, že funkciu $\mathbf{f_1(t)}$ podľa Obr. 13.5 (b), možno matematicky opísať ako

$$f_1(t) = f_p(t + T/2) - f_p\left(t - \frac{T}{2}\right). \tag{13.15}$$

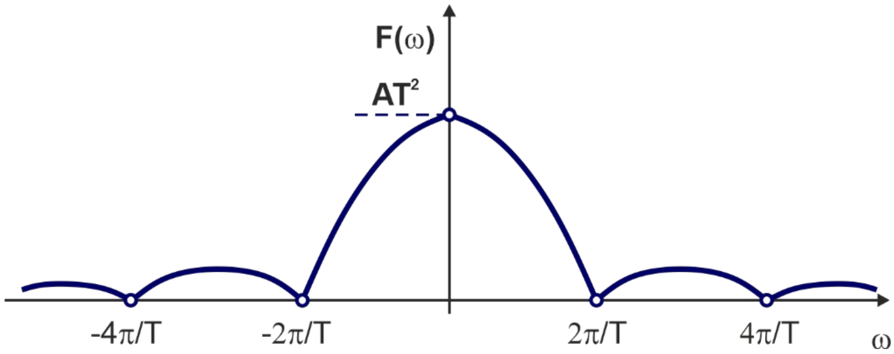
Pripomeňme, že $\mathbf{f_p(t) \leftrightarrow AT\ sinc\frac{\omega T}{2}}$. Ak využijeme **vlastnosť posúvania** pre **Fourierovú transformáciu** funkcie $\mathbf{f_1(t)}$, potom dostávame, že

$$F_1(\omega) = AT\left[\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}e^{j\omega T/2} - \mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}e^{-j\omega T/2}\right] = AT\,\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}\left[e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}\right]. \tag{13.16}$$

Keďže funkcia **Fourierovej transformácie** funkcie **f(t)** podľa Obr. 13.5 (a) je definovaná ako integrál funkcie $\mathbf{f_1(t)}$, potom využitím vlastnosti **integrovania Fourierovej transformácie**, dostávame **Fourierovú transformáciu** $\mathbf{F(\omega)}$ funkcie $\mathbf{f(t)}$ v tomto tvare

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{F_1(\omega)}{j\omega} = AT\,\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}\frac{\left[e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}\right]}{j\omega} = AT\,\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}\frac{\left[e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}\right]}{2j\frac{\omega T}{2}}\cdot T \\ &= AT^2\mathrm{sinc}^2\frac{\omega T}{2}\,. \end{aligned} \tag{13.17}$$

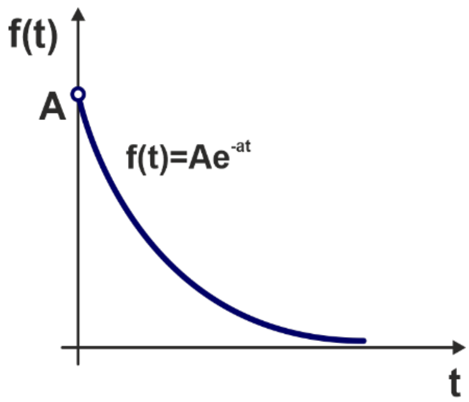
Frekvenčné spektrum trojuholníkového signálu je znázornené na nasledujúcom Obr. 13.6.



Obr. 13.6. Frekvenčné spektrum trojuholníkového signálu

13.1.3 Tlmená exponenciálna funkcia

Tlmená exponenciálna funkcia, ktorá je definovaná funkciou $\mathbf{f(t) = A \cdot e^{-at}}$ je zobrazená na Obr. 13.7 (a). Nájdime **Fourierovú transformáciu** tejto exponenciálnej funkcie.



Obr. 13.7. Tlmená exponenciálna funkcia

Fourierova transformácia $\mathbf{F(\omega)}$ pre túto exponenciálnu funkciu **f(t)** je daná týmto vzťahom

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} Ae^{-at}(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt = A\left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{A}{a+j\omega}. \qquad (13.18)$$

Výsledná **Fourierova transformácia** $\mathbf{F(\omega)}$ predstavuje komplexnú funkciu, pre ktorú možno vypočítať **amplitúda** a **fázový uhol** tejto **Fourierovej transformácie** $\mathbf{F(\omega)}$. **Amplitúda** tejto **Fourierovej transformácie** je definovaná ako

$$|F(\omega)| = \frac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad (13.19)$$

a pre **fázový uhol** potom platí, že

$$\angle F(\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{a}\right). \qquad (13.20)$$

Úlohy na riešenie:

Problém 13.1:

Nájdite **Fourierovú transformáciu** nasledujúcich časovo závislých funkcií **f(t)**,

1. $f(t) = e^{-b|t|}$
2. $f(t) = e^{-b|t|} \sin t$
3. $f(t) = \sin 2t$
4. $f(t) = \cos 3t$
5. $f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0, & t \notin \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}$
6. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0, & t \notin \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}$
7. $f(t) = e^{-2t}$
8. $f(t) = \sin(\omega \cdot t) + \frac{a}{3} \sin(3\omega \cdot t)$

14 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

Každú neperiodickú funkciu času $\mathbf{f(t)}$ možno reprezentovať vo frekvenčnej oblasti jej **Fourierovou transformáciou** $\mathbf{F(\omega)}$, ak spĺňa je absolútne integrovateľná

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty\,. \tag{14.1}$$

Poznamenajme, že mnoho použiteľných funkcií ako je napr. **jednotkový skok (**z angl. **step function)**, **ramp funkcia (**z angl. **ramp function)** alebo **exponenciálne rastúca funkcia**, túto podmienku integrovateľnosti nespĺňajú, a preto pre nich nie možno odvodiť **Fourierovú transformáciu**. Tento problém integrovateľnosti možno vyriešiť zavedením tzv. **Laplaceovej transformácie**.

Frekvenčná premenná sa v tomto prípade stáva komplexnou premennou v tvare $\mathbf{s = \sigma + j\omega}$. **Laplaceova transformácia** zavádza novú pramennú **s**, je v všeobecnosti zovšeobecnením **Fourierovej transformácie** a je možno jedným z najsilnejším nástrojov **analýzy lineárnych systémov**.

14.1 PRECHOD OD FOURIEROVEJ TRANSFORMÁCIÍ FUNKCIÍ K LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCII

Nech $\mathbf{f(t)}$ je ľubovoľná funkcia a to aj taká, ktorá nekonverguje k nule pre čas $\mathbf{t} \to \infty$ (akou je napr. **skoková funkcia (step funkcia)**, ktorá túto podmienku integrovateľnosti pre Fourierovú transformáciu nespĺňa). Aby, sme pre túto funkciu $\mathbf{f(t)}$ upravili jej konvergenciu, musíme túto funkciu $\mathbf{f(t)}$ prenásobiť exponenciálnou funkciou $\mathbf{e^{-\sigma t}}$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je reálna konštanta taká, že, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}|\, dt < \infty\,, \tag{14.2}$$

potom funkcia $\mathbf{f(t) \cdot e^{-\sigma t}}$ bude mať **Fourierovú transformáciu** danú vzťahom

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt\,. \tag{14.3}$$

Ak teraz pre premennú $(\boldsymbol{\sigma + j\omega})$ zavedieme nový symbol **s**, taký, že $\mathbf{s = \sigma + j\omega}$, potom dostávame, že

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\,. \tag{14.4}$$

$\mathbf{F(s)}$ budeme nazývať **Laplaceovou transformáciou** funkcie $\mathbf{f(t)}$. Na nájdenie **inverznej Laplaceovej transformácie** začnime s **inverznou Fourierovou transformáciou** definovanou podľa vzťahu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\,. \qquad (14.5)$$

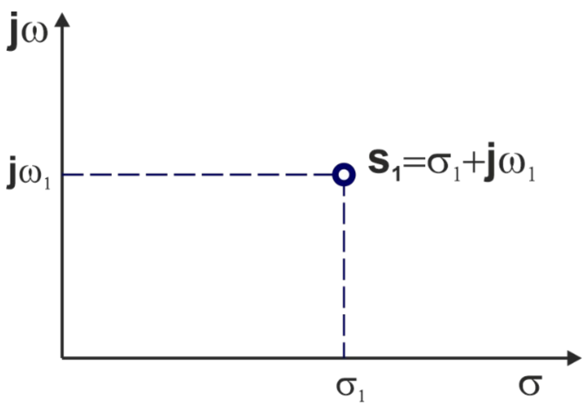
Ak zameníme premennú integrovania $\boldsymbol{\omega}$ v tejto rovnici za $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{j}\boldsymbol{\omega}$. Potom $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{j}}$ a hranice integrovania $\boldsymbol{\omega} = -\infty$ a $\boldsymbol{\omega} = +\infty$, sa zmenia na $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{j}\infty$ a $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{j}\infty$. S týmito vykonanými zmenami dostávame, že

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds\,. \qquad (14.6)$$

Rovnice (14.5) a (14.6) definujú priamu **Laplaceovu** a **inverznú Laplaceovou transformáciu**, kde $\mathbf{F(s)} = \boldsymbol{\mathcal{L}}[\mathbf{f(t)}]$ a $\mathbf{f(t)} = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}[\mathbf{F(s)}]$. Tieto funkcie tvoria pár $\mathbf{f(t)} \leftrightarrow \mathbf{F(s)}$. Keďže v analýze fyzikálnych systémov sú hodnoty **vstupu** a **výstupu** obyčajne uvažované od určitého času $\mathbf{t = 0}$, hodnoty pred týmto časom **t** uvažujeme zvyčajne rovné nulové, potom hranice integrovania definovaného integrálu, možno uvažovať od nuly a teda platí, že

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\,. \qquad (14.7)$$

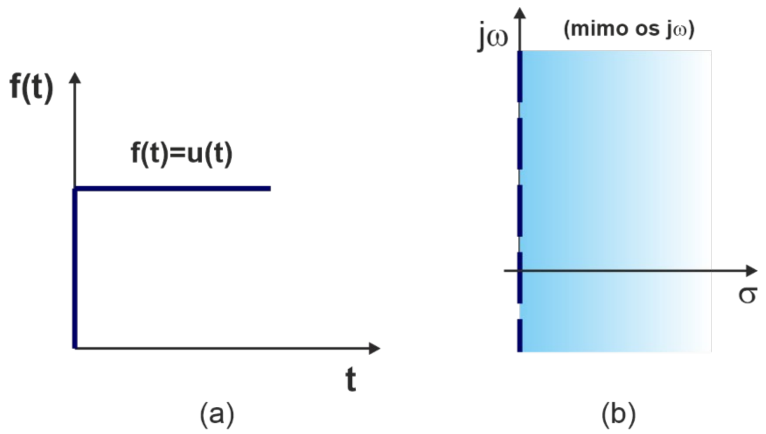
Komplexná premenná $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{j}\boldsymbol{\omega}$ môže byť reprezentovaná graficky v **komplexnej rovine**, ktorú nazývame **s-rovinou**. V danej komplexnej **s-rovine** reálna os **x** predstavuje premennú $\boldsymbol{\sigma}$ a imaginárna os premennú $\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}$. Príklad zobrazenia hodnoty $\mathbf{s_1} = \boldsymbol{\sigma_1} + \mathbf{j}\boldsymbol{\omega_1}$ v **s-rovine**, ktorá je definovaná na základe reálnej a imaginárnej súradnice $\boldsymbol{\sigma_1}$ a $\mathbf{j}\boldsymbol{\omega_1}$, je znázornený na Obr. 14.1.



Obr. 14.1. s-rovina

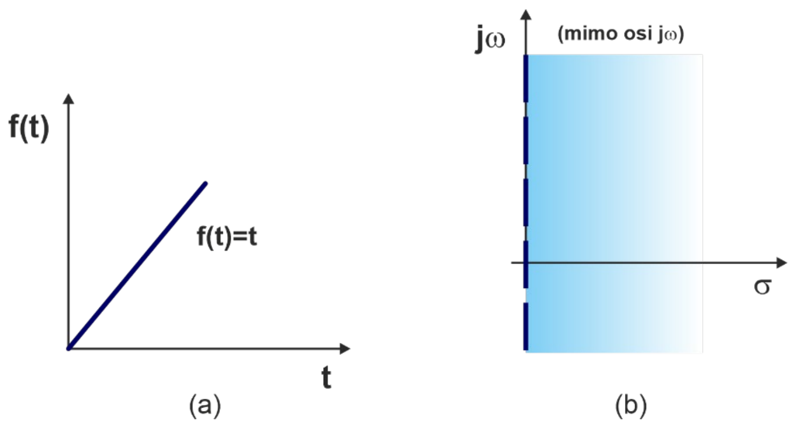
Konvergenčný prvok $\boldsymbol{\sigma}$, ktorý je potrebný na zabezpečenie konvergencie funkcie $\mathbf{f(t)}$, bude rôzny pre iné druhy funkcií $\mathbf{f(t)}$. V skutočnosti pre každú funkciu $\mathbf{f(t)}$ bude existovať rozsah (interval), pre ktorý bude daný parameter $\boldsymbol{\sigma}$ platiť. Tento rozsah $\boldsymbol{\sigma}$ bude definovať oblasť v komplexnej **s-rovine**.

Táto oblasť sa nazýva **oblasťou konvergencie** pre **Laplaceovu transformáciu** funkcie $\mathbf{f(t)}$. Oblasti konvergencie pre niektoré funkcie sú zobrazené na nasledujúcich Obr. 14.2 až Obr. 14.5. Pre skokovú funkciu $\mathbf{u(t)}$ zobrazenú na Obr. 14.2, ľubovoľná kladná hodnota $\boldsymbol{\sigma}$ alebo $\boldsymbol{\sigma} > \mathbf{0}$ bude postačujúca na splnenie podmienky konvergencie. To znamená, že celá pravá časť **s-roviny** okrem osi $\mathbf{j\boldsymbol{\omega}}$ bude oblasťou konvergencie pre **Laplaceovu transformáciu** takejto **skokovej funkcie**, pozri Obr. 14.2 (b).



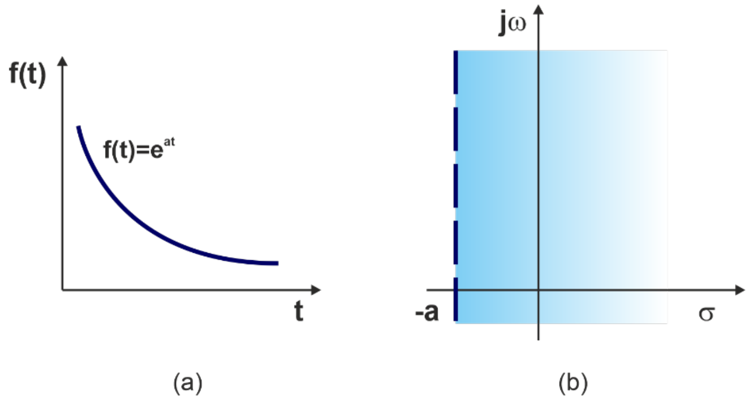
Obr. 14.2. (a) Funkcia step unit, (b) pásmo konvergencie

Ramp funkcia $\mathbf{f(t) = t}$ alebo ľubovoľná mocninová funkcia premennej $\mathbf{t}$, bude mať podobne ako **funkcia step**, oblasť konvergencie v pravej pol rovine **s-roviny** s výnimkou osi $\mathbf{j\boldsymbol{\omega}}$, pozri Obr. 14.3 (b).



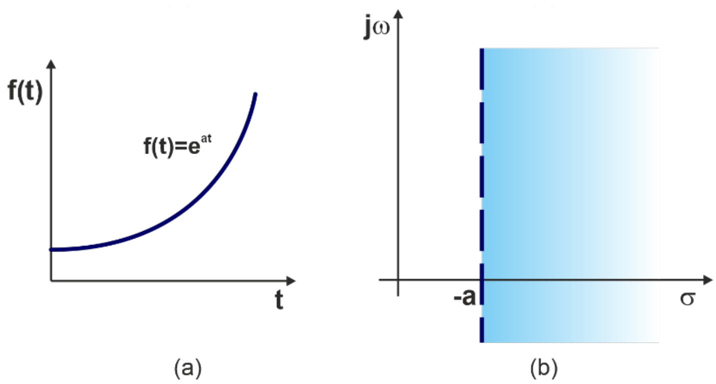
Obr. 14.3. (a) Ramp funkcia, (b) pásmo konvergencie

Pre exponenciálnu funkciu $\mathbf{f(t) = e^{-at}}$ podľa Obr. 14.4 (a) bude zase pásmom konvergencie v **s-rovine**, pásmo pre $\boldsymbol{\sigma} > -\mathbf{a}$, zobrazené na Obr. 14.4 (b).



Obr. 14.4. (a) exponenciálna funkcia e^{-at}, (b) pásmo konvergencie

A napokon pre exponenciálnu funkciu $\mathbf{f(t) = e^{at}}$ podľa Obr. 14.5 (a) bude pásmom konvergencie v **s-rovine**, pásmo pre $\boldsymbol{\sigma} > \mathbf{a}$, zobrazené na Obr. 14.5 (b).



Obr. 14.5. (a) exponenciálna funkcia e^{at}, (b) pásmo konvergencie

V tomto štádiu možno nadobudnúť dojem, že jednoduchou zámenou premennej **s** v definícií **Laplaceovej transformácie** za **jω**, možno získať priamo **Fourierovú transformáciu** zodpovedajúcej časovej funkcie **t**. Toto však nie vždy musí platiť, nakoľko všetky funkcie **f(t)**, pre ktoré existuje **Laplaceova transformácia**, nemusí vždy existovať **Fourierova transformácia**.

V skutočnosti, iba tie funkcie budú mať zároveň aj **Fourierovú transformáciu**, pre ktoré parameter $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, dáva platnú **Laplaceovou transformáciu**. Inými slovami, ak os **jω** je obsiahnutá v oblasti konvergencie **Laplaceovej transformácie**, potom jednoduchou zámenou premennej **s** za **jω**, dostávame priamo zodpovedajúcu **Fourierovú transformáciu** z **Laplaceovej transformácie**.

V opačnom prípade, ak os **jω** nie je súčasťou oblasti konvergencie, to znamená, že funkcia nie je integrovateľná, tým pádom neexistuje pre túto funkciu žiadna **Fourierova transformácia**.
Z predchádzajúcej diskusie vyplýva, že nie vždy možno nájsť také **σ**, ktoré upraví konvergenciu danej funkcie **f(t)**. Pre funkcie ako sú napr. $\mathbf{e^{t^2}}$ alebo $\mathbf{t^t}$, nie možno nájsť takú hodnotu parametra **σ**, ktorý pretvorí danú funkciu v konvergentnú – jednoduchým prenásobením členom $\mathbf{e^{-\sigma t}}$.

Preto pre takéto funkcie bohužiaľ nebude existovať **Laplaceova transformácia** a ani Fourierova transformácia. Funkcie, pre ktoré existuje nejaká reálna hodnota $\boldsymbol{\sigma_1}$, taká že

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{\sigma_1 t}|\, dt < \infty \,, \tag{14.8}$$

nazývame funkciami exponenciálneho rádu. **Laplaceova transformácia** je definovateľná len pre funkcie, ktoré spĺňajú túto podmienku. Funkcie, ktoré nespĺňajú danú podmienku nemajú **Laplaceovu transformáciu**.

14.2 VLASTNOSTI LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE

14.2.1 Linearita

Pre **Laplaceovu transformáciu** funkcií $\mathbf{f(t)}$, ktoré sú dané lineárnou kombináciou viacerých funkcií napr. $\mathbf{a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)}$, kde $\mathbf{f_1(t) \leftrightarrow F_1(s)}$, $\mathbf{f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)}$ a $\mathbf{a, b} \in \mathbf{R}$, potom platí, že

$$\mathcal{L}[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)] \rightarrow a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s) \,. \tag{14.9}$$

Poznamenajme, že túto vlastnosť možno overiť priamo z definície **Laplaceovej transformácie**.

14.2.2 Vlastnosť posúvania

Toto je rozšírenie vlastnosti posúvania **Fourierovej transformácie**. Ak funkcia $\mathbf{f(t)}$ je posunutá doprava o veľkosť času $\mathbf{t_0}$, potom **Laplaceova transformácia** posunutej funkcie $\mathbf{f(t - t_0)}$, je daná ako

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0)e^{-st}dt \,. \tag{14.10}$$

Poznamenajme, že dolná hranica integrovania je posunutá o čas $\mathbf{t_0}$, pretože funkcia je nulová v rozsahu $\mathbf{0}$ až $\mathbf{t_0}$. Zmenou premennej integrovania na $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t - t_0}$, dostávame, že $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{t_0}$ a teda $\mathbf{dt} = \mathbf{d}\boldsymbol{\tau}$. Potom musí platiť, že

$$\begin{gathered}\mathcal{L}[f(t - t_0)] = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0)e^{-st}dt = \\ = \int_0^{\infty} f(\tau)\, e^{[-s(\tau + t_0)]}d\tau = e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_0}F(s) \,.\end{gathered} \tag{14.11}$$

Z uvedeného vyplýva, že keď $\mathbf{f(t)} \leftrightarrow \mathbf{F(s)}$ potom

$$f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-t_0 s}F(s)\,, \tag{14.12}$$

táto vlastnosť **Laplaceovej transformácie**, nazývame **vlastnosťou časového posúvania**.

14.2.3 Násobenie výrazom $\mathbf{e^{-at}}$

Nech funkcia **F(s)** je Laplaceov obraz funkcie definovanej v časovej oblasti $\mathbf{f(t)} \leftrightarrow \mathbf{F(s)}$, potom ak vypočítame Laplaceovu transformáciu $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\mathbf{e^{-at}f(t)}]$ ako

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(s+a)\,, \tag{14.13}$$

nazývame túto vlastnosť Laplaceovej transformácie – **vlastnosťou frekvenčného posúvania**.

14.2.4 Časová derivácia a integrácia funkcie f(t)

Predpokladajme **Laplaceovu transformáciu** derivácie funkcie **f(t)** definovanej v časovej oblasti **t**. Pre takúto deriváciu musí platiť, že

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}dt\,. \tag{14.14}$$

Integrovaním po častiach možno dospieť k tejto formule

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = -f(0) + sF(s) \tag{14.15}$$

resp.

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)\,. \tag{14.16}$$

Povýšením výsledku na **n-tú** deriváciu funkcie **f(t)** dostávame formulu v tvare

$$\mathcal{L}\left[\frac{df^{(n)}(t)}{dt^{(n)}}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df(0)}{dt} - \cdots - \frac{d^{(n-1)}f(0)}{dt^{(n-1)}}\ . \tag{14.17}$$

Podobne možno vypočítať **Laplaceovu transformáciu** funkcie **f(t)**, ktorá je integrovaná podľa času **t**, resp. $\int_0^t \mathbf{f(t)dt}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt\right] e^{-st}dt\,. \tag{14.18}$$

Integrovaním daného výrazu $\int_0^t \mathbf{f(t)dt}$ **metódou per partes** možno dospieť k tomuto Laplaceovemu tvaru

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{-e^{-st}}{s}\int_0^t f(t)dt\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\,. \tag{14.19}$$

Prvý výraz na pravej strane sa rovná nule a druhý výraz predstavuje tvar $\mathbf{F(s)/s}$, potom

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}\,. \tag{14.20}$$

14.2.5 Násobenie a delenie t

Derivovaním funkcie $\mathbf{F(s)}$ podľa premennej **s** dostávame

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty f(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt = -\int_0^\infty [t\cdot f(t)]e^{-st}dt \tag{14.21}$$

a teda

$$\mathcal{L}[t\cdot f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}\,. \tag{14.22}$$

Potom platí, že

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right] ds \tag{14.23}$$

a zámenou poradia integrovania, potom dostávame, že

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-st}dt\right] dt = \int_0^\infty \left[\frac{f(t)}{t}\right] e^{-st}dt\,. \tag{14.24}$$

Napokon, platí

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)ds\,. \qquad (14.25)$$

14.2.6 Pravidlo počiatočnej a konečnej hodnoty

Z vlastnosti derivácie funkcie **f(t)** dostávame, že

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)\,, \qquad (14.26)$$

v limite, keď $\mathbf{s} \to \infty$, potom výraz integrálu konverguje k nule. Preto, platí, že

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)\,. \qquad (14.27)$$

Predchádzajúca rovnica sa nazýva pravidlom **počiatočnej hodnoty** a dovoľuje vypočítať počiatočnú hodnotu funkcie $\mathbf{f(0)}$ z **Laplaceovej transformácie** bez potreby nájdenia jej **inverznej Laplaceovej transformácie**. Ďalej nech $\mathbf{s \to 0}$, potom z vlastnosti derivovania funkcie **f(t)** pre **Laplaceovu transformáciu** dostávame, že

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)]\,, \qquad (14.28)$$

kde pre $\mathbf{s \to 0}$ sa ľavá strana integrálu stáva výrazom

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)\,. \qquad (14.29)$$

Z predchádzajúceho vyplýva, že

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)\,. \qquad (14.30)$$

Predchádzajúcu rovnicu nazývame pravidlom **konečnej hodnoty**.

14.3 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA BEŽNÝCH FUNKCIÍ

Laplaceovu transformáciu mnohých bežne vyskytujúcich sa funkcií možno odvodiť zo znalostí transformácie elementárnych funkcií a takisto využitím zadefinovaných vlastností **Laplaceovej transformácie**. V nasledujúcich odvodeniach budeme uvažovať, že $\mathbf{f(t) = 0}$ pre $\mathbf{t < 0}$.

14.3.1 Exponenciálna funkcia - $\mathbf{f(t) = Ae^{at}}$

Nájdime **Laplaceovu transformáciu** exponenciálnej funkcie $f(t) = Ae^{at}$.

$$\mathcal{L}[Ae^{at}] = \int_0^{\infty} Ae^{at}e^{-st}dt = A\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt = -\frac{A}{s-a}[e^u]_0^{-\infty} = -\frac{A}{s-a}[e^{-\infty} - e^0]$$
$$= \frac{A}{s-a}\ . \tag{14.31}$$

14.3.2 Skoková (step) funkcia - $\mathbf{f(t) = u(t) = A}$

Nájdime ďalej **Laplaceovu transformáciu skokovej funkcie** $\mathbf{f(t) = u(t) = A}$, ktorá je definovaná parametrom **A**, ktorý predstavuje amplitúdu tohoto signálu. Poznamenajme, že v prípade ak **A = 1**, potom hovoríme o jednotkovej **skokovej funkcii f(t)** (z angl. **step unit**).

