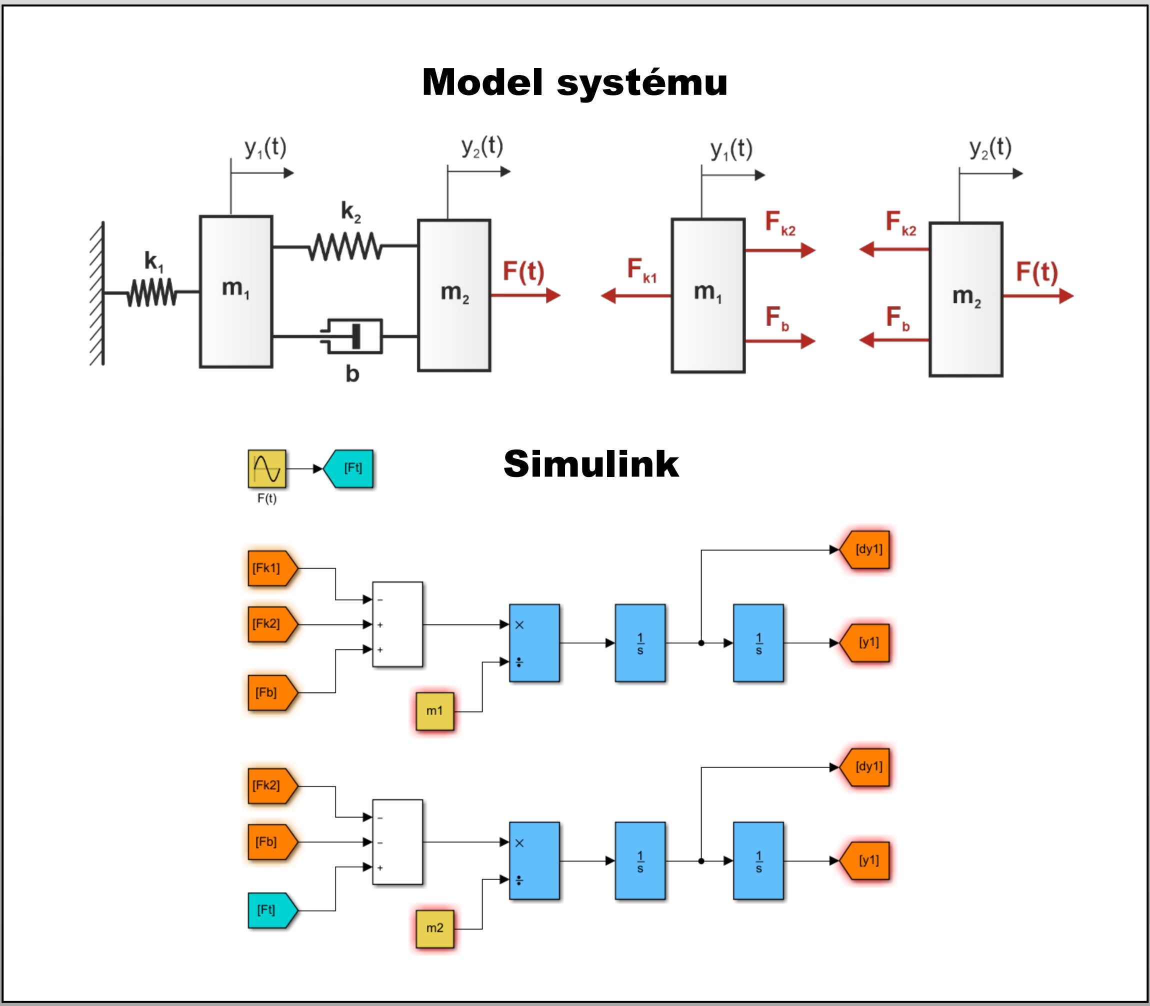
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Modelovanie a simulácia mechatronických systémov 2

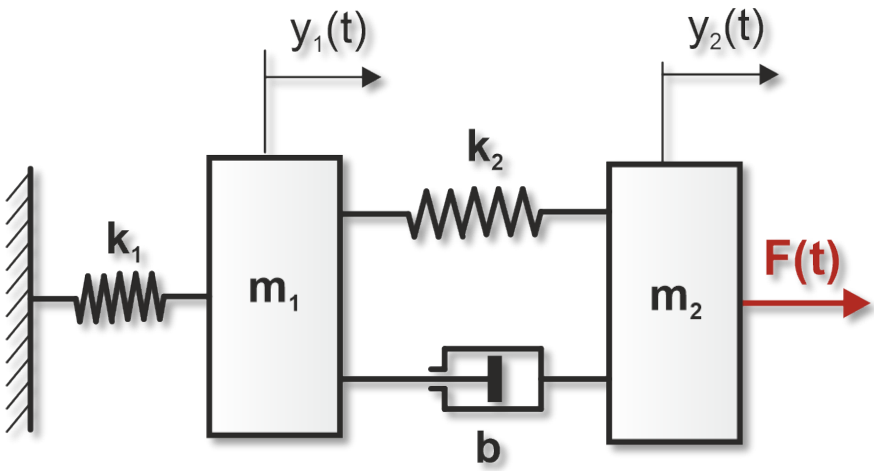


Ing. Martin Garan, PhD.

SPEKTRUM STU

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Modelovanie a simulácia mechatronických systémov 2



prvé vydanie

Ing. Martin Garan, PhD.

2020

Učebnica Modelovanie a simulácia mechatronických systémov 2 svojím obsahom zastrešuje rozsahy predmetov Mechatronika a Simulácie mechatronických systémov, ktoré sú vyučované v bakalárskom stupni štúdia odboru Aplikovaná mechanika a mechatronika na Strojníckej fakulte STU. Text tejto učebnice poskytuje komplexné techniky spracovania a modelovania hlavných typov inžinierskych systémov. Zaoberá sa metódami riešenia výsledných diferenciálnych rovníc rôznych typov fyzikálnych systémov, ako aj poskytuje sprievodné matematické postupy, ktoré sa týkajú reprezentácie dynamických systémov a stanovenia ich charakteristík odozvy. Je nutné poznamenať, že obsah tejto knihy nie je primárne určený len pre študentov bakalárskeho štúdia, ale kniha svojou obsahovou stránkou poskytuje zaujímavé informácie o spôsobe modelovania a simulácií aj pre ročníky inžinierskeho štúdia.

Kniha Modelovanie a simulácia mechatronických systémov 2 poskytuje okrem teoretických poznatkov aj veľké množstvo praktických ukážok z oblasti modelovania a riadenia dynamických systémov. Pri vyšetrovaní správania sa dynamických systémov sa v rámci učebnice využívajú moderné simulačné nástroje softvéru Matlab a Matlab/Simulink. Prevažná časť učebnice je venovaná praktickým a názorným ukážkam princípu modelovania (t. j. získania matematického modelu vo forme diferenciálnej rovnice resp. sústavy diferenciálnych rovníc) základných fyzikálnych systémov ako sú mechanický systém, elektrický a elektro-mechanický systém, ďalej pneumatický a hydraulický systém, ako aj tepelný systém. Z dôvodu využitia súčasného moderného prístupu simulácie odvodených matematických modelov na počítači, je prevažná časť odvodených matematických modelov transformovaná na systém v tvare blokovej schémy, ktorá je potom simulovaná v interaktívnom prostredí programu Matlab/Simulink.

V učebnici sa okrem simulácie systémov v Simulinku využívajú aj programovacie techniky písania simulačných skriptov, ktoré slúžia na vyšetrovanie odozvy systémov. V rámci týchto skriptov možno postupnou integráciou diferenciálnej rovnice resp. sústavy diferenciálnych rovníc v maticovom tvare, vypočítať a zobraziť charakteristiku odozvy systému na odpovedajúcich grafoch v závislosti od času.

Poznamenajme, že na simuláciu modelov a modelovanie je v rámci celej knihy využitý softvér Matlab verzie R2019b (vyvinutý spoločnosťou MathWorks), ďalej nadstavba Matlabu – Control toolbox (nástroj slúžiaci na modelovanie a riadenie dynamických systémov) a taktiež interaktívny simulačný nástroj Matlab/Simulink (určený na interaktívne modelovanie systémov vo forme blokovej schémy).

Recenzenti: prof. Ing. Peter Šolek, PhD., doc. Ing. Vladimír Chmelko, PhD., Ing. Juraj Kubica, PhD.

Grafický návrh obálky: Ing. Martin Garan, PhD.

Schválila Vedecká rada Strojníckej fakulty STU v Bratislave.

Rok vydania: 2020

ISBN xxx-xx-xxx-xxxx-x

Predhovor

Aj keď na tému **simulácia** a **modelovanie systémov** už bolo publikované veľké množstvo vedeckých článkov a príspevkov na rôznych vedeckých konferenciách, a tejto téme sa venovali viaceré knižné vedecké publikácie, táto téma simulácie a modelovania systémov je prakticky nevyčerpateľná.

Napriek tomu, že pri tvorbe **simulácie** systémov je metodika postupu skoro vždy rovnaká, požadovaný výsledok nie vždy musí byť identický. **Počítačová simulácia** bola vyvinutá ruka v ruke s rýchlym nárastom a rozvojom **počítačovej techniky**, ktorá bola postupne zavadzaná do bežného života. Prvé veľké nasadenie **počítačovej simulácie** bolo využité napr. v projekte Manhattan počas II. svetovej vojny (kedy sa jednalo o simuláciu **12** ťažkých gulí, realizovanej pomocou algoritmu **Monte Carlo**). V tomto prípade sa **počítačová simulácia** využila na vytvorenie modelu jadrového výbuchu atómovej bomby, ktorej nešťastné použitie nakoniec ukončilo II. svetovú vojnu.

Poznatok **simulácie** a **modelovania systémov** umožnil vedcom z NASA v roku 1961 správne vypočítať presné letové dráhy modulu **Apollo 11** pri jeho lete na mesiac. Pri výpočtoch týchto letových dráh mesačného modulu sa v tom čase prakticky prvýkrát využilo naprogramovanie numerického princípu riešenia diferenciálnych rovníc, ktoré boli do tohto času počítané prakticky ručným, analytickým spôsobom a nie využitím simulácie na počítači.

Počítačová simulácia sa často používa ako doplnok alebo náhrada na modelovanie systémov. Existuje však mnoho ďalších rôznych typov počítačových simulácií, ako sú **simulácia virtuálnej reality**, **simulácia leteckého trenažéra**, **simulácia prúdenia kvapaliny v potrubí** a ďalšie iné. Spoločným rysom, ktoré všetky simulácie zdieľajú, je pokus generovať vzorku reprezentatívnych scenárov pre daný model, v ktorom je obsiahnutý kompletný zoznam všetkých možných stavov uvažovaného modelu. Počítačové modely boli pôvodne používané ako doplnok k ďalšej argumentácii, ale ich použitie sa neskôr stalo pomerne rozšírené. Každý z nás má určitú osobnú skúsenosť s **modelom**, **modelovaním** alebo **simuláciou**. Už ako malé deti sme sa hrávali s rôznymi modelmi autíčok či vláčikov, pomocou plastelíny sme modelovali objekty od výmyslu sveta a s príchodom **počítačových hier** hrávali hry, ktoré simulovali jazdu na motorkách, autách alebo lietadlách.

Modelovanie a **simulácia** sú však veľmi dôležité aj pre vedu a výskum. **Technickí inžinieri**, **ekonómovia**, **prírodovedci**, **chemici** a ďalší iní využívajú modely dennodenne vo svojej práci a v súčasnosti sa matematické modely stali ich neodmysliteľnou súčasťou práce. Zatiaľ čo pomocou **modelov** môžu **chemickí inžinieri** bezpečne skúmať chemické reakcie rôznych prvkov, na druhej strane skúmanie založené na tvorbe virtuálnych modelov umožňuje znížiť náklady na **vývoj** a **testovanie** nových produktov. Vďaka **modelom** v zmenšenej mierke možno v priebehu krátkeho času nadobudnúť a získať potrebné informácií o skúmanom **objekte**, ktorý je vystavený predpokladanému **simulovanému prevádzkovému zaťaženiu**.

Modely a **simulácie** sa využívajú na veľmi rôznorodé účely. Pokiaľ máme nad systémom kontrolu a dobre mu rozumieme, môžeme ho využiť na porovnanie rôznych možností postupu, skúšať rôzne **varianty** a vyhodnocovať **zásahy** do systému. **Simulácia** by mala vierohodne zobrazovať správanie sa skúmaného systému. Tento druh modelovania sa využíva hlavne v technických odboroch napr. pri konštrukcii dopravných prostriedkov. **Modelovanie** a **simulácia** rôznych systémov prináša v kombinácií s veľkým technologickým pokrokom v poslednej dobe obrovské výhody. **Simulácia** šetrí čas, peniaze a mnohokrát môže pomôcť ochrániť ľudské životy. V kombinácií s čoraz viac sa zvyšujúcim **výpočtovým výkonom** rastú aj nároky na detailnosť, presnosť a vierohodnosť realizovanej simulácie. I keď vývoj simulačných prostriedkov dnes postúpil tak ďaleko, že v mnohých prípadoch sa nevyžaduje od používateľa znalosť programovania, všetky moderné simulačné nástroje majú časť, v ktorej existuje možnosť doplnenia modelu o vlastné naprogramované skripty, ktoré vyjadrujú špecifické vlastnosti modelu. Týmto spôsobom môžeme daný realizovaný model vylepšiť.

Problematikou **modelovania** a **simulácií** matematických modelov sa zaoberá aj táto učebnica, ktorá prináša pre budúcich **mechatronických inžinierov** možnosť pochopiť a naučiť sa, ako správne tvoriť matematické modely základných fyzikálnych systémov. Na druhej strane poskytuje možnosť získať zručnosti pri tvorbe simulácií a vyšetrovaní odozvy takýchto **dynamických systémov** pre rôzne uvažované vstupné budiace signály s využitím **moderných prístupov modelovania** a **simulácie** na počítači. Poznamenajme, že pri simuláciách sa využíva princíp interaktívnej práce v prostredí softvéru **Matlab** a **Matlab/Simulink** (modelovanie fyzikálnych systémov v podobe blokových schém). Kompletný text učebnice je logický začlenený do nasledujúcich 10 kapitol:

Kapitola 1 sa venuje teoretickým základom modelovania systémov. V tejto kapitole sú popísané základné pojmy, základná klasifikácia systémov, väzby systémov, vlastnosti matematického modelu a základné procesy modelovania.

Kapitola 2 sa venuje teórií simulácie, metodike a postupu simulácie modelov.

Kapitola 3 je zameraná na teóriu dynamických systémov, tvorbu matematických modelov systémov a opis systémov prenosovou funkciou.

Kapitola 4 pojednáva o teórií Laplaceovej transformácie systémov, inverznej Laplaceovej transformácií a riešení lineárnych diferenciálnych rovníc metódou Laplaceovej transformácie.

Kapitola 5 je venovaná teórií blokového diagramu. Zaoberá sa tvorbou a simuláciou systémov realizovaných formou blokového diagramu a redukciou zložitých blokových diagramov na jeden blok prenosovej funkcie. V tejto kapitole sú takisto popísané základne knižnice Simulinku, ako sú Commonly Used blocks, Sources a Sinks.

Kapitola 6 sa venuje základom simulácie matematických modelov s využitím Simulinku. Táto kapitola takisto poskytuje poznatky o modelovaní a simulácií systémov s využitím Matlab skriptu.

Kapitola 7 je zameraná na teóriu tvorby stavového opisu systému. V tejto kapitole sú vysvetlené postupy ako z matematického modelu systému, ktorý je opísaný sústavou diferenciálnych rovníc, získame stavový opis sústavy diferenciálnych rovníc 1. rádu

Kapitola 8 sa venuje teórií numerického riešenia diferenciálnych rovníc. V tejto kapitole sú vysvetlené numerické metódy, ktoré možno použiť na získanie numerického riešenia sústavy diferenciálnych rovníc. Na praktických príkladoch sú vysvetlené spôsoby ako získať riešenie matematických modelov použitím vstavaných riešičov Matlabu.

Kapitoly 9 a **10** sú primárne zamerané na popis tvorby a simulácie matematických modelov s využitím Simulinku. V týchto kapitolách možno nájsť názorné príklady modelov z rôznej fyzikálnej podstaty, ktoré sú simulované formou blokového diagramu v Matlab/Simulinku.

Citáty na úvod:

„Základné myšlienky vedy sú väčšinou jednoduché a pravidlá sa dajú reprodukovať jazykom, ktorý je zrozumiteľný každému.“

Albert Einstein

„Vedecký človek nemá za cieľ dôjsť k okamžitému výsledku. Neočakáva, že sa jeho pokročilé nápady a myšlienky ľahko uchytia. Jeho práca je ako práca plantážnika – pre budúcnosť. Jeho povinnosťou je položiť základy a ukázať cestu tým, ktorí prídu po ňom.“

Nikola Tesla

„Nenechám sa odradiť, pretože každý zlý pokus, ktorý mám za sebou, je ďalším krokom vpred – krokom k dosiahnutiu úspechu.“

Thomas Alva Edison

Obsah

1 MODELOVANIE A MODELY

O **modelovaní** sa často hovorí, že je viac umením než **vedou**. Istým spôsobom sa však podobá tesárskemu remeslu. Každý modelár pristupuje k problému iným spôsobom; podľa druhu svojho vzdelania, skúseností a v neposlednej rade i vkusu alebo prevládajúcej móde. Pokiaľ je však problém jasne špecifikovaný, tzn. že ak vieme čo je úlohou daného modelu, resp. vieme k čomu bude daný model slúžiť a všetky údaje sú k dispozícií, potom dvaja skúsení modelári pravdepodobne vytvoria úplne podobné dva funkčné modely.

1.1 ÚVODNÉ POJMY MODELOVANIA

Systém je čokoľvek, čo možno nejakým spôsobom vyčleniť v myslení z reality. **Systém** je niečo, čo sa nejakým spôsobom líši od svojho komplementu. Aby sme niečo vnímali a mohli o tom premýšľať, musíme to najskôr rozpoznať, odlíšiť od okolia a od ostatných javov. Na to, aby bolo možno **systém** vnímať nielen ako jednoduchý jav, musí byť systém skonštruovaný a poskladaný z nejakých súčastí. Tieto časti sú spolu nejakým spôsobom v rámci systému tesnejšie previazané, než sú javy mimo tohto systému. Ak by to tak nebolo, zložky systému by súviseli viac s okolitým svetom, ktorý sa nachádza mimo systému, než so systémom v jeho vnútri, ktorý by sa následne rozpadol, lebo jeho súčasti by splynuli s týmto okolitým svetom. **Systém** existujúci v reálnom svete môžeme (alebo chceme) nejakým spôsobom reprezentovať, nahradiť nejakým iným systémom, ktorý je jednoduchší, zrozumiteľnejší a lepšie zvládnutejší.

Skúmanú realitu (**systém**) budeme nazývať **originálom**, **reprezentáciou systému**, čo je podobne nejaký typ systému, ktorý nazveme **modelom**. Každý **model** je vytváraný za nejakým účelom Pri procese modelovania zachováme len tie **zložky**, **vlastnosti** a **vzťahy systému**, ktoré sú na tento účel podstatné. Trochu presnejšie možno povedať, že **systém** je taká množina prvkov, na ktorej sú definované určité **relácie**. Originál **O** a model **M** musia byť teda také, že existuje **morfizmus** (zobrazenie, tvar)

$$\Phi\colon \mathrm{O} \rightarrow \mathrm{M}\,, \tag{1.1}$$

kde **zobrazenie Φ** očakávame, že bude jednoduchým zobrazením.

Každý **model** je postavený na nejakých predpokladoch, ktoré často nie sú úplne **realistické**. Akú cenu teda má jeho **analýza** a na aké otázky môže model odpovedať? V tejto situácii sa ukazuje ako užitočné rozlíšiť **projekciu** a **predikciu** (predpoveď). Kým **predikcia** hovorí, čo sa stane; **projekcia** popisuje, čo by sa za istých predpokladov mohlo stáť.

S použitím gramatických termínov možno povedať, že **predikcia** je **indikatív** a **projekcia** je **konjuktív**. Napr. zo štruktúry nejakej sústavy rovníc vyplýva, aké sú hranice alebo trendy vývoja modelovaného **ekosystému** alebo **spoločenstva** prípadne, keď celý systém skolabuje.

Tieto výsledky možno ľahko spochybniť poukázaním na to, že podmienky vývoja sa môžu meniť. Táto kritika je však oprávnená iba v prípade použitia modelu **predikcie**. Pri **projekcii** je úplne bezvýznamná. **Projekcia** totiž nehovorí nič o budúcnosti, iba odpovedá na otázku, ako by sa daný systém správal, pokiaľ by okolnosti alebo podmienky boli nemenné.

Projekcia ukazuje niečo o súčasnosti modelu, presnejšie povedané o vzťahu súčasných podmienok a systému, ktorý sa v nich vyvíja; neodhaľuje však jeho budúcnosť. Vyšetrovanie dôsledkov súčasného stavu pre budúcnosť, pokiaľ by sa nemenili okolnosti, je veľmi silným nástrojom k porozumeniu súčasného stavu.

Podobným spôsobom funguje napr. **tachometer**. Ak tachometer ukazuje hodnotu **90 kilometrov za hodinu**, možno predpovedať, že automobil bude za hodinu vo vzdialenosti **90 kilometrov** od súčasnej polohy. Táto **predikcia** je takmer istotne mylná. **Projekcia** však hovorí, že pokiaľ by automobil zostal na priamej vozovke dlhej aspoň **90 km** a pohyboval sa stále rovnakou rýchlosťou **v**, tak by za hodinu jazdy dosiahol vzdialenosť **90 km** od súčasnej polohy. Nikto snáď nespochybňuje, že údaj **90 km/h** poskytuje celkom cennú informáciu o aktuálnom stave automobilu.

1.2 ROZDELENIE MODELOV

Modely možno klasifikovať podľa rôznych hľadísk. Prvé z hľadísk vychádza z povahy modelu; podľa prvého hľadiska rozlišujeme modely:

- materiálne a
- ideálne.

Materiálne modely (**ikonické modely**) sú všetky modely, ktoré možno principiálne uchopiť do ruky alebo aspoň ohmatať – modely lodí, lietadiel, stavieb, vodných ciest. Modelom **človeka** môže byť napr. kostra, figurína vytvarovaná z anatomického gélu, **modelom** môže byť tiež terč, ktorý slúži k nácviku ostrej streľby a ďalšie iné. Za modely tohto druhu môžeme považovať samozrejme aj počítače. **Materiálnymi modelmi** sa v rámci tejto knihy zaoberať nebudeme.

Ideálne modely možno rozdeliť na **schematické modely**, ktoré predstavujú rôzne schémy elektrických obvodov, dopravných sietí, vzťahov osôb v sociálnom systéme a pod. Na druhej strane medzi ideálne modely ďalej radíme **matematické modely**, ktoré sú popisované pomocou matematických symbolov a taktiež **počítačové modely**, ktoré sú tvorené nejakým počítačovým programom.

Je zrejmé, že medzi **matematickými** a **počítačovými** modelmi neexistuje ostrá hranica – samotný **počítačový program** môže byť totiž napísaný na papieri ako postupnosť nejakých matematických symbolov, časťami počítačového programu sú spravidla aj matematické formulácie. Z **matematického modelu** možno vytvoriť **počítačový model**, pokiaľ existujú efektívne algoritmy na riešenie použitých rovníc, algoritmy na výpočet hodnôt príslušných funkcií a vyhodnotenie matematických a logických výrazov. Napr. programové systémy pre symbolické výpočty (**Matlab,**

Mathematica, ...) umožňujú zapísať a analyzovať matematický model nielen ručne na papieri, ale taktiež i vo virtuálnom svete.

Základným kritériom na delenie **matematických** a **počítačových** modelov je ich správanie sa v čase **t**. Na základe tohto hľadiska delíme modely na

- statické (nemeniace sa v čase) a
- dynamické (vyvíjajúce sa v čase).

V prípade čisto **matematických modelov** je toto rozdelenie trochu problematické. V matematike čas **t** vo vlastnom zmysle neexistuje. Aj pohyb alebo smerovanie sa vyjadruje pomocou čisto strohej formulácie: „každému **ε** existuje **δ**, ktoré ...“. Presnejšie je teda dynamický model taký, v ktorom existuje jedna privilegovaná skalárna veličina modelujúca čas **t**. **Dynamické modely** možno ďalej rozlíšiť na

- modely bez pamäte a
- modely s pamäťou.

U **modelov s pamäťou** závisí stav modelu (**nasledujúci stav**) na súčasnom (**aktuálnom**) stave, ale aj na stave v minulom (predchádzajúcom) časovom okamžiku resp. na vývoji modelu v minulosti; u **modelov bez pamäte** závisí iba na aktuálnom stave. **Matematické** resp. **počítačové** modely možno ďalej deliť podľa charakteru veličín a premenných v ňom vystupujúcich. Jednou z možností je rozdeliť tieto modely na

- stochastické (v modeli sa vyskytuje aspoň jedna náhodná veličina) a
- deterministické (v modeli sa náhodná veličina nevyskytuje).

Náhodnou veličinou v prípade dynamických modelov nie je čas **t**. Toto delenie je opäť iba pomocné, nakoľko každú veličinu možno považovať za náhodnú veličinu; **distribučná funkcia** týchto „nenáhodných premenných“ nadobúda iba dve hodnoty, konkrétne **0** a **1**. Matematické modely ďalej možno deliť na

- diskrétne (veličiny nadobúdajú spočítateľne veľa hodnôt),
- spojité (veličiny nadobúdajú hodnoty z nejakého kontinua) a
- zmiešané (v modeli sa vyskytujú premenné dvoch typov).

V prípade dynamických modelov môžeme mať modely, v ktorých je čas **diskrétny** a ostatné veličiny sú **spojité**. Modely so **spojitým časom** a ostatnými **diskrétnymi** veličinami alebo modely so všetkými veličinami **spojitého charakteru** a pod. Je teda potrebné rozlišovať, či sa pri tejto klasifikácií hovorí o čase **t** ako privilegovanej premennej alebo o ostatných veličinách. Vzhľadom k tomu, že každý **digitálny počítač** sa môže nachádzať iba v konečnom počte stavov – a nezáleží na tom, že ich je nepredstaviteľne veľa.

Iná možnosť klasifikácie **matematických** a **počítačových modelov** vychádza z ich vzťahu k okoliu resp. k veličinám, ktoré nie sú súčasťou modelu. V tomto prípade možno modely rozdeliť na

- autonómne (nezávislé na okolí) a
- neautonómne (explicitne závislé na nejakej vonkajšej premennej).

U **dynamických modelov** je najdôležitejšia závislosť na čase **t**; príslušné systémy dynamických rovníc sa delia na **autonómne** a **neautonómne** podľa toho, či je pri nich explicitne uvedený čas **t** alebo nie. Modely **autonómne** v čase vyjadrujú v prípade ostatných premenných fundamentálne prírodné zákony; napr. rozpad častíc prebieha rovnako vo štvrtok ako v piatok, na **Zemi** alebo na **Marse**. Väčšinu prírodných procesov modelujeme modelmi **autonómnymi** v čase a **neautonómne** v prípade iných premenných; napr. model závislosti bodu varu vody na teplote je iný pri atmosférickom tlaku vzduchu a iný pri nižšom tlaku než je tento normálny tlak.

Do tohto bodu všetky uvedené klasifikácie vychádzali z charakteru modelov, nie však z matematických metód použitých pri ich tvorbe. Pri takomto prístupe by sme mohli hovoriť o modeloch založených na teórii množín alebo relačných štruktúrach, rovnako na maticovej algebre, na **diferenciálnych** alebo **diferenčných rovniciach** a to **obyčajných** alebo **parciálnych**. V tomto zmysle by modely boli súčasťou príslušnej matematickej disciplíny. Presnejšie povedané, by vystupovali ako príklady ilustrujúce použiteľnosť teórie na riešenie reálnych problémov.

Iný spôsob klasifikácie modelov môže byť založený na vzťahu medzi **modelom** a **originálom**. Z tohto hľadiska možno rozlíšiť modely

- demonštratívne a
- vysvetľujúce.

Demonštratívne modely príslušný jav alebo dej len popisujú, ukazujú ako dej vyzerá alebo prebieha, nikdy nevysvetľujú prečo tomu tak je. Napr. **Keplerove zákony** popisujú pohyb planét okolo slnka. **Vysvetľujúce modely** sa snažia odpovedať na otázku prečo; sú založené na presne formulovaných predpokladoch a jasne vymedzených pojmoch, ktoré označujú pozorovateľné a v lepšom prípade i kvantifikované javy. Napr. **Newtonove pohybové zákony** spolu s gravitačným zákonom vysvetľujú, prečo sa planéty pohybujú konštantnou plošnou rýchlosťou po kužeľosečkách s ohniskom v **Slnku**.

Explikatívny model teda redukuje nejaký reálny proces na procesy alebo javy inej úrovne. Tie môžu byť jednoduchšie alebo prvotnejšie, pretože sú **konkrétnejšie**, ľahšie pozorovateľné (napr. vývoj populácie popísaná počtom jedincov, ktorí sa narodili a zomreli za sledovaný čas) alebo naopak **abstraktnejšie**. Pokiaľ hovoríme o účelnosti modelu, môžeme uviesť ešte jedno klasifikačné kritérium. Modely možno deliť na

- teoretické a
- praktické.

Teoretické modely slúžia k porozumeniu, ako sa nejaký systém za určitých podmienok správa alebo prečo sa tak správa. **Praktický model** má predpovedať, ako sa konkrétny systém bude správať, prípadne pomôcť pri rozhodnutí sa pre nejaký zásah do systému. **Teoretický model** by mal byť dostatočne jednoduchý, aby z neho bolo vidieť, prečo sa deje to, čo sa deje. Vzťah medzi hypotézami a závermi sprostredkuje porozumenie **modelovaného systému**. Nahradením komplexného systému zložitým modelom, ktorému nerozumieme, poznanie neprehĺbi.

Teoretické modely sú často vyjadrené niekoľkými rovnicami, ktoré predstavujú tie najrelevantnejšie procesy podieľajúce sa na niekoľkých javoch, ktoré sú predmetom skúmania. **Praktický model** obetuje jednoduchosť, aby získal čo najpresnejšiu predikciu správania sa konkrétneho systému. Môže obsahovať mnoho rovníc odvodených z množstva pozorovaných údajov. Takýto model je obvykle príliš komplikovaný, aby ho bolo možné nejako matematicky analyzovať; tento model však možno simulovať na počítači. Delenie modelov na **teoretické** a **praktické** je iba pomocným delením. Čisto **teoretické** a **praktické modely** predstavujú akési extrémy, **skutočné modely** totiž ležia niekde medzi nimi.

Modely ďalej možno deliť na

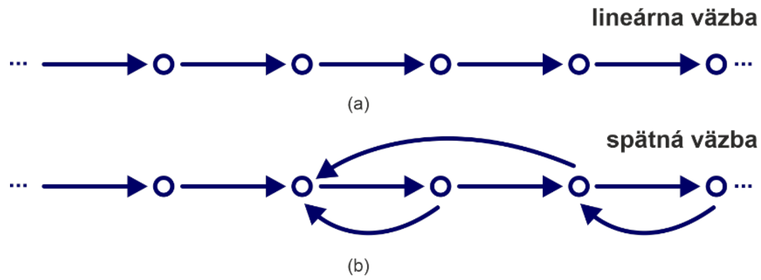
- lineárne a
- nelineárne.

Základnou vlastnosťou zložitých systémov je ich **nelinearita**, ktorá sa prejavuje tak, že malé zmeny nejakých hodnôt vyvolajú veľké (skokové, nepredvídateľné) zmeny hodnôt iných. Z **nelineárnych vlastností** alebo väzieb potom vyplýva chaotické správanie sa systému. **Nelinearita** sa stáva akýmsi zaklínadlom. Slovo „**linearita**" má totiž prinajmenšom tri rôzne významy. O akú **nelinearitu** sa jedná, vystihuje príslušné opozitum. Do uvedenej klasifikácie **linearity** a **nelinearity** nezapadá rozšírené používanie pojmu „**nelineárna dynamika**". V **lineárnej dynamike** je odozva systému na nejaký podnet definovaná ako zmena úmerná tomuto podnetu, ale v prípade **nelineárnej dynamiky** je odozva často i mnohokrát väčšia, než v prípade **lineárnej dynamiky**. **Systém** sa stáva omnoho citlivejším na pokusy o zmenu kvalitatívneho stavu. Výsledkom vyjasnenia pojmu býva zjednodušenie problému alebo aspoň jeho ľahšia myšlienková uchopiteľnosť. V prípade **„linearity"** však môžeme dôjsť k tomu, že veci sú komplikovanejšie, než sa na počiatku javili.

1.3 VÄZBY SYSTÉMU

Predstavme si nejaký systém tvorený z niekoľkých prvkov (napr. nejaké súčasti, činnosti, súčiastky elektrického obvodu a pod.), ktoré sú spojené **väzbou**, t. j. vzájomne na sebe závisia, ovplyvňujú sa (napr. následnosť činností; vodič medzi prvkami obvodu a pod.). Tieto väzby môžu byť **lineárne** (po prvej činnosti nasleduje druhá, po nej tretia, potom štvrtá a atď.; všetky súčiastky sú zapojené sériovo) alebo nejaká väzba môže byť **spätná väzba** (napr. po štvrtej činnosti sa vrátime k druhej; niektoré súčiastky nemajú len jeden vstup a jeden výstup).

Spätné väzby možno ďalej klasifikovať ako **pozitívne spätné väzby** (tieto sú väčšinou zlé, často vedú k nejakému kolapsu alebo explózii) a **negatívne spätné väzby** (tieto sú spravidla lepšie, často vedú k nejakej rovnováhe).



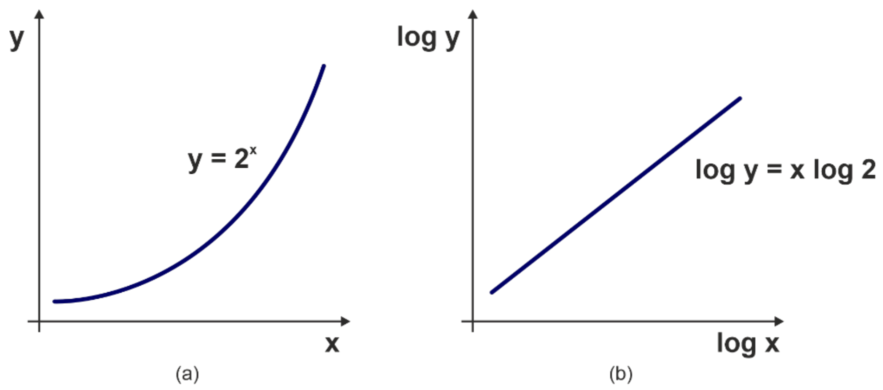
Obr. 1.1. (a) lineárna väzba, (b) spätná väzba

Pojem **spätná väzba** sa používa aj v inom význame – jednorazová odozva na nejakú akciu alebo činnosť („študenti nám poskytli spätnú väzbu"). Z tohto dôvodu môže byť vhodné miesto pojmu **spätná väzba** u trvale vzájomne sa ovplyvňujúcich prvkov (teda v systémovom poňatí), používať pojem „**slučka**" alebo „**systémová slučka**".

1.4 FUNKČNÁ ZÁVISLOSŤ

Závislosť nejakej **veličiny** (tzv. **závislej premennej**) na nejakej inej (tzv. **nezávislej premennej**) graficky znázorňujeme kartézskym grafom; vodorovné osi bývajú hodnoty nezávislej premennej, na zvislej osi zobrazujeme hodnoty závislej premennej. O závislosti povieme, že je **lineárna**, pokiaľ výsledným grafom je **priamka**; vo všetkých ostatných prípadoch túto závislosť nazývame **nelineárnou**.

Toto vymedzenie je však príliš vágne. Napr. nebolo povedané nič o stupnici na osiach **x** a **y**. Závislosť na Obr. 1.2 (a) by sme prehlásili za **nelineárnu**. Pokiaľ však stupnica na zvislej osi bude **logaritmická**, dostaneme Obr. 1.2 (b); závislosť je teda zobrazená **priamkou**, ktorú možno prehlásiť za **lineárnu**.



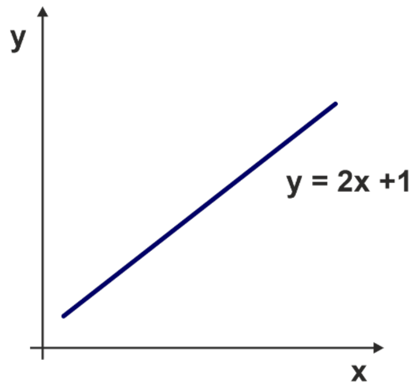
Obr. 1.2. (a) rovnomerná stupnica, (b) logaritmická stupnica

Prvé spresnenie definície **linearity** spočíva v nahradení obrázku výrazom. Situáciu na Obr. 1.3, t. j. závislosť premennej $\mathbf{y}$ na nezávislej premennej **x**, ktorej grafom je **priamka**, môžeme zapísať rovnosťou

$$y = 2 \cdot x + 1\,, \qquad (1.2)$$

teda ako násobok **nezávisle premennej**, ku ktorej je pripočítaná hodnota **1**. Všeobecný zápis lineárnej závislosti je

$$y = a \cdot x + b\,. \qquad (1.3)$$



Obr. 1.3. Graf závislosti y = 2x +1

Závislosť na Obr. 1.2 (a) je zapísaná rovnosťou $\mathbf{y = 2^x}$, teda formuláciou iného tvaru. Rovnosť $\mathbf{y = 2^x}$ však môžeme zlogaritmovať a teda upraviť na tvar

$$\log y = x \cdot \log 2\,. \qquad (1.4)$$

Ak teraz označíme $\mathbf{a = \log 2}$ a $\mathbf{z = \log y}$, potom dostávame, že

$$z = a \cdot x\,, \qquad (1.5)$$

teda **lineárnu závislosť** premennej $\mathbf{z}$ na premennej **x**. Závislosť na základe Obr. 1.2 (a), ktorá je považovaná za **nelineárnu** – vyjadrená v tvare **lineárnej závislosti**.

Zovšeobecnením tejto úvahy je zistenie, že **lineárna závislosť** nejakých veličín nie je ich vnútornou vlastnosťou, ale je **dôsledkom označenia**. Inak povedané, záleží na tom, čo prehlásime za premenné veličiny. Všeobecne neexistuje žiadne pravidlo, ktoré by umožnilo rozhodnúť sa, čo je tá **pravá premenná** – je to niečo, čo sme spočítali alebo namerali, logaritmus nameranej hodnoty alebo niečo iné.

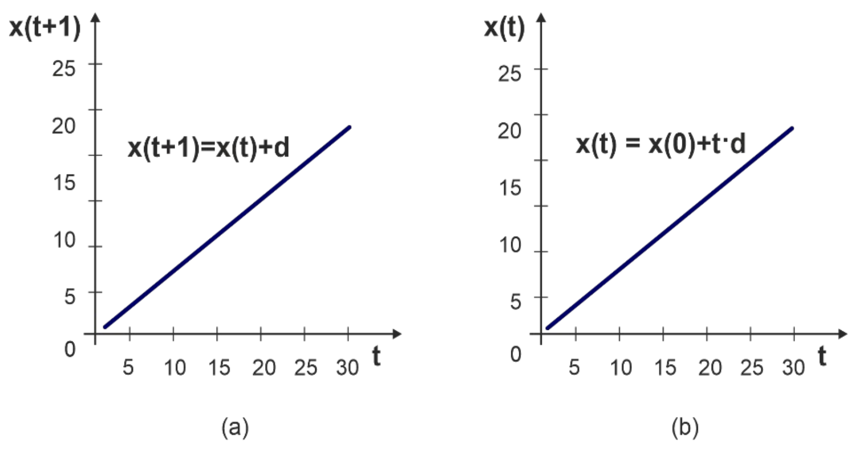
Ak teda hovoríme o **lineárnej závislosti**, je potrebné dôkladne špecifikovať, o aké veličiny sa jedná. Všetky veličiny, ktorými sme sa doteraz zaoberali, možno považovať za veličiny **statické**. Zaujímavejšie a dôležitejšie sú veličiny **dynamické**, ktoré vznikajú ako výsledok nejakého procesu prebiehajúceho v čase **t**. Napr. pohyb, zmena pohybu (stavu), **vznik** a **zánik** pôsobenia nejakej veličiny, to všetko je prejavom nejakej zákonitosti. Veličina v stave **zrodu** alebo v stave **zmeny** závisí na nejakej inej veličine, na inom vplyve. Táto závislosť môže byť **lineárna** alebo **nelineárna**. Rozhodnúť sa, o aký typ závislosti sa jedná, je opäť otázka uhlu pohľadu. Poznamenajme, že matematicky je dynamická rovnica **lineárna**, pokiaľ spĺňa princíp **superpozície**. Pokúsme sa túto myšlienku ilustrovať jednoduchým príkladom.

Zostavme matematický model učenia sa. Premennú, ktorá bude predstavovať akumuláciu nadobudnutých vedomostí, označíme ako základnú premennú **x** (v terminológii dynamických systémov túto premennú nazývame **stavovou** alebo **fázovou premennou**; v terminológií systémovej dynamiky jednoducho **akumuláciou**).

Množstvo vedomostí sa bude v závislosti na učení v priebehu času **t** meniť; preto veličinu **x** symbolicky zapisujeme ako $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$. Potom symbol $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ označuje množstvo nadobudnutých vedomostí v časovom okamžiku **t**. Proces učenia možno vyjadriť ako množstvo získaných vedomostí v nasledujúcom časovom okamžiku alebo vyjadrením veličiny ako $\mathbf{x}(\mathbf{t}+\mathbf{1})$. Najjednoduchšou predstavou je, že v každom časovom okamžiku alebo jednotkovom časovom intervale sa študent niečo naučí, takto získa množstvo vedomostí **d**, ktoré pribudne k vedomostiam, ktoré už nadobudol v minulom čase **t**. Matematicky zapísané

$$x(t+1) = x(t) + d\,. \qquad (1.6)$$

Táto formulácia je vlastne zápisom **lineárnej závislosti** veličiny $\mathbf{x}(\mathbf{t}+\mathbf{1})$ na veličine $\mathbf{x}(\mathbf{t})$; táto závislosť s parametrom $\mathbf{d} = \mathbf{1}$ je znázornená na nasledujúcom Obr. 1.4 (a).



Obr. 1.4. (a) Graf lineárnej závislosti člena postupnosti, (b) graf lineárnej postupnosti

Grafom je **priamka**. Pokiaľ v nejakom počiatočnom čase t. j. v okamžiku $\mathbf{t = 0}$, je množstvo vedomostí $\mathbf{x(0)}$, bude množstvo vedomostí v čase **t** dané výrazom

$$x(t) = x(0) + t \cdot d\,, \tag{1.7}$$

tento výsledok je vyjadrením všeobecného člena **aritmetickej postupnosti**. Opäť sme dostali **lineárnu závislosť**, tentokrát veličiny $\mathbf{x(t)}$ na veličine **t**; táto závislosť je znázornená na Obr. 1.4 (b), kde $\mathbf{d = 1}$ a $\mathbf{x(0) = 1}$. Predchádzajúci model teraz priblížime realite rozdelením procesu učenia na proces – **získavania nových vedomostí** a **proces zabúdania**. Symbol $\mathbf{x(t)}$ bude opäť označovať množstvo vedomostí v konkrétnom čase **t**. Pravidlo, podľa ktorého určíme množstvo vedomostí v každom nasledujúcom okamžiku bude teraz

$$x(t+1) = x(t) + b \cdot x(t) - c \cdot x(t)\,, \tag{1.8}$$

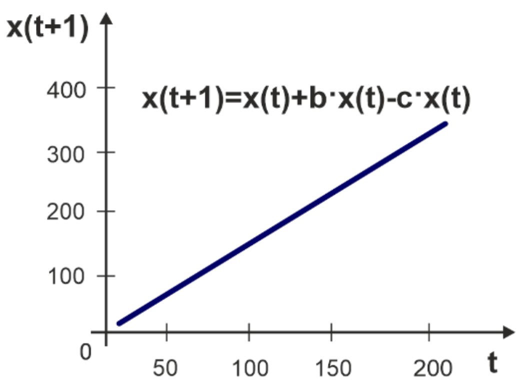
kde **b** je parameter, ktorý bude vyjadrovať množstvo novo prijatých vedomostí (t. j. rýchlosť získavania nových poznatkov), **c** je parameter, ktorým budeme kvantifikovať úbytok vedomostí (vyjadruje relatívne množstvo zabudnutých vedomostí v čase **t**; teda akúsi rýchlosť zabúdania). Úpravou predchádzajúceho výrazu dostávame

$$x(t+1) = (1 + b - c) \cdot x(t)\,. \tag{1.9}$$

Označením $\mathbf{r = 1 + b - c}$ dostávame

$$x(t+1) = r \cdot x(t)\,, \tag{1.10}$$

teda opäť **lineárnu závislosť** veličiny $\mathbf{x(t+1)}$ na veličine $\mathbf{x(t)}$; závislosť s $\mathbf{r = 2}$ je znázornená na Obr. 1.5.



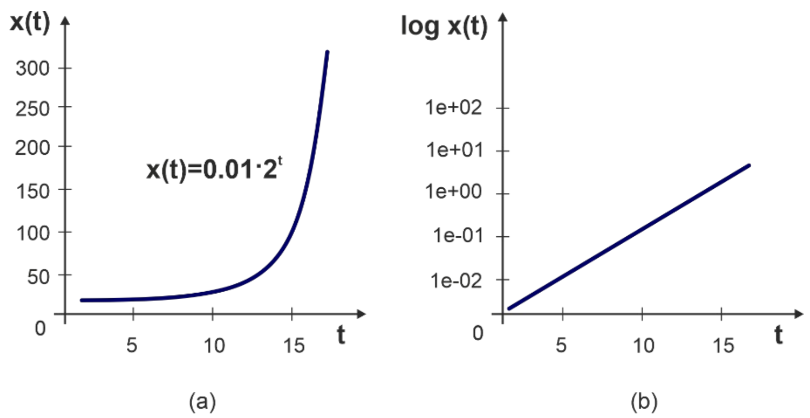
Obr. 1.5. Graf lineárnej závislosti členov postupnosti; $x(t+1) = 2 \cdot x(t)$

V tomto prípade bude množstvo vedomostí v čase **t** dané výrazom

$$x(t) = x(0) \cdot r^{t}, \tag{1.11}$$

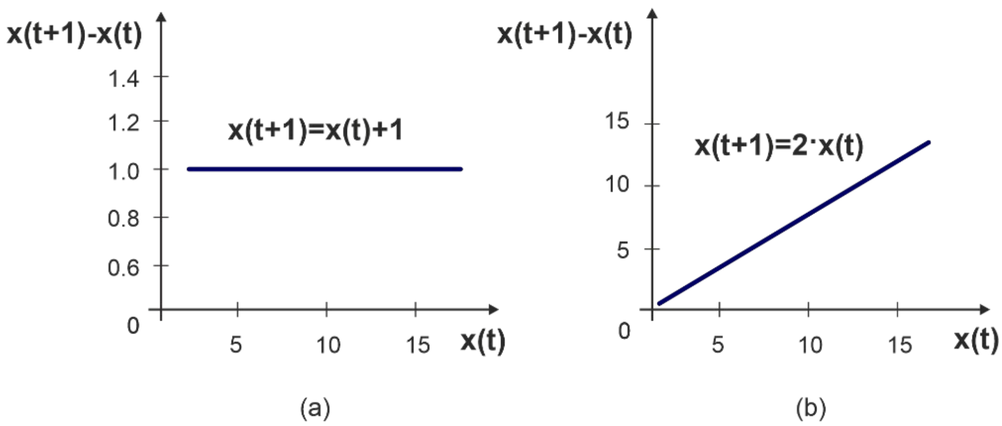
výsledok je vyjadrením všeobecného člena **geometrickej postupnosti**.

Závislosť $\mathbf{x(t) = x(0) \cdot r^{t}}$ s $\mathbf{x(0) = 0.01}$ a $\mathbf{r = 2}$ je znázornená na Obr. 1.6 (a) a (b). Na Obr. 1.6 (b) je závislosť zobrazená v semi-logaritmickom súradnom systéme. Závislosť množstva vedomostí od času $\mathbf{t}$ teda možno prehlásiť za **nelineárnu**, pokiaľ za základnú premennú uvažujeme veličinu $\mathbf{x(t)}$ alebo za **lineárnu**, pokiaľ za základnú premennú predpokladáme veličinu $\mathbf{\log x(t)}$.



Obr. 1.6. Graf nelineárnej postupnosti $x(t) = 0.01 \cdot 2^{t}$; (a) zobrazenie v lineárnych osiach, (b) zobrazenie v semi-logaritmickom systéme

Vývoj veličiny $\mathbf{x}$ sme vyjadrovali pomocou jej hodnoty v nasledujúcom časovom okamžiku, t. j. $\mathbf{x(t+1)}$ sme vyjadrili pomocou $\mathbf{x(t)}$. Iná možnosť ako vyjadriť zmenu nejakej veličiny, je pomocou tzv. **prírastku** tejto veličiny. Zmenu veličiny $\mathbf{x}$ v čase $\mathbf{t}$ vyjadruje jej **prírastok** $\mathbf{\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)}$.



Obr. 1.7. Graf závislosti absolútneho prírastku $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$ na hodnote $x(t)$; (a) $\Delta x(t) = 1$, t. j. $x(t+1) = x(t) + 1$, (b) $\Delta x(t) = x(t)$, t. j. $x(t+1) = 2 \cdot x(t)$

Model $\mathbf{x(t+1) = x(t) + d}$ teda možno zapísať do tvaru

$$\Delta x(t) = d \tag{1.12}$$

a model $\mathbf{x(t+1) = r \cdot x(t)}$ možno napísať ako

$$\Delta x(t) = (r-1) \cdot x(t) \ \text{ alebo } \ \Delta x(t) = (b-c) \cdot x(t)\,. \tag{1.13}$$

Prvá závislosť s $\mathbf{d = 1}$ je znázornená na Obr. 1.7 (a), druhá závislosť s parametrom $\mathbf{r = 2}$ je znázornená na Obr. 1.7 (b). Opäť sa jedná o **lineárnu závislosť**. Iný možný spôsob vyjadrenia zmeny veličiny **x** je pomocou jej relatívneho prírastku

$$\delta x(t) = \frac{\Delta x(t)}{x(t)}\,. \tag{1.14}$$

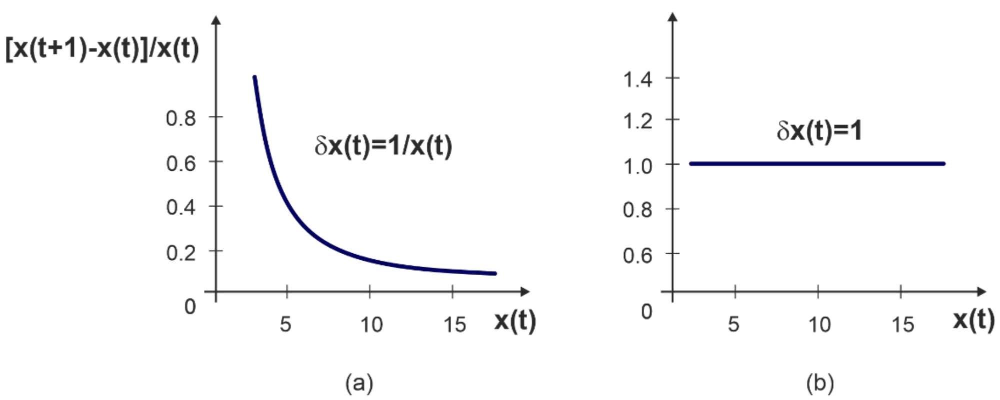
Týmto spôsobom vyjadríme **prvý model vývoja** vedomostí v tvare

$$\delta x(t) = \frac{d}{x(t)} \tag{1.15}$$

a druhý v tvare

$$\delta x(t) = r - 1 \qquad \text{alebo} \qquad \delta x(t) = b - c\,. \tag{1.16}$$

Prvá z týchto závislostí s parametrom $\mathbf{d = 1}$ je znázornená na Obr. 1.8 (a), druhá závislosť s parametrom $\mathbf{r = 2}$ je znázornená na Obr. 1.8 (b).



Obr. 1.8. Graf závislosti relatívneho prírastku $\delta x(t) = (x(t+1) - x(t))/x(t)$ na hodnote $x(t)$; (a) $\delta x(t) = 1/x(t)$, t. j. $x(t+1) = x(t) + 1$, (b) $\delta x(t) = 1$, t. j. $x(t+1) = 2 \cdot x(t)$

Tentokrát sa v prvom prípade jedná o závislosť **nelineárnu**, ktorá generuje **lineárnu postupnosť** $\mathbf{x(t) = x(0) + t \cdot d}$; v druhom o závislosť **lineárnu**, ktorá generuje **nelineárnu postupnosť** $\mathbf{x(t) = x(0) \cdot r^{\,t}}$. Ako je to teraz s **linearitou**?

V oboch uvedených príkladoch vyšlo, že pri istom parametre $\mathbf{d}$ alebo $\mathbf{r}$ bude množstvo prijatých vedomostí rásť nad všetky medze. To samozrejme nie je možné; model je nutné priblížiť ešte viac k realite. Tým sa vysvetľovaním dostaneme za hranice toho – čo je **lineárna závislosť matematického modelu**. Ak vyjdeme z posledného vyjadrenia $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x(t) = b - c}$, relatívny prírastok vedomosti je rozdiel rýchlosti prijímania nových poznatkov a rýchlosti zabúdania starých poznatkov. Tento rozdiel možno chápať ako rýchlosť nadobúdania vedomostí; označíme ako $\mathbf{v = b - c}$, potom model nadobudne tvar

$$\delta x(t) = v \ , \tag{1.17}$$

teda **relatívny prírastok vedomostí** je rovný rýchlosti nadobúdania vedomostí a táto rýchlosť je konštantná.

Rýchlosť nadobúdania vedomostí $\mathbf{v}$, ale v skutočnosti nie je konštanta nezávislá na čomkoľvek. Táto **rýchlosť** by mohla závisieť na aktuálnom množstve vedomostí. Čím viac vedomostí máme, tým obťiažnejšie možno prijímať nové vedomosti, nakoľko je komplikovanejšie ukladať nové poznatky do rozsiahlej siete predchádzajúcich. Teda čím viac poznatkov, tým menšia je rýchlosť $\mathbf{b}$ prijímania nových poznatkov a v dôsledku toho je menšia rýchlosť učenia $\mathbf{v}$. Alebo inak, čím viac vedomostí máme, tým sme starší, čo znamená, že schopnosť absorbovať poznatky sa znižuje, teda rýchlosť zabúdania $\mathbf{c}$ je väčšia; opäť dôsledkom toho je nižšia rýchlosť učenia $\mathbf{v}$. Na základe oboch úvah vyplýva, že veličina $\mathbf{v}$ závisí na veličine $\mathbf{x(t)}$ a to tak, že čím je väčšie $\mathbf{x(t)}$, tým je menšia hodnota $\mathbf{v}$. Opäť budeme predpokladať, že táto závislosť je **lineárna** a teda

$$v = -a \cdot x(t) + V, \tag{1.18}$$

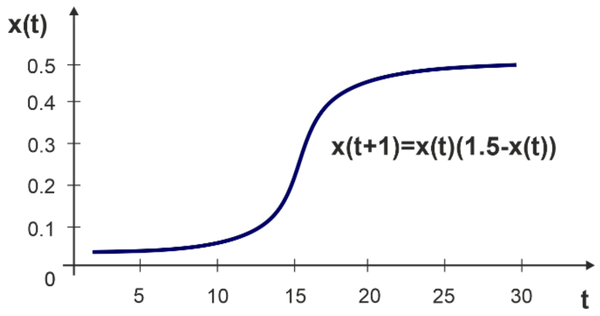
kde **a** a **V** sú kladné konštanty; veličina **V** vyjadruje maximálnu možnú rýchlosť nadobúdania vedomostí, t. j. rýchlosť nadobúdania vedomostí mysľou nezaťaženou, koeficient **a** predstavuje spomalenie tejto schopnosti vplyvom už prijatých vedomostí. Výsledný model bude mať teda tvar

$$\delta x(t) = -a \cdot x(t) + V\,. \tag{1.19}$$

Relatívny prírastok vedomostí závisí **lineárne** na aktuálnom stave vedomostí. Rozpísaním relatívneho prírastku $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x(t)}$ a jednoduchou úpravou výrazu možno tento model prepísať na tvar

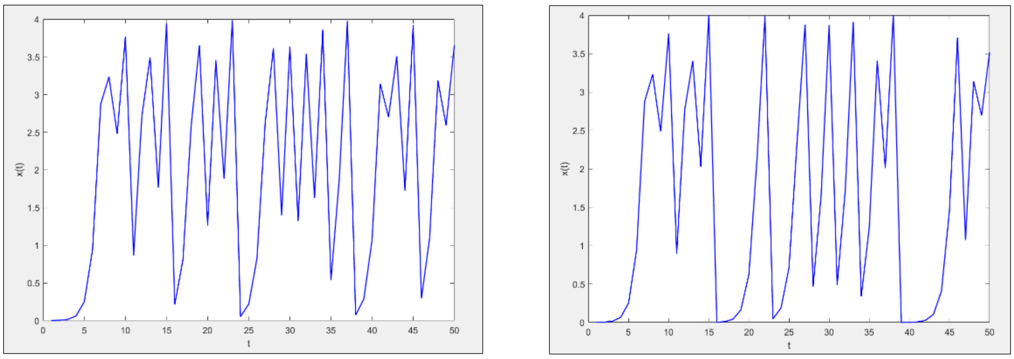
$$x(t+1) = x(t) \cdot \big(1 + V - a \cdot x(t)\big)\,, \tag{1.20}$$

teda na **nelineárnu závislosť** množstva vedomostí v nasledujúcom časovom okamžiku na aktuálnom množstve vedomostí. Množstvo vedomostí v čase $\mathbf{t}$ už všeobecnejšie nie je možné vyjadriť žiadnou inou formulou. Zo znalosti počiatočnej hodnoty $\mathbf{x(0)}$ možno vypočítať hodnotu $\mathbf{x(1)}$, z tej potom hodnotu $\mathbf{x(2)}$ atď. Závislosť množstva vedomostí na čase je pre uvažované hodnoty $\mathbf{V = 0.5}$, $\mathbf{a = 1}$ a $\mathbf{x(0) = 0.001}$ znázornená na Obr. 1.9. Ako možno vidieť, pri tomto zobrazení sa jedná o závislosť **nelineárnu**. Táto závislosť je navyše **monotónna**; množstvo vedomostí rastie s časom $\mathbf{t}$.



Obr. 1.9. Graf postupnosti x(t) generovanej modelom x(t+1)=x(t)(1.5-x(t)) s počiatočnou hodnotou x(0)=0.001

Zaujímavejšie výsledky dostaneme napr. pri voľbe parametrov $\mathbf{a = 1}$ a $\mathbf{V = 3}$. Časový priebeh veličiny $\mathbf{x(t)}$ s počiatočnou hodnotou $\mathbf{x(0) = 0.001}$ je znázornený na Obr. 1.10 (a) a priebeh s počiatočnou hodnotou $\mathbf{x(0) = 0.001001}$ zase na Obr. 1.10 (b).



(a) (b)

Obr. 1.10. Graf postupnosti x(t) generovaný modelom $x(t+1) = x(t)\big(4 - x(t)\big)$ s počiatočnou hodnotou (a) $x(0) = 0.001$ a (b) $x(0) = 0.001001$

Predovšetkým možno vidieť, že závislosť je od istého času **nelineárna**, na grafe sú viditeľné skoky hore a dole (matematicky povedané, závislosť nie je **monotónna**). V takomto prípade žiadna voľba stupnice na žiadnej osi nezobrazí závislosť ako **lineárnu**. Máme teda prvý prípad akejsi **nelinearity**. Inou vlastnosťou časového priebehu je jasná nepravidelnosť skokov. Ďalšia vlastnosť, ktorá stojí za pozornosť je, že pri zmene počiatočnej hodnoty $\mathbf{x(0)}$ z $\mathbf{0.001}$ na $\mathbf{0.001001}$, teda o jedno promile, sa obrázok úplne zmenil, prvá polovica Obr. 1.10 (a) je úplne iná, než pravá polovica Obr. 1.10 (b). Malá zmena počiatočnej hodnoty vyvolala veľkú zmenu priebehu veličiny. Veličina $\mathbf{x(t)}$, ktorá je generovaná jednoduchým **lineárnym modelom** $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x(t)} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{x(t)} + \mathbf{V}$ v konkrétnom tvare

$$\delta x(t) = -x(t) + 3\,, \tag{1.21}$$

má všetky vlastnosti, ktoré charakterizujú **chaos**. Veličina generovaná tým istým modelom s trochu iným parametrom $\mathbf{V}$, teda modelom

$$\delta x(t) = -x(t) + 1\,, \tag{1.22}$$

vykazuje vlastnosti také, že malá zmena **nezávislej premennej** vyvolá malú zmenu **závislej premennej**. Z pohľadu na graf možno o priebehu povedať prakticky všetko. Hodnota $\mathbf{x(t)}$ narastie k istej hodnote (presne k hodnote $\mathbf{0.5}$, všeobecne vyjadrené k hodnote $\mathbf{V/a}$), ktorá predstavuje akúsi kapacitu mysle.

1.5 VLASTNOSTI MATEMATICKÉHO MODELU

Statický model býva prevažne zapísaný nejakých systémom rovností, ktoré vyjadrujú **štruktúru modelovaného javu** v širokom zmysle tohto slova . Pre **dynamický model** je typické, že je tvorený nejakým systémom **dynamických rovníc**. Ich riešenie popisuje správanie sa modelovaného procesu v čase **t**. Preto býva požadované, aby **model** a jeho príslušné rovnice mali nasledovné vlastnosti:

1. existencia riešenia,
2. jednoznačnosť riešenia,
3. spojitá závislosť na vstupných údajoch modelu.

Prvá vlastnosť je jednoznačne nutná. **Model**, ktorý by nemal riešenie, nemôže nič modelovať – buď by modelovaný dej nemohol prebiehať, alebo by boli rovnice nesprávne. Požiadavka, aby existovalo riešenie, však neznamená, že toto riešenie musíme poznať alebo byť schopní toto riešenie nájsť. Na projekciu z modelu často plne postačuje **matematická analýza** príslušných rovníc (napr. s využitím metód kvalitatívnej teórie diferenciálnych rovníc) alebo približné riešenie nájdené **numerickým spôsobom** (čo je ďalší dôvod, prečo neexistuje ostrá hranica medzi **matematickými** a **počítačovými** modelmi).

Pokiaľ by **model** nebol jednoznačne riešiteľný, nebol by vhodný na projekciu procesu; nebolo by totiž jasné, ktoré z jeho viac riešení sa bude realizovať. Ak nemá **model** jednoznačné riešenie neznamená to však, že je to zlý **model**.

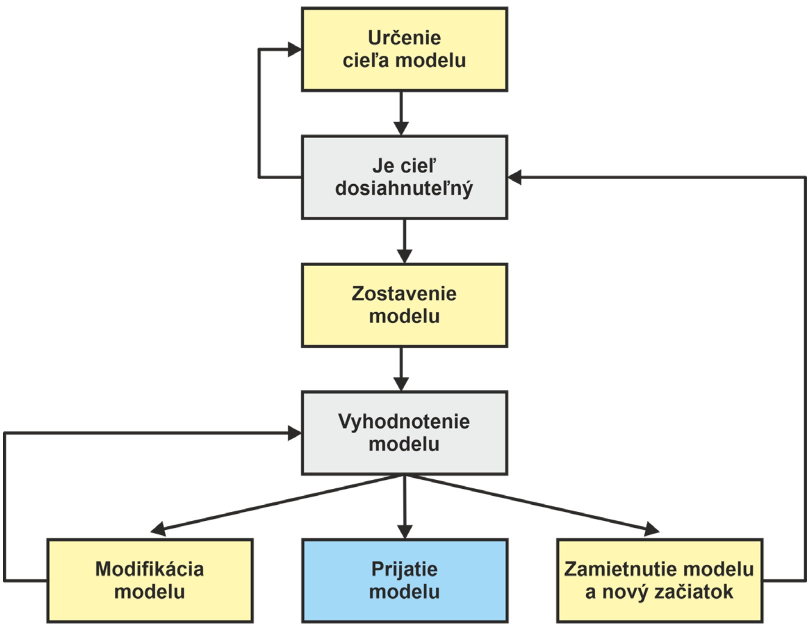
Nejednoznačný totiž môže byť aj modelovaný dej (pokiaľ však netrváme na tom, že Laplaceov determinizmus je pravdivým vyjadrením skutočnosti). V prípade **stochastických modelov** je riešením nejaká náhodná funkcia, zobrazenie času **t** do množiny náhodných veličín. V takomto prípade požadujeme, aby bola jednoznačne určená časovo závislá **distribučná funkcia** príslušnej **náhodnej veličiny**.

Spojitá závislosť na vstupných dátach modelu je podmienkou pre praktickú použiteľnosť **modelu**. Pokiaľ malá zmena vstupu vyvolá veľkú zmenu výstupu, nemôžeme nič projektovať. Všetky údaje totiž poznáme len s istou obmedzenou presnosťou a pri nespojitej závislosti riešenia by sme dostali výsledky s chybou väčšou než je prijateľná medza; presnejšie povedané, takéto výsledky dostať, je neprijateľné, nakoľko sa objavuje ďalšia **neistota**. Pokiaľ riešenie nezávisí na vstupných údajoch spojite a máme istotu, že model je správny (alebo máme aspoň dobrý dôvod si myslieť, že tomu tak je), vieme iba to, že nič o možnej budúcnosti nevieme povedať. Populárna interpretácia je, že „mávnutie motýlích krídiel nad Tokiom vyvolá hurikán na Floride", nič nevysvetľuje; naopak predstiera znalosť, ktorá principiálne nie je možná.

Typický príklad nespojitej závislosti na počiatočných podmienkach je znázornený na Obr. 1.10 (a) a (b). Možno vidieť, že projektovaný priebeh deja sa v oboch obrázkoch zhoduje zhruba po prvých štrnástich časových jednotkách. Toto pozorovanie ukazuje potrebu ďalšej analýzy modelov; určiť alebo odhadnúť čas, po aký je pri známej presnosti poznania vstupných údajov riešenie ešte prijateľné. V každom prípade nie sú modely, u ktorých riešenie závisí na vstupných dátach nespojito, použiteľné na **asymptotickú** analýzu procesov, t. j. na určenie dlhodobých trendov, ale iba na analýzu **transientnú**, t. j. na popis dynamiky v krátkom časovom intervale.

1.6 PROCES MODELOVANIA

Na nasledujúcom Obr. 1.11 sú schematicky znázornené kroky, z ktorých pozostáva **zostavenie**, **testovanie** a prípadne **modifikácia** modelu.



Obr. 1.11. Schéma procesu modelovania

Prvý krok, t. j. **určenie cieľa modelu** je podstatným krokom procesu **modelovania**; aj napriek tomu ostáva často opomenutý. Spočíva v rozhodnutí k čomu presne bude daný model určený. Od modelu nemôžeme chcieť, aby bol správnym modelom do najmenších detailov, ale môžeme trvať na tom, aby bol modelom užitočným. Užitočnosť modelu je určená jeho cieľom a hodnotou tohto cieľa.

Dôležitým aspektom pri zostavovaní cieľa je rozhodnutie, na akom mieste škály medzi **teoretickými** a **praktickými** modelmi má byť model vytvorený. Teda či chceme použiť model k porozumeniu systému a k jeho interpretácii, alebo k **predpovedi** jeho správania sa, ktorý sa už bude vyvíjať sám alebo pod vplyvom nejakých vonkajších zásahov. Ďalším dôležitým rozhodnutím je, akú **numerickú presnosť** budeme od modelu požadovať. Presná odpoveď alebo **projekcia** býva často cieľom praktických aplikácií. Pokiaľ je však hlavným cieľom teoretické porozumenie, môže stačiť, keď model poskytne správne znamienko alebo nejakú inú rozumnú **kvalitatívnu** odpoveď; napr. liek **A** je skutočne účinnejší ako liek **B**, systém sa neustáli v nejakej rovnovážnej polohe, ale bude oscilovať a pod.

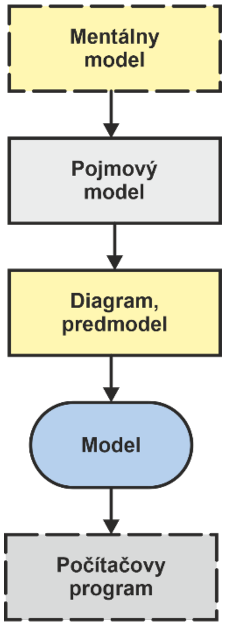
Ďalším krokom je posúdenie dosažiteľnosti cieľa. Najobvyklejšou prekážkou je čas alebo dostupnosť údajov. Pokiaľ sa jedná o odhad potrebného času, je na mieste **pesimizmus**, hlavne v prípade začiatočníkov v procese **modelovania**. Z tohoto dôvodu je dobré začať s malým projektom, ktorý prípadne môže byť v budúcnosti rozšírený na nejaký komplexnejší projekt alebo s jednoduchým modelom, ku ktorému možno neskôr pridať doplňujúce alebo rozširujúce podrobnosti.

Naproti tomu odhad, toho či sú dostupné všetky potrebné dáta, môže byť **optimistický**. Začiatočníci často dospejú k záveru, že projekt je neriešiteľný, lebo chýbajú nejaké údaje. Ale modely mávajú niekoľko parametrov alebo predpokladov, ktoré majú iba malý alebo žiadny vplyv na relevantné aspekty správania modelu. Jediný spôsob ako poznať, či nejaké údaje sú skutočne potrebné, je uskutočnenie analýzy **citlivosti** (**senzitivity**) alebo **elasticity** (kvantifikácie vplyvov jednotlivých zložiek modelu na výsledné správanie modelu).

Princípu tvorby **dynamického modelu** bude venovaná nasledujúca kapitola, vyhodnotenie modelu závisí na tom, o aký model sa jedná. Posledným krokom procesu modelovania je rozhodnutie sa, či daný model prijmeme a či nie. V druhom prípade je treba posúdiť, či celú prácu zahodíme a začneme odznovu, alebo či sa model stanovenému cieľu aspoň priblížil a stačilo by ho nejako modifikovať. Na tomto mieste je dobré upozorniť, že matematický model nemusí byť vôbec **správny** , ale môže byť zlý, pokiaľ zanedbáva nejaký dôležitý jav alebo dej.

Jeden model však môže byť lepší než ten druhý v tom zmysle, že lepšie dosahuje svoj cieľ, napr. presnejšie projektuje možný vývoj alebo dáva lepší pohľad do problému. **Model** lepší z jedného hľadiska môže byť na druhej strane horší z hľadiska iného. Nezanedbateľné je pritom samozrejme hľadisko **jednoduchosti modelu**. Napr. Ptolemaiov model slnečnej sústavy poskytoval presnejšie predpovede postavenia planét na nebeskej sfére než **Koperníkov**; ten však bol jednoduchší, umožnil slnečnú sústavu pochopiť na novo a v dôsledku toho po konfrontácií s pozorovanými údajmi mohol byť **Keplerov model** spresnený. Vlastne Koperníkovou zásluhou nebolo objavenie pravdivej teórie, ale nadobudnutie nového plodného aspektu.

Ďalej poznamenajme, že nie je nutné sa snažiť hneď zostaviť nejaký najlepší model (vzhľadom k stanovenému cieľu). Užitočnejšie môže byť zostavenie jednoduchého modelu a až po vyjasnení, čo danému modelu chýba alebo v čom nám **model** nevyhovuje ho môžeme **modifikovať**. Takáto postupnosť pri tvorbe modelov môže byť užitočným a poučným vedľajším výsledkom nájdenia lepšieho modelu.



Obr. 1.12. Etapy zostavovania modelu

1.7 ZOSTAVENIE DYNAMICKÉHO MODELU

Obr. 1.12 zobrazuje výsledky základných etáp pri tvorbe modelu. Skutočnosť, že niečo rozpoznávame ako **systém**, je vyjadrená pojmom prevzatým z kognitívnej vedy – máme na mysli **mentálny model** tohto systému. **Mentálny model** je tvorený názorom systému (súhrnom všetkých vnemov, ktoré nám sprostredkovali naše zmysly) zasadením do súvislosti informácií uložených v pamäti. Už z tohto vymedzenia je zrejmé, že mentálny model jedného systému sa líši od človeka k človeku. Aj keby všetci na model nazerali rovnako, v pamäti majú rôzne spomienky a vedomosti.

Vlastné vyjadrenie **matematického modelu** začína zamyslením sa, z akých zložiek sa študovaný **systém** skladá, t. j. aké veličiny (teda pojmy možno kvantifikovať) a procesy sú v ňom najdôležitejšie. Tie môžu vyplynúť z výsledkov pokusu alebo pozorovania; takisto z nameraných dát alebo predpokladov, ktoré si o systéme vytvárame a odvodzujeme z nich výsledky. Zložky systému je užitočné rozlíšiť na

1. veličiny vo vnútri systému (**endogénne**), ktoré sa v priebehu času môžu meniť,
2. veličiny mimo systém (**exogénne**), ktoré však systém ovplyvňujú a môžu sa v čase meniť,
3. veličiny, ktoré sa v dobe študovaného vývoja systému nemenia.

Jedinou dôležitou otázkou je výber úrovne rozlíšenia podrobností. Napr. za zložku systému môžeme vziať skupinu obyvateľov rovnakého veku (potom si predstavujeme, že jedinci vo vnútri tejto skupiny sú identickí, aj keď v skutočnosti nie sú), jednotlivých obyvateľov alebo naopak skupiny ešte väčšie (napr. produktívni ľudia a tí ostatní). Tomuto procesu sa hovorí **agregácia**. Príliš vysoký stupeň agregácie vedie k tomu, že **agregovaná zložka** nič nevypovedá o skutočnom stave **systému**; na druhej strane, malá **agregácia** s sebou nesie nebezpečie, že výsledný model bude príliš komplexný v rozpore s cieľom **modelovania**.

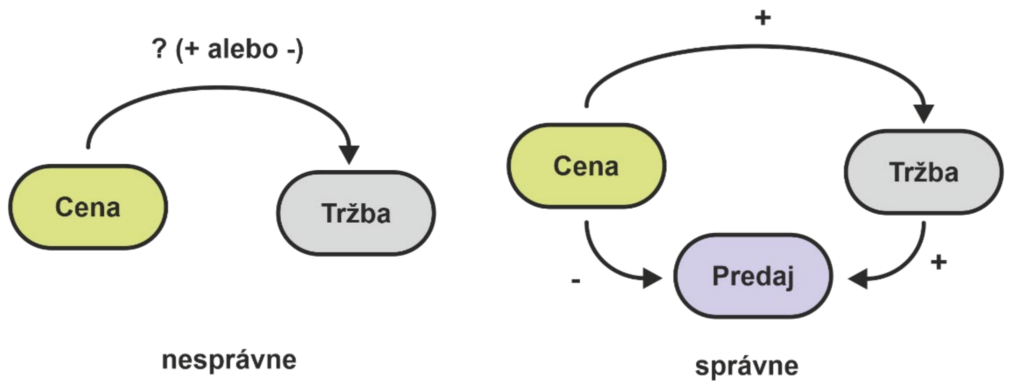
Podobným problémom ako **agregácia** je rozpoznanie premenných, ktorých zmena ovplyvňuje systém len v malej miere. Potom možno premenné, ktoré sa menia v priebehu času, považovať za konštantné. Pri výbere zložiek modelu si treba taktiež rozmyslieť, ktoré zložky systému na sebe vzájomne pôsobia alebo môžu pôsobiť. Výsledkom tohoto rozmyslenia, prvej etapy tvorby **modelu**, je **pojmový model**, zoznam pojmov, ktoré sa v modelu majú vyskytovať.

Užitočným krokom je tieto pojmy vyjadriť grafickou formou. Nejakým spôsobom zobraziť zložky systému a väzby medzi nimi, t. j. znázorniť, ktorá zložka ovplyvňuje zložky iné. Výsledkom tejto etapy je potom **schéma systému**, **diagram** jeho **štruktúry**. **Schéma štruktúry** je úrovňou abstrakcie niekde medzi **systémom** a **matematickým** modelom, ktorú nie je možné ďalej nijako analyzovať alebo z nej vyvodzovať závery (štruktúra systému ešte negeneruje ani nedeterminuje jeho správanie). Tejto abstrakcii sa niekedy hovorí **predchodca modelu**.

Používaným spôsobom grafickej reprezentácie systému je tzv. príčinný **slučkový diagram** (**CLD** – z angl. casual loop diagram). Ide o hranovo ohodnotený orientovaný graf. Jeho vrcholy zastupujú zložky systému, orientovaná hrana vedúca zo zložky **Σ** do zložky **Π** vyjadruje takú **väzbu**, že zložka **Σ** ovplyvňuje zložku **Π**. Hrany sú ohodnotené symbolmi **(+)** a **(-)**, ktoré vyjadrujú ich polaritu; ohodnotenie **(+)** hrany vedúcej zo zložky **Σ** do zložky **Π** vyjadruje, že zložka **Σ** narastá, zosilňuje, zintenzívňuje zložku **Π**, ich ohodnotenie **(-)** naopak, že **Σ** zoslabuje **Π**. Graf samozrejme môže obsahovať slučky (to ale nie sú slučky typu **CLD**). Cyklus v grafe vyjadruje **spätnú väzbu** systému. Ich polarita je určená počtom hrán s polaritou **(-)** v tomto cykle; ak je tento počet **párny**, považujeme spätnú väzbu za **pozitívnu** (zosilňujúcu), naopak ak je **nepárny**, považujeme ju za **negatívnu** (vyrovnávajúcu).

Pokiaľ sa nedarí určiť polaritu väzby, je to signálom, že pravdepodobne chýba nejaká dôležitá zložka systému. Napr. **cena** určite ovplyvňuje **tržbu**; možno zdôvodniť, prečo ju zväčšuje, rovnako prečo ju zmenšuje. Je teda potrebné zahrnúť ďalšiu zložku systému – **predaj**. **Cena** ovplyvňuje predaj **negatívne** (vyššia cena predaj zmenšuje), predaj spolu s **cenou** ovplyvňuje tržbu **pozitívne** (zväčšenie predaja pri pevnej cene tržbu zvýši, zvýšenie ceny pri nezmenenom predaji tržbu taktiež zvýši). Správny diagram tohoto jednoduchého **systému** je zobrazený na Obr. 1.13 vpravo, nie však ten vľavo.

Ďalšou dôležitejšou etapou je vytvorenie vlastného **matematického** alebo **počítačového modelu**. Tu závisí na tom, v akom tvare model chceme mať, či ako systém dynamických rovníc, alebo iných typov rovníc.



Obr. 1.13. Príklad: polarita vplyvu ceny na tržbu

Podľa **schémy** na Obr. 1.11 má po zostavení modelu nasledovať jeho **vyhodnotenie**. To možno uskutočniť v prípade, že máme model matematický a dostatočne jednoduchý, t. j. možno ho analyzovať matematickým spôsobom. To samozrejme nenastáva vždy; môžeme mať napr. komplikovaný praktický model na presnú predikciu. Potom jedinou cestou k vyhodnoteniu modelu je jeho počítačová reprezentácia, nejaký program, ktorý numericky rieši príslušné rovnice a pod. Po procese modelovania teda nasleduje **simulácia modelu**.

K tomuto účelu možno často využiť existujúce programové prostriedky; najjednoduchšie dynamické modely možno simulovať i v prostredí tabuľkových procesorov (**MS Office**, **OpenOffice** a pod.), na simuláciu a grafickú reprezentáciu riešenia tých zložitejších možno využiť prostredie pre numerické alebo symbolické výpočty (**Matlab**, **Mathematica**, **Maple**). Pre modely vo forme piktogramov sú priamo určené programy **Vensim**, **Stella** alebo **Powersim**. V rámci tejto knihy na simuláciu využijeme najprofesionálnejší program na trhu – **Matlab** a jeho nadstavbu **Matlab/Simulink**, ktorý je primárne určený na použitie pre technických inžinierov zaoberajúcich sa problémami mechatroniky.

2 SIMULÁCIA

2.1 HISTÓRIA POČÍTAČOVEJ SIMULÁCIE

Pojednanie o využití metódy počítačovej simulácie začneme pohľadom do histórie. Odhliadnuc od teoretických práci v oblasti pravdepodobnostnej štatistiky, datujeme prvé významnejšie využitie simulácie do roku 1930, keď fyzik **Enrico Fermi** využil simulácie náhodných premenných vo výpočtoch, aby popísal vlastnosti novo objaveného neutrónu. V rokoch 1941–1946 v rámci projektu s názvom **„Manhattan Project"** vedeného fyzikom **J. Robertom Oppenheimerom**, bola vyvinutá nukleárna zbraň (atómová bomba) aj s pomocou využitia metódy **Monte Carlo**. Metódu simulácie ďalej spopularizovali fyzici **Stanislaw Ulam**, **John von**

Neumann a **Nicolas Metropolis**. Práve **Ulamov** strýko, ktorý si požičiaval peniaze na účely hazardu v monackých kasínach, inšpiroval názvom svetoznámych oblasti kasín **Monte Carlo**.

Práve práca s náhodnými premennými vyvoláva spojitosť s hazardom v kasínach. Rozvoj kvality i prístupnosti výpočtovej techniky sa počítačová simulácia a metóda **Monte Carlo** postupne začala čoraz častejšie využívať vo vedných disciplínach ako **fyzika**, **chémia**, **ekonómia**, ale aj **psychológia**, **sociológia**, či už odvetviach **operačného výskumu**.

2.2 SIMULÁCIA MODELU SYSTÉMU

Pojem **simulácia**, prípadne **simulovanie** možno definovať na rôznom stupni všeobecnosti. Asi najvšeobecnejšia je definícia pomocou synoným **predstierať** alebo **napodobňovať**. **Simuláciu** môžeme teda definovať ako imitáciu reálnych **vecí**, **stavov**, **vzťahov** alebo **procesov**. Existujú aj definície presnejšie no vyššia presnosť je dosiahnutá na úkor všeobecnosti. Literatúra napríklad uvádza nasledujúcu definíciu: „**Simulácia** je **numerická** metóda zložitých pravdepodobnostných dynamických systémov pomocou experimentovania s **počítačovým modelom**.“. Ide, ale zjavne o špecifický typ simulácie, ktorý nazývame **počítačová simulácia**. V prevažnej časti učebnice budeme pojmom simulácia rozumieť práve **simuláciu počítačovú**, pretože túto využívame pri modelovaní dynamických systémov najčastejšie.

Je vôbec **simulácia** vedecká metóda? Pri hľadaní odpovede na túto otázku je vhodné najskôr pripomenúť, čo myslíme pod pojmom vedecká metóda resp. **metodológia všeobecne**.

Metodológiu možno charakterizovať ako ucelený systém **filozofických** a **všeobecne vedeckých** teoretických princípov, či vedeckých výpovedí, ktoré sa týkajú spôsobu získavania poznatkov o svete alebo spôsobu vytvárania idealizovaného obrazu sveta. **Vedecké metódy** sú aparátom každej vedeckej práce a bez nich nie je možno získať pravdivé, presné, vzájomne súvislé (štruktúrované) a systematické poznanie skutočnosti, čo sú základné nároky kladené na **vedu**.

Metódy môžu byť **špecifické**, používané len určitou vedou alebo vednými disciplínami; alebo **všeobecné** používane všetkými vednými odvetviami. Poznáme nasledovné všeobecné **vedecké metódy**:

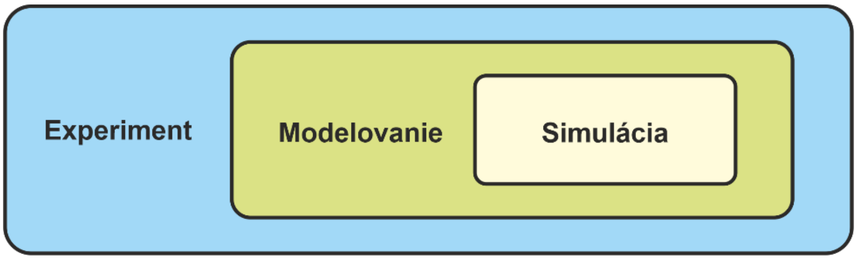
1. pozorovanie,
2. popis a vysvetlenie,
3. meranie a porovnanie,
4. experiment,
5. modelovanie,
6. analýza a syntéza,
7. indukcia a dedukcia,
8. abdukcia.

Na tomto mieste môžeme pristúpiť k zodpovedaniu otázky, ktorú sme položili v úvode kapitoly. **Simulácia** je vedecká metóda a to preto, že predstavuje určitý spôsob získavania poznatkov o svete. Podľa typu **simulácie** potom záleží, či tieto poznatky získavame o **skutočnom svete** alebo o **svete idealizovanom** (v podobe určitého modelu). **Simuláciu** v skutočnom svete môžeme považovať za synonymum **experimentu**.

Simulácia, tak ako ju definuje väčšina zdrojov, pracuje s určitým **modelom**; teda s idealizovanou podobou skutočného sveta. Tento fakt, samozrejme nevylučuje možnosť získania poznatkov o **svete reálnom**. Na určitej úrovni zjednodušenia môžeme povedať, že simulácia predstavuje experiment s modelom. Simulácia sa teda nachádza na pomedzí už vymenovaných **všeobecných vedeckých metód**.

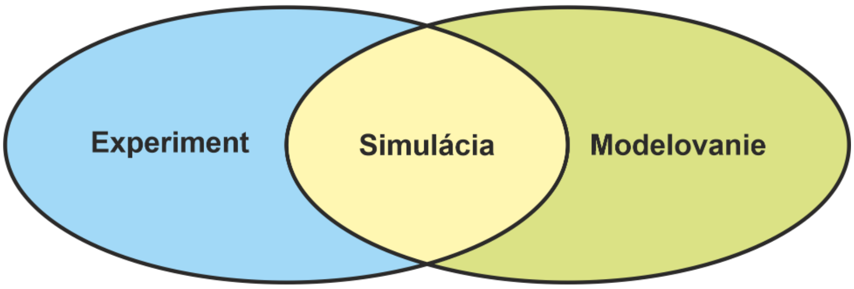
Predpokladom **realizácie simulácie** je vytvorenie určitého modelu. Realizácia **simulácie** potom predstavuje **experiment** s **modelom**. **Modelovanie**, tak ako je definované, sa od simulácie takmer neodlišuje. **Simulácia**, ktorá určite patrí do podmnožiny modelovania, umožňuje rozšíriť záber **skúmania** aj na špecifické typy modelov, v ktorých uvažujeme **náhodne premenné**, teda **premenné** ktorých hodnota je výsledkom realizácie určitého špecifického typu **pravdepodobnostného rozdelenia**.

Realizovať **simuláciu** samozrejme možno aj u **deterministických modelov**. A to obzvlášť v prípadoch, kde by bol výpočet (zistenie) výsledku experimentu s daným modelom príliš zložitý. Postavenie **simulácie** v rámci všeobecných vedeckých metód zobrazuje schéma zobrazená na Obr. 2.1.



Obr. 2.1. Postavenie simulácie v rámci všeobecných vied I.

V prípade ak by sme **modelovanie** chápali iba ako proces tvorby modelu, mohli by sme **simuláciu** schematicky znázorniť podľa Obr. 2.2.



Obr. 2.2. Postavenie simulácie v rámci všeobecných vied II.

Okrem **počítačovej simulácie** poznáme i tzv. **simuláciu fyzickú**, či **interaktívnu**. Odlišnosť týchto typov **simulácií** tkvie predovšetkým v povahe použitého **modelu**. **Fyzická simulácia** na rozdiel od počítačovej simulácie využíva **fyzické objekty**, ktorými je nahradzovaný **reálny svet**. Môže sa jednať o určité napodobeniny reálnych objektov, či celých systémov v podobe rôznych trenažérov lietadiel alebo lodí simulujúcich reálny svet, či už virtuálnych počítačových hier a pod.

2.3 ZÁSADY, METÓDY A POSTUPY POČÍTAČOVEJ SIMULÁCIE

Zobraziť realitu pomocou modelu a následne s modelom realizovať experiment prostredníctvom **počítačovej simulácie**, nie je jednoduchou záležitosťou. Vedecký pracovník musí okrem znalostí študovaného odboru ovládať i **matematické**, **štatistické** a **informatické** metódy a postupy. Ani to však nezaručuje, že prostredníctvom **počítačovej simulácie** správne zachytí zložitú spleť vzťahov skúmanej reality.

Aj napriek faktu, že korektná **počítačová simulácia** záleží do istej miery na „cite“, či „umení“ **vedca – analytika**, existujú určité všeobecné zásady, metódy a postupy, ktorých by sa mala realizácia **počítačovej simulácie** pridržiavať. Model sa v prípade **počítačovej simulácie** stáva v konečnej podobe **počítačovým programom**, ktorý by mal zachytiť štruktúru **modelovaného systému**, jeho dynamiku a taktiež jeho pravdepodobnostný charakter.

V procese tvorby **štruktúry modelu** je dôležitá perfektná znalosť skúmaných systémov, predovšetkým vzájomných vzťahov medzi entitami, **stavovými premennými** i **systémami** navzájom. Precízne vybudovaný model so správne nadefinovanou štruktúrou je základnou podmienkou korektne realizovanej **simulácie**. V procese tvorby modelu bývajú využívane takmer všetky **všeobecné vedecké metódy**. Práve **dynamika modelovaného systému** je kľúčová z pohľadu využitia **matematicko-štatistického** aparátu. Dôležité je identifikovať dynamiku systému a následne vybrať a nastaviť príslušný matematický aparát. Obvyklé sú možnosti využívaného aparátu podľa nasledujúcej tabuľky.

Tabuľka 2.1. Matematický aparát použitý v závislosti na type modelu

	Čas spojitý	**Čas diskrétny**
Stavy spojité	diferenciálne rovnice	diferenčné rovnice
Stavy diskrétne	simulácie diskrétnych udalostí	Markove reťazce

Pravdepodobnostný charakter výskytu udalostí, ktoré ovplyvňujú **stavové premenné**, či **atribúty entít**, kladú na model požiadavky aplikovať **generovanie náhodných čísel** alebo **generovanie hodnôt náhodných veličín** podľa určitého **pravdepodobnostného rozdelenia**. Problematika generovania pseudonáhodných čísel je v dnešnej dobe jednoducho riešiteľná pomocou využitia výpočtovej techniky. K určeniu typu vhodného typu rozdelenia môžeme využiť testy dobrej zhody napr. **test chí-kvadrát**, **Kolmogorov-Smirnovov test**, či jednoduchú vizuálnu analýzu **histogramu**.

K transformácii **náhodného čísla** na hodnoty náhodných veličín možno využiť metódu inverznej transformácie, zamietaciu metódu, kompozičnú metódu alebo opäť vhodný počítačový program, ktorý s niektorou z vhodných metód spolupracuje. Medzi najčastejšie typy pravdepodobnostných rozdelení patrí napr. **exponenciálne** rozdelenie, **rovnomerné** rozdelenie, **normálne** rozdelenie, **logaritmicko-normálne** rozdelenie, **geometrické** rozdelenie, **binomické** rozdelenie, **Poissonovo** rozdelenie, **hypergeometrické** rozdelenie a ďalšie iné.

2.4 METODIKA POSTUPU SIMULÁCIE

Simulácia predstavuje určitý nástroj, ktorým sa dá namodelovať reálny systém vo virtuálnom prostredí, kde môžeme zobraziť riešenia v čase **t** oveľa rýchlejšie, ako by daný dej alebo proces prebiehal v skutočnosti. **Simulácia** je proces tvorby modelu reálneho systému a uskutočnenia experimentov na tomto modeli, za účelom dosiahnutia lepšieho pochopenia správania sa študovaného systému alebo za účelom posudzovania rôznych variantov činnosti systému.

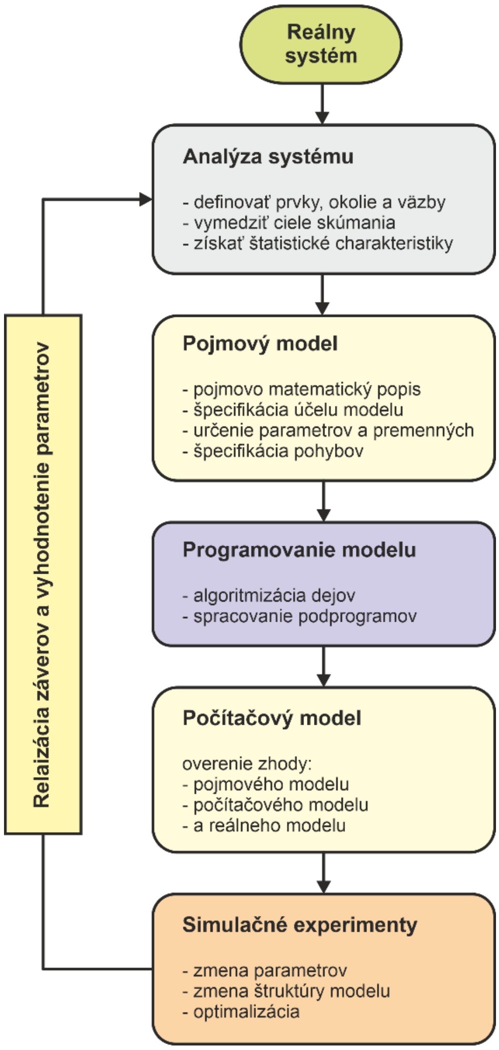
Pomocou **simulácie** môžeme testovať ľubovoľné varianty riešení daného problému. **Vizualizácia** nám napomáha lepšie pochopiť správanie procesov na všetkých úrovniach. Taktiež nám odkrýva nepresnosti v údajoch pri študovaných systémoch. Využitie procesu **simulácie** pri skúmaní **matematického modelu**, ktorý je náhradou **reálneho systému** má viac výhod ako nevýhod.

Výhodou **simulácie** je, že:

- umožňuje skúmanie **komplexných systémov** (existujúcich alebo navrhovaných),
- šetrí **náklady** (nie je nutné vytvárať fyzické modely),
- umožňuje **spomaliť** alebo **urýchliť** čas vo virtuálnom priestore,
- umožňuje tvoriť **experimenty** na vytvorenom modeli,
- pri simulácií neovplyvňujeme činnosť reálneho systému,
- použitie **simulácie** umožňuje lepšie **pochopenie reálneho systému**,
- umožňuje využiť **simuláciu** napr. pri školení pracovníkov.

Nevýhodou simulácie:

- je to, že vyžaduje pri vytváraní **odborné znalosti**,
- nie je vždy zaručené získanie optimálnych hodnôt skúmaných parametrov systému,
- vytvorenie **komplexného systému** môže byť mnohokrát časovo náročné,
- čím zložitejší **reálny systém** je, tým obťažnejšia bude tvorba daného **matematického modelu**.



Obr. 2.3. Metodika postupu simulácie

Pri vytváraní **simulačného projektu** je vždy potrebné pridržiavať sa základnej metodiky a postupu simulácie systému. Pomocou metodiky simulácie systémov, ktorej schéma je znázornená na Obr. 2.3, môžeme predpokladať riešenie nasledujúcich úloh:

- **Analýza problému** a **systému** – rozpoznanie a definícia problému; organizácia pracovného tímu; definícia systému; vymedzenie cieľov skúmania a ujasnenie predpokladaných nákladov; zber a štatistické spracovanie údajov a informácií o skúmanom systéme.
- **Formulácia** a vytvorenie **pojmového modelu** – špecifikácia účelu modelu; určenie komponentov, parametrov a premenných modelu, špecifikácia funkčných vzťahov.
- Vytvorenie **počítačového modelu** systému.

Simulácia systémov sa používa ako nástroj a metóda skúmania existujúcich a navrhovaných systémov. Jej princíp spočíva vo vyvodzovaní úsudkov o simulovanom systéme pomocou experimentov s jeho **simulačným modelom**.

3 DYNAMICKÉ SYSTÉMY

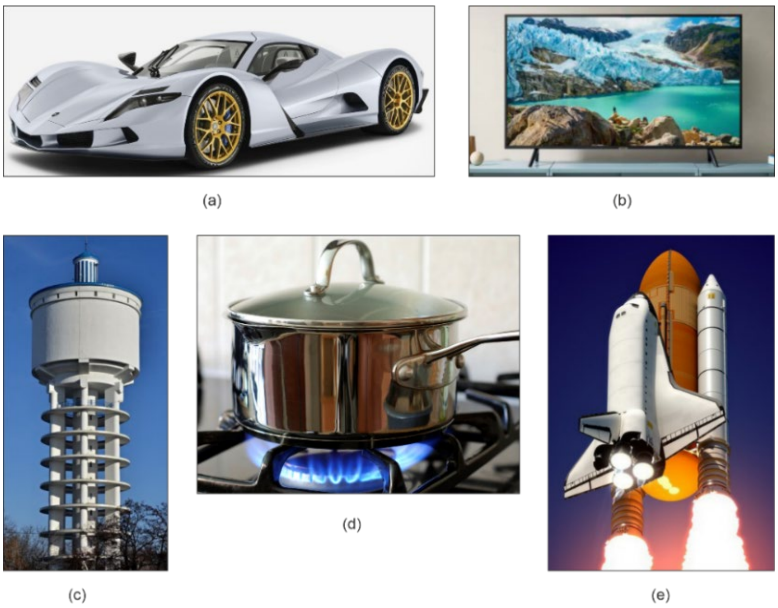
V tejto kapitole sa budeme venovať popisu základných **fyzikálnych dynamických systémov**, ktoré môžeme nájsť v rôznych inžinierskych disciplínach. Zameriame sa hlavne na popis, ako vyriešiť **diferenciálne rovnice** matematického modelu **analytickým** resp. **numerickým** spôsobom. Celá kapitola knihy bude slúžiť na predstavenie základných **fyzikálnych systémov** z rôznych inžinierskych disciplín, ktorými sa podrobnejšie budeme zaoberať v nasledujúcich kapitolách.

Pre tieto dynamické systémy bližšie vysvetlíme princíp modelovania a odvodenia matematických modelov, ktoré v konečnom štádiu budú charakterizovať resp. opisovať správanie sa riešených dynamických systémov. Každý odvodený matematický model budeme riešiť pre rôzne uvažované vstupné signály, čím dospejeme k riešeniu v podobe odozvy systému. **Modelovanie** inžinierskych **fyzikálnych systémov** si predstavíme použitím zjednoteného prístupu.

Keďže **diferenciálne rovnice**, ktoré reprezentujú **dynamické fyzikálne systémy**, môžu predstavovať rôzne diferenciálne formy; zameriame sa len na vybrané formy, ktoré sú najviac kompatibilné s **matematickými metódami** alebo **numerických postupom** ich riešenia. **Numerický spôsob riešenia** bude v konečnom dôsledku spravidla aplikovaný na prevažnú časť simulácie diferenciálnych rovníc **matematického modelu** v prostredí **Matlab/Simulink**.

3.1 TYPY DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV

Statické systémy majú odozvu výstupu na vstup takú, ktorá je prevažne statická a nemení sa s časom **t**, ak je vstup udržiavaný ako konštantný. Tieto **statické systémy** fungujú spravidla ako jednoduché kalkulačky. To znamená, že výstup má vždy rovnaký okamžitý vzťah so vstupným signálom.



Obr. 3.1. Dynamické systémy: (a) automobil, (b) televízor, (c) vodná veža, (d) varný hrniec, (f) raketoplán

Dynamické systémy majú takú odozvu na vstupný signál, ktorá nie je vždy okamžite priamoúmerná vstupnému signálu alebo rušeniu tohto systému. Tieto systémy reagujú na **vstupné signály**, **rušenia** alebo **počiatočné podmienky**. Príklady **dynamických systémov** možno nájsť všade okolo nás. Môžu byť napr. pozorované v bežných zariadeniach, ktoré využívame v bežnom každodennom živote. Niektoré príklady **dynamických systémov** sú zobrazené na Obr. 3.1. Sú to napr. **automobil**, **televízor**, **vodná veža**, **varný hrniec**, ale aj omnoho sofistikovanejší inžiniersky systém napr. **vesmírna loď** (**raketoplán**), ktorý dokáže doviesť astronautov na mesiac alebo obežnú dráhu Zeme.

Dynamické systémy môžeme nájsť prakticky vo všetkých hlavných inžinierskych disciplínach. Medzi tieto systémy radíme **mechanické systémy**, **elektrické systémy**, **fluidné systémy**, ako aj **tepelné systémy**. Dynamické systémy môžeme okrem inžinierskych disciplín nájsť taktiež aj mnohých neinžinierskych disciplínach. Príkladom takýchto systémoch môžu byť napr. **ekologický systém**, **biologický systém**, **ekonomický systém**, **dopravný systém** a ďalšie iné. Týmito dynamickými systémami, ktorých matematické modely vedú na podobné diferenciálne rovnice ako v prípade inžinierskych systémov, sa však zaoberať nebudeme. Primárne sa zameriame na vyšetrovanie systémov **inžinierskeho typu**.

3.1.1 Mechanické systémy

Systémy, ktoré majú významnú **hmotnosť**, vyznačujú sa zotrvačnosťou a tuhosťou hmoty resp. obsahujú komponenty, ktoré sú schopné pohlcovať **mechanickú energiu**, nazývame **mechanickými systémami**. Tieto systémy sú spravidla budené **silami** alebo **momentami síl**. Pohyb resp. polohu jednotlivých telies, z ktorých sa tieto mechanické systémy skladajú opisujeme prostredníctvom **translačného** alebo **rotačného posunutia**.

Automobil je dobrým príkladom **dynamického systému** tohto mechanického typu, ktorý vykazuje dynamickú odozvu v prípade, že tento automobil zrýchľuje, spomaľuje alebo prekonáva zákrutu na ceste počas svojej jazdy. Teleso automobilu, karoséria a všetky mechanické časti automobilu, ako aj **pružno-tlmiaci systém** auta vykazujú **dynamickú odozvu** polohy vozidla v čase **t**, ak automobil prekonáva prekážku napr. v podobe spomaľovača (retardéra) na ceste.

Lietadlo, ktoré je ďalším príkladom **mechanického systému**, počas letu vykazuje **dynamickú odozvu** letovej rýchlosti a výšky v prípade, že manévruje a letí vzduchom. Stroj na miešanie farby so svojim motorom, ktorý je zavesený na pružinách, taktiež vykazuje **dynamickú odozvu** polohy rámovej konštrukcie, v okamihu keď sa toto zariadenie používa na miešanie farby. Hudobný bubon má **dynamickú odozvu** vibrácií alebo polohy membrány v čase **t**. Konštrukčný rám budovy podobne môže vykazovať dynamickú odozvu alebo vibráciu z dôvodu vonkajšieho zaťaženia od sily vetra alebo pohybu základov budovy.

3.1.2 Elektrické systémy

Elektrické systémy obsahujú elektrické obvody s **odporovými**, **kapacitnými** a **indukčnými** prvkami, ktoré sú budené **napätím** alebo **elektrickým prúdom**. Elektronické obvody môžu taktiež obsahovať aj ďalšie prvky, ako sú napr. **tranzistory**, **zosilňovače** alebo **diódy**. V bežnom živote nemusíme dlho hľadať, aby sme našli príklady takýchto elektrických systémov s dôležitými charakteristikami dynamickej odozvy. **Televízny prijímač** má dynamickú odozvu zväzku elektrónov, ktoré vytvárajú obraz na obrazovke televízora. **Ladiaci obvod televízora**, ktorý nám umožňuje navoliť požadovaný kanál, vykazuje **dynamickú odozvu**. Omnoho jednoduchším príkladom elektrického systému môže byť napr. **elektrický spínač**, ktorý sa vyznačuje **dynamickou odozvu** elektrického napätia a elektrického prúdu; táto sa objaví v okamihu, keď zapneme alebo vypneme svetlo.

3.1.3 Fluidné systémy

Fluidné systémy využívajú otvory, rôzne prekážky, riadiace ventily, akumulátory (zásobníky), dlhé potrubia a akčné členy (čerpadlá) na vybudenie tlaku v kvapaline alebo uvedenie tejto kvapaliny do pohybu. **Vodná veža** vykazuje **dynamickú odozvu** hladiny kvapaliny ako funkciu množstva kvapaliny, ktorá je pumpovaná do tejto veže. A taktiež **dynamickú odozvu** hladiny ako funkciu množstva kvapaliny, ktorá bola z tejto veže odčerpaná na použitie. Ak **záhradná hadica** je náhle blokovaná na svojom konci, počas prúdenia vody touto hadicou, narastajúci tlak v hadici bude vykazovať **dynamickú odozvu**. Prúd vzduchu cez dutinu v trubici spôsobí **dynamickú odozvu**, ktorá sa prejaví generovaním akustického tónu **organovej píšťaly**. Napokon **vodné čerpadlo** bude taktiež charakterizované istou dynamickou odozvou výstupného tlaku počas jeho používania.

3.1.4 Tepelné systémy

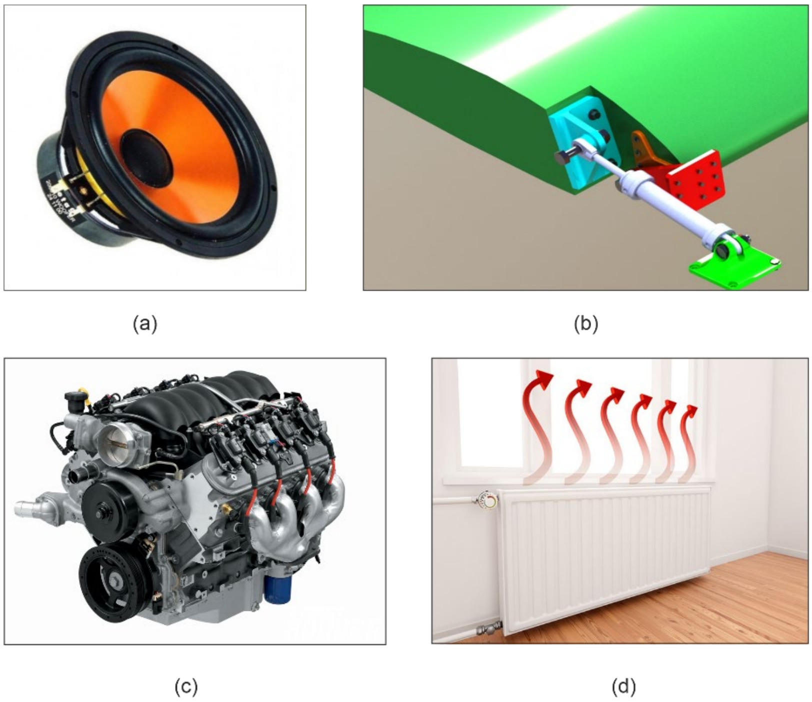
Tepelné systémy majú komponenty, ktoré predstavujú odpor voči **prenosu tepla** (**kondukciou**, **konvekciou** a **vyžarovaním**), ako aj **kapacitné komponenty** (hmotu a mernú tepelnú kapacitu). **Tepelné systémy** sú budené **teplotou** a **tepelným tokom**. Napr. výhrevný **systém klimatizácie domu** má dynamickú odozvu **teploty**, ktorá narastá na dosiahnutie požadovanej hodnoty, ktorá bola nastavená na termostate. Umiestnený **varný hrniec** s vodou na elektrickom sporáku bude vykazovať dynamickú odozvu teploty vody a hrnca. Veľkosť **hrnca** a **materiál**, z ktorého je hrniec vyrobený, množstvo vody v hrnci a taktiež veľkosť variča, to všetko hrá významnú rolu v tom, ako rýchlo sa voda privedie k varu.

3.1.5 Zmiešané systémy

Niektoré z mnohých zaujímavých **dynamických systémov**, s ktorými sa môžeme v praxi stretnúť, využívajú dva alebo viacero z predchádzajúcich spomenutých typov systémov z rôznych inžinierskych disciplín. Tieto **kombinované systémy** nazývame **zmiešanými fyzikálnymi systémami**.

Zmiešané fyzikálne systémy delíme na:

- elektro-mechanické systémy,
- fluidno-mechanické systémy,
- tepelno-mechanické systémy,
- elektro-tepelné systémy.



Obr. 3.2. Zmiešané dynamické systémy: (a) reproduktor, (b) akčný člen vysúvania klapky krídla, (c) spaľovací motor, (d) radiátor

Príklady takýchto **zmiešaných systémov** sú znázornené na Obr. 3.2. **Elektro-mechanické systémy** sú systémy využívajúce elektromagnetické prvky, ktoré transformujú **elektrický prúd** (**elektrické napätie**) na **mechanické sily** (**momenty**). Takéto elektromagnetické prvky týchto systémov vykazujú dynamickú odozvu. Príkladom elektro-mechanických systémov môžu byť napr. **reproduktor stereo systému**, **elektromagnetický ovládač** príp. **elektromotor** (translačného alebo rotačného charakteru). V **reproduktore** sa mení elektrický prúd zo zosilňovača na pohyb membrány reproduktora v kuželi a neskoršie tlakové kolísanie vzduchu spôsobuje, že počujeme zosilnený zvuk.

Fluidno-mechanické systémy sú systémy, ktoré môžu byť **hydraulické** alebo **pneumatické**. **Hydraulické** a **pneumatické** systémy s fluidno-mechanickými prvkami premeny energie vykazujú dynamické správanie sa. Príkladom je napr. **hydraulické čerpadlo**, ventil riadený akčným členom resp. hydraulický motor. **Hydraulický servo systém**, ktorý sa používa napr. na riadenie letu lietadla pomocou klapky krídla, je taktiež dobrým príkladom multi-kombinovaného **elektro-fluidného-mechanického** systému.

Tepelno-mechanický systém spaľovacieho motora používaný v automobiloch, ťahačoch, lodiach alebo lietadlách je **tepelno-fluidným-mechanickým systémom** (alebo jednoducho

termo-mechanickým systémom). Tento systém premieňa tepelnú energiu na **fluidnú energiu** a následne na **mechanickú energiu**. To znamená, že **tepelná**, **fluidná** a **mechanická dynamika** je zahrnutá v rámci tohto kombinovaného systému.

Elektro-tepelný systém ohrievača, ktorý využíva elektrický prúd na ohrev vlákna, ktorý potom ohrieva okolitý vzduch vykazuje dynamickú odozvu teploty okolitého vzduchu. Elektrický ohrievač vody je napokon ďalším možným príkladom **elektro-mechanického** dynamického systému.

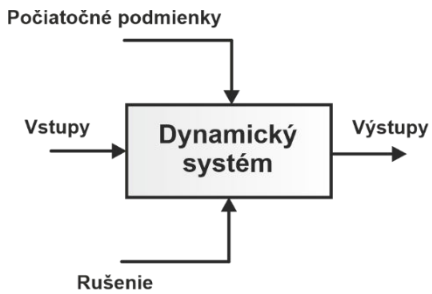
3.2 DEFINÍCIE TÝKAJÚCE SA DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV

Na identifikáciu základného dynamického správania sa systémov; v procese analýzy dynamických systémov využívame **proces modelovania systému**. **Modelovanie** a tvorba matematického modelu systému je proces, ktorý spočíva v napísaní **diferenciálnych** alebo **algebrických rovníc**, ktoré definujeme na základe fyzikálnych zákonov z odpovedajúcej fyzikálnej disciplíny, do ktorej daný systém patrí. Poznamenajme, že v procese modelovania, po samotnom napísaní diferenciálnych rovníc, je možnosť získané matematické rovnice modelu redukovať na vhodnú formu diferenciálnych rovníc.

Systém je množina navzájom spolupôsobiacich komponentov, ktoré sú navzájom previazané takým spôsobom, že **zmena** alebo **odozva** jedného z komponentov má významný vplyv na stav iných komponentov systému. V rámci tejto učebnice bude **systém** predstavovať skupinu komponentov, ktoré pochádzajú z rôznych základných inžinierskych disciplín.

Hlavné inžinierske disciplíny fyzikálnych systémov sú **mechanika**, **elektrotechnika** a **elektronika**, **fluidná mechanika** (zahŕňajúca teóriu hydraulických a pneumatických systémov) a **termodynamika**, ktorá sa venuje problémom **tepelných systémov**. **Magnetizmus** a **optiku** taktiež radíme do skupiny základných inžinierskych disciplín, avšak s týmito typmi systémov sa v rámci tejto učebnice nebudeme zaoberať.

Správanie sa **systému** je charakterizované jeho **odozvou** na vonkajšie vstupné signály, rušenia alebo počiatočné podmienky, pozri Obr. 3.3, ktorý zobrazuje tento vzťah.



Obr. 3.3. Budenie a odozva dynamického systému

Výstupom myslíme závislú premennú diferenciálnej rovnice, ktorá predstavuje veličinu odozvy systému. **Vstupy** systému predstavujú nezávislé premenné diferenciálnej rovnice; budenie systému alebo budiacu funkciu tohto systému. **Vonkajšie rušenie** alebo **vzruchy** predstavujú spravidla tie vonkajšie vplyvy prostredia, ktoré sa vyskytujú náhodne a neočakávane. **Počiatočné podmienky** sú počiatočné hodnoty dynamických premenných systému. **Dynamické premenné** systému sú tie, ktoré sú definované časovými deriváciami v matematickom modeli systému.

Matematický model dynamického systému je spravidla opísaný systémom v zmysle **premenných**. Týmito premennými môže byť vo všeobecnosti **číslo, logická hodnota, reťazec** a iné.

Premenné (systémové premenné) vo všeobecnosti predstavujú niektoré vlastnosti systému ako sú napr.:

- namerané výstupné veličiny vo forme signálov,
- časové dáta,
- signály reprezentujúce výstupné veličiny,
- výskyt udalosti (áno/nie).

Premenné systému ďalej delíme na tri základné typy:

- vstupné **u(t)**,
- vnútorné **x(t)**,
- výstupné **y(t)**.

Podľa toku energie delíme premenné na:

- prietokové premenné,
- a spádové premenné.

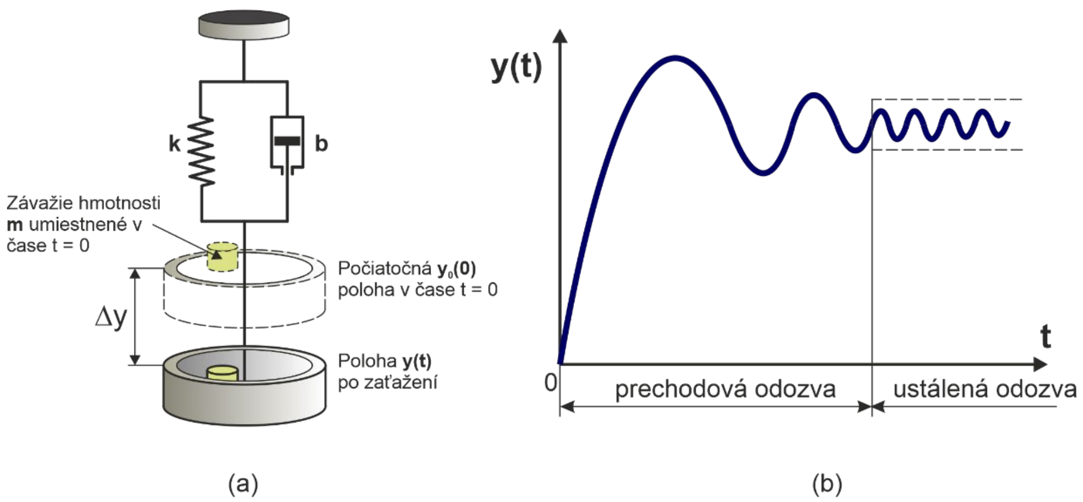
Ako príklad **systému** a jeho odozvy uvažujme automobil, ktorý sa pohybuje po vozovke a prechádza cez spomaľovač. Relatívna poloha každého kolesa a telies automobilu vzhľadom na vozovku môže byť uvažovaná ako **systémová premenná**. Diferenciálne rovnice s uvažovaním systémových premenných môžu byť zapísané na základe znalosti hodnôt **hmotnosti telies** a **pružno-tlmiacich charakteristík** pružín a tlmičov, ktoré sú komponentami tohto automobilu.

Počiatočné podmienky by mohli predstavovať hodnoty veličín pred prejazdom automobilu cez daný spomaľovač. Napokon tvar spomaľovača by mohol predstavovať vstup systému a **aerodynamické turbulencie** by mohli charakterizovať uvažované **rušenie daného systému**. Na základe týchto predpokladov môžeme odvodiť matematické rovnice systému a riešiť posunutia kolies a jednotlivých častí daného skúmaného automobilu.

Dynamický systém (z angl. **dynamic system**) je popisovaný časovo závislými diferenciálnymi rovnicami; nakoľko budúca odozva systému je závislá od súčasného stavu systému, t. j. počiatočných podmienok systému a jeho súčasného vstupu. Poznamenajme, že **dynamický systém** môže vykazovať časovo-premenlivú odozvu aj v prípade, že vstupné signály sú konštantného priebehu.

Statický systém na rozdiel od **dynamického systému** je definovaný na základe **algebrických rovníc**, tzn. že aktuálna odozva systému je absolútne určená na základe aktuálnej hodnoty vstupu a nenastáva teda žiadna zmena odozvy tohto systému v prípade, že na vstup tohto systému je privedený konštantný signál.

Celková odozva každého dynamického systému pozostáva vždy z dvoch typov odozvy. Jednu z nich nazývame **prechodovou** (dočasnou) **odozvou systému** a druhú nazývame **ustálenou (trvalou) odozvou systému**. **Prechodová odozva** (z angl. **transient response**) dynamického systému je tou časťou celkovej odozvy systému, ktorá sa na výstupe systému $\mathbf{y(t)}$ objaví z dôvodu zmeny vstupnej veličiny $\mathbf{u(t)}$ alebo z dôvodu aplikovania počiatočných podmienok systému (hovoríme o tzv. vlastnej nenútenej odozve systému).



Obr. 3.4. (a) Systém váh so závažím, (b) prechodová a ustálená odozva systému

Táto časť odozvy systému prakticky vždy po uplynutí určitého času (času ustálenia) zanikne. **Prechodová odozva** je teda časť odozvy systému, ktorá odkazuje na správanie sa systému, ktorý koná prechod z počiatočného stavu na nový konečný stav systému. Na druhej strane **ustálená odozva systému** je tou časťou celkovej odozvy systému, ktorú systém nadobudne, potom čo zaniknú všetky prechodové stavy tohto systému. Rozdiel medzi **ustálenou** a **prechodovou** odozvou možno ukázať na jednoduchom príklade odozvy **mechanického systému pružina-hmota** (napr. systém váh so závažím), ktorý je zobrazený na Obr. 3.4.