Ak parameter **a** v exponenciálnej funkcii $\mathbf{A \cdot e^{at}}$ položíme rovný nule dostávame definíciu pre **skokovú funkciu**. To znamená, že ak $\mathbf{a = 0}$ v predchádzajúcej rovnici, potom musí platí, že

$$\mathcal{L}[A] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{A}{s}. \tag{14.32}$$

Vykonajme dôkaz

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-st}dt = A\int_0^{\infty} e^{-st}dt = A\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = A \cdot \frac{1}{(-s)}(e^{-s\infty} - e^{-s0}) = \frac{A}{s}. \tag{14.33}$$

V prípade, že **A = 1**, potom máme jednotkovú skokovú funkciu, pre ktorú platí, že

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}. \tag{14.34}$$

14.3.3 Funkcia $\mathbf{f(t) = Ae^{-at}}$

Nájdime teraz **Laplaceovu transformáciu exponenciálnej** funkcie $\mathbf{f(t) = Ae^{-at}}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \cdot e^{-at}] &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-at} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{A}{s+a} [e^{u}]_0^{-\infty} \\ &= -\frac{A}{s+a} [e^{-\infty} - e^{0}] = \frac{A}{s+a}.\end{aligned} \tag{14.35}$$

14.3.4 Funkcia sínus - $\mathbf{f(t) = A \cdot \sin \omega t}$

Nájdime teraz **Laplaceovu transformáciu** harmonickej funkcie $\mathbf{f(t) = A \cdot \sin \omega t}$ týmto výpočtom.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \cdot \sin \omega t] &= A \int_0^{\infty} \sin \omega t \; e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} \\ &= A \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s-j\omega)t}}{2j} dt - A \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s+j\omega)t}}{2j} dt = \\ = \frac{A}{2j} \left[\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{-(s-j\omega)} \right]_0^{\infty} - \frac{A}{2j} \left[\frac{e^{-(s+j\omega)t}}{-(s+j\omega)} \right]_0^{\infty} &= \frac{A}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} \right) - \frac{A}{2j} \left(\frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= A \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned} \tag{14.36}$$

V prípade, že **A = 1**, potom **Laplaceova transformácia** harmonickej funkcie $\mathbf{f(t) = \sin \omega t}$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \; . \tag{14.37}$$

Poznamenajme, že podobným spôsobom možno odvodiť **Laplaceovu transformáciu** pre harmonickú funkciu kosínus $\mathbf{f(t) = A \cdot \cos}\,\omega t$, ktorej **Laplaceova transformácia** je

$$\mathcal{L}[A \cdot \cos \omega t] = A \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{14.38}$$

resp. ak **A = 1**

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \; . \tag{14.39}$$

Laplaceove transformácie pre ďalšie iné bežne používané funkcie **f(t)** možno nájsť uvedené v nasledujúcej tabuľke.

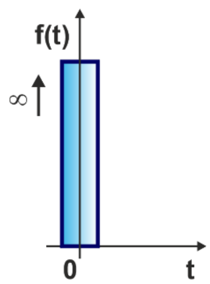
Tabuľka 14.1. Tabuľka Laplaceových transformácií bežných signálov

	Časová funkcia f(t)	Laplaceova transformácia F(s)
1.	$A \cdot e^{at}, A \cdot e^{-at}$	$\frac{A}{s-a}, \frac{A}{s+a}$
2.	$A \cdot u(t), u(t)$	$\frac{A}{s}, \frac{1}{s}$
3.	$A \sin \omega t, \sin \omega t$	$A \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
4.	$A \cos \omega t, \cos \omega t$	$A \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2}, \frac{s}{s^2+\omega^2}$
5.	$A\, e^{-at} \sin \omega t, e^{-at} \sin \omega t$	$A \cdot \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}, \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
6.	$A\, e^{-at} \cos \omega t, e^{-at} \cos \omega t$	$A \cdot \frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}, \frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
7.	At, t	$\frac{A}{s^2}, \frac{1}{s^2}$
8.	At^n, At^n	$A \cdot \frac{n!}{s^{n+1}}, \frac{n!}{s^{n+1}}$
9.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
11.	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12.	$A \cdot e^{-at} \sin(\omega t + \theta)$	$A \cdot \left[\frac{\omega \cos \theta + (s+a) \sin \theta}{(s+a)^2+\omega^2}\right]$
13.	Obdĺžnikový pulzný signál	$\frac{1-e^{Ts}}{s}$
14.	Impulz $k \cdot \delta(t), \delta(t)$	$k, \ 1$

14.4 IMPULZNÁ FUNKCIA

Jeden z konceptov používaných v prípade lineárnych systémov je **impulzná odozva systému**. **Impulz** je **singulárna funkcia**, ktorá má vlastnosti trochu odlišné od tých bežne používaných pre funkcie času **t**. Pre bežné funkcie, ktoré sú definované vzťahom pre výpočet argumentu **x** danej funkcie, je impulz definovaný ako následok, ktorý je vyprodukovaný s interakciou s funkciou definovanou v čase **t**. **Jednotkový impulz** $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$ - **Diracov impulz** zobrazený na Obr. 14.6, je definovaný na základe tejto definície

$$u(t) = \begin{cases} \infty & \text{pre } t = 0 \\ 0 & \text{pre } t \neq 0 \end{cases} . \qquad (14.40)$$



Obr. 14.6. Impulzná funkcia δ(t)

Jednotkový impulz $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$, ktorý sa objaví v čase $\mathbf{t = 0}$, možno takisto definovať ako interakciu s inou funkciou $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ a to touto vlastnosťou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) , \qquad (14.41)$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ je **klasická funkcia** v časovej oblasti, ktorá je spojitá v počiatku súradného systému. Veličina definovaná takýmto spôsobom t. j. vplyvom, ktorý **impulz** vyprodukuje sa nazýva **všeobecnou funkciou** alebo **rozdelením**. Pre takúto všeobecnú funkciu $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$, možno definovať tieto vlastnosti:

1. **Zväčšovanie**: na základe vlastnosti zväčšovania impulznej funkcie platí, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} k \cdot \delta(t) \cdot f(t) = k \cdot f(0) , \qquad (14.42)$$

kde **k** je reálna konštanta a $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$ je impulz sily k v čase $\mathbf{t = 0}$.

2. **Posúvanie**: vlastnosť posúvania pre impulznú funkciu možno definovať ako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) f(t) = f(t_1)\,. \qquad (14.43)$$

Pre **Diracov impulz** možno vypočítať **Fourierovú transformáciu** ako aj **Laplaceovu transformáciu**. Vypočítajme **Fourierovú transformáciu** diracovej funkcie $\boldsymbol{\delta(t)}$. Na základnej definície **Fourierovej transformácie** platí, že

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega.0} = 1 \qquad (14.44)$$

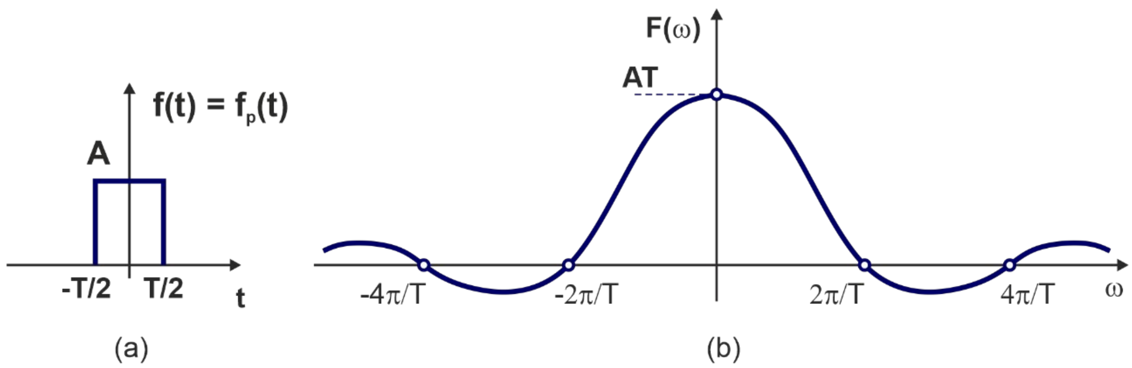
alebo

$$\delta(t) \leftrightarrow 1\,. \qquad (14.45)$$

Fourierovú transformáciu vychádzajúcu z vlastností **Fourierovej transformácie** možno takisto vypočítať pre **Diracov impulz** $\boldsymbol{k \cdot \delta(t)}$ so silou signálu **k** a takisto pre posunutú funkciu $\boldsymbol{\delta(t - t_1)}$ v čase $\boldsymbol{t_0}$, potom platí, že

$$k \cdot \delta(t) \leftrightarrow k \quad a \quad \delta(t - t_0) \;\leftrightarrow\; e^{-j\omega t_0}\,. \qquad (14.46)$$

Rovnica (14.44) predstavuje **frekvenčné spektrum jednotkového impulzu**, kde $\boldsymbol{\omega}$ je premenná v rozsahu od $-\infty$ do ∞. Toto **spektrum** možno porovnať so **spektrom pulzného (štvorcového) signálu**, v prípade, ktorého bude mať pulz trvanie v čase takmer nulové. Potom **frekvenčné spektrum** takého signálu predstavuje krivka zobrazená na Obr. 14.7 (b), ktorá nadobúda amplitúdu $\mathbf{A \cdot T = 1}$.



Obr. 14.7. Obdĺžnikový signál (a) pulzný signál, (b) frekvenčné spektrum

14.5 KONVOLÚCIA A IMPULZNÁ ODOZVA

Do tejto chvíle sme definovali a používali **klasickú metódu** pre riešenie odozvy $\mathbf{y(t)}$ **diferenciálnych rovníc lineárneho systému** so vstupom $\mathbf{u(t)}$. Keďže v tomto prípade sú uvažované v procese výpočtu len funkcie $\mathbf{u(t)}, \mathbf{y(t)}$ (časovo závislé funkcie) alebo ich derivácie (časovo závislé derivácie), hovoríme o riešení diferenciálne rovnice v **časovej oblasti t (**z angl. **time domain)**. Na riešenie odozvy systému však existujú aj ďalšie iné metódy, ktoré určia rovnaké riešenie odozvy systému v **časovej oblasti t**, avšak môžu na jej získanie použiť iný spôsob, ako je napr. princíp **impulznej odozvy** a **konvolúcie**. V prípade, že počiatočne relaxovaný systém je podrobený **jednotkovému impulzu** $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$ na jeho vstupe **u(t)**, odozva tohto systému sa nazýva **impulznou odozvou**, pozri Obr. 14.8.

Obr. 14.8. Impulzná odozva systému

Impulzná odozva pre jednotkový impulzný signál $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$ je reprezentovaná odozvou systému $\mathbf{y(t)} = \mathbf{h(t)}$. Pre i**mpulznú odozvu** lineárne časovo závislého systému, ktorý je podrobený vstupnému impulzu $\mathbf{u(t)} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$ (t. j. impulzu s amplitúdou (zosilnením) **k**), musí platiť, že $\mathbf{y(t)} = \mathbf{h(t)} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{h(t)}$. Keďže daný systém uvažujeme ako časovo invariantný, potom aj **impulzná odozva** tohto systému na **jednotkový impulz** $\mathbf{u}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau})$, ktorý je aplikovaný v čase $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}$, musí platiť, že sa objaví v čase $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}$ ako posunutá **impulzná odozva** $\mathbf{y(t)} = \mathrm{h(t)} = \mathbf{h}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau})$.

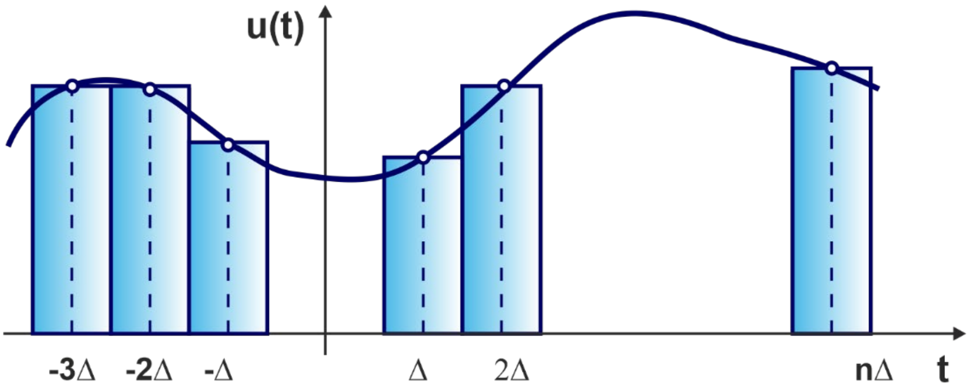
Pre lineárne časovo závislý systém musí taktiež platiť princíp **superpozície**, tzn. že ak dva impulzy $\mathbf{u_1(t)} = \mathbf{k_1}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$ a $\mathbf{u_1(t)} = \mathbf{k_2}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau})$ sú aplikované súčasne v danom čase **t** ako vstup lineárneho systému v tvare $\mathbf{u(t)} = \mathbf{k_1}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}) + \mathbf{k_2}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau})$, potom impulzná odozva na tento vstup nadobudne tvar

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{h(t)} = \mathrm{k_1}\delta(\mathrm{t}) + \mathrm{k_2}\delta(\mathrm{t} - \tau)\,. \tag{14.47}$$

Predpokladajme teraz, že systém je podrobený skupine takýchto **n impulzov**, tzn. že vstup systému je definovaný signálom $\mathbf{u(t)} = \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \mathbf{k_n}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t} - \mathbf{n}\Delta)$, potom **impulzná odozva** systému bude

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{h(t)} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{k_n h(t - n\Delta)}\,. \tag{14.48}$$

Ďalej budeme predpokladať, že systém podľa Obr. 14.8 je zaťažený ľubovoľným vstupným spojitým signálom $\mathbf{u(t)}$, pozri Obr. 14.9. Každú takúto funkciu spojitého signálu $\mathbf{u(t)}$ možno aproximovať množinou za sebou nasledujúcich **obdĺžnikových pulzných signálov**. Princíp nadelenia časovej množiny **t**, rovnakými pulznými signálmi je znázornený na Obr. 14.9. Šírka každého **pulzu** je Δ a jeho výška sa rovná amplitúde aproximovaného signálu $\mathbf{u(t)}$, ktorá je uvažovaná v strednom bode každého pulzu, tzn. že **amplitúda každého n-tého pulzu** je $\mathbf{u(n\Delta)}$.



Obr. 14.9. Aproximácia funkcie vstupu u(t) pulznými signálmi

Plochu $\mathbf{S_n}$ každého **n-tého pulzu** možno vypočítať na základe vzťahu $\mathbf{S_n} = \Delta \cdot \mathbf{u(n\Delta)}$. Aproximácia signálu $\mathbf{u(t)}$ sa stáva presnejšia postupným zmenšovaním Δ, až na nekonečne malú úroveň, kedy $\Delta \rightarrow \mathbf{0}$. Potom, **impulzná odozva systému** uvažovaná pre takéto veľmi malé pulzné signály v čase $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \Delta$, bude pre jeden pulzný signál definovaná ako

$$y_n(t) = h_n(t) = \Delta \cdot u(n\Delta) \cdot h(t - n\Delta)\,, \tag{14.49}$$

potom pre celkový výstupný signál $\mathbf{u(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta \cdot \mathbf{u(n\Delta)}$, ktorý je súčtom jednotlivých vstupných pulzných signálov bude platiť, že celková impulzná odozva bude súčtom impulzných odoziev od jednotlivých pulzných signálov, a teda

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta \cdot u(n\Delta) \cdot h(t - n\Delta)\,. \tag{14.50}$$

V limite, keď $\Delta \rightarrow \mathbf{0}$, možno premennú Δ zameniť za $\mathbf{d\tau}$, $\mathbf{n} \cdot \Delta$ možno zameniť za spojitú premennú $\boldsymbol{\tau}$ a napokon sumu možno zameniť za symbol integrálu. Potom,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau\,, \tag{14.51}$$

Tento integrál sa nazýva **integrálom konvolúcie** (za angl. **convolution integral**). Poznamenajme, že predchádzajúcu rovnicu možno symbolicky zapísať aj ako

$$y(t) = u(t) \cdot h(t)\,. \tag{14.52}$$

Matematicky zapísané znamená, že **výstup lineárneho systému** na ľubovoľný vstup **u(t)** možno získať jednoduchým **vynásobením** vstupného signálu $\mathbf{u(t)}$ a **impulznej odozvy** daného systému $\mathbf{h(t)}$. Ináč povedané, ak je známa **impulzná odozva systému h(t)**, jeho odozvu na ľubovoľný **vstup u(t)** možno vypočítať pomocou tohto vzťahu. **Impulzná odozva systému h(t)** teda kompletne charakterizuje daný systém. Operácia konvolúcie je všeobecnou matematickou operáciu medzi dvoma funkciami. A teda platí, že

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\,. \tag{14.53}$$

Je ľahké dokázať, že platí komutatívny zákon $\mathbf{f_1(t) \cdot f_2(t) = f_2(t) \cdot f_1(t)}$, tzn. že

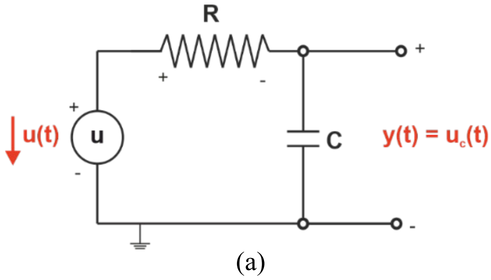
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau\,. \tag{14.54}$$

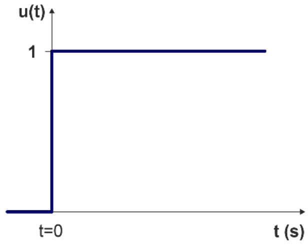
Keďže, pri analýze fyzikálnych systémov sa veľmi často používa čas $\mathbf{t = 0}$ ako počiatočný čas pre vstup daného systému t. j. $\mathbf{u(t) = 0}$ pre $\mathbf{t < 0}$, potom možno ako dolný limit predchádzajúceho **integrálu konvolúcie** uvažovať nulovú hodnotu. A takisto výstup fyzikálneho systému nebudeme počítať pre nekonečne dlhý čas, ale len do určitého špecifického času **t**. Takže horný limit integrálu zameníme za **t**. Potom dostávame upravený tvar **integrálu konvolúcie** pre reálny fyzikálny systém v tomto tvare

$$y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau\,. \tag{14.55}$$

Príklad č. 14.1:

Určite odozvu **elektrického systému** zobrazeného na Obr. 14.10 (a), ak ako vstup uvažujeme jednotkový skok vstupného napätia podľa Obr. 14.10 (b) s uvažovaním počiatočnej podmienky $\mathbf{y(0) = 1}$.





Obr. 14.10. (a) elektrický systém, (b) vstupný signál u(t)

V prvom rade vypočítame **impulznú odozvu h(t)** daného systému. **Diferenciálna rovnica** systému a jej charakteristická rovnica je definovaná v tomto tvare

$$\begin{gathered} RC\frac{dy}{dt}+y=u(t)\,, \\ RCr+1=0 \Rightarrow r=-\frac{1}{RC} \Rightarrow y=Ce^{-\frac{1}{RC}}\,, \end{gathered} \tag{14.56}$$

Impulzná odozva systému h(t) bude vlastná odozva s uvažovaním počiatočných podmienok $\mathbf{y(0)=1 \Rightarrow C=1}$. To znamená, že ak vlastná odozva je daná ako

$$y=e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t>0\,, \tag{14.57}$$

potom **impulzná odozva** systému bude

$$h(t)=y(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\,. \tag{14.58}$$

Vstup do systému **u(t)**, ktorý je zobrazený na Obr. 14.10 (b) je jednotkovým vstupom, tzn. že

$$u(t)=1\,, \tag{14.59}$$

potom odozvu tohto systému $\mathbf{y(t)}$ možno vypočítať priamo z definície **integrálu konvolúcie** a to týmto spôsobom

$$\begin{aligned} y(t)=u(t)\cdot h(t) &= \int_0^t u(t)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1\cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}}d\tau = \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}}d\tau \\ &= -\int_t^0 e^{-\frac{u}{RC}}\cdot du \left| \begin{array}{c} u=t-\tau \\ du=-d\tau \\ u_d=t-0=0, u_h=t-t=0 \end{array} \right. = -\int_t^0 e^{-\frac{u}{RC}}\cdot du \\ &= -\left[\frac{e^{-\frac{u}{RC}}}{-\frac{1}{RC}}\right]_t^0 = -\left[RCe^0-RCe^{-\frac{t}{RC}}\right] = RC\left[e^{-\frac{t}{RC}}-1\right]\,. \end{aligned} \tag{14.60}$$

Vypočítaním **integrálu konvolúcie**, dostávame riešenie odozvy systému v tvare

$$y(t)=RC\left[e^{-\frac{t}{RC}}-1\right]. \tag{14.61}$$

14.6 PRAVIDLO KONVOLÚCIE

Predpokladajme, že funkcie $\mathbf{f_1(t)}$ a $\mathbf{f_2(t)}$ sú dve funkcie definované v časovej oblasti **t**, ktorým zodpovedajú **Fourierove transformácie** $\mathbf{F_1(\omega)}$ a $\mathbf{F_2(\omega)}$. Ak vieme, že výsledok násobenia funkcií týchto $\mathbf{f_1(t)}$ a $\mathbf{f_2(t)}$ sa rovná odozve systému $\mathbf{y(t)}$ t. j. $\mathbf{y(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)}$ a poznáme $\mathbf{Y(\omega)}$ t. j. **Fourierovú transformáciu** odozvy systému $\mathbf{y(t)}$ vyšetrime, aký vzťah platí medzi **Fourierovými transformáciami** $\mathbf{Y(\omega), F_1(\omega)}$ a $\mathbf{F_2(\omega)}$. Z definície konvolúcie dvoch funkcií dostávame

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \,, \tag{14.62}$$

potom

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau] dt \,. \tag{14.63}$$

Zámenou poradia **integrovania** dostávame

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\tau) dt \right] d\tau \,. \tag{14.64}$$

Veličina v zátvorkách $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e^{-j\omega t} f_2(t-\tau) dt}$ je podľa definície **Fourierova transformácia posunutej funkcie** $\mathbf{f_2(t-\tau)}$. Na základe vlastnosti pre posúvanie **Fourierovej transformácie** vieme, že Fourierova transformácia posunutej funkcie v čase sa vypočíta násobením výrazu $\mathbf{e^{-j\omega\tau}}$ a teda

$$f_2(t-\tau) \leftrightarrow F_2(\omega) e^{-j\omega\tau} \,. \tag{14.65}$$

Dosadením vypočítanej **Fourierovej transformácie** do **integrálu konvolúcie** dostávame

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \, F_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = F_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \, e^{-j\omega\tau} d\tau \,. \tag{14.66}$$

Potom výraz integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f_1(\tau) \, e^{-j\omega\tau} d\tau}$ je podobne, ako v predchádzajúcom prípade rovný **Fourierovej transformácií** $\mathbf{F_1(\omega)}$. Preto môžeme napísať, že

$$Y(\omega) = F_1(\omega) . F_2(\omega) \,. \tag{14.67}$$

Tento výsledok nazývame **pravidlom konvolúcie**. Slovne povedané: Výsledkom operácie konvolúcie dvoch funkcií definovaných v časovej oblasti je jednoducho násobenie ich **Fourierových transformácií**. Toto je jeden z veľmi silných dôsledkov **teórie konvolúcie**.

Preveďme teraz toto **pravidlo konvolúcie** na **analýzu lineárnych systémov**. Predpokladajme, že funkcia $\mathbf{f_1(t)}$ je vstupom systému $\mathbf{u(t) \leftrightarrow U(\omega)}$ a funkcia $\mathbf{f_2(t) = h(t) \leftrightarrow H(\omega)}$ je **impulznou odozvou** daného systému.

Ak výstup zo systému je daný **pravidlom konvolúcie** dvoch funkcií, t. j. $\mathbf{y(t) = h(t) \cdot u(t)}$, potom musí platiť, že

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega)\,, \qquad (14.68)$$

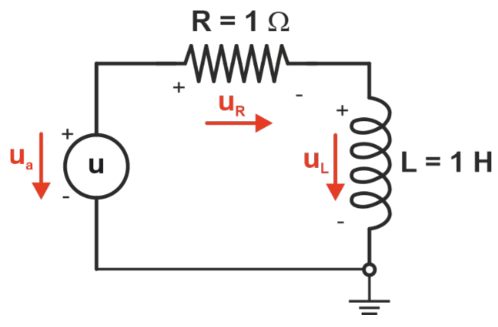
kde $\mathbf{H(\omega)}$ nazývame **funkciou systému**.

Predchádzajúca rovnica hovorí, že vo frekvenčnej oblasti je **výstup systému y(t)** daný súčinom **Fourierovej transformácie** vstupu $\mathbf{U(\omega)}$ a **Fourierovej transformácie impulznej odozvy** systému $\mathbf{H(\omega)}$.

Inak povedané, že odozvu systému vo frekvenčnej oblasti $\mathbf{Y(\omega)}$ na ľubovoľný vstup možno určiť v prípade, ak poznáme systémovú funkciu **h(t)** a jej Fourierovú transformáciu $\mathbf{H(\omega)}$. Vypočítanú odozvu $\mathbf{Y(\omega)}$ vo frekvenčnej oblasti možno potom previesť do časovej oblasti **t** prostredníctvom **inverznej Fourierovej transformácie**. Poznatok existencie funkcie systému $\mathbf{H(\omega)}$ t. j. **prenosovej funkcie systému**, umožňuje vyšetrovať odozvu pre systémy v časovej oblasti **t**, iným spôsobom ako sme zvyknutí pri klasických metódach určených na riešenie diferenciálnych rovníc. Ide teda okrem **metódy konvolúcie**, ktorú sme uviedli v kap. 14.5, o ďalší možný spôsob výpočtu odozvy systému (v tomto prípade prostredníctvom analýzy systému metódou **Fourierovej transformácie**). Princíp vyšetrovania odozvy **Fourierovou transformáciou** si ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad č. 14.2:

Určite elektrický prúd **i**, ktorý preteká cievkou elektrického obvodu podľa Obr. 14.11 pre uvažovaný vstup napätia $\mathbf{u_a(t) = 10 \cdot e^{-2t}}$. Odozvu systému vypočítajte metódou **Fourierovej transformácie**.