Náhle umiestnenie závažia hmotnosti **m** na podporné váhy podľa Obr. 3.4 (a) spôsobí, že systém sa náhle rozkmitá a po určitom čase ustáli. Položenie závažia hmotnosti **m** na váhy v počiatočnom momente (**čase** $\mathbf{t = 0}$) náhle zväčší posunutie tejto hmoty $\mathbf{y(t)}$. Ako možno vidieť tak hmota **m** sa začne v prvom štádiu pohybovať väčšími výchylkami – hmota osciluje **prechodovou odozvou**, až do momentu, keď sa výchylka odozvy systému postupne neustáli a nedosiahne tzv. **ustálený stav**, t. j. stav oscilácie výchylky v pásme $\pm\mathbf{2}$ % ustálenej hodnoty odozvy systému.

Poznamenajme, že **ustálená hodnota odozvy** je odozva systému, ktorou bude netlmený systém oscilovať v ustálenom stave teoreticky nekonečne dlhý čas, tzn. kým nenastane ďalšia zmena vstupu $\mathbf{u(t)}$. Čas $\mathbf{t}$, pri ktorom systém dosiahne tento ustálený stav nazývame **časom ustálenia**.

3.2.1 Klasická diferenciálna rovnica

Klasická diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami obsahuje výrazy závislej premennej $\mathbf{y(t)}$ (odozvy systému). Okrem závislej premennej môže taktiež obsahovať derivácie tejto premennej, ktoré sú navzájom sčítavané alebo odčítavané. Pravá strana tejto diferenciálnej rovnice, potom predstavuje vstupnú funkciu systému $\mathbf{u(t)}$. Odozva systému $\mathbf{y(t)}$ môže predstavovať odozvu buď na **vstupné počiatočné podmienky** alebo **budenie**, ktoré je definované premenlivou **budiacou funkciou vstupu** $\mathbf{u(t)}$. Príklad takejto klasickej diferenciálnej rovnice 2. rádu je daný touto matematickou formou

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = u(t)\,, \\ y(0) = y_0\,, \\ \frac{dy(0)}{dt} = \dot{y}_0\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $\mathbf{y(t)}$ je premenná odozvy systému, $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}$ sú konštanty, ktoré závisia od systémových parametrov, $\mathbf{u(t)}$ obsahuje funkciu vonkajšieho vstupu a $\mathbf{y_0}$ a $\dot{\mathbf{y}}_\mathbf{0}$ sú počiatočné podmienky systému, ktoré reprezentujú počiatočný stav systému pred časom $\mathbf{t = 0}$.

Pripomeňme, že bodka nad premennou $\mathbf{y_0}$ predstavuje časovú deriváciu podľa $\mathbf{t}$. Celý systém predchádzajúcej diferenciálnej rovnice možno prepísať do tejto zjednodušenej formy zápisu:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = u(t)\,, \\ y(0) = y_0\,, \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2.2 Diferenciálny operátor

Na zápis diferenciálnej rovnice taktiež možno použiť **operátor derivácie D**, ktorý na vyjadrenie derivácie podľa času $\mathbf{t}$ definujeme ako

$$D = \frac{d}{dt}\,. \tag{3.3}$$

Potom výrazy derivácií v diferenciálnych rovniciach možno zapísať ako

$$\mathrm{Dy} = \frac{\mathrm{dy(t)}}{\mathrm{dt}}, \qquad \mathrm{D^2y} = \frac{\mathrm{d^2y(t)}}{\mathrm{dt^2}}, \qquad \text{atď} . \tag{3.4}$$

Použitím definovaného **operátora derivácie D**, možno pôvodnú diferenciálnu rovnicu prepísať do tohto algebrického tvaru

$$\begin{gathered}[\mathrm{D^2 + a_1D + a_0}] \cdot \mathrm{y(t) = u(t)}\,, \\ \mathrm{y(0) = y_0}\,, \\ \mathrm{Dy(0)} = \dot{\mathrm{y}}_0\,, \end{gathered} \tag{3.5}$$

3.2.3 Prenosová funkcia systému

Často je žiadúce vyjadriť odozvu systému v normalizovanom tvare a to ako pomer premennej **výstupu** a **vstupu systému**. Pre lineárne systémy môžeme takýto pomer definovať v tvare **prenosovej funkcie systému**. **Prenosová funkcia** je definovaná ako pomer Laplaceoveho obrazu **výstupu $\mathbf{Y(s)}$** k Laplaceovemu obrazu **vstupu $\mathbf{U(s)}$**. Prenosovú funkciu systému, ktorý je definovaný diferenciálnou rovnicou, možno určiť na základe **Laplaceovej transformácie** tejto diferenciálnej rovnice s uvažovaním nulových počiatočných podmienok. Laplaceova transformácia pôvodnej diferenciálnej rovnice klasického typu s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{y(0) = 0}$ a $\mathbf{\dot{y}(0) = 0}$ nadobúda tvar

$$[\mathrm{s^2 + a_1s + a_0}] \cdot \mathrm{Y(s) = U(s)}\,. \tag{3.6}$$

Laplaceova transformácia prevádza pôvodný systém diferenciálnej rovnice definovaný v časovej oblasti **t** do komplexnej frekvenčnej roviny premennej **s**, ktorú nazývame oblasťou **s-roviny**. Vyjadrením pomeru Laplaceoveho obrazu výstupu $\mathbf{Y(s)}$ a vstupu $\mathbf{U(s)}$ z rovnice (3.6), dostávame **prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$** systému v tvare

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \frac{1}{\mathrm{s^2 + a_1s + a_0}}\ . \tag{3.7}$$

Výstupno-vstupný vzťah premennej výstupu a vstupu možno taktiež vyjadriť v časovej oblasti **t** a to použitím **D-operátora**. Z rovnice (3.5) vyplýva, že

$$\frac{\mathrm{y(t)}}{\mathrm{u(t)}} = \frac{1}{\mathrm{D^2 + a_1D + a_0}}\ . \tag{3.8}$$

Zatiaľ čo výraz **prenosovej funkcie** (5.5), ktorý sme získali **Laplaceovou transformáciou diferenciálnej rovnice** (3.1), je najbežnejším tvarom **prenosovej funkcie** definovanej v **s-rovine**, v niektorých prípadoch môže byť žiadúce vyjadrenie prenosovej funkcie v časovej oblasti podľa (5.6).

V prípade, že na pravej strane diferenciálnej rovnice sa vyskytujú výrazy derivácií vstupnej premennej $\mathbf{u(t)}$. Potom výsledné **prenosové funkcie** v **s-oblasti** (**t-oblasti**) predstavujú racionálne funkcie pomeru dvoch polynómov čitateľa a menovateľa.

3.2.4 Stavové diferenciálne rovnice systému

Stavové diferenciálne rovnice (stavové rovnice) systému predstavujú matematickú formu **systému diferenciálnych rovníc 1. rádu**. **Stavové premenné** sú závisle premenné diferenciálneho systému 1. rádu, ktoré reprezentujú premenné dynamickej odozvy vyšetrovaného systému. Ako príklad stavových rovníc systému môžeme uviesť túto **sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu**.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_1 \cdot x(t) + a_2 \cdot y(t) + f(t)\,, \\ \dot{y}(t) &= a_3 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \sin\big(x(t)\big) + g(t)\,, \\ \dot{z}(t) &= a_4 \cdot x(t) \cdot z(t) + a_5 \cdot e^{-y(t)\cdot t} + h(t)\,, \\ x(0) &= x_0\,, \\ y(0) &= y_0\,, \\ z(0) &= z_0\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Stupeň diferenciálnej rovnice alebo dynamického systému je daný počtom nezávislých derivácií systému. V **klasickej diferenciálnej rovnici** je stupeň systému daný ako rozdiel medzi najvyššou a najnižšou deriváciou diferenciálnej rovnice. Preto rovnice (3.1) a (3.2) sú **rovnicami 2. rádu**. Stupeň systému **stavových rovníc 1. rádu** podľa (3.9) je daný počtom nezávislých derivácií premenných najvyššieho stupňa (v tomto prípade stupňa 1. rádu). To znamená, že systém definovaný na základe rovníc (3.9) je **systémom 3. rádu**.

3.2.5 Lineárna funkcia

Lineárna funkcia má nasledujúce dve vlastnosti. Prvá vlastnosť hovorí, že ak vynásobíme argument funkcie konštantným parametrom, potom hodnota funkcie je vynásobená rovnakým parametrom. Druhá vlastnosť hovorí, že súčet hodnôt funkcie pre prvý a druhý argument funkcie, je taký istý ako hodnota funkcie súčtu oboch argumentov. Matematicky zapísaná prvá vlastnosť lineárnej funkcie hovorí, že

$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x)\,. \tag{3.10}$$

Matematicky vyjadrená druhá vlastnosť lineárnej funkcie je

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)\,. \tag{3.11}$$

Kombináciou predchádzajúcich dvoch vlastností možno zadefinovať ďalšiu kombinovanú vlastnosť lineárnej funkcie, t. j.

$$f(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2) = a_1 \cdot f(x_1) + a_2 \cdot f(x_2)\,. \tag{3.12}$$

Lineárna kombinácia premenných je výsledkom súčtu premenných násobených koeficientami. Napr. **lineárna kombinácia** dvoch premenných **x** a **y** je daná ako

$$L = a \cdot x + b \cdot y\,, \tag{3.13}$$

kde **a** a **b** sú koeficienty. **Lineárna rovnica** je potom lineárnou kombináciou premenných tejto rovnice. **Lineárna diferenciálna rovnica** je zase definovaná ako lineárna kombinácia jej premenných a derivácií systémových premenných. Príkladom takejto **lineárnej kombinácie** môže byť napr.

$$L = a \cdot x + b \cdot \dot{x} + c \cdot \ddot{x}\,, \tag{3.14}$$

kde **a**, **b** a **c** sú koeficienty **lineárnej diferenciálnej rovnice**.

Každý **lineárny systém** je spravidla popisovaný **lineárnymi algebrickými** alebo **lineárnymi diferenciálnymi rovnicami**. Na druhej strane **nelineárny systém** bude definovaný **nelineárnou kombináciou** premenných a derivácií systémových premenných. Typickým príkladom nelineárnej funkcie je napr. násobenie dvoch premenných systému, umocňovanie systémovej premennej, trigonometrická funkcia a ďalšie iné.

3.2.6 Analytické riešenie

Analytické riešenie diferenciálnej rovnice je matematické vyjadrenie závislej premennej ako funkcie času. Tento výraz môže obsahovať exponenciálne alebo trigonometrické tvary funkcií, ako aj ďalšie iné matematické tvary funkcií. Analytické riešenie danej diferenciálnej rovnice vyžaduje poznatok **počiatočných podmienok** a **vstupov** ako funkcií času. Analytické riešenie možno získať aplikovaním matematických metód na riešenie **klasických diferenciálnych rovníc** alebo použitím techník **Laplaceovej transformácie**. **Lineárne diferenciálne rovnice** sú ľahko pochopiteľné a ich **analytické riešenie** môžeme bežne získať aplikovaním širokého spektra metód, ktoré sa rozoberajú na základných kurzoch matematiky, pri počítaní jednoduchých diferenciálnych rovniciach.

Nelineárne systémy na druhej strane, s výnimkou malého počtu **systémov 1. rádu** alebo limitovaného počtu **systémov 2.** a **vyšších rádov**, nemajú analytické riešenia. V prípade, že pre **nelineárny systém** nie je možno získať analytické riešenie, potom môžeme toto riešenie získať numerickou aproximáciou na základe vhodných simulačných metód a tak vypočítať približné riešenie. **Približné riešenie**, ktoré predstavuje aproximáciu riešenia nazývame **numerickým riešením systému**.

3.2.7 Numerické riešenie systému

Numerické riešenie systému diferenciálnych rovníc môžeme vypočítať **numerickou integráciou** s využitím počítača. **Numerická integrácia** je proces výpočtu aproximácie riešenia integrálu derivácie funkcie numerickým spôsobom (algoritmom). **Algoritmus** počíta riešenie diferenciálnej rovnice na základe malých prírastkov času. Preto riešenie diferenciálnej rovnice je známe len pre konkrétne diskrétne časové body **t**. Výpočtové metódy najčastejšie využívajú k výpočtu stavový opis diferenciálnych rovníc (napr. **Matlab/Simulink**). Výpočet odozvy dynamického systému týmto spôsobom je nazývaný ako **digitálna simulácia** (číslicová simulácia).

3.2.8 Analógový výpočet

Pri analógovom výpočte je diferenciálna rovnica reprezentovaná prepojením **lineárnych** alebo **nelineárnych** komponentov a **elektronických integrátorov** (operačné zosilňovače s kapacitnou spätnou väzbou). **Analógové počítanie** je založené na existencii metódy analógie systémov, keď možno prakticky pre všetky diferenciálne rovnice z rôznych fyzikálnych disciplín nájsť akúsi analógiu s odpovedajúcim **elektrickým systémom**. **Elektronické integrátory** napokon riešia diferenciálnu rovnicu alebo systém diferenciálnych rovníc na základe dynamického správania sa elektrických komponentov pre uvažovaný dynamický systém. Takýmto spôsobom t. j. nájdením analógie medzi systémami, môžeme simulovať mnohé dynamické systémy použitím analógového počítača.

3.3 MATEMATICKÝ MODEL DYNAMICKÉHO SYSTÉMU

Matematický model systému je matematická interpretácia vlastností a interakcií systému. V procese tvorby **matematického modelovania** sa využíva **matematický jazyk** na opis **správania sa systému**, ktorý môže byť rôznej **fyzikálnej podstaty** (napr. **elektrický, mechanický, termodynamický, hydraulický, pneumatický, tepelný**), okrem iného aj **biologickej**, **ekonomickej** alebo **sociálnej** povahy. Matematický model je spravidla opísaný systémom v zmysle **premenných**. Daný model je skupina funkcií, ktoré opisujú vzťahy medzi rozličnými premenným systému. Problémy matematického modelovania môžeme klasifikovať a realizovať ako tzv. **biele skrinky (**z angl. **white-box)** alebo **čierne skrinky (**z angl. **black-box)**.

Model čiernej skrinky (black-box) je taký model, ktorý nezahŕňa všetky informácie o danom systéme, matematický model tohto typu systému nemá informáciu o tzv. **vnútorných stavoch**, ale orientuje sa len na opis vzťahu medzi **vstupmi** a **výstupmi** uvažovaného systému. Takýto spôsob interpretácie systému nazývame **vonkajším opisom systému**.

Obr. 3.5. Vonkajší opis systému

Medzi vonkajšie opisy systémov radíme napr. **opis diferenciálnou rovnicou**, **opis prenosovou funkciou, grafom, tabuľkou** a ďalšie iné spôsoby. Schematicky je **vonkajší opis systému** znázornený na Obr. 3.5. Na tomto obrázku je systém zobrazený s vyznačením jeho vstupných a výstupných premenných. Pozrime sa teraz na ten najbežnejší typ matematického modelu daného **vonkajším opisom**, ktorého matematický model je definovaný **diferenciálnou rovnicou**. Systém **n-tého rádu** s jedným vstupom $\mathbf{u(t)}$ a jedným výstupom $\mathbf{y(t)}$, ktorého pravá strana rovnice je jednoduchá funkcia bez derivácií vstupu $\mathbf{u(t)}$, môžeme opísať touto diferenciálnou rovnicou

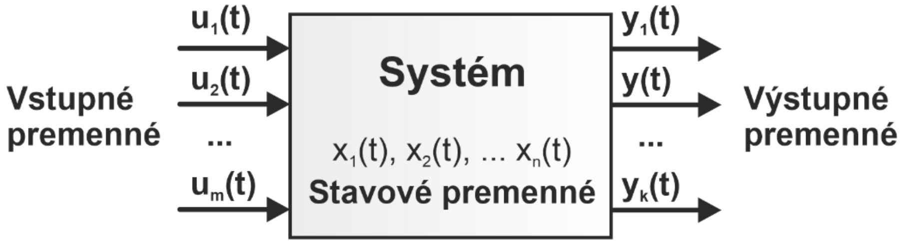
$$a_n \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)\,, \tag{3.15}$$

kde $\mathbf{a_0}, \ldots, \mathbf{a_n}$ sú konštantné koeficienty.

V prípade, že uvažujeme **dynamický systém n-tého rádu** s jedným vstupom $\mathbf{u(t)}$ a jedným výstupom $\mathbf{y(t)}$ s deriváciami vstupnej funkcie $\mathbf{u(t)}$, potom je takýto systém definovaný najvšeobecnejšou diferenciálnou rovnicou v tvare

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \cdots b_1 u^{(1)}(t) + b_0 y(t)\,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

kde $\mathbf{a_0}, \ldots, \mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_0}, \ldots, \mathbf{b_n}$ sú konštantné koeficienty.



Obr. 3.6. Vnútorný (stavový) opis systému

Na druhej strane **biela skrinka (white-box)** je taký model systému, ktorého opis obsahuje prakticky všetky informácie o danom systéme a to aj o **vnútorných stavoch** tohto systému. Takýto typ systému, ktorý vo všeobecnosti nazývame **vnútorným** alebo **stavovým opisom systému** je znázornený na Obr. 3.6. Na tomto obrázku je znázornený systém v stavovom opise s **m** vstupnými premennými $\mathbf{u_i(t)}$, **n** stavovými premennými $\mathbf{x_i(t)}$ a **k** výstupnými premennými $\mathbf{y_i(t)}$.

Systém zadefinovaný stavovom opise (z angl. **state-space**) je popisovaný iným spôsobom ako v prípade systému **vonkajšieho opisu**. **Stavový opis** je charakterizovaný sústavou **diferenciálnych rovníc 1. rádu**, ktorý možno odvodiť z jednej alebo viacerých diferenciálnych rovníc 1. alebo vyššieho rádu. Stavový opis tvoria dve sústavy rovníc. Prvou je **sústava diferenciálnych rovníc 1. rádu** nazývaná tiež **rovnicou dynamiky**. Druhou rovnicou je **sústava lineárnych algebrických rovníc** nazývaná tiež **rovnicou výstupu**. Tieto dve sústavy rovníc možno symbolicky zapísať ako

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\,, \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\,, \end{aligned} \tag{3.17}$$

kde **A**, **B**, **C**, **D** nazývame matice stavového opisu, $\mathbf{x(t)}$ je stavový vektor, $\mathbf{u(t)}$ je vektor vstupu a $\mathbf{y(t)}$ je vektor výstupu.

3.4 OPIS SYSTÉMU PRENOSOVOU FUNKCIOU

Ako sme už uviedli, každý fyzikálny systém reprezentovaný diferenciálnou rovnicou možno interpretovať aj ďalším ekvivalentnými spôsobmi vonkajšieho opisu. Jedným z ekvivalentných spôsobov opisu systému diferenciálnou rovnicou je opis jeho **prenosovou funkciou**. **Prenosovú funkciu** pre fyzikálny systém definovaný diferenciálnou rovnicou môžeme získať aplikovaním metódy tzv. **Laplaceovej transformácie**.

Predpokladajme všeobecný systém **n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom, ktorý je opisovaný touto diferenciálnou funkciou **n-tého rádu**

$$a_n \cdot \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = u(t)\,. \tag{3.18}$$

Potom prostredníctvom **Laplaceovej transformácie** oboch strán rovnice s uvažovaním nulových počiatočných podmienok dostávame

$$(a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0) \cdot Y(s) = U(s)\,. \tag{3.19}$$

To znamená, že **prenosová funkcia systému n-tého rádu** je definovaná nasledovnou algebrickou formou a to ako pomer Laplaceoveho obrazu výstupu $\mathbf{Y(s)}$ k obrazu vstupu $\mathbf{U(s)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}, \tag{3.20}$$

kde $\mathbf{a_0}, \dots, \mathbf{a_n}$ sú konštantné koeficienty, **Y(s)** je obraz riešenia v Laplaceovom tvare a **U(s)** je obraz vstupu v Laplaceovom tvare.

V prípade, že uvažujeme **systém n-tého rádu s jedným vstupom** a **jedným výstupom** s deriváciami vstupu na pravej strane rovnice v tomto tvare

$$\begin{aligned} a_n \cdot \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y \\ = b_m \cdot \frac{d^{(m)}u}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{(m-1)}u}{dt^{(m-1)}} + \dots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

potom jeho **prenosová funkcia** bude mať tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{n-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}, \tag{3.22}$$

kde $\mathbf{a_0}, \dots, \mathbf{a_n}$ a $\mathbf{b_0}, \dots, \mathbf{b_m}$ sú konštantné koeficienty, $\mathbf{Y(s)}$ je obraz riešenia v Laplaceovom tvare a $\mathbf{U(s)}$ je obraz vstupu v Laplaceovom tvare.

Predchádzajúca rovnica je najvšeobecnejším tvarom prenosovej funkcie **lineárneho systému n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným vstupom. Pozostáva z dvoch polynomických funkcií s premennou **s** a nazývame ju **prenosovou funkciou vo všeobecnom tvare (tf)**. Ak predpokladáme systém **n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom **s časovým oneskorením** daným hodnotou **τ**, potom takýto systém je opísaný touto diferenciálnou rovnicou

$$\begin{aligned} a_n \cdot \frac{d^{(n)}y(t-\tau)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y(t-\tau)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t-\tau)}{dt} + a_0 \cdot y(t-\tau) \\ = b_m \cdot \frac{d^{(m)}u(t-\tau)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{(m-1)}u(t-\tau)}{dt^{(m-1)}} + \dots + b_1 \cdot \frac{du(t-\tau)}{dt} \\ + b_0 \cdot u(t-\tau)\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Potom **prenosová funkcia časovo oneskoreného systému** s oneskorením **τ** nadobudne tento tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{n-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \cdot e^{-\tau t}\,. \tag{3.24}$$

3.5 PRENOSOVÁ FUNKCIA V TVARE PÓLOV, NÚL A ZOSILNENIA

Pripomeňme, že predchádzajúce **prenosové funkcie** tvoria jednoduché algebrické formy. Vo všeobecnosti sú definované dvomi polynómami a to polynómom **čitateľa** a **menovateľa**. V prípade, že vypočítame korene týchto polynómov **čitateľa** a **menovateľa** a zapíšeme ich vo faktorovom tvare, potom možno získať ekvivalentný tvar prenosovej funkcie v zmysle **pólov**, **núl** a **zosilnenia**. Diferenciálnu rovnicu **n-tého rádu** vo všeobecnom tvare možno zapísať využitím do tohto faktorového tvaru

$$G(s) = \frac{K \cdot (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}, \tag{3.25}$$

kde $\mathbf{z_1, \dots, z_n}$ nazývame nuly systému, $\mathbf{p_1, \dots, p_n}$ nazývame póly systému a **K** zosilnením systému. Výpočtom koreňov čitateľa dostávame $\mathbf{m}$ koreňov, pretože polynóm čitateľa je stupňa $\mathbf{m}$ a výpočtom koreňov menovateľa získame $\mathbf{n}$ koreňov. Konštanty $\mathbf{p_1, \dots, p_n}$ predstavujú korene **charakteristickej rovnice systému**

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0 = 0\,. \tag{3.26}$$

Dá sa konštatovať, že od **charakteristickej rovnice** vo všeobecnosti závisí tvar odozvy daného systému. Hlavne to, či sa daný systém bude správať ako systém **stabilný** alebo **nestabilný.** Vypočítané korene tejto rovnice môžu byť vo všeobecnosti **reálne** alebo **komplexné čísla**. Zapísané vo všeobecnom tvare ako $\boldsymbol{\alpha_i = R_e + i \cdot Im}$, kde $\mathbf{R_e}$ je reálna zložka a $\mathbf{I_m}$ je imaginárna zložka komplexného čísla. Podobne $\mathbf{z_1, \dots, z_n}$, budú korene tejto algebrickej rovnice

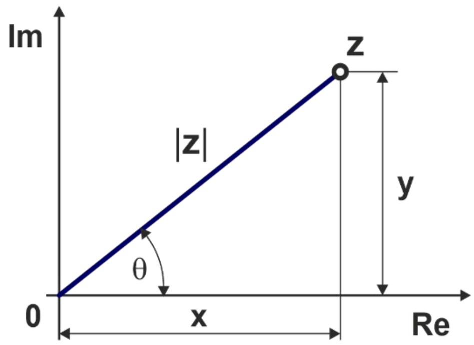
$$b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0 = 0\,, \tag{3.27}$$

ktoré môžu podobne nadobudnúť tvar **reálneho** alebo **komplexné čísla**. Ak niektorú z vypočítaných premenných hodnôt $\mathbf{p_1, \dots, p_n}$, dosadíme za parameter $\mathbf{s}$ v pôvodnej prenosovej funkcii $\mathbf{G(s)}$, potom sa dá dokázať, že hodnota prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$ bude konvergovať k **nekonečnu**. Z tohto dôvodu hodnoty $\mathbf{p_1, \dots, p_n}$ nazývame **pólami systému**. Podobne, ak $\mathbf{s}$ nadobúda hodnotu niektorej z množiny koreňov $\mathbf{z_1, \dots, z_n}$, potom sa dá dokázať, že prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ bude konvergovať k nule. Z tohto dôvodu hodnoty $\mathbf{z_1, \dots, z_n}$ nazývame **nulami systému**. Ako v prípade štandardného tvaru **prenosovej funkcie (tf)**, tak aj v prípade tohto typu prenosovej funkcie môžeme definovať prenosovú funkciu pre **systém n-tého rádu s časovým oneskorením**. Ak je teda systém definovaný prenosovou funkciou v štandardnom tvare s časovým oneskorením $\boldsymbol{\tau}$, potom prenosová funkcia v tvare **pólov**, **núl** a **zosilnenia K** nadobúda tento tvar

$$G(s) = \frac{K \cdot (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \cdot e^{-\tau t}\,. \tag{3.28}$$

3.6 KOMPLEXNÉ ČÍSLA, KOMPLEXNÉ PREMENNÉ A FUNCIE

Laplaceova transformácia je jedným z mnohých matematických nástrojov na modelovanie a analýzu lineárnych systémov. Nakoľko metóda **Laplaceovej transformácie** je vyžadovaná pri štúdiu v teórií dynamických systémov, budeme aj my na chvíľu venovať pozornosť základnému princípu tejto metódy analýzy systémov. Keďže **Laplaceova transformácia** je definovaná na základe **komplexnej premennej** definovanej v komplexnej rovine, pozri Obr. 3.7,



Obr. 3.7. Komplexná rovina

predtým než, sa začneme zaoberať **Laplaceovou transformáciou**, pripomenieme si stručne matematické základy, ktoré platia pre **komplexné čísla**, **komplexné premenné** a **komplexné funkcie**.

3.6.1 Komplexné číslo

Použitím označenia $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$ možno vyjadriť všetky **komplexné čísla** v inžinierskych aplikáciách a matematických výrazoch ako

$$z = x + j \cdot y\,, \tag{3.29}$$

kde **z** nazývame **komplexným číslom**, **x** a **j · y** je reálna a imaginárna časť komplexného čísla.

Pripomeňme, že obe premenné **x** a **y** sú reálne čísla, **j** je imaginárna jednotka komplexného čísla. Reprezentácia komplexného čísla **z** v **komplexnej rovine** je znázornená na Obr. 3.7. Komplexné číslo **z** predstavuje jeden bod v komplexnej **Gaussovej rovine**. **Veľkosť** alebo **absolútna hodnota komplexného čísla |z|** je definovaná ako dĺžka čiarového segmentu od počiatku súradného systému k bodu **z**, ako je to znázornené na Obr. 3.7. Kladný smer merania uhla **θ** je daný v smere proti hodinovým ručičkám. Matematicky zapísané platí, že

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2 + y^2}\,, \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Komplexné číslo môžeme zapísať v algebrickom tvare (pravouhlého súradného systému) ako

$$z = x + j \cdot y \ , \qquad (3.31)$$
$$z = |z| \cdot (\cos\theta + j \cdot \sin\theta)$$

alebo v **polárnom súradnicovom systéme** ako

$$z = |z| \cdot \angle\theta \ , \qquad (3.32)$$
$$z = |z| \cdot e^{i\theta} \ .$$

Na transformáciu **komplexného čísla** na **polárny tvar** z algebrického tvaru používame vzťahy

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \qquad (3.33)$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

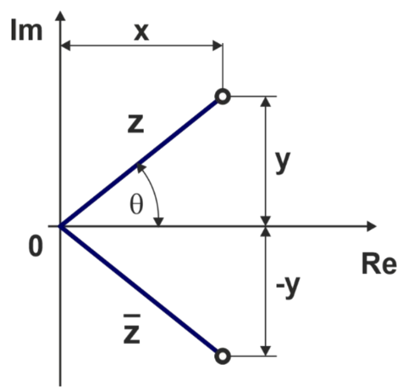
a k transformácii komplexných čísel na **algebrický tvar** z **polárneho tvaru** využívame tieto vzťahy

$$x = |z| \cdot \cos\theta \ , \qquad (3.34)$$
$$y = |z| \cdot \sin\theta \ .$$

3.6.2 Komplexne združené číslo

Komplexne združené číslo $\bar{\mathbf{z}}$ pre komplexné číslo $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{y}$ je definované ako

$$z = x - j \cdot y \ . \qquad (3.35)$$



Obr. 3.8. Komplexne združené číslo

Komplexne združené číslo $\bar{\mathbf{z}}$ má reálnu časť rovnakú ako komplexné číslo **z** a imaginárnu časť takú, ktorá je zápornou k imaginárnej časti komplexného čísla **z**. Pozri Obr. 3.8, ktorý zobrazuje komplexne číslo **z** a jeho komplexne združené číslo $\bar{\mathbf{z}}$. Poznamenajme, že

$$\begin{aligned} z &= x + j \cdot y = |z| \cdot \angle\theta = |z| \cdot (\cos\theta + j\sin\theta) \ , \\ \bar{z} &= x - j \cdot y = |z| \cdot \angle - \theta = |z| \cdot (\cos\theta - j\sin\theta) \ . \end{aligned} \tag{3.36}$$

3.6.3 Eulerov teorém

Ak vyjdeme z **Taylorovho rozvoja** funkcie **cos θ**, pre ktorý platí, že

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \tag{3.37}$$

a **Taylorovho rozvoja** funkcie **sin θ**

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \ , \tag{3.38}$$

potom musí taktiež platiť, že

$$\cos\theta + j \cdot \sin\theta = 1 + \theta + \frac{(j \cdot \theta)^2}{2!} + \frac{(j \cdot \theta)^3}{3!} + \frac{(j \cdot \theta)^4}{4!} + \cdots \ . \tag{3.39}$$

Napokon ak pre rozvoj exponenciálnej funkcie $\mathbf{e^x}$ platí, že

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \ , \tag{3.40}$$

potom musí rovnako platiť, že

$$\cos\theta + j \cdot \sin\theta = e^{j\theta} \ , \tag{3.41}$$

tento výraz poznáme pod názvom **Eulerov teorém**. Použitím **Eulerovho teorému** môžeme prepísať základnú formu komplexného čísla v tvare sínusovej a kosínusovej funkcie na exponenciálny tvar. Ak označíme, že $\mathbf{e^{-j \cdot \theta}}$ je komplexne združené číslo $\mathbf{e^{j \cdot \theta}}$, potom platí, že

$$\begin{aligned} e^{j \cdot \theta} &= \cos\theta + j \cdot \sin\theta \ , \\ e^{-j \cdot \theta} &= \cos\theta - j \cdot \sin\theta \ . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Vyjadrením výrazov $\boldsymbol{\cos\theta}$ a $\boldsymbol{\sin\theta}$ z predchádzajúcej sústavy rovníc možno dospieť k nasledovným exponenciálnym tvarom, ktoré platia pre funkcie $\boldsymbol{\cos\theta}$ a $\boldsymbol{\sin\theta}$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\cdot\theta} + e^{-j\cdot\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\cdot\theta} - e^{-j\cdot\theta}}{2j} . \tag{3.43}$$

V ďalšom sa pozrieme na operácie s komplexnými číslami. Na popis operácií budeme uvažovať, že poznáme dve komplexné čísla

$$z = x + j\cdot y \qquad \text{a} \qquad w = u + j\cdot v . \tag{3.44}$$

3.6.4 Sčítanie dvoch komplexných čísel

Dve komplexné čísla v algebrickom tvare možno sčítať, tak že sčítame ich reálne a imaginárne časti

$$z + w = (x + j\cdot y) + (u + j\cdot v) = (x + u) + j\cdot(y + v) . \tag{3.45}$$

3.6.5 Odčítanie dvoch komplexných čísel

Dve komplexné čísla v algebrickom tvare môžeme odčítať, takže odčítame ich reálne a imaginárne časti

$$z - w = (x + j\cdot y) - (u + j\cdot v) = (x - u) + j\cdot(y - v) . \tag{3.46}$$

3.6.6 Násobenie dvoch komplexných čísel

Ak je komplexné číslo násobené reálnym číslom $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, výsledkom je komplexné číslo $\mathbf{a\cdot z}$, také že jeho reálna a imaginárna časť je násobná týmto číslom

$$a\cdot z = a\cdot(x + j\cdot y) = a\cdot x + j\cdot a\cdot y . \tag{3.47}$$

Ak dve komplexné čísla **z** a **w** definované v algebrickom tvare sú navzájom násobené, potom platí, že

$$\begin{gathered} z\cdot w = (x + j\cdot y)\cdot(u + j\cdot v) = x\cdot u + j\cdot y\cdot u + j\cdot x\cdot v + j^2\cdot y\cdot v = \\ (x\cdot u - y\cdot v) + j\cdot(x\cdot v + y\cdot u) , \end{gathered} \tag{3.48}$$

kde $\mathbf{j^2 = -1}$. Ďalej predpokladajme násobenie dvoch komplexnej čísel definovaných v polárnom tvare

$$z = |z| \cdot \angle\theta \qquad a \qquad w = |w| \cdot \angle\phi \ , \tag{3.49}$$

pre ktoré platí, že násobením dostávame

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \angle(\theta + \phi) \ . \tag{3.50}$$

3.6.7 Násobenie komplexného čísla imaginárnou jednotkou j

Je dôležité poznamenať, že násobenie komplexného čísla imaginárnou jednotkou **j**, je ekvivalentné rotácií o uhol **90°** v smere hodinových ručičiek. Napr. ak

$$z = x + j \cdot y \ , \tag{3.51}$$

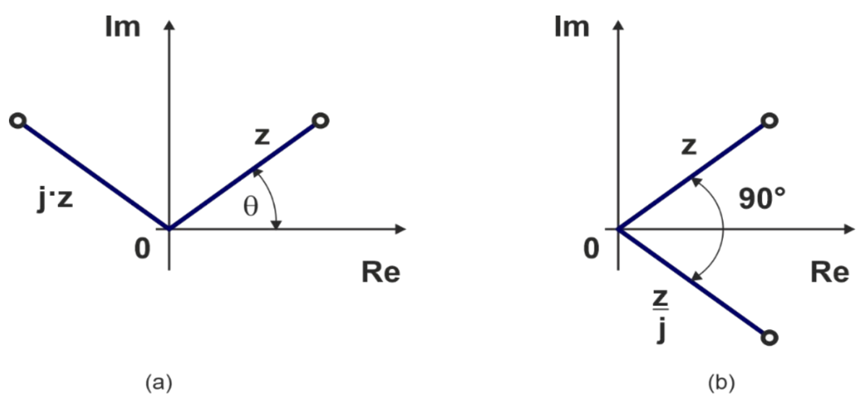
potom

$$j \cdot z = j \cdot (x + j \cdot y) = j \cdot x + j^2 \cdot y = -y + j \cdot x \ . \tag{3.52}$$

Ak označíme imaginárnu jednotku **j** ako $\mathbf{j = 1\angle 90°}$ a $\mathbf{z = |z|\angle\theta}$, potom

$$j \cdot z = 1\angle 90° \cdot |z| \cdot \angle\theta = |z| \cdot \angle(\theta + 90°) \ . \tag{3.53}$$

Ako ilustráciu uvádzame grafické zobrazenie násobenia **komplexného čísla** imaginárnou jednotkou **j**, ktoré je zobrazené na Obr. 3.9 (a).



Obr. 3.9. (a) Násobenie komplexného čísla j, (b) delenie komplexného čísla j

3.6.8 Delenie komplexného čísla

V prípade, že je nejaké komplexné číslo $\mathbf{z} = |\mathbf{z}| \cdot \angle\boldsymbol{\theta}$ predelené iným komplexným číslom $\mathbf{w} = |\mathbf{w}| \cdot \angle\phi$, potom platí, že

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| \cdot \angle\theta}{|w| \cdot \angle\phi} = \frac{|z|}{|w|} \cdot \angle(\theta - \phi)\,. \qquad (3.54)$$

Delenie dvoch komplexných čísel $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{y}$ a $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}$ zapísaných v algebrickom tvare, môžeme previesť týmto spôsobom

$$\frac{z}{w} = \frac{x + j \cdot y}{u + j \cdot v} = \frac{(x + j \cdot y)(u - j \cdot v)}{(u + j \cdot v)(u - j \cdot v)} = \frac{(xu + yv) + j \cdot (yu - xv)}{u^2 + v^2} = \\ = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + j \cdot \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}\ . \qquad (3.55)$$

3.6.9 Delenie komplexného čísla imaginárnou jednotkou j

Poznamenajme, že delenie komplexného čísla imaginárnou jednotkou **j**, je ekvivalentné rotácií v smere hodinových ručičiek o uhol $\mathbf{90°}$. Napr. pre komplexné číslo $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{y}$ platí, že

$$\frac{z}{j} = \frac{x + j \cdot y}{j} = \frac{(x + j \cdot y) \cdot j}{j \cdot j} = \frac{j \cdot x - y}{-1} = y - j \cdot x \qquad (3.56)$$

alebo

$$\frac{z}{j} = \frac{|z| \cdot \angle\theta}{1 \cdot \angle 90°} = |z| \cdot \angle(\theta - 90°)\ . \qquad (3.57)$$

Obr. 3.9 (b) graficky ilustruje delenie komplexného čísla **z** imaginárnou jednotkou **j**.

3.6.10 Umocňovanie a odmocňovanie komplexných čísel

Násobením komplexného čísla **z n-krát** samým sebou, dostávame $\mathbf{z^n}$

$$z^n = (|z| \cdot \angle\theta\,)^n = |z|^n \cdot \angle(n\theta)\ . \qquad (3.58)$$

N-tá odmocnina **komplexného čísla** je ekvivalentná umocňovaniu $\mathbf{z^{1/n}}$ a teda platí, že

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = (|z| \cdot \angle\theta\,)^{1/n} = |z|^{1/n} \cdot \angle\left(\frac{\theta}{n}\right)\ . \qquad (3.59)$$

3.6.11 Komplexná premenná

Komplexné číslo má reálnu a imaginárnu časť takú, že obe tieto časti sú konštantné čísla. V prípade, že **reálna** a **imaginárna** časť (alebo obe tieto časti) sú premennými, potom komplexné číslo nazývame **komplexnou premennou**. V **Laplaceovej transformácií** využívame takúto komplexnú premennú $\mathbf{s}$, ktorá je definovaná ako

$$s = \sigma + j \cdot \omega, \tag{3.60}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je reálna časť a $\mathbf{j \cdot \omega}$ je imaginárna časť premennej. Poznamenajme, že $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\omega}$ sú reálne čísla.

3.6.12 Komplexná funkcia

Komplexná funkcia $\mathbf{F(s)}$, ktorá je funkciou komplexnej premennej $\mathbf{s}$, má reálnu a imaginárnu časť a je definovaná ako

$$F(s) = F_x + j \cdot F_y \ , \tag{3.61}$$

kde $\mathbf{F_x}$ a $\mathbf{F_y}$ sú reálne veličiny. Veľkosť funkcie $\mathbf{F(s)}$ je $\mathbf{F(s)} = \sqrt{\mathbf{F_x^2} + \mathbf{F_y^2}}$ a uhol $\boldsymbol{\theta}$ funkcie **F(s)** je $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{tan^{-1}}\left(\frac{\mathbf{F_y}}{\mathbf{F_x}}\right)$. Uhol je meraný proti smeru hodinových ručičiek od kladnej reálnej osi. Komplexne združená funkcia $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = \mathbf{F_x} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{F_y}$. Komplexné funkcie, ktoré sa bežne vyskytujú v analýze lineárnych dynamických systémov sú jednohodnotové funkcie premennej $\mathbf{s}$. Typická forma takýchto funkcií nadobúda napr. tvar tejto prenosovej funkcie

$$G(s) = \frac{K \cdot (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \ , \tag{3.62}$$

kde body $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$,..., $\mathbf{z_n}$, v ktorých funkcia $\mathbf{G(s)}$ nadobúda nulovú hodnotu – nazývame **nulami**. Body $\mathbf{p_1}$**,** $\mathbf{p_2}$**,...,** $\mathbf{p_n}$, v ktorých funkcia **G(s)** nadobúda nekonečnú hodnotu – nazývame **pólami**. V prípade, že menovateľ obsahuje výraz $(\mathbf{s + p})^{\mathbf{k}}$, potom koreň $\mathbf{s = -p}$ nazývame viacnásobným pólom, v opačnom prípade, ak $\mathbf{k = 1}$ nazývame tento pól jednoduchým pólom. Ako príklad predpokladajme nasledujúcu komplexnú funkciu

$$G(s) = \frac{K \cdot (s + 2) \cdot (s + 10)}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 5) \cdot (s + 15)^2} \ . \tag{3.63}$$

Táto funkcia $\mathbf{G(s)}$ má dve nuly $\mathbf{s = -2}$ a $\mathbf{s = -10}$, dva reálne póly $\mathbf{s = 0}$, $\mathbf{s = -1}$ a $\mathbf{s = -5}$ a jeden $\mathbf{k = 2}$ násobný pól $\mathbf{s = -15}$.

4 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

Metóda **Laplaceovej transformácie** je metóda, ktorú možno výhodne použiť na **riešenie lineárnych časovo invariantných diferenciálnych rovníc**. Jej hlavná výhoda je, že derivácia funkcie definovanej v časovej oblasti $\mathbf{t}$, je daná ako súčin komplexnej premennej $\mathbf{s}$ a Laplaceovho obrazu funkcie v komplexnej oblasti $\mathbf{s}$. Výsledkom **Laplaceovej transformácie** diferenciálnej rovnice je teda algebrická forma premennej $\mathbf{s}$. Riešenie diferenciálnej rovnice môžeme získať použitím tabuľky **Laplaceových tvarov** bežne používaných funkcií alebo technikou rozkladu racionálnej funkcie na parciálne zlomky. Ďalšou výhodou Laplaceovej transformácie je možnosť aplikovať počiatočné podmienky priamo pri riešení diferenciálnej rovnice a získať tak riešenie rýchlejším spôsobom.

Ak predpokladáme časovú funkciu $\mathbf{f(t)}$, pre ktorú chceme vypočítať Laplaceovu transformáciu, takú že $\mathbf{f(t) = 0}$ pre $\mathbf{t < 0}$ a komplexnú premennú Laplaceovej transformácie $\mathbf{s}$ ako $\mathbf{s = \sigma + j \cdot \omega}$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je reálna časť a $\mathbf{j \cdot \omega}$ je imaginárna časť premennej, potom **Laplaceova transformácia** tejto funkcie $\mathbf{f(t)}$ je definovaná ako

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \qquad (4.1)$$

kde $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ je symbol operácie Laplaceovej transformácie a $\mathbf{F(s)}$ Laplaceova transformácia funkcie $\mathbf{f(t)}$.

Inverzný proces nájdenia časovej funkcie $\mathbf{f(t)}$ z Laplaceovej transformácie $\mathbf{F(s)}$ sa nazýva **inverzná Laplaceova transformácia**. Symbol označenia pre inverznú Laplaceovu transformáciu je $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}$. Potom

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)\,. \qquad (4.2)$$

4.1 EXISTENCIA LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE

Laplaceova transformácia funkcie $\mathbf{f(t)}$ existuje v prípade, že Laplaceov integrál konverguje ku konečnej hodnote. Integrál bude konvergovať vtedy, ak funkcia $\mathbf{f(t)}$ je po častiach spojitá na každom konečnom intervale v časovom intervale $\mathbf{t > 0}$. Funkcia $\mathbf{f(t)}$ bude integrovateľnou len v tom prípade, že existuje taká kladná reálna konštanta $\boldsymbol{\sigma}$, že

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}|f(t)|dt < \infty \quad . \qquad (4.3)$$

Možno pripomenúť, že kritérium konvergencie spĺňajú napr. funkcie $\mathbf{t}$, $\mathbf{sin(\omega \cdot t)}$, $\mathbf{cos(\omega \cdot t)}$, $\mathbf{t \cdot e^{-c \cdot t}}$, $\mathbf{t \cdot sin(\omega \cdot t)}$ alebo $\mathbf{e^{-c \cdot t} \cdot sin(\omega \cdot t)}$. Napriek tomu, že konvergenčné kritérium **Laplaceovej transformácie** spĺňa veľká množina funkcií, je nutné poznamenať, že napr. funkcie typu $\mathbf{e^{t^2}}$ a $\mathbf{t \cdot e^{t^2}}$ toto kritérium nespĺňajú; pre tieto funkcie neexistuje **Laplaceova transformácia**.

Ak obe funkcie $\mathbf{f_1(t)}$ a $\mathbf{f_2(t)}$ spĺňajú podmienku existencie **Laplaceovej transformácie**, potom Laplaceova transformácia $\mathbf{f_1(t) + f_2(t)}$ je daná ako

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] \,. \tag{4.4}$$

Charakteristiky dynamických systémov ako sú napr. **stabilita** alebo úrovne **tlmenia**, môžu byť prevažne vyšetrované prostredníctvom odozvy týchto systémov na vonkajšie **budenia** resp. **rušenia**, ktoré možno matematicky modelovať prostredníctvom **špeciálnych funkcií**. V nasledujúcich podkapitolách si predstavíme základné budiace vstupné signály systémov, ako sú napr. **skoková funkcia** (z angl. step function), **lineárne rastúca funkcia** (z angl. ramp function), **impulzná funkcia** (z angl. impulse function). Okrem matematických popisov týchto funkcií si taktiež uvedieme aj ich **Laplaceove transformácie**.

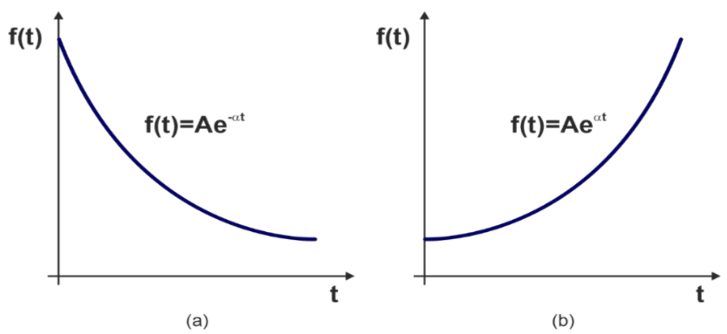
4.2 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA TYPICKÝCH BUDIACICH FUNKCIÍ

4.2.1 Exponenciálna funkcia

Predpokladajme **exponenciálnu funkciu**, ktorá je zobrazená na Obr. 4.1 (a). Matematicky je táto exponenciálna funkcia definovaná ako

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \cdot e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}, \tag{4.5}$$

kde **A** a **α** sú reálne konštanty.



Obr. 4.1. Exponenciálna funkcia (a) klesajúca, (b) rastúca

Laplaceovu transformáciu tejto exponenciálnej funkcie $\mathbf{f(t) = A \cdot e^{-\alpha t}}$ môžeme vypočítať týmto spôsobom

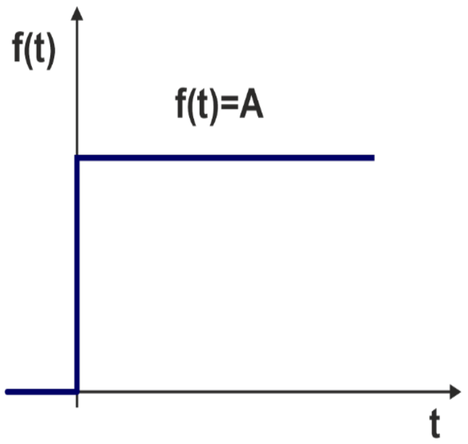
$$\mathcal{L}[A \cdot e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty A \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-st}\, dt = A \cdot \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}\, dt = \frac{A}{s+\alpha} \,. \tag{4.6}$$

4.2.2 Skoková funkcia

Ďalej predpokladajme **skokovú funkciu**, ktorá je zobrazená na Obr. 4.2. Táto skoková funkcia je matematicky definovaná ako

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0' \end{cases} \tag{4.7}$$

kde **A** je reálna konštanta. Poznamenajme, že táto skoková funkcia je špeciálnym prípadom exponenciálnej funkcie $\mathbf{f(t) = A \cdot e^{-\alpha t}}$, kde $\boldsymbol{\alpha = 0}$.



Obr. 4.2. Skoková funkcia (z angl. step function)

Laplaceova transformácia skokovej funkcie $\mathbf{f(t) = A}$ je daná vzťahom

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^\infty A \cdot e^{-st}\, dt = \frac{A}{s}\ . \tag{4.8}$$

Špeciálnym prípadom tejto **skokovej funkcie** je **jednotková skoková funkcia** (z angl. **unit step function**), ktorá je matematická definovaná ako

$$f(t) = 1\,(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}, \tag{4.9}$$

a jej **Laplaceova transformácia** je daná ako

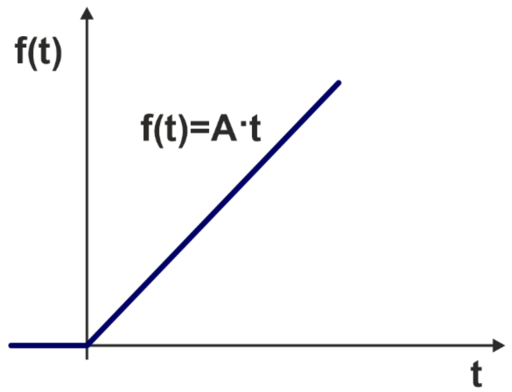
$$\mathcal{L}[1\,(t)] = \frac{1}{s}\ . \tag{4.10}$$

4.2.3 Lineárne rastúca funkcia

Ďalej budeme predpokladať **lineárne rastúcu funkciu** (z angl. ramp function), ktorá je zobrazená na Obr. 4.3. Táto funkcia je matematicky definovaná ako

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \cdot t & t \geq 0 \end{cases}, \tag{4.11}$$

kde **A** je reálna konštanta.



Obr. 4.3. Lineárne rastúca funkcia (z angl. ramp function)

Laplaceovu transformáciu tejto lineárne rastúcej funkcie $\mathbf{f(t) = A \cdot t}$ môžeme vypočítať z definície Laplaceovej transformácie týmto spôsobom

$$\mathcal{L}[A \cdot t] = \int_0^\infty A \cdot t \cdot e^{-st}\, dt = A \int_0^\infty t \cdot e^{-st}\, dt\ . \tag{4.12}$$

Predchádzajúci integrál môžeme vypočítať matematickou **metódou per-partes**, ktorá je matematicky definovaná ako

$$\int_a^b u\, dv = u \cdot v|_a^b - \int_a^b v\, du\ . \tag{4.13}$$

V našom prípade $\mathbf{u = t}$ a $\mathbf{dv = e^{-st}}$. Poznamenajme, že $\mathbf{v = e^{-st}/(-s)}$, potom platí, že

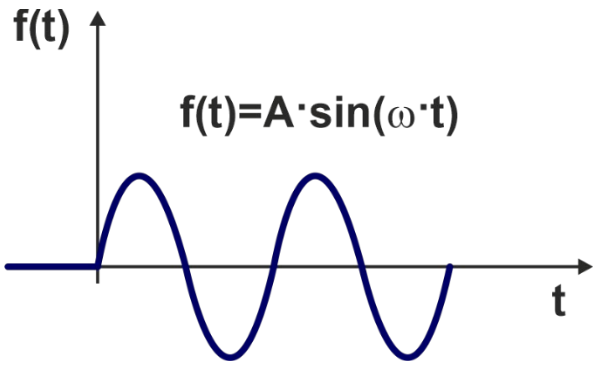
$$\mathcal{L}[A \cdot t] = A \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-st}\, dt = A \cdot \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\, dt \right] = \frac{A}{s} \cdot \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{A}{s^2}\,. \tag{4.14}$$

4.2.4 Harmonická funkcia

V prípade dynamických systémov sa môžu vyskytnúť aj harmonicky premenlivé funkcie **sínusového** resp. **kosínusového typu**. V ďalšom sa budeme zaoberať výpočtom Laplaceovej transformácie **sínusovej funkcie** (z angl. sinusoidal function), ktorá je zobrazená na Obr. 4.4. Táto funkcia je matematicky definovaná ako

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \cdot \sin(\omega \cdot t) & t \geq 0 \end{cases}, \qquad (4.15)$$

kde **A** a **ω** sú reálne konštanty.



Obr. 4.4. Funkcia sínus

Pripomeňme, že

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \qquad (4.16)$$

a

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\,. \qquad (4.17)$$

A taktiež, že funkciu $\mathbf{sin(\omega t)}$ a $\mathbf{cos(\omega t)}$ možno zapísať prostredníctvom exponenciálnych funkcií v tomto tvare

$$\begin{aligned} \sin(\omega \cdot t) &= \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right), \\ \cos(\omega \cdot t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right). \end{aligned} \qquad (4.18)$$

Potom Laplaceovu transformáciu funkcie sínus $\mathbf{f(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t)}$ môžeme vypočítať týmto spôsobom

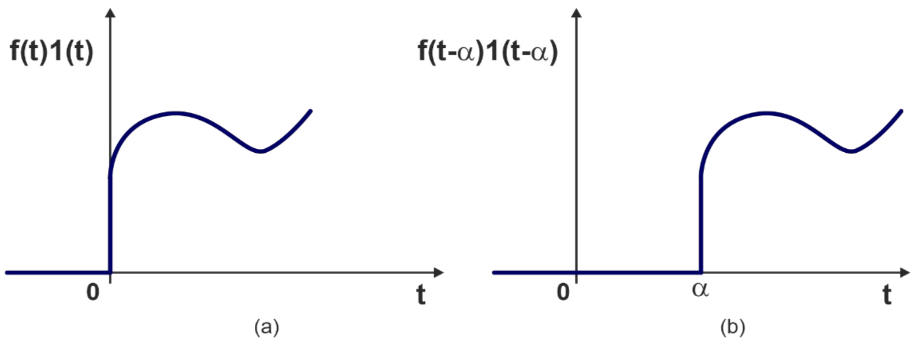
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[A \cdot \sin(\omega \cdot t)] &= \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\infty} \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \cdot e^{-st}\, dt = \\ &= \frac{A}{2j} \cdot \frac{1}{s - j\omega} - \frac{A}{2j} \cdot \frac{1}{s + j\omega} = \frac{A \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Podobným spôsobom možno vypočítať Laplaceovu transformáciu funkcie **kosínus** $\mathbf{f(t) = A \cdot cos(\omega \cdot t)}$, ktorá je definovaná ako

$$\mathcal{L}[A \cdot \cos(\omega \cdot t)] = \frac{A \cdot s}{s^2 + \omega^2}. \tag{4.20}$$

4.2.5 Posunutá funkcia

Vypočítajme teraz Laplaceovu transformáciu posunutej funkcie $\mathbf{f(t-\alpha) \cdot 1(t-\alpha)}$, kde $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$. Táto funkcia je rovná nule pre čas $\mathbf{t < \alpha}$. Špeciálnym prípadom tejto posunutej funkcie je neposunutá funkcia $\mathbf{f(t) \cdot 1(t)}$, kde $\boldsymbol{\alpha = 0}$. Obidve tieto funkcie sú znázornené na Obr. 4.5 (a) a (b).



Obr. 4.5. (a) neposunutá funkcia f(t)1(t), (b) posunutá funkcia $f(t-\alpha)1(t-\alpha)$

Podľa definície Laplaceovu transformáciu posunutej funkcie $\mathbf{f(t-\alpha)1(t-\alpha)}$ môžeme vypočítať pomocou tohto integrálu

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = \int_0^{\infty} f(t-\alpha)1(t-\alpha) \cdot e^{-st}\, dt\,. \tag{4.21}$$

Zámenou nezávislej premennej z času **t** na $\boldsymbol{\tau}$, kde $\boldsymbol{\tau = t - \alpha}$ dostávame, že

$$\int_0^{\infty} f(t-\alpha)1(t-\alpha) \cdot e^{-st}\, dt = \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)1(\tau) \cdot e^{-s(\tau+\alpha)}\, d\tau\,. \tag{4.22}$$

Označením, že $\mathbf{f(\tau)\cdot 1(\tau) = 0}$ pre $\boldsymbol{\tau < 0}$, môžeme zameniť dolnú hranicu integrovania za $\mathbf{0}$. A potom

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t-\alpha)\cdot 1(t-\alpha)\cdot e^{-st}\,dt &= \int_0^\infty f(\tau)\cdot 1(\tau)\cdot e^{-s(\tau+\alpha)}\,d\tau = \\ = \int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-s\tau}\cdot e^{-\alpha s}\,d\tau &= e^{-\alpha s}\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-s\tau}d\tau = \\ &= e^{-\alpha s}\cdot F(s)\,,\end{aligned} \tag{4.23}$$

kde $\mathbf{F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$. A teda

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\cdot 1(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}\cdot F(s), \quad \alpha \geq 0\,. \tag{4.24}$$

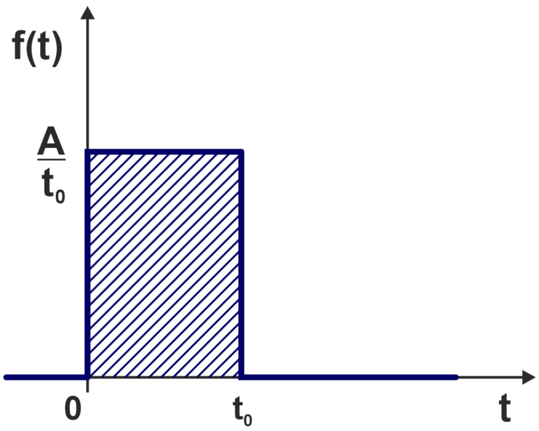
Táto posledná rovnica vyjadruje vlastnosť na výpočet Laplaceovej transformácie posunutej funkcie času $\mathbf{f(t)\ \cdot 1(t)}$ o čas $\boldsymbol{\alpha}$, kde $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$.

4.2.6 Pulzná funkcia

Uvažujme pulzný signál zobrazený na Obr. 4.6, ktorý je matematicky definovaný touto funkciou

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t < 0, t_0 < t \end{cases}, \tag{4.25}$$

kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{t_0}$ sú reálne konštanty.



Obr. 4.6. Pulzný signál

Pulzný signál v tomto prípade predstavuje skokovú funkciu o veľkosti $\mathbf{A/t_0}$, ktorá začína pôsobiť v čase $\mathbf{t = 0}$ a v čase $\mathbf{t = t_0}$ je k tejto funkcii pripočítaná záporná funkcia $-\mathbf{A/t_0}$. To znamená, že pulznú funkciu môžeme matematicky zapísať ako

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot 1(t) - \frac{A}{t_0} \cdot 1(t - t_0)\,. \qquad (4.26)$$

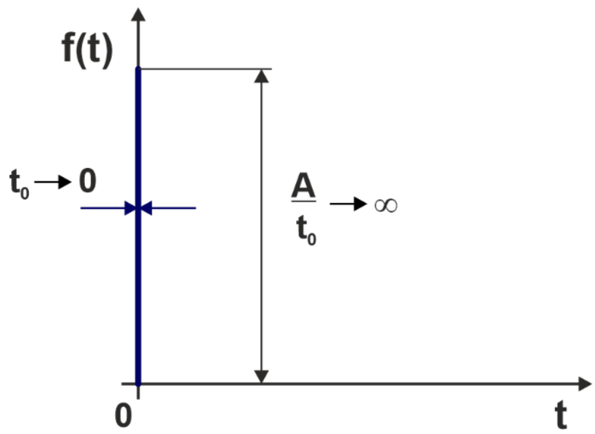
Potom Laplaceovu transformáciu **pulznej funkcie** možno vypočítať týmto spôsobom

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} \cdot 1(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} \cdot 1(t - t_0)\right] = \frac{A}{t_0 \cdot s} - \frac{A}{t_0 \cdot s} e^{-st_0} = \frac{A}{t_0 \cdot s} \cdot (1 - e^{-st_0})\,. \qquad (4.27)$$

4.2.7 Impulzná funkcia

Impulzná funkcia je špeciálny limitný prípad pulznej funkcie. Predpokladajme impulznú funkciu v tomto tvare

$$f(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t < 0, t_0 < t \end{cases}\,. \qquad (4.28)$$



Obr. 4.7. Impulzná funkcia

Predchádzajúci Obr. 4.7 zobrazuje takúto **impulznú funkciu**. Ide teda o limitný prípad **pulznej funkcie** zobrazenej na Obr. 4.6, keď $\mathbf{t_0}$ konverguje k nule. Pretože veľkosť impulznej funkcie je $\mathbf{A/t_0}$ a čas pôsobenia je $\mathbf{t_0}$, plocha pod impulznou funkciou je rovná hodnote **A**. V prípade, že čas pôsobenia konverguje k nule, potom veľkosť $\mathbf{A/t_0}$ konverguje k nekonečnu, ale plocha pod impulznou funkciou zostáva rovná hodnote **A**.

Poznamenajme, že veličina impulz je meraná jeho plochou. Na základe rovnice (4.28) môžeme vypočítať Laplaceovu transformáciu **impulznej funkcie** týmto spôsobom

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t_0 \to 0}\left[\frac{A}{t_0}\cdot\left(1-e^{-st_0}\right)\right] = \lim_{t_0 \to 0}\frac{\frac{d}{dt_0}\left[A\cdot\left(1-e^{-st_0}\right)\right]}{\frac{d}{dt_0}(t_0\cdot s)} = \frac{A\cdot s}{s} = A\,. \tag{4.29}$$

A teda Laplaceova transformácia impulznej funkcie je rovná ploche pod **impulzom**. Impulzná funkcia, ktorej plocha sa rovná jednej nazývame **jednotkovým impulzom** $\boldsymbol{\delta(t)}$ (Dirac delta funkcia). **Jednotkový impulz**, ktorý sa objaví v čase $\mathbf{t = t_0}$ označujeme ako $\boldsymbol{\delta(t - t_0)}$ a spĺňa tieto podmienky

$$\begin{gathered}\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt = 1\,. \end{gathered} \tag{4.30}$$

Impulz, ktorý nadobúda nekonečne veľkú hodnotu počas nulového trvania, je v skutočnosti matematická fikcia, ktorá sa v reálnych fyzikálnych systémov nevyskytuje. Ak však veľkosť pulzného vstupného signálu nadobúda pomerne veľkú hodnotu na malom časovom intervale, potom v takomto prípade môžeme tento **vstupný signál** považovať za aproximáciu akéhosi **impulzného vstupného signálu**.

Napr., ak **sila** alebo **moment**, ktorú sú aplikované ako vstupný signál $\mathbf{f(t)}$, pôsobia na systém veľmi krátky čas $\mathbf{0 < t < t_0}$, kde hodnota funkcie $\mathbf{f(t)}$ je dostatočne veľká a taká, že hodnota $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t_0}}\mathbf{f(t)dt}$ nie je zanedbateľná, potom tento vstupný signál možno považovať za **impulzný vstupný signál**. Impulzný signál dodáva systému energiu nekonečne krátky čas.

4.3 VLASTNOSTI LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE

4.3.1 Násobenie funkcie výrazom $\mathbf{e^{-\alpha t}}$

Ak funkcia $\mathbf{f(t)}$ má Laplaceovu transformáciu a jej Laplaceova transformácia je $\mathbf{F(s)}$, potom Laplaceovu transformáciu funkcie, ktorá vznikne násobením výrazom exponenciálnej funkcie $\mathbf{e^{-\alpha t}}$ a funkcie $\mathbf{f(t)}$ t. j. $\mathbf{f(t)\cdot e^{-\alpha t}}$, vypočítame ako

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cdot f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\cdot f(t)\cdot e^{-st}\,dt = F(s+\alpha)\,. \tag{4.31}$$

Ako možno vidieť, tak násobenie funkcie $\mathbf{f(t)}$ výrazom $\mathbf{e^{-\alpha t}}$ má efekt na zámenu $\mathbf{s}$ výrazom $\mathbf{(s+\alpha)}$ v Laplaceovej transformácií.

Inak povedané, zámena $\mathbf{s}$ výrazom $(\mathbf{s}+\boldsymbol{\alpha})$ je ekvivalentná násobeniu funkcie $\mathbf{f(t)}$ výrazom $\mathbf{e^{-\alpha t}}$. Táto vlastnosť Laplaceovej transformácie je užitočná pre nájdenie takých funkcií ako sú $\mathbf{e^{-\alpha t}\cdot sin(\boldsymbol{\omega}\cdot t)}$ a $\mathbf{e^{-\alpha t}\cdot cos(\boldsymbol{\omega}\cdot t)}$. Napr. ak

$$\mathcal{L}[A\cdot\sin(\omega\cdot t)] = \frac{A\cdot\omega}{s^2+\omega^2} = F(s)\,,$$
$$\mathcal{L}[A\cdot\cos(\omega\cdot t)] = \frac{A\cdot s}{s^2+\omega^2} = G(s)\,, \tag{4.32}$$

potom **Laplaceova transformácia** funkcií $\mathbf{e^{-\alpha t}\cdot sin(\boldsymbol{\omega}\cdot t)}$ a $\mathbf{e^{-\alpha t}\cdot cos(\boldsymbol{\omega}\cdot t)}$ je rovná

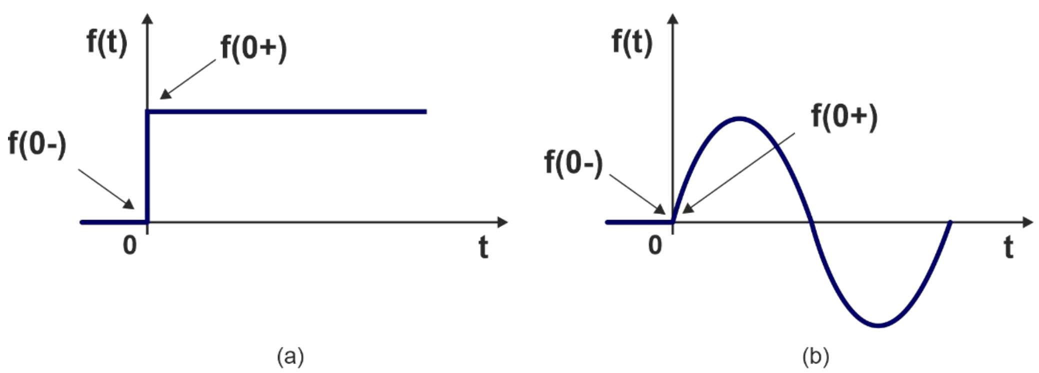
$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cdot\sin(\omega\cdot t)] = F(s+\alpha) = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\,,$$
$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega\cdot t)] = G(s+\alpha) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\,. \tag{4.33}$$

4.3.2 Pravidlo derivácie funkcie

Laplaceova transformácia derivácie funkcie $\mathbf{f(t)}$ je daná vzťahom

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\cdot F(s) - f(0)\,, \tag{4.34}$$

kde $\mathbf{f(0)}$ je počiatočná hodnota funkcie $\mathbf{f(t)}$ v čase $\mathbf{t = 0}$. Predchádzajú rovnicu (5.38) nazývame pravidlom derivovania funkcie $\mathbf{f(t)}$. Pre funkciu $\mathbf{f(t)}$ môžu byť hodnoty $\mathbf{f(0+)}$ a $\mathbf{f(0-)}$ rovnaké alebo mať rozdielne hodnoty, ako je to znázornené na Obr. 4.8.



Obr. 4.8. Počiatočné hodnoty (a) skokovej funkcie a (b) funkcie sínus

Rozdiel medzi hodnotou $\mathbf{f(0+)}$ a $\mathbf{f(0-)}$ je dôležitý, keď funkcia $\mathbf{f(t)}$ nadobúda diskontinuitu v čase $\mathbf{t = 0}$, pretože v tomto prípade derivácia funkcie $\mathbf{df(t)/dt}$ predstavuje impulznú funkciu.

Ak $\mathbf{f(0+) \neq f(0-)}$, potom rovnicu (5.38) je nutné modifikovať na tento tvar

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0+)\,,$$
$$\mathcal{L}_-\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0-)\,. \qquad (4.35)$$

Na potvrdenie platnosti pravidla derivácie, vypočítame **Laplaceov integrál** – integrovaním po častiach (**metódou per partes**)

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\,dt = f(t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \left[\frac{df(t)}{dt}\right] \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\,dt\,. \qquad (4.36)$$

Z predávajúceho vyplýva, že

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] \qquad (4.37)$$

a teda

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0)\,. \qquad (4.38)$$

Podobný spôsobom možno odvodiť pravidlo pre **druhú deriváciu funkcie $\mathbf{f(t)}$** v tomto tvare

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - \dot{f}(0)\,, \qquad (4.39)$$

kde $\mathbf{\dot{f}(0)}$ je hodnota $\mathbf{df(t)/dt}$ vypočítaná v čase $\mathbf{t = 0}$. Napokon pre **n-tú deriváciu** funkcie $\mathbf{f(t)}$ možno zadefinovať nasledovné všeobecne platné pravidlo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot \dot{f}(0) - \cdots - \frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}}\,, \qquad (4.40)$$

kde $\mathbf{f(0)}, \mathbf{\dot{f}(0)}, \dots, \mathbf{\frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}}}$ predstavujú hodnoty funkcie $\mathbf{f(t)}, \mathbf{df(t)/dt}, \dots, \mathbf{d^{n-1}f(t)/dt^{n-1}}$ vypočítané v čase $\mathbf{t = 0}$.

4.3.3 Pravidlo konečnej hodnoty

Pravidlo konečnej hodnoty vyjadruje ustálené správanie sa funkcie $\mathbf{f(t)}$ vzhľadom na správanie $\mathbf{s \cdot F(s)}$ v blízkosti $\mathbf{s = 0}$. Pravidlo možno aplikovať len vtedy, ak existuje $\lim\limits_{\mathbf{t \to \infty}} \mathbf{f(t)}$, ktorá znamená, že $\mathbf{f(t)}$ sa ustáli na konečnej hodnote v čase $\mathbf{t} \to \infty$. Ak všetky póly $\mathbf{s \cdot F(s)}$ ležia v ľavej pol rovine roviny $\mathbf{s}$, potom $\lim\limits_{\mathbf{t \to \infty}} \mathbf{f(t)}$ bude existovať, naopak ak $\mathbf{s \cdot F(s)}$ má póly na imaginárnej osi alebo na pravej strane roviny $\mathbf{s}$, funkcia $\mathbf{f(t)}$ bude obsahovať oscilujúce alebo exponenciálne rastúce časové funkcie, tzn. že $\lim\limits_{\mathbf{t \to \infty}} \mathbf{f(t)}$ neexistuje. Pravidlo konečnej hodnoty pre takéto prípady neplatí. Napr. ak funkcia $\mathbf{f(t)}$ je sínusovou funkciou $\mathbf{\sin(\omega \cdot t)}$, potom $\mathbf{s \cdot F(s)}$ má poly $\mathbf{s = \pm j\omega}$ a pre tento prípad neexistuje $\lim\limits_{\mathbf{t \to \infty}} \mathbf{f(t)}$.

Pravidlo konečnej hodnoty hovorí: Ak funkcia $\mathbf{f(t)}$ a derivácia funkcie $\mathbf{df(t)/dt}$ majú Laplaceovu transformáciu $\mathbf{F(s)}$ a $\mathbf{s \cdot F(s)}$, kde $\mathbf{F(s)}$ je Laplaceova transformácia funkcie $\mathbf{f(t)}$ a existuje $\lim\limits_{\mathbf{t \to \infty}} \mathbf{f(t)}$, potom

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)\,. \tag{4.41}$$

Ako dôkaz platnosti predchádzajúceho pravidla konečnej hodnoty vyjdeme z definície limity $\mathbf{s \to 0}$ integrálu Laplaceovej transformácie derivácie funkcie $\mathbf{f(t)}$

$$\lim_{s \to 0} \int_0^\infty \left[\frac{df(t)}{dt}\right] \cdot e^{-st}\, dt = \lim_{s \to 0} [s \cdot F(s) - f(0)]\ , \tag{4.42}$$

keďže $\lim\limits_{\mathbf{s \to 0}} \mathbf{e^{-st} = 1}$ a $\lim\limits_{\mathbf{t \to \infty}} \mathbf{f(t)}$ existuje, potom dostávame

$$\int_0^\infty \left[\frac{df(t)}{dt}\right] dt = f(t)|_0^\infty = f(\infty) - f(0) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s) - f(0)\,, \tag{4.43}$$

z čoho vyplýva, že

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)\,. \tag{4.44}$$

4.3.4 Pravidlo počiatočnej hodnoty

Pravidlo počiatočnej hodnoty je náprotivok pravidla o konečnej hodnote. Použitím pravidla o počiatočnej hodnote možno nájsť hodnotu funkcie $\mathbf{f(t)}$ v čase $\mathbf{t = 0+}$ priamo z Laplaceovej transformácie funkcie $\mathbf{f(t)}$. Pravidlo nedáva hodnotu funkcie $\mathbf{f(t)}$ priamo v čase $\mathbf{t = 0}$, ale v hodnote o niečo väčšej ako je nula.

Pravidlo počiatočnej hodnoty hovorí: Ak funkcia $\mathbf{f(t)}$ a derivácia funkcie $\mathbf{df(t)/dt}$ majú Laplaceovu transformáciu $\mathbf{F(s)}$ a $\mathbf{s \cdot F(s)}$, kde $\mathbf{F(s)}$ je Laplaceova transformácia funkcie $\mathbf{f(t)}$ a existuje $\lim\limits_{s\to\infty} \mathbf{s \cdot F(s)}$, potom

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)\,. \tag{4.45}$$

Ako dôkaz predchádzajúceho pravidla počiatočnej hodnoty, použijeme rovnicu pre **Laplaceovu transformáciu** $\boldsymbol{\mathcal{L}_+}$ derivácie $\mathbf{df(t)/dt}$ v tomto tvare

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0+)\,. \tag{4.46}$$

Pre časový interval $\mathbf{0+ \leq t \leq \infty}$, ak $\mathbf{s}$ konverguje k nekonečnu, $\mathbf{e^{-st}}$ konverguje k nule. Preto,

$$\lim_{s\to\infty} \int_{0+}^{\infty} \left[\frac{df(t)}{dt}\right] \cdot e^{-st}\, dt = \lim_{s\to\infty} [s \cdot F(s) - f(0+)] = 0 \tag{4.47}$$

alebo

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)\,. \tag{4.48}$$

4.3.5 Pravidlo integrovania

Ak existuje **Laplaceova transformácia** integrálu funkcie $\int \mathbf{f(t)\ dt}$, potom pre túto **Laplaceovu transformáciu** musí platiť **pravidlo integrovania**

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\ dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}, \tag{4.49}$$

kde $\mathbf{F(s)} = \boldsymbol{\mathcal{L}}[\mathbf{f(t)}]$ a $\mathbf{f^{-1}(0)} = \int \mathbf{f(t)\ dt}$ v čase $\mathbf{t = 0}$. Predchádzajúcu rovnicu (4.49) nazývame pravidlom integrovania. **Pravidlo integrovania** môžeme dokázať, vypočítaním **Laplaceovej transformácie** funkcie $\int \mathbf{f(t)\ dt}$, ktorý predstavuje funkciu $\mathbf{f(t)}$ z definície Laplaceovej transformácie.

Integrál Laplaceovej transformácie vypočítame **metódou per partes**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int f(t)\ dt\right] &= \int_0^{\infty} \left[\int f(t)\, dt\right] \cdot e^{-st}\, dt = \left[\int f(t)\, dt\right] \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\, dt = \\ &= \frac{1}{s}\int f(t)\, dt\bigg|_{t=0} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s}\,.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Poznamenajme, že ak funkcia $\mathbf{f(t)}$ zahŕňa impulznú funkciu v $\mathbf{t = 0}$, potom $\mathbf{f^{-1}(0+) \neq f^{-1}(0-)}$. To znamená, že musíme predchádzajúce pravidlo podľa rovnice (4.49) upraviť

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{+}\left[\int f(t)\ dt\right] &= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0+)}{s}, \\ \mathcal{L}_{-}\left[\int f(t)\ dt\right] &= \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0-)}{s}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Ako môžeme vidieť, tak integrovanie funkcie v časovej oblasti $\mathbf{t}$, je zmenené na delenie v oblasti $\mathbf{s}$. Ak počiatočná hodnota integrálu je nulová, potom **Laplaceova transformácia integrálu** $\boldsymbol{\int f(t)\ dt}$ je daná ako $\mathbf{F(s)/s}$. **Pravidlo integrovania** môžeme jemne modifikovať v zmysle spojitého integrálu funkcie $\mathbf{f(t)}$. Ak existuje Laplaceova transformácia spojitého integrálu $\boldsymbol{\int_0^t f(t)\ dt}$, potom možno túto **Laplaceovu transformáciu** vypočítať na základe tohto **pravidla integrovania**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\ dt\right] = \frac{F(s)}{s}\ . \tag{4.52}$$

Ako dôkaz tohto tvrdenia najskôr poznamenajme, že

$$\int_0^t f(t)\ dt = \int f(t)\ dt - f^{-1}(0)\ , \tag{4.53}$$

kde $\mathbf{f^{-1}(0)}$ je konštantná hodnota integrálu $\boldsymbol{\int f(t)\ dt}$ v čase $\mathbf{t = 0}$, potom

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\ dt\right] = \mathcal{L}\left[\int f(t)\ dt - f^{-1}(0)\right] = \mathcal{L}\left[\int f(t)\ dt\right] - \mathcal{L}[f^{-1}(0)]\ . \tag{4.54}$$

Na základe rovnice (4.49) a pripomenutím, že $\mathbf{f^{-1}(0)}$ je konštanta, potom

$$\mathcal{L}[f^{-1}(0)] = \frac{f^{-1}(0)}{s}\ . \tag{4.55}$$

Dosadením za Laplaceove transformácie $\boldsymbol{\mathcal{L}[\int f(t)\ dt]}$ a $\boldsymbol{\mathcal{L}\left[f^{-1}(0)\right]}$ dostávame, že

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\ dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s} = \frac{F(s)}{s}\ . \tag{4.56}$$

4.4 INVERZNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

Inverzná Laplaceova transformácia odkazuje na proces nájdenia funkcie času $\mathbf{f(t)}$ z odpovedajúcej Laplaceovej transformácie racionálnej funkcie $\mathbf{F(s)}$. Na nájdenie inverznej Laplaceovej transformácie existuje niekoľko metód. Najjednoduchšou z týchto metód je priame použitie tabuľky **Laplaceových transformácií** pre nájdenie časových funkcií $\mathbf{f(t)}$ odpovedajúcich Laplaceových transformácií danej funkcie $\mathbf{F(s)}$. Druhou metódou je použitie rozkladu funkcie $\mathbf{F(s)}$ na parciálne zlomky. V tejto kapitole si uvedieme metódu rozkladu racionálnej funkcie na parciálne zlomky.

4.4.1 Metóda rozkladu na parciálne zlomky na nájdenie inverznej Laplaceovej transformácie

Ak racionálna funkcia $\mathbf{F(s)}$ Laplaceovej transformácie funkcie $\mathbf{f(t)}$ je rozdelená na **n** racionálnych funkcií $\mathbf{F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)}$

$$\mathrm{F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)}\,, \tag{4.57}$$

ktorých inverzné Laplaceove transformácie $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}[\mathbf{F_1(s)}], \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}[\mathbf{F_2(s)}], \dots, \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}[\mathbf{F_n(s)}]$ sú ľahko identifikovateľné na základe tabuľky Laplaceových transformácií, potom **inverzná Laplaceova transformácia** $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}[\mathbf{F(s)}]$ je definovaná ako

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F(s)}] = \mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F_1(s)}] + \mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F_2(s)}] + \cdots + \mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F_n(s)}] = \\ = \mathrm{f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)}\,, \end{aligned} \tag{4.58}$$

kde $\mathbf{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)}$ sú **inverzné Laplaceove transformácie** funkcií $\mathbf{F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)}$.

V systémovej analýze dynamických systémov prenosová funkcia odozvy dynamických systémov často nadobúda tvar

$$\mathrm{F(s)} = \frac{\mathrm{B(s)}}{\mathrm{A(s)}}\,, \tag{4.59}$$

kde $\mathbf{A(s)}$ a $\mathbf{B(s)}$ sú polynómy komplexnej premennej $\mathbf{s}$. Poznamenajme, že stupeň polynómu $\mathbf{B(s)}$ spravidla nie je väčší než stupeň polynómu $\mathbf{A(s)}$. Výhodou **metódy rozkladu na parciálne zlomky** je, že rozkladom získame jednotlivé časti racionálnej funkcie $\mathbf{F(s)}$, ktoré predstavujú veľmi jednoduché funkcie premenenej $\mathbf{s}$; to znamená, že nie je nutné sa priamo odkazovať na **Laplaceove transformácie** funkcií z tabuľky Laplaceových transformácií, nakoľko odpovedajúce **Laplaceove páry** sú jednoducho zapamätateľné. Pre nájdenie rozkladu racionálnej funkcie $\mathbf{F(s)}$, je nutné poznať korene menovateľa $\mathbf{A(s)}$ takejto funkcie.

Uvažujme racionálnu funkciu $\mathbf{F(s)}$ zapísanú vo faktorovom tvare

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K\cdot(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}, \qquad (4.60)$$

kde $\mathbf{p_1, p_2, \dots, p_n}$ a $\mathbf{z_1, z_2, \dots, z_m}$ sú buď **reálne** alebo **komplexne združené čísla**.

4.4.2 Rozklad funkcie F(s) na parciálne zlomky pre nenásobné póly

V tomto prípade môžeme racionálnu funkciu $\mathbf{F(s)}$, zapísať ako súčet jednoduchých parciálnych zlomkov v tomto tvare

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}, \qquad (4.61)$$

kde $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_n}$ sú konštanty. Koeficienty $\mathbf{a_k}$ pre $\mathbf{k=1,2,\dots,n}$ nazývame zvyškami (z angl. residue) v **k-tom** póle koreňa $\mathbf{s=-p_k}$. Hodnotu $\mathbf{a_k}$ možno vypočítať prenásobením oboch strán rovnice (4.61) členom $(\mathbf{s+p_k})$ a dosadením za $\mathbf{s=-p_k}$ príslušnú hodnotu daného pólu. Potom

$$\begin{aligned}&\left[(s+p_k)\cdot\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}\\ &\qquad=\left[\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k)+\frac{a_2}{s+p_2}(s+p_k)+\cdots+\frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k)+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_k)\right]_{s=-p_k}=a_k\,.\end{aligned} \qquad (4.62)$$

Ako možno vidieť, tak všetky výrazy v predchádzajúcej rovnici na pravej strane vypadnú s výnimkou $\mathbf{a_k}$. Potom pre koeficient $\mathbf{a_k}$ platí, že

$$a_k=\left[(s+p_k)\cdot\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}. \qquad (4.63)$$

Poznamenajme tiež, že zatiaľ čo funkcia $\mathbf{f(t)}$ je reálnou funkciou času $\mathbf{t}$ a $\mathbf{p_1}$ resp. $\mathbf{p_2}$, sú komplexne združené čísla, potom koeficienty $\mathbf{a_1}$ a $\mathbf{a_2}$ sú taktiež komplexne združenými číslami. Iba jedno z komplexne združených čísel $\mathbf{a_1}$ a $\mathbf{a_2}$ je nutné vypočítať, nakoľko to druhé je automaticky známe.

Keďže **inverzná Laplaceova transformácia** každého **k-tého** parciálneho zlomku je známa a definovaná ako

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k \cdot e^{-p_k t}\,, \tag{4.64}$$

potom funkciu $\mathbf{f(t)}$ môžeme vyjadriť v tomto tvare

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 \cdot e^{-p_1 t} + a_2 \cdot e^{-p_2 t} + \cdots + a_n \cdot e^{-p_n t}\,. \tag{4.65}$$

Príklad č. 4.1.

Nájdite **inverznú Laplaceovu transformáciu** racionálnej funkcie $\mathbf{F(s)}$

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\,. \tag{4.66}$$

Riešenie:

Parciálny rozklad funkcie $\mathbf{F(s)}$ zavedením dvoch koeficientov $\mathbf{a_1}$ a $\mathbf{a_2}$ môžeme zapísať v tomto tvare

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}\,, \tag{4.67}$$

kde neznáme koeficienty $\mathbf{a_1}$ a $\mathbf{a_2}$ možno vypočítať použitím rovnice (4.63) a to ako

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[(s+1)\cdot\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{s+3}{(s+2)}\right]_{s=-1} = 2\,,\\ a_2 &= \left[(s+2)\cdot\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{s+3}{(s+1)}\right]_{s=-2} = -1\,. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Potom funkcia **f(t)**

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right] = 2\cdot e^{-t} - e^{-2t}\,. \tag{4.69}$$

Príklad č. 4.2.

Vypočítajte **inverznú Laplaceovu transformáciu** prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$

$$G(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} \,. \tag{4.70}$$

Riešenie:

Poznamenajme, že výpočtom koreňov polynómu menovateľa môžeme výraz v menovateli zapísať v tomto tvare

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + 2j) \cdot (s + 1 - 2j) \,. \tag{4.71}$$

Dva korene menovateľa sú komplexné združené čísla. Upravme predchádzajúcu kvadratickú formu na tento tvar

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2 \,. \tag{4.72}$$

Nakoľko korene polynómu tvoria **komplexne združený pár**, potom prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ bude daná súčtom tlmených funkcií **sínus** a **kosínus**, ktorých **Laplaceove transformácie** sú známe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t)] &= \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \,, \\ \mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t)] &= \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \,. \end{aligned} \tag{4.73}$$

A teda prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$ možno napísať ako súčet tlmenej funkcie **sínus** a **kosínus** v nasledujúcom tvare

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10 + 2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} = \\ &= 5 \cdot \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} + 2 \cdot \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} \,. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Potom funkcia **f(t)**

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] &= 5 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] = \\ &= 5 \cdot e^{-t} \sin(2 \cdot t) + 2 \cdot e^{-t} \cos(2 \cdot t) \,. \end{aligned} \tag{4.75}$$

4.4.3 Rozklad funkcie F(s) na parciálne zlomky pre viacnásobné póly

Princíp rozkladu racionálnej funkcie $\mathbf{F(s)}$, ktorá obsahuje **viacnásobné póly** si vysvetlíme na príklade rozkladu nasledujúcej racionálnej funkcie

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} \, . \tag{4.76}$$

Parciálny rozklad tejto funkcie $\mathbf{F(s)}$ bude obsahovať tri výrazy pre konkrétny jeden **viacnásobný** pól $\mathbf{s = -1}$. Funkciu $\mathbf{F(s)}$ možno zapísať v tomto tvare

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{s+1} \, , \tag{4.77}$$

kde koeficienty $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}$ a $\mathbf{b_3}$ môžeme vypočítať nasledovným postupom. Prenásobením oboch strán poslednej rovnice výrazom $\mathbf{(s+1)^3}$ dostávame, že

$$(s+1)^3 \cdot \frac{B(s)}{A(s)} = b_3 + b_2 \cdot (s+1) + b_1 \cdot (s+1)^2 \, . \tag{4.78}$$

Potom dosadením za $\mathbf{s = -1}$, prejde predchádzajúca rovnica do tohto upraveného tvaru

$$\left[(s+1)^3 \cdot \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_3 \, . \tag{4.79}$$

Pokračujme ďalej prvou deriváciou oboch strán rovnice (4.78) podľa premennej $\mathbf{s}$ a dostávame

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \cdot \frac{B(s)}{A(s)}\right] = b_2 + 2b_1 \cdot (s+1) \, , \tag{4.80}$$

následne dosadením za $\mathbf{s = -1}$, môžeme vypočítať koeficient $\mathbf{b_2}$

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \cdot \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_2 \, . \tag{4.81}$$

Podobným spôsobom druhou deriváciou oboch strán rovnice (4.78) podľa premennej **s** dostávame

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \cdot \frac{B(s)}{A(s)}\right] = 2b_1\,. \tag{4.82}$$

Z predchádzajúcej analýzy vyplýva, že koeficienty $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}$ a $\mathbf{b_3}$ možno postupne systematicky vypočítať a to týmto postupom

$$\begin{aligned}
b_3 &= \left[(s+1)^3 \cdot \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = (s^2+2s+3)_{s=-1} = 2\,, \\
b_2 &= \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \cdot \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{d}{ds}(s^2+2s+3)\right]_{s=-1} = \\
&= (2s+2)_{s=-1} = 0\,, \\
b_1 &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \cdot \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s^2+2s+3)\right]_{s=-1} = \\
&= \frac{1}{2}(2)_{s=-1} = 1\,.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Napokon funkciu $\mathbf{f(t)}$ vypočítame **inverznou Laplaceovou transformáciou** jej čiastkových parciálnych zlomkov

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = \\
&= t^2 \cdot e^{-t} + 0 + e^{-t} = e^{-t}(t^2+1)\,.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

4.5 RIEŠENIE LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

V tejto podkapitole sa zameriame na riešenie diferenciálnych rovníc použitím metódy **Laplaceovej transformácie**. Metóda **Laplaceovej transformácie** umožňuje vypočítať celkové riešenie odozvy dynamického systému, ktoré pozostáva zo **všeobecného** a **partikulárneho** riešenia. Z matematického hľadiska môžeme toto riešenie zapísať ako

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)\,, \tag{4.85}$$

kde $\mathbf{y(t)}$ je celkové riešenie odozvy, $\mathbf{y_0(t)}$ je riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice a $\mathbf{y_p(t)}$ je partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice.

Aplikáciou metódy **Laplaceovej transformácie** dospejeme k rovnakému riešeniu odozvy dynamického systému ako v prípade použitia klasických metód na riešenie diferenciálnych rovníc. **Klasické metódy** výpočtu celkového riešenia diferenciálnych rovníc vyžadujú určenie **integračných konštánt** z uvažovaných počiatočných podmienok. Na druhej strane v prípade použitia metódy Laplaceovej transformácie toto nie je nutné z dôvodu, že **počiatočné podmienky** môžeme pri metóde Laplaceovej transformácie priamo automaticky zahrnúť do riešenia a to pri samotnej transformácií danej diferenciálnej rovnice z časovej roviny $\mathbf{t}$ do komplexnej roviny $\mathbf{s}$. V prípade, že všetky počiatočné podmienky sú nulové, potom **Laplaceovu transformáciu diferenciálnej rovnice** možno získať jednoducho zámenou výrazu derivácie $\mathbf{d/dt}$ za $\mathbf{s}$, $\mathbf{d^2/dt^2}$ za $\mathbf{s^2}$ atď.

Pri **riešení lineárnej diferenciálnej rovnice** použitím **metódy Laplaceovej transformácie** postupujeme na základe nasledovných krokov:

1. Vykonáme Laplaceovu transformáciu každého člena diferenciálnej rovnice, čím prevedieme diferenciálnu rovnicu na algebrickú formu premennej $\mathbf{s}$,
2. vyjadríme Laplaceov tvar závislej premennej $\mathbf{Y(s)}$,
3. riešenie diferenciálnej rovnice $\mathbf{y(t)}$ v časovej oblasti $\mathbf{t}$ vypočítame inverznou Laplaceovou transformáciou z Laplaceovho obrazu racionálnej funkcie $\mathbf{Y(s)}$.

Príklad č. 4.3.

Vypočítajte riešenie $\mathbf{x(t)}$ nasledujúcej **diferenciálnej rovnice** s uvažovaním počiatočných podmienok

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \qquad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b\,, \tag{4.86}$$

kde **a** a **b** sú konštanty.

Riešenie:

Označením Laplaceovej transformácie funkcie $\mathbf{x(t)}$ ako $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\mathbf{x(t)}] = \mathbf{X(s)}$ a použitím pravidla derivácie funkcie, môžeme previesť jednotlivé derivácie do tohto Laplaceoveho tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{x}] &= s \cdot X(s) - x(0)\,, \\ \mathcal{L}[\ddot{x}] &= s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0)\,. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Potom **Laplaceova transformácia** danej diferenciálnej rovnice nadobudne tvar

$$[s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0)] + 3 \cdot [s \cdot X(s) - x(0)] + 2 \cdot X(s) = 0\,. \tag{4.88}$$

Dosadením zadaných počiatočných podmienok do predchádzajúcej rovnice dostávame

$$[s^2 \cdot X(s) - a \cdot s - b] + 3 \cdot [s \cdot X(s) - a] + 2 \cdot X(s) = 0 \tag{4.89}$$

alebo

$$(s^2 + 3 \cdot s + 2) \cdot X(s) = a \cdot s + b + 3 \cdot a\,. \tag{4.90}$$

Vyjadrením **Laplaceovho obrazu $\mathbf{X(s)}$** z poslednej rovnice a jeho ďalšou úpravou, môžeme dospieť k tomuto výslednému Laplaceovemu obrazu riešenia diferenciálnej rovnice

$$X(s) = \frac{a \cdot s + b + 3 \cdot a}{(s^2 + 3 \cdot s + 2)} = \frac{a \cdot s + b + 3 \cdot a}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a + b}{(s+1)} - \frac{a+b}{(s+2)}\,. \tag{4.91}$$

Potom **inverznou Laplaceovou transformáciou** predchádzajúceho riešenia priamo dostávame celkové riešenie diferenciálnej rovnice **x(t)**

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2a+b}{(s+1)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a+b}{(s+2)}\right] = \\ &= (2a+b) \cdot e^{-t} - (a+b)e^{-2t}\,. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Príklad č. 4.4.

Vypočítajte riešenie $\mathbf{x(t)}$ tejto **diferenciálnej rovnice** s uvažovaním počiatočných podmienok

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0\,. \tag{4.93}$$

Riešenie:

Ak vieme, že $\boldsymbol{\mathcal{L}[3] = \frac{3}{s}}$ a počiatočné podmienky diferenciálnej rovnice $\mathbf{x(0) = 0}$ a $\mathbf{\dot{x}(0) = 0}$ sú nulové, potom Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice vedie na tento tvar

$$s^2 \cdot X(s) + 2s \cdot X(s) + 5 \cdot X(s) = \frac{3}{s}\,. \tag{4.94}$$

Vyjadrením **Laplaceovho obrazu** riešenia $\mathbf{X(s)}$ dostávame

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3}{s \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 5)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{5} \cdot \frac{s+2}{s^2 + 2 \cdot s + 5} = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}\,. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Potom **inverznou Laplaceovou transformáciou** Laplaceovho obrazu $\mathbf{X(s)}$ musí platiť, že

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{3}{5}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{3}{10}\cdot\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right] - \frac{3}{5}\cdot\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] = \\ &= \frac{3}{5} - \frac{3}{10}\cdot e^{-t}\sin(2t) - \frac{3}{5}\cdot e^{-t}\cos(2t)\,. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Príklad č. 4.5.

Nájdite reálnu a imaginárnu časť výrazu

$$\frac{2+1\cdot j}{3+4\cdot j} \tag{4.97}$$

a taktiež absolútnu hodnotu **u** a uhol **Θ** komplexného čísla.

Riešenie:

$$\frac{2+1j}{3+4j} = \frac{2+1j}{3+4j}\cdot\frac{3-4j}{3-4j} = \frac{6+3j-8j+4}{9+16} = \frac{10-5j}{25} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j\,, \tag{4.98}$$

potom absolútnu hodnotu a uhol komplexného čísla vypočítame týmto spôsobom

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447\,, \\ \Theta &= \tan^{-1}\frac{-1/5}{2/5} = \tan^{-1}\frac{-1}{2} = -26.565°\,. \end{aligned} \tag{4.99}$$

Príklad č. 4.6.

Nájdite Laplaceovu transformáciu funkcie

$$f(t) = t\cdot e^{-3t}\,. \tag{4.100}$$

Riešenie:

Pretože,

$$\mathcal{L}[t] = G(s) = \frac{1}{s^2}\,, \tag{4.101}$$

potom odkázaním sa na vlastnosť **Laplaceovej transformácie násobenia** funkcie **f(t)** výrazom $\mathbf{e^{-\alpha t}}$ podľa rovnice (4.31) dostávame, že

$$F(s) = \mathcal{L}[t \cdot e^{-3t}] = G(s+3) = \frac{1}{(s+3)^2}. \qquad (4.102)$$

Príklad č. 4.7.

Vypočítajte Laplaceovu transformáciu funkcie

$$f(t) = \sin(\omega t + \Theta)\,, \qquad (4.103)$$

kde $\mathbf{\Theta}$ je konštanta.

Riešenie:

Poznamenajme, že

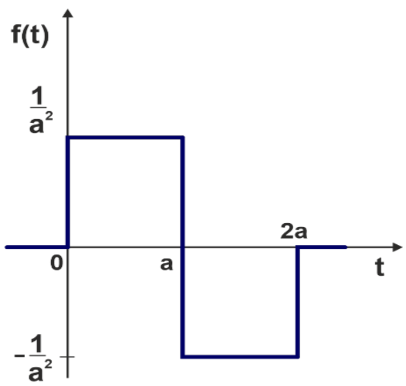
$$\sin(\omega t + \Theta) = \sin(\omega t) \cdot \cos\Theta + \cos(\omega t) \cdot \sin\Theta\,, \qquad (4.104)$$

potom využitím predchádzajúceho vzťahu dostávame, že

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t + \Theta)] &= \cos\Theta \cdot \mathcal{L}[\sin(\omega t)] + \sin\Theta \cdot \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \\ &= \cos\Theta \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \sin\Theta \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega \cdot \cos\Theta + s \cdot \sin\Theta}{s^2+\omega^2}. \end{aligned} \qquad (4.105)$$

Príklad č. 4.8.

Nájdite Laplaceovu transformáciu $\mathbf{F(s)}$ funkcie $\mathbf{f(t)}$, ktorá je znázornená na Obr. 4.9. Navyše vypočítajte limitu funkcie $\mathbf{F(s)}$, ak **a** konverguje k nule.



Obr. 4.9. Funkcia f(t)

Riešenie:

Poznamenajme, že funkciu $\mathbf{f}(\mathbf{t})$, ktorá je zobrazená na Obr. 4.9, môžeme zapísať ako

$$f(t) = \frac{1}{a^2} \cdot 1(t) - \frac{2}{a^2} \cdot 1(t-a) + \frac{1}{a^2} \cdot 1(t-2a)\,. \tag{4.106}$$

Potom

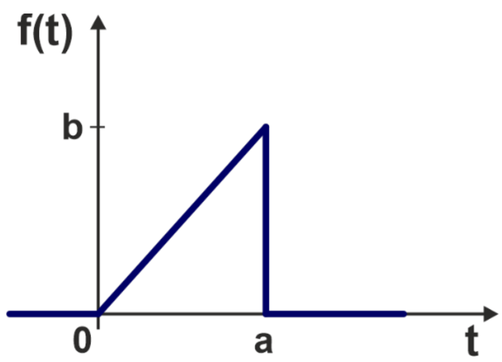
$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{a^2} \cdot \mathcal{L}[1(t)] - \frac{2}{a^2} \cdot \mathcal{L}[1(t-a)] + \frac{1}{a^2} \cdot \mathcal{L}[1(t-2a)] = \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2}{a^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-as} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-2as} = \\ &= \frac{1}{a^2 s} \cdot \left(1 - 2 \cdot e^{-as} + e^{-2as}\right). \end{aligned} \tag{4.107}$$

Keď parameter $\mathbf{a} \to \mathbf{0}$, potom pre $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ musí platiť, že

$$\begin{aligned} \lim_{a\to 0} F(s) &= \lim_{a\to 0} \frac{1 - 2 \cdot e^{-as} + e^{-2as}}{a^2 s} = \lim_{a\to 0} \frac{\frac{d}{da}\left(1 - 2 \cdot e^{-as} + e^{-2as}\right)}{\frac{d}{da}\left(a^2 s\right)} = \\ &= \lim_{a\to 0} \frac{2s \cdot e^{-as} - 2s \cdot e^{-2as}}{2a \cdot s} = \lim_{a\to 0} \frac{e^{-as} - e^{-2as}}{a} = \\ &= \lim_{a\to 0} \frac{\frac{d}{da}\left(e^{-as} - e^{-2as}\right)}{\frac{d}{da}(a)} = \lim_{a\to 0} \frac{-s \cdot e^{-as} + 2s \cdot e^{-2as}}{1} = -s + 2s = s\,. \end{aligned} \tag{4.108}$$

Príklad č. 4.9.

Nájdite Laplaceovu transformáciu funkcie **f(t)**, ktorá je znázornená na Obr. 4.10.



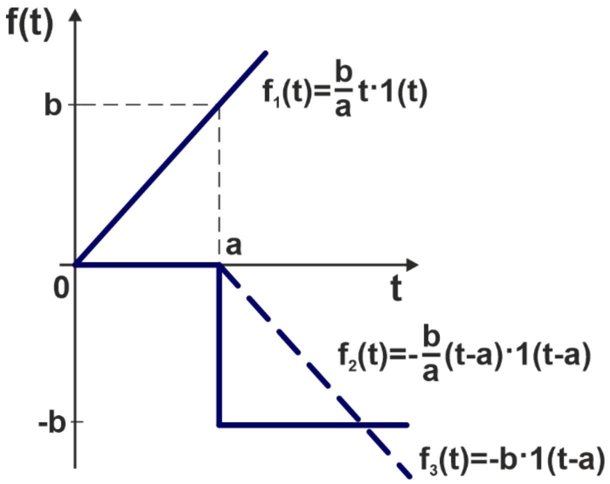
Obr. 4.10. Funkcia f(t)

Riešenie:

Danú funkciu $\mathbf{f(t)}$, ktorá je zobrazená na Obr. 4.10, možno matematicky zapísať ako

$$f(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ \frac{b}{a}t & 0<t\le a\\ 0 & a<t\end{cases}. \qquad (4.109)$$

Poznamenajme, že $\mathbf{f(t)}$ môžeme predpokladať ako súčet troch funkcií $\mathbf{f_1(t)}, \mathbf{f_2(t)}$ a $\mathbf{f_3(t)}$, ktoré sú zobrazené na Obr. 4.11.



Obr. 4.11. Funkcie $f_1(t), f_2(t)$ a $f_3(t)$

To znamená, že funkciu **f(t)** možno zapísať aj týmto spôsobom

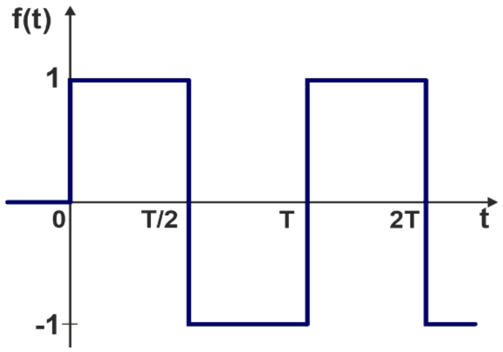
$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)=\frac{b}{a}t\cdot 1(t)-\frac{b}{a}(t-a)\cdot 1(t-a)-b\cdot 1(t-a)\,, \qquad (4.110)$$

potom Laplaceova transformácia funkcie **f(t)** je daná funkciou **F(s)** v tomto tvare

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot e^{-as}-b\cdot\frac{1}{s}\cdot e^{-as}=\\&=\frac{b}{as^2}\cdot(1-e^{-as})-\frac{b}{s}\cdot e^{-as}\,.\end{aligned} \qquad (4.111)$$

Príklad č. 4.10.

Nájdite Laplaceovu transformáciu periodickej funkcie $\mathbf{f(t)}$, ktorá je znázornená na Obr. 4.12.



Obr. 4.12. Periodická funkcia f(t)

Riešenie:

Vypočítajme Laplaceovu transformáciu periodickej funkcie $\mathbf{f(t)}$ na intervale od $\mathbf{0}$ po $\mathbf{T}$

$$\int_0^T f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-st}dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T}(-1)\cdot e^{-st}dt =$$
$$= \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{\frac{T}{2}}^{T} = \frac{e^{-\frac{1}{2}Ts}-1}{-s} + \frac{e^{-Ts}-e^{-\frac{1}{2}Ts}}{s} = \tag{4.112}$$
$$= \frac{1}{s}\cdot\left[e^{-Ts} - 2e^{-\frac{1}{2}Ts} + 1\right] = \frac{1}{s}\cdot\left[1 - e^{-\frac{1}{2}Ts}\right]^2.$$

A teda

$$F(s) = \frac{\int_0^T f(t)\cdot e^{-st}dt}{1-e^{-Ts}} = \frac{\frac{1}{s}\cdot\left[1-e^{-\frac{1}{2}Ts}\right]^2}{1-e^{-Ts}} = \frac{1-e^{-\frac{1}{2}Ts}}{s\cdot\left[1+e^{-\frac{1}{2}Ts}\right]} = \tag{4.113}$$
$$= \frac{1}{s}\tanh\frac{T\cdot s}{4}.$$

Príklad č. 4.11.

Vypočítajte inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{F(s)}$

$$F(s) = \frac{cs+d}{(s^2+2as+a^2)+b^2}, \tag{4.114}$$

kde **a, b, c** a **d** sú reálne čísla **a** je kladné číslo.

Riešenie:

Keďže funkciu $\mathbf{F(s)}$ môžeme zapísať ako

$$F(s) = \frac{c(s+a)+d-ca}{(s+a)^2+b^2} = \frac{c(s+a)}{(s+a)^2+b^2} + \frac{d-ca}{b} \cdot \frac{b}{(s+a)^2+b^2}, \tag{4.115}$$

potom dostávame, že

$$f(t) = c \cdot e^{-at}\cos(bt) + \frac{d-ca}{b} \cdot e^{-at}\sin(bt)\,. \tag{4.116}$$

Príklad č. 4.12.

Nájdite inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{F(s)}$

$$F(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2+2s+2)}\,. \tag{4.117}$$

Riešenie:

Pretože,

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1+j)(s+1-j)\,, \tag{4.118}$$

potom Laplaceova transformácia $\mathbf{F(s)}$ bude obsahovať dva komplexne združené póly a teda musí platiť, že

$$F(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2+2s+2)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2+2s+2}, \tag{4.119}$$

kde $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ a $\mathbf{a_3}$ vypočítame metódou neurčitých koeficientov z rovnice

$$1 = a_1 \cdot (s^2+2s+2) + (a_2 s + a_3) \cdot s\,. \tag{4.120}$$

Porovnaním koeficientov na oboch stranách rovnice pri rovnakých mocninách $\mathbf{s}$, dostávame, že

$$a_1 + a_2 = 0, \quad 2a_1 + a_3 = 0, \quad 2a_1 = 1\,, \tag{4.121}$$

z čoho vyplýva, že

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -1\,. \tag{4.122}$$

Teda prenosovú funkciu $\mathbf{F(s)}$ môžeme zapísať ako

$$F(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}\,. \tag{4.123}$$

Napokon **inverzná Laplaceova transformácia** funkcie $\mathbf{F(s)}$ je

$$F(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot e^{-t}\cdot\sin t - \frac{1}{2}\cdot e^{-t}\cdot\cos t\,. \tag{4.124}$$

Príklad č. 4.13.

Určte inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{F(s)}$

$$F(s) = \frac{1}{s\cdot(s^2+\omega^2)}\,. \tag{4.125}$$

Riešenie:

Funkciu $\mathbf{F(s)}$ môžeme upraviť do tohto tvaru

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s\cdot(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\cdot\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\,. \end{aligned} \tag{4.126}$$

Napokon inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie **F(s)** vypočítame ako

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{\omega^2}\cdot(1-\cos(\omega t))\,. \tag{4.127}$$

Príklad č. 4.14.

Vypočítajte riešenie tejto diferenciálnej rovnice

$$\dot{x} + a\cdot x = A\cdot\sin(\omega\cdot t)\,,\qquad x(0) = b\,, \tag{4.128}$$

kde **a**, **b**, **A** a $\boldsymbol{\omega}$ sú konštanty.

Riešenie:

Aplikovaním **Laplaceovej transformácie** na obidve strany diferenciálnej rovnice dostávame

$$[s \cdot X(s) - x(0)] + a \cdot X(s) = A \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{4.129}$$

alebo

$$(s + a) \cdot X(s) = \frac{A \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} + b\,. \tag{4.130}$$

Vyjadrením **X(s)** z poslednej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A \cdot \omega}{(s + a)(s^2 + \omega^2)} + \frac{b}{(s + a)} = \\ &= \frac{A \cdot \omega}{a^2 + \omega^2} \cdot \left(\frac{1}{s + a} - \frac{s - a}{s^2 + \omega^2}\right) + \frac{b}{(s + a)} = \\ &= \left(b + \frac{A \cdot \omega}{a^2 + \omega^2}\right) \cdot \frac{1}{s + a} + \frac{A \cdot a}{a^2 + \omega^2} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{A \cdot \omega}{a^2 + \omega^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}\,. \end{aligned} \tag{4.131}$$

Potom **inverznú Laplaceovu transformáciu** riešenia **X(s)** môžeme vypočítať ako

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \\ &= \frac{A \cdot \omega}{a^2 + \omega^2} \cdot \left(\frac{1}{s + a} - \frac{s - a}{s^2 + \omega^2}\right) + \frac{b}{(s + a)} = \\ &= \left(b + \frac{A \cdot \omega}{a^2 + \omega^2}\right) \cdot e^{-at} + \frac{A \cdot a}{a^2 + \omega^2} \cdot \sin(\omega t) - \frac{A \cdot \omega}{a^2 + \omega^2} \cdot \cos(\omega t)\,. \end{aligned} \tag{4.132}$$

Tabuľka 4.1. Tabuľka Laplaceových transformácií

	Časová funkcia f(t)	Laplaceova transformácia F(s)
1.	$A \cdot e^{at}, A \cdot e^{-at}$	$\frac{A}{s-a}, \quad \frac{A}{s+a}$
2.	$A \cdot u(t), u(t)$	$\frac{A}{s}, \quad \frac{1}{s}$
3.	$A \sin \omega t, \sin \omega t$	$A \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
4.	$A \cos \omega t, \cos \omega t$	$A \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \frac{s}{s^2+\omega^2}$
5.	$A\, e^{-at} \sin \omega t, e^{-at} \sin \omega t$	$A \cdot \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}, \quad \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
6.	$A\, e^{-at} \cos \omega t, e^{-at} \cos \omega t$	$A \cdot \frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}, \quad \frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
7.	$A \cdot t, t$	$\frac{A}{s^2}, \quad \frac{1}{s^2}$
8.	$A \cdot t^n, A \cdot t^n$	$A \cdot \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$
9.	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10.	$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
11.	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12.	$A \cdot e^{-at} \cdot \sin(\omega t + \theta)$	$A \cdot \left[\frac{\omega \cos \theta + (s+a) \sin \theta}{(s+a)^2+\omega^2}\right]$
13.	Obdĺžnikový pulzný signál	$\frac{1-e^{Ts}}{s}$
14.	Impulz $k \cdot \delta(t), \delta(t)$	$k, \quad 1$

Problémy na riešenie

Problém 4.1.

Odvoďte Laplaceovu transformáciu funkcie

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t \cdot e^{-2t} & t \geq 0 \end{cases}. \tag{4.133}$$

Problém 4.2.

Nájdite Laplaceovu transformáciu funkcie

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 \cdot e^{-at} & t \geq 0 \end{cases}. \tag{4.134}$$

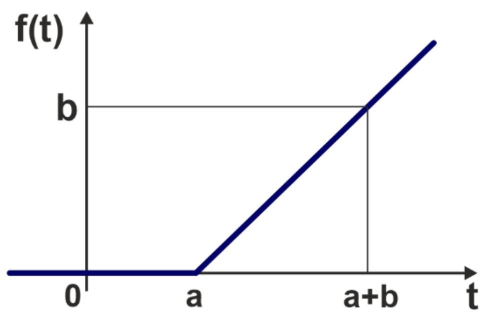
Problém 4.3.

Nájdite Laplaceovu transformáciu funkcie

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos(2 \cdot \omega t) \cdot \cos(3 \cdot \omega t) & t \geq 0 \end{cases}. \tag{4.135}$$

Problém 4.4.

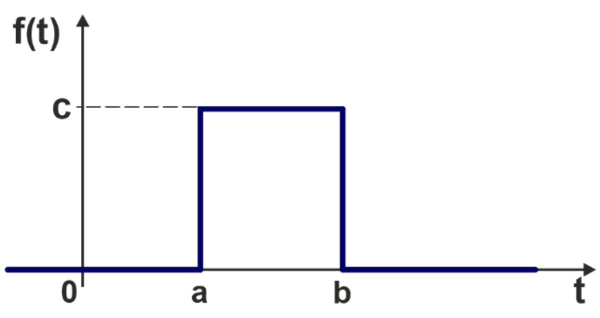
Vypočítajte Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{f(t)}$ zobrazenej na Obr. 4.13.



Obr. 4.13. Funkcia f(t)

Problém 4.5.

Vypočítajte Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{f(t)}$ zobrazenej na Obr. 4.14.



Obr. 4.14. Funkcia f(t)

Problém 4.6.

Nájdite inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{F(s)}$

$$F(s) = \frac{5s + 2}{(s+1)(s+2)^2} . \tag{4.136}$$

Problém 4.7.

Nájdite inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{F(s)}$

$$F(s) = \frac{2s^2 + 4s + 5}{s \cdot (s+1)} . \tag{4.137}$$

Problém 4.8:

Nájdite inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{F(s)}$

$$F(s) = \frac{2s + 10}{(s+1)^2 \cdot (s+4)} . \tag{4.138}$$

Problém 4.9.

Nájdite inverznú Laplaceovu transformáciu funkcie $\mathbf{F(s)}$

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 \cdot (s+1)} . \tag{4.139}$$

Problém 4.10.

Nájdite riešenie $\mathbf{x(t)}$ diferenciálnej rovnice

$$\ddot{x} + 4x = 0, \qquad x(0) = 5, \qquad \dot{x}(0) = 0 . \tag{4.140}$$

Problém 4.11.

Nájdite riešenie $\mathbf{x(t)}$ diferenciálnej rovnice

$$2\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 1, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 2 . \tag{4.141}$$

Problém 4.12.

Nájdite riešenie $\mathbf{x(t)}$ diferenciálnej rovnice

$$\ddot{x} + x = \sin(3t) , \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0 . \tag{4.142}$$

5 BLOKOVÉ DIAGRAMY DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV

Matematické modely systémov môžeme simulovať aj iným spôsobom, aký poskytujú klasické metódy, ktoré sme doteraz využívali. Na simuláciu možno využiť moderné prístupy, ktoré prináša softvérový balík od spoločnosti **MathWorks**. Tým je nadstavba **Matlabu** – **Matlab/Simulink**. Tento softvérový balík umožňuje simulovať systémy interaktívnym spôsobom v podobe vytvorených blokových schém. Poznamenajme, že každú diferenciálnu rovnicu alebo zložitejší matematický model systému, ktorý je opísaný sústavou diferenciálnych rovníc, môžeme pretransformovať do odpovedajúceho tvaru **blokového diagramu**.

Blokové diagramy majú viac výhod ako nevýhod, odhaľujú napr. skryté charakteristiky dynamických systémov, ktoré nemusia byť vždy zjavne identifikovateľné z ich matematických modelov; a to vzájomný vzťah medzi **komponentami systému** a jeho **premennými**. Prostredníctvom blokovej schémy vytvorenej v **Simulinku** môžeme interaktívnou prácou **simulovať**, **vyšetrovať** a **analyzovať** odozvu ľubovoľného skúmaného matematického modelu systému.

5.1 TVORBA BLOKOVÉHO DIAGRAMU ZO SYSTÉMOVÉHO MODELU

V tejto kapitole si ukážeme, ako môžeme jednoduchým spôsobom z matematického modelu vytvoriť odpovedajúcu **simulačnú blokovú schému**, ktorú nazývame **blokovým diagramom**. **Simulačnú schému (blokový diagram)**, ktorá je odvodená zo základnej **diferenciálnej rovnice**, **prenosovej funkcie**, resp. **systému diferenciálnych rovníc**, možno vytvoriť jednoduchým navolením a nakonfigurovaním funkčných blokov v simulačnom projekte modelu a ich následným pospájaním do funkčného celku blokového diagramu, ktorý odpovedá konkrétnemu matematickému systémovému modelu. Základných princíp tvorby **modelovej schémy** je založený na riešení systému **stavového opisu v Laplaceovom tvare**. Princíp, ako vytvoriť jednoduchý **blokový diagram** zo systému si vysvetlíme na nasledujúcich názorných príkladoch. V prvom rade, predpokladajme **systém 1. rádu**, opísaný touto **diferenciálnou rovnicou 1. rádu**, ktorý má jeden **vstup** $\mathbf{u(t)}$ a **výstupom** tohto systému je $\mathbf{y(t)}$

$$3 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = 2 \cdot u(t)\,. \tag{5.1}$$

Z teórie systémov vieme, že využitím **Laplaceovej transformácie** možno pre každú **lineárnu diferenciálnu rovnicu** určiť jej prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$. Celkový **vstup** $\mathbf{U(s)}$ diferenciálnej rovnice v Laplaceovom tvare sa musí objaviť na ľavej strane diagramu a celkový **výstup** $\mathbf{Y(s)}$ v Laplaceovom tvare zase na jeho pravej strane. Vykonajme Laplaceovu transformáciu predchádzajúcej diferenciálnej rovnice.

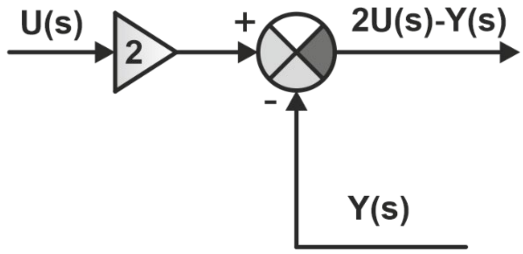
$$3 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = 2 \cdot U(s) \Rightarrow s \cdot Y(s) = \frac{1}{3} \cdot [2U(s) - Y(s)]\,. \tag{5.2}$$

Po matematickej úprave môžeme získať nasledujúcu prenosovú funkciu systému v tvare

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{3 \cdot s + 1}\,. \tag{5.3}$$

Blokový diagram systému vytvoríme postupným rozkladom algebrickej rovnice, ktorá je zapísaná v **Laplaceovom tvare**. Tento blokový diagram začneme tvoriť na základe definovania jednoduchých matematických operácií. V prvom rade matematickou operáciou, ktorá reprezentuje výraz v zátvorke pôvodnej diferenciálnej rovnice (5.2). Táto je zapísaná v **Laplaceovom tvare**

$$2U(s) - Y(s)\,. \tag{5.4}$$

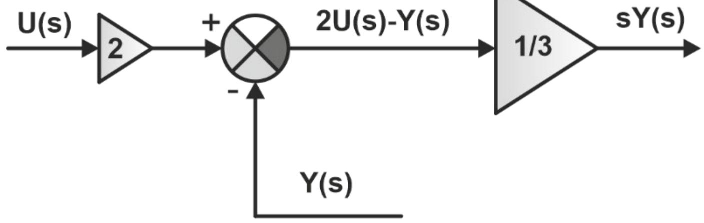


Obr. 5.1. Bloková schéma pre operáciu odčítanie

Na obrázku Obr. 5.1 je znázornený **blokový diagram**, ktorý odpovedá predchádzajúcej rovnici (5.4). Blok v tvare **trojuholníka** predstavuje **zosilňovač** (**násobič**) signálu. Ďalej je v schéme možné nájsť tzv. **súčtový člen** – blok, ktorý slúži na vykonávanie operácií **sčítania** alebo **odčítania** signálov.