Obr. 14.11. Elektrický obvod

Predtým, než sa začneme zaoberať vyšetrovaním odozvy systému, je nutné určiť prenosovú funkciu systému $\mathbf{H(\omega)}$ v tvare **Fourierovej transformácie**. **Prenosovú funkciu** $\mathbf{H(\omega)}$ vypočítame z **impulznej (vlastnej) odozvy** systému. Matematický model daného systému je reprezentovaný touto diferenciálnou rovnicou

$$\frac{di}{dt} + i = u(t)\,. \tag{14.69}$$

Impulzná odozva systému je jeho nenútená odozva s uvažovaním počiatočnej podmienky $\mathbf{i(0) = 1}$. Pre **impulznú odozvu systému**, ktorú zistíme z **charakteristickej rovnice** systému, platí, že

$$\begin{gathered} r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1\,, \\ h(t) = e^{r} = e^{-t}\ . \end{gathered} \tag{14.70}$$

Zodpovedajúca **Fourierova transformácia** tejto systémovej funkcie **h(t)** je

$$H(\omega) = \mathcal{F}(e^{-t}) = \frac{1}{1 + j\omega} \tag{14.71}$$

a podobne pre vstupný signál $\mathbf{u(t)}$ možno zistiť **Fourierovú transformáciu** ako

$$U(\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}(10e^{-2t}) = \frac{10}{2 + j\omega}\ . \tag{14.72}$$

Potom, výstup systému **i(t)** možno vypočítať ako súčin prenosových funkcií vo **Fourierovom tvare**

$$I(\omega) = U(\omega)H(\omega) = \frac{10}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)}\ . \tag{14.73}$$

Výraz na pravej strane možno rozložiť na dva parciálne zlomky

$$I(\omega) = 10\left[\frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega}\right]\ . \tag{14.74}$$

Aby sme previedli odozvu z frekvenčnej oblasti **ω** do časovej odozvy **t**, vykonáme teraz **inverznú Fourierovú transformáciu** každého výrazu na pravej strane a dostávame, že

$$i(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})\ . \tag{14.75}$$

14.7 PRENOSOVÁ FUNKCIA

Nech **u(t)** je vstupom systému, pre ktorý existuje **Laplaceova transformácia** $\mathbf{u(t)} \leftrightarrow \mathbf{U(s)}$ a $\mathbf{g(t)} \leftrightarrow \mathbf{G(s)}$ je impulzná odozva systému, ktorá má **Laplaceova transformácia G(s)**. Potom výstup systému $\mathbf{y(t)} \leftrightarrow \mathbf{Y(s)}$ je v časovej oblasti **t** daný **integrálom konvolúcie**

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)\, g(t-\tau) d\tau \ . \tag{14.76}$$

Ak vykonáme **Laplaceovu transformáciu** oboch strán predchádzajúcej rovnice, dostávame

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] dt \ . \tag{14.77}$$

Hornú hranicu integrálu v zátvorkách možno zameniť bez ovplyvnenia výsledku integrovania na hodnotu ∞, pretože, $\mathbf{h(t-\tau) = 0}$ pre $\boldsymbol{\tau > t}$. Takisto, poradie integrovania možno zmeniť bez akéhokoľvek vplyvu. A teda platí, že

$$Y(s) = \int_0^\infty u(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau) dt \right] d\tau \ . \tag{14.78}$$

Podľa vlastnosti posúvania je výraz v zátvorkách rovný $\mathbf{e^{-s\tau} \cdot G(s)}$. Potom musí platiť, že

$$Y(s) = H(s) \int_0^\infty u(\tau) e^{-s\tau} d\tau = G(s) U(s) \ . \tag{14.79}$$

Predchádzajú rovnica je výsledkom aplikácie **pravidla konvolúcie** na **Laplaceovu transformáciu**. Podobný výsledok platí pre vzťah **Fourierovej transformácie**. Výraz $\mathbf{G(s) = \mathcal{L}[g(t)]}$ nazývame **prenosovou funkciou systému**.

Inak povedané, ak je známa **prenosová funkcia systému** $\mathbf{G(s)}$, potom odozva systému **y(t)** na ľubovoľný vstupný signál **u(t)** je daná súčinom **Laplaceovho obrazu prenosovej funkcie systému** $\mathbf{G(s)}$ a **Laplaceovho obrazu vstupu** $\mathbf{U(s)}$.

Tento fakt je kľúčovým v prípade vyšetrovania a **analýzy lineárnych systémov**. Predchádzajúci výraz je algebrickým vzťahom, ktorý môžeme napísať ako

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \, . \tag{14.80}$$

Predchádzajúca rovnica poskytuje spôsob pre definovanie **prenosovej funkcie lineárneho systému**. **Prenosová funkcia** $\mathbf{G(s)}$ je pomer Laplaceovej transformácie výstupu $\mathbf{Y(s)}$ k Laplaceovej transformácii vstupu $\mathbf{U(s)}$.

Ak sa pozrieme na systémovú funkciu $\mathbf{H(\omega)}$ definovanej pri Fourierovej transformácií a prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$ definovanej v prípade Laplaceovej transformácie, tak tieto dve funkcie sú si navzájom veľmi podobné. Systémovú funkciu $\mathbf{H(\omega)}$ možno získať z prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$ jednoduchou zámenou premennej $\mathbf{s}$ za $\mathbf{j\omega}$. Je nutné však poznamenať, že prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ je viac všeobecnejšou a použiteľnejšou ako je prenosová funkcia vo Fourierovom tvare $\mathbf{H(\omega)}$.

Na základe definovania **prenosovej funkcie systému G(s)** je založená **metóda analýzy systémov pomocou Laplaceovej transformácie**, ktorá umožňuje vypočítať výstupnú odozvu lineárneho systému **y(t)** pre ľubovoľný vstupný signál **u(t)** (**periodický**, **neperiodický**, konvergujúci alebo nekonvergujúci).

Základné kroky, ktoré je nutné vykonať pri analýze systému princípom Laplaceovej transformácie možno zhrnúť do týchto bodov:

1. Určíme Laplaceovu transformáciu vstupu $\mathbf{U(s)}$,
2. vypočítame prenosovú funkciu systému $\mathbf{G(s)}$,
3. vynásobíme navzájom obraz vstupu $\mathbf{U(s)}$ a prenosovej funkcie alebo $\mathbf{Y(s)} = \mathbf{U(s)G(s)}$,
4. a nájdeme **inverznú Laplaceovu transformáciu** $\mathbf{Y(s)}$, čím dostávame obraz výstupu v časovej oblasti $\mathbf{y(t)}$.

Poznamenajme, že princíp **Laplaceovej transformácie** možno takisto rovnako využiť na riešenie odozvy diferenciálnych rovníc, ktorá úzko súvisí s riešením **odozvy dynamických systémov**. Vyšetrovaniu odozvy systémov metódou Laplaceovej transformácie a prenosovej funkcie sa budeme venovať v nasledujúcich kapitolách tejto knihy.

Úlohy na riešenie:

Problém 14.1:

Nájdite **Laplaceovu transformáciu** nasledujúcich časovo závislých funkcií **f(t)**,

1. $f(t) = e^{-t}$
2. $f(t) = e^{-2t}\sin t$
3. $f(t) = 2\sin 3t$
4. $f(t) = -\cos 2t$
5. $f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0, & t \notin \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}$
6. $f(t) = t^3 - t^2 + 2t - 3$
7. $f(t) = t^n$
8. $f(t) = \sin^2 t$

Problém 14.2:

Nájdite inverznú Laplaceovu transformáciu nasledujúcich prenosových funkcií **F(s)**,

1. $F(s) = \dfrac{2}{s-1}$
2. $F(s) = \dfrac{3}{s^2-1}$
3. $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+2s+1}$
4. $F(s) = \dfrac{s^3-16}{s^4+16s^2+1}$
5. $F(s) = \dfrac{3s^3+1}{(s^2-1)^2}$
6. $F(s) = \dfrac{6}{(s-1)(s^2-4s+5)^2}$
7. $F(s) = \dfrac{s+1}{s^3+3s-1}$
8. $F(s) = \dfrac{1}{s^4+2s}$

Problém 14.3:

Pomocou **Fourierovej transformácie** nájdite riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice, ak $\mathbf{y(0) = 1}$ a $\mathbf{\dot{y}(0) = -1}$.

$$\ddot{y}(t) - y(t) = -2\,.$$

Problém 14.4:

Pomocou **Fourierovej transformácie** nájdite riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice, ak $\mathbf{y(0) = -2}$ a $\mathbf{\dot{y}(0) = 1}$.

$$3\ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 12 = e^{-2t}\,.$$

15 RIEŠENIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC LAPLACEOVOU TRANSFORMÁCIOU

Cieľom tejto kapitoly bude predstaviť metódu na riešenie diferenciálnych rovníc využitím **Laplaceovej transformácie**. Princíp si ukážeme pre viaceré prípady diferenciálnych rovníc, ktoré obsiahnu všetky možné prípady, ktoré sa môžu vyskytnúť v prípade koreňov polynómu menovateľa prenosovej funkcie vyšetrovanej odozvy systému **Y(s)**. Pri výpočte koreňov polynómu menovateľa môžu byť korene jednak **reálne**, **k-násobné reálne** alebo **komplexné združené** resp. **k-násobné komplexné združené korene**. Teda možno rozlíšiť štyri základné prípady rozkladu prenosovej funkcie **G(s)** na parciálne zlomky.

Postup ako na základe vypočítaných koreňov vykonáme po nájdení prenosovej funkcie odozvy **Y(s)**, rozklad takejto prenosovej funkcie **Y(s)**v algebrickom tvare na parciálne si ukážeme na názorných príkladoch rôznych typov diferenciálnych rovníc.

15.1 ALGORITMUS RIEŠENIA DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC METÓDOU LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE

Diferenciálne rovnice predstavujú matematický opis dynamického systému, pre ktorý bola diferenciálna rovnica alebo systém diferenciálnych rovníc odvodený. Riešením diferenciálnych rovníc sa vypočíta časový priebeh výstupnej veličiny **y(t)**, pre definované vstupné veličiny **u(t)** s uvažovaním počiatočných podmienok.

V predchádzajúcich kapitolách sme si predstavili metódu analýzy systémov použitím **integrálu konvolúcie** a metódy na výpočet odozvy systému **Fourierovou transformáciou**. V tejto kapitole sa zameriame na ďalší typ metódy analýzy odozvy systému a to výpočet riešenia diferenciálnych rovníc použitím **Laplaceovej transformácie**. Postup získania riešenia diferenciálnej rovnice s využitím **Laplaceovej transformácie** možno opísať na základe týchto troch krokov:

1. Vykonáme **Laplaceovu transformáciu** diferenciálnej rovnice. Rovnica, ktorú po transformácií získame, sa nazýva **algebrická rovnica**. Neznámou tejto rovnice je obraz riešenia výstupu diferenciálnej rovnice **Y(s)**. Poznamenajme, že v tom prípade ak uvažujeme nenulové počiatočné podmienky pri riešení diferenciálnej rovnice, je nutné počiatočné podmienky uvažovať už v štádiu transformácie diferenciálnej rovnice pomocou **Laplaceovej transformácie** do roviny **s**.
2. Z algebrickej rovnice v **Laplaceovom tvare** vyjadríme obraz výstupu **Y(s)**, ktorý má zvyčajne tvar racionálnej funkcie (pomer dvoch polynomických funkcií v algebrickom tvare).
3. Vykonáme spätnú (inverznú) **Laplaceovu transformáciu** obrazu riešenia **Y(s)** na základe rozkladu racionálnej funkcie na parciálne zlomky podľa menovateľa funkcie. **Spätnou Laplaceovou transformáciou** transformuje výrazy parciálnych zlomkov z roviny **s** do časovej oblasti **t**, čím získame priebeh riešenia diferenciálnej rovnice **y(t)**.

Ako sme už uviedli, tak tvar hľadanej odozvy predstavuje racionálnu funkciu **Y(s)**, pre ktorú vykonáme **spätnú Laplaceovou transformáciu** do časovej oblasti **t**. Racionálna funkcia, napr. pre **systém n-tého rádu** je daná pomerom dvoch polynómov v tomto tvare

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\ , \tag{15.1}$$

kde $\mathbf{B(s)}$ je polynóm stupňa **m** a $\mathbf{A(s)}$ je polynóm stupňa **n**, pričom platí, že $\mathbf{m \leq n}$. Riešenie rozkladu funkcie **Y(s)** na parciálne zlomky sa riadi na základe vypočítaných koreňov polynómu menovateľa $\mathbf{A(s)}$. Vypočítaním **j-tého** koreňa $\mathbf{s_j = Re + Im \cdot i}$ polynómu v menovateli možno rozlíšiť týchto päť základných prípadov a to:

1. koreň $\mathbf{s_j}$ je **reálnym koreňom,**
2. koreň $\mathbf{s_j}$ je **k-násobným reálnym koreňom**
3. koreň $\mathbf{s_j = \pm Im \cdot i}$ je **komplexne združeným koreňom s nulovou reálnou** časťou, t. j. $\mathbf{Re = 0}$
4. a napokon koreň $\mathbf{s_j = Re \pm Im \cdot i}$ je **komplexne združeným koreňom** s nenulovou reálnou časťou, t. j. $\mathbf{Re \neq 0}$
5. koreň $\mathbf{s_j = Re \pm Im \cdot i}$ je **k-násobným komplexne združeným koreňom** s nulovou alebo nenulovou reálnou časťou

15.2 RIEŠENIE PRE PRÍPAD RÔZNYCH REÁLNYCH KOREŇOV

Predpokladajme, že polynóm $\mathbf{A(s)}$ má **n** rôznych reálnych koreňov $\mathbf{s_1, s_2, \ldots, s_n}$. Potom platí, že prenosová funkcia odozvy systému **Y(s)** bude mať tento tvar

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)} = \frac{B(s)/a_n}{(s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)}\ . \tag{15.2}$$

Rozkladom racionálnej funkcie **Y(s)** na **parciálne zlomky** možno dospieť k nasledovnému parciálneho zlomu tejto racionálnej funkcie

$$Y(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - s_n}\ . \tag{15.3}$$

Predchádzajúce výrazy možno priamo vykonaním **spätnej Laplaceovej transformácie** previesť do časovej oblasti **t, tzn.** že dostávame tvar odozvy **y(t)** v tvare

$$y(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t} \ . \tag{15.4}$$

Príklad č. 15.1:

Predkladajme **diferenciálnu rovnicu 3. rádu s pravou stranou**. Nájdime riešenie $\mathbf{y(t)}$ tejto diferenciálnej rovnice metódou **Laplaceovej transformácie**.

$$3\dddot{y}(t) + 21\ddot{y}(t) + 42\dot{y}(t) + 24y(t) = 3u(t)\,, \tag{15.5}$$

ak uvažujeme nulové počiatočné podmienky ako $\mathbf{\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0}$ a vstup $\mathbf{u(t) = 2}$.

V prípade, že daná diferenciálna rovnica má nenulový koeficient pri najvyššej derivácii premennej $\mathbf{y(t)}$, je vhodné týmto koeficientom predeliť celú diferenciálnu rovnicu ešte pred samotným aplikovaním **Laplaceovej transformácie**. Pre našu diferenciálnu rovnicu teda platí, že

$$\dddot{y}(t) + 7\ddot{y}(t) + 14\dot{y}(t) + 8y(t) = u(t)\,. \tag{15.6}$$

Na transformáciu výrazov derivácií na ľavej strane diferenciálnej rovnice využijeme vlastnosť **Laplaceovej transformácie** pre deriváciu funkcie a podobne vykonáme transformáciou vstupného člena **u(t)** na pravej strane diferenciálnej rovnice do roviny **s**. Pripomeňme, že **Laplaceovým obrazom** skokovej funkcie vstupného signálu **u(t) = 2** je funkcia $\mathbf{U(s) = \frac{2}{s}}$.

Keďže všetky počiatočné podmienky sú uvažované ako nulové $\mathbf{\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0}$, potom možno **Laplaceovu transformáciu** vykonať priamo z definície vlastnosti derivovania ako

$$s^3Y(s) + 7s^2Y(s) + 14sY(s) + 8Y(s) = \frac{2}{s} \tag{15.7}$$

Ďalej vyriešime algebrickú rovnicu a vyjadríme obrazu riešenia odozvy systému **Y(s)**

$$\begin{aligned} &(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)Y(s) = \frac{2}{s}\,, \\ &Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)}\,. \end{aligned} \tag{15.8}$$

Po nájdení racionálnej funkcie odozvy systému pristúpime k aplikovaniu **spätnej Laplaceovej transformácií**.

Ako možno vidieť menovateľ **Y(s)** je polynómom **4. stupňa** a je zrejmé, že jeho jeden koreň je $\mathbf{s_1 = 0}$. Je nutné teda ešte nájsť zostávajúce korene algebrickej rovnice 3. stupňa

$$s^3 + 7s^2 + 14s + 8 = 0. \tag{15.9}$$

Korene tejto charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice možno nájsť napr. použitím Matlabu a to príkazom **roots([1 7 14 8])**. Charakteristická rovnica má teda **4 rôzne reálne korene** $\mathbf{s_1 = 0}$, $\mathbf{s_2 = -4}$, $\mathbf{s_3 = -2}$ a $\mathbf{s_4 = -1}$. Na základe vypočítaných koreňov možno uskutočniť rozklad na parciálne zlomky. Výsledný rozklad zavedením neznámych koeficientov $\mathbf{K_1}, \dots, \mathbf{K_4}$, nadobudne mať tvar

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)} = \frac{2}{s(s+4)(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+4)} + \frac{K_3}{(s+2)} + \frac{K_4}{(s+1)}\ . \end{aligned} \tag{15.10}$$

Za účelom výpočtu týchto neznámych koeficientov $\mathbf{K_i}$, vynásobíme túto rovnicu na jednej a druhej strane menovateľom $\mathbf{s(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)}$

$$\frac{2}{s(s+4)(s+2)(s+1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+4)} + \frac{K_3}{(s+2)} + \frac{K_4}{(s+1)} \tag{15.11}$$

a postupnými matematickými operáciami, t. j. usporiadaním členov pri rovnakých mocninách **s** možno dospieť k rovnici 3. stupňa a teda

$$\begin{aligned} 2 &= K_1(s+4)(s+2)(s+1) + K_2 s(s+2)(s+1) + K_3 s(s+4)(s+1) \\ &\quad + K_4 s(s+4)(s+2)\,, \\ 2 &= K_1(s^3 + 7s^2 + 14s + 8) + K_2(s^3 + 3s^2 + 2s) + K_3(s^3 + 5s^2 + 4s) \\ &\quad + K_4(s^3 + 6s^2 + 8s)\,, \\ 2 &= s^3(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) + s^2(7K_1 + 3K_2 + 5K_3 + 6K_4) \\ &\quad + s(14K_1 + 2K_2 + 4K_3 + 8K_4) + 8K_1\,. \end{aligned} \tag{15.12}$$

Hodnoty koeficientov $\mathbf{K_1, K_2, K_3}$ a $\mathbf{K_4}$ vypočítame **metódou neurčitých koeficientov**. Táto metóda spočíva v porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane pri rovnakých mocninách **s**.

Na základe porovnania dostávame sústavu **4 algebrických rovníc** o **4 neznámych** v tvare

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 + K_2 + K_3 + K_4\,, \\ 0 &= 7K_1 + 3K_2 + 5K_3 + 6K_4\,, \\ 0 &= 14K_1 + 2K_2 + 4K_3 + 8K_4\,, \\ 2 &= 8K_1\,. \end{aligned} \tag{15.13}$$

Ak túto sústavu lineárnych rovníc prepíšeme do maticového tvaru, potom platí, že

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 14 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{15.14}$$

Riešením predchádzajúcej **sústavy lineárnych rovníc** sú tieto koeficienty

$$K_1 = 0.25, K_2 = -0.0833, K_3 = 0.5000, K_4 = -0.6667\,. \tag{15.15}$$

Potom, obraz odozvy systému **Y(s)** po dosadení za jednotlivé koeficienty, predstavuje táto racionálna funkcia

$$Y(s) = \frac{0.25}{s} + \frac{0.0833}{(s+4)} + \frac{0.5}{(s+2)} + \frac{0.6667}{(s+1)}. \tag{15.16}$$

Poznamenajme, že ak koeficienty polynómu v menovateli tvoria množinu reálnych čísel, medzi ktorými sa nevyskytuje žiaden násobný koreň, potom na výpočet príslušných koeficientov $\mathbf{K_i}$ možno takisto použiť jednoduchú formulu, ktorá je definovaná na základe vzťahu

$$K_i = \lim_{s \to s_i} Y(s)(s + s_i)\,. \tag{15.17}$$

Použitím tejto formuly napr. pri výpočte koeficientu $\mathbf{K_1}$, bude platiť, že

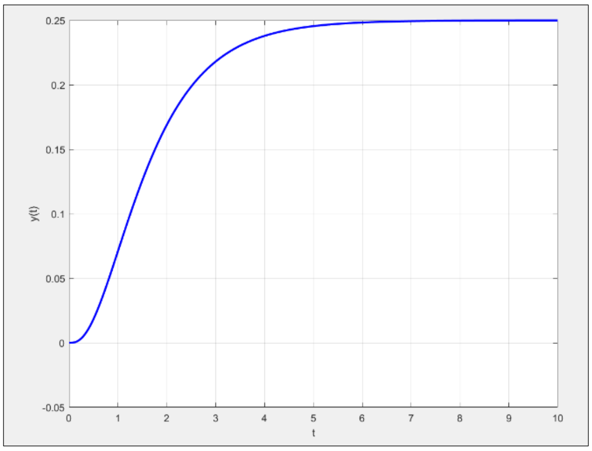
$$K_1 = \lim_{s \to 0} \frac{2}{s(s+4)(s+2)(s+1)}(s+0) = \frac{2}{8} = 0.25\,, \tag{15.18}$$

výpočtom teda dostávame rovnakú hodnotu koeficientu, avšak omnoho rýchlejším spôsobom.

Ak sa pozrieme na vypočítaný výraz odozvy systému **Y(s)**, tak tento obraz je priamo v tvare odozvy racionálnej funkcie, ktorý možno na základe slovníka **Laplaceových funkcií** priamo transformovať do časovej oblasti **t** aplikovaním spätnej Laplaceovej transformácie, bez nutnosti akýchkoľvek ďalších matematických úprav. Riešenie diferenciálnej rovnice bude definované nasledovnou funkciou v časovej oblasti **t**. Odozva systému je zobrazená na Obr. 15.1.

$$y(t) = 0.25 - 0.0833e^{-4t} + 0.5e^{-2t} - 0.6667e^{-t} \tag{15.19}$$

```
clc
clear

t=0:0.01:10;
y=0.25-0.0833*exp(-4*t)+ ...
    0.5*exp(-2*t)-0.6667*exp(-t);

figure(1)
plot(t,y,'b','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



Obr. 15.1.Riešenie diferenciálnej rovnice

15.3 RIEŠENIE PRE VIACNÁSOBNÝ REÁLNY KOREŇ

Predpokladajme, že polynóm $\mathbf{A(s)}$ má **k** násobný reálny koreň $\mathbf{s_1}$. Potom bude platiť, že prenosová funkcia odozvy systému **Y(s)**, bude mať tento tvar

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)^n} = \frac{B(s)/a_n}{(s-s_1)^n} \, . \tag{15.20}$$

Rozkladom tejto racionálnej funkcie odozvy systému **Y(s)** na parciálne zlomky, možno zavedením neznámych koeficientov $\mathbf{K_i}$ prepokladať tento rozklad na parciálne zlomky

$$Y(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{(s-s_2)^2} + \cdots + \frac{K_n}{(s-s_n)^n} \, . \tag{15.21}$$

Vykonaním **spätnej Laplaceovej transformácie** možno dospieť k tomuto obrazu odozvy systému **y(t)** v časovej oblasti **t**

$$y(t) = K_1 e^{s_1 t} + \frac{K_2}{1!} t e^{s_1 t} + \cdots + \frac{K_n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{s_1 t} \, . \tag{15.22}$$

Príklad č. 15.2:

Predpokladajme **diferenciálnu rovnicu 3. rádu s pravou stranou**. Nájdime riešenie tejto diferenciálnej rovnice metódou **Laplaceovej transformácie**.

$$2\dddot{y}(t) + 24\ddot{y}(t) + 96\dot{y}(t) + 128y(t) = 2u(t)\,, \tag{15.23}$$

pri uvažovaní nulových počiatočných podmienok $\mathbf{\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0}$ a vstupu $\mathbf{u(t) = 4}$.

Podobne ako v predchádzajúcom príklade predelíme celú diferenciálnu rovnicu číslom **2** po oboch stranách a dostávame

$$\dddot{y}(t) + 12\ddot{y}(t) + 48\dot{y}(t) + 64y(t) = 4\,. \tag{15.24}$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** predchádzajúcej diferenciálnej rovnice využitím slovníka **Laplaceových obrazov** a definícií pre **Laplaceovu transformáciu**

$$s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 48sY(s) + 64Y(s) = \frac{4}{s}\,. \tag{15.25}$$

Z danej rovnice po aplikovaní **Laplaceovej transformácie** vyjadríme obrazu riešenia **Y(s)**

$$\begin{aligned} (s^3 + 12s^2 + 48s + 64)Y(s) &= \frac{4}{s}\,, \\ Y(s) &= \frac{4}{s(s^3 + 12s^2 + 48s + 64)}\,. \end{aligned} \tag{15.26}$$

Ako možno vidieť tak menovateľ odozvy systému **Y(s)** je polynómom **4. stupňa** a z obrazu **Y(s)** je zrejmé, že jeden koreň je $\mathbf{s_1 = 0}$. Nájdime ďalšie korene polynómu riešením kubickej rovnice

$$s^3 + 12s^2 + 48s + 64 = 0\,. \tag{15.27}$$

Riešením kubickej rovnice použitím Matlabu t. j. príkazom **roots([1 7 14 8])** možno zistiť, že táto rovnica má jeden $\mathbf{k = 3}$ **násobný** reálny koreň $\mathbf{s_{2,3,4} = -4}$. Na základe vypočítaných koreňov polynómu menovateľa odozvy systému možno ďalej vykonať rozklad racionálnej funkcie odozvy systému **Y(s)** na parciálnej zlomky. Vykonajme teda rozklad na parciálne zlomky pre jednej nulový a jeden viacnásobný koreň.

Na základe vypočítaných koreňov charakteristickej rovnice, musí platiť, že

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{4}{\mathrm{s(s+4)^3}} = \frac{\mathrm{K_1}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{K_2}}{\mathrm{(s+4)}} + \frac{\mathrm{K_3}}{\mathrm{(s+4)^2}} + \frac{\mathrm{K_4}}{\mathrm{(s+4)^3}}\ . \tag{15.28}$$

Prenásobením nasledovnej rovnice menovateľom $\mathbf{s(s^3+12s^2+48s+64)}$

$$\frac{4}{\mathrm{s(s+4)^3}} = \frac{\mathrm{K_1}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{K_2}}{\mathrm{(s+4)}} + \frac{\mathrm{K_3}}{\mathrm{(s+4)^2}} + \frac{\mathrm{K_4}}{\mathrm{(s+4)^3}} \tag{15.29}$$

a ďalšími matematickými úpravami možno dospieť k tejto rovnici tretieho stupňa

$$\begin{gathered} 4 = \mathrm{K_1(s^3+12s^2+48s+64) + K_2(s^3+8s^2+16s) + K_3(s^2+4s) + K_4 s}\ , \\ 4 = \mathrm{s^3(K_1+K_2) + s^2(12K_1+8K_2+K_3) + s(48K_1+16K_2+4K_3+K_4) + 64K_1}\ . \end{gathered} \tag{15.30}$$

Na určenie koeficientov $\mathbf{K_1, K_2, K_3}$ a $\mathbf{K_4}$ ako v predchádzajúcom príklade použijeme metódu neurčitých koeficientov. Tzn. porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane rovnice pri rovnakých mocninách **s** možno dospieť k sústave **4 algebrických rovníc** o **4 neznámych** v tvare

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{K_1 + K_2}\ , \\ 0 &= \mathrm{12K_1 + 8K_2 + K_3}\ , \\ 0 &= \mathrm{48K_1 + 16K_2 + 4K_3 + K_4}\ , \\ 4 &= \mathrm{64K_1}\ . \end{aligned} \tag{15.31}$$

Túto sústavu lineárnych rovníc možno potom zapísať do tohto maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 1 & 0 \\ 48 & 16 & 4 & 1 \\ 64 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{K_1} \\ \mathrm{K_2} \\ \mathrm{K_3} \\ \mathrm{K_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{15.32}$$

Riešením predchádzajúcej sústavy lineárnych rovníc v Matlabe dostávame koeficienty

$$\mathrm{K_1} = 0.0625, \mathrm{K_2} = -0.0625, \mathrm{K_3} = -0.2500, \mathrm{K_4} = -1.0000\ . \tag{15.33}$$

Na základe vypočítaných koeficientov možno daný obraz riešenia diferenciálnej rovnice **Y(s)** napísať v tvare

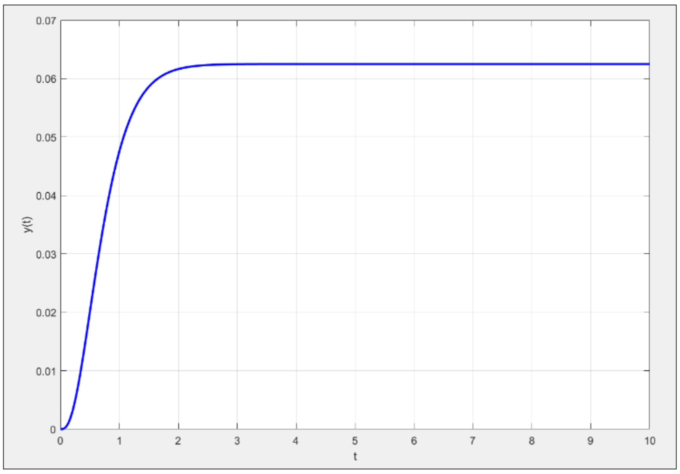
$$Y(s) = \frac{0.0625}{s} + \frac{-0.0625}{(s+4)} + \frac{-0.25}{(s+4)^2} + \frac{-1}{(s+4)^3}. \tag{15.34}$$

Ako v predchádzajúcom príklade, tak aj v tomto prípade je výraz odozvy **Y(s)** priamo definovaný v tvare, ktorý možno na základe slovníka **inverzných Laplaceových funkcií** priamo transformovať do časovej oblasti **t**. Potom riešenie diferenciálnej rovnice nadobúda tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= 0.0625 - 0.0625e^{-4t} - \frac{0.25}{1!}te^{-4t} - \frac{1}{2!}t^2e^{-4t}, \\ y(t) &= 0.0625 - 0.0625e^{-4t} - 0.25te^{-4t} - 0.5t^2e^{-4t}. \end{aligned} \tag{15.35}$$

Vypočítané riešenie diferenciálnej rovnice reprezentované funkciou **y(t)** je znázornené na nasledujúcom Obr. 15.2.