Ďalej pokračujeme pridaním ďalšieho zosilňovača so silou $\mathbf{1/3}$, pozri Obr. 5.2. Výsledok matematickej operácie $\mathbf{1/3 \cdot [2U(s) - Y(s)]}$ sa potom priamo rovná prvej derivácii $\mathbf{\dot{y}(t)}$ (t. j. derivácii výstupnej premennej $\mathbf{y(t)}$), ktorá v Laplaceovom tvare prestavuje výraz $\mathbf{s \cdot Y(s)}$. Matematicky zapísané

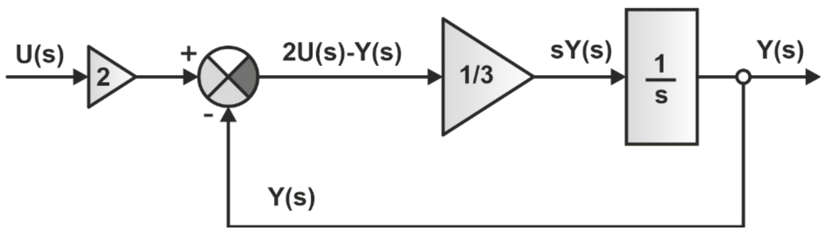
$$s \cdot Y(s) = \frac{1}{3} \cdot [2U(s) - Y(s)]\,. \tag{5.5}$$



Obr. 5.2. Bloková schéma so zosilňovačom

Na obrázku Obr. 5.2 je znázornený **blokový diagram**, ktorý odpovedá predchádzajúcej rovnici (5.5). Aby bolo možné v tomto štádiu vypočítať hodnotu hľadanej veličiny **y(t)** (priamo zo signálu derivácie $\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{t})$), je nutné do blokovej schémy zahrnúť jeden **spojitý integrátor** a uzavrieť tak nezapojený terminál **súčtového člena**, pozri Obr. 5.3. Týmto spôsobom bol vytvorený **kompletný blokový diagram** systému, ktorý odpovedá tomuto matematickému modelu pôvodnej rovnice

$$\mathrm{s} \cdot \mathrm{Y(s)} = \frac{1}{3} \cdot [2\mathrm{U(s)} - \mathrm{Y(s)}] \ . \tag{5.6}$$



Obr. 5.3. Finálna bloková schéma

Príklad č. 5.1.

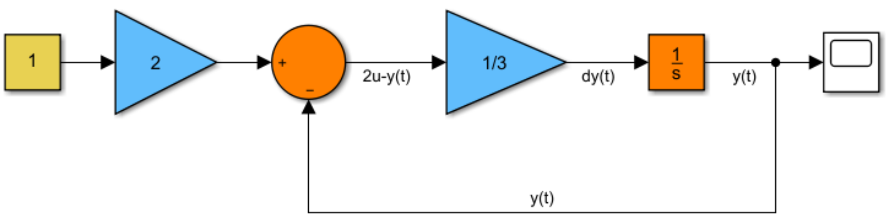
Predpokladajme, že **systém 1. rádu** je definovaný na základe predchádzajúcej diferenciálnej rovnice (5.6), kde vstupný signál systému je skokového charakteru $\mathbf{u(t) = 1}$ a výstupom zo systému je **y(t).** Nájdite odozvu daného systému metódou simulácie blokového diagramu v prostredí **Matlab/Simulinku**. Ako počiatočnú podmienku uvažujte $\mathbf{y(0) = 0}$.

Riešenie:

V prostredí **Matlab/Simulink** riešime túto **diferenciálnu rovnicu 1. rádu** s nulovou počiatočnou podmienkou pre uvažovaný časový interval simulácie $\mathbf{t} \in \langle \mathbf{0}, \mathbf{10} \rangle$ **s**

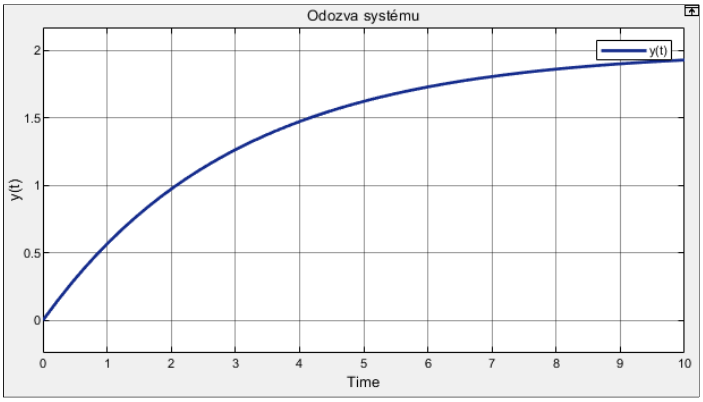
$$3 \cdot \dot{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) + \mathrm{y}(\mathrm{t}) = 2 \cdot \mathrm{u}(\mathrm{t}), \ \ \mathrm{y}(0) = 0 \, . \tag{5.7}$$

Na Obr. 5.4 je znázornená bloková schéma, ktorá odpovedá rovnici (5.7), ktorá bola vytvorená v prostredí **Matlab/Simulinku**.



Obr. 5.4. Bloková schéma systému

Potom riešenie odozvy systému $\mathbf{y(t)}$, ktoré bolo vyriešené pre uvažovaný čas simulácie $\mathbf{t = 10\,s}$, je zobrazené na ďalšom Obr. 5.5. Pre riešenie simulácie diferenciálnej rovnice bola uvažovaná počiatočná podmienka, ktorá bola aplikovaná priamo v **bloku spojitého integrátora**.



Obr. 5.5. Riešenie odozvy systému pre čas t = 10 s

Príklad č. 5.2.

Predpokladajme **systém 2. rádu** so vstupom $\mathbf{F(t)}$ a výstupom $\mathbf{y(t)}$, ktorý je definovaný touto diferenciálnou rovnicou s počiatočnými podmienkami

$$\ddot{y} + 2 \cdot \dot{y} + 3 \cdot y = F(t) = 100 \cdot \sin(2\pi \cdot 5 \cdot t)\,, \qquad \dot{y}(0) = 1, \quad y(0) = 0\,. \tag{5.8}$$

Vypočítajte odozvu daného systému metódou simulácie blokového diagramu v prostredí **Matlab/Simulinku**.

Riešenie:

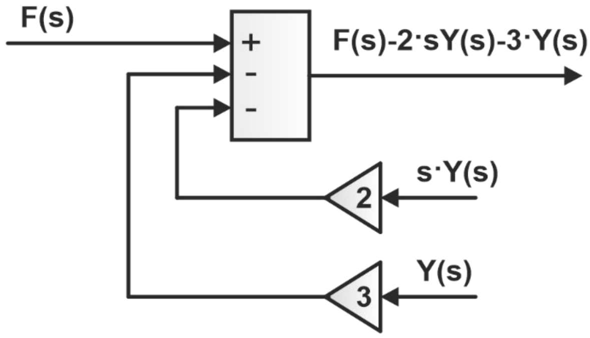
Predtým, než vytvoríme blokový diagram v prostredí **Matlab/Simulink**, upravíme pôvodnú rovnicu do tohto tvaru **stavového opisu systému** (tzv. Simulinkovského tvaru).

$$\ddot{y} = F(t) - 2 \cdot \dot{y} - 3 \cdot y\,. \tag{5.9}$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** predchádzajúcej diferenciálnej rovnice a preveďme túto diferenciálnu rovnicu do komplexnej **s-roviny** (poznamenajme, že pri operácii Laplaceovej transformácie uvažujeme nulové počiatočné podmienky). Laplaceovou transformáciou dostávame tento algebrický tvar

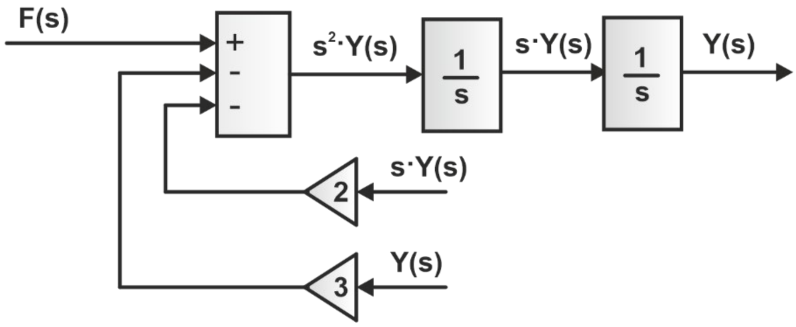
$$s^2 \cdot Y(s) = F(s) - 2 \cdot s \cdot Y(s) - 3 \cdot Y(s)\,. \tag{5.10}$$

Na základe odvodenej rovnice (5.10) pristúpime k tvorbe **blokovej schémy**. Pri tvorbe blokovej schémy začneme s vytváraním najjednoduchších matematických operácií. Počiatočný tvar blokovej schémy je znázornený na Obr. 5.6

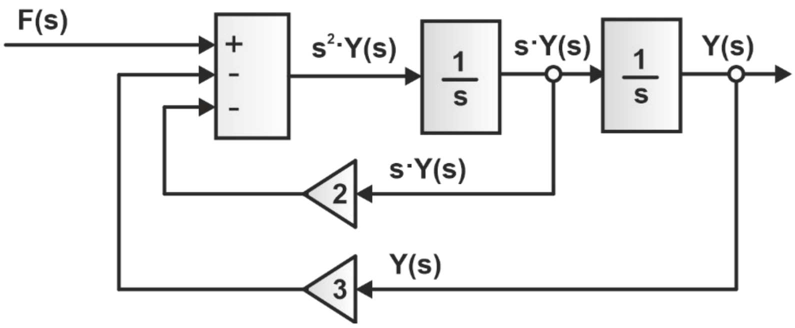


Obr. 5.6. Počiatočná bloková schéma systému

Postup ďalšej tvorby blokovej schémy je zobrazený na ďalších Obr. 5.7 a Obr. 5.8.

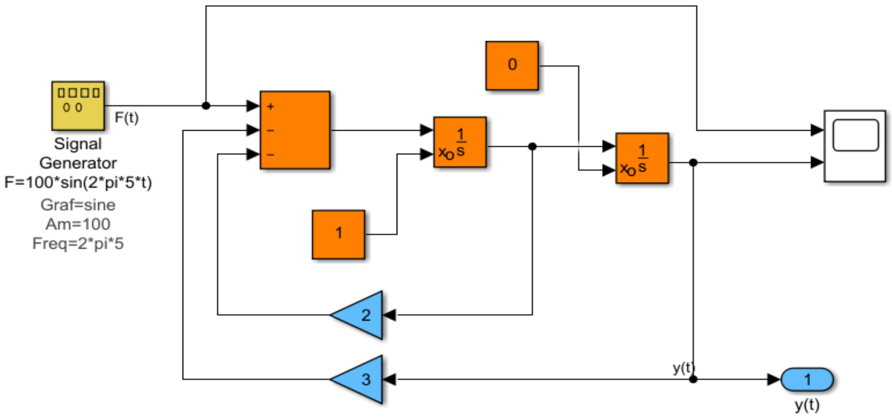


Obr. 5.7. Blokový diagram s integrátormi



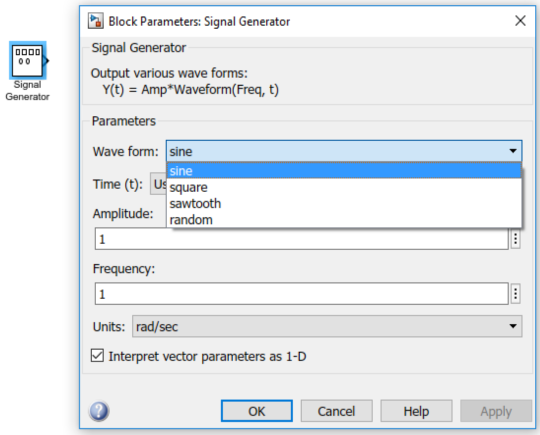
Obr. 5.8. Výsledný blokový diagram

Na základe schematického **blokového diagramu**, ktorý je zobrazený na Obr. 5.8, môžeme vytvoriť blokovú schému v **Simulinku** a simulovať tak správanie sa matematického modelu pre uvažovaný simulačný čas **t**. Bloková schéma, ktorá bola namodelovaná v prostredí **Simulink**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 5.9. V rámci blokovej schémy bol použitý jeden blok **signal generátora** (**Signal generator**) a dva bloky určené na definovanie konštánt (**Constant block**).

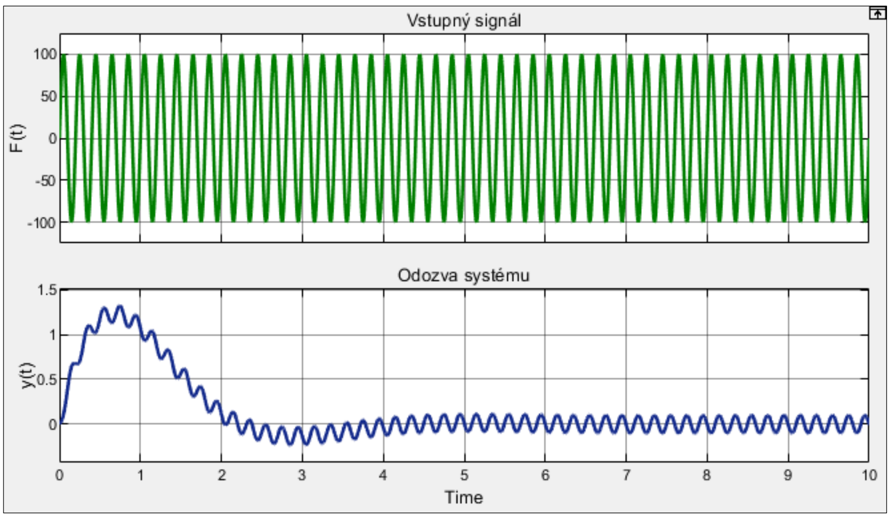


Obr. 5.9: Bloková schéma systému

Vypočítaná odozva systému na harmonicky meniaci sa signál funkcie **F(t)**, ktorý bol zadefinovaný v **Simulinku** prostredníctvom **Signal Generátora** (tento blok umožňuje simulovať rôzne typy signálov, ako sú napr. **sine**, **square**, **sawtooth** a **random signal**, pozri Obr. 5.10), je znázornená na Obr. 5.11.



Obr. 5.10. Blok typu – Signal Generator



Obr. 5.11: Riešenie odozvy diferenciálnej rovnice systému

Príklad č. 5.3.

Predpokladajme **systém dvoch diferenciálnych rovníc 1**. a **2. rádu**

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 - 3x_2 &= 10\,, \\ \dot{x}_2 + 3x_1 + x_2 &= 5\,. \end{aligned} \qquad (5.11)$$

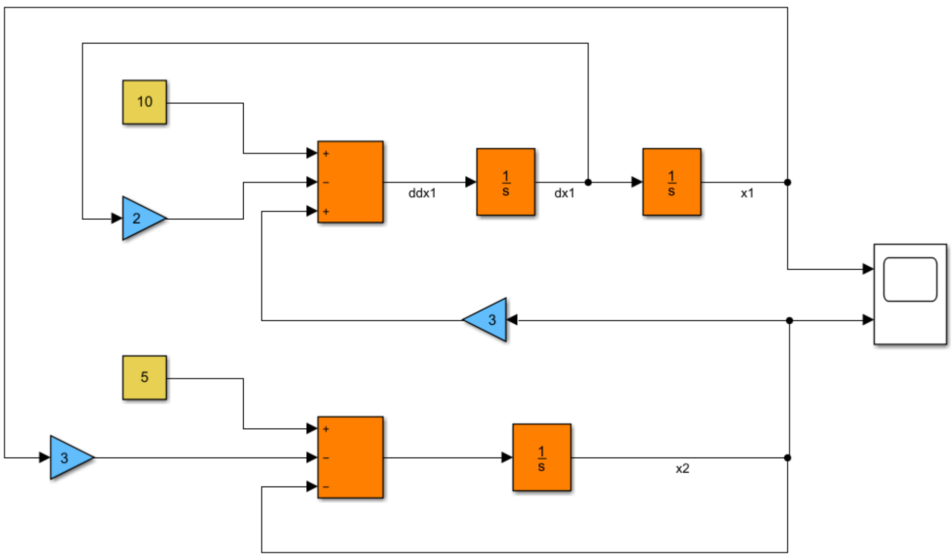
Odvoďte blokový diagram pre takýto systém dvoch diferenciálnych rovníc a riešte odozvu tohto systému metódou simulácie blokového diagramu v prostredí **Matlab/Simulinku** pre simulačný čas $\mathbf{t\ =\ 10}$ **s**.

Riešenie:

Predtým, než pre tento systém diferenciálnych rovníc vytvoríme blokový diagram v prostredí **Matlab/Simulink**, upravíme obidve rovnice do tvaru **stavového opisu systému** (simulinkovského tvaru). Matematickou úpravou dostávame tento tvar diferenciálnych rovníc

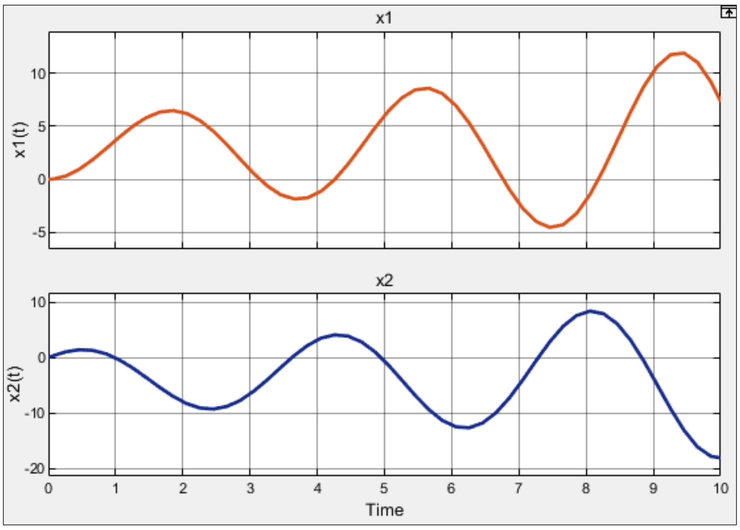
$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 10 - 2\dot{x}_1 + 3x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= 5 - 3x_1 - x_2\,. \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Na základe predchádzajúcich rovníc bola v **Simulinku** vytvorená **simulačná bloková schéma**, ktorá je znázornená na Obr. 5.12.



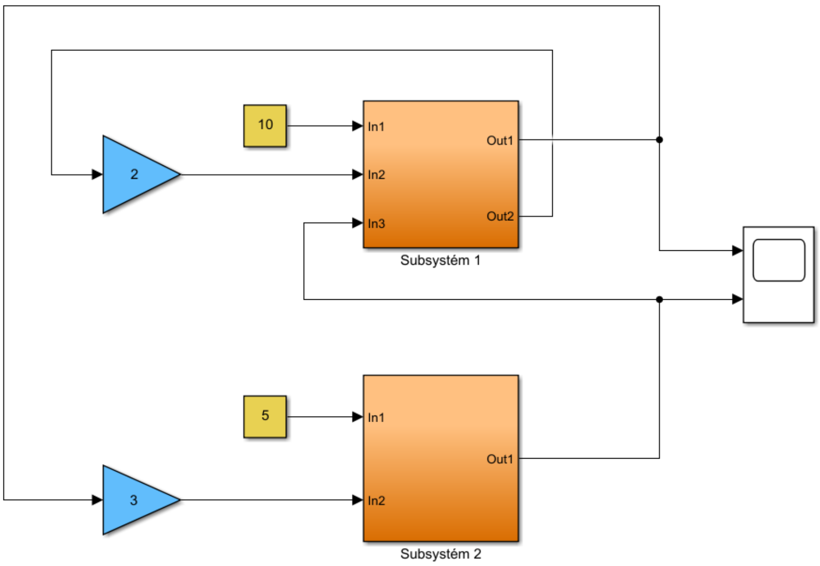
Obr. 5.12. Bloková schéma systému

Riešením simulácie matematického modelu v **Simulinku** je odozva systému zobrazená na grafoch, pozri Obr. 5.13.



Obr. 5.13. Riešenie odozvy systému sústavy diferenciálnych rovníc

V tomto bode poznamenajme, že z každej komplexnejšej časti **blokovej schémy**, môžeme jednoduchým spôsobom vytvoriť **subsystém**. Týmto spôsobom sa daná **bloková schéma** sprehľadní a stane sa čitateľnejšou. Každý takto vytvorený **subsystém** je následne možno použiť ako **funkciu** v inom mieste **blokového diagramu**. Princíp vytvárania **subsystémov** z jednotlivých častí blokového diagramu je veľmi výhodný, nakoľko znižuje riziko kumulácie chýb pri veľkých matematických modeloch, ktoré sú tvorené veľkým počtom **diferenciálnych rovníc**. Výhodou je taktiež možnosť navzájom takéto systémy **prepájať** a **definovať** tak medzi nimi väzbové spojenia. Pre náš systém môžeme **blokovú schému** zjednodušiť spôsobom, ako je to znázornené na Obr. 5.14.



Obr. 5.14. Zjednodušenie blokového diagramu využitím subsystémov

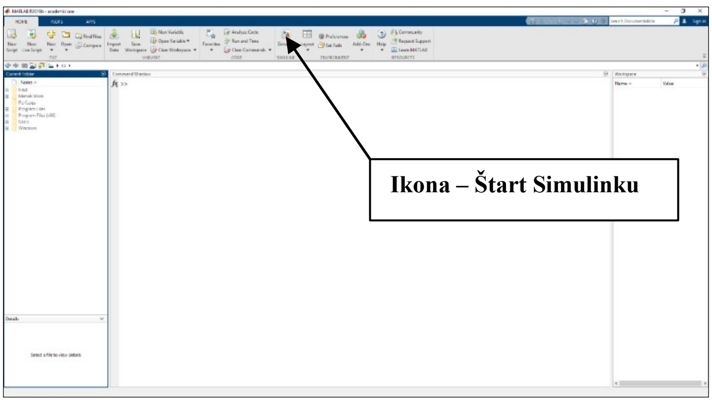
5.2 TVORBA BLOKOVÝCH DIAGRAMOV V SIMULINKU

Blokový diagram (bloková schéma) je model, ktorý reprezentuje simulovaný dynamický systém. Ide o logické a funkčné spojenie dvoch alebo viacerých operačných blokov, ktoré sú navzájom prepojené na základe definovaných matematických operácií. Poznamenajme, že samotné prvky **blokového diagramu** sa navzájom ovplyvňujú. Každý jednotlivý **blok** alebo **subsystém** reaguje na operáciu takým spôsobom, že napokon výsledný **blokový diagram** ako celok odpovedá správaniu sa pôvodného matematického modelu systému. Na tvorbu blokového diagramu využívame základne matematické alebo logické operácie. Medzi základné operácie blokových diagramov radíme **zosilnenie signálu (násobenie signálu)**, **algebrický súčet/rozdiel signálov**, **operáciu násobenia/delenia signálov**, **integrovanie a derivovanie signálu**. Pripomeňme, že tvorba blokových schém v **Simulinku** umožňuje taktiež definovať dynamický systém v tvare **prenosovej funkcie systému** (z angl. **transfer function**), resp. v tvare **stavového opisu systému** (z angl. **state-space**). Tieto bloky predstavujú kompletný opis systému a sú charakterizované ako subsystémové bloky v rámci celej blokovej schémy. Z matematického hľadiska môžeme každú **blokovú schému** zjednodušiť a nájsť tak výslednú **prenosovú funkciu systému**, ktorá sa stáva náhradou kompletného **blokového diagramu systému**.

Takúto **prenosovú funkciu** možno nájsť postupným zjednodušovaním **blokovej schémy** a to spôsobom jej postupnej redukcie a úpravy. Táto spočíva v nahradení základných väzbových spojení, ako sú napr. **sériové, paralelné**, resp. **spojenie so spätnou väzbou**, jedným ekvivalentným blokom resp. **subsystémom**. V tejto kapitole si teda okrem iného vysvetlíme aj princíp, ako takéto zložité **blokové schémy** zjednodušovať a hľadať ich ekvivalentné **subsystémové (prenosové) funkcie**.

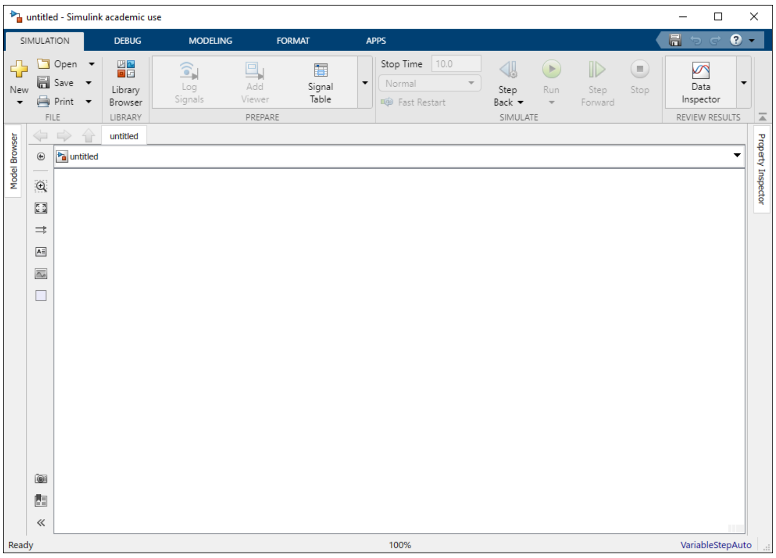
5.2.1 Základné prostredie Simulinku

Predtým, než si vysvetlíme princíp ako zjednodušovať **blokové diagramy**, zameriame sa na teóriu základných **simulinkovských blokov**, ktoré budeme v budúcnosti veľmi často používať pri tvorbe **blokových schém** matematických modelov. Simulácia dynamického systému v **Matlabe** nadväzuje na proces odvodenia matematického modelu a vytvorenia blokového diagramu, ktorý je možné uskutočniť v nadstavbe **Matlabu**, ktorú nazývame **Matlab/Simulink**.



Obr. 5.15. Základné prostredie Matlabu R2019b

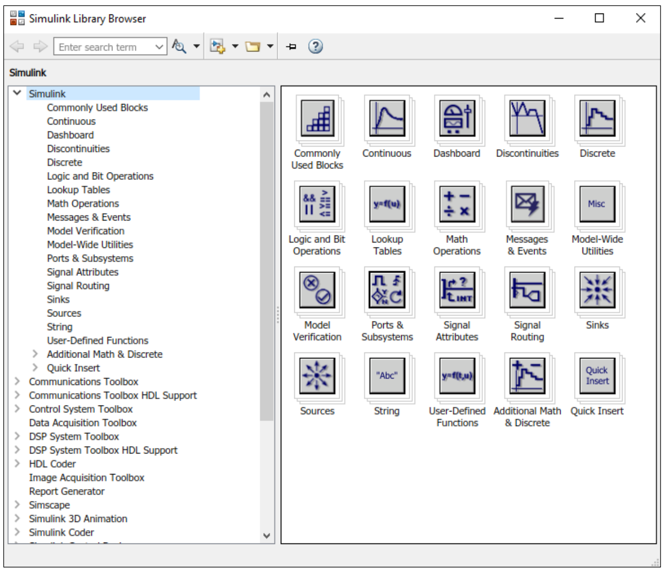
Simuláciu matematického modelu realizujeme v simulačnom okne, v ktorom je blokový diagram systému vytvorený. Základné simulačné prostredie **Matlab/Simulinku** vyvoláme, buď priamo z príkazového riadku – príkazom **simulink** alebo z nástrojového menu **Matlabu**, kliknutím na ikonu **Start Simulink**, pozri Obr. 5.15. Vyvolaním prostredia **Matlab/Simulinku** sa zobrazí simulačné okno prázdneho **simulinkovského modelu** podľa Obr. 5.16.



Obr. 5.16. Simulačné okno Matlab/Simulinku

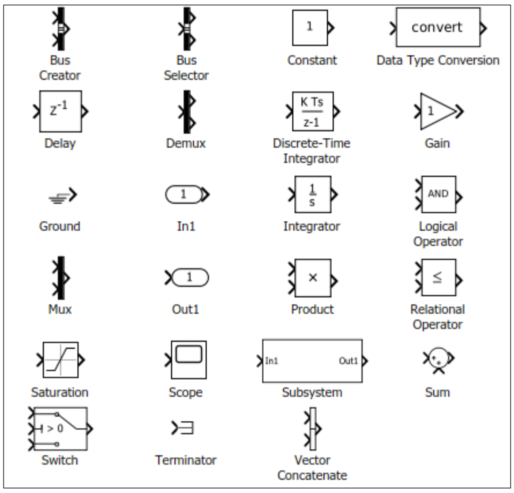
5.2.2 Základné knižnice Simulinku

V tomto simulačnom okne matematického modelu možno vytvárať **blokové diagramy** interaktívnym spôsobom pomocou počítačovej myši. Pri vytváraní týchto blokových diagramov volíme predpripravené bloky z príslušnej knižnice **simulinkovských blokov**, ktorej explorer sa volá **Library browser**. Knižnica **Simulinku – Library browser** je zobrazená na ďalšom Obr. 5.17.



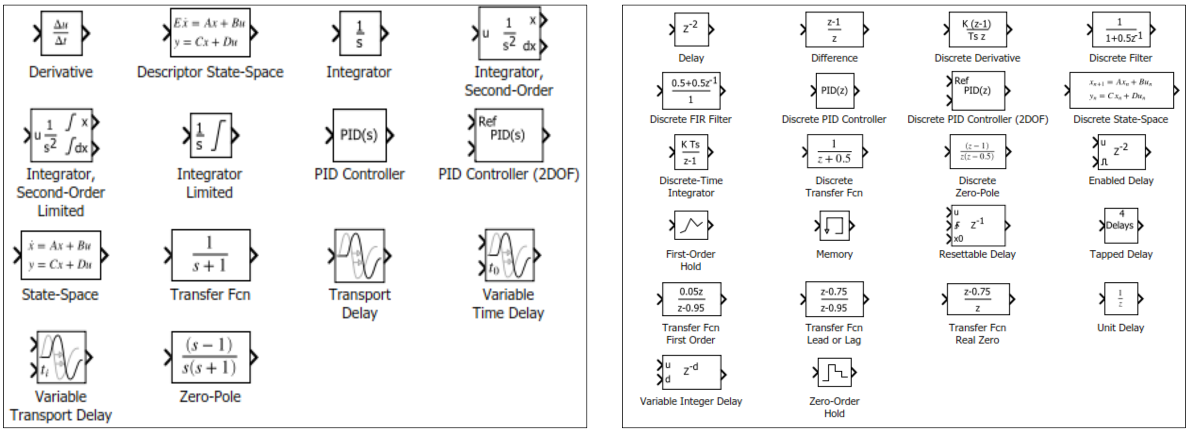
Obr. 5.17. Knižnica prostredia Matlab/Simulink – Library Browser

V **knižnici simulinkovských blokov**, ktorú môžeme vyvolať priamo z nástrojového menu každého projektu, sú všetky bloky logicky začlenené do základných tematických podskupín. Jednou takouto knižnicou zo základných knižníc je napr. knižnica **Commonly Used Blocks** t. j. knižnica bežne používaných blokov. Na ďalšom Obr. 5.18 môžeme vidieť všetky základné bloky tejto veľmi často používanej knižnice systémových blokov. Medzi najčastejšie a najbežnejšie používané základné bloky radíme simulačné bloky **Constant**, **Gain**, **Sum**, **Product**, **In/Out**, **Integrator**, **Scope** a **Mux.**



Obr. 5.18. Knižnica Commonly Used Blocks

Ďalšie bloky sú zaradené napr. do knižnice **Continuous**, ktorá obsahuje bloky určené na modelovanie **spojitých systémov**, pozri Obr. 5.19 (a). Bloky určené pre prácu s **diskrétnymi systémami** sú zase začlenené do knižnice **Discrete**, pozri Obr. 5.19 (b).

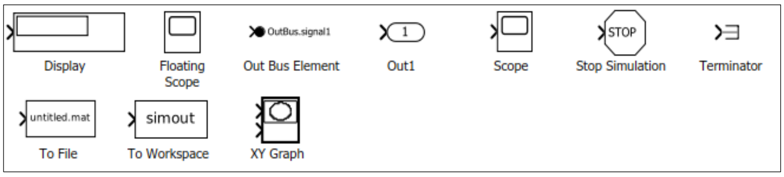


(a) (b)

Obr. 5.19. (a) Knižnica Continuous, (b) knižnica Discrete

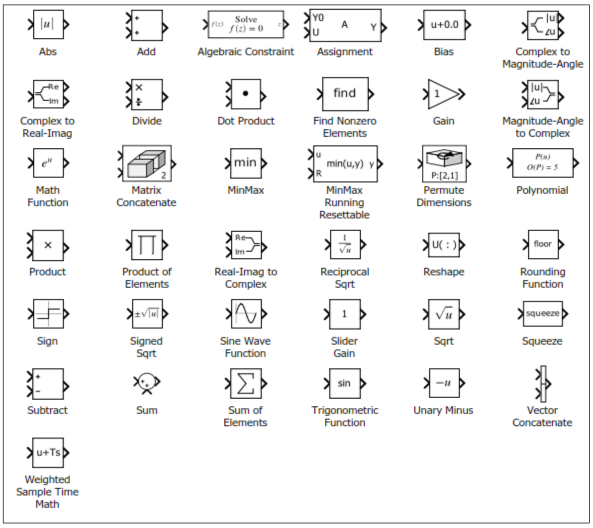
Na Obr. 5.20 je zobrazená ďalšia základná knižnica **Sinks**, ktorá obsahuje všetky bloky, ktoré súvisia so zobrazovaním výsledkov simulácií v podobe grafov, resp. zobrazovania hodnôt na displeji. Na zobrazenie grafov môžeme použiť napr. bloky **Scope, Floating Scope** alebo **XYGraph**.

Pripomeňme, že **Simulinku** možno zobraziť výsledok taktiež v podobe číselnej hodnoty. Na tento účel slúži blok **Display**. Okrem iného v tejto knižnici **Sinks** môžeme taktiež nájsť blok určený pre riadené zastavenie behu simulácie – **Stop Simulation**, ako aj ďalšie iné bloky, ktoré sú určené napr. pre export vypočítaných dát do prostredia **Matlabu**, ako sú bloky **To File** resp. **To Workspace**.



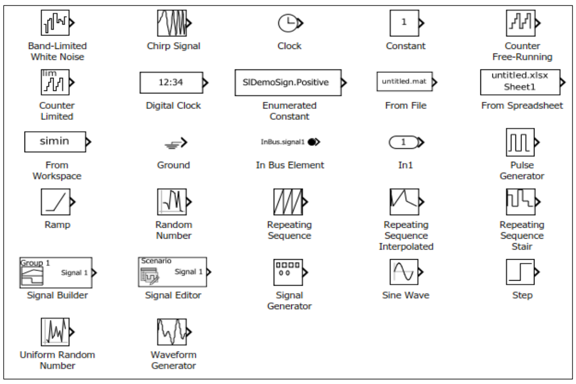
Obr. 5.20: Knižnica Sinks

Na vytváranie zložitejších matematických operácií môžeme siahnuť po predpripravených blokoch, ktoré sa nachádzajú v knižnici **Math Operations**, pozri Obr. 5.21. V tejto knižnici je možné nájsť napr. bloky **Add, Sum, Subtract, Divide, Product, Dot Product, Gain, Sign, Trigonometric Function, Math Function, Sqrt** a mnohé iné.



Obr. 5.21. Knižnica Math Operations

Nakoniec spomeňme poslednú z rady základných knižníc **Simulinku** a tou je knižnica **Sources**. Ide o knižnicu, ktorá obsahuje prakticky všetky možné **budiace signály**, ktoré dokážeme generovať počas simulácie na vyšetrovanie správania sa dynamických systémov, pozri Obr. 5.22.



Obr. 5.22. Knižnica Sources

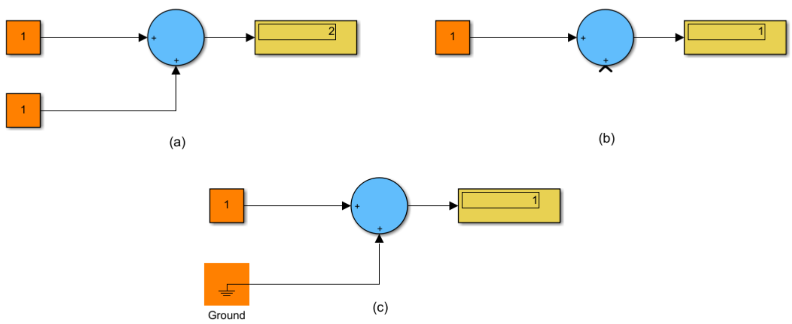
Z týchto základných funkcií budiacich signálov môžeme spomenúť napr. bloky **Step**, **Ramp**, **Sine Wave**, **Signal Generator**, **Clock**, **Signal Builder**, **Random Number**, **Repeating Sequence** a mnohé ďalšie.

5.3 KNIŽNICA COMMONLY USED BLOCKS

V tejto kapitole sa bližšie pozrieme a vysvetlíme si niektoré najčastejšie bežne používané bloky z knižnice **Library Browser**. Už vieme, že tieto funkčné bloky sa nachádzajú v knižnici **Commonly Used Blocks**. Blokom z tejto knižnice budeme venovať značnú pozornosť, aby sme sa s nimi bližšie zoznámili a nadobudli zručnosti, pomocou ktorých budeme schopní vytvárať zložité blokové schémy. Blokom z tejto základnej knižnice má veľký význam sa venovať aj preto, že sa veľmi často vyskytujú prakticky v každej jednoduchej blokovej schéme simulovaného systému. Bližšie sa pozrieme napr. na bloky **Constant**, **Sum**, **Product**, **Gain, In/Out**, **Ground Block**, **Terminator** a ďalšie iné.

5.3.1 Ground Blok

Ground Blok používame na pripojenie blokov, ktorých **vstupné porty** nie sú zapojené k žiadnemu z blokov simulačnej schémy. Poznamenajme, že ak sa spustí simulácia s blokmi, ktoré majú nezapojené porty, potom **Simulink** zvyčajne hlási chybové varovanie. Predísť takýmto varovaniam môžeme použitím týchto **Ground Blokov**, ktorých výstup predstavuje signál o nulovej hodnote. Dátový typ signálu na výstupe tohto bloku je rovnakého typu, aký majú pripojené vstupné signály na vstupných portoch **Ground bloku**. Použitie bloku **Ground** môžeme ukázať na nasledujúcom príklade jednoduchého sčítania dvoch čísiel prostredníctvom súčtového člena, pozri Obr. 5.23 (a) až (c).

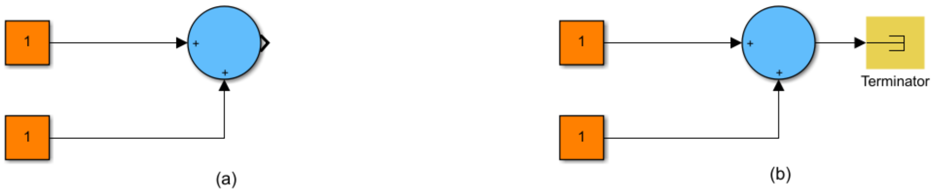


Obr. 5.23. (a) Zapojené obidva terminály, (b) jeden terminál nezapojený, (c) použitie bloku Ground

5.3.2 Blok Terminator

Blok Terminator používame ako ukončovací blok tých výstupných portov, ktoré nie sú pripojené na žiadny iný blok. Podobne ako pri vstupných portoch, ak spustíme simuláciu s blokmi, ktorých **výstupné porty** nie sú pripojené k žiadnemu terminálu, **Simulink** zvyčajne hlási chybovú hlášku.

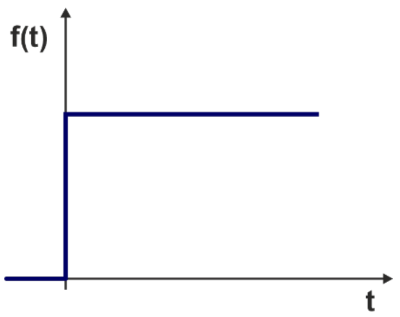
Týmto varovaniam môžno predísť použitím ukončovacieho bloku **Terminátora**. Jeho použitie je demonštrované na nasledujúcom príklade nezapojeného sumačného bloku, pozri Obr. 5.24 (a) a (b).



Obr. 5.24. (a) Jeden nezapojený terminál, (b) použitie bloku Terminator

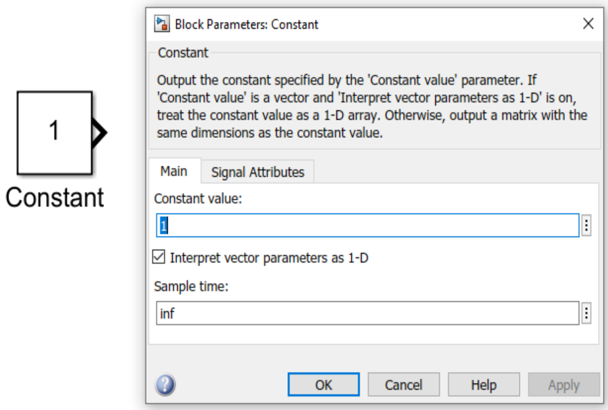
5.3.3 Blok Constant – konštantný blok

Blok Constant resp. **blok konštantného signálu** používame na zadefinovanie skokového signálu funkcie, ktorá v čase $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ narastie na konečnú hodnotu. Táto hodnota sa potom nemení po celý čas simulácie. Tvar tejto funkcie je znázornený na Obr. 5.25.



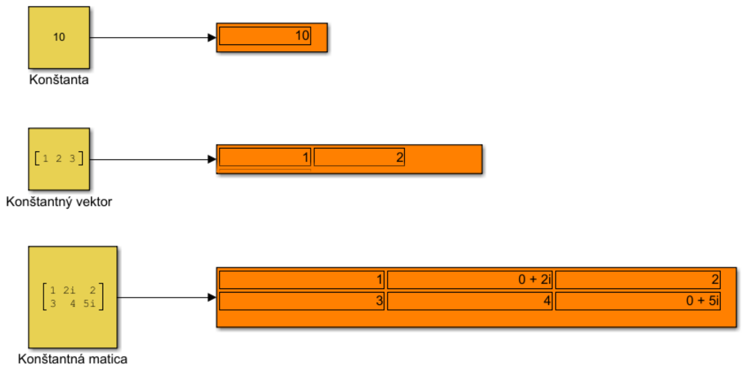
Obr. 5.25. Skoková funkcia

Parametre konštantného bloku môžeme meniť v odpovedajúcom dialógovom okne bloku **Constant**, ktoré je znázornené na Obr. 5.26.



Obr. 5.26. Dialógové okno parametrov Constant

V tomto **Constant bloku** možno zadefinovať **konštantu**, **konštantný vektor** alebo **konštantnú maticu**. Čísla môžu byť **reálneho** alebo **komplexného** charakteru. Pripomeňme, že na zadefinovanie vektorov a matíc používame hranaté zátvorky podobne ako v **Matlabe**, napr. pre vektor **[1 2 3]** alebo maticu **[1 2i 2; 3 4 -5i]**. Na nasledujúcom Obr. 5.27 sú znázornené príklady definovania **konštanty**, **konštantného vektora** a **komplexnej konštantnej matice**.

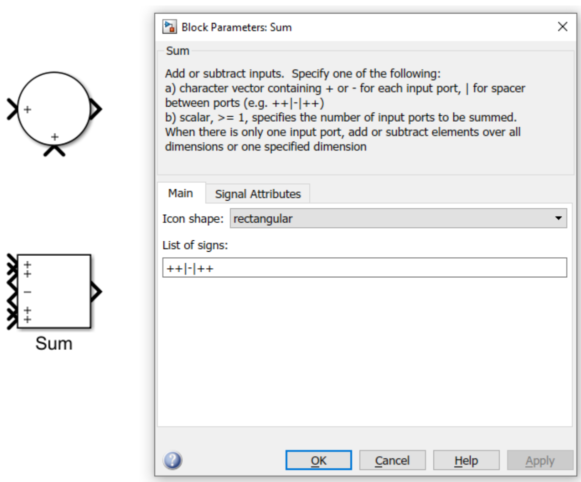


Obr. 5.27. Príklady definovania bloku Constant

Na zobrazenie výsledkov sme využili blok **Display**, ktorý umožňuje zobrazovať číselné hodnoty vo forme skalárnych hodnôt, ako aj **vektorov** a **matíc**. Poznamenajme, že ak chceme rozlišovať v prípade vektorov, to či sa jedná o **stĺpcový** alebo **riadkový vektor**, je nutné v tejto funkcii vypnúť vlastnosť **interpreter parameter as 1-D**.

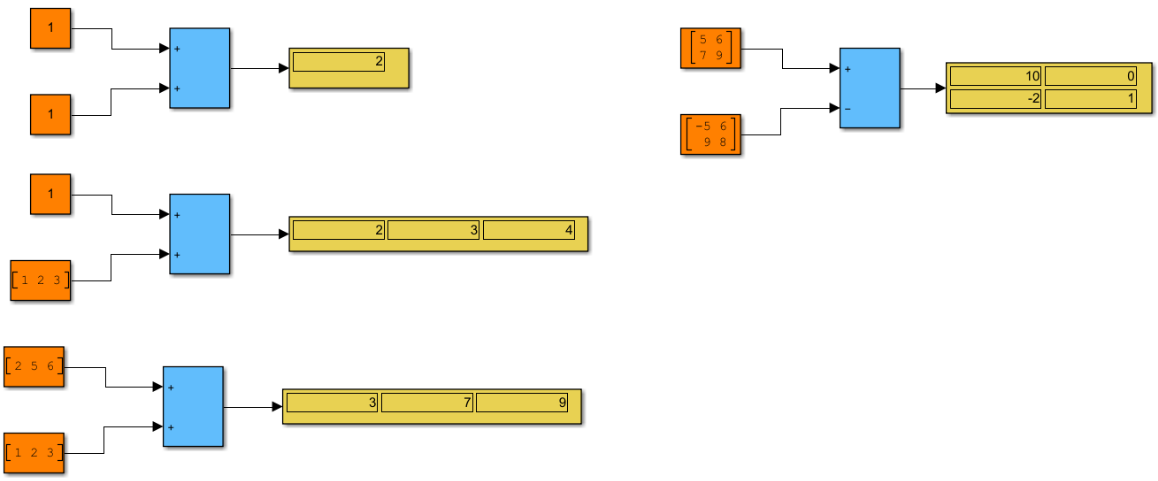
5.3.4 Blok Sum

Blok Sum vykonáva matematickú operáciu **sčítania** alebo **odčítania** podľa nadefinovaných portov vstupov. Tento **súčtový blok** môžeme nakonfigurovať pomocou dialógového okna; schémou sekvencie znakov **(+)**, **(-)**, ktoré vytvoria vstupné terminály s príslušnou matematickou operáciou **sčítania** alebo **odčítania**. Tieto operátory sa takisto zobrazia na výslednej ikone **súčtového bloku**.



Obr. 5.28. Dialógové okno Sum

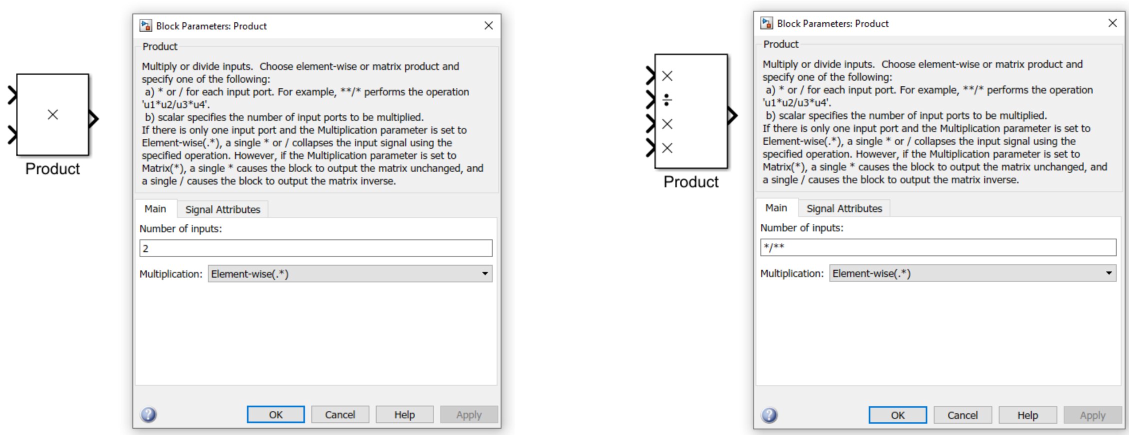
Tvar ikony súčtového bloku možno meniť a zvoliť si medzi **radiálnym (kruhovým)** alebo **štvorcovým** tvarom. Dialógové okno **Bloku Sum** je znázornené na Obr. 5.28. Operácia **sčítania/odčítania** sa riadi pravidlom dátového typu, ktorý je privedený na vstupné terminály. Ak sú teda na termináloch privedené skalárne veličiny, potom výsledkom je **skalárna veličina**. Ak je na niektorý z terminálov privedený **vektor (matica)** a na ďalšie z terminálov sú pripojené skalárne veličiny, potom výsledkom je vždy **vektor (matica)**. **Blok Sum** umožňuje vykonávať aj matematické operácie **sčítavania/odčítania vektorov (matíc)**, v tomto prípade je nutné pri **sčítaní (odčítaní)** dodržať vždy rovnaký rozmer daných **vektorov (matíc)**. Príklady použitia sumačného bloku sú znázornené na Obr. 5.29.



Obr. 5.29. Použitie bloku Sum

5.3.5 Blok Product

Blok Produkt slúži na vykonávanie operácií **násobenia** alebo **delenia** veličín privedených na vstupných termináloch. Tento blok umožňuje vykonávať tieto operácie **násobenia/delenia** pre čisto **skalárne veličiny**, ale taktiež je pripravený pre uskutočňovanie **maticových operácií**.

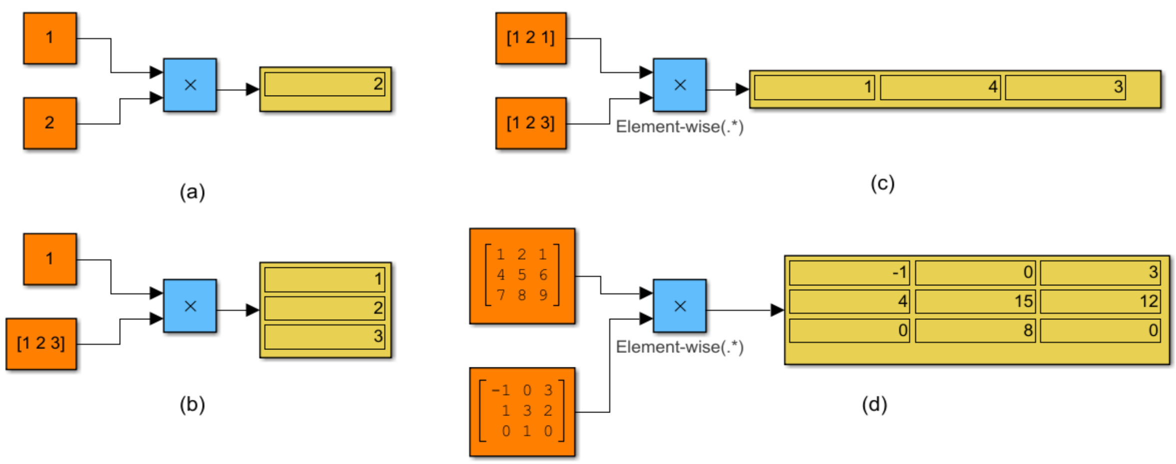


(a) (b)

Obr. 5.30. Zadefinovanie vstupných terminálov v bloku Product, (a) pre násobenie a (b) pre kombináciu násobenia a delenia

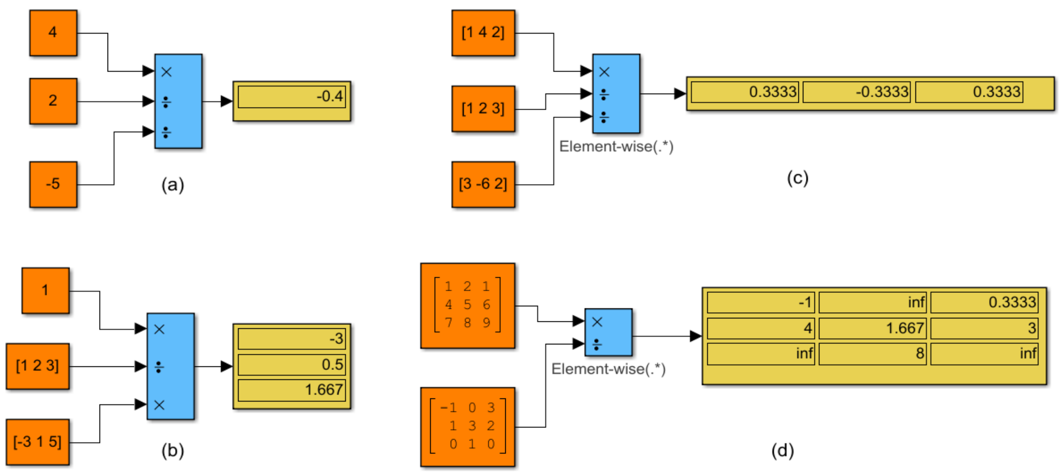
Maticové operácie môžeme zapnúť zmenou parametra **Multiplication** z **Element-wise** na **Matrix multiply**; tento parameter dokážeme meniť priamo v dialógovom okne, ktoré prislúcha tomuto bloku **Product**. **Blok Product** môžeme ďalej nakonfigurovať z hľadiska počtu vstupných portov, ktorým odpovedajú operátory **násobenia/delenia**.

Tieto vstupy možno vytvoriť buď len pre jednoduché **násobenie signálov**; zadaním hodnoty reprezentujúcej presný počet vstupných terminálov, kedy sa **Product blok** správa ako **operátor násobenia**; alebo existuje takisto možnosť kombinovať operácie **násobenia** a **delenia**, zadefinovaním schémy znakov odpovedajúcich **násobeniu (*)** resp. **deleniu (/)**, pozri Obr. 5.30 (a) a (b). Príklady výpočtu operácií násobenia člen po člene **(element-wise)** sú znázornené na Obr. 5.31 (a) až (d).



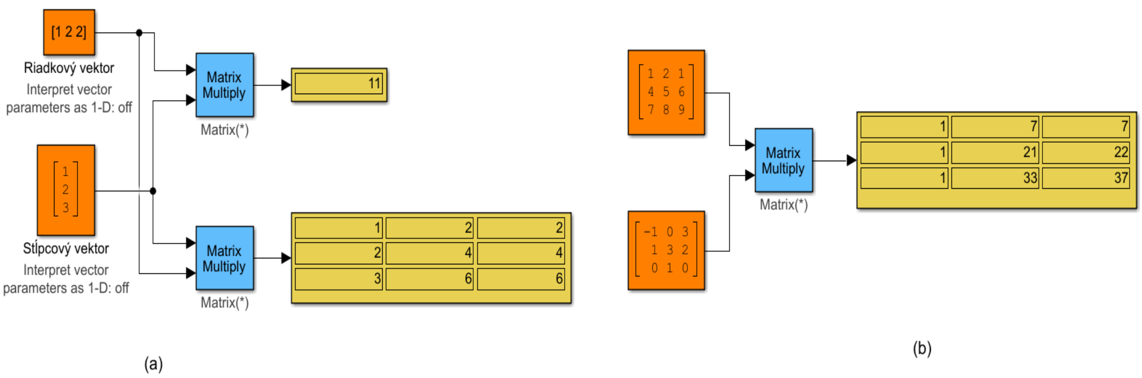
Obr. 5.31. Blok Product – operácie násobenia (a) skalárnych veličín, (b), (c) vektorov a (d) matíc

Na nasledujúcich Obr. 5.32 (a) až (d) sú zobrazené príklady **operácií delenia** člen po člene (z angl. **element-wise**), ktoré sú realizované prostredníctvom tohto **Product bloku**.



Obr. 5.32. Blok Product – operácie delenia, (a) skalárnych veličín, (b), (c) vektorov a (d) matíc

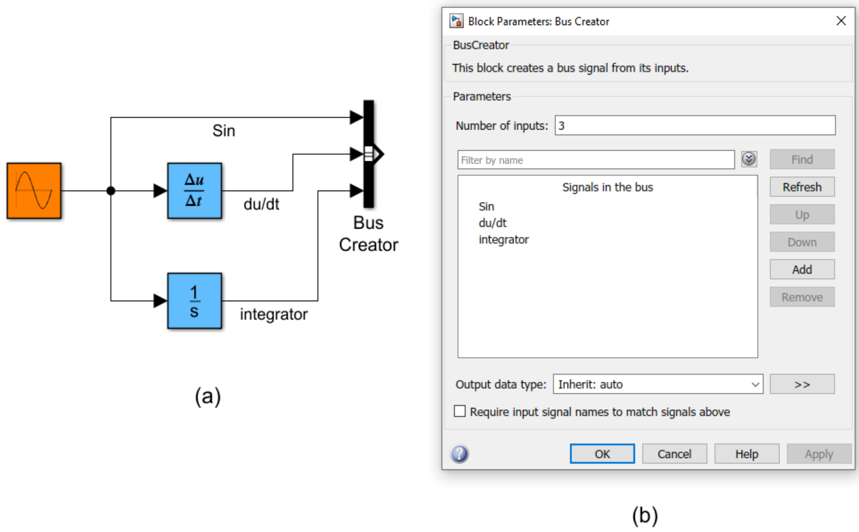
V tomto **bloku Product** boli pre jednotlivé operácie zadefinované schémy vstupných terminálov. Poznamenajme, že v prípade operácie delenia musí každý prvý znak v takejto konfiguračnej schéme, predstavovať operátor násobenia **(*)**. Operácie **delenia** a **násobenia** sa potom uskutočňujú smerom zhora nadol. Pripomeňme, že parametrom **Multiplication** môžeme meniť spôsob a typ operácie násobenia a delenia. Štandardne je táto operácia **násobenia/delenia** prednastavená na funkcionalitu **Element-wise (.*)**, tzn. operáciu člen po člene. Druhou možnosťou je **Matrix multiply (*)** – operácia určená na vykonávanie maticových operácií **násobenia/delenia**. Príklady použitia **bloku Product** môžeme nájsť na Obr. 5.33 (a) a (b).