```
clc
clear

t=0:0.01:10;
y=0.0625-0.0625*exp(-4*t)- ...
    0.25*t.*exp(-4*t)- ...
    0.5*t.^2.*exp(-4*t);

figure(1)
plot(t,y,'b','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



Obr. 15.2. Riešenie diferenciálnej rovnice

15.4 RIEŠENIE V PRÍPADE KOMPLEXNE ZDRUŽENÝCH KOREŇOV S NULOVÝMI REÁLNYMI ČASŤAMI

Predpokladajme, že polynóm $\mathbf{A(s)}$ má $\mathbf{n/2}$ dvojíc komplexne združených koreňov $\pm\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}_\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}_\mathbf{2}, \dots, \pm\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}_\mathbf{n/2}$ s nulovými reálnymi časťami. Potom prenosovú funkciu **Y(s)**, ktorá predstavuje riešenie systému definovaného diferenciálnou rovnicou, možno napísať v tvare racionálnej funkcie pomeru dvoch polynómov **B(s)** a **A(s)** ako

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} &= \frac{B(s)}{a_n(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)\dots\left(s^2+\omega_{n/2}^2\right)} \\ &= \frac{B(s)/a_n}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)\dots\left(s^2+\omega_{n/2}^2\right)}. \end{aligned} \tag{15.36}$$

Rozkladom predchádzajúcej racionálnej funkcie **Y(s)** na parciálne zlomky a zavedením koeficientov $\mathbf{K_1}, \dots, \mathbf{K_{n/2}}$ a $\mathbf{L_1}, \dots, \mathbf{L_{n/2}}$ možno dospieť k tejto prenosovej funkcii

$$Y(s) = \frac{K_1 s + L_1}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{K_2 s + L_2}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{K_{n/2} s + L_{n/2}}{s^2 + \omega_{n/2}^2} \,. \tag{15.37}$$

Takýto tvar prenosovej funkcie **Y(s)** možno aplikovaním **inverznej Laplaceovej transformácie** previesť do časovej oblasti **t**, kedy dostávame riešenie diferenciálnej rovnice **y(t)**. V tomto prípade funkcia riešenia diferenciálnej rovnice **y(t)** bude obsahovať tieto **kosínusové** a **sínusové** výrazy

$$y(t) = K_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{L_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \dots + K_{\frac{n}{2}} \cos\left(\omega_{\frac{n}{2}} t\right) + \frac{L_{\frac{n}{2}}}{\omega_{\frac{n}{2}}} \sin\left(\omega_{\frac{n}{2}} t\right). \tag{15.38}$$

Príklad č. 15.3:

Nájdite metódou **Laplaceovej transformácie** riešenie tejto **diferenciálnej rovnice 2. rádu** s uvažovaním pravej strany.

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = u(t)\,. \tag{15.39}$$

V tomto prípade predpokladáme nenulové počiatočné podmienky $\mathbf{\dot{y}(0) = 3, y(0) = 1}$ a budiacu harmonickú funkciu $\mathbf{u(t) = cos(3t)}$.

Po dosadení za budiacu funkciu riešime **diferenciálnu rovnicu 2. rádu** v tvare

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = \cos(3t)\,. \tag{15.40}$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** predchádzajúcej diferenciálnej rovnice podľa slovníka **Laplaceových obrazov** a definícií platiacich pre **Laplaceovu transformáciu**. Na výpočet **Laplaceovej transformácie n-tej derivácie** funkcie **y(t)** s nenulovými počiatočnými podmienkami je nutné vychádzať z tejto definície pre Laplaceovu transformáciu derivácie funkcie

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - s^{n-3} f^{(2)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)\,. \tag{15.41}$$

Predchádzajúcu **Laplaceovu transformáciu** derivácie funkcie n-tého rádu využijeme pre náš prípad **diferenciálnej rovnice 2. rádu**.

Musí platiť, že

$$s^2Y(s) - s \cdot y(0) - \dot{y}(0) + 4 \cdot Y(s) = \frac{s}{s^2 + 3^2}. \qquad (15.42)$$

Dosadením vstupných počiatočných podmienok do predchádzajúcej rovnice dostávame

$$s^2Y(s) - s - 3 + 4Y(s) = \frac{s}{s^2 + 9}. \qquad (15.43)$$

Vyjadrením obrazu riešenia diferenciálnej **Y(s)** z predchádzajúcej rovnice možno dospieť k tvaru

$$\begin{aligned} (s^2 + 4)Y(s) &= \frac{s}{s^2 + 9} + s + 3, \\ Y(s) &= \frac{s^3 + 3s^2 + 10s + 27}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)}. \end{aligned} \qquad (15.44)$$

Menovateľ **Y(s)** je polynómom **4. stupňa** a z obrazu **Y(s)** je zrejmé, že koreňmi polynómu sú dva komplexne združené korene s nulovými reálnymi časťami a to $\mathbf{s_{1,2} = \pm 3i}$ a $\mathbf{s_{3,4} = \pm 2i}$. Na základe vypočítaných koreňov polynómu menovateľa možno vykonať rozklad racionálnej funkcie **Y(s)** na parciálne zlomky. Platí, že

$$Y(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 10s + 27}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = \frac{K_1 s + L_1}{s^2 + 9} + \frac{K_2 s + L_2}{s^2 + 4}. \qquad (15.45)$$

Vynásobením oboch stranách prechádzajúcej rovnice celým výrazom menovateľa $\mathbf{(s^2 + 4)(s^2 + 9)}$ a ďalšími matematickými úpravami dostávame tento tvar algebrickej rovnice

$$\begin{aligned} s^3 + 3s^2 + 10s + 27 &= (K_1 s + L_1)(s^2 + 4) + (K_2 s + L_2)(s^2 + 9), \\ s^3 + 3s^2 + 10s + 27 &= K_1 s^3 + 4K_1 s + L_1 s^2 + 4L_1 + K_2 s^3 + 9K_2 s + L_2 s^2 + 9L_2 \\ s^3 + 3s^2 + 10s + 27 &= \\ &= s^3(K_1 + K_2)s^3 + s^2(L_1 + L_2) + s(4K_1 + 9K_2)s + (4L_1 + 9L_2). \end{aligned} \qquad (15.46)$$

Na určenie koeficientov $\mathbf{K_1, K_2, L_1}$ a $\mathbf{L_2}$ použijeme opäť **metódu neurčitých koeficientov**. Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane rovnice pri rovnakých mocninách **s** dostávame **2 systémy dvoch lineárnych rovníc o 2 neznámych** v tvare

$$K_1 + K_2 = 1\,,\qquad 4K_1 + 9K_2 = 10 \tag{15.47}$$

a

$$L_1 + L_2 = 3\,,\qquad 4L_1 + 9L_2 = 27\,. \tag{15.48}$$

Túto sústavu lineárnych rovníc možno zapísať do jedného systému lineárnych rovníc v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 3 \\ 27 \end{bmatrix}\,. \tag{15.49}$$

Riešením predchádzajúcej sústavy lineárnych rovníc v programe Matlab je toto riešenie koeficientov

$$K_1 = -0.2, K_2 = 1.2, L_1 = 0, L_2 = 3\,, \tag{15.50}$$

ktoré keď dosadíme do obrazu riešenia diferenciálnej rovnice **Y(s)** dostávame racionálnu funkciu v tvare

$$Y(s) = \frac{-0.2s}{s^2+9} + \frac{1.2s+3}{s^2+4}\,. \tag{15.51}$$

Ak sa pozrieme na vypočítanú racionálnu funkciu **Y(s)**, je zrejmé, že výraz **Y(s)** sa momentálne nenachádza v tvare, ktorý možno priamo transformovať na základe slovníka funkcií pre **spätnú Laplaceovu transformáciu**. Aby sme boli schopní previesť tieto členy do časovej oblasti **t**, je nutné vykonať tieto matematické úpravy

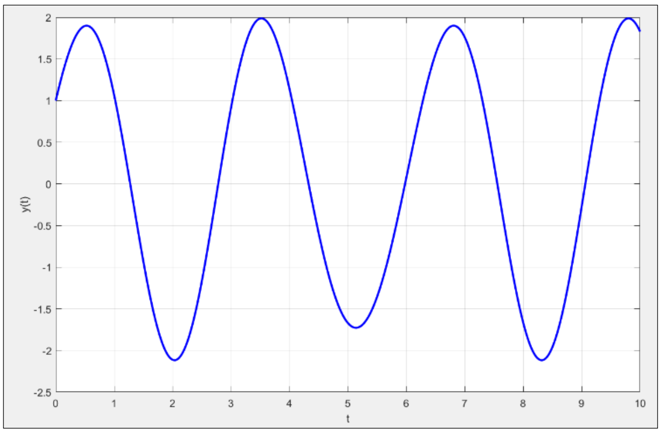
$$Y(s) = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1.2s+3}{s^2+4} = -0.2\frac{s}{s^2+3^2} + 1.2\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{3}{2}\frac{2}{s^2+2^2}\,. \tag{15.52}$$

V tomto štádiu sa už obraz riešenia **Y(s)** nachádza v tvare, ktorý je priamo možné transformovať do časovej oblasti **t**

$$y(t) = -0.2\cos(3t) + 1.2\cos(2t) + \frac{3}{2}\sin(2t)\,. \tag{15.53}$$

Priebeh riešenia diferenciálnej rovnice **y(t)** je znázornený na nasledujúcom Obr. 15.3.

```
clc
clear

t=0:0.01:10;
y=-0.2*cos(3*t)+1.2*cos(2*t)+ ...
    3/2*sin(2*t);

figure(1)
plot(t,y,'b','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



Obr. 15.3. Riešenie diferenciálnej rovnice

15.5 RIEŠENIE V PRÍPADE KOMPLEXNE ZDRUŽENÝCH KOREŇOV S NENULOVÝMI REÁLNYMI ČASŤAMI

Predpokladajme, že polynóm $\mathbf{A(s)}$ je **polynómom 2. stupňa** v tvare $\mathbf{A(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$, ktorý má dva komplexne združené korene v tvare $\boldsymbol{\alpha \pm i\omega}$. Ďalej, predpokladajme, že polynóm čitateľa **B(s)** je **polynómom 1. stupňa** v tvare $\mathbf{B(s) = b_1 s + b_0}$, potom prenosová funkcia odozvy systému diferenciálnej rovnice v Laplaceovom tvare **Y(s)** bude mať tento tvar

$$Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_1 s+b_0}{a_2\left(s^2+\frac{a_1}{a_2}s+\frac{a_0}{a_2}\right)}=\frac{\frac{b_1}{a_2}s+\frac{b_0}{a_2}}{s^2+\frac{a_1}{a_2}s+\frac{a_0}{a_2}}=\frac{\tilde{b}_1 s+\tilde{b}_0}{s^2+\tilde{a}_1 s+\tilde{a}_0}. \tag{15.54}$$

Upravme zlomok do tvaru takej racionálnej funkcie, aby sa pomocou tabuľky pre **Laplaceove tvary funkcií** dala táto funkcia jednoducho spätne transformovať do časovej oblasti **t**. Obrazy, ktoré vyhovujú našej požiadavke sú matematické funkcie tvaru $\mathbf{e^{-at}\cos(\omega t)}$ a $\mathbf{e^{-at}\sin(\omega t)}$, ktorým zodpovedajú Laplaceove tvary $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ a $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$. Rozkladom danej racionálnej funkcie **Y(s)** na parciálne zlomky možno dospieť k tejto funkcii **Y(s)**

$$Y(s)=\frac{\tilde{b}_1 s+\tilde{b}_0}{s^2+2\frac{\tilde{a}_1}{2}s+\left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2+\tilde{a}_0-\left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2}=\frac{\tilde{b}_1 s+\tilde{b}_0}{\left(s+\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\tilde{a}_0-\left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2}\right)^2}. \tag{15.55}$$

Zavedením označenia pre $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\tilde{\mathbf{a}}_0-\left(\frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{2}\right)^2}$ a $\mathbf{a} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{2}$, potom možno **Y(s)** prepísať do zjednodušeného tvaru

$$Y(s) = \frac{\tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{(s+a)^2 + \omega^2}. \tag{15.56}$$

Teraz ešte upravíme čitateľa obrazu riešenia diferenciálne rovnice **Y(s)** do tvaru

$$Y(s) = \frac{\tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{(s+a)^2 + \omega^2} = \tilde{b}_1 \cdot \frac{s + \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1}}{(s+a)^2 + \omega^2} = \tilde{b}_1 \cdot \frac{s + a + \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1} - a}{(s+a)^2 + \omega^2} \tag{15.57}$$

a zavedením transformácie $\mathbf{b} = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_0}{\tilde{\mathbf{b}}_1} - \mathbf{a}$, potom musí platí, že

$$Y(s) = \tilde{b}_1 \cdot \frac{s + a + b}{(s+a)^2 + \omega^2} = \tilde{b}_1 \cdot \frac{s + a}{(s+a)^2 + \omega^2} + \frac{\tilde{b}_1 \cdot b}{\omega} \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}. \tag{15.58}$$

V tomto štádiu sme výraz **Y(s)** upravili do takého tvaru, keď možno priamo vykonať **spätnú Laplaceovu transformáciu** tohto obrazu **Y(s)** do časovej oblasti **t** a dospieť tak k riešeniu **y(t)**

$$y(t) = \tilde{b}_1 e^{-at} \cos(\omega t) + \frac{\tilde{b}_1 b}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t). \tag{15.59}$$

Príklad č. 15.4:

Nájdime riešenie nasledovnej **diferenciálnej rovnice 3. rádu** s pravou stranou metódou **Laplaceovej transformácie**, ak uvažujeme nulové počiatočné podmienky $\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{0}) = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a skokovú budiacu funkciu $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{2}$

$$\dddot{y}(t) + 10\ddot{y}(t) + 36\dot{y}(t) + 40y(t) = u(t). \tag{15.60}$$

Dosadením za vstupný signál **u(t)** riešime teda **diferenciálnu rovnicu 3. rádu** v tvare,

$$\dddot{y}(t) + 10\ddot{y}(t) + 36\dot{y}(t) + 40y(t) = 2. \tag{15.61}$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{0}) = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, potom diferenciálna rovnica v **Laplaceovom** tvare nadobúda tvar

$$s^3 Y(s) + 10s^2 Y(s) + 36sY(s) + 40Y(s) = \frac{2}{s}. \tag{15.62}$$

Ďalej vyjadrením obrazu riešenia **Y(s)** z predchádzajúcej rovnice dostávame

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 10s^2 + 36s + 40)} . \tag{15.63}$$

Menovateľ funkcie **Y(s)** je **polynómom 4. stupňa** a z obrazu **Y(s)** je zrejmé, že jeho jeden koreň je reálnym nulovým koreňom $\mathbf{s_1 = 0}$. Treba teda ešte vypočítať korene rovnice kubického polynómu

$$s^3 + 10s^2 + 36s + 40 = 0 . \tag{15.64}$$

Riešením tejto kubickej rovnice, ktorá má tri korene, jeden reálny koreň $\mathbf{s_2 = -2}$ a dva komplexne združené korene $\mathbf{s_{3,4} = -4 \pm 2i}$. Polynóm, ktorý predstavuje kvadratickú formu, ktorej riešením je daná dvojica týchto komplexne združených koreňov $\mathbf{s_{3,4} = -4 \pm 2i}$, možno vypočítať predelením polynómu vyššieho stupňa $\mathbf{s^3 + 10s^2 + 36s + 40 = 0}$ polynómom $\mathbf{s + 2}$. Potom výsledkom delenia je polynóm 2. stupňa

$$s^2 + 8s + 20 = 0 . \tag{15.65}$$

Na základe vypočítaných koreňov možno prepísať obraz riešenia diferenciálnej rovnice **Y(s)** do tohto tvaru racionálnej funkcie

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 10s^2 + 36s + 40)} = \frac{2}{s(s+2)(s^2 + 8s + 20)} \tag{15.66}$$

a zavedením neznámych koeficientov $\mathbf{K_1, \dots, K_4}$, vykonať rozklad predchádzajúcej racionálnej funkcie **Y(s)** na parciálne zlomky

$$\frac{2}{s(s+2)(s^2 + 8s + 20)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3 s + K_4}{s^2 + 8s + 20} . \tag{15.67}$$

Vynásobením ľavej a pravej strany prechádzajúcej racionálnej funkcie **Y(s)** menovateľom $\mathbf{s(s+2)\left(s^2 + 8s + 20\right)}$ dostávame

$$\begin{aligned} 2 = K_1(s+2)(s^2 + 8s + 20) + K_2 s(s^2 + 8s + 20) + \\ (K_3 s + K_4)(s^2 + 2s) \ . \end{aligned} \tag{15.68}$$

Ďalej postupnými matematickými úpravami (usporiadaním koeficientov pri rovnakých mocninách **s**) možno dospieť k algebrickej rovnici 3. stupňa

$$2 = K_1(s^3 + 8s^2 + 20s + 2s^2 + 16s + 40) + K_2(s^3 + 8s^2 + 20s) + (K_3s^3 + 2K_3s^2 + K_4s^2 + 2K_4s)\,,$$

$$2 = s^3(K_1 + K_2 + K_3) + s^2(10K_1 + 8K_2 + 2K_3 + K_4) + s(36K_1 + 20K_2 + 2K_4) + (40K_1)\,. \tag{15.69}$$

Na vyriešenie koeficientov $\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2}, \mathbf{K_3}$ a $\mathbf{K_4}$ podobne ako v predchádzajúcich príkladoch použijeme **metódu neurčitých koeficientov**. Porovnaním koeficientov jednotlivých polynómov na pravej a ľavej strane danej rovnice dostávame sústavu **4** algebrických rovníc o **4** neznámych v tvare

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 + K_2 + K_3\,, \\ 0 &= 10K_1 + 8K_2 + 2K_3 + K_4\,, \\ 0 &= 36K_1 + 20K_2 + 2K_3\,, \\ 2 &= 40K_1\,. \end{aligned} \tag{15.70}$$

Túto sústavu lineárnych rovníc možno zapísať do tohto maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 8 & 2 & 1 \\ 36 & 20 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{15.71}$$

a potom riešením danej sústavy lineárnych rovníc v maticovom tvare možno vypočítať neznáme koeficienty $\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2}, \mathbf{K_3}$ a $\mathbf{K_4}$

$$K_1 = 0.05, K_2 = -0.125, K_3 = 0.075, K_4 = 0.35\,. \tag{15.72}$$

Na základe vypočítaných koeficientov $\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2}, \mathbf{K_3}$ a $\mathbf{K_4}$ zapíšeme obraz riešenia diferenciálnej rovnice **Y(s)** v tomto tvare

$$Y(s) = \frac{0.05}{s} + \frac{-0.125}{s+2} + \frac{0.075s + 0.35}{s^2 + 8s + 20}\,. \tag{15.73}$$

Je zrejmé, že výraz **Y(s)** sa momentálne nenachádza v tvare, ktorý možno priamo transformovať na zodpovedajúci inverzný Laplaceov tvar týchto tlmených trigonometrických funkcií

$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \Longrightarrow e^{-at}\sin(\omega t)\,,$$
$$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \Longrightarrow e^{-at}\cos(\omega t)\,. \qquad (15.74)$$

Aby sme boli schopní vykonať **spätnú Laplaceovu transformáciu** musíme vykonať tieto matematické úpravy

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{0.05}{s} - 0.125 = \frac{0.05}{s} - 0.125\frac{1}{s+2} + 0.075\frac{s+4+\frac{0.35}{0.075}-4}{(s+4)^2+4} = \\ &= \frac{0.05}{s} - 0.125\frac{1}{s+2} + 0.075\frac{s+4+0.66667}{(s+4)^2+2^2} = \\ &= \frac{0.05}{s} - 0.125\frac{1}{s+2} + 0.075\frac{s+4}{(s+4)^2+2^2} + \frac{0.075\times 0.6667}{2}\frac{2}{(s+4)^2+2^2} = \\ &= \frac{0.05}{s} - 0.125\frac{1}{s+2} + 0.075\frac{s+4}{(s+4)^2+2^2} + 0.025\frac{2}{(s+4)^2+2^2}\,. \end{aligned} \qquad (15.75)$$

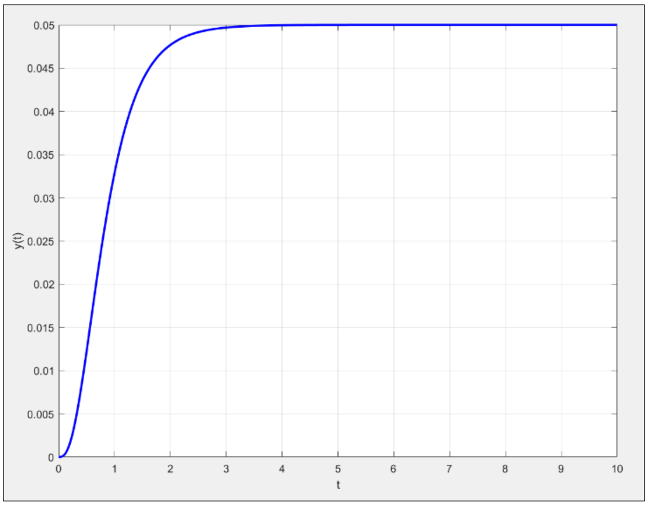
Po matematických úpravách dostávame **Y(s)** v tvare

$$Y(s) = \frac{0.05}{s} - 0.125\frac{1}{s+2} + 0.075\frac{s+4}{(s+4)^2+2^2} + 0.025\frac{2}{(s+4)^2+2^2}\,. \qquad (15.76)$$

V tomto štádiu sa obraz **Y(s)** nachádza v tvare, ktorý možno priamo pretransformovať. Dostávame teda riešenie tejto diferenciálnej rovnice, ktorej priebeh je zobrazený na Obr. 15.4

$$y(t) = 0.05 - 0.125e^{-2t} + 0.075e^{-4t}\cos(2t) + 0.025e^{-4t}\sin(2t)\,. \qquad (15.77)$$

```
clc
clear

t=0:0.01:10;
y=0.05-0.125*exp(-2*t)+ ...
    0.075*exp(-4*t).*cos(2*t)+ ...
    0.025*exp(-4*t).*sin(2*t);

figure(1)
plot(t,y,'b','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



Obr. 15.4. Riešenie diferenciálnej rovnice

Úlohy na riešenie:

Problém 15.1:

Nájdite riešenie nasledujúcich **diferenciálnych rovníc** s uvažovaním uvedených počiatočných podmienok na základe metódy **Laplaceovej transformácie**.

1. $\ddot{y}(t) - 7\dot{y}(t) + 10y(t) = 20t^2 - 28t + 1, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$
2. $3\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) = 25\sin t, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$
3. $9\ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + y(t) = 4e^{-\frac{t}{3}}, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$
4. $\ddot{y}(t) + 4y(t) = \cos 2t, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$
5. $\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 5y(t) = \sin t, \quad y(0) = -1, \dot{y}(0) = -2$
6. $\ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 9t^2 - 12t + 2, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 3$
7. $\ddot{y}(t) + y(t) = 2\sin t, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$
8. $\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) = -5e^{-t}(\sin t + \cos t), \quad y(0) = -4, \dot{y}(0) = 5$

16 ANALÝZA ODOZVY SYSTÉMOV

V tejto kapitole sa budeme venovať skúmaniu odozvy **dynamických systémov** s využitím Matlabovských funkcií. Poznamenajme, že pri vyšetrovaní odozvy dynamických systémov možno rozlišovať medzi tromi základnými typmi odozvy, ktoré sa počítajú v teórii systému a sú to:

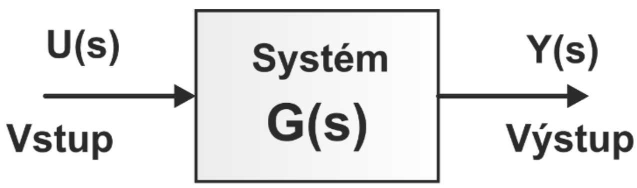
1. Odozva na skokovú funkciu **u(t)**,
2. odozva na ľubovoľný signál **u(t)**,
3. impulzná odozva **h(t)**.