Obr. 5.33. Product Blok – operácie násobenia matíc a vektorov, (a) násobenie dvoch vektorov, (b) násobenie matíc

5.3.6 Bloky Bus Creator a Bus Selector

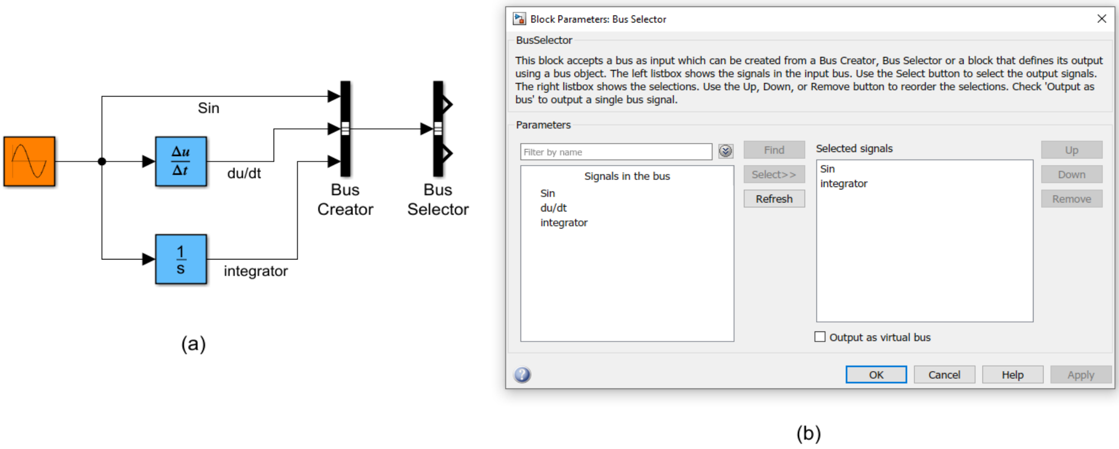
Z ďalších blokov, ktoré sa nachádzajú v knižnici **Commonly Used Blocks**, spomenieme bloky **Bus Creator** a **Bus Selector**. Tieto dve základné funkcie **Simulink knižnice** sú primárne určené na spájanie signálov v jeden zložený signál, vytvorením ktorého vzniká tzv. **zbernica signálov** (spojenie viacerých signálov v jeden kombinovaný signál).



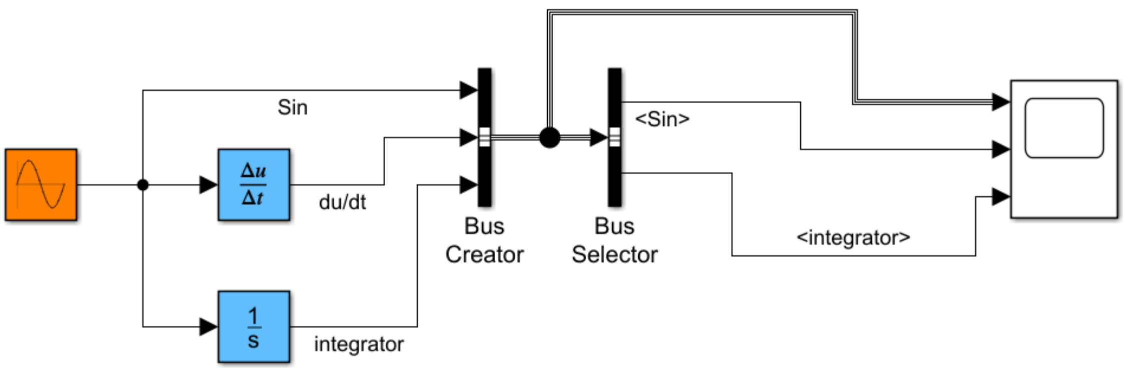
Obr. 5.34. Blok Bus Creator, (a) pomenovanie signálov, (b) dialógové okno

Po vytvorení takejto **zbernice signálov**, potom z tejto zbernice kombinovaného signálu (napr. použitím funkcie **Bus Selector**) možno voliť signály, ktoré budú zo zbernice signálov oddelené a zobrazia sa na výstupe funkcie **Bus Selector**. Pri vytváraní zbernice signálov použitím funkcie **Bus Creator** je vhodné, aby každý signál vstupujúci do tejto funkcie bol pomenovaný (z hľadiska jeho ľahšej identifikácie). Tzn., že každému signálu, ktorý vstupuje do tejto funkcie zadefinujeme jeho názov a priradíme mu prislúchajúci **identifikátor** (z angl. **label**) podľa Obr. 5.34 (a).

Funkcii **Bus Creator** prislúcha dialógové okno, v ktorom môžeme navoliť požadovaný počet vstupných signálov, ktoré potrebujeme kombinovať do jednej výslednej **zbernice signálov**. Príklad takejto **zbernice signálov**, ktorá bola vytvorená použitím funkcie **Bus Creator**, je znázornený na Obr. 5.34 (a) a (b). Zbernicu signálov, ktorá bola nadefinovaná touto funkciou, potom možno priviesť ako vstupný signál do funkcie **Bus Selector**. **Bus Selector** je funkcia umožňujúca navoliť signály z privedenej zbernice signálov, ktoré sa potom objavia na výstupných termináloch tejto funkcie, pozri Obr. 5.35 (a) a (b).

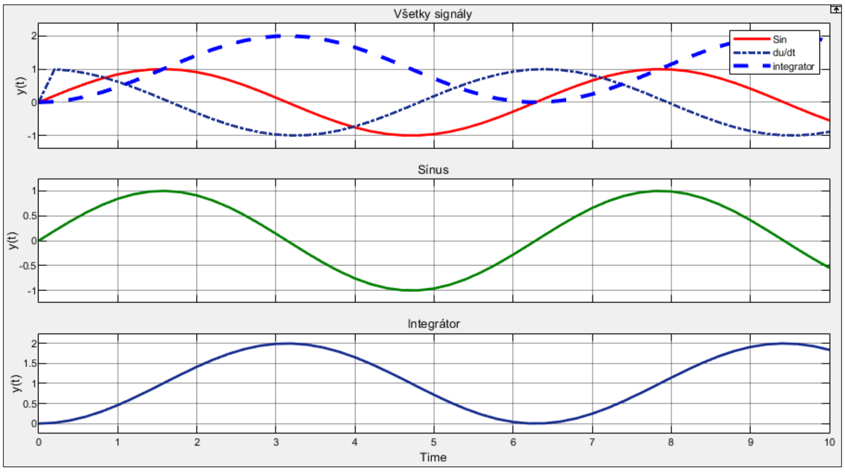


Obr. 5.35. Blok Bus Selector, (a) vytvorenie zbernice signálov, (b) dialógové okno



Obr. 5.36. Bloková schéma použitia funkcií Bus Creator a Bus Selector

Na Obr. 5.36 je znázornená výsledná bloková schéma, v ktorej bola použitá funkcia **Bus Creator** na spojenie signálov v jeden zbernicový signál a taktiež funkcia **Bus Selector**, ktorá bola použitá na vyextrahovanie signálov z vytvorenej zbernice za účelom zobrazenia jednotlivých signálov na odpovedajúcich grafoch. Výsledok zobrazenia v podobe grafov je znázornený na Obr. 5.37.

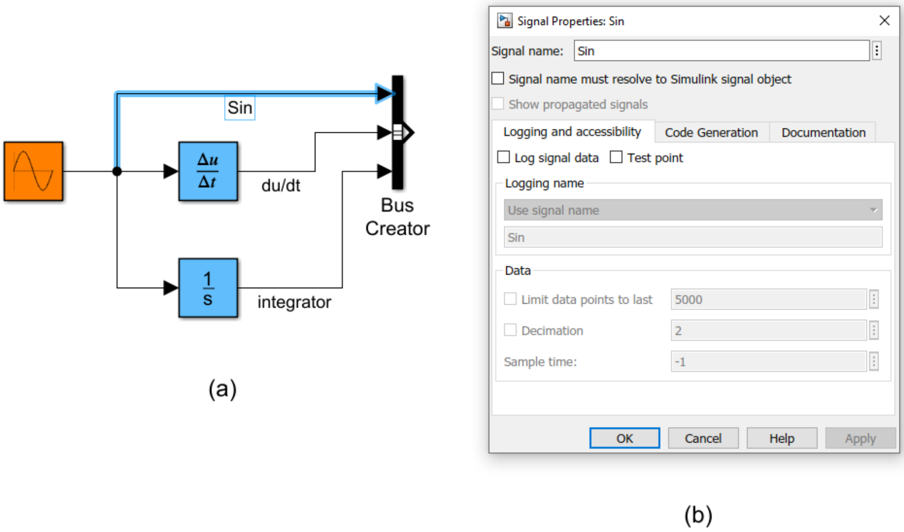


Obr. 5.37. Zobrazenie priebehov signálov

5.3.7 Bloky In a Out

V knižnici **Commonly Used Blocks** sa nachádzajú aj ďalšie dôležité bloky, ktorá slúžia napr. na vytvorenie **vstupno-výstupných terminálov** pre subsystémy blokovej schémy (ide o užívateľom definované funkcie **Matlab/Simulink**). Medzi tieto funkcie radíme **bloky In** a **Out**.

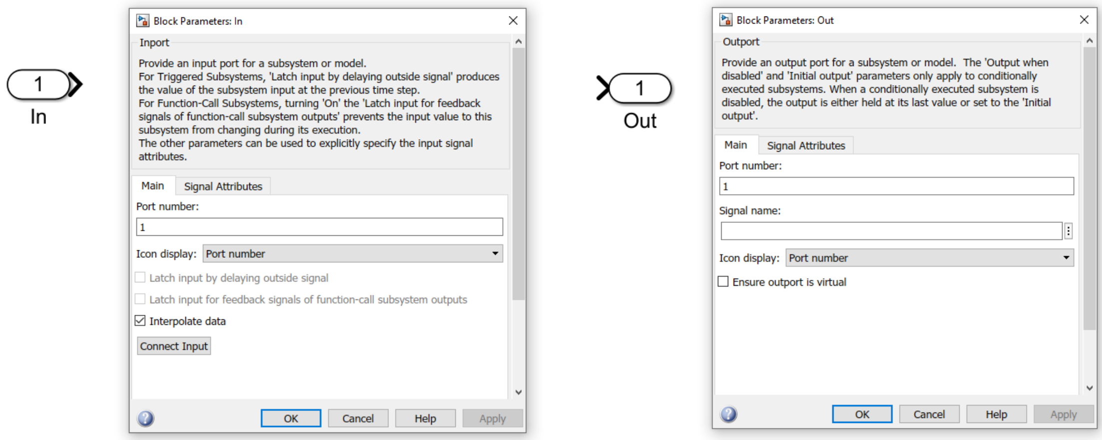
Z predchádzajúcej práce s funkciami **Bus Creator** a **Bus Selector** vieme, že každému signálu blokovej schémy v **Matlab/Simulinku** môžeme priradiť jeho vlastný identifikátor, pozri Obr. 5.38.



Obr. 5.38. (a) bloková schéma, (b) nastavenie vlastností signálu

Tento **identifikátor (label)** môžeme zadefinovať jednoduchým dvojklikom na požadovaný signál a nadefinovaním názvu tohto signálu v zobrazenom editačnom poli. Druhým spôsobom ako pomenovať signál, je prostredníctvom dialógového okna **Signal Properties** t. j. príkazu z kontextového menu (toto menu vyvoláme kliknutím pravého tlačítka myši na daný signál), pozri Obr. 5.38.

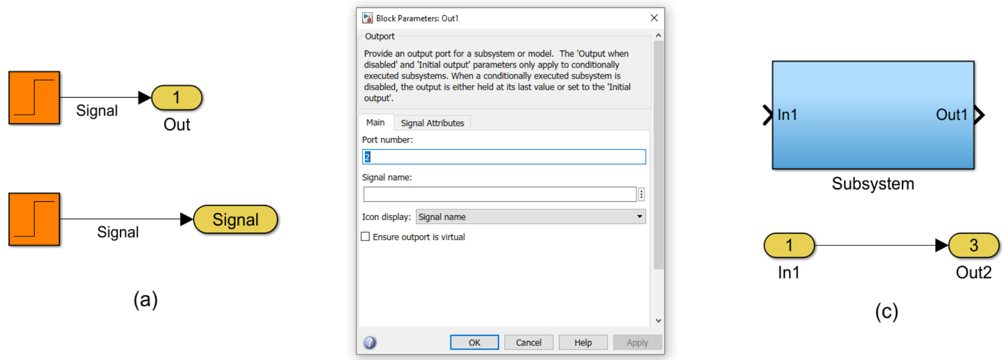
Použitím **blokov In** a **Out**, ktorých dialógové okná sú znázornené na nasledujúcich Obr. 5.39 (a) a (b), možno v týchto dialógových oknách priradiť **číselnú hodnotu portu** (z angl. **Port number** – poradové číslo portu pre daný signál v subsystéme) a taktiež navoliť tvar zobrazenia ikony príslušného bloku. Tvar zobrazenia ikony môžeme voliť z troch možností, ktorými sú **Signal name**, **Port number** alebo **Port number and Signal name**.



(a) (b)

Obr. 5.39. (a) dialógové okno bloku In, (b) dialógové okno bloku Out

Bloky **In** a **Out** umožňujú vytvárať a pomenúvať **vstupno-výstupné terminály** na maskách vytvorených subsystémov, ktoré používame v **Matlab/Simulinku** na sprehľadnenie a zjednodušenie **blokových schém**. Príklad jednoduchého subsystému s jedným vstupom a jedným výstupom je znázornený na Obr. 5.40 (c). Na obrázkoch Obr. 5.40 (a) a Obr. 5.40 (b) možno vidieť zadefinovanie parametrov bloku **Out**.



(a) (b) (c)

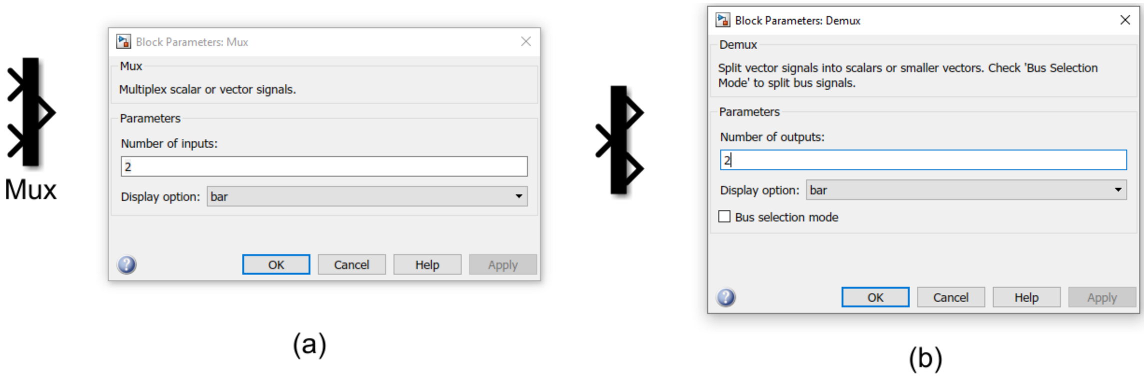
Obr. 5.40. (a) Signály priradené Out blokom, (b) parametre Out bloku, (c) jednoduchý subsystém

Poznamenajme, že **blok Out** má okrem základnej funkcionality, ktorou je vytváranie výstupných terminálov zo subsystémov, ešte ďalšiu inú funkcionalitu. Použitím tohto **bloku Out**, môžeme napr. signál zo **Simulinku** exportovať priamo do základného prostredia **Matlab Workspace**. Táto funkcionalita funguje v prípade, že sa funkcia **Out** použije priamo v základnej **blokovej schéme**.

5.3.8 Bloky Mux a Demux

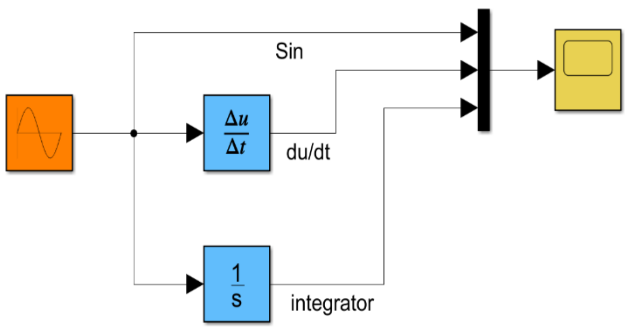
Ďalším spôsobom ako spájať viaceré signály v jeden ucelený komplexný signál, je možnosť využiť bloky **Mux** alebo **Demux**, ktoré sú ďalšími z rady blokov **Commonly Used Blocks** knižnice. V **Matlab/Simulinku** slúži na kombinovanie viacerých signálov do jedného poľa signálov blok **Mux**. Tento **Mux** blok slúži okrem jednoduchého spájania signálov taktiež na vytváranie jednoduchých jednorozmerných polí v prostredí **Simulinku**. Tento blok umožňuje jednoduchým spôsobom spájať **skalárne veličiny** a **vektory** do jednorozmerného vektorového poľa.

Vstupným signálom tohto bloku **Mux** môže byť jednak **skalárna veličina**, **vektor** alebo **matica**. **Mux blok** a taktiež blok **Demux** umožňujú prostredníctvom dialógového okna nakonfigurovať požadovaný počet **vstupných/výstupných** portov, pozri Obr. 5.41 (a) a (b).



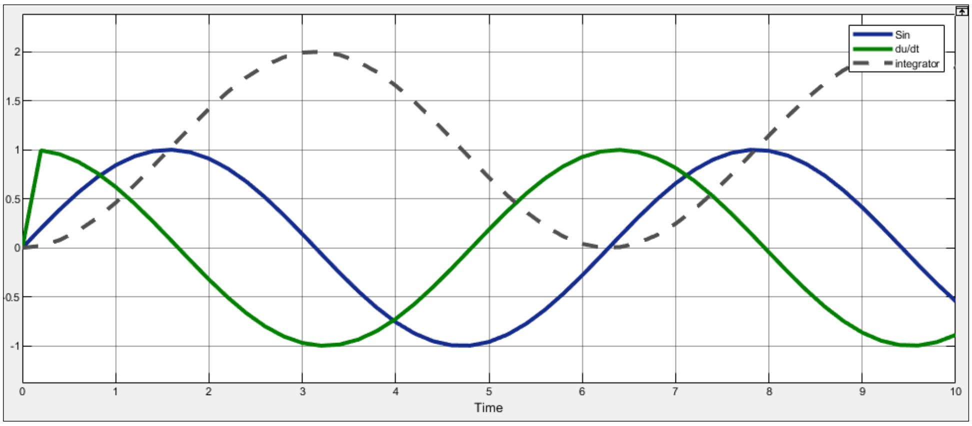
Obr. 5.41. (a) Parametre bloku Mux, (b) parametre bloku Demux

Použitie funkcionality **Mux bloku** na spojenie troch signálov do jedného komplexného signálu je znázornené na nasledujúcom Obr. 5.42.



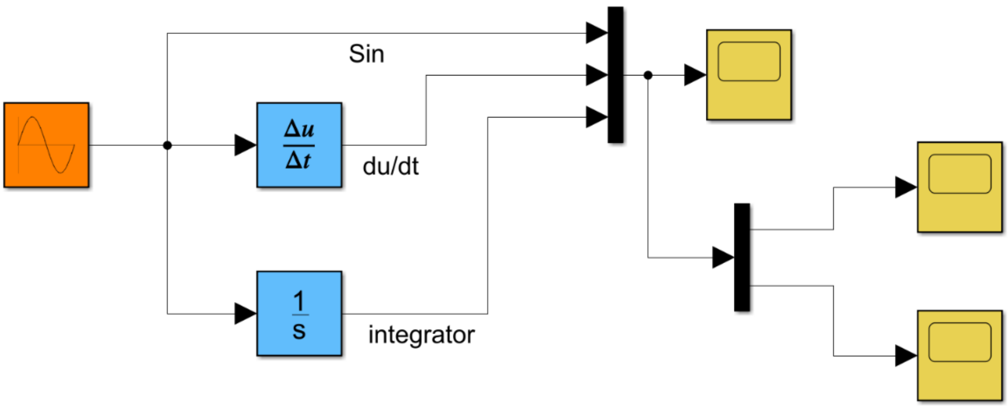
Obr. 5.42. Použitie bloku Mux

Poznamenajme, že **Mux blok** je výhodné používať aj vtedy, ak chceme kombinovať viaceré signály a zobraziť ich na jednom spoločnom grafe. Na ďalšom Obr. 5.43 je zobrazený graf, ktorý vznikol spojeným troch signálov do jedného výsledného komplexného signálu.



Obr. 5.43. Výsledný graf spojenia troch signálov v jeden signál

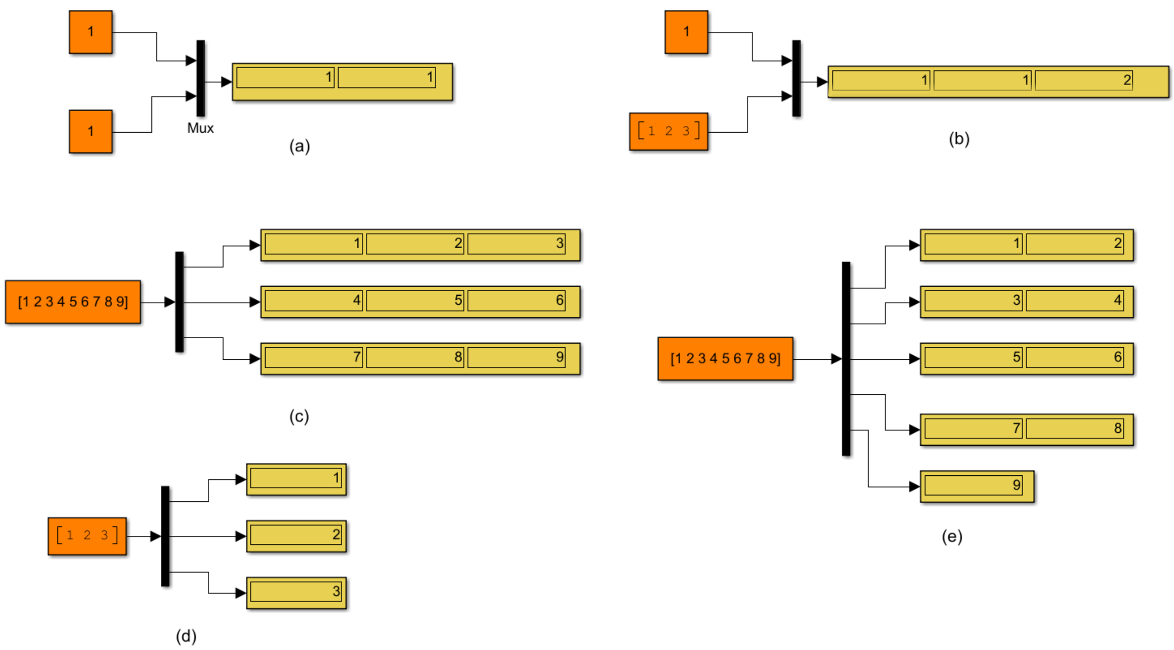
Demux blok na druhej strane extrahuje jednotlivé signály z komplexného signálu, ktorý je vytvorený zložením viacerých signálov alebo prvkov prostredníctvom **Mux bloku**. Výstupom z bloku **Demux** sú oddelené signály, ktoré sa zatriedia medzi výstupné porty podľa príslušných stanovených pravidiel. **Blok Demux** akceptuje ako vstupný signál buď **vektorové pole (1-D pole)**, ale takisto je možné na vstupný port toho bloku priviesť signál, ktorý predstavuje **zbernicu signálov** vytvorenú prostredníctvom bloku **Bus Creator**. Počet výstupov funkcie **Demux** možno špecifikovať prostredníctvom zvoleného počtu portov v príslušnom dialógovom okne, pozri Obr. 5.41 (b) a Obr. 5.44.



Obr. 5.44. Demux blok zapojený v blokovej schéme

Spôsob, akým sa jednotlivé signály prerozdelia na požadovanom počte výstupným portov funkcie **Demux**, závisí na počte signálov, ktoré sú uchované v danom zloženom signály a taktiež na zvolenom počte výstupných portov tohto bloku. Spôsob prerozdelenia signálov si vysvetlíme na dvoch nasledujúcich príkladoch.

Predpokladajme, že číslo **n** predstavuje počet elementov **vstupného vektora** (skalárnych hodnôt) a číslo **p** predstavuje počet zvolených **výstupných portov** nastavených na bloku **Demux**. Príklady použitia funkcií **Mux** a **Demux** sú znázornené na Obr. 5.45 (a) až (e).



Obr. 5.45. Bloky Mux a Demux, (a) spojenie dvoch skalárnych veličín, (b), spojenie skalárnej veličiny a vektora, (c), (d) a (e) použitie funkcie Demux

Poznamenajme, že počet portov **p** nesmie byť nikdy číslo väčšie, ako je maximálny počet vstupných signálov **n**. Na základe predchádzajúceho zadania môžeme vo všeobecnosti rozlíšiť dva možné prípady, ktoré môžu nastať pri použití tohto bloku **Demux**:

1. **Prípad** – keď počet vstupných signálov sa rovná počtu výstupných portov t. j. $\mathbf{p} = \mathbf{n}$:

V prípade rovnakého počtu výstupných portov **p**, ktorý sa zhoduje s počtom vstupným signálov **n** (zadefinovaných v jednom signály zbernice), ktorý vstupuje do **bloku Demux**, sa na výstupných termináloch objaví práve jeden konkrétny signál a to v presnom poradí, v akom boli tieto signály zadefinované v zbernici signálov.

2. **Prípad** – keď počet výstupných portov je menší ako počet vstupných signálov t. j. $\mathbf{p} < \mathbf{n}$:

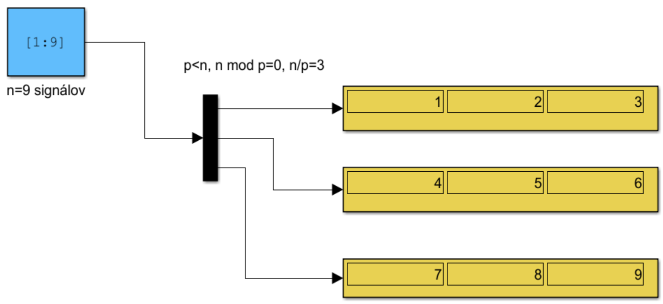
V prípade, že počet výstupných portov **p** je menší, ako počet vstupných signálov **n** nachádzajúcich sa vo vstupnom vektore, **Demux blok** prerozdelí signály na výstupné porty na základe nasledovných dvoch pravidiel

a) Ak platí, že $\mathbf{n} \bmod \mathbf{p} = \mathbf{0}$, čo znamená celočíselné delenie čísla **n** číslom **p** bezo zvyšku, potom na každom výstupnom porte sa objaví práve $\mathbf{n}/\mathbf{p}$ elementov vstupného vektora a to v presnom poradí, v akom boli tieto elementy zadefinované vo vstupnom vektore.

Napr. ak vstupný vektor obsahuje $\mathbf{n} = \mathbf{8}$ signálov a na **bloku Demux** je prednastavených $\mathbf{p} = \mathbf{4}$ výstupných portov, potom **Demux** vygeneruje $\mathbf{4}$ vektory po dvoch elementoch, pretože $(\mathbf{8/4} = \mathbf{2}$ **elementy**).

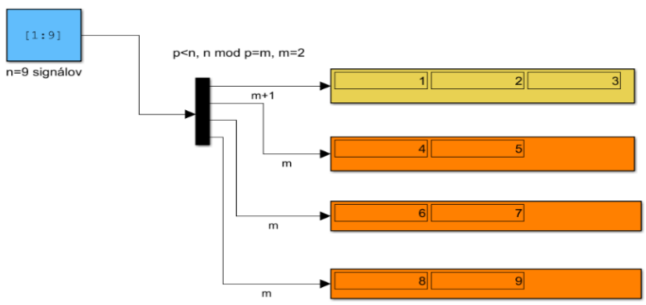
b) Na druhej strane ak platí, že **n mod p** $= \mathbf{m}$ predstavuje celočíselné delenie so zvyškom $\mathbf{m}$, potom **Demux** vygeneruje prvých $\mathbf{m}$ výstupných portov s počtom prerozdelených po $\mathbf{m+1}$ elementov a ďalších zostávajúcich $\mathbf{p-m}$ výstupných portov s počtom prerozdelených po $\mathbf{m}$ elementoch vstupného vektora, v presnom poradí ako boli tieto signály zadefinované vo vstupnom vektore stupňa **n**.

Tzn., ak napr. vstupný vektor obsahuje $\mathbf{n} = \mathbf{5}$ signálov a predpokladáme, že na funkcii **bloku Demux** bol zvolený počet $\mathbf{p} = \mathbf{3}$ výstupných portov, potom **Demux blok** vygeneruje prvé dva vektory o **3 elementoch**; nakoľko zvyšok $\mathbf{m} = \mathbf{2}$ (keďže **n mod p** = **2**) a $\mathbf{m} + \mathbf{1} = \mathbf{3}$ elementy. Na ďalších výstupných portoch sa objavia **2** zostávajúce elementy vstupného vektora (v tomto prípade na jednom z portov); nakoľko $\mathbf{p} - \mathbf{m} = \mathbf{3} - \mathbf{2} = \mathbf{1}$ a $\mathbf{m} = \mathbf{2}$. Ako praktickú ukážku funkcionality tohto bloku **Demux** predpokladajme, že vstupný vektor je konštantným vektorom celých čísel stupňa $\mathbf{n} = \mathbf{9}$ [**1 2 3 4 5 6 7 8 9**]. Tento vektor bol zadefinovaný v bloku **Constant**, vypnutím vlastnosti **Interpreter vector parameter as 1-D**. Potom na Obr. 5.46 je znázornený prípad podmienky celočíselného delenia bezo zvyšku alebo **n mod p** $= \mathbf{0}$ s nastaveným počtom $\mathbf{p} = \mathbf{3}$ výstupných portov.



Obr. 5.46. Demux pre podmienku n mod p = 0

Na ďalšom Obr. 5.47 je znázornený prípad pre podmienku **n mod p** $= \mathbf{m}$, t. j. celočíselného delenia so zvyškom, keď na **bloku Demux** bol nastavený počet $\mathbf{p} = \mathbf{4}$ výstupných signálov.

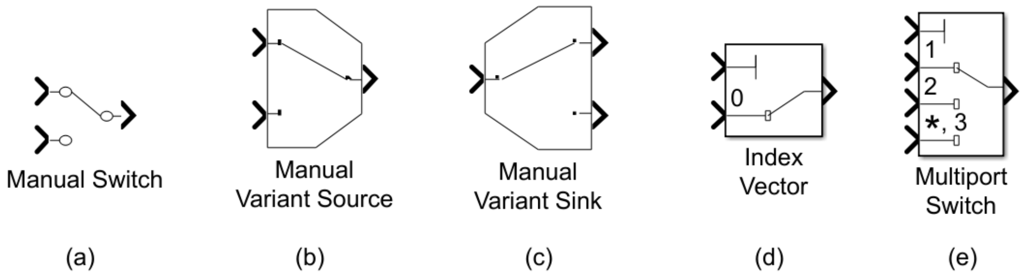


Obr. 5.47. Demux pre podmienku n mod p = m

5.3.9 Manual Switch, Index vector a Multi-Switch Port

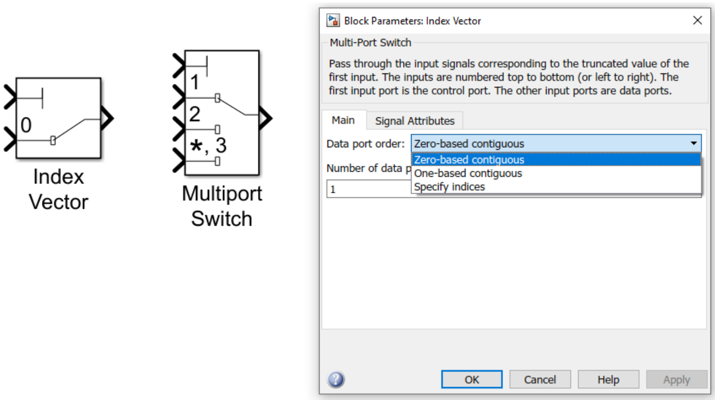
V niektorých prípadoch pri simulácií systémov je nutné meniť vstupné veličiny signálov podľa uvažovaných variantov riešenia. Problém variantov riešenia možno riešiť napr. pomocou prepínania sa medzi jednotlivými vstupnými signálmi, ktoré platia pre daný uvažovaný prípad. V **Simulinku** možno takéto stavy simulovať, napr. použitím bloku **Manual Switch**, tento je zaradený do knižnice **Signal routing**. **Manual switch** umožňuje prepínanie medzi dvoma vyšetrovanými stavmi, pozri Obr. 5.48 (a).

V prípade, že je nevyhnutné v modeloch riešiť prípad viac ako dvoch variantov riešenia a nutnosť prepínať sa medzi takýmito riešenými stavmi, potom môžeme v takýchto schémach v **Simulinku** využiť ďalšie iné dostupné prepínače, ktorými sú napr. **Manual Variant Source** resp. **Manual Variant Sink**. Tieto prepínače sú zobrazené na Obr. 5.48 (b), (c). Ďalším z rady prepínačov sú napr. **Index Vector** a **Multiport Switch**. **Index Vector** a **Multiport Switch** sú bloky, ktoré sú rovnako zaradené do knižnice **Signal routing**. Tieto bloky sú zobrazené na Obr. 5.48 (d) a (e).



Obr. 5.48. (a) Manual Switch, (b), Manual Variant Source, (c) Manual Sink, (d) Index vector, (e) Multiport Switch

Index Vector resp. **Multiport Switch** vyžadujú nastaviť dodatočné parametre, ktorými sú napr. počet **vstupných portov** a taktiež stanoviť systém poradia číslovania indexov – **Data port order.** Spôsob poriadia indexácie môže byť založený jednak na číslovaní od nuly (**zero-based)**, resp. na číslovaní od jednotky (**one-based**), pozri Obr. 5.49.



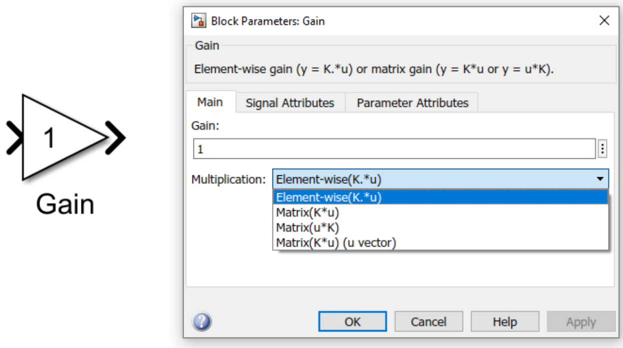
Obr. 5.49. Parametre blokov Index Vector a Multiport Switch

5.3.10 Gain blok

Gain blok, ktorý je ďalším blokom knižnice **Commonly Used Blocks**, je matematickým operátorom, ktorý slúži na zosilnenie hodnoty vstupného signálu. Vstupným signálom tohto bloku môže byť napr. **skalárna veličina signálu**, príp. **vektor** alebo **matica**. V dialógovom okne, ktoré prislúcha bloku **Gain**, môžeme špecifikovať typ matematickej operácie násobenia. Táto je štandardne prednastavená na matematickú operáciu násobenia – **element-wise** $(\mathbf{K}.*\ \mathbf{u})$ t. j. násobenie člen po člene. Typ operácie možno taktiež zmeniť na maticový typ operácie. Tu existuje viacero možností, ako sú napr. **Matrix** $(\mathbf{K} * \mathbf{u})$, **Matrix** $(\mathbf{u} * \mathbf{K})$ a iné. Parameter **Multiply** umožňuje zvoliť nasledujúce možnosti:

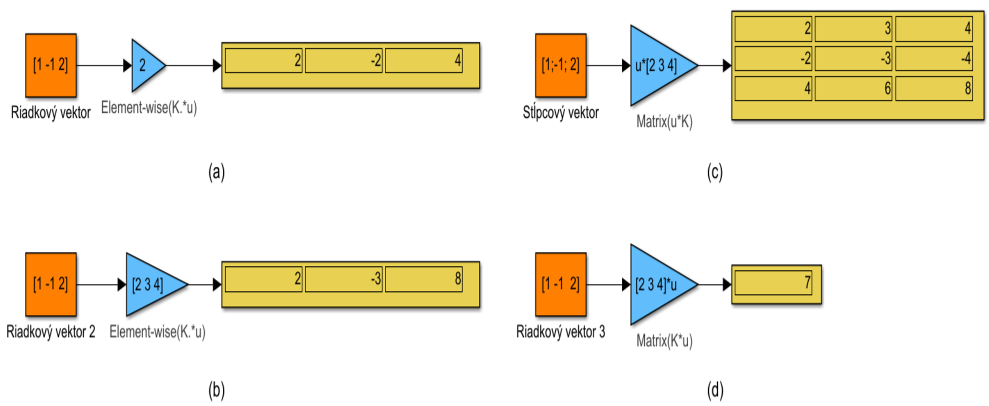
1. Element-wise $(\mathbf{K}.*\ \mathbf{u})$ – násobenie člen po člene,
2. Matrix $(\mathbf{K} * \mathbf{u})$ – maticová operácia,
3. Matrix $(\mathbf{u} * \mathbf{K})$ – maticová operácia,
4. Matrix $(\mathbf{K} * \mathbf{u})(\mathbf{u\ vector})$ – maticová operácia,

kde **u** je vstupný vektor a **K** je zosilnenie **(Gain)**, ktorým môže byť **skalárna hodnota**, **vektor** alebo **matica**. Dialógové okno parametrov bloku **Gain** je zobrazené na nasledujúcom Obr. 5.50.



Obr. 5.50. Parametre bloku Gain

Jednoduché príklady použitia **bloku Gain** môžeme vidieť na nasledujúcom Obr. 5.51.



Obr. 5.51. Príklady bloku Gain, (a) a (b) element-wise násobenie, (c) a (d) maticové operácie

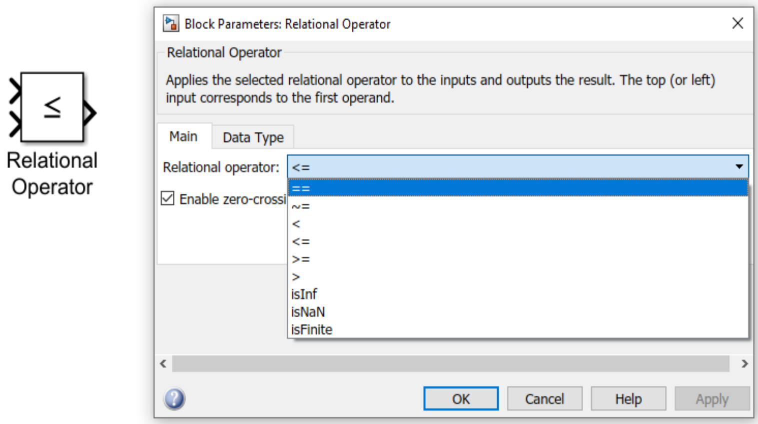
5.3.11 Blok Relation Operator

Do tejto chvíle sme sa zaoberali prevažne blokmi, ktoré slúžili na vykonávanie aritmetických operácií napr. **sčítania/odčítania**, **násobenia/delenia** a pod. Poznamenajme, že v knižnici **Commonly Used Blocks** môžeme okrem aritmetických operátorov nájsť aj **logické** resp. **relačné** operátory (tieto slúžia na uskutočňovanie porovnávacích a logických operácií). V tomto bode sa pozrieme na prvý zo skupiny operátorov, ktorým je **relačný operátor** alebo **Relational Operator** blok.

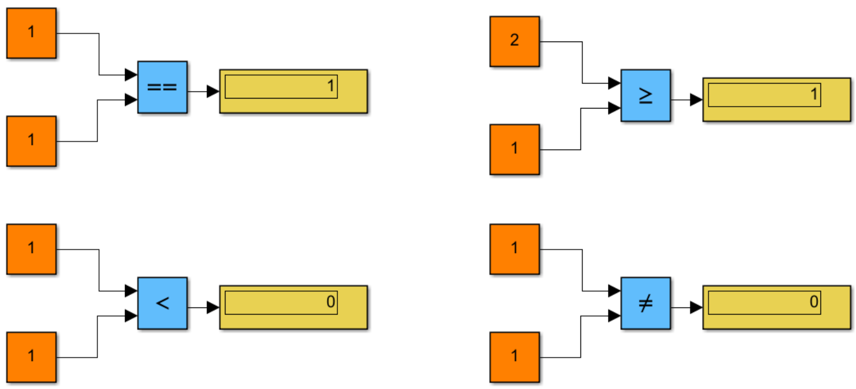
Blok **relačného operátora** uskutočňuje porovnania dvoch vstupných signálov alebo jedného vstupného signálu. Priamo v dialógovom okne tohto **relačného operátora** môžeme zvoliť typ operácie, ktorá sa vykoná relačným operátorom. Pripomeňme, že výsledkom uskutočnenej operácie je logická hodnota **True (False)**. Pri použití tohto **relačného operátora** (podľa typu operácie) môžu nastať nasledujúce možné prípady výsledkov logických hodnôt:

1. == **True (False)**, ak prvý vstup sa **rovná (nerovná)** prvému vstupu,
2. ~ = **True (False)**, ak prvý vstup sa **nerovná (rovná)** druhému vstupu,
3. < **True (False)**, ak prvý vstup je **menší (väčší)** než druhý vstup,
4. ≤ **True (False)**, ak prvý vstup je **menší (väčší)** alebo rovný druhému vstupu,
5. ≥ **True (False)**, ak prvý vstup je **väčší (menší)** alebo rovný druhému vstupu,
6. > **True (False)**, ak prvý vstup je **väčší (menší)** než druhý vstup,
7. isInf **True (False)**, ak sa vstupný signál **rovná (nerovná)** +/- nekonečnu,
8. isNaN **True (False)**, ak vstupný signál **nie je (je)** neurčitý výraz,
9. isFinite **True (False)**, ak vstupný signál **je (nie je)** číslo rôzne nekonečnu.

Dialógové okno parametrov tohto relačného operátora je zobrazené na nasledujúcom Obr. 5.52. Príklady použitia **Relational Operator bloku** môžeme nájsť na ďalšom Obr. 5.53.



Obr. 5.52. Parametre bloku Gain



Obr. 5.53. Príklady použitia bloku Relational Operator

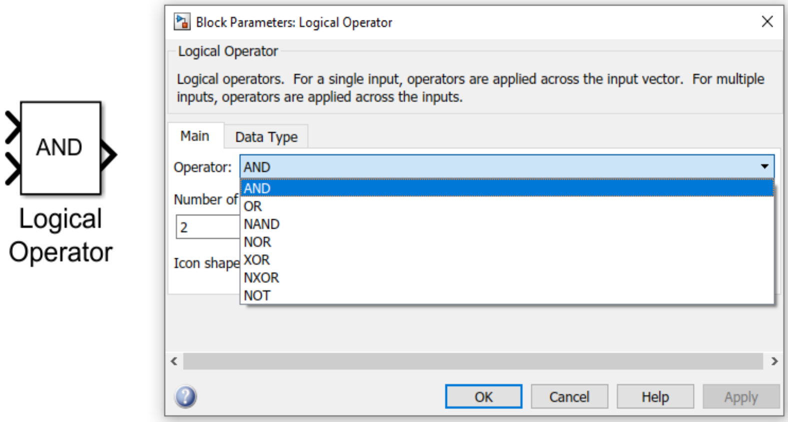
5.3.12 Logical Operator

V predchádzajúcej podkapitole 5.3.11 sme sa zaoberali relačným operátorom – **blokom Relational Operator**. Teraz sa pozrieme na logický operátor – **Logical Operator**, ktorý je ďalším z rady blokov z knižnice **Commonly Used Blocks**. Logický operátor vyhodnocuje logické operácie vstupných signálov privedených na vytvorené vstupné terminály tohto bloku. Vstupné signály sú signálmi logických hodnôt **True (1)** alebo **False (0)**. Poznamenajme, že ak privedieme na tieto vstupné terminály bloku **Logical Operator** číselné hodnoty, ktoré sú rôzne od **(1)** resp. **(0)**, v takom prípade sú hodnoty rôzne od **(0)** automaticky uvažované ako logické hodnoty **True (1)**.

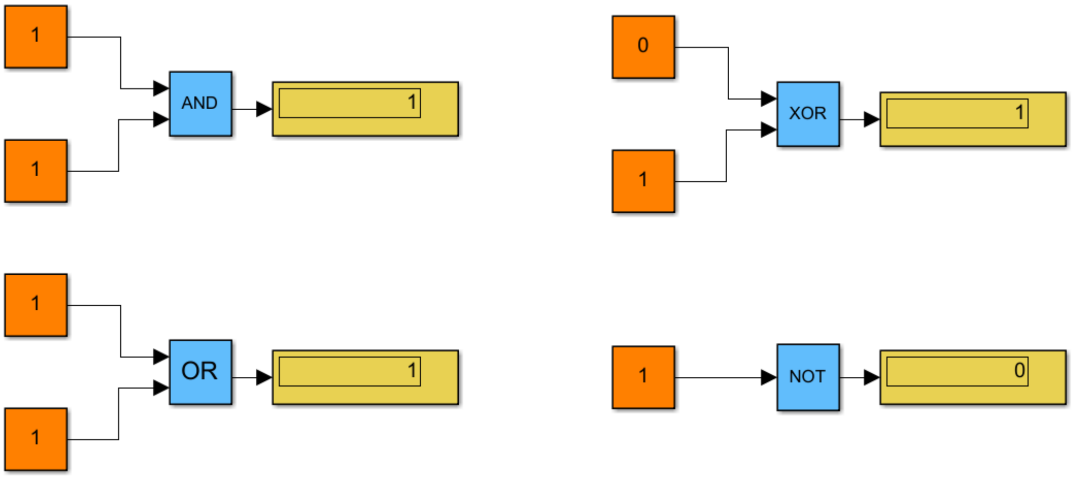
Ďalej pripomeňme, že výsledkom uskutočnenej operácie tohto logického operátora je vždy logická hodnota **True (False)**. Pri použití tohto logického operátora (podľa typu zvolenej operácie) môžu nastať nasledujúce možné prípady výsledkov logických hodnôt:

1. AND **True (False)**, ak všetky vstupy sú **True** (ak aspoň jeden vstup je **False**),
2. OR **True (False)**, ak aspoň jeden vstup je **True** (ak všetky vstupy sú **False**),
3. NAND **True (False)**, ak ani jeden vstup nie je **True** (ak všetky vstupy sú **True**),
4. NOR **True (False)**, ak žiaden zo vstupov nie je **True** (ak aspoň je zo vstupov je **True**),
5. XOR **True (False)**, ak všetky vstupy sú len **True** alebo **False** (ak niektoré zo vstupov sú hodnoty **True** a niektoré sú hodnoty **False** – Exclusive Or),
6. NOT **True (False)**, ak vstupom je **False (True)** – negácia vstupnej logickej hodnoty.

Dialógové okno parametrov tohto logického operátora je zobrazené na nasledujúcom Obr. 5.54 a príklady použitia logických operácií realizovaných použitím **bloku Logical Operator** možno nájsť na ďalšom Obr. 5.55.



Obr. 5.54. Parametre bloku Logical Operator

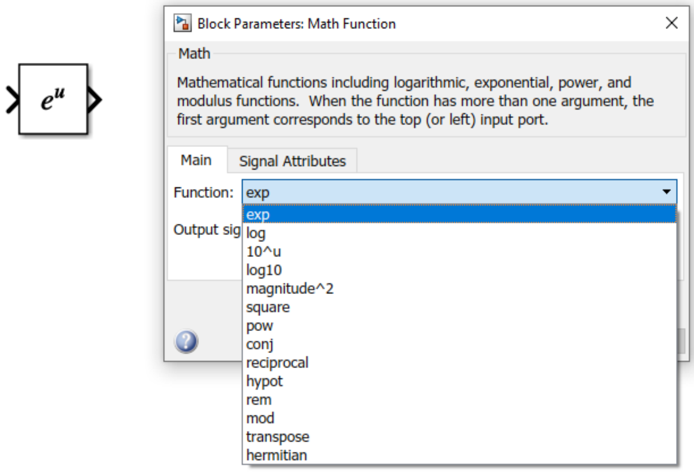


Obr. 5.55. Príklady výpočtu logických operácií blokom Logical Operator

5.3.13 Math function blok

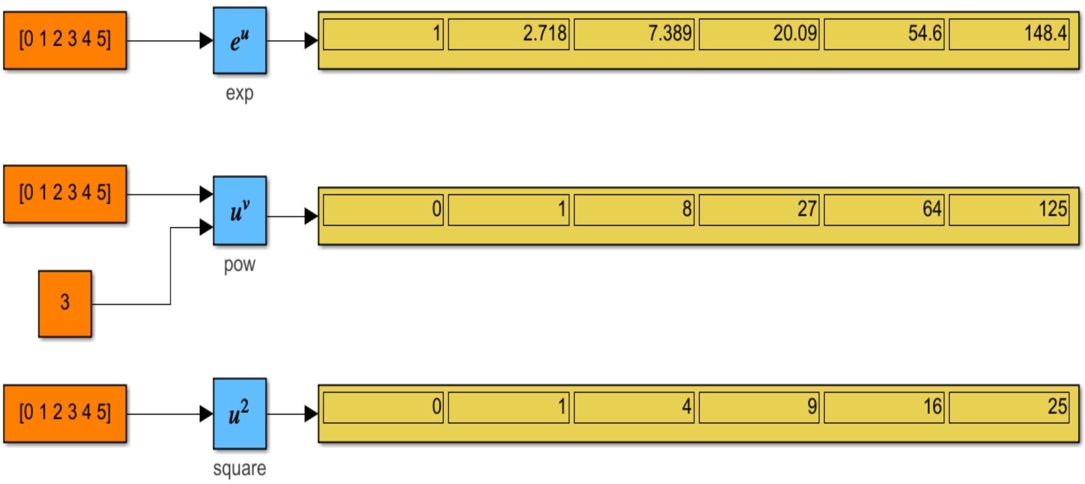
Posledným blokom na vykonávanie matematických operácií z knižnice **Matlab/Simulink**, ktorým sa budeme zaoberať je blok **Math Function** resp. blok **Matematických funkcií**. Tento blok je určený na výpočet jednoduchých matematických funkcií, ako sú napr. **exp, log, log10, square, pow** atď. **Math Function** blok je zaradený do knižnice matematických operácií – **Math Operations**.

Math Function blok matematických funkcií má štandardne jeden vstupný terminál, na ktorý môžeme priviesť napr. signál **skalárnej hodnoty**, **vektor** a vstupom môže byť taktiež **matica**. V prípade, že je na vstupný terminál privedený **vektor** resp. **matica**, potom operácia podľa nastavenej funkcie v dialógovom okne parametrov pre tento blok sa uskutoční na elementárnej úrovni **vektora** a **matice**.



Obr. 5.56. Parametre Math Function bloku

To znamená, že hodnota funkcie sa vypočíta zvlášť pre každý prvok **vektora** resp. **matice**, a výsledkom bude **vektor (matica)** rovnakého rozmeru, takého tvaru aký vykazojú privedený signál na vstup tejto funkcie. Dialógové okno parametrov bloku **Math Function** je zobrazené na Obr. 5.56. Príklady použitia **Math Function** bloku pre vybrané matematické funkcie sú ukázané na nasledujúcom Obr. 5.57.

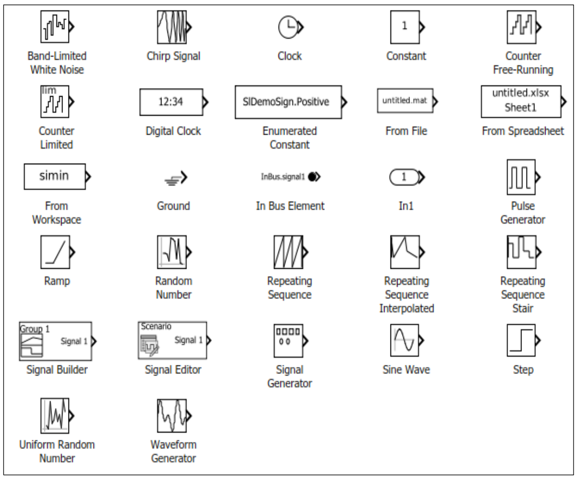


Obr. 5.57. Príklady výpočtu matematických funkcií použitím Math Function bloku

5.4 KNIŽNICA SOURCES

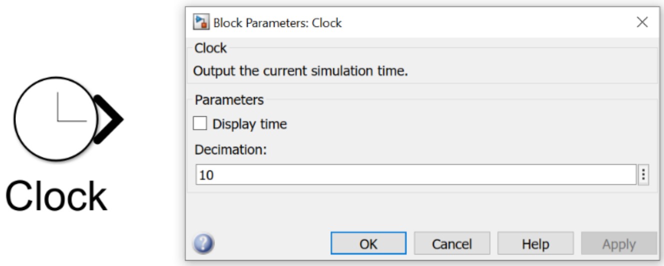
V tejto kapitole sa pozrieme na niektoré veľmi často používané bloky z knižnice zdrojov – **Sources**, ktorá je znázornená na Obr. 5.58. Tieto zdrojové bloky primárne slúžia na generovanie jednoduchých alebo zložitých budiacich signálov. Keďže sa tieto bloky veľmi často vyskytujú ako súčasti prakticky každej simulovanej blokovej schémy a to aj pri modelovaní matematických modelov dynamických systémov, má veľký takisto význam týmto blokom venovať značnú pozornosť.

V tejto knižnici **Sources** je možné nájsť zaujímavé predpripravené bloky rôznych typov zdrojových signálov, ktoré umožňujú generovať a simulovať vstupné budiace signály pre široké spektrum dynamických systémov. Bližšie sa v tejto kapitole zameriame na bloky zdrojov funkcií **Step**, **Ramp**, **Sine Wave**, **Repeating Sequence** a ďalšie iné.



Obr. 5.58. Knižnica Sources

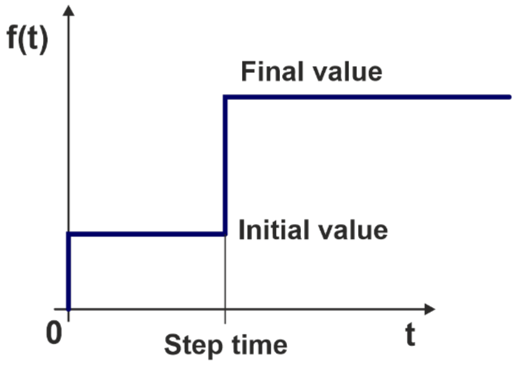
V tejto knižnici zdrojových signálov môžeme nájsť aj zdrojový signál typu **Constant**, ktorý ako už vieme slúži na generovanie jednoduchých signálov **konštantného charakteru**. Tomuto bloku sme sa venovali v predchádzajúcej kapitole. Ďalší zaujímavý zdrojový blok, ktorý z tejto knižnice spomenieme, je zdrojový blok **Clock**, ktorý slúži na vyčítanie aktuálneho časového kroku simulácie. Parametre tohto bloku možno nájsť na Obr. 5.59.



Obr. 5.59. Parametre bloku Clock

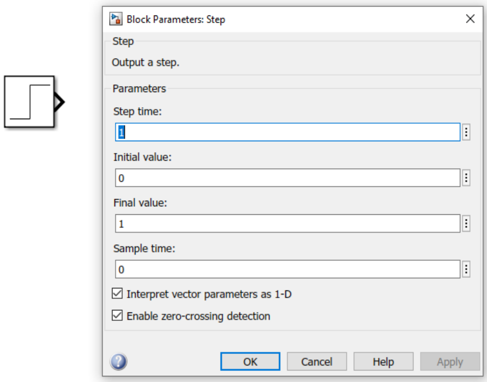
5.4.1 Step blok

Step blok je zdrojový blok, ktorý simuluje skokový signál funkcie. Táto funkcia sa nachádza v knižnici zdrojových signálov **Sources**. Skoková funkcia **Step** zobrazená na Obr. 5.60 je funkcia, ktorá je výsledkom generovania funkčného bloku **Step**. Túto funkciu môžeme nakonfigurovať na základe troch vstupných parametrov, ktorými sú **Step time** (čas vzniku skokovej zmeny), **Initial value** (počiatočná hodnota signálu pred vykonaním skokovej zmeny) a **Final value** (konečná hodnota).

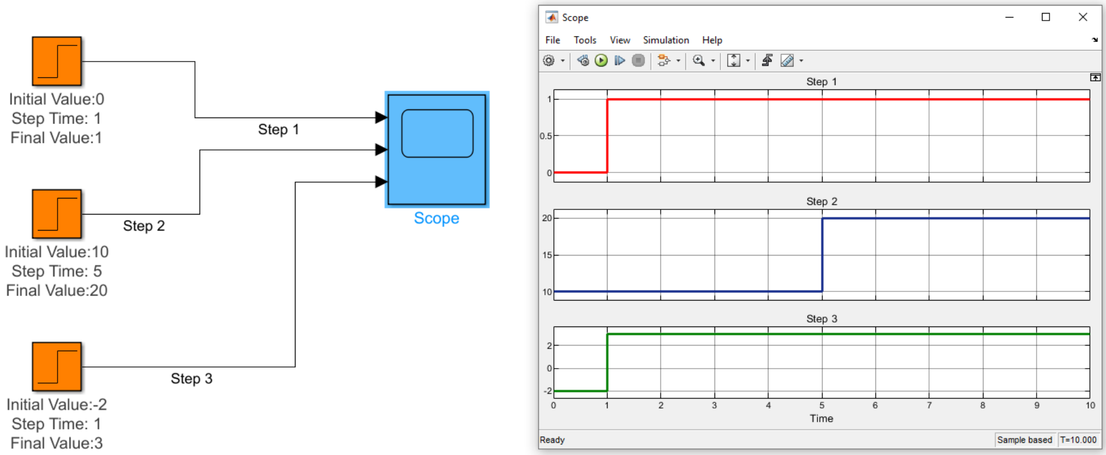


Obr. 5.60. Tvar skokovej funkcie - Step

Na ďalšom Obr. 5.61 je zobrazené dialógové okno parametrov tejto skokovej funkcie **Step** , príklady použitia tejto skokovej funkcie **Step** pre rôzne typy signálov sú znázornené na Obr. 5.62.



Obr. 5.61. Parametre bloku Step

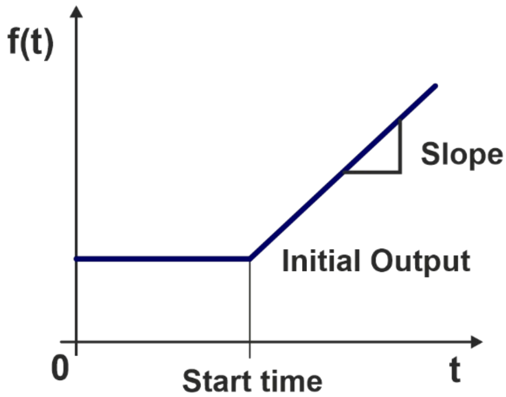


Obr. 5.62. Príklady použitia funkcie Step pre rôzne typy signálov

Poznamenajme, že **step funkciu** možno nahradiť jednoduchou konštantnou funkciou **Constant** a to v tom prípade, ak **počiatočná hodnota** signálu sa rovná nule a **step time** je rovný času $\mathbf{t} = \mathbf{0}$.

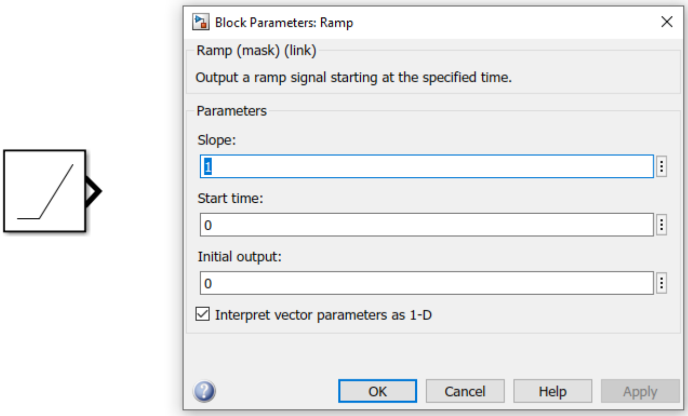
5.4.2 Ramp blok

Ramp blok je zdrojový blok, ktorý simuluje lineárne rastúci signál funkcie s časom **t**. Táto funkcia sa takisto nachádza v knižnici zdrojových signálov **Sources**. Lineárne rastúca funkcia **Ramp** generovaná týmto funkčným blokom je zobrazená na Obr. 5.63.



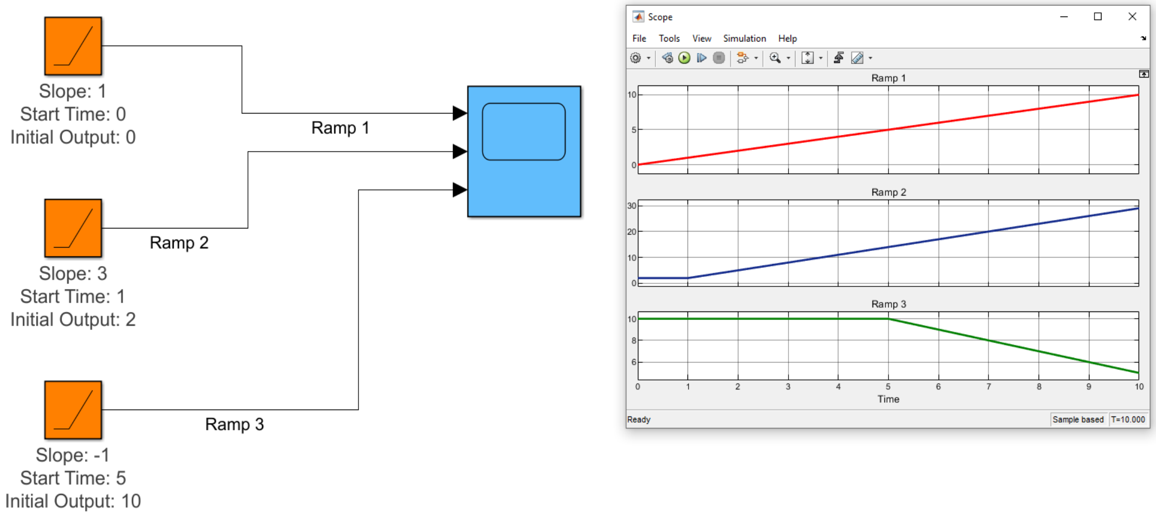
Obr. 5.63. Tvar lineárne rastúcej funkcie - Ramp

Túto **Ramp** funkciu môžeme nakonfigurovať použitím troch vstupných parametrov, ktorými sú **Start time** (počiatočný čas, od ktorého funkcia nadobúda resp. generuje lineárne rastúcu funkciu), **Initial output** (počiatočná hodnota konštantného signálu pred generovaním rastúcej lineárnej funkcie) a **Slope** (je smernica sklonu lineárnej funkcie). Na ďalšom Obr. 5.64 je zobrazené dialógové okno všetkých parametrov takejto **Ramp** funkcie, ktorá generuje lineárne rastúcu funkciu so sklom **45°**.



Obr. 5.64. Parametre bloku Ramp

Niektoré príklady použitia bloku **Ramp**, ktoré sú určené na generovanie rôznych typov signálov lineárne rastúcich funkcií, sú znázornené v podobe blokových diagramov a grafických výstupov na ďalšom Obr. 5.65.



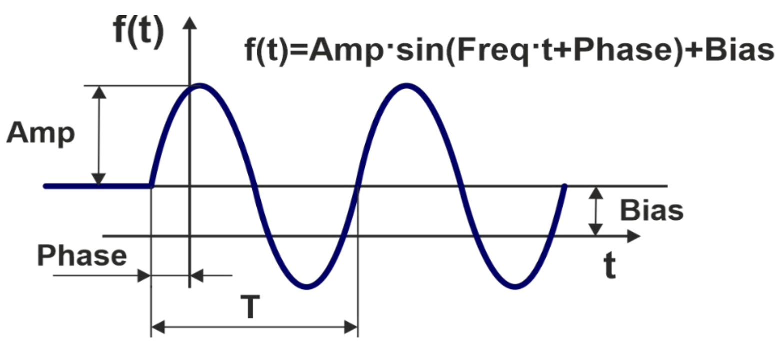
Obr. 5.65. Príklady použitia funkcie Ramp pre rôzne typy signálov

5.4.3 Sine Wave blok

Sine Wave blok môžeme zaradiť medzi ďalšie veľmi často používané funkčné zdrojové bloky, ktorý je súčasťou knižnice **Sources**. Tento zdrojový blok slúži na generovanie harmonicky premenlivej budiacej funkcie **sínus**. Pomocou tohto bloku môžeme generovať signál tvaru **sínusovej** alebo **kosínusovej** funkcie, ktorý je definovaný na základe tejto funkcie

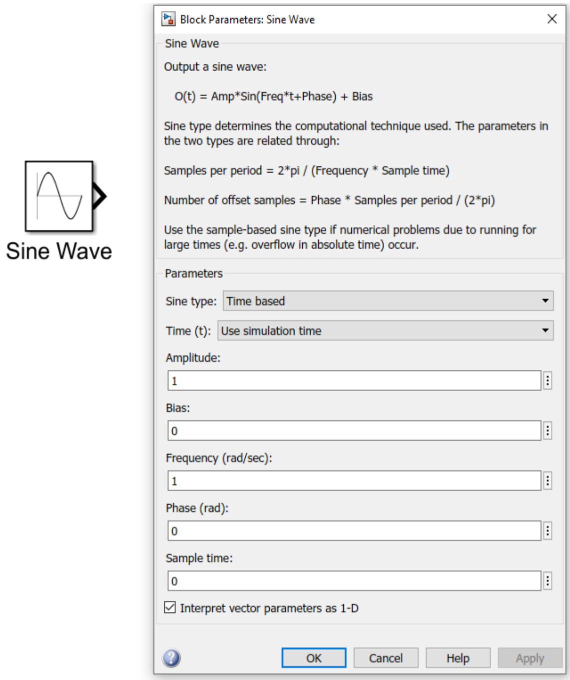
$$y(t) = \mathrm{Amplitude} \cdot \sin(\mathrm{Frequency} \cdot t + \mathrm{Phase}) + \mathrm{Bias}\,, \qquad (5.13)$$

kde **Amplitude** je amplitúda harmonického signálu, **Frequency** je frekvencia signálu definovaná pre periódu času **T**, **Phase** je fázové posunutie harmonického signálu v smere časovej osi **t** a **Bias** je posunutie signálu v smere osi **y**. Príklad všeobecného harmonického signálu, ktorý je definovaný týmto blokom **Sine Wave** na základe predchádzajúcich parametrov je zobrazený Obr. 5.66.



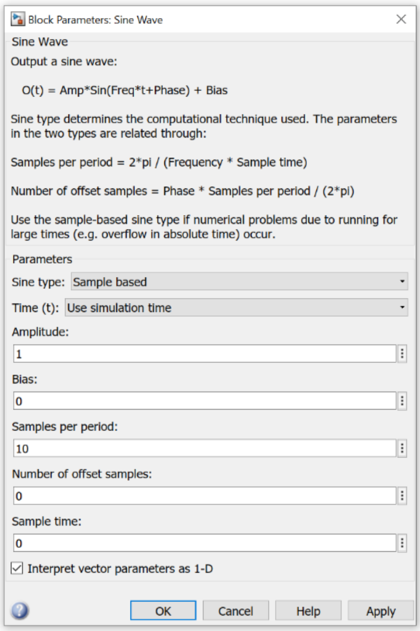
Obr. 5.66. Tvar harmonickej funkcie – Sine Wave

Na ďalšom Obr. 5.67 je zobrazené dialógové okno všetkých parametrov bloku **Sine Wave**, ktorý generuje harmonických signál zobrazený na Obr. 5.66.



Obr. 5.67. Parametre bloku Sine Wave

V dialógovom okne, ktoré prislúcha bloku **Sine Wave**, môžeme zvoliť typ harmonickej funkcie (**Sine type**). Tento môže byť typu **Time Based**, ako je znázornené na Obr. 5.67 alebo **Sample Based**, kedy sú parametre založené na počte vzoriek signálu generovaných za periódu **T** podľa Obr. 5.68.



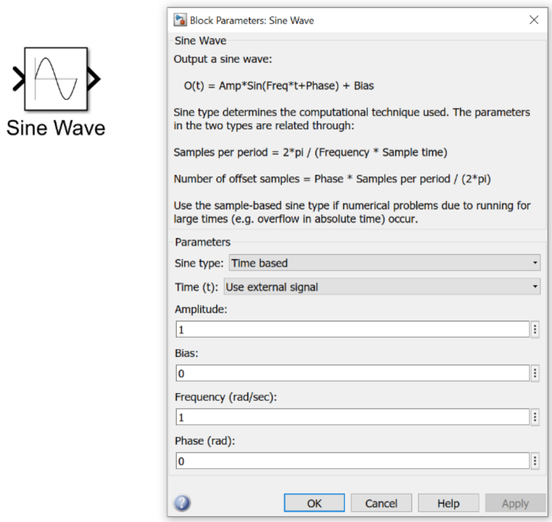
Obr. 5.68. Parametre bloku Sine Wave – Sample Based

Počet vzoriek za periódu – **Samples per period** sa určí na základe vzťahu

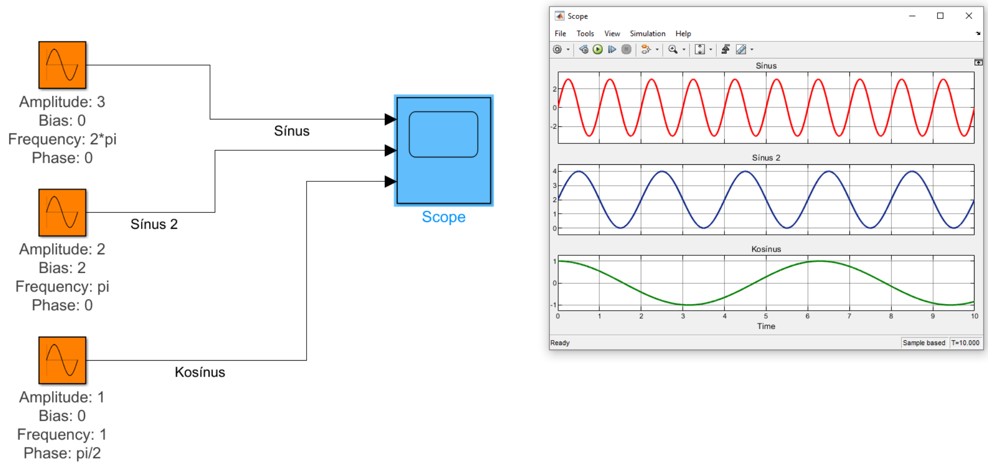
$$\text{Samples per period} = 2 \cdot \pi / (\text{Frequency} \cdot \text{Sample Time})\,, \qquad (5.14)$$

kde **Frequency** je frekvencia opakovania a **Sample Time** je vzorkovací čas.

Medzi ďalšie parametre, ktoré možno meniť v tomto dialógovom okne bloku **Sine Wave**, môžeme spomenúť napr. parameter vstupného času **Time (t)**, pozri Obr. 5.67. V prípade parametra **Time (t)** môžeme voliť medzi dvomi ponúkanými možnosťami. Prvou možnosťou je použitie času simulácie (**Use Simulation Time**); vstupom na generovanie harmonickej funkcie je aktuálny časový krok. Druhou možnosťou je použitie externého časového signálu (**Use External Time**); v tomto prípade externého časového signálu je nutné priviesť na vstupný terminál tohto **Sine Wave** bloku vektor časového signálu, pozri Obr. 5.69. Na Obr. 5.70 sú znázornené príklady použitia bloku **Sine Wave** pre rôzne typy generovaných signálov.



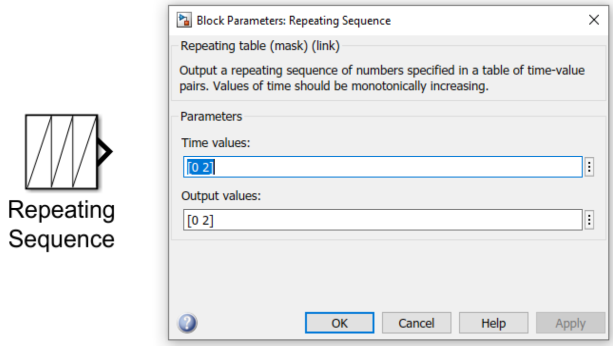
Obr. 5.69. Parametre bloku Sine Wave



Obr. 5.70. Príklady použitia bloku Sine Wave

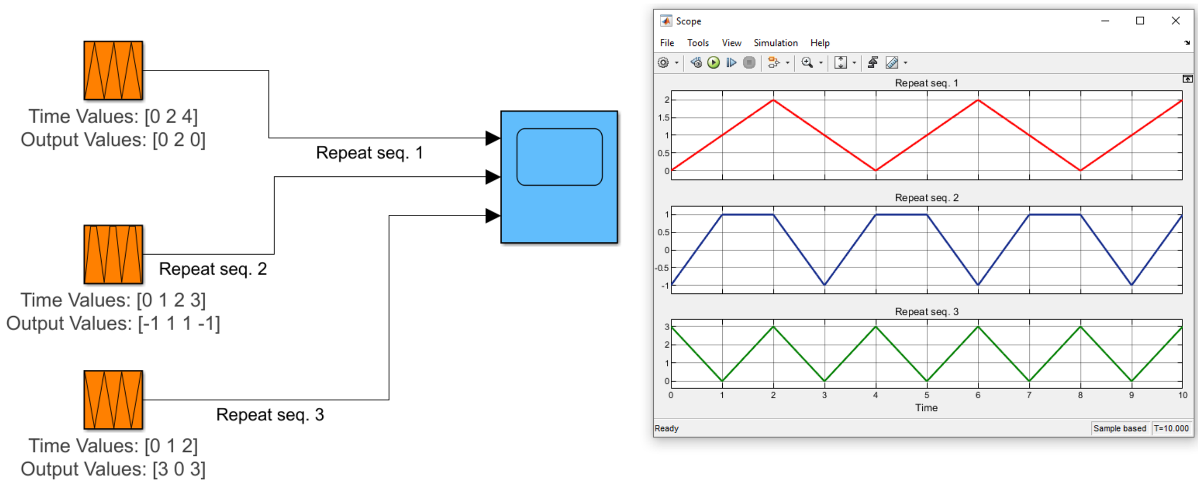
5.4.4 Repeating Sequence blok

Repeating Sequence blok patrí medzi ďalšie funkčné zdrojové bloky. Tento blok je zaradený do knižnice **Sources** a slúži na generovanie periodicky opakujúcej sa sekvencie vrcholov, ktoré sú definované v konkrétnych po sebe nasledujúcich časových bodoch. Blok **Repeating Sequence** možno nakonfigurovať na základe dvoch vstupných parametrov, ktorými sú **Time Values** (predstavujú konkrétne časové body vrcholov zadefinované v zmysle vektora) a **Output Values** (charakterizujú hodnoty funkcie v odpovedajúcich časových bodoch; zadefinovaných vo vektore). Pripomeňme, že rozmery vektorov **Time Values** a **Output Values** musia byť identické, v opačnom prípade **Matlab/Simulink** zahlási chybu. Parametre bloku **Repeating Sequence** sú znázornené na Obr. 5.71.



Obr. 5.71. Parametre bloku Repeating Sequence

Ukážky použitia bloku **Repeating Sequence** pre rôzne typy definovaných signálov sú znázornené na Obr. 5.72.

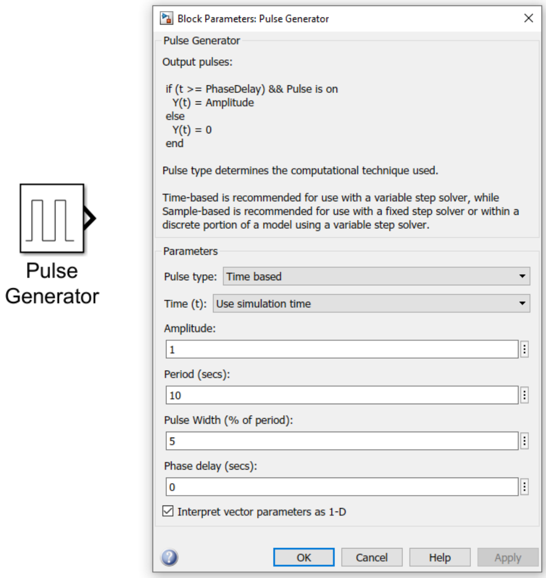


Obr. 5.72. Príklady použitia bloku Repeating Sequence

5.4.5 Pulse Generator blok

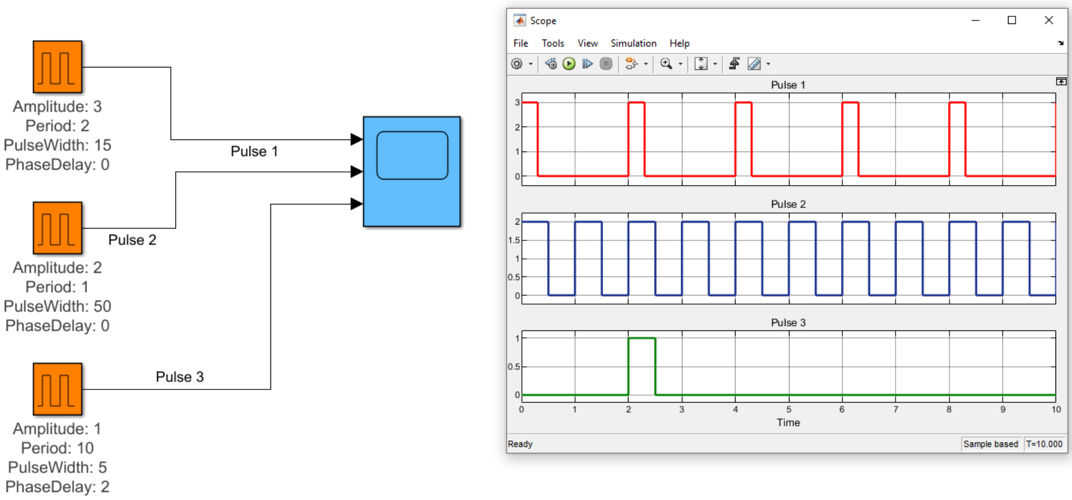
Pulse Generator blok patrí medzi funkčné zdrojové bloky, ktorým môžeme generovať periodicky opakujúci sa pulzný signál. Tvar pulzného signálu, ktorý sa generuje týmto blokom **Pulse Generator**, môžeme nakonfigurovať na základe štyroch vstupných parametrov. Týmito sú **Amplitude** (charakterizuje amplitúdu generovaného pulzného signálu), **Period** (perióda opakovania pulzného signálu), **Pulse Width** (šírka pulzu – percento z periódy pulzného signálu) a **Phase Delay** (fázové posunutie signálu v smere časovej osi **t**).

Dialógové okno s parametrami, ktoré prislúchajú bloku **Pulse Generator**, môžeme vidieť na nasledujúcom Obr. 5.73.



Obr. 5.73. Parametre bloku Pulse Generator

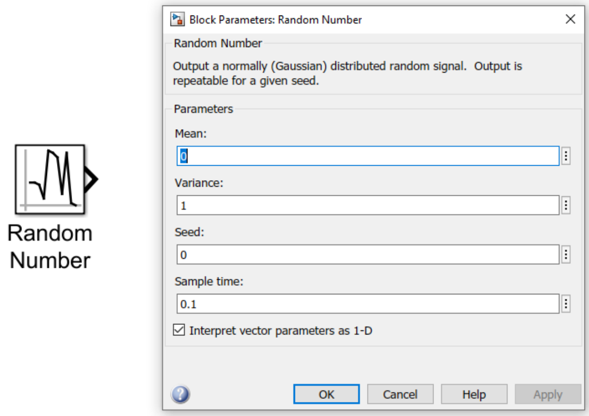
Na ďalšom Obr. 5.74 sú znázornené príklady generovania rôznych typov pulzných signálov.



Obr. 5.74. Príklady použitia bloku Pulse Generator

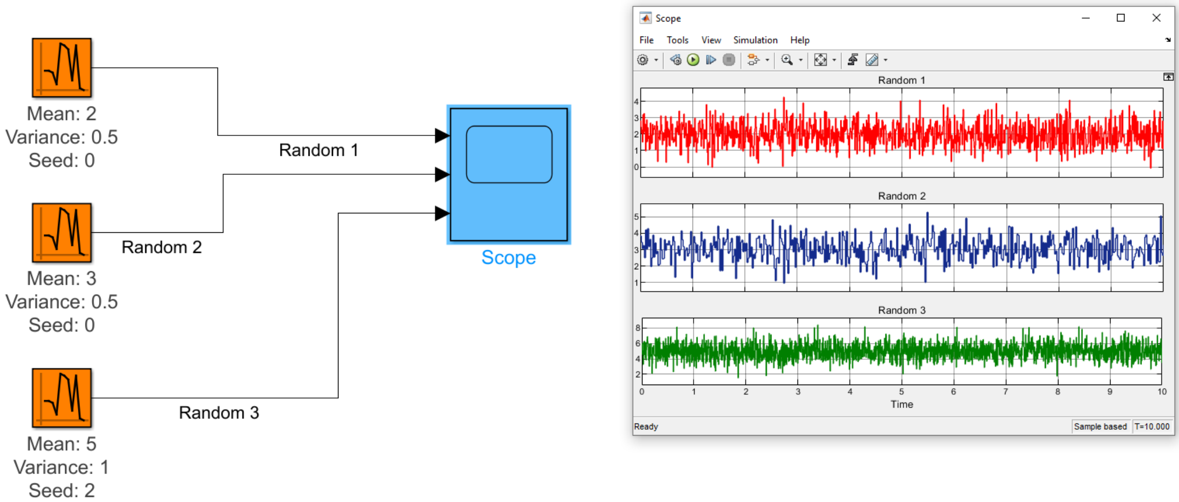
5.4.6 Random Number blok

Posledný zdrojový blok, ktorý si vysvetlíme v tomto štádiu, je **Random Number blok**. Ide o funkčný blok, ktorý sa používa na generovanie náhodného signálu. Náhodný signál je generovaný z **normálneho Gaussovho rozdelenia**. Výstupný signál predstavuje periodicky opakujúcu sa sekvenciu náhodného signálu. Tvar tohto náhodného signálu možno meniť na základe vstupných parametrov, ktorými sú **Mean** (stredný priemer), **Variance** (rozptyl signálu), **Seed** (počiatočné číslo pre generátor náhodných čísel; default hodnota je nastavená na **0**) a **Sample Time** (vzorkovací čas). Parametre bloku **Random Number** sú znázornené na Obr. 5.75.



Obr. 5.75. Parametre bloku Random Number

Príklady rôznych náhodne nagenerovaných signálov, ktoré sú generované použitím bloku **Random Number**, sú znázornené na Obr. 5.76.

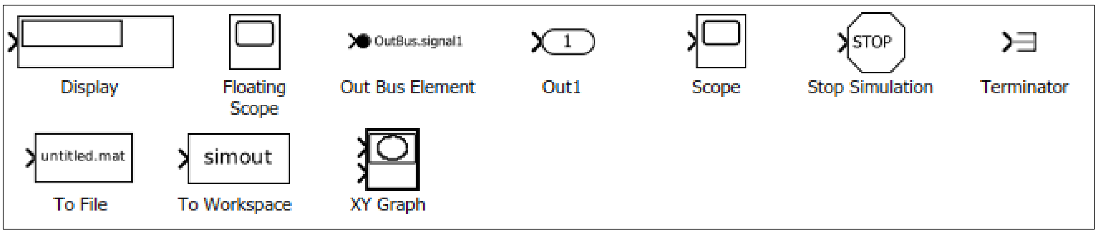


Obr. 5.76. Príklady použitia bloku Random Number

Pripomeňme, že v knižnici **Sources** sa takisto nachádza aj náhodných generátor **Uniform Random Number**, ktorý generuje náhodné čísla z **normálneho normovaného rozdelenia**.

5.5 KNIŽNICA SINKS

V tejto kapitole sa pozrieme na veľmi často používané bloky z knižnice zobrazovačov – **Sinks**, ktorá je znázornená na Obr. 5.77. Tieto funkčné bloky primárne slúžia na zobrazovanie výstupov simulácií v podobe **grafických výstupov** (**Scope**, **Floating Scope** a **XYGraph**) alebo takisto umožňujú zobrazovať vypočítané číselné hodnoty priamo displeji – blokom **Display**.

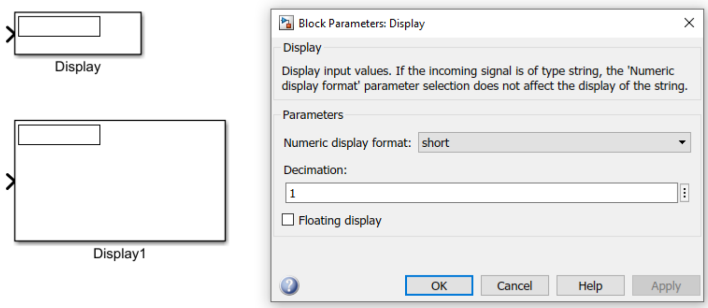


Obr. 5.77. Knižnica blokov Sinks

V tejto knižnici **Sources** môžeme takisto nájsť aj ďalšie zaujímavé funkčné bloky, ktoré slúžia napr. na uchovanie vypočítaných hodnôt do súboru – prostredníctvom bloku **To File**, ako aj na odoslanie nasimulovaných signálov do prostredia základného **Matlab/Workspace** – pomocou bloku **To Workspace**. V tejto kapitole sa bližšie zameriame hlavne na bloky grafických výstupov **Scope**, **XYGraph** a ďalšie iné bloky.

5.5.1 Display blok

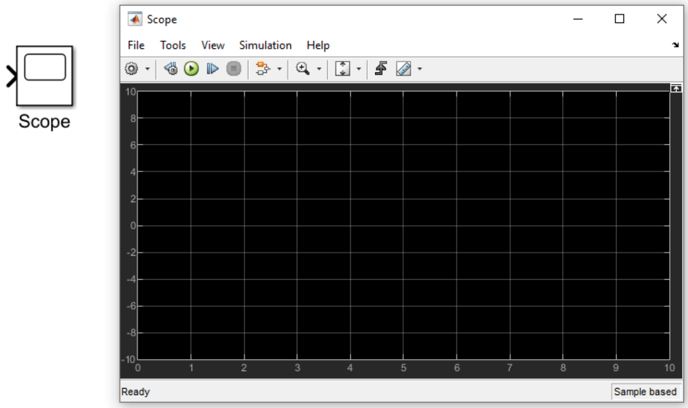
Display blok slúži primárne na zobrazovanie digitálnych výstupov v podobe zobrazených číselných hodnôt na displeji. Pripomeňme, že tento blok sme už používali v blokových schémach v predchádzajúcej kapitole, ktorá bola venovaná bežne používaným blokom – **Commonly Used blocks**. Tento blok dokáže zobraziť výstupné signály vo forme číselných hodnôt pre skalárne veličiny, ako aj v tvare **vektorov** a **matíc**. Tento blok je modifikovateľný a je ho možno rozšíriť na zobrazenie polí v smere riadkov a stĺpcov. V dialógovom okne môžeme navyše špecifikovať príslušný číselný formát (**Number display format**), ktorým chceme dané výsledky zobrazovať, pozri Obr. 5.78. Display blok môže byť takisto použitý na bezkontaktný prenos signálu, ak zaškrtneme políčko (**Floating Display**).



Obr. 5.78. Parametre bloku Display

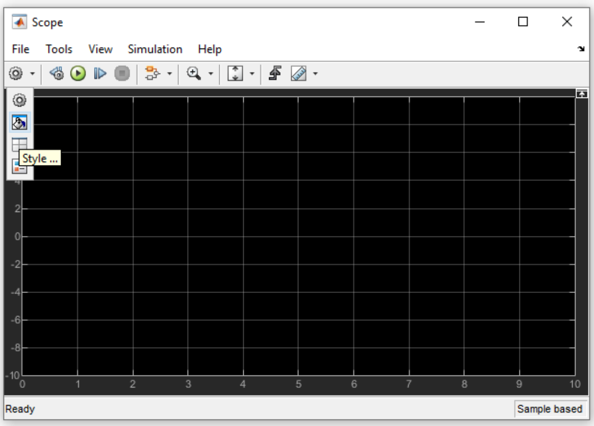
5.5.2 Scope a Floating Scope blok

Scope block slúži na zobrazovanie grafických výstupov riešených simulácií. Tento **Scope** blok sme už podobne ako blok **Display** používali v blokových schémach v predchádzajúcich kapitolách. Teraz sa na tento **Scope** blok pozrieme bližšie a vysvetlíme si všetky možnosti takéhoto grafického zobrazovača. Výsledkom zobrazenia grafov pomocou tohto bloku **Scope** sú grafické výstupy zobrazené v závislosti od času simulácie **t**. Priebehy simulovaných veličín sú zobrazené pre jednotlivé časové kroky, v ktorých bola hodnota danej simulovanej veličiny vypočítaná počas celej simulácie. Príklad jednoduchého default grafického zobrazovača **Scope** je znázornený na nasledujúcom Obr. 5.79.



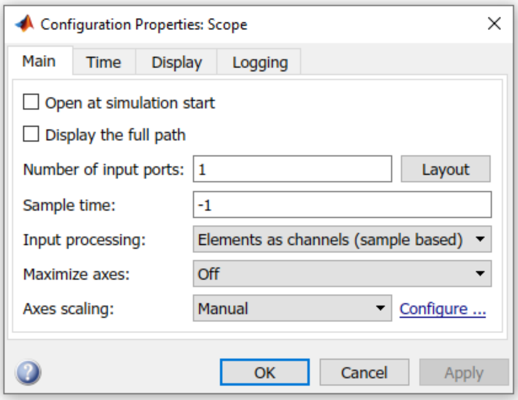
Obr. 5.79. Grafické okno bloku Scope

Ako si môžeme všimnúť, tak na ďalšom Obr. 5.80 v nástrojovej lište sa nachádza viacero príkazov. Kliknutím na prvú ikonu v poradí tzv. **Configuration properties**, získame prístup k rozšíreným nastaveniam grafu. **Configuration properties** slúži k základným nastaveniam grafov, ktorými sú napr. nastavenie počtu grafov, pomenovanie osí týchto grafov, názvov zobrazovaných grafov a ďalšie iné možnosti nastavení. Z tohto nástrojového menu môžeme meniť napr. **štýl grafu** (**Style**), schému zobrazenia viacerých grafov (**Layout**), ako aj zobraziť legendu pre vykresľované signály.



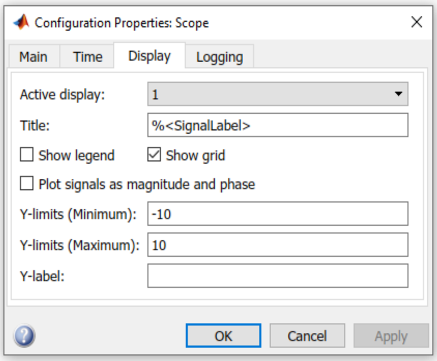
Obr. 5.80. Konfiguračné parametre bloku Scope

Z nástrojového menu je ďalej možno riadiť **spustenie/zastavenie** simulácie, vykonať **priblíženie/oddialenie** grafu (**Zoom**, **Zoom out/in)**, uskutočniť automatické nastavenie rozsahov osí (**Scale X-Axis Limits**, **Scale X & Y Axes Limits**), ako aj uskutočniť nastavenie **Triggerov** (**Triggers**). Posledná ikona pracovnej lišty umožňuje zobraziť nástroj merania veličín na grafe pomocou kurzora (**Cursor measurements**), zobraziť štatistiky signálov (**Signal Statistics**) alebo hľadať extrémy zobrazovaných veličín (**Peak Finder**). Po kliknutí na ikonu **Configuration properties** sa zobrazí konfiguračné okno podľa Obr. 5.81.



Obr. 5.81. Konfiguračné vlastnosti bloku Scope

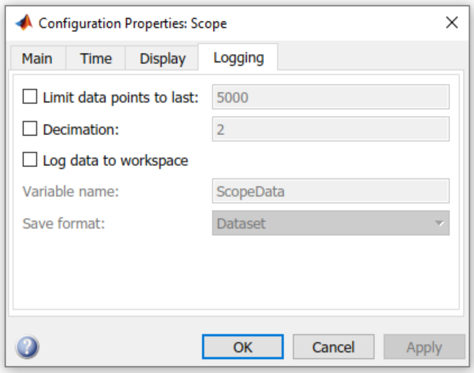
V tomto okne možno nastaviť automatické otváranie grafu, ktorý sa zobrazí po začatí každej simulácie (**Open at simulation start**), ďalej môžeme zvoliť počet vstupných portov pre signály (**Number of input ports**); štandardne je tento počet nastavený na **1 graf**. V tomto menu takisto možno meniť škálovanie osí (**Axes scaling**). Prepnutím **Tab Control** na lištu s názvom **Time**, získame možnosť modifikovať parametre týkajúce sa časovej osi zobrazovaného grafu, na ďalšej lište **Display** získame zase možnosť modifikovať parametre pre **zvislé osi grafov**, pozri Obr. 5.82.



Obr. 5.82. Konfiguračné vlastnosti bloku Scope – Display

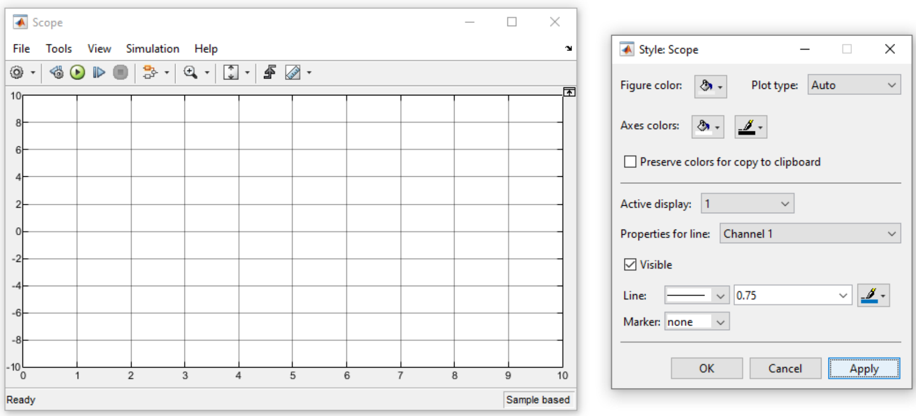
V tomto konfiguračnom okne môžeme pre každý aktívne zvolený graf (**Active display**) zadefinovať názov grafu (**Title**), zobraziť legendu grafu (**Show legend**), resp. nastaviť zobrazenie mriežky grafu (**Show grid**), ako aj meniť rozsahy veličín zobrazovaných na zvislej osi **Y** (**Y-limits Minimum/Maximum**), v neposlednej rade môžeme meniť aj názov tejto osi (**Y-label**).

Posledná lišta s názvom **Logging**, ktorá je zobrazená na Obr. 5.83, umožňuje nastaviť limitovaný počet posledných bodov, ktoré sa zobrazia na grafe (**Limit data points to last**). V tejto lište môžeme takisto nastaviť decimovanie zobrazovaného signálu (**Decimation**), resp. odoslať výstup grafu priamo do základného prostredia **Matlab/Workspace** (pomocou parametra **Log data to workspace** – navolením exportných nastavení, ktorými sú názov premennej a jej exportný formát).



Obr. 5.83. Konfiguračné vlastnosti bloku Scope – Logging

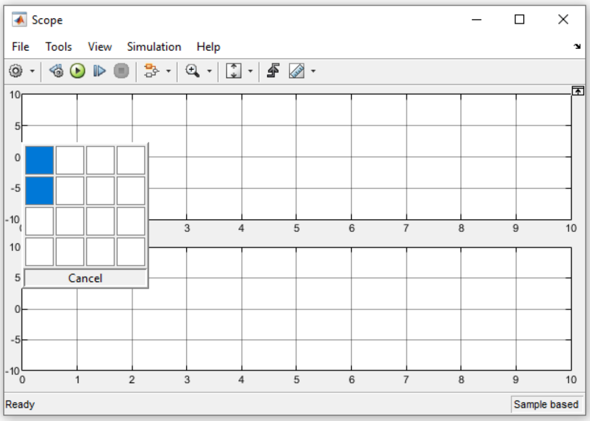
Ďalej sa pozrieme na možnosti nastavovania **štýlov grafov**. Vzhľad grafov a signálov môžeme meniť nastavením parametrov v dialógovom okne s názvom **Style**, ktoré vyvoláme z nástrojového menu **Scope**, pozri Obr. 5.84.



Obr. 5.84. Zmena vzhľadu grafov a signálov – Style

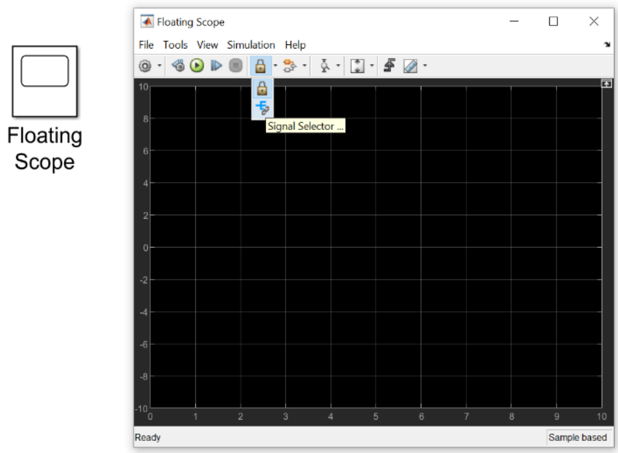
V tomto dialógovom okne **štýlov grafu** možno meniť farbu grafického okna **Figure** (**Figure Color**), štýl grafického zobrazenia (**Plot type**), ktorý môže byť nastavený na **Auto**, **Lines** (čiarový graf), **Stairs** (schodový graf) alebo **Stem** (kmeňový graf). **Simulink** takisto umožňuje nastaviť farbu pozadia grafu (**Axes background color**) a modifikovať farbu jeho mriežky (**Grid colors**). Poznamenajme, že pre každý aktívne zvolený graf a konkrétnu čiaru grafu, môžeme zvoliť typ čiary (**Line**), hrúbku čiary (**Thickness**), ako aj jej farbu (**Line Color**) a taktiež odpovedajúci **Marker**. **Scope block** okrem nastavenia grafického vzhľadu, ktorý takto môžeme nastaviť pre individuálny graf a čiaru signálu, poskytuje možnosť upraviť spôsob zobrazenia viacerých grafov v jednom grafickom okne **Figure**.

Pomocou **Scope bloku** existuje možnosť zobrazovať, buď jeden alebo viacero grafov priamo na jednu časovú os. **Simulink** však okrem tohto spôsobu poskytuje možnosť prostredníctvom grafického zobrazovača **Scope**, zobraziť aj viacero grafov separátne na oddelených osiach. Poznamenajme, že pred zobrazením grafov na rôznych osiach v jednom grafickom okne **Figure**, je nutné zadefinovať zobrazovaciu schému rozloženia grafov, ktorá sa definuje priamo z nástrojového menu tohto bloku – príkazom **Layout**, pozri Obr. 5.85. Nasledujúci obrázok zobrazuje spôsob zadefinovania schémy zobrazenie pre dva grafy pod sebou.



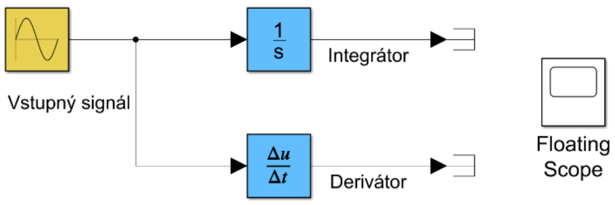
Obr. 5.85. Nastavenie zobrazovacej schémy grafov

Poznamenajme, že na graf môžeme vyslať signály aj **bezkontaktným spôsobom** – použitím tzv. grafu typu **Floating Scope**. V takomto prípade **Simulink** umožňuje vybrať signály, ktoré sa zobrazia na príslušných osiach prostredníctvom tzv. **Signal Selectora** priamo z nástrojovej lišty grafu, pozri Obr. 5.86. Týmto blokom **Signal Selector** existuje možnosť riadiť zobrazovanie jedného alebo viacerých signálov na vybranej osi grafu **Floating Scope**. **Matlab/Simulink** v tomto prípade ponúkne množinu všetkých dostupných signálov z **blokovej schémy**, z ktorých môžeme navoliť požadované signály, ktoré chcem na grafe zobraziť bezkontaktným spôsobom.



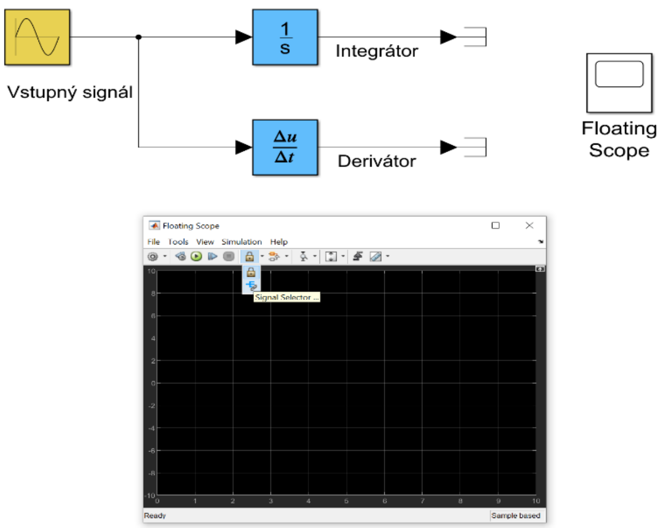
Obr. 5.86. Parametre Floating Scope

Na ďalšom Obr. 5.87 jednoduchej blokovej schémy si vysvetlíme spôsob ako v prípade tejto blokovej schémy odošleme signály bezkontaktným spôsobom na novo vytvorený graf typu **Floating Scope**.



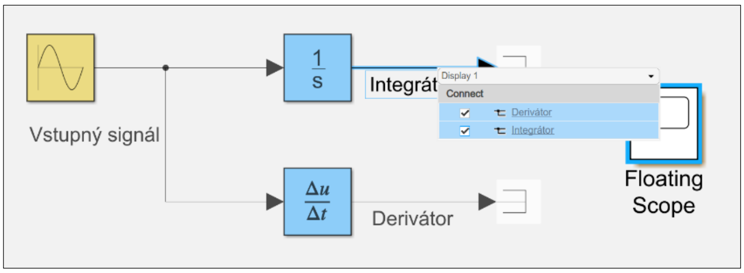
Obr. 5.87. Jednoduchá bloková schéma

Dvoj kliknutím na ikonu **Floating Scope**, otvoríme dialógové okno tohto plávajúceho grafu. V tomto okne pomocou príkazu **Signal Selectora**, ktorý zvolíme z nástrojového menu **Floating Scope**, zobrazíme manažéra na výber signálov z aktuálnej blokovej schémy, pozri Obr. 5.88.



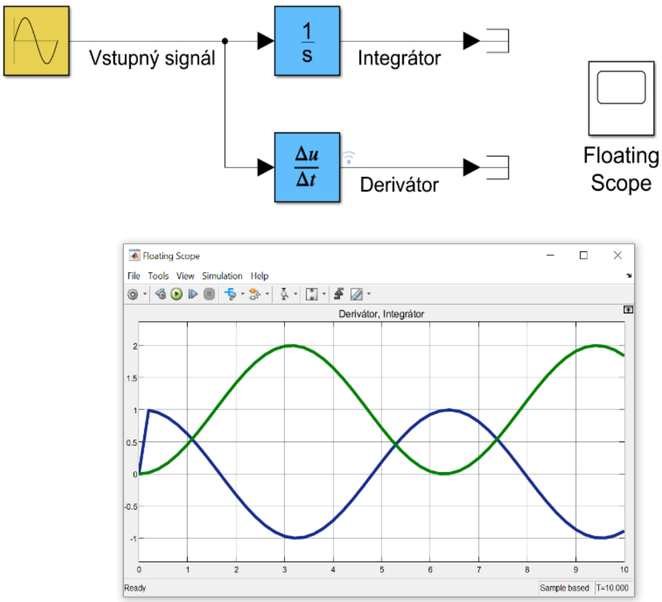
Obr. 5.88. Zobrazenie Signal Selectora

Použitím tohto **Signal Selectora** potom pomocou kurzoru myši zvolíme a označíme, ktoré z vybraných čiar (**wires**) chceme zobraziť na príslušných osiach existujúcich grafov (**Display**), pozri Obr. 5.89.



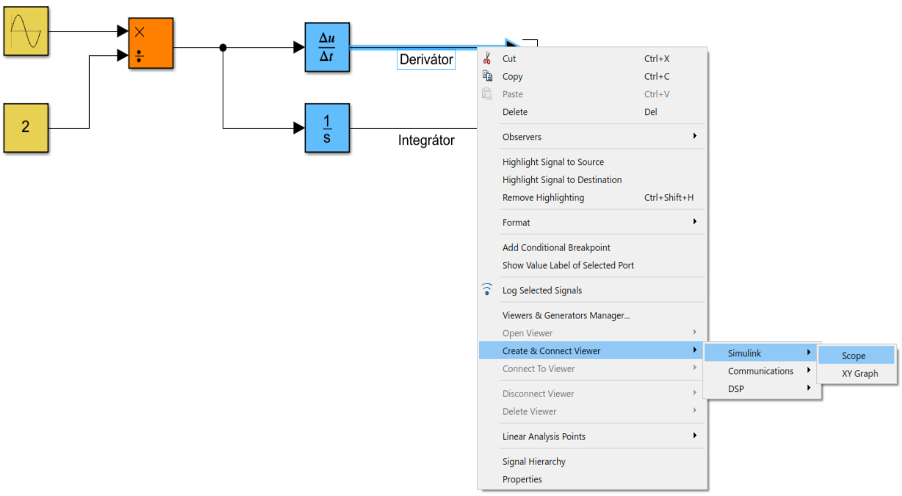
Obr. 5.89. Použitie Signal Selectora na výber signálov

Výsledok použitia **Signal Selectora** na výber signálov pre príslušné osi grafu jedného **Floating Scope** je znázornený na ďalšom Obr. 5.90.



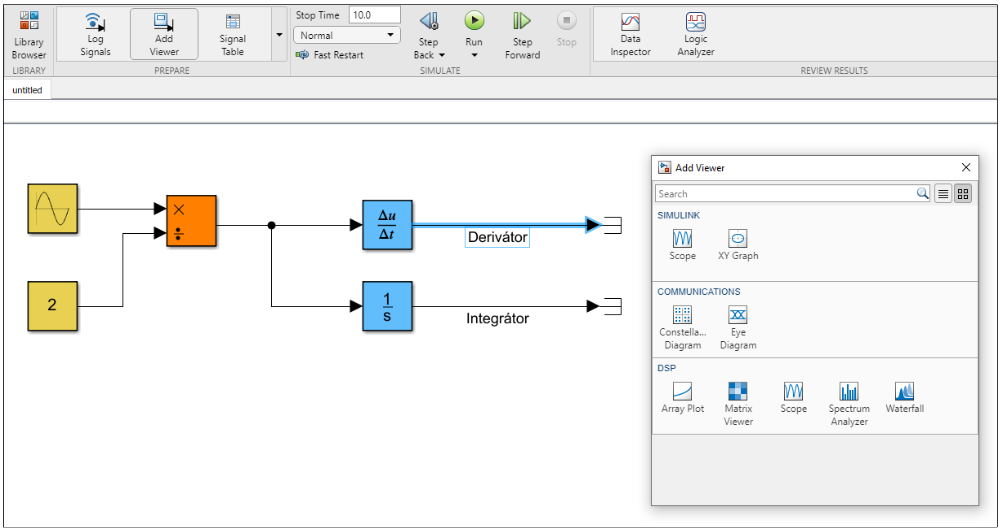
Obr. 5.90. Výsledok zobrazenia signálov pomocou Floating Scope

Medzi ďalšie možnosti **bezkontaktného zobrazenia signálu** na grafe, môžeme zaradiť napr. vytvorenie **Viewera**, grafického zobrazovača, ktorý vytvoríme priamo na sledovanom signály (**wire**) resp. možnosť logovania signálu metódou **Log Signal Data**. Týmto spôsobom môžeme sledovať hodnotu veličiny, ktorá preteká monitorovaním miestom kanála (**wire**) na osi novovytvoreného **Viewera** (grafický zobrazovač typu sondy). Poznamenajme, že ak už v projekte existuje nejaký vytvorený **Viewer**, potom možno tento signál odoslať na ľubovoľne zvolenú os takéhoto existujúceho zobrazovača. **Viewer** možno vytvoriť pomocou príkazu **Create & Connect to Viewer** z kontextového menu (kliknutím pravého tlačítka na daný signál, ktorého hodnotu chceme sledovať), pozri Obr. 5.91.



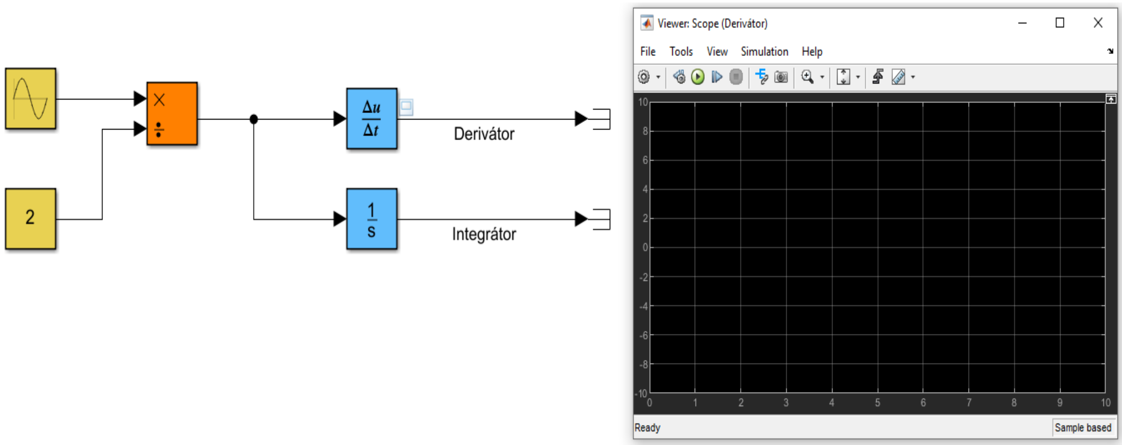
Obr. 5.91. Spôsob vytvorenia Viewera

Druhým spôsobom ako zadefinovať **Viewer** na požadovanom signály, je možnosť pridať **Viewer** použitím príkazu **Add Viewer**, ktorý vyvoláme priamo z nástrojového menu (označením tohto požadovaného signálu, kliknutím na príkaz **Add Viewer** a následne výberom požadovaného typu grafu z ponúkaného menu grafov napr. **Scope**), pozri Obr. 5.92.



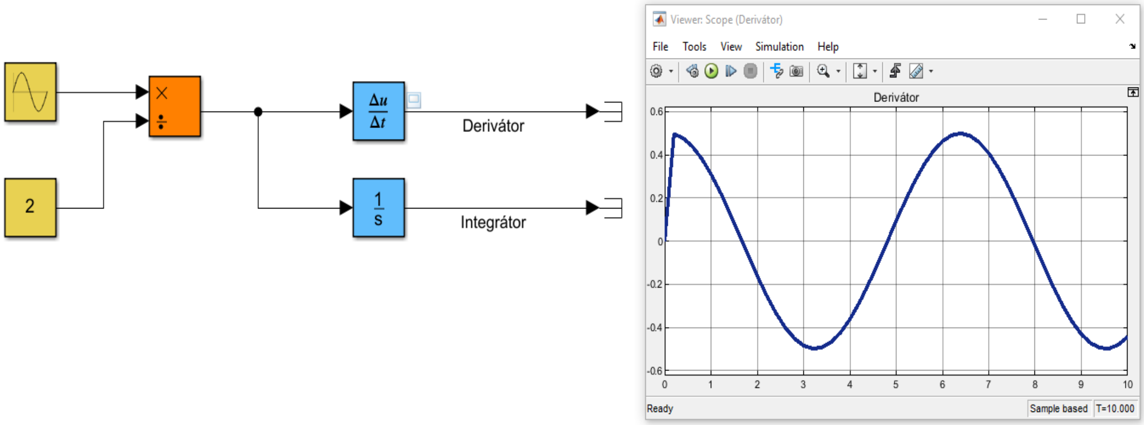
Obr. 5.92. Druhý spôsob vytvorenie Viewera – pomocou príkaz Add Viewer

Výsledkom takto uskutočnenej operácie prvým alebo druhým spôsobom, je vytvorenie nového **Viewera** s jednou časovou osou, pozri Obr. 5.93.



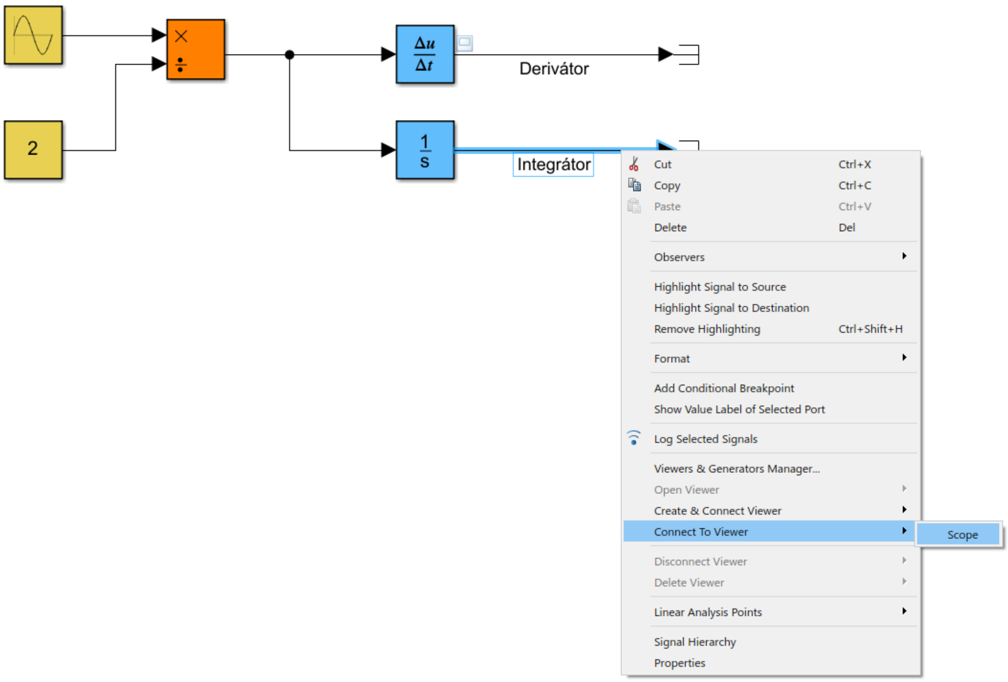
Obr. 5.93. Výsledok vytvorenia Viewera

Na predchádzajúcom Obr. 5.93 je zobrazený jeden **Viewer** s jednou časovou osovou. Takto vytvorený **Viewer** môžeme ďalej upravovať podobným spôsobom, aký sme si vysvetľovali v prípade jednoduchého **Scope** alebo **Floating Scope**. V prípade tohto **zobrazovača** existuje možnosť meniť napr. vzhľad grafu pomocou menu **Style**, resp. nastavovať ďalšie iné rozšírené vlastnosti prostredníctvom menu **Configuration Properties**, pozri Obr. 5.94.

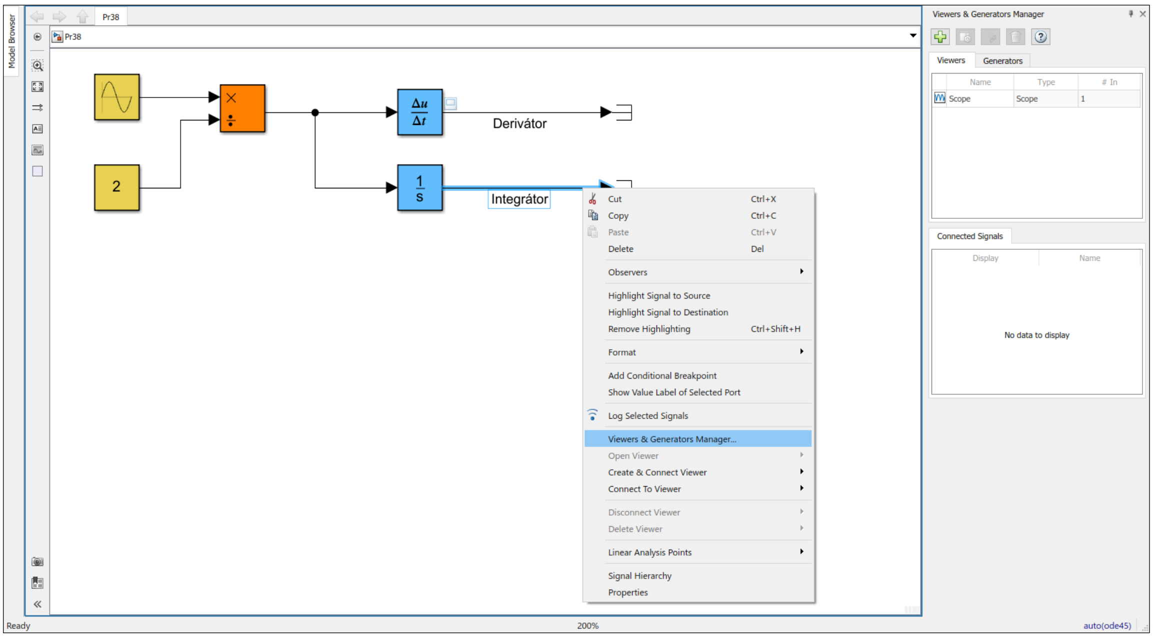


Obr. 5.94. Zobrazenie Viewera po úprave vzhľadu

Takýmto spôsobom môžeme do jednej blokovej schémy pridať požadovaný počet **Viewerov**, ktoré sa zobrazujú priamo nad signálmi v podobe ikony **Scope**, pozri Obr. 5.93 a Obr. 5.94. Kliknutím na tieto ikony, potom možno takto vytvorené plávajúce grafy zobraziť. Pripomeňme, že ak už v blokovej schéme existuje nejaký vytvorený **Viewer**, potom na tento **Viewer** môžeme odoslať signál z ľubovoľného iného kanála (**wire**). Na pripojenie ďalšieho kanála k už existujúcemu **Vieweru** použijeme buď príkaz **Connect to Viewer**, ktorý vyvoláme z kontextového menu (pravým kliknutím na signál), alebo použijeme príkaz **Viewers & Generators Manager** (z kontextového menu), čím zobrazíme okno manažéra pre organizáciu **Viewerov** a **Generátorov signálov**, pozri Obr. 5.95 a Obr. 5.97.