Analýzu odozvy dynamického systému definovaného **diferenciálnou rovnicou** alebo **sústavou diferenciálnych rovníc** možno vykonať pre funkciu skokového signálu **u(t)** ako aj pre ľubovoľný vstupný signál **u(t)**, ktorým je spravidla časovo závislá funkcia. V prípade, že vyšetrujeme impulznú odozvu systému, vstupným signálom **u(t)** je v tomto prípade **impulzná funkcia**, ktorá je definovaná na základe **jednotkového impulzu**, resp. **delta funkcie** $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$.

Medzi typické budiace signály, ktoré sa využívajú na analýzu odozvy systému, možno zaradiť napr. **jednotkový skok**, **impulzný signál**, **ramp signál** (lineárne rastúca funkcia s časom **t**) a ďalšie iné napr. harmonicky meniace sa signály definované na základe funkcie **kosínus** alebo **sínus**. Systém možno takisto v prípade analýzy podrobiť napr. signálu náhodného charakteru.

16.1 ANALÝZA ODOZVY SYSTÉMU NA SKOKOVÝ SIGNÁL

Podmienkou realizácie a vyšetrovania odozvy systému na **skokový** (z angl. step) **signál u(t)** resp. ľubovoľný signál je nutnosť poznať matematického modelu, ktorý transformujeme využitím **Laplaceovej transformácie** do **komplexnej s-roviny** a získame tak **prenosovú funkciu systému** resp. **prenosovú maticu systému G(s)** (v prípade, že riešime systém s viacerými vstupmi a výstupmi). Nasledujúci Obr. 16.1 zobrazuje príklad blokového diagramu, ktorý charakterizuje systém opísaný jednou prenosovou funkciou **G(s)**.



Obr. 16.1. Blokový diagram definovaný prenosovou funkciou systému

Takýto blokový diagram môže reprezentovať celý systém alebo len časť daného systému. V Matlabe existujú rôzne spôsoby, ktorými možno systém zadefinovať v podobe prenosovej funkcie **G(s)** a potom analyzovať.

V program Matlabe každý systém, ktorý je daný prenosovou funkciou **G(s)** možno zadefinovať napr. použitím príkazu **transfer function (tf)**, ktorý má tento syntax

$$\mathrm{sys} = \mathrm{tf}(\mathrm{num}, \mathrm{den}) \tag{16.1}$$

alebo

$$\mathrm{sys} = \mathrm{tf}([\, b_m\, b_{m-1}\, \dots\, b_0\,], [\, a_n\, a_{n-1}\, \dots\, a_0\,])\,, \tag{16.2}$$

kde $\mathbf{b_m}, \mathbf{b_{m-1}}, \dots, \mathbf{b_0}$ a $\mathbf{a_n}, \mathbf{a_{n-1}}, \dots, \mathbf{a_0}$ sú koeficienty prenosovej funkcie systém n-tého rádu.

Príkaz **tf** zadeklaruje v Matlabe systém definovaný prenosovou funkciou **G(s)** v štandardnom tvare (racionálna funkcia podielu dvoch polynómov premennej **s**). Napr. ak uvažujeme systém opísaný touto prenosovou funkciou

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 25}{s^2 + 4s + 25}\,, \tag{16.3}$$

potom tento systém definovaný dvoma polynómami čitateľa a menovateľa možno v Matlabe definovať prostredníctvom dvoch vektorov, ktoré predstavujú koeficienty pri mocninách premennej **s** usporiadaných od najvyššieho stupňa k najnižšiemu stupňu, t. j.

$$\begin{aligned} \mathrm{num} &= [2\ 25]\,, \\ \mathrm{den} &= [1\ 4\ 25]\,. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Systém definovaný takýmito dvoma polynómami čitateľa a menovateľa je potom možné jednoduchým spôsobom zadefinovať týmto skriptom v Matlabe

$$\begin{aligned} \mathrm{num} &= [2\ 25]\,, \\ \mathrm{den} &= [1\ 4\ 25]\,, \\ \mathrm{sys} &= \mathrm{tf}(\mathrm{num}, \mathrm{den})\,. \end{aligned} \tag{16.5}$$

V Matlabe potom možno s takto zadefinovaným systémom vykonávať rôzne analýzy, napr. vypočítať skokovú odozvu príkazom **step**, ktorý vyrieši odozvu systému na jednotkový skok a zobrazí priebeh odozvy na grafe

$$\text{step(sys)}\,. \tag{16.6}$$

Syntax príkazu **step** má okrem jednoduchého zápisu aj ďalšie iné možnosti a variácie použitia.

Príkaz **step** má tieto ďalšie možnosti syntaxu:

$\mathbf{y = step(sys)}$ – vypočíta odozvu systému na jednotkový skokový signál **u(t)** a riešenie uloží do premennej **y(t)** bez zobrazenia grafického výstupu.

$\mathbf{y = step(num, den)}$ – vypočíta odozvu systému na jednotkový skokový signál **u(t)** so zadefinovaných vektorov čitateľa a menovateľa systému **num**, **den**.

$\mathbf{y = step(K * sys)}$ – vypočíta odozvu systému na skokový signál **u(t)** s amplitúdou **K** a riešenie uloží do premennej **y(t)** bez zobrazenia grafického výstupu.

$\mathbf{[y, t] = step(sys)}$ – vypočíta odozvu **y(t)** a uloží časový vektor do premennej **t**.

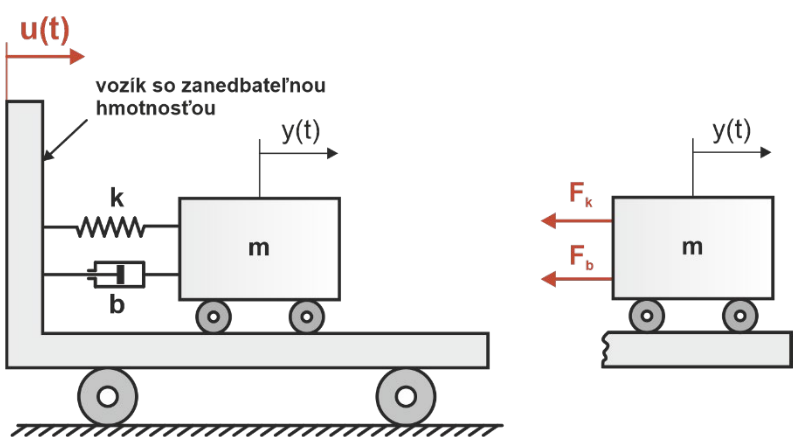
$\mathbf{y = step(sys, Tfinal)}$ – vypočíta odozvu systému po čas **Tfinal** na jednotkový skokový signál **u(t)** a riešenie uloží do premennej **y(t)** bez zobrazenia grafického výstupu.

$\mathbf{y = step(sys, T)}$ – vypočíta odozvu systému po užívateľom definovaný časový vektor $\mathbf{T = [T_{min}: dt: T_{max}]}$ na jednotkový skokový signál **u(t)**.

$\mathbf{step(sys1, sy2, \ldots, t)}$ – porovnanie viacerých riešení viacerých systémov v jednom grafe.

Príklad č. 16.1:

Systém pozostávajúci z pružiny tuhosti **k = 100 N.m^{-1}**, tlmiča s konštantou tlmenia **b = 20 N.s.m^{-1}** a kmitajúcej hmoty s hmotnosťou **m = 10 kg**, je znázornený na nasledujúcom Obr. 16.2. Vyšetrite odozvu tohto systému na jednotkový skok, ak uvažujeme, že tento systém je umiestnený na nehmotnom vozíku ako je znázornené na Obr. 16.2.



Obr. 16.2. Systém hmota-pružina-tlmič na pohyblivom vozíku

Aplikovaním **2. Newtonovho zákona** pre uvoľnený systém vozíka možno napísať túto diferenciálnu rovnicu systému

$$m\ddot{y} = -F_b - F_k = -b(\dot{y} - \dot{u}) - k(y - u) \qquad (16.7)$$

alebo

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku\,. \qquad (16.8)$$

Posledná z týchto rovníc reprezentuje matematický model daného mechanického systému. Preveďme túto diferenciálnu rovnicu do **Laplaceovho tvaru** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ na nájdenie prenosovej funkcie systému

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s). \qquad (16.9)$$

To znamená, že prenosová funkcia **G(s)** pre tento systém nadobudne tvar

$$G(s) = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k} = \frac{20s + 100}{10s^2 + 20s + 100}. \qquad (16.10)$$

Pretože uvažovanému vstupu **u(t)**, ktorým je jednotkový skokový signál zodpovedá v Laplaceovom tvare obraz

$$U(s) = \frac{1}{s}, \qquad (16.11)$$

potom obraz výstupu odozvy systému **Y(s)** na základe definície bude daný súčinom prenosovej funkcie systému **G(s)** a obrazu jeho vstupného signálu **U(s)**. A teda platí, že

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{20s + 100}{10s^2 + 20s + 100} \cdot \frac{1}{s} = \frac{20s + 100}{10s^3 + 20s^2 + 100}\ . \qquad (16.12)$$

Aby bolo možné vypočítať funkciu výstupu **y(t)** v časovej oblasti je nutné vykonať **inverznú Laplaceovu transformáciu**. Podobným spôsobom ako sme riešili odozvu diferenciálnych rovníc, vykonáme rozklad racionálnej funkcie **Y(s)** na parciálne zlomky. Rozklad možno uskutočniť použitím príkazu **residue** v programe Matlabe. Príkaz **residue** vykoná rozklad racionálnej funkcie na parciálne zlomky. Syntax príkazu **residue** má tento tvar

$$[r, p, k] = \mathrm{residue}(num, den)\ . \qquad (16.13)$$

Tento príkaz vypočíta koeficienty **(r)**, ktoré predstavujú koeficienty čitateľov zlomkov racionálnej funkcie, ďalej póly menovateľov **(p)** a celkový polynóm **(k)** po delení dvoch polynómov.

To znamená, že príkazy na výpočet parciálnych zlomkov pre náš prípad možno zapísať v Matlabe týmto spôsobom

```
num=[2 10];
den=[1 2 10 0];
[r, p, k]=residue(num, den)

r =
  -0.5000 - 0.1667i
  -0.5000 + 0.1667i
   1.0000 + 0.0000i

p =

  -1.0000 + 3.0000i
  -1.0000 - 3.0000i
   0.0000 + 0.0000i

k =
     []
```

Potom rozklad obrazu **Y(s)** na parciálne zlomky použitím vypočítaných parametrov **r, p** a **k** možno zapísať v tomto tvare

$$Y(s) = \frac{20s + 100}{10s^3 + 20s^2 + 100s} = \frac{-0.5 - 0.1667i}{s + 1 - 3i} + \frac{-0.5 + 0.1667i}{s + 1 + 3i} + \frac{1}{s}. \qquad (16.14)$$

Pretože, **Y(s)** má **dva komplexné združené póly**, je vhodné ich skombinovať a interpretovať prostredníctvom výrazu v kvadratickej forme ako

$$\frac{-0.5 - 0.1667i}{s + 1 - 3i} + \frac{-0.5 + 0.1667i}{s + 1 + 3i} = \frac{-s}{(s+1)^2 + 3^2}. \qquad (16.15)$$

Ďalšími matematickými úpravami racionálnej funkcie odozvy **Y(s)** možno dospieť k výslednému tvaru odozvy systému v komplexnej rovine **s**

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+1)^2 + 3^2} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 1 - 1}{(s+1)^2 + 3^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}. \end{aligned} \qquad (16.16)$$

Potom výsledná odozva **Y(s)** v Laplaceovom tvare, ktorú možno priamo pretransformovať do časovej oblasti **t** má tvar

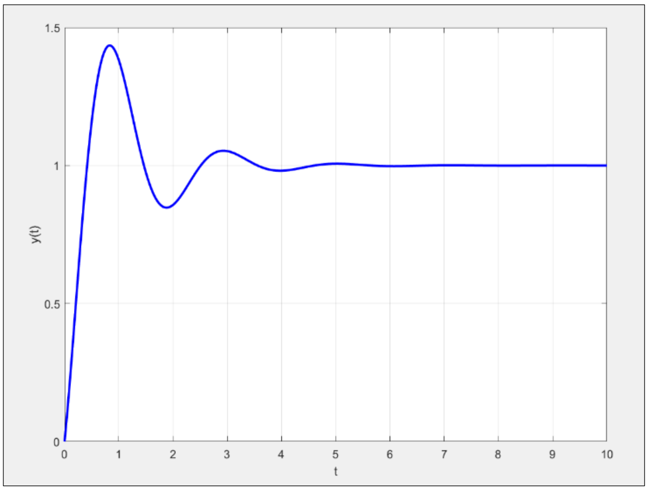
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2+3^2} \; . \qquad (16.17)$$

Aplikovaním **inverznej Laplaceovej transformácie** dostávame časovú odozvu systému **y(t)** v tvare

$$y(t) = 1 - e^{-t}\cos(3t) + \frac{1}{3}e^{-t}\sin(3t) \; . \qquad (16.18)$$

Priebeh riešenia odozvy riešeného mechanického systému je znázornený na nasledujúcom Obr. 16.3.

```
clc
clear

t=0:0.01:10;
y=1-exp(-t).*cos(3*t)+ ...
1/3*exp(-t).*sin(3*t);

figure(1)

plot(t,y,'b','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



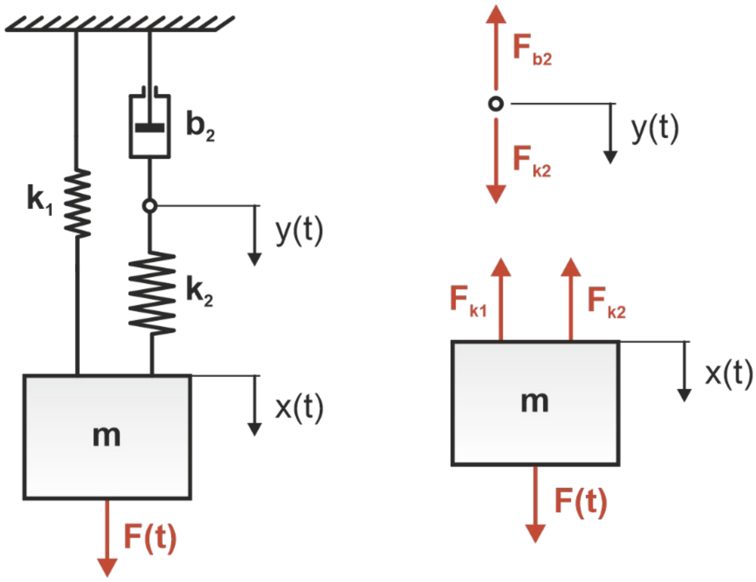
Obr. 16.3. Odozva systému y(t) [m]

Pripomeňme, že riešenie odozvy na jednotkový skokový signál možno takisto vypočítať použitím príkazu **step**, ktorý keď aplikujeme priamo na prenosovú funkciu **G(s)**, potom možno analytické riešenie porovnať s riešením získaným príkazom **step** v programe Matlab. Použitím príkazov v Matlabe zapísaných do tohto skriptu, dostávame identické riešenie.

```
clc
clear

num=[20 100];
den=[10 20 100];
sys=tf(num, den);
step(sys)
```

Príklad č. 16.2:

Mechanický systém, ktorý je v rovnovážnom stave zobrazený na Obr. 16.4, možno opísať posunutiami **x(t)** a **y(t)**, ktoré sú merané od rovnovážnej polohy. Predpokladajme, že sila **F(t)** je skoková funkcia a **x(t)**, **y(t)** sú výstupné posunutia bodov systému. Ak poznáme vstupné veličiny systému **m = 0.1 kg,** $\mathbf{b_2}$ **= 0,4 N.s.m**$^{\mathbf{-1}}$**,** $\mathbf{k_1}$ **= 6 N.m**$^{\mathbf{-1}}$**,** $\mathbf{k_2}$ **= 4 N.m**$^{\mathbf{-1}}$ a vieme, že **F(t) = 10 N**, určte analytickým spôsobom riešenie funkcie odozvy posunutia **x(t)**.



Obr. 16.4. Mechanický systém

Pohybové rovnice systému pre uvoľnené telesá podľa Obr. 16.4 sú tohto tvaru

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F(t) - F_{k1} - F_{k2}\,, \\
0 &= F_{k2} - F_{b2}\,,
\end{aligned}
\qquad (16.19)
$$

dosadením do systému rovníc za komponentné sily dostávame

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + k_1x + k_2(x-y) &= F(t)\,, \\
k_2(x-y) &= b_2\dot{y}\,.
\end{aligned}
\qquad (16.20)
$$

Vykonajme **Laplaceovou transformáciou** systému s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{y(0) = \dot{x}(0) = x(0) = 0}$

$$
\begin{aligned}
(ms^2 + k_1 + k_2)X(s) &= F(s) + k_2Y(s)\,, \\
k_2X(s) &= (k_2 + b_2s)Y(s)\,.
\end{aligned}
\qquad (16.21)
$$

Z predchádzajúcej druhej rovnice možno vyjadriť **Y(s)**

$$Y(s) = \frac{k_2}{b_2 s + k_2} X(s) \tag{16.22}$$

a dosadením **Y(s)** do prvej rovnice, potom platí, že

$$(ms^2 + k_1 + k_2)X(s) = F(s) + \frac{k_2^2}{k_2 + b_2 s} X(s) \tag{16.23}$$

alebo

$$[(ms^2 + k_1 + k_2)(b_2 s + k_2) - k_2^2]X(s) = (b_2 s + k_2)F(s)\,. \tag{16.24}$$

V tomto prípade prenosová funkcia systému **G(s)** bude mať všeobecný tvar

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_2 s + k_2}{m b_2 s^3 + m k_2 s^2 + (k_1 + k_2) b_2 s + k_1 k_2}\,. \tag{16.25}$$

Ak dosadíme hodnoty za parametre do odvodenej prenosovej funkcie dostávame

$$G(s) = \frac{0.4s + 4}{0.04s^3 + 0.4s^2 + 4s + 24} = \frac{10s + 100}{s^3 + 10s^2 + 100s + 600}\,. \tag{16.26}$$

Keďže sila **F(t)** je skokovou funkciou s amplitúdou **10 N**. Obraz tejto funkcie zodpovedá **Laplaceovemu obrazu** v tvare

$$F(s) = \frac{10}{s}\,. \tag{16.27}$$

Využitím odvodenej prenosovej funkcie systému **G(s)** a Laplaceoveho obrazu sily **F(s)** možno vypočítať odozvu systému **X(s)** a to v tvare

$$X(s) = G(s) \cdot F(s) = \frac{10s + 100}{s^3 + 10s^2 + 100s + 600} \cdot \frac{10}{s}\,. \tag{16.28}$$

To znamená, že výsledný obraz odozvy **X(s)** systému bude definovaný ako

$$X(s) = \frac{100s + 1000}{s^4 + 10s^3 + 100s^2 + 600s} \ . \qquad (16.29)$$

Na nájdenie **inverznej Laplaceovej transformácie** odozvy **X(s)**, rozložíme danú funkciu na parciálne zlomky použitím Matlabu.

```
clc
clear

num=[100 1000];
den=[1 10 100 600 0];
[r, p, k]=residue(num, den)

r =

  -0.6845 + 0.2233i
  -0.6845 - 0.2233i
  -0.2977 + 0.0000i
   1.6667 + 0.0000i


p =

  -1.2898 + 8.8991i
  -1.2898 - 8.8991i
  -7.4204 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i


k =

     []
```

Takže, pre funkciu **X(s)** možno napísať tento parciálny rozklad racionálnej funkcie

$$\begin{aligned} X(s) = {} & \frac{100s + 1000}{s^4 + 10s^3 + 100s^2 + 600s} \\ & = \frac{1.6667}{s} + \frac{-0.2977}{s + 7.4204} + \frac{-0.6845 + 0.2233i}{s + 1.2898 - 8.899i} \\ & + \frac{-0.6845 - 0.2233i}{s + 1.2898 + 8.899i} \ . \end{aligned} \qquad (16.30)$$

Ako možno vidieť, tak v rozklade sa opäť nachádzajú dva komplexne združené korene. Aby bolo možné previesť túto odozvu **inverznou Laplaceovou transformáciou** do časovej oblasti **t**, je nutné vykonať niekoľko nasledovných matematických úprav.

$$X(s) = \frac{1.6667}{s} - \frac{0.2977}{s + 7.4204} + \frac{-1.369(s + 1.2898) - 3.9749}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} \ , \qquad (16.31)$$

$$X(s) = \frac{1.6667}{s} - \frac{0.2977}{s + 7.4204} - 1.369\frac{s + 1.2898}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} - \frac{3.9749}{8.899}\frac{8.899}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} \ .$$

a potom ďalšími matematickými úpravami dostávame,

$$X(s) = \frac{1.6667}{s} - \frac{0.2977}{s + 7.4204} - 1.369\frac{s + 1.2898}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} - 0.4466\frac{8.899}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} \ ,$$

$$X(s) = \frac{1.6667}{s} - \frac{0.2977}{s + 7.4204} + \frac{-1.369(s + 1.2898) - 3.9749}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} \ , \qquad (16.32)$$

$$X(s) = \frac{1.6667}{s} - \frac{0.2977}{s + 7.4204} - 1.369\frac{s + 1.2898}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} - \frac{3.9749}{8.899}\frac{8.899}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} \ .$$

Výsledný tvar hľadanej odozvy systému **X(s)** je daný racionálnou funkciou, ktorú možno priamo previesť do časovej oblasti,

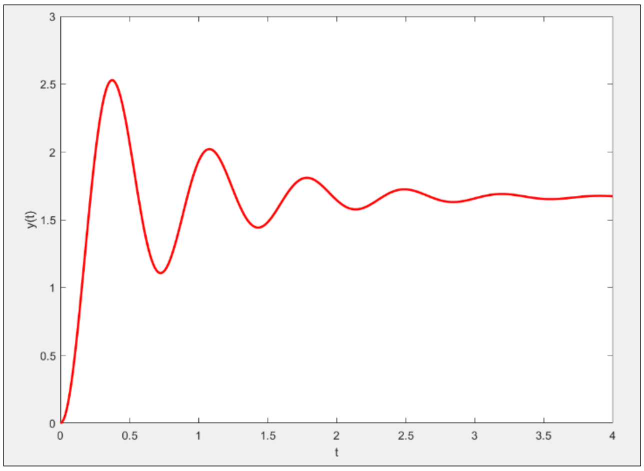
$$X(s) = \frac{1.6667}{s} - \frac{0.2977}{s + 7.4204} - 1.369\frac{s + 1.2898}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} - 0.4466\frac{8.899}{(s + 1.2898)^2 + 8.899^2} \qquad (16.33)$$

Aplikovaním **inverznej Laplaceovej transformácie** na predchádzajúcu prenosovú funkciu dostávame riešenie odozvy v časovej oblasti, ktorého odozva je zobrazená na Obr. 16.5,

$$x(t) = 1.6667 - 0.2977e^{-7.4204t} - 1.369e^{-1.2898t}\cos(8.899 \cdot t) - 0.4466\,e^{-1.2898t}\sin(8.899 \cdot t) \ . \qquad (16.34)$$

Riešenie odozvy systému možno aj v tomto prípade vypočítať použitím príkazu **step**, definovaním týchto príkazov.

```
clc
clear
num=[10 100];
den=[1 10 100 600];
sys=tf(num, den); %Prenosová funkcia
[y, t]=step(10*sys);
figure(1)
plot(t,y,'r','LineWidth',2)
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



Obr. 16.5. Riešenie odozvy systému y [m]

Vypočítajme a porovnajme ďalej riešenia **y(t)** s odozvou **x(t)** na jednom grafe. Obraz odozvy **Y(s)** možno určiť na základe predchádzajúcej odozvy **X(s)** a to týmto spôsobom

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_2}{b_2 s + k_2} \,,$$
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_2 s + k_2}{m b_2 s^3 + m k_2 s^2 + (k_1 + k_2) b_2 s + k_1 k_2} \,. \qquad (16.35)$$

Potom prenosová funkcia pre odozvu **Y(s)** je definovaná ako

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{k_2}{m b_2 s^3 + m k_2 s^2 + (k_1 + k_2) b_2 s + k_1 k_2} \,, \qquad (16.36)$$

dosadením za parametre systému, potom platí, že

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{0.4s + 4}{0.04s^3 + 0.4s^2 + 4s + 24} = \frac{10s + 100}{s^3 + 10s^2 + 100s + 600} \qquad (16.37)$$

a

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{4}{0.04s^3 + 0.4s^2 + 4s + 24} = \frac{100}{s^3 + 10s^2 + 100s + 600} \,. \qquad (16.38)$$

Keďže sila **F(t)** je veľkosti **10 N**, potom môžeme silu **F** definovať na základe jednotkového skokového signálu ako $\mathbf{F(t) = 10 \cdot u(t)}$, kde **u(t)** je jednotkový skok s amplitúdou **1 N**.

Predchádzajúce rovnice možno prepísať do tohto tvaru

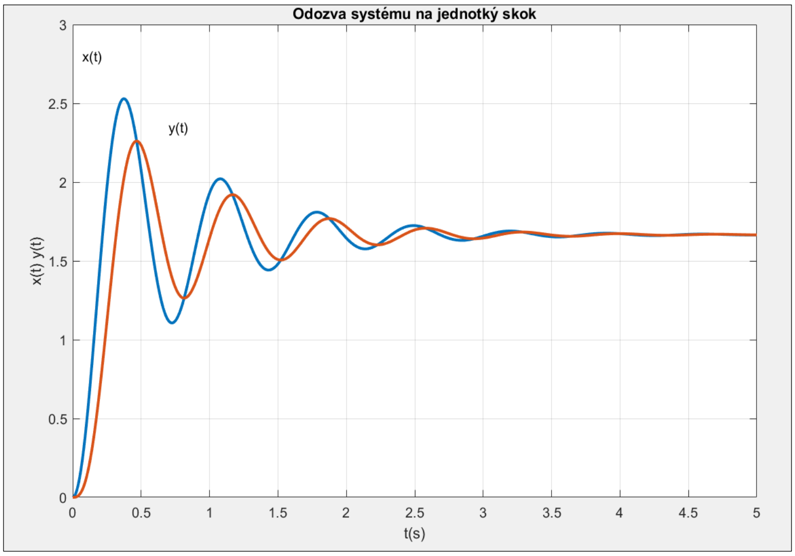
$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{100s + 1000}{s^3 + 10s^2 + 100s + 600} \tag{16.39}$$

a

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1000}{s^3 + 10s^2 + 100s + 600}\ . \tag{16.40}$$

Riešenie porovnania odozvy pre **x(t)** a **y(t)** vykonáme na základe nasledovného skriptu v Matlabe. Riešenie odozvy je znázornené na Obr. 16.16.

```
clc
clear

t=0:0.01:5;
den=[1 10 100 600];
sys1=tf([100 1000],den); %Prenosová funkcia
sys2=tf([1000],den); %Prenosová funkcia

y1=step(sys1,t); %Prechodová odozva systému
y2=step(sys2,t); %Prechodová odozva systému

figure(1)
plot(t,y1,t,y2,'LineWidth',2);
grid on
title('Odozva systému na jednotkový skok')
xlabel('t(s)')
ylabel('x(t) y(t)')
text(0.07,2.8,'x(t)')
text(0.7,2.35,'y(t)')
```



Obr. 16.6. Odozva systému x(t) [m] a y(t) [m]

16.2 ANALÝZA ODOZVY SYSTÉMU NA ĽUBOVOĽNÝ SIGNÁL

V tejto kapitole sa budeme venovať vyšetrovaniu odozvy dynamických systémov pri uvažovaní ľubovoľného typu budiaceho signálu $\mathbf{u(t)}$, ktorý predstavuje časovo závislú funkciu $\mathbf{u(t)}$. V prípade, že uvažujeme skúmať odozvu systému na **ľubovoľný vstupný signál**, napr. na odozvu funkcie **sin**, **cos** a pod., je nutné celú diferenciálnu rovnicu previesť na **Laplaceov tvar** a to s uvažovaním pravej strany diferenciálnej rovnice a budiacej funkcie $\mathbf{u(t)}$, ktorú je nutné previesť na Laplaceov obraz **U(s)**. Toto v prípade hľadania prenosovej funkcie odozvy môže byť mnohokrát zdĺhavý proces.

Program Matlab v tomto prípade vyšetrovania odozvy poskytuje oveľa rýchlejší spôsob pre dynamické systémy a to bez nutnosti hľadania analytického riešenia prenosovej funkcie jej rozkladom na parciálne zlomky. Ako už vieme, tak v Matlabe existujú príkazy, ktoré umožňujú vyšetriť odozvu napr. na **jednotkový skok** (použitím príkaz **step**) alebo vyšetriť impulznú odozvu systému (použitím príkazu **impulse**).

Matlab okrem iného poskytuje aj príkaz **lsim**, ktorý vypočíta odozvu lineárneho časovo-invariantného systému na ľubovoľný definovaný vstupný signál $\mathbf{u(t)}$.

Syntax príkazu **lsim** má mnohé možné variácie použitia, podobne ako príkaz **step**, navyše v prípade tohoto príkazu možno uvažovať vektor počiatočných podmienok **x0**. Príkaz **lsim** možno zadefinovať v týchto modifikáciách:

$\mathbf{lsim(sys, u, t)}$ – vypočíta odozvu systému na signál definovaný vo vektore $\mathbf{u(t)}$,

$\mathbf{lsim(num, den, u, t)}$ – modifikácia predchádzajúceho príkazu,

$\mathbf{y = lsim(sys, u, t)}$ / $\mathbf{y = lsim(num, den, u, t)}$ – modifikácia predchádzajúceho príkazu s uchovaním odozvy do premennej **y(t)**,

$\mathbf{[y, t] = lsim(sys, u, t)/[y, t] = lsim(num, den, u, t)}$ – uloženie odozvy $\mathbf{y(t)}$ a časového vektora do premennej **t**,

$\mathbf{lsim(sys1, sy2, \dots, u, t)}$ – porovnanie viacerých riešení systémov na jednom grafe,

$\mathbf{lsim(sys, \dots, u, t,\ x_0)}$ – výpočet odozvy systému s uvažovaním počiatočných podmienok $\mathbf{x_0}$.

Nasledujúci príklad použitia príkazu **lsim**, vykreslí odozvu systému na vstupný signál jednotkovej lineárne rastúcej funkcie (tzv. **ramp** funkcie), kde $\mathbf{u = t}$.

$$\mathrm{lsim(sys, u, t)}\ . \tag{16.41}$$

Príklad č. 16.3:

Predpokladajme mechanický systém, ktorý pozostáva z hmoty kmitajúcej na nehmotnom vozíku z predchádzajúceho príkladu, ktorý je zobrazený na Obr. 16.2. Pre tento systém sme odvodili prenosovú funkciu v tvare

$$G(s) = \frac{20s + 100}{10s^2 + 20s + 100}. \quad (16.42)$$

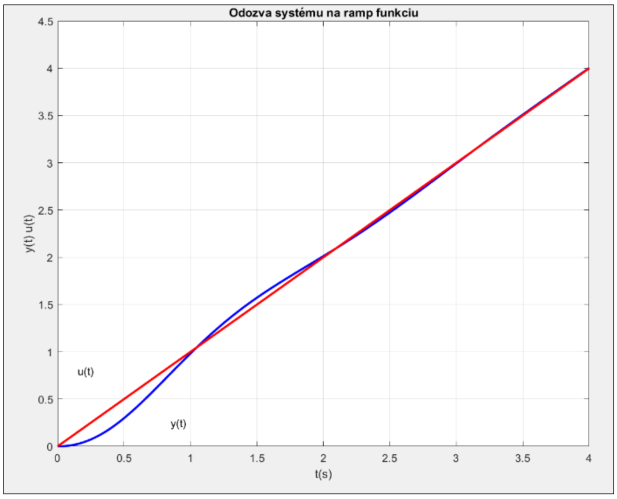
Predpokladajme, že vstupné veličiny sú **m = 10 kg**, **b = 20 N.s.m^{-1}**, **k = 100 N.m^{-1}** a nech budiaca funkcia **u(t)** je v tomto prípade lineárne rastúcou funkciou v čase t. j. $\mathbf{u(t) = \alpha \cdot t}$, kde $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$. Vyšetrite odozvu systému s prenosovou funkciou **G(s)** na takýto typ vstupného signálu.

Prenosová funkcia systému z predchádzajúceho príkladu bola

$$G(s) = \frac{2s + 10}{s^2 + 2s + 10}. \quad (16.43)$$

Použitím ďalších Matlabovských príkazov vyšetríme odozvu tohto systému na **ramp** funkciu **u(t)**, ktorej riešenie je zobrazené na Obr. 16.17.

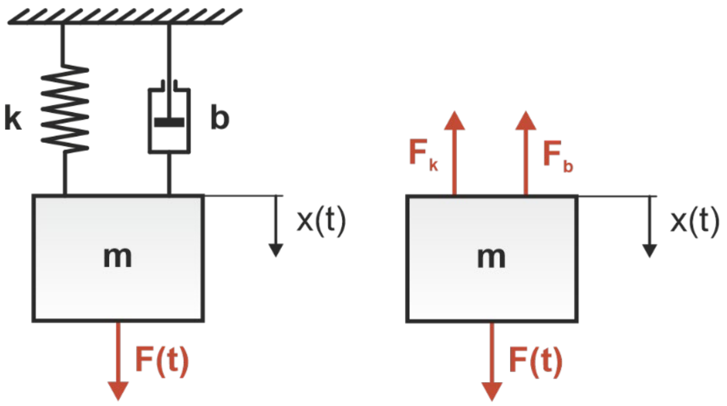
```
clc
clear

num=[2 10];
den=[1 2 10];
sys=tf(num, den);
t=0:0.01:4; % Čas simulácie
u=t;

y=lsim(sys, u, t); %Prechodová odozva
systému

figure(1)
plot(t,y,'b',t,u,'r','LineWidth',2);
grid on
title('Odozva systému na ramp funkciu')
xlabel('t(s)')
ylabel('y(t) u(t)')
text(0.85,0.25,'y(t)')
text(0.15,0.8,'u(t)')
```



Obr. 16.7. Odozva systému y(t) [m] na funkciu u(t)=t

Príklad č. 16.4:

Jednoduchý kmitajúci mechanický systém, pre ktorý uvažujeme parametre systému **m = 1 kg**, **b= 3 N.s.m^{-1}** a **k = 2 N.m^{-1}** je zobrazený na Obr. 16.18. Predpokladajme, že posunutie hmoty **x(t)** je merané od rovnovážnej polohy a v čase **t = 0** je hmota **m** natiahnutá smerom dole tak, že $\mathbf{x(0) = 0.1}$ **m** a $\mathbf{\dot{x}(0) = 0.05}$ **m.s^{-1}**.



Obr. 16.8. Mechanický systém hmota-pružina-tlmič

Určte pohyb hmoty v prvom prípade, že neuvažujeme budiacu silu **F(t)** , ale uvažujeme len počiatočné podmienky. V druhom prípade predpokladajte, že na hmotu **m** pôsobí harmonicky budiaca funkcia $\mathbf{F(t) = 2 \cdot cos(3t)}$.

Diferenciálna rovnica systému pre prvý prípad riešenia s uvažovaním počiatočných podmienok má tento tvar

$$\begin{gathered} m\ddot{x} = -F_k - F_b = -kx - b\dot{x} \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \end{gathered} \tag{16.44}$$

a pre druhý prípad bude mať diferenciálna rovnica tvar

$$\begin{gathered} m\ddot{x} = F(t) - F_k - F_b = F(t) - kx - b\dot{x} \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)\,. \end{gathered} \tag{16.45}$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciou** s uvažovaním počiatočných podmienok $\mathbf{x(0) = 0.1}$ **m**, a $\mathbf{\dot{x}(0) = 0.05}$ **m.s^{-1}** pre prvý prípad matematického modelu

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b[sX(s) - x(0)] + kX(s) = 0 \tag{16.46}$$

a podobne pre druhý prípad

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b[sX(s) - x(0)] + kX(s) = F(s) = \frac{2s}{s + 3^2}\,. \tag{16.47}$$

Riešením z prvej rovnice pre odozvu **X(s)** dostávame prenosovú funkciu

$$X(s) = \frac{mx(0)s + m\dot{x}(0) + bx(0)}{ms^2 + bs + k} = \frac{0.1s + 0.35}{s^2 + 3s + 2}, \qquad (16.48)$$

ktorú možno napísať aj ako

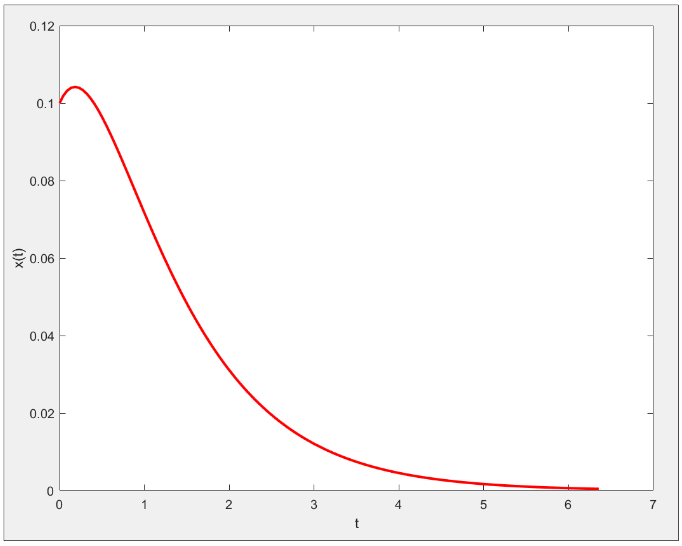
$$X(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s}. \qquad (16.49)$$

Na základe predchádzajúceho prenosovú funkciu **X(s)** systému, keď uvažujeme, že systém je zaťažený jednotkovým skokom **U(s) = 1/s**, potom

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2}\ . \qquad (16.50)$$

Odozvu **X(s)** pre systém matematického modelu prvého prípadu vyriešime nasledujúcim skriptom v Matlabe. Riešenie odozvy je zobrazené na Obr. 16.19.

```
clc
clear

num=[0.1 0.35 0];
den=[1 3 2];
sys=tf(num, den);
[y, t]=step(sys);

figure(1)
plot(t,y,'r','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
```



Obr. 16.9. Riešenie odozvy x(t) systému pre prvý prípad [m]

Ďalej budeme riešiť odozvu diferenciálnej rovnice pre druhý prípad, keď systém je zaťažený harmonickou budiacou funkciou **F(t)**. V tomto prípade musí platiť, že

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)](s^2 + 9) + b[sX(s) - x(0)](s^2 + 9) + k(s^2 + 9)X(s) = 2s\ . \qquad (16.51)$$

Postupnými matematickými úpravami možno dospieť k tejto rovnici

$$
\begin{aligned}
m[s^4X(s) + 9s^2X(s) - s^3 \cdot x(0) - 9s \cdot x(0) - s^2 \cdot \dot{x}(0) - 9 \cdot \dot{x}(0)]& \\
+ b[s^3X(s) + 9sX(s) - s^2 \cdot x(0) - 9 \cdot x(0)] + ks^2X(s) + 9kX(s)& \\
= 2s\,,&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[ms^4 + 9ms^2 + bs^3 + 9bs + ks^2 + 9k]X(s)& \\
= 2s + m[s^3x(0) + 9s \cdot x(0) + s^2 \cdot \dot{x}(0) + 9 \cdot \dot{x}(0)]& \\
+ b[s^2 \cdot x(0) + 9 \cdot x(0)]\,,&
\end{aligned}
\tag{16.52}
$$

z ktorej vyjadríme výslednú odozvu systému **X(s)** v tvare

$$
X(s) = \frac{2s + m[s^3 \cdot x(0) + 9s \cdot x(0) + s^2\dot{x}(0) + 9 \cdot \dot{x}(0)] + b[s^2 \cdot x(0) + 9 \cdot x(0)]}{ms^4 + 9ms^2 + bs^3 + 9bs + ks^2 + 9k}\,. \tag{16.53}
$$

Dosadením za parametre systému dostávame prenosovú funkciu pre **prípad č. 2**

$$
X(s) = \frac{0.1s^3 + 0.35s^2 + 2.9s + 1.35}{s^4 + 3s^3 + 11s^2 + 27s + 18}\,. \tag{16.54}
$$

Túto prenosovú funkciu **X(s)** možno napísať takisto v upravenom tvare ako

$$
X(s) = \frac{0.1s^4 + 0.35s^3 + 2.9s^2 + 1.35s}{s^4 + 3s^3 + 11s^2 + 27s + 18} \cdot \frac{1}{s}\,. \tag{16.55}
$$

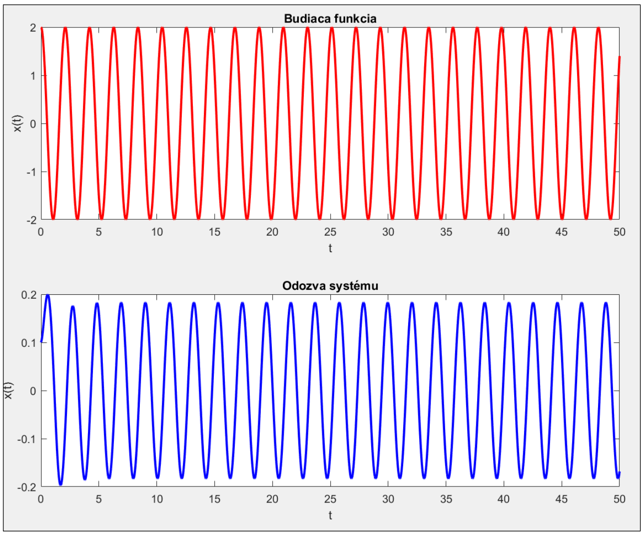
Z čoho analogicky vyplýva prenosová funkcia systému **G(s)**, ktorú možno použiť na riešenie skokovej odozvy prostredníctvom príkazu **step** v Matlabe

$$
G(s) = \frac{0.1s^4 + 0.35s^3 + 2.9s^2 + 1.35s}{s^4 + 3s^3 + 11s^2 + 27s + 18}\,. \tag{16.56}
$$

Riešenie odozvy systému **pre prípad č. 2**, pre systém budený harmonickou funkciou **F(t)**, možno vypočítať nasledujúcim skriptom. Potom riešenie odozvy je znázornené na Obr. 16.10.

```
num=[0.1 0.35 2.9 1.35 0];
den=[1 3 11 27 18];
sys=tf(num,den);
t=0:0.01:50;
u=2*cos(3*t);

subplot(2,1,1)
title('Budiaca funkcia systému
plot(t,u,'r')
xlabel('t')
ylabel('F(t)')
subplot(2,1,2)
step(sys,t)
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
```

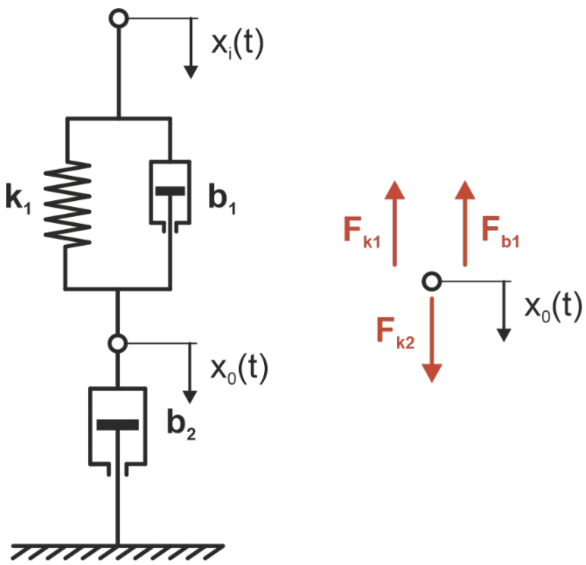
```
clc
clear

num=[0.1 0.35 0];
den=[1 3 2];
sys=tf(num, den);
[y, t]=step(sys);

figure(1)
plot(t,y,'r','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('x(t)')
```



Obr. 16.10. Riešenie x(t) [m] pre budiacu silu F(t)

Príklad č. 16.5:

Bezhmotný kmitajúci mechanický systém je zobrazený na Obr. 16.11. Posunutia $\mathbf{x_i}$ a $\mathbf{x_0}$ sú merané z rovnovážnej polohy. Odvoďte prenosovú funkciu systému, ak $\mathbf{x_i}$ je vstup a $\mathbf{x_0}$ je výstup systému. Vypočítajte odozvu $\mathbf{x_0(t)}$ na jednotkový skok $\mathbf{x_i}$, ak predpokladáme, že v čase $\mathbf{t = 0}$ bola poloha $\mathbf{x_0(0) = 0}$.



Obr. 16.11. Mechanický systém

Diferenciálna rovnica opisujúca správanie sa pohybu daného systému je definovaná v tomto tvare

$$\mathrm{F_{b2} - F_{b1} - F_{k1} = 0\,.} \tag{16.57}$$

Dosadením za zložkové sily do predchádzajúcej rovnice platí, že

$$b_2(-\dot{x}_0 + 0) - b_1(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) - k_1(x_0 - x_i) = 0\,. \tag{16.58}$$

Potom po matematickej úprave dostávame

$$b_1(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) + k_1(x_i - x_0) = b_2\dot{x}_0\,. \tag{16.59}$$

Preveďme túto rovnicu do **Laplaceoveho tvaru** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{x_0(0) = x_1(0) = 0}$

$$[b_1 s + k_1]X_i(s) = (b_2 s + b_1 s + k_1)X_0(s)\,. \tag{16.60}$$

To znamená, že prenosová funkcia systému $\mathbf{G(s)}$ bude mať tvar

$$G(s) = \frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{b_1 s + k_1}{b_2 s + b_1 s + k_1}\,. \tag{16.61}$$

Odozvu $\mathbf{x_0(t)}$, v prípade, že $\mathbf{x_i(t)}$ je skokový signál posunutia získame z predchádzajúcej rovnice a to vyjadrením $\mathbf{X_0(s)}$ v tvare

$$X_0(s) = G(s)X_i(s) = \frac{b_1 s + k_1}{b_2 s + b_1 s + k_1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s}\cdot\frac{b_1 s + k_1}{(b_2 + b_1)s + k_1}\,. \tag{16.62}$$

Rozkladom na parciálne zlomky možno predchádzajúcu prenosovú funkciu $\mathbf{X_0(s)}$ previesť na tento tvar

$$\begin{gathered} X_0(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(b_2 + b_1)s + k_1} = \frac{1}{s}\cdot\frac{b_1 s + k_1}{(b_2 + b_1)s + k_1}\,, \\ A[(b_2 + b_1)s + k_1] + Bs = b_1 s + k_1\,, \\ [A(b_2 + b_1) + B]s + Ak_1 = b_1 s + k_1\,. \end{gathered} \tag{16.63}$$

Z porovnania koeficientov pri rovnakých mocninách premennej **s** možno získať systém dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych, z ktorého možno vypočítať koeficienty **A** a **B** ako

$$\begin{gathered} A(b_2 + b_1) + B = b_1 \Longrightarrow B = -b_2\,, \\ Ak_1 = k_1 \Longrightarrow A = 1\,. \end{gathered} \tag{16.64}$$

Potom hľadaná odozva systému $\mathbf{X_0(s)}$ v **Laplaceovom tvare** je definovaná prenosovou funkciou v tvare

$$X_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{b_2}{b_2 + b_1} \frac{1}{s + k_1/(b_2 + b_1)} \,. \qquad (16.65)$$

Následne aplikovaním **inverznej Laplaceovej transformácie** na predchádzajúci tvar prenosovej funkcie $\mathbf{X_0(s)}$ dostávame

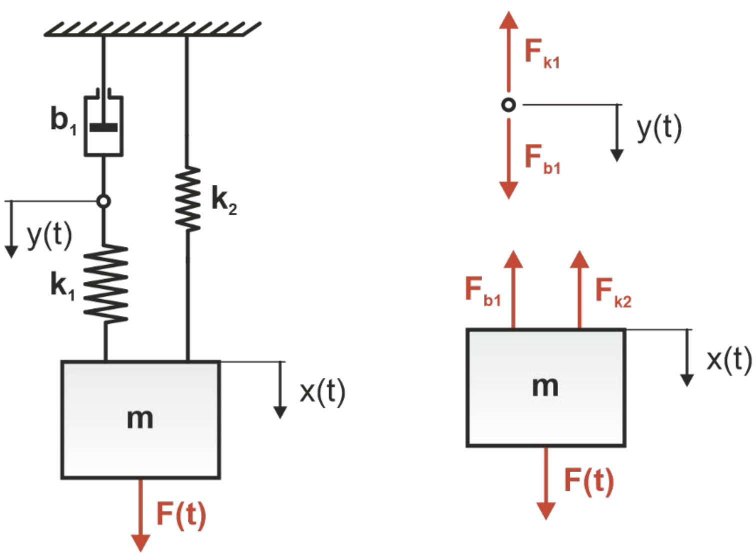
$$x_0(t) = 1 - \frac{b_2}{b_2 + b_1} e^{-\frac{k_1 t}{(b_2+b_1)}} \,. \qquad (16.66)$$

Poznamenajme, že v čase **t = 0** možno odozvu systému vypočítať ako

$$x_0(0) = 1 - \frac{b_2}{b_2 + b_1} = \frac{b_2 + b_1 - b_2}{b_2 + b_1} = \frac{b_1}{b_2 + b_1} \,. \qquad (16.67)$$

Príklad č. 16.6:

Určte prenosovú funkciu **X(s)/F(s)** pre mechanický systém zobrazený na Obr. 16.12, ktorý je zaťažený silou **F(t)**. Sila sa mení skokovo z nuly na hodnotu **200 N**. Posunutie $\mathbf{x(t)}$ meriame od rovnovážnej polohy. Pre výpočet predpokladáme tieto parametre systému **m = 10 kg,** $\mathbf{b_1 = 5\ N.s.m^{-1}}$**,** $\mathbf{k_1 = 15\ N.m^{-1}}$**,** $\mathbf{k_2 = 10\ N.m^{-1}}$.



Obr. 16.12. Mechanický systém

Diferenciálne rovnice matematického modelu sú dané ako

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_{b1} - F_{k2} + F(t)\,, \\ 0 &= F_{b1} - F_{k1}\,. \end{aligned} \qquad (16.68)$$

Dosadením zložkových rovníc do sústavy diferenciálnych rovníc pre tento systém dostávame

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -b_1(\dot{x} - \dot{y}) - k_2(x - 0) + F(t)\,, \\ 0 &= b_1(\dot{x} - \dot{y}) - k_1(y - 0) \end{aligned} \qquad (16.69)$$

a ďalšími matematickými úpravami možno dospieť k systému diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b_1(\dot{x} - \dot{y}) + k_2 x &= F(t), \\ b_1(\dot{x} - \dot{y}) &= k_1 y\,. \end{aligned} \qquad (16.70)$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciou** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a dostávame

$$\begin{aligned} ms^2X(s) + b_1sX(s) - b_1sY(s) + k_2X(s) &= F(s), \\ b_1sX(s) - b_1sY(s) &= k_1Y(s). \end{aligned} \qquad (16.71)$$

Vyjadrením **Y(s)** z druhej rovnice platí, že

$$Y(s) = \frac{b_1 s}{b_1 s + k_1} X(s), \qquad (16.72)$$

ak teraz dosadíme za **Y(s)** do prvej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} (ms^2 + b_1s + k_2)X(s) - \frac{b_1^2 s^2}{b_1 s + k_1} X(s) &= F(s), \\ [(ms^2 + b_1s + k_2)(b_1s + k_1) - b_1^2 s^2]X(s) &= (b_1s + k_1)F(s). \end{aligned} \qquad (16.73)$$

Z čoho vyplýva prenosová funkcia **G(s)** systému v tvare

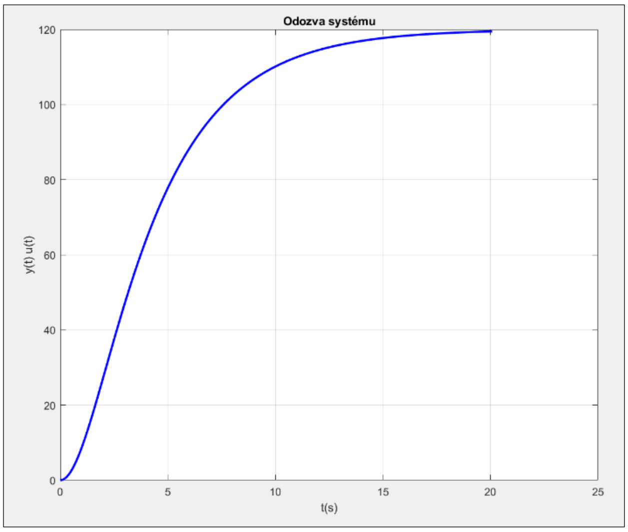
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_1 s + k_1}{mb_1s^3 + mk_1s^2 + b_1(k_1 + k_2)s + k_1k_2}\,. \qquad (16.74)$$

Dosadením vstupných parametrov do prenosovej funkcie dostávame

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{5s + 15}{50s^3 + 150s^2 + 125s + 25} = \frac{s + 3}{10s^3 + 30s^2 + 25s + 5}. \tag{16.75}$$

Odozvu systému **X(s)** pre jednotkovú silu **F(t) = 200 N** možno vypočítať použitím nasledujúceho skriptu v Matlabe, ktorej priebeh je znázornený na Obr. 16.13.

```
clc
clear

num=[1 3];
den=[10 30 25 5];
sys=tf(num, den);
[y, t]=step(200*sys);

figure(1)
plot(t,y,'b','LineWidth',2);
grid on
title('Odozva systému')
xlabel('t(s)')
ylabel('y(t) u(t)')
```

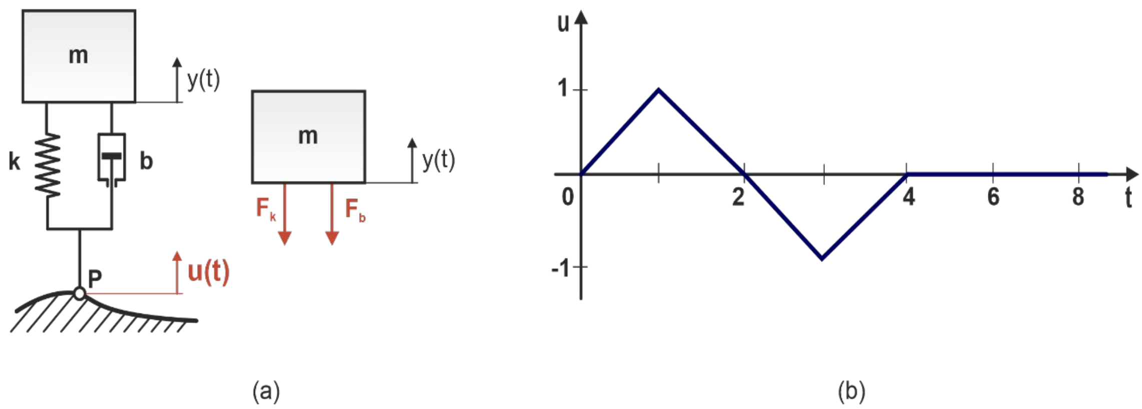


Obr. 16.13. Odozva systému

Príklad č. 16.7:

Predpokladajme, že poznáme prenosovú funkciu **G(s)** kmitajúceho mechanického systému, ktorý predstavuje **štvrtinový model automobilu** podľa Obr. 16.14 (a)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}. \tag{16.76}$$



Obr. 16.14. (a) Mechanický systém, (b) vstupný signál u(t) [m]

Určte odozvu systému **y(t)** hmoty **m**, ak poznáme vstupné parametre daného systému **m = 100 kg**, **b = 400 N.s.m^{-1}**, a **k = 800 N.m^{-1}**. Vstupný signál **u(t)** je definovaný trojuholníkovým signálom podľa Obr. 16.14 (b).

Ak vieme, že pre daný systém platí prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ v nasledujúcom tvare, potom po dosadení vstupných parametrov musí platiť, že

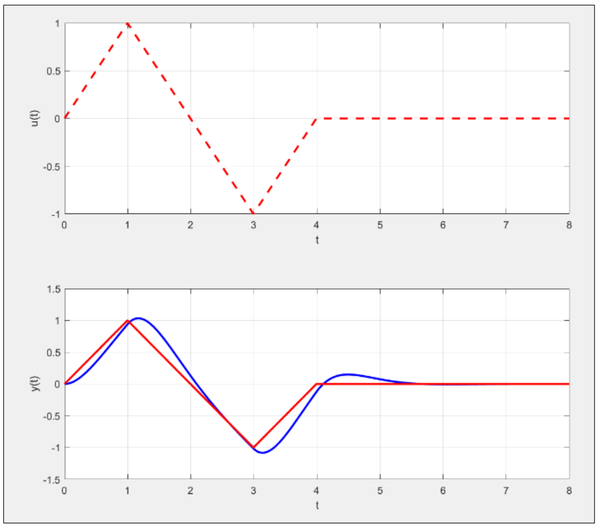
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k} = \frac{400s + 800}{100s^2 + 400s + 800} = \frac{4s + 8}{s^2 + 4s + 8} \,. \tag{16.77}$$

Keďže v tomto prípade je vstup **u(t)** daný signálom podľa Obr. 16.14 (b) a tento signál nie je jednoduchým signálom, je nutné predtým, než vyšetríme odozvu daného systému opísať takýto zložitý signál jednoduchými funkciami pre celú časovú oblasť **t**. V Matlabe je potom možné namodelovať daný signál na základe zadefinovania čiastkových vektorov, ktoré definujú jednotlivé úseky vstupnej funkcie podľa Obr. 16.14 (b). Pre náš prípad v Matlabe možno použiť nasledujúci skript, ktorý vytvorí budiaci signál funkciu $\mathbf{u(t)}$.

```
u1=[0:0.02:1];
u2=[1:-0.02:-1];
u3=[-1:0.02:0];
u4=0*[4:0.02:8];
u=[u1 u2 u3 u4];
```

Po zadefinovaní vstupného signálu $\mathbf{u(t)}$ možno pristúpiť k vytvoreniu skriptu v Matlabe na výpočet hľadanej odozvy systému $\mathbf{y(t)}$. V nasledujúcom skripte bol na výpočet odozvy použitý práve príkaz **lsim**. Odozva riešenia je znázornená na Obr. 16.15.

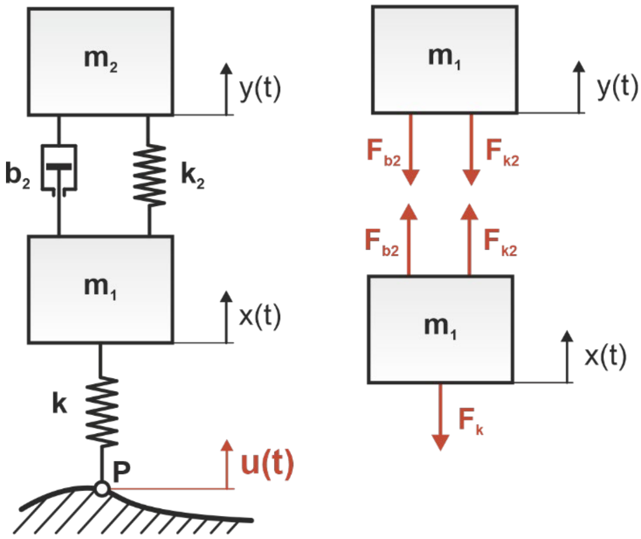
```
u1=[0:0.02:0.98];
u2=[1:-0.02:-0.98];
u3=[-1:0.02:0];
u4=0*[4:0.02:8];
u=[u1 u2 u3 u4];
t=linspace(0,8,length(u));
sys=tf([4 8],[1 4 8]); %Prenosová funkcia
y=lsim(sys, u, t);

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t, u,'--r','LineWidth',2);
grid on
xlabel('t'); ylabel('u(t)')
subplot(2,1,2)
plot(t,y,'-',t,u,'r','LineWidth',2);
grid on
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
```



Obr. 16.15. Odozva systému y(t) [m] na vstup u(t) [m]

Príklad č. 16.8:

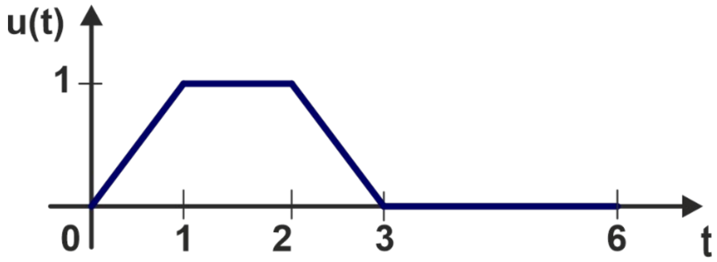
Určte prenosovú funkciu $\mathbf{Y(s)/U(s)}$ mechanického systému zobrazeného na Obr. 16.16. Vstupom do systému je vertikálne posunutie dané budiacou funkciou **u(t)** v bode **P**. Podobným spôsobom ako v prechádzajúcom príklade je tento model príkladom zjednodušenej verzie **pružno-tlmiaceho systému automobilu** alebo **motocyklu**.



Obr. 16.16. Mechanický systém systému pruženia

Veličiny $\mathbf{m_1}$ a $\mathbf{k_1}$ na Obr. 16.16, predstavujú **hmotu podvozku** a **tuhosť pneumatiky**. Predpokladajme, že posunutia **x** a **y** sú merané od rovnovážnej polohy bez absencie vstupu $\mathbf{u(t)}$.

Ďalej predpokladajme, že parametre systému sú $\mathbf{m_1 = 50\,kg}$, $\mathbf{k_1 = 5000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{m_2 = 200\,kg}$, $\mathbf{k_2 = 1200\,N.m^{-1}}$ a $\mathbf{b_2 = 700\,N.s.m^{-11}}$. Ak vieme, že vstupný signál $\mathbf{u(t)}$ má tvar podľa Obr. 16.17, vypočítajte a zobrazte odozvu takéhoto mechanického systému.



Obr. 16.17. Vstup u(t) [m]– prejazd cez spomaľovač

Matematický model, ktorý opisuje správanie sa daného **pružno-tlmiaceho systému automobilu** zobrazeného na Obr. 16.16, ktorý je budený kinematickým budením funkciu **u(t)**, je definovaný systémom dvoch diferenciálnych rovníc v tomto tvare

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= F_{b2} + F_{k2} - F_{k1}\,, \\ m_2\ddot{y} &= -F_{b2} - F_{k2}\,. \end{aligned} \qquad (16.78)$$

Po dosadení zložkových rovníc do **sústavy diferenciálnych rovníc** dostávame tento tvar matematického modelu

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= b_2(\dot{y} - \dot{x}) + k_2(y - x) - k_1(x - u)\,, \\ m_2\ddot{y} &= -b_2(\dot{y} - \dot{x}) - k_2(y - x)\,, \end{aligned} \qquad (16.79)$$

ktorý po vykonaní matematických úprav prejde do tvaru

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} + b_2\dot{x} + (k_1 + k_2)x &= b_2\dot{y} + k_2 y + k_1 u\,, \\ m_2\ddot{y} + b_2\dot{y} + k_2 y &= b_2\dot{x} + k_2 x\,. \end{aligned} \qquad (16.80)$$

Vykonajme **Laplaceovou transformáciou** za predpokladu nulových počiatočných podmienok a dostávame

$$\begin{aligned} [m_1 s^2 + b_2 s + (k_1 + k_2)]X(s) &= (b_2 s + k_2)Y(s) + k_1 U(s)\,, \\ (m_2 s^2 + b_2 s + k_2)Y(s) &= (b_2 s + k_2)X(s)\,, \end{aligned} \qquad (16.81)$$

potom vyjadrením **X(s)** z druhej rovnice dostávame

$$X(s)=\frac{m_2s^2+b_2s+k_2}{b_2s+k_2}Y(s)\,. \tag{16.82}$$

Ak teraz dosadíme odvodený výraz za **X(s)** do prvej diferenciálnej rovnice systému musí platiť, že

$$[m_1s^2+b_2s+(k_1+k_2)]\frac{(m_2s^2+b_2s+k_2)}{b_2s+k_2}Y(s)=(b_2s+k_2)Y(s)+k_1U(s)\,. \tag{16.83}$$

Potom, postupnými matematickými úpravami možno dospieť k tejto rovnici

$$\begin{gathered}[m_1s^2+b_2s+(k_1+k_2)](m_2s^2+b_2s+k_2)Y(s)\\ =(b_2s+k_2)^2Y(s)+k_1(b_2s+k_2)U(s)\,,\\ \left[m_1m_2s^4+(m_1+m_2)b_2s^3+\left(k_1m_2+k_2(m_1+m_2)\right)s^2+k_1b_2s+k_1k_2\right]Y(s)\\ =k_1(b_2s+k_2)U(s)\,.\end{gathered} \tag{16.84}$$

To znamená, že hľadaná prenosová funkcia systému $\mathbf{G(s)}$ bude mať výsledný tvar

$$\begin{gathered}G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\\ =\frac{k_1(b_2s+k_2)}{m_1m_2s^4+(m_1+m_2)b_2s^3+\left(k_1m_2+k_2(m_1+m_2)\right)s^2+k_1b_2s+k_1k_2}\,.\end{gathered} \tag{16.85}$$

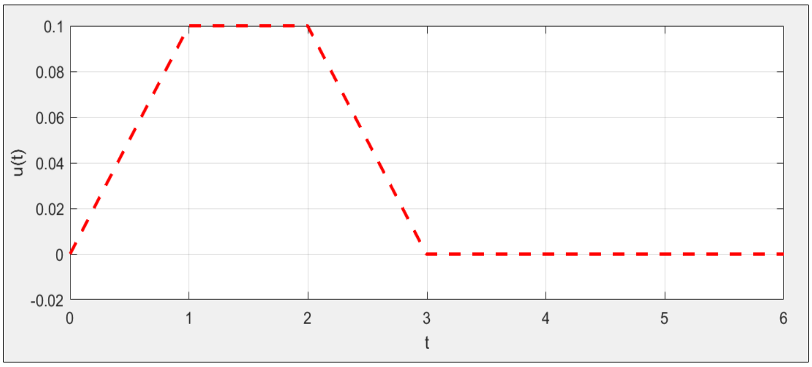
Ak teraz dosadíme do prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$ vstupné parametre dostávame funkciu

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3.5.10^6s+6.10^6}{1.10^4s^4+175.10^3s^3+1.3.10^6s^2+3.5.10^6s+6.10^6}\,. \tag{16.86}$$

Keďže vstupom **u(t)** je daný signál podľa Obr. 16.18, je nutné aj v tomto prípade pre tento signál identifikovať matematické funkcie, ktorými možno daný signál opísať na čiastkových časových úsekoch. Tento vstupný signál možno v Matlabe modelovať na základe vektorov zadefinovaných v tomto skripte.

```
u1=0.1*[0:0.01:0.99]; %y=0.1*t
u2=0*[1:0.01:1.99]+0.1;
u3=-0.1*[2:0.01:3]+0.3; %y=-0.1*t+0.3
u4=0*[3:0.01:6];
u=[u1 u2 u3 u4];
t=linspace(0,6,length(u));
```

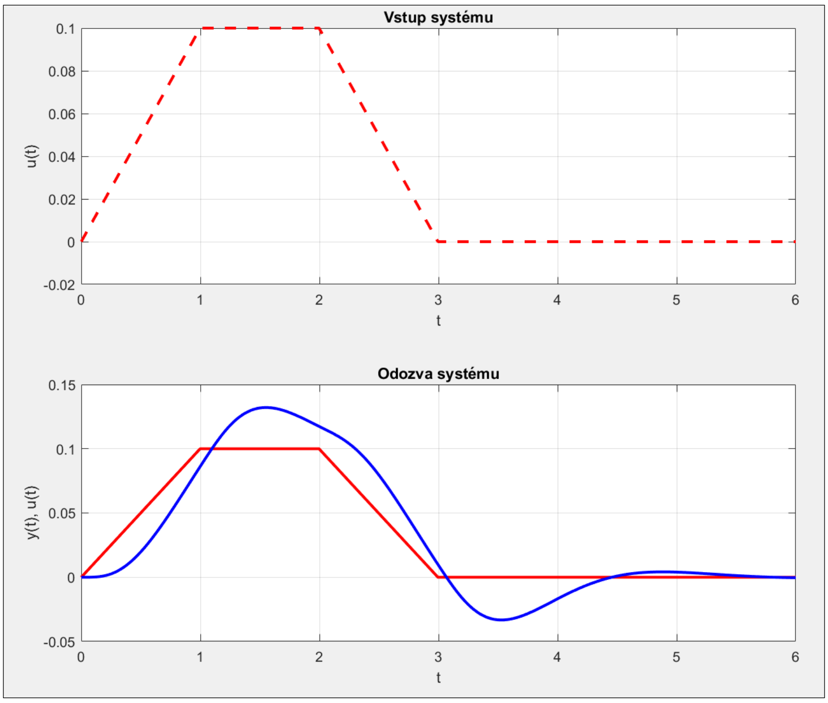
```
figure(1)
plot(t, u,'--r','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t'); ylabel('u(t)')
```



Obr. 16.18. Model vstupu u(t) [m] vykreslený v Matlabe

Výpočet riešenia odozvy systému v Matlabe vykonáme pre všeobecný prípad automobilu s možnosťou zmeny vstupných parametrov. To znamená, že vstupnú prenosovú funkciu zadáme v skripte parametricky a výsledný tvare tejto prenosovej funkcie sa vypočíta zo zadaných vstupných parametrov na začiatku skriptu. Ako vstupný budiaci signál **u(t)** budeme uvažovať signál zadefinovaný v predchádzajúcom skripte Matlabu. Výsledok riešenia odozvy je znázornený na Obr. 16.19.

```
clc
clear
close all

m1=50;
m2=200;
k1=5000;
k2=1200;
b2=700;

num=k1*[b2 k2];
den=[m1*m2 (m1+m2)*b2 k1*m2+k2*(m1+m2) k1*b2
k1*k2];
sys=tf(num, den); %Prenosová funkcia systému

%Vstup systému
u1=0.1*[0:0.01:0.99]; %y=0.1*t
u2=0*[1:0.01:1.99]+0.1;
u3=-0.1*[2:0.01:3]+0.3; %y=-0.1*t+0.3
u4=0*[3:0.01:6];
u=[u1 u2 u3 u4];
t=linspace(0,6,length(u));

y=lsim(sys, u, t); %Riešenie odozvy systému

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t, u,'--r','LineWidth',2)
grid on
title('Vstup systému')
xlabel('t'); ylabel('u(t)')

subplot(2,1,2)
plot(t,u,'r',t,y,'b','LineWidth',2)
grid on
title('Odozva systému')
xlabel('t'); ylabel('y(t), u(t)')
```



Obr. 16.19. Priebeh odozvy systému y(t) [m] na vstup u(t) [m]

16.3 ANALÝZA IMPULZNEJ ODOZVY SYSTÉMU

V prípade dynamických systémov možno takisto vyšetrovať impulznú odozvu systému, kedy vstupným signál je funkcia definovaná v zmysle impulznej funkcie $\mathbf{u(t) = \delta(t)}$. Matlab na vyšetrovanie impulznej odozvy poskytuje vstavaný príkaz **impulse**, ktorý vypočíta impulznú odozvu lineárneho časovo-invariantného systému definovaného prenosovou funkciou $\mathbf{G(s)}$.

Syntax príkazu **impulse** má ako v prípade predchádzajúcich príkazov **step** a **lsim** podobne viaceré variácie použitia. Príkaz **impulse** možno zadefinovať v týchto modifikáciách:

$\mathbf{impulse(sys)}$ – vypočíta a zobrazí impulznú odozvu systému na jednotkový impulz $\mathbf{\delta(t)}$,

$\mathbf{y = impulse(sys)}$ – vypočíta impulznú odozvu systému na jednotkový impulz $\mathbf{\delta(t)}$ a uloží do premennej **y(t)**,

$\mathbf{y = impulse(sys, Tfinal)}$ – vypočíta impulznú odozvu systému na jednotkový impulz $\mathbf{\delta(t)}$ s uchovaním odozvy do premennej **y(t)** po špecifický čas $\mathbf{Tfinal}$,

$\mathbf{y = impulse(sys, T)}$ – vypočíta impulznú odozvu systému na jednotkový impulz $\mathbf{\delta(t)}$ s uchovaním odozvy do premennej **y(t)**, pre zadaný vektor času **T**,

$[\mathbf{y}, \mathbf{t}] = \mathbf{impulse}(\mathbf{sys})$ – vypočíta impulznú odozvu systému a uloží riešenie do premennej **y(t)** spoločne s uchovaním časového vektora **t**,

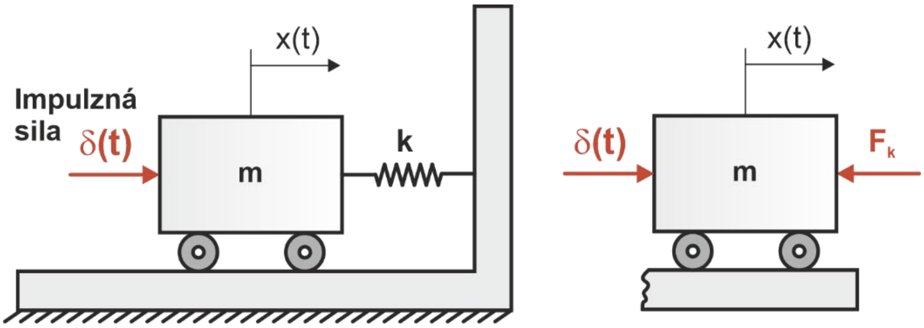
$\mathbf{impulse}(\mathbf{sys1}, \mathbf{sy2}, \dots, \mathbf{t})$ – porovnanie viacerých riešení impulznej odozvy systémov na jednom grafe.

Nasledujúci príklad použitia príkazu **impulse** vykreslí impulznú odozvu systému na vstupný signál jednotkového impulzu po čas **t** = **30 s**

$$\mathrm{lsim}(\mathrm{sys}, 30)\,. \tag{16.87}$$

Príklad č. 16.9:

Mechanický systém zobrazený na Obr. 16.20 možno v počiatočnom štádiu predpokladať ako systém v pokojnom stave. Systém pozostáva z vozíka hmotnosti $\mathbf{m} = \mathbf{5\,kg}$, ktorý je pripojený k základovému rámu prostredníctvom pružiny s tuhosťou $\mathbf{k} = \mathbf{1000\,N.m^{-1}}$. Ak, predpokladáme, že v čase $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ začne na vozík pôsobiť jednotkový impulzom $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{t})$, nájdite riešenie impulznej odozvy takéhoto systému. Akou impulznou silou možno systém zastaviť ?



Obr. 16.20. Mechanický systém vozíka

Ak je hmota **m** uvedená do pohybu impulznou silou, potom rovnica pohybu pre daný systém bude mať tvar

$$m\ddot{x} = \delta(t) - F_k \tag{16.88}$$

a dosadením za komponentu sily $\mathbf{F_k}$, dostávame

$$m\ddot{x} + kx = \delta(t)\,. \tag{16.89}$$

Zadefinujme inú impulznú silu pre zastavenie pohybu a to ako $\mathbf{A\delta(t-T)}$, kde **A** je neznáma amplitúda impulznej sily a $\mathbf{t = T}$ je presne stanovený okamih tohto impulzu. Potom rovnica pohybu pre tento systém nadobudne tvar

$$m\ddot{x} + kx = \delta(t) + A\delta(t-T), \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0\,. \tag{16.90}$$

Laplaceovou transformáciou prevedieme danú rovnicu do **Laplaceovho tvaru** s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{\dot{x}(0) = x(0) = 0}$

$$(ms^2 + k)X(s) = 1 + Ae^{-Ts} \tag{16.91}$$

a vyjadrením odozvy **X(s)** dostávame

$$X(s) = \frac{1}{ms^2+k} + \frac{Ae^{-Ts}}{ms^2+k} = \frac{1}{\sqrt{mk}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2+\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} + \frac{A}{\sqrt{mk}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}\,e^{-Ts}}{s^2+\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}\,. \tag{16.92}$$

Aplikovaním **inverznej Laplaceovej transformácie** možno obraz odozvy pretransformovať do časovej oblasti **t** a nájsť riešenie impulznej odozvy **x(t)**

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{A}{\sqrt{mk}}\cdot\left[\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t-T)\right]1(t-T)\ . \tag{16.93}$$

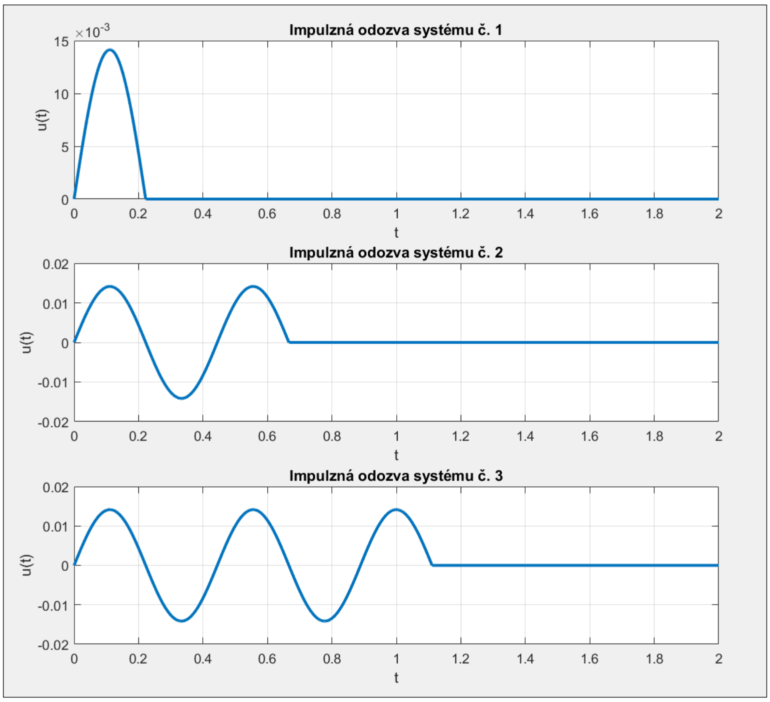
Ak je pohyb hmoty **m** zastavený v čase $\mathbf{t = T}$, potom **x(t)** musí byť identicky nulové pre $\mathbf{t \geq T}$. Podmienku zastavenia môžeme získať pre vybrané časy **T** a amplitúdy **A**

$$A = 1, \qquad T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}, \quad T = \frac{3\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}, \quad T = \frac{5\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}, \quad \ldots\ . \tag{16.94}$$

Riešenie v Matlabe pre uvažované vstupné parametre a tri časy **T** možno riešiť na základe nasledovného skriptu. Priebehy riešenia sú znázornené na Obr. 16.21.

```
clc
clear
close all
k=1000;
m=5;
A=1;
T=pi/(sqrt(k/m));
km=sqrt(k/m);
```

```
s1=1/(sqrt(k*m))*tf(km,[1 0 k/m]);
s2=A/(sqrt(k*m))*tf(km,[1 0 k/m],'InputDelay', T);
s3=A/(sqrt(k*m))*tf(km,[1 0 k/m],'InputDelay', 3*T);
s4=A/(sqrt(k*m))*tf(km,[1 0 k/m],'InputDelay', 5*T);

sys1=s1+s2;
sys2=s1+s3;
sys3=s1+s4;

t=0:0.001:2;
p1=impulse(sys1,t); %Impulzná odozva systému
p2=impulse(sys2,t); %Impulzná odozva systému
p3=impulse(sys3,t); %Impulzná odozva systému

figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(t,p1,'LineWidth',2)
grid on
title('Impulzná odozva systému č. 1')
xlabel('t'); ylabel('u(t)')

subplot(3,1,2)
plot(t,p2,'LineWidth',2)
grid on
title('Impulzná odozva systému č. 2')
xlabel('t'); ylabel('u(t)')

subplot(3,1,3)
plot(t,p3,'LineWidth',2)
grid on
title('Impulzná odozva systému č. 3')
xlabel('t'); ylabel('u(t)')
```

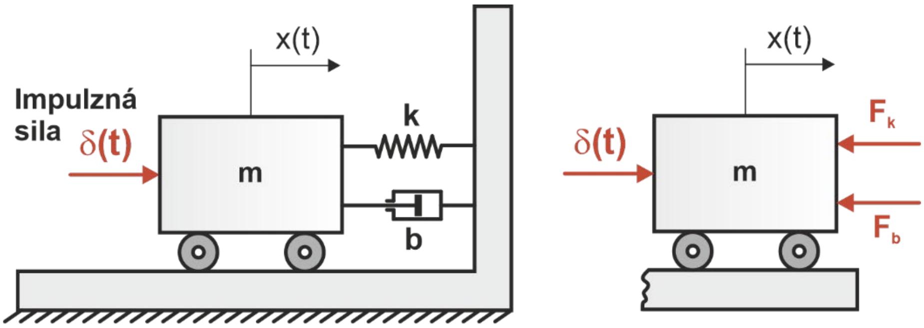


Obr. 16.21. Odozva systému pre rôzne časy T pôsobenia impulznej sily

Príklad č. 16.10:

Mechanický systém zobrazený na Obr. 16.22 je v počiatočnom štádiu v pokoji. Posunutie hmoty **m = 10 kg**, ktorá je pripevnená k pružine **k = 50 N.m⁻¹** a tlmiču **b = 20 N.s.m⁻¹** je meraná od rovnovážnej polohy. V čase **t = 0** je hmota **m** uvedená do pohybu jednotkovou impulznou silou.

Použitím Matlabu vykreslite odozvu daného systému pre systém bez časového oneskorenia a takisto pre systém, ktorý začne reagovať až po čase **T = 10 s**.



Obr. 16.22. Mechanický systém s impulzným vstupom

Diferenciálna rovnica pohybu systému s impulzným jednotkovým vstupom $\boldsymbol{\delta(t)}$ má tvar

$$m\ddot{x} = \delta(t) - F_k - F_b\,, \tag{16.95}$$

potom dosadením za sily $\mathbf{F_k}$ a $\mathbf{F_b}$ dostávame

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \delta(t)\,. \tag{16.96}$$

Laplaceovou transformáciou pri uvažovaní nulových počiatočných podmienok musí platiť, že

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = 1\,. \tag{16.97}$$

To znamená, že impulzná odozva systému na jednotkový impulz pre systém bez časového oneskorenia bude daná prenosovou funkciou

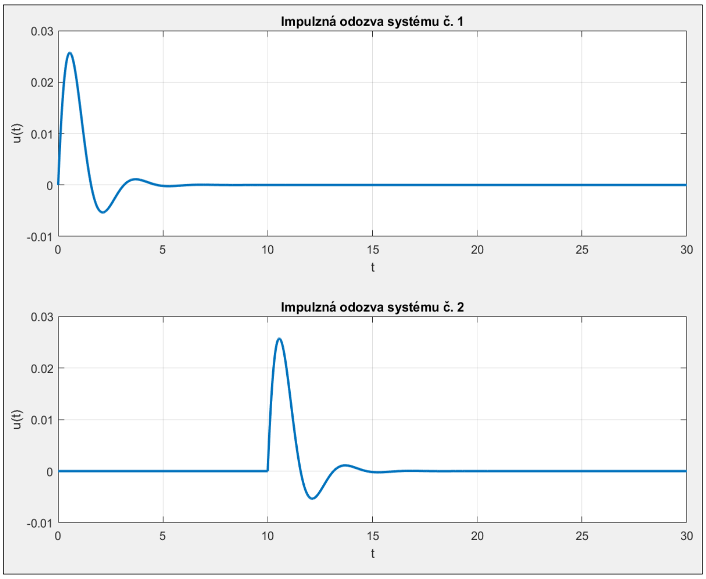
$$G(s) = X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}\,. \tag{16.98}$$

Zatiaľ čo prenosová funkcia pre systém s časovým oneskorením bude mať tento tvar prenosovej funkcie

$$G(s) = X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} e^{-Ts} . \tag{16.99}$$

Pre zadané vstupy **m**, **k**, **b** vyriešime danú odozvu systému v Matlabe použitím nasledujúcich príkazov Matlabu. Na riešenie odozvy použijeme príkaz **impulse**, ktorý rieši impulznú odozvu systému. Riešenie uvažujeme pre čas t do **30 s**. Priebeh riešenia odozvy je zobrazený na Obr. 16.23.

```
clc
clear
close all

k=50;
m=10;
b=20;
T=10;

t=0:0.01:30;
num=[1];
den=[m b k];

sys=tf(num, den); %Prenosová funkcia systému
sysT=tf(num, den, 'InputDelay', T); %Prenosová funkcia systému

p1=impulse(sys, t); %Impulzná odozva systému
p2=impulse(sysT, t); %Impulzná odozva systému

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,p1,'LineWidth',2)
grid on
title('Impulzná odozva systému č. 1')
xlabel('t'); ylabel('u(t)')

subplot(2,1,2)
plot(t,p2,'LineWidth',2)
grid on
title('Impulzná odozva systému č. 2')
xlabel('t'); ylabel('u(t)')
```



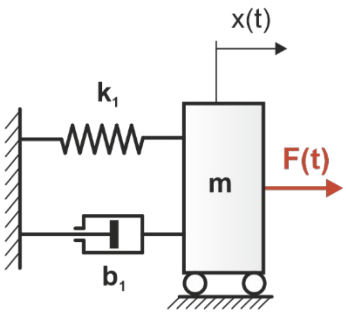
Obr. 16.23. Odozva systému bez oneskorenia a s časovým oneskorením T

Úlohy na riešenie:

Problém 16.1:

Mechanický systém zobrazený na Obr. 16.24 je definovaný známymi parametrami systému $\mathbf{m = 1\,kg}$, $\mathbf{k_1 = 1000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{b_1 = 10\,N.s.m^{-1}}$. Vyriešte odozvu takéhoto systému v Matlabe pre simulačný čas $\mathbf{t} \in \langle \mathbf{0, 30} \rangle\ \mathbf{s}$ a zobrazte na grafe posunutie a rýchlosť hmoty v závislosti od času **t** a to:

a) pre jednotkový skok sily **F = 10 N**,
b) a takisto pre harmonicky meniaci sa signál sily $\mathbf{F = 10\ sin\,\omega t}$, ak frekvencia kmitania je $\mathbf{f = 5\,Hz}$.



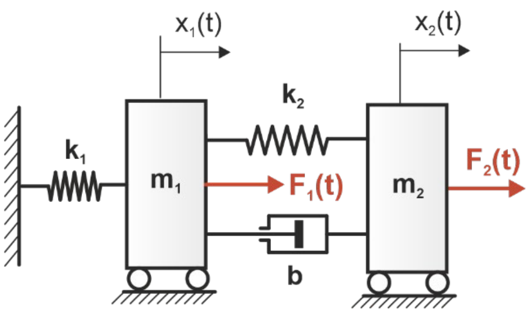
Obr. 16.24. Hmota-pružina-tlmič

Problém 16.2:

Mechanický systém, ktorý predstavuje systém dvoch kmitajúcich hmôt je zobrazený na Obr. 16.25. Parametre systému sú známe, $\mathbf{m_1 = 2\,kg}$, $\mathbf{m_2 = 1.5\,kg}$, $\mathbf{k_1 = 1500\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 1000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{b = 100\,N.s.m^{-1}}$. Vyriešte odozvu takéto systému v Matlabe pre simulačný čas $\mathbf{t} \in \langle \mathbf{0, 50} \rangle\ \mathbf{s}$ s časovým krokom $\mathbf{dt = 0.01\,s}$ a to:

a) ak vieme, že sily $\mathbf{F_1 = 5\,N}$, $\mathbf{F_2 = 15\,N}$ sa menia skokovo,
b) pre harmonicky meniaci sa signál sily $\mathbf{F_1 = 5\ sin\,\omega_1 t}$, $\mathbf{F_2 = 15\ cos\,\omega_2 t}$, ak frekvencie kmitania sú $\mathbf{f_1 = f_2 = 3\,Hz}$.

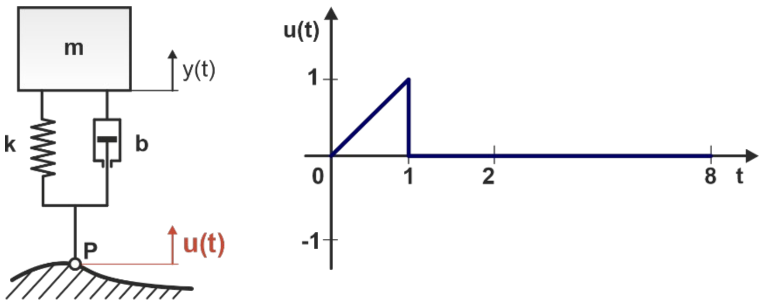
Zobrazte na grafe priebehy posunutí a rýchlosti hmôt v závislosti od času **t**.



Obr. 16.25. Dve kmitajúce hmoty

Problém 16.3:

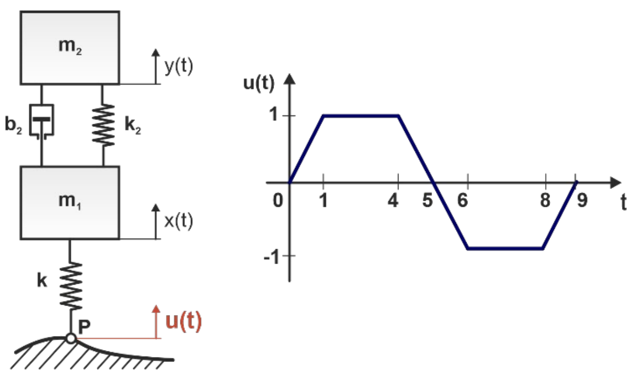
Mechanický systém štvrtinovej časti automobilu podľa Obr. 16.26 je budený zo spodnej časti reliéfom vozovky, pozri Obr. 16.26. Ak poznáme parametre systému $\mathbf{m_1 = 250\,kg}$, $\mathbf{k_1 = 10\,000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{b_1 = 1000\,N.s.m^{-1}}$, vyriešte odozvu systému v Matlabe pre simulačný čas $\mathbf{t \in \langle 0, 8 \rangle\, s}$ a zobrazte na grafe posunutie a rýchlosť hmoty v závislosti od času **t**.



Obr. 16.26. Prejazd automobilu cez nerovnosť

Problém 16.4:

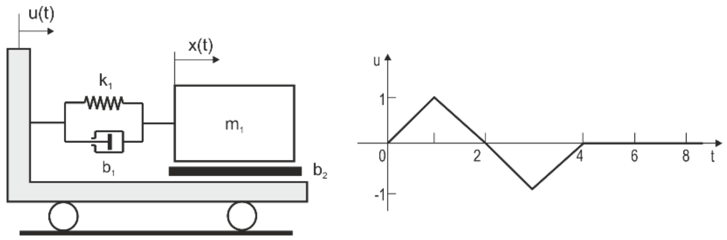
Mechanický systém štvrtinového modelu automobilu je znázornený na Obr. 16.27. Parametre systému sú $\mathbf{m_1 = 230\,kg}$, $\mathbf{m_2 = 35\,kg}$, $\mathbf{k_1 = 15\,000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 6000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{b_1 = 800\,N.s.m^{-1}}$. Vyriešte odozvu takéto systému v Matlabe pre simulačný čas $\mathbf{t \in \langle 0, 10 \rangle\, s}$ s časovým krokom $\mathbf{dt = 0.01\,s}$, ak automobil prekonáva spomaľovač znázornený na Obr. 16.27. Zobrazte na grafoch priebehy posunutí a rýchlostí hmôt v závislosti od času **t**.



Obr. 16.27. Štvrtinový model automobilu pri prejazde cez spomaľovač

Problém 16.5:

Na ďalšom obrázku Obr. 16.28 je znázornený vozík so zanedbateľnou hmotnosťou, na ktorom kmitá hmota $\mathbf{m_1 = 5\,kg}$ na olejovom filme $\mathbf{b_2 = 10\,N.s.m^{-1}}$. Ďalšie pružno-tlmiace charakteristiky systému sú $\mathbf{k_1 = 1000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{b_1 = 750\,N.s.m^{-1}}$. Vyriešte odozvu takéto systému v Matlabe pre simulačný čas $\mathbf{t} \in \langle 0, 8 \rangle\ \mathbf{s}$ s časovým krokom $\mathbf{dt} = \mathbf{0.01\ s}$, ak vieme, že vozík je budený signálom podľa Obr. 16.28. Zobrazte na grafoch priebehy posunutí a rýchlostí hmoty $\mathbf{m_1}$ v závislosti od času **t**.



Obr. 16.28. Vozík s kmitajúcou hmotou

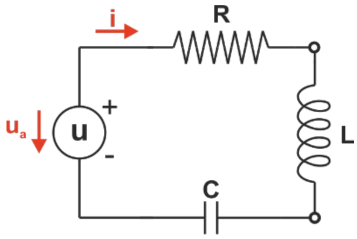
Problém 16.6:

Pre elektrický systém **RLC obvodu**, ktorý je znázornený na Obr. 16.29 poznáme parametre $\mathbf{R = 10\ \Omega, L = 100\ mH,\ C = 150\ \mu F}$. Vyriešte odozvu systému v Matlabe (t. j. napätie na rezistore, cievke a kondenzátore), pre simulačný čas $\mathbf{t} \in \langle 0, 1 \rangle\ \mathbf{s}$ a uvažovaný časový krok $\mathbf{dt} = \mathbf{0.001\ s}$:

a) ak sa napätie na vstupe mení skokovo $\mathbf{u_a = 12\ V}$,

b) a ak sa napätie mení harmonicky $\mathbf{u_a = 12\ \sin \omega t}$ pre uvažovanú frekvenciu kmitania $\mathbf{f = 50\ Hz}$.

Zobrazte na grafe vypočítané odozvy systému v závislosti od času **t**.



Obr. 16.29. Sériový RLC obvod

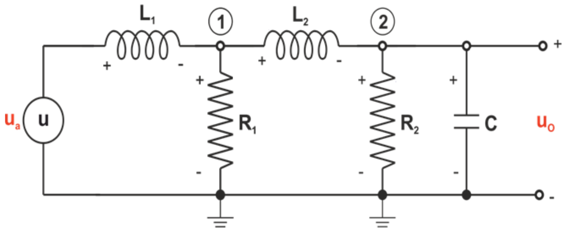
Problém 16.7:

Pre elektrický systém, ktorý zobrazený na nasledujúcom Obr. 16.30 uvažujeme parametre $\mathbf{R_1 = 100\ \Omega,\ R_2 = 150\ \Omega,\ L_1 = 150\ mH,\ L_2 = 200\ mH, C = 250\ \mu F}$. Zobrazte, ako sa mení napätie na kondenzátore pre simulačný čas $\mathbf{t} \in \langle 0, 1 \rangle\ \mathbf{s}$ a uvažovaný časový krok $\mathbf{dt} = \mathbf{0.001\ s}$:

a) ak sa napätie na vstupe mení skokovo $\mathbf{u_a = 24\ V}$,

b) a ak sa napätie mení harmonicky $\mathbf{u_a = 24\ \sin \omega t}$ pre uvažovanú frekvenciu kmitania $\mathbf{f = 50\ Hz}$.

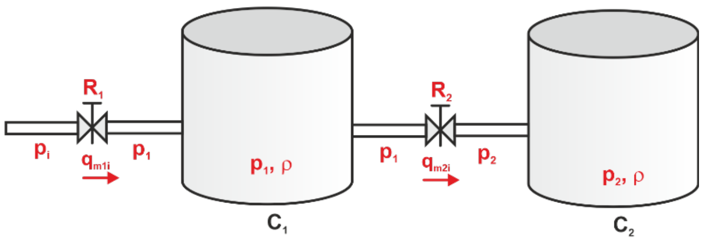
Zobrazte na grafe všetky vypočítané veličiny v závislosti od času **t**.



Obr. 16.30. RLC obvod

Problém 16.8:

Pneumatický systém dvoch tlakových nádob s objemom $\mathbf{V_1 = 12\ m^3}$ a $\mathbf{V_2 = 15\ m^3}$ je plnený vzduchom s hustotou $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1.236\ kg.m^{-3}}$ pri tlaku $\mathbf{p_i = 1\ MPa}$ cez ventil s odporom $\mathbf{R_1 = 1500\ Pa.kg^{-1}.s}$. Proces plnenia možno považovať za izotermický dej. Plyn má možnosť z **nádoby č. 1** prúdiť do **nádoby č. 2** cez ventil s odporom $\mathbf{R_2 = 2500\ Pa.kg^{-1}.s}$, pozri Obr. 16.31. Vypočítajte a zobrazte ako sa mení tlak v jednotlivých nádobách použitím Matlabu pre uvažovaný simulačný čas plnenia $\mathbf{t} \in \langle \mathbf{0, 30} \rangle\ \mathbf{s}$.



Obr. 16.31. Pneumatický systém

Problém 16.9:

Hydraulický systém troch nádob s plochami prierezu $\mathbf{S_1 = 20\ m^2}$, $\mathbf{S_2 = 15\ m^2}$ a $\mathbf{S_3 = 25\ m^2}$ je zobrazený na nasledujúcom Obr. 16.32.

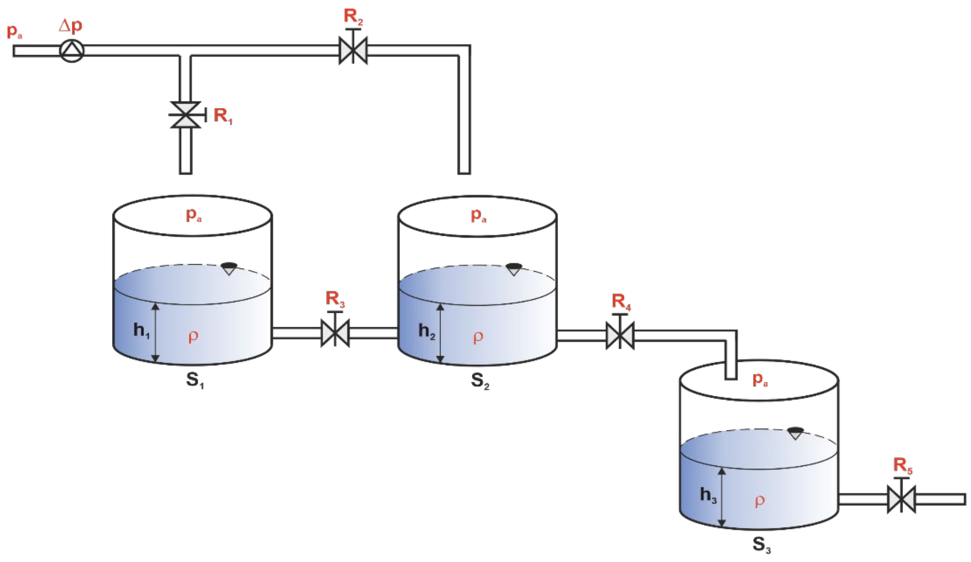
Hydraulický systém nádob, ktoré sú postupne plnené kvapalinou rovnakej hustoty $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1000\ kg.m^{-3}}$ a to tlakom vyvolaním čerpadlom $\mathbf{\Delta p}$, ktoré pumpuje kvapalinu cez ventil s odporom $\mathbf{R_1 = 17\,000\ Pa.kg^{-1}.s}$ do **nádoby č. 1** a cez ventil s odporom $\mathbf{R_2 = 15\,000\ Pa.kg^{-1}.s}$ do **nádoby č. 2** je znázornený na Obr. 16.32.

Kvapalina má ďalej možnosť z **nádoby č. 1** prúdiť do **nádoby č. 2** v spodnej časti cez hydraulický ventil s odporom $\mathbf{R_3 = 25\,000\ Pa.kg^{-1}.s}$. Z **nádoby č. 2** potom kvapalina ďalej prúdi cez hydraulický ventil s odporom $\mathbf{R_4 = 15\,000\ Pa.kg^{-1}.s}$ do **nádoby č. 3** a napokon vyteká von do atmosférického tlaku cez ventil s odporom $\mathbf{R_5 = 23\,000\ Pa.kg^{-1}.s}$.

Napíšte skript v Matlabe, v ktorom vypočítate ako sa budú mieniť jednotlivé výšky hladín v **nádržiach č. 1, 2** a **3** pre simulačný čas plnenia $\mathbf{t} \in \langle \mathbf{0, 300} \rangle\ \mathbf{s}$ ak predpokladáme, že:

a) tlak v čerpadle $\mathbf{\Delta p}$ sa mení skokovou funkciou na hodnotu $\mathbf{\Delta p = 20.10^5\ Pa}$,

b) resp. ak tlak v čerpadle kolíše na základe funkcie $\mathbf{\Delta p = 20.10^5 + 1.10^4 \sin(2\pi t)\ Pa}$.



Obr. 16.32. Hydraulický systém

REGISTER

A

B

C

Č

D

E

F

G

H

C

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

Š

T

U

V

W

Z

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] **Woods, R. L. – Lawrence, K. L.**: Modeling and simulation of dynamic systems. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice – Hall, Inc., 1997. ISBN 0-13-337379-7

[2] **Smaili, A. – Mrad, F.**: Mechatronics. Integrated technologies for intelligent machines. Oxford: Oxford University Press, 2088. ISBN 978-0-19-532239-2

[3] **Bolton, W.**: Mechatronics. Electronic control systems in mechanical and electrical engineering. 2nd edition. Pearson Education Limited, Harlow: Prentice – Hall, Inc., 1999. ISBN 0-582-35705-5

[4] **Russell, K. – Shen, Q. – Sodhi, S. R.**: Kinematics and Dynamics of Mechanical systems. Croydon, UK: CRC Press, 2016. ISBN 978-1-4978-2493-7

[5] **Katshuhiko, O.**: System dynamics. 4th edition. Pearson Education Limited: University of Minesota, Harlow: Prentice – Hall, Inc., 2004. ISBN 0-13-142462-9

[6] **Esfandiari, R. S. – Lu, B.**: Modeling and Analysis of Dynamic Systems. CRC Press, 2014. ISBN 978-1-4665-7493-9

[7] **Chmelko, V. – Garan, M. – Šulko, M.**: Pružnosť a pevnosť. 1. vydanie. Spektrum: Strojnícka fakulta STU, 2017. ISBN 978-80-227-4667-0

[8] **Craig, J. J.**: Introduction to Robotics: Mechanis and Control, 3rd edition. Prentice Hall, 2005. ISBN 0-13-123629-6

[9] **Esfandiari, R.**: Applied Mathematics for Engineers, 5th edition. Los Angeles: Atlantis, 2013. ISBN 978-097299907

[10] **Floyd, T. L.**: Electric Circuit Fundamentals, 7th edition Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2006. ISBN 978-0135072936

[11] **Hibbeler, R. C.**: Engineer Mechanics: Dynamics, 12th ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2010. ISBN 978-0132911276

[12] **Inman, D. J.**: Engineering Vibration, 3rd ed. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2007. ISBN 978-0132871693

[13] **Meirovitch, L.**: Fundamentals of Vibrations. New York : McGraw-Hill, 2001. ISBN 978-1577666912

[14] **Nilsson, J. W.**: Electric Circuits, 8th edition. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2007. ISBN 978-0131989252

[15] **Spong, M. W. – Hutchinson, S. – Vidyasagar, M.**: Robot Modeling and Control. New York: John Viley & Son. 1996. ISBN 978-0471649908

[16] **Street, R. L. – Watters, G. Z. – Vennerd, J. K.**: Elementary Fluid Mechanics, 7th edition. New York: John Viley & Son, 1996. ISBN 978-1406700107

POUŽITÉ ZNAČKY

Typ jednotiek	Veličina	Názov jednotka	Symbol	Označenie
Základné jednotky	Dĺžka	meter	m	l
	Hmotnosť	kilogram	kg	m
	Čas	sekunda	s	t
	Elektrický prúd	ampér	A	i
	Teplota	kelvin	K	T
	Látkové množstvo	mól	mol	n
Pomocné jednotky	Rovinný uhol	radián	rad	φ
	Priestorový uhol	steradián	sr	ϑ
Odvodené jednotky	Zrýchlenie	meter za sekundu štvorcovú	$m.s^{-2}$	a
	Uhlové zrýchlenie	radián za sekundu štvorcovú	$rad.s^{-2}$	α
	Rýchlosť	meter za sekundu	$m.s^{-1}$	v
	Uhlová rýchlosť	radián za sekundu	$rad.s^{-1}$	ω
	Moment zotrvačnosti	kilogram meter štvorcový	$kg.m^{2}$	I
	Plocha	meter štvorcový	m^{2}	S
	Hustota	kilogram na meter kubický	$kg.m^{-3}$	ρ
	Energia	joule	J	E
	Mechanická práca	joule	J	W
	Elektrická kapacita	farad	F	C
	Elektrický náboj	coulomb	C	Q
	Elektrické napätie	volt	V	u
	Elektrický odpor	ohm	Ω	R
	Sila	newton	N	F
	Moment	newton krát meter	N.m	M
	Frekvencia	hertz	Hz, s^{-1}	f
	Magnetické pole	weber	Wb	B
	Tlak	pascal	Pa (N/m^{2})	p
	Výkon	watt	W	P
	Tepelná kapacita	joule na kilogram kelvin	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	c, C
	Tepelná vodivosť	watt na meter kelvin	$W.m^{-1}.K^{-1}$	k
	Tepelná kondukcia	watt na meter štvorcový kelvin	$W.m^{-2}.K^{-1}$	h
	Objem	meter kubický	m^{3}	V
	Teplo	joule	J	Q

Ing. Martin GARAN, PhD.

MODELOVANIE A SIMULÁCIE MECHATRONICKÝCH SYSTÉMOV I.

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve
SPEKTRUM STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2020

Edícia vysokoškolských učebníc

Rozsah 432 strán, 292 obrázkov, 13 tabuliek, 14.447 AH, xxxx VH,
1. vydanie, edičné číslo xxxx, tlač ForPress NITRIANSKE TLAČIARNE, s. r. o.

75 – 201 – 2020
ISBN xxx-xx-xxx-xxxx-x