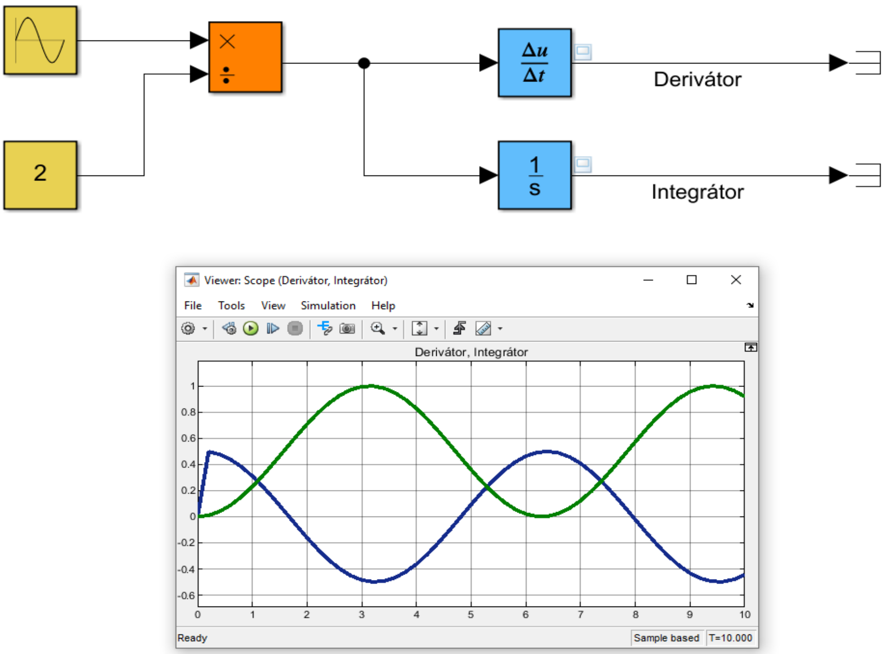


Obr. 5.95. Spôsob pripojenia signálu k existujúcemu Vieweru



Obr. 5.97. Zobrazenie manažéra Viewers & Generators

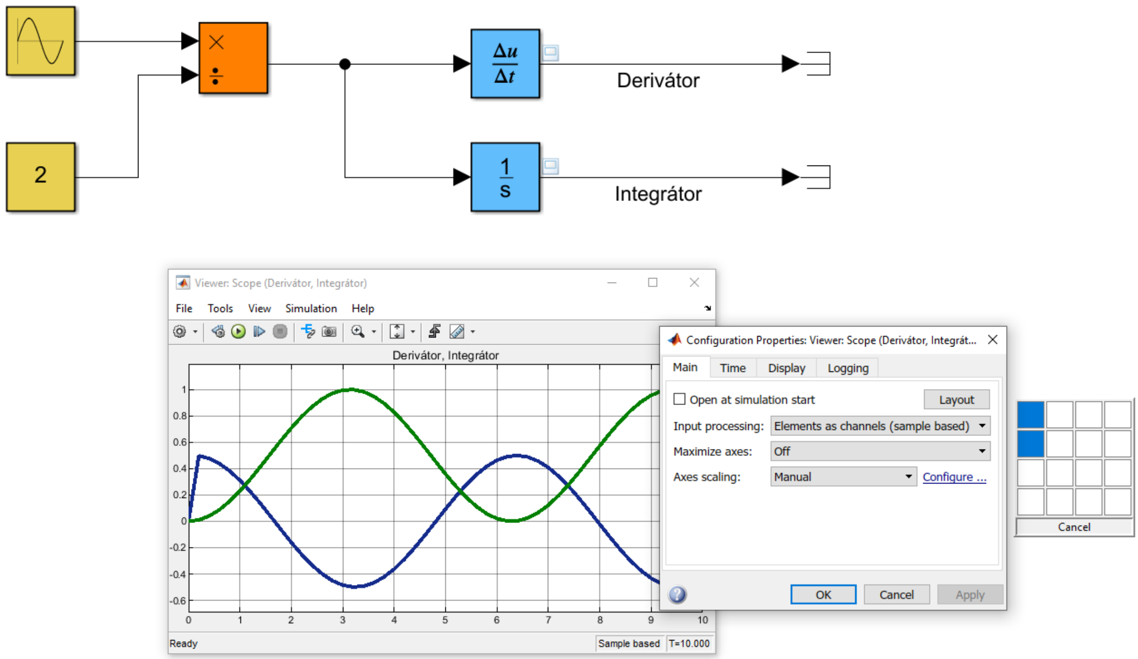
Matlab/Simulink ponúkne na výber zo všetkých existujúcich grafov a osí, na ktoré možno požadovaný signál pripojiť. Výsledok pripojenia signálu k **Vieweru**, ktorý bol vykonaný použitím príkazu **Connect to Viewer**, je znázornený na ďalšom Obr. 5.96.



Obr. 5.96. Výsledok zobrazenia dvoch signálov na jednom Viewery

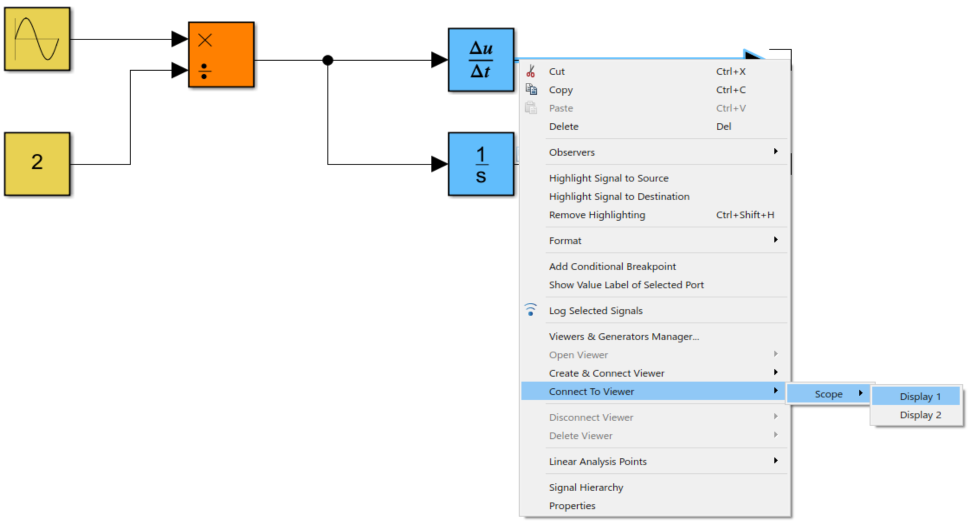
Ako možno vidieť na Obr. 5.96, tak signály, ktoré sme vyslali na jeden **Viewer** sa automaticky zobrazujú na jednej časovej osi. Aby bolo možné zobraziť tieto grafy na individuálnych osiach, je nutné najskôr na tomto **Viewery** nakonfigurovať schému rozloženia grafov (**Layout**).

Schému rozloženia grafov (**Layout**) môžeme meniť priamo z menu **Configuration Properties** daného **Viewera**, kliknutím na tlačítko **Layout** a následne zvolením schémy požadovaného tvaru rozloženia grafov, pozri Obr. 5.98. Takýmto spôsobom možno zobraziť schému maximálne **4 x 4** grafov.



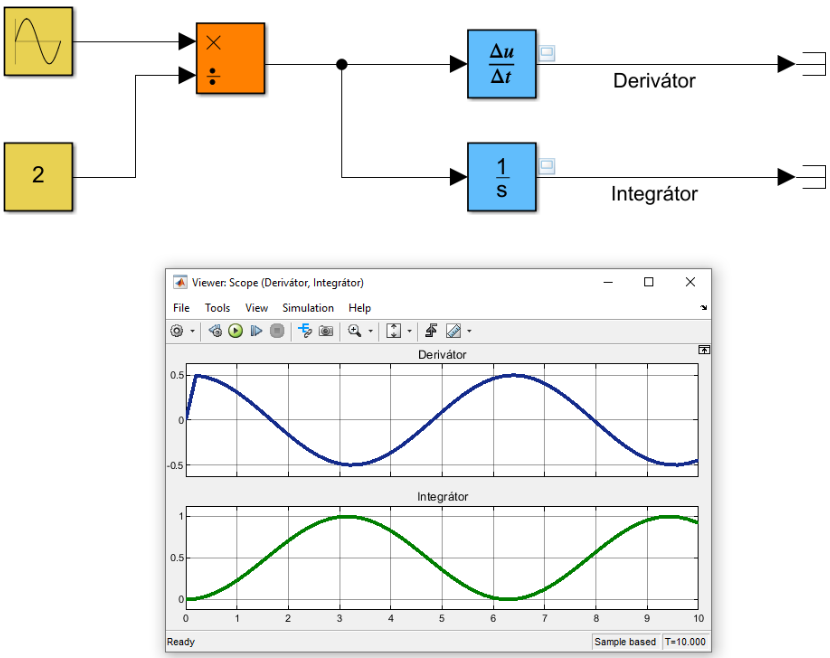
Obr. 5.98. Spôsob zmeny schémy rozloženia grafov pre daný Viewer

Nastavením tvaru schémy rozloženia grafov možno zobrazenie daných signálov na jednotlivé osi riadiť pomocou príkazu **Connect To Viewer/Disconnect Viewer**, pozri Obr. 5.99. Ak teda použijeme príkaz **Connect to Viewer**, potom **Simulink** po výbere existujúceho **Scope** poskytne možnosť zvoliť konkrétnu os (**Display**), ku ktorej možno signál pripojiť. Použitím príkazu **Disconnect Viewer** môžeme aktuálne pripojený signál k niektorej z osí manuálne odpojiť, pozri Obr. 5.99.



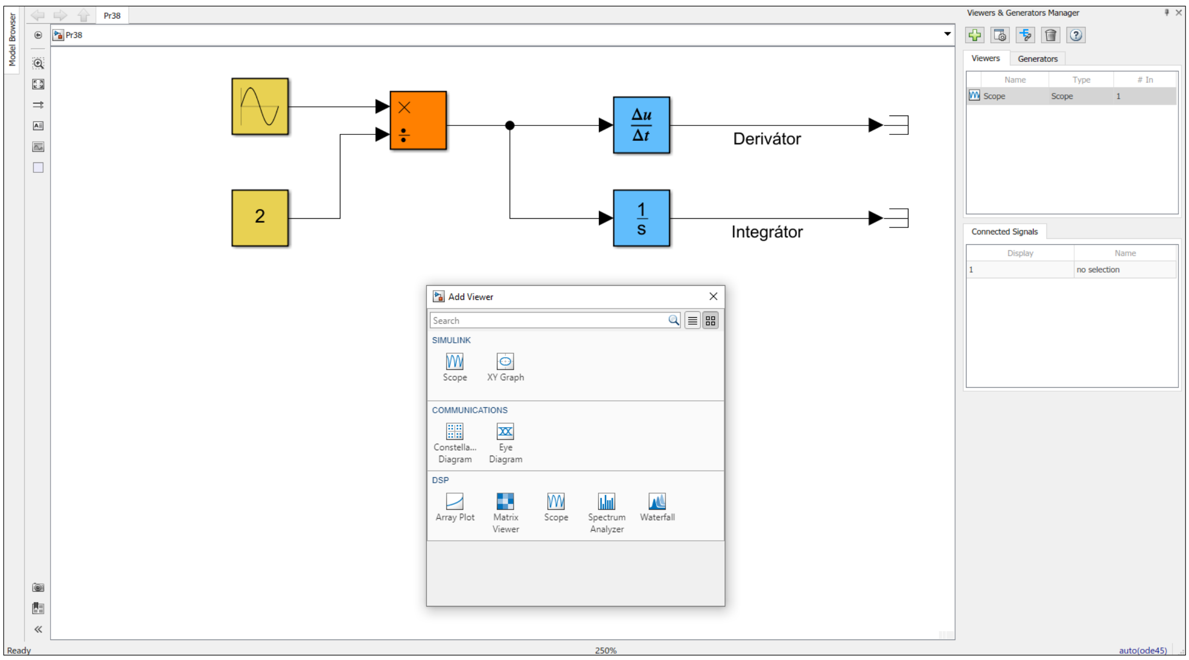
Obr. 5.99. Spôsob pripojenia signálu k existujúcej osi Viewera

Výsledok modifikácie prerozdelenia grafov na jednotlivé osi existujúceho **Viewera** môžeme vidieť na nasledujúcom Obr. 5.100.



Obr. 5.100. Výsledok zobrazenia grafov na osiach Viewera

Pripomeňme, že podobnú operáciu môžeme uskutočniť taktiež použitím manažéra **Viewers & Generators**. V tomto prípade nové grafy napr. typu **Scope** pridávame kliknutím na ikonu tvaru plus, čo vyvolá menu **Add Viewer**. Z tohto menu volíme požadované typy grafov.

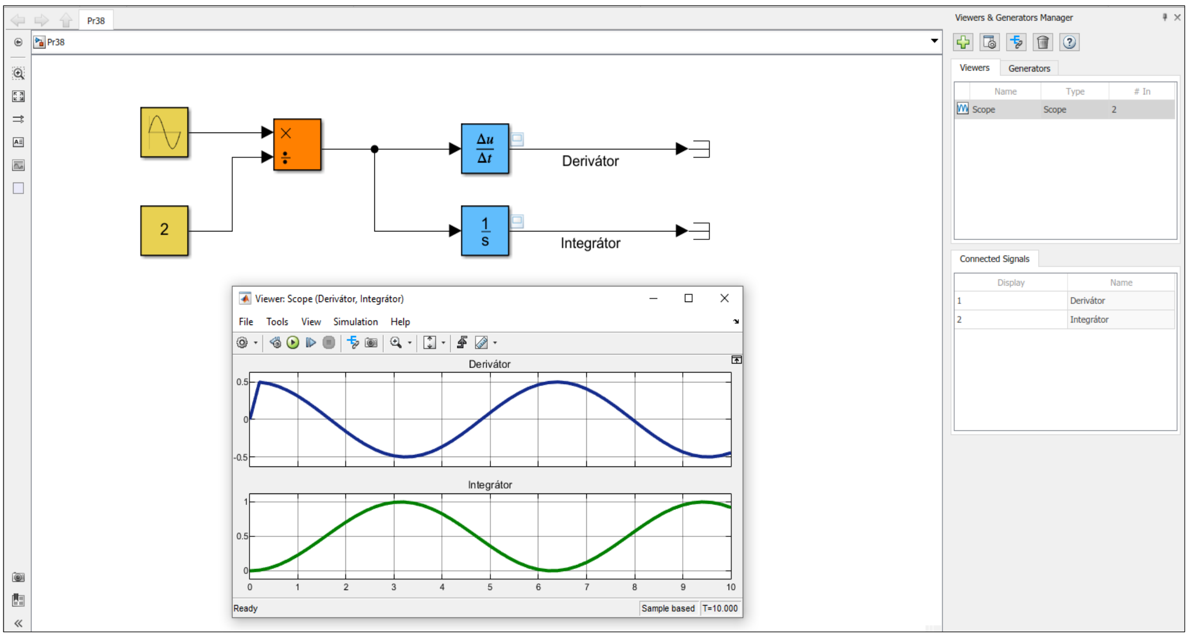


Obr. 5.101. Vytvorenie grafu pomocou Viewer manažéra

Navolený graf sa následne zaradí do skupiny grafov v okne manažéra grafov. V hornom okne sa zobrazujú aktuálne pridané **Scope** v danej blokovej schéme a v dolnom okne sa po kliknutí na vybraný **Scope** (v tomto manažérovi **Viewerov**), zobrazia aktuálne pripojené signály. Postup vytvorenia nového **Scope** môžeme slovne popísať nasledovnými krokmi. Klikneme na **ikonu plus**, vyberieme typ grafického zobrazovača napr. **Scope**, na ktorom chceme zobraziť požadované grafy, napokon vytvorený graf sa zobrazí v hornom okne manažéra, pozri Obr. 5.101.

Momentálne nie je danému **Scope** priradený žiadny signál na zobrazenie. Parametre každého **Scope** v manažérovi zobrazovačov môžeme meniť pomocou príkazu z nástrojového menu – **Open parameters for Selection**. Pomocou tohto príkazu zadefinujeme schému pre dva grafy nad sebou a týmto nadefinovaným funkčným osiam priradíme prislúchajúce signály na zobrazenie z aktuálnej blokovej schémy. Signály zadefinujeme a priradíme jednotlivým osiam pomocou ďalšieho príkazu z tohto menu – **Modify Signal Connections**.

Postup priradenia signálov jednotlivým osiam možno opísať nasledovnými krokmi. Klikneme na ikonu **Modify Signal Connections**, vyberieme ľubovoľný signál, ktorý chceme zobraziť na grafe; zobrazí sa **Connect** manažér. V tomto **Connect** manažéri ďalej zvolíme aktívnu os (**Display**) na zobrazenie signálu, ktorá prislúcha aktívne zvolenému grafu **Scope**; následne zaškrtnutím signálu v menu vyberieme signál, ktorý požadujeme na tejto osi zobraziť. Výsledok priradenia signálov **Integrátor** a **Derivátor** dvom osiam grafu **Scope** je znázornený na Obr. 5.102.

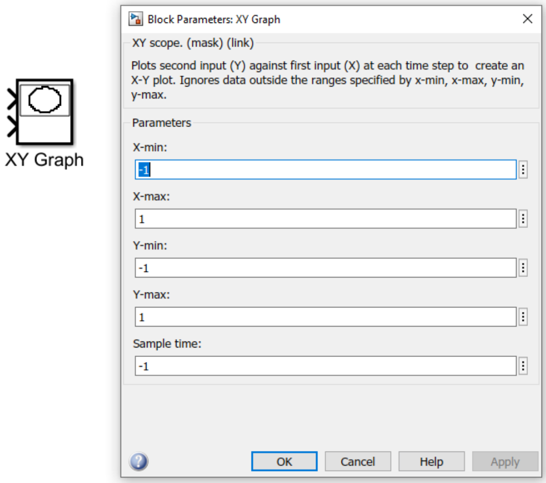


Obr. 5.102. Výsledok priradenia signálov osiam pomocou manažéra

Pripomeňme, že všetky signály, ktoré boli priradené jednotlivým osiam pomocou prvého alebo druhého postupu, možno kedykoľvek **modifikovať** a taktiež **zmazať**. Napr. použitím príkazu **Delete Viewer** (v kontextovom menu) alebo **Delete Viewer or Generator** (v manažérovi Viewerov).

5.5.3 XYGraph blok

Do tohto bodu sme venovali svoju pozornosť grafickým zobrazovačom **Scope** a **Floating Scope**. Ako už vieme, tak tieto bloky z knižnice **Sources** umožňujú zobrazovať funkcie časovo závislé od času simulácie $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{t})$. Teraz sa zameriame na **XYGraph blok**, ktorý je ďalším z rady grafických zobrazovacích nástrojov z knižnice **Sinks**. Tento typ grafického zobrazovača umožňuje vykresľovať funkcie $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, t. j. funkčné závislosti $\mathbf{x}$ na $\mathbf{y}$. Parametre **XYGraph** bloku sú zobrazené na Obr. 5.103.

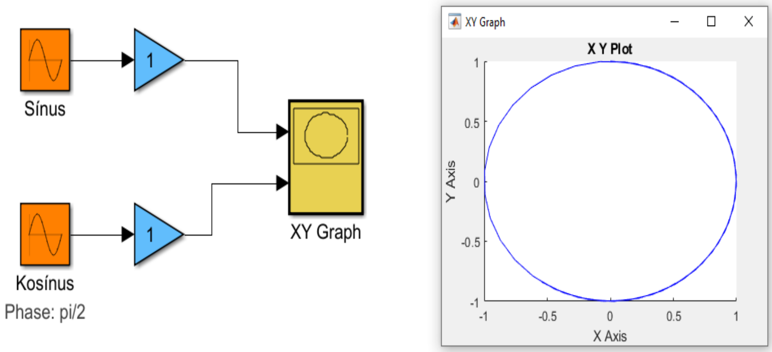


Obr. 5.103. Parametre XYGraph

Bloková schéma použitia bloku **XYGraph** pre vykreslenie kružnice s polomerom **R = 1 m** je znázornená na Obr. 5.104. Na modelovanie systému kružnice boli použité tieto parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \sin t\,, \\ y &= R \cdot \cos t\,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

kde $\mathbf{R} = \mathbf{1}$ je polomer kružnice a $\mathbf{t}$ je aktuálny čas simulácie.



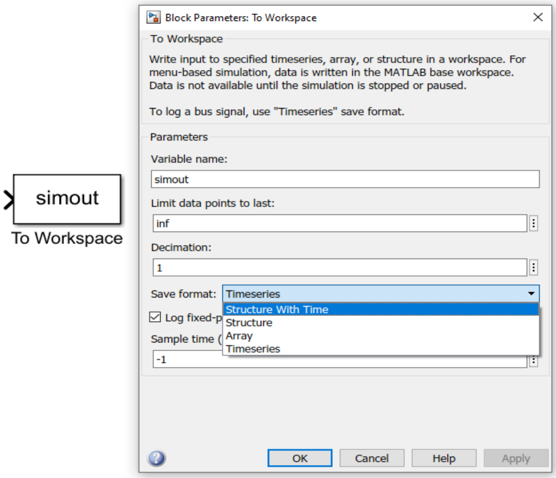
Obr. 5.104. Bloková schéma pre vykreslenie kružnice

5.5.4 To Workspace blok

V niektorých prípadoch je nutné po vykonaní simulácie spracovať dáta ďalej v základnom prostredí **Matlabu**, napr. prostredníctvom skriptu. **Simulink** umožňuje takýto export dát do základného prostredia **Matlabu** použitím bloku **To WorkSpace**. Tento blok je zaradený do knižnice **Sinks**. V prípade uskutočnenia exportu dát do **WorkSpace Matlabu** je nutné zvoliť názov premennej a takisto nakonfigurovať formát uloženia dát. V tomto funkčnom bloku **To WorkSpace** môžeme zvoliť tieto štyri dátové formáty:

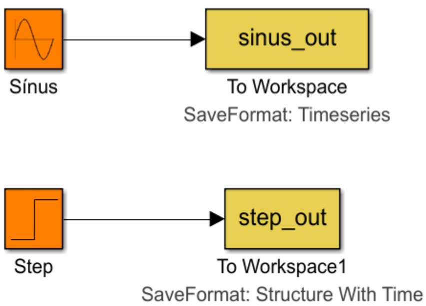
- **Structure with time**: export dát vo formáte štruktúry **Matlabu** s časovým vektorom simulácie,
- **Structure**: export dát vo formáte štruktúry **Matlabu** bez časového vektora simulácie,
- **Array**: export dát do formátu tvaru jednoduchého číselného poľa,
- **TimeSeries**: špeciálny dátový formát **Matlabu** s časovým vektorom simulácie.

Parametre bloku **To WorkSpace** v podobe dialógového okna sú zobrazené na Obr. 5.105.



Obr. 5.105. Parametre bloku To WorkSpace

Príklady exportu dát v podobe blokovej schémy použitím bloku **To WorkSpace** sú zobrazené na ďalšom Obr. 5.106.



Obr. 5.106. Príklady použitia bloku To WorkSpace

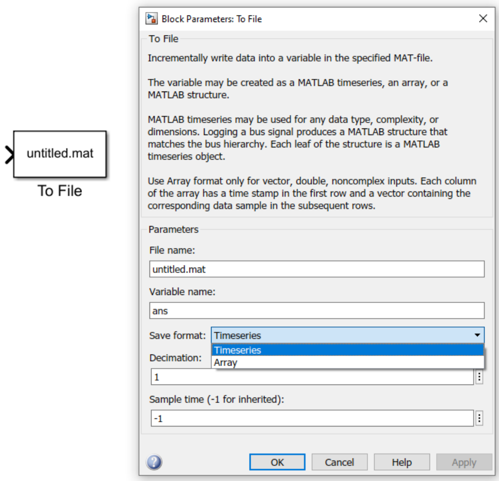
5.5.5 To File blok

V predchádzajúcej podkapitole sme si vysvetlili postup ako exportovať dáta v podobe premenných do základného prostredia **Matlabu**. Teraz si ukážeme, ako môžeme vypočítané dáta po vykonaní simulácie v **Simulinku** uložiť do dátového súboru. Na ukladanie dát zo **Simulinku** môžeme využiť blok **To File**, ktorý je ďalším funkčným blokom knižnice **Sinks**. Tento blok exportuje dáta zo **Simulinku** a ukladá ich do dátového súboru typu **Mat-File** (súboru s príponou **.mat**).

Poznamenajme, že pri ukladaní dát použitím tohto bloku **To File**, je nutné zvoliť názov súboru a takisto názov výstupnej premennej. Podobne ako v prípade bloku **To WorkSpace**, aj v tomto prípade je teda nevyhnutné zvoliť formátu uloženia dát. **To File** blok dovoľuje voliť medzi dvomi typmi formátov:

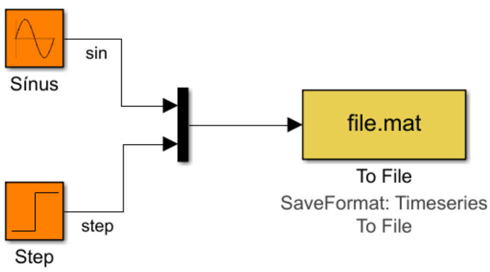
- **TimeSeries**: špeciálny dátový formát **Matlabu** s časovým vektorom simulácie,
- **Array**: export dát do formátu tvaru jednoduchého číselného poľa.

Parametre bloku **To File** v podobe dialógového okna sú zobrazené na ďalšom Obr. 5.107.



Obr. 5.107. Parametre bloku To File

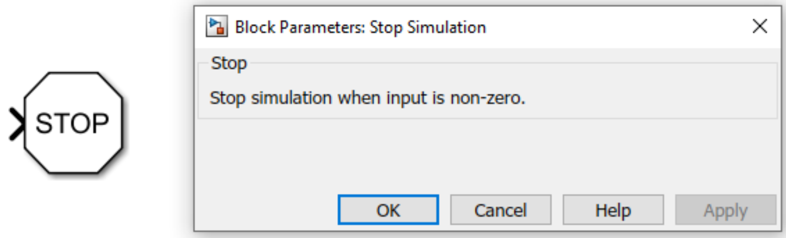
Príklad uloženia dát do súboru typu **Mat-File** v podobe blokovej schémy použitím bloku **To File** je zobrazený na Obr. 5.108.



Obr. 5.108. Príklad použitia bloku To File

5.5.6 Stop Simulation blok

Posledným blokom z knižnice **Sinks**, ktorým sa budeme zaoberať, je **Stop Simulation blok**. Tento blok umožňuje **zastaviť priebeh simulácie** v okamihu, keď je na vstup tohto bloku prevedená nenulová hodnota signálu. Častejšie sa však ten blok zvykne používať v kombinácií s **relačnými operátormi**, ktorých výstupom je hodnota **True (1)** alebo **False (0)**. V tomto prípade dochádza k zastaveniu behu simulácie, ak hodnota **relačného operátora** nadobudne logickú hodnotu **True (1)**. Tento simulačný blok, ktorého dialógové okno parametrov je znázornené na nasledujúcom Obr. 5.109, nevyžaduje pri jeho použití zadanie žiadnych dodatočných parametrov.



Obr. 5.109. Parametre bloku Stop Simulation

5.6 ZÁKLADNÉ SPOJENIA BLOKOVÝCH DIAGRAMOV

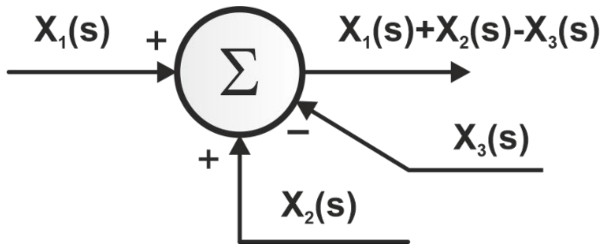
Už vieme, že **blokový diagram (bloková schéma)** je model, ktorý reprezentuje simulovaný dynamický systém a je náhradou matematického modelu, ktorý tento systém opisuje. Vo všeobecnosti **blokový diagram** (schéma) je logické a funkčné spojenie dvoch alebo viacerých blokov, ktoré sa navzájom ovplyvňujú. **Blokové diagramy** nemusia pozostávať vždy len z jednoduchých funkčných blokov, ale súčasťou **blokových schém** môžu byť aj **Subsystémy**, ktoré predstavujú zjednodušenia zložitých častí blokových schém. Poznamenajme, že prakticky každá zložitá **bloková schéma**, alebo jej súčasť, sa dá zjednodušiť na jeden **ekvivalentný Subsystém**. Proces **zjednodušovania** (**redukcie**) blokových schém spočíva v identifikácií a nájdení troch základných spojení, medzi ktoré radíme:

- sériové spojenie blokov,
- paralelné spojenie blokov,
- spätnoväzobné spojenie blokov.

V tejto kapitole si vysvetlíme princíp ako redukovať zložité tvary **blokových schém** na **Subsystémy**, ktoré po zredukovaní (úprave) budú predstavovať výslednú ekvivalentnú **prenosovú funkciu systému** celej pôvodnej **blokovej schémy**. Princíp úpravy a **redukcie blokovej schémy** bude spočívať v postupnej úprave a zjednodušovaní blokovej schémy, t. j. postupným nahrádzaním častí schémy jej ekvivalentnými blokmi, ktoré predstavujú jeden z troch predchádzajúcich spojení. Tento proces budeme opakovať až do bodu, kedy celá bloková schéma bude predstavovať jeden **Subsystém** v tvare prenosovej funkcie, ktorú matematicky opíšeme pomocou matematických operácií.

5.6.1 Súčtový člen

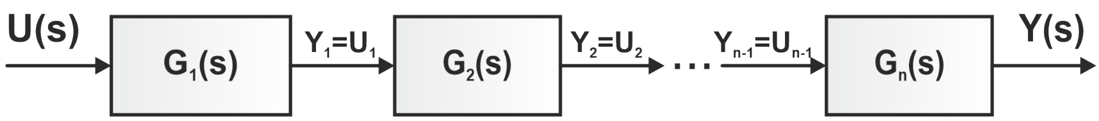
Súčtový člen je jedným z veľmi často vyskytujúcich sa členov blokových diagramov. Výstup **súčtového člen** (**uzla**) je daný algebrickým **súčtom** (**rozdielom**) signálov, ktoré do tohto člena vstupujú. Každý signál je definovaný **kladným** alebo **záporným** znamienkom, pozri Obr. 5.110. **Súčtový člen** môže mať konečný počet vstupným portov, ale vždy iba jeden výstupný port.



Obr. 5.110. Súčtový člen

5.6.2 Sériové spojenie blokov

Sériové spojenie blokov je taký typ väzby, pri ktorej výstupná veličina predchádzajúceho bloku je vždy vstupnou veličinou nasledujúceho bloku, pozri Obr. 5.111.



Obr. 5.111. Sériové spojenie blokov

Obrazový prenos **sériovej štruktúry** v Laplaceovom tvare, ktorá je zobrazená na Obr. 5.111, môžeme matematicky opísať týmto spôsobom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \dots G_n(s)\,. \tag{5.16}$$

Príklad č. 5.4.

Uvažujme dva bloky zapojené v sériovej väzbe s týmito prenosovými funkciami

$$G_1(s) = \frac{1}{2s+3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+1}{s^2+s+3}\,,$$

nájdite výslednú prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$, ktorá je ekvivalentnou náhradou daného spojenia blokov.

Riešenie:

Pre výslednú prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$, ktorá je ekvivalentnou náhradou **sériového spojenia dvoch blokov**, platí, že je daná súčinom prenosových funkcií $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{0.5s + 0.5}{s^3 + 2.5s^2 + 3.5s + 3}. \tag{5.17}$$

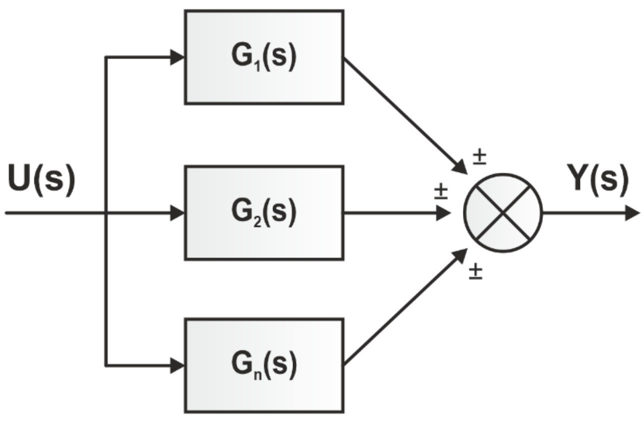
Prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$ pre zadefinované prenosové funkcie systémov možno vypočítať v **Matlabe** nasledujúcim skriptom.

```
clc
clear

g1s=tf([1],[2 3]);
g2s=tf([1 1],[1 1 2]);
gs=series(g1s, g2s)

gs=g1s*g2s;
gs=minreal(gs)
```

Výsledkom riešenia predchádzajúceho skriptu v **Matlabe** je identická prenosová funkcia, ktorú sme odvodili vzťahom (5.17). Ako si možno všimnúť, tak v tomto skripte sme použili príkaz **series**, ktorý slúži na výpočet prenosovej funkcie **sériového spojenia** dvoch blokov prenosových funkcií. Tento príkaz môžeme nahradiť matematickou operáciou násobenia týchto dvoch prenosových funkcií. Pripomeňme, že ak na výpočet prenosovej funkcie použijeme jednoduché matematické operácie, potom pre zjednodušenie výslednej prenosovej funkcie je nutné aplikovať príkaz **minreal**.

5.6.3 Paralelné spojenie blokov

Paralelné spojenie blokov je taký typ väzby, pri ktorej vstupná veličina je rovnaká pre všetky bloky a výstupné veličiny jednotlivých blokov, sa buď **sčítavajú** alebo **odčítavajú**, pozri Obr. 5.112.



Obr. 5.112. Paralelné spojenie blokov

Obrazový prenos takejto **paralelnej štruktúry** môžeme matematicky zapísať týmto spôsobom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \pm G_1(s) \pm G_2(s) \ldots \pm G_n(s) \ . \tag{5.18}$$

Príklad č. 5.5.

Uvažujme dva bloky zapojené v **sériovej väzbe**, ktoré sú definované prenosovými funkciami $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$

$$G_1(s) = \frac{3}{s+1}, \qquad G_2(s) = \frac{2s+1}{s^2+2} \ .$$

Nájdite prenosovú funkciu $\mathbf{G(s) = G_1(s) + G_2(s)}$, ktorá je ekvivalentnou náhradou daného paralelného spojenia takýchto dvoch blokov.

Riešenie:

Pre výslednú prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$, ktorá je ekvivalentnou náhradou paralelného spojenia dvoch blokov, platí, že je daná súčtom prenosových funkcií $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) = \frac{5s^2 + 3s + 7}{s^3 + s^2 + 2s + 2} \ . \tag{5.19}$$

Prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$ pre zadefinované prenosové funkcie systému vypočítame v **Matlabe** nasledujúcim skriptom.

```
clc
clear

g1s=tf([3],[1 1]);
g2s=tf([2 1],[1 0 2]);
gs=parallel(g1s, g2s)

gs=g1s+g2s;
gs=minreal(gs)
```

Výsledkom riešenia predchádzajúceho skriptu v **Matlabe** je identická prenosová funkcia, ktorú sme odvodili vzťahom (5.19). Ako si možno všimnúť, tak v tomto skripte sme použili príkaz **parallel**, ktorý slúži na výpočet prenosovej funkcie **paralelného spojenia** dvoch blokov prenosových funkcií. Tento príkaz môžeme nahradiť jednoduchou matematickou operáciou **súčtu/rozdielu** prenosových funkcií. Pripomeňme, že aj v tomto prípade, sme v závere skriptu na výpočet použili jednoduché matematické operácie, a teda bolo nutné pre zjednodušenie výslednej prenosovej funkcie aplikovať príkaz **minreal**.

5.6.4 Integrovanie signálu

Predpokladajme signál $\mathbf{u(t)}$, ktorý je integrovaný od počiatočného času $\mathbf{t = 0}$ po jeho ľubovoľnú konečnú hodnotu $\mathbf{t}$. Matematicky zapísané v tvare

$$y(t) = \int_0^t u(t)\, dt \ . \tag{5.20}$$

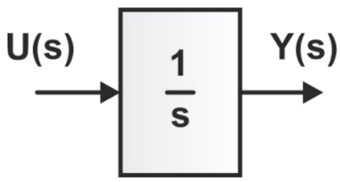
Ak teraz využijeme a aplikujeme nasledovnú vlastnosť **Laplaceovej transformácie**, ktorá je platí pre funkciu $\mathbf{u(t)}$, ktorá je integrovaná podľa času $\mathbf{t}$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u(t)\, dt\right\} = \frac{1}{s} \cdot U(s) \ , \tag{5.21}$$

na predchádzajúcu rovnicu (5.20), potom pre **prenosovú funkciu integrátora** bude platiť, že

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \ . \tag{5.22}$$

Spojitý integrátor, ktorého definíciu sme si takto odvodili, je veľmi dôležitým prvkom blokových schém. Používa sa veľmi často v blokových schémach na spojité integrovanie signálov. **Spojitý integrátor** je vo všeobecnosti definovaný jednoduchým blokom prenosovej funkcie tvaru $\mathbf{\frac{1}{s}}$ a jeho schematická značka má tvar podľa Obr. 5.113.

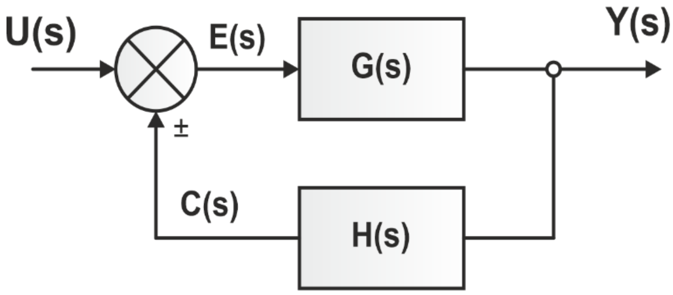


Obr. 5.113. Spojitý Integrátor

5.6.5 Spätnoväzobné spojenie

Nasledujúci Obr. 5.114 zobrazuje regulačný obvod alebo spätnoväzobné spojenie (z angl. **feedback**). Vstupom do tejto štruktúry je signál $\mathbf{U(s)}$, zatiaľ čo výstup $\mathbf{Y(s)}$ je privedený ako vstupný signál do bloku $\mathbf{H(s)}$, ktorého výstup $\mathbf{C(s)}$ je ďalej porovnaný v súčtovom člene so vstupným signálom $\mathbf{U(s)}$, ktorý je taktiež privedený ako vstupný signál do tohto súčtového člena. Chybový signál $\mathbf{E(s)}$, ktorý je výstupom zo súčtového člena, je definovaný ako $\mathbf{E(s) = U(s) - C(s)}$ a ďalej privedený ako vstupný signál do nasledujúceho bloku prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$.

Nakoľko v **súčtovom člene** podľa Obr. 5.114 sú vstupné signály navzájom odčítavané, tento typ spätnej väzby nazývame **zápornou spätnou väzbou**.

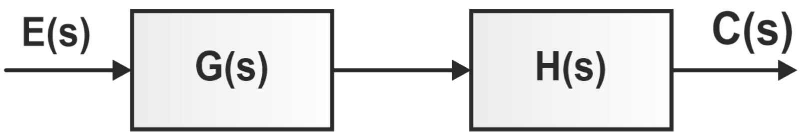


Obr. 5.114: Schematické znázornenie zápornej spätnej väzby

V tomto prípade **spätnej väzby** podľa Obr. 5.114 existujú dve prenosové funkcie uzavretého regulačného obvodu. Prvou z týchto **prenosových funkcií** je prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ hornej vetvy spätnej väzby, ktorá je definovaná touto prenosovou funkciou

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{E(s)}} \ . \tag{5.23}$$

Druhou **prenosovou funkciou** tohto regulačného obvodu podľa Obr. 5.114 je prenosová funkcia, definovaná pre **otvorený regulačný obvod** podľa Obr. 5.115.



Obr. 5.115: Otvorený regulačný obvod

Prenosová funkcia, ktorá platí pre otvorený regulačný obvod podľa Obr. 5.115, je daná vzťahom

$$\frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{E(s)}} = \mathrm{G(s)} \cdot \mathrm{H(s)} \ . \tag{5.24}$$

Potom **prenosovú funkciu** uzavretého regulačného obvodu, ktorá opisuje vzťah medzi vstupom $\mathbf{U(s)}$ a výstupom $\mathbf{Y(s)}$, môžeme určiť na základe vzťahu

$$\mathrm{Y(s)} = \mathrm{G(s)E(s)} \overset{\mathrm{E(s)=U(s)-C(s)}}{\widehat{=}} \mathrm{G(s)[U(s)-C(s)]} \overset{\mathrm{C(s)=H(s)Y(s)}}{\widehat{=}} \mathrm{G(s)[U(s)-H(s)Y(s)]}. \tag{5.25}$$

Ďalšími matematickými úpravami predchádzajúcej rovnice dostávame

$$[1 + G(s)H(s)]Y(s) = G(s)U(s)\ . \tag{5.26}$$

Na základe predchádzajúceho odvodenia je teda prenosová funkcia pre **zápornú spätnú väzbu** definovaná vzťahom

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \tag{5.27}$$

a pre **kladnú spätnú väzbu** vzťahom

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s) \cdot H(s)}\ . \tag{5.28}$$

Príklad č. 5.6.

Uvažujme dva bloky zapojené spolu v štruktúre **zápornej spätnej väzby**. Prenosové funkcie blokov sú dané týmito prenosovými funkciami $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}\,, \qquad G_2(s) = s + 1\,. \tag{5.29}$$

Nájdite prenosovú funkciu, ktorá je ekvivalentnou náhradou daného **spätnoväzobného spojenia** týchto dvoch blokov.

Riešenie:

Pre výslednú prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$, ktorá je ekvivalentnou náhradou spojenia so spätnou väzbou týchto dvoch blokov $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$, musí platiť, že

$$\begin{gathered} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} = \frac{\dfrac{1}{s^2 + 2 \cdot s + 1}}{1 + \dfrac{s + 1}{s^2 + 2 \cdot s + 1}} = \frac{1}{s^2 + 3 \cdot s + 3}, \\ G(s) = \frac{1}{s^2 + 3 \cdot s + 3}. \end{gathered} \tag{5.30}$$

Prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$ pre zadefinované prenosové funkcie systémov $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$ vypočítame v **Matlabe** nasledujúcim skriptom.

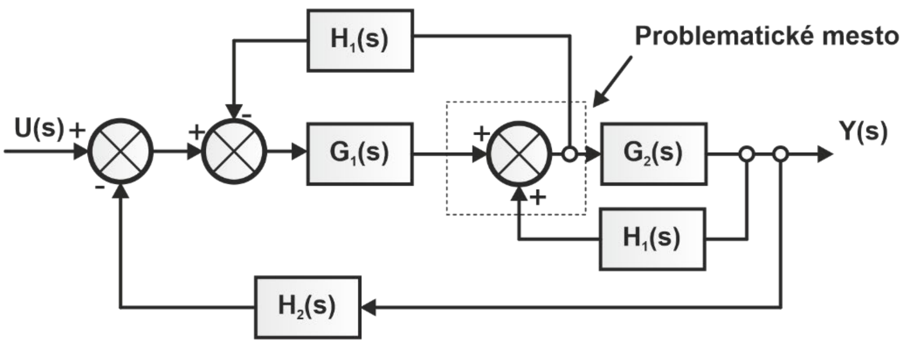
```
clc
clear

gs=tf([1],[1 2 2]);
hs=tf([1 1],[1]);
ts=feedback(gs, hs)

ts2=gs/(1+gs*hs);
ts2=minreal(ts2)
```

Výsledkom riešenia predchádzajúceho skriptu v **Matlabe** je identická prenosová funkcia, ktorú sme odvodili vzťahom (5.30). Ako si možno všimnúť, tak v tomto skripte sme použili príkaz **feedback**, ktorý slúži na výpočet prenosovej funkcie **spätnoväzobného spojenia** dvoch blokov prenosových funkcií. Tento príkaz možno nahradiť matematickou operáciou, ktorá je definovaná rovnicou (5.27).

5.7 REDUKCIA BLOKOVÉHO DIAGRAMU

Redukciou blokového diagramu myslíme nahradenie pôvodnej **blokovej schémy** jedným ekvivalentným blokom prenosovej funkcie. Poznamenajme, že v prípade niektorých zložitých blokových diagramov neexistuje možnosť takúto redukciu blokovej schémy vykonať a zjednodušiť priamo na jeden ekvivalentný blok. Tento problém môže nastať z dôvodu existujúcej nejednoznačnosti danej blokovej schémy; kedy neexistuje možnosť identifikovať niektoré zo známych troch ekvivalentných spojení, ktorými sú spomínané **sériové**, **paralelné** alebo **spätnoväzobné** spojenie.

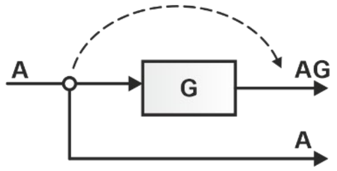
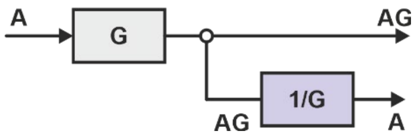
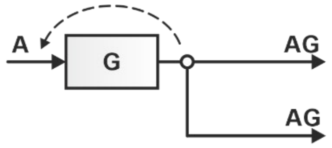
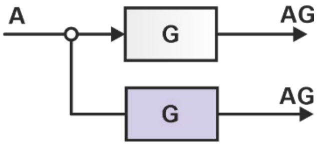
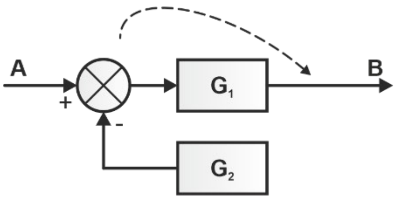
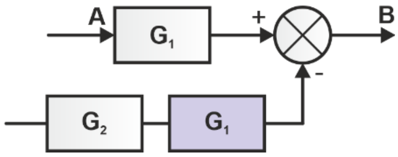
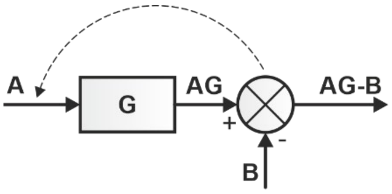
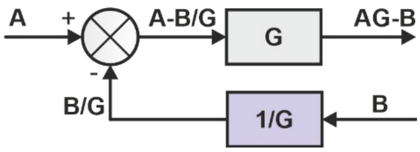
Problém v prípade týchto zložitých **blokových diagramov** nastáva vtedy, ak jednoznačnosti určenia blokového spojenia konkrétnej časti schémy bráni napr. problematické umiestnenie **uzlového bodu**. Redukcii blokovej schémy v niektorých prípadoch môže takisto brániť problematické umiestnenie **súčtového člena**, ktorý je umiestnený tak, že neumožňuje redukciu z dôvodu nejednoznačnosti existencie troch základných spojení. Ukážka takéhoto problematického miesta je zobrazená na Obr. 5.116.



Obr. 5.116. Problematické miesto v blokovej schéme

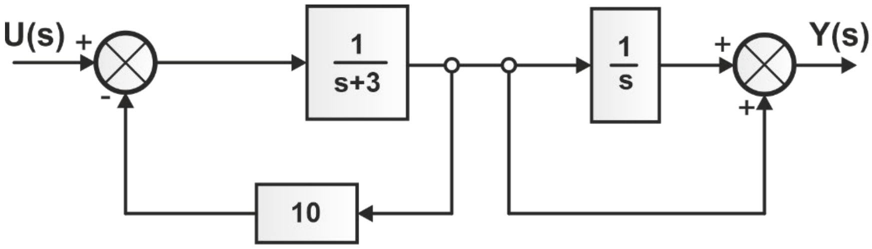
Ak sa pozrieme na Obr. 5.116, v tomto prípade je nevyhnutné danú blokovú schému ďalej upraviť, ak chceme nájsť jej ekvivalentnú prenosovú funkciu. Na úpravu **blokovej schémy** môžeme využiť súbor pravidiel na **úpravu blokových schém**, ktorá je uvedená v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 5.1. Pravidlá na úpravu blokových schém

	Pôvodný blokový diagram	Ekvivalentný blokový diagram
	Presun uzla za blok	
1.		
	Presun uzla pred blok	
2.		
	Presun súčtového člena za blok	
3.		
	Presun súčtového člena pred blok	
4.		

Príklad č. 5.7.

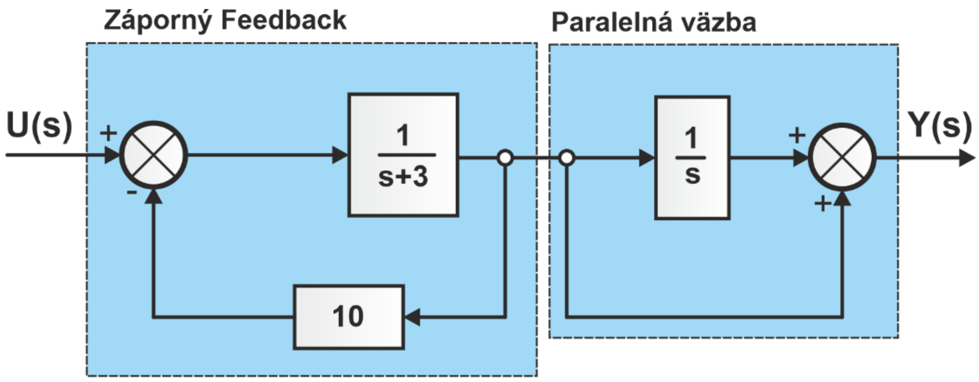
Predpokladajme blokový diagram podľa nasledujúceho Obr. 5.117. Nájdite ekvivalentnú prenosovú funkciu **G(s)**, ktorá nahradí celú túto **blokovú schému** jedným ekvivalentným blokom.



Obr. 5.117. Blokový diagram

Riešenie:

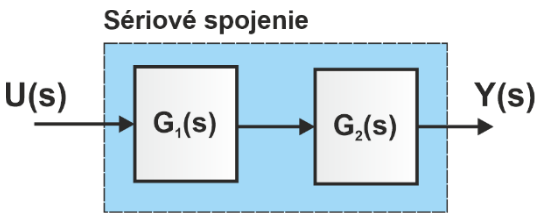
V predchádzajúcej **blokovej schéme** na Obr. 5.117 možno identifikovať dva typy základných spojení, prvým z nich je **záporná spätná väzba** a druhým je **paralelné spojenie**.



Obr. 5.118. Redukcia blokovej schémy

Blokovú schému v prvom kroku zredukujeme na základe vyznačených spojení podľa Obr. 5.118. Prenosové funkcie pre tieto dve základné spojenia, ktorými sú **záporná spätná väzba** a **paralelné spojenie**, sú definované na základe týchto vzťahov

$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{s+3}}{1 + \frac{10}{s+3}} = \frac{1}{s+13}\,, \qquad H(s) = \frac{1}{s} + 1 = \frac{s+1}{s}\,. \tag{5.31}$$

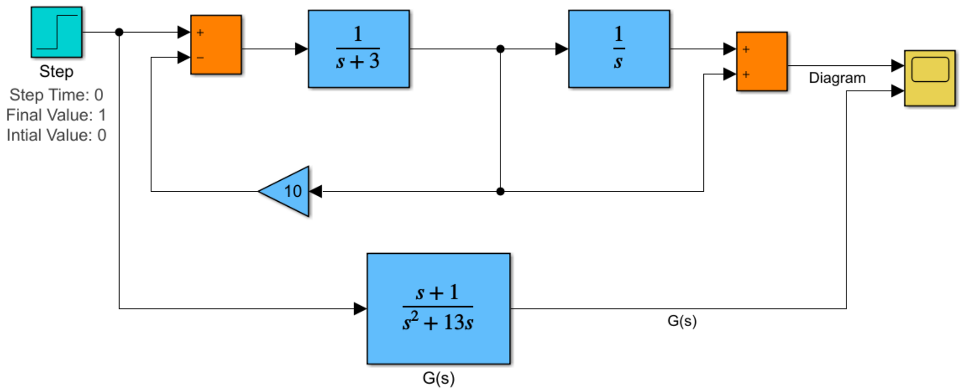


Obr. 5.119. Bloková schéma po vykonaní prvej redukcie

Vykonajme ešte jednu redukciu aktuálnej blokovej schémy, ktorá je znázornená na predchádzajúcom Obr. 5.119. Ako si možno všimnúť, tak náhradou spojenia blokov $\mathbf{G_1(s)}$ a $\mathbf{G_2(s)}$ je v tomto prípade **sériové spojenie**, ktoré možno definovať touto výslednou prenosovou funkciou $\mathbf{G(s)}$

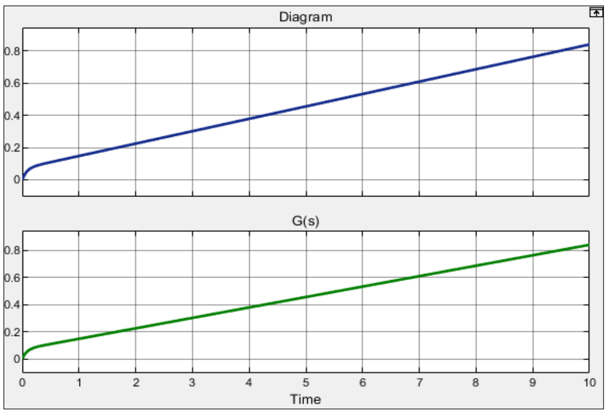
$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{1}{s+13} \cdot \frac{s+1}{s} = \frac{s+1}{s^2 + 13s}\,. \tag{5.32}$$

Ak poznáme definície prenosových funkcií systémov jednotlivých blokov, potom môžeme danú blokovú schému simulovať v **Simulinku**. **Bloková schéma** diagramu podľa Obr. 5.117, ktorá bola namodelovaná v prostredí **Matlab/Simulink**, je zobrazená na nasledujúcom Obr. 5.120.



Obr. 5.120. Bloková schéma riešená v Simulinku

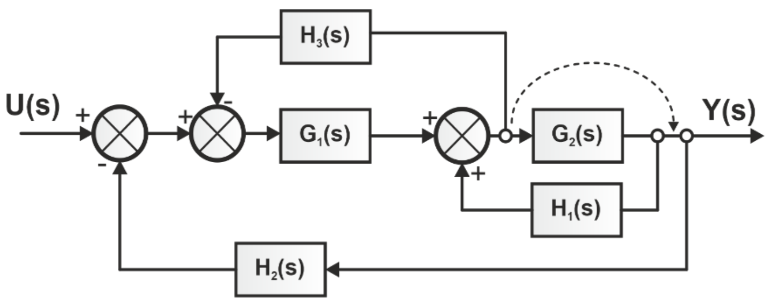
Na ďalšom Obr. 5.121 je potom znázornené porovnanie grafického riešenia odozvy systému na jednotkovú skokovú zmenu v podobe **blokového diagramu** a **prenosovej funkcie systému**. Ako možno vidieť, tak výsledok riešenia simulácie v podobe tohto **blokového diagramu** je absolútne identický s riešením simulácie, ktorá bola realizovaná jedným blokom pomocou ekvivalentnej prenosovej funkcie systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$, definovanej podľa (5.32).



Obr. 5.121: Riešenie simulácie blokového diagramu v Simulinku

Príklad č. 5.8.

Predpokladajme **blokový diagram** dynamického systému s jedným problematicky umiestneným uzlom, ktorý je znázornený na nasledujúcom Obr. 5.122.



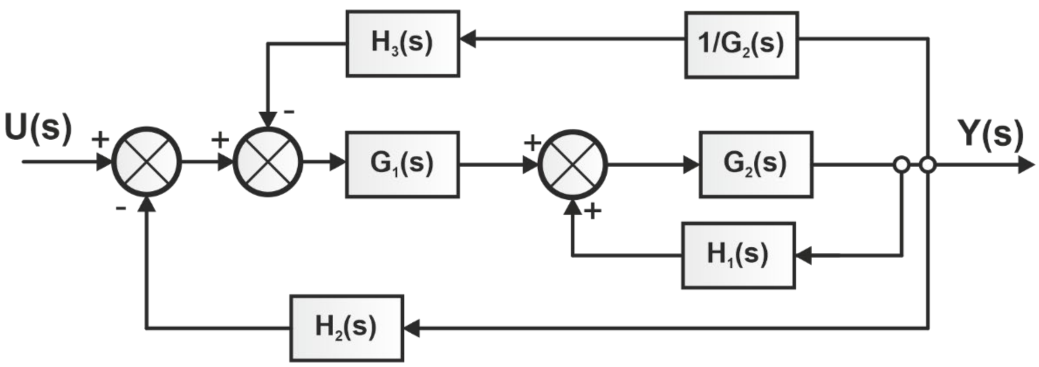
Obr. 5.122. Blokový diagram

Nájdite takú **ekvivalentnú prenosovú funkciu** tohto dynamického systému, ktorá nahradí celú **blokovú schému** jedným ekvivalentným blokom prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$. Predpokladajme, že prenosové funkcie jednotlivých blokov sú známe a definované týmito racionálnymi funkciami

$$G_1(s) = \frac{1}{s+3},\ G_2(s) = \frac{2}{s+1},\ H_1(s) = \frac{1}{s},\ H_2(s) = \frac{2}{s+3},\ H_3(s) = \frac{s+2}{s^2+3}. \qquad (5.33)$$

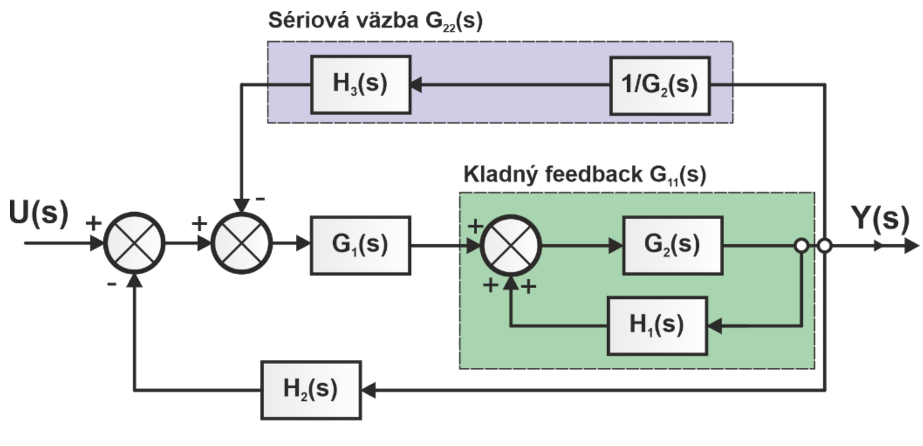
Riešenie:

V zadanej blokovej schéme podľa Obr. 5.122 možno identifikovať jeden **problematický uzol**, ktorý bráni možnosti jednoznačne určiť **základne spojenia** v tejto blokovej schéme. Aby bolo možné túto **blokovú schému** redukovať, je nutné tento **blokový diagram** upraviť využitím pravidiel na úpravu blokových schém. Problematickým bodom v tejto schéme je uzol. Prekreslením pôvodnej schémy presunutím problematického uzla za blok $\mathbf{G_2}$, dospejeme k ekvivalentnému blokovému diagramu podľa Obr. 5.123.



Obr. 5.123. Upravená ekvivalentná bloková schéma

Prekreslením pôvodnej blokovej schémy môžeme vykonať prvú redukciu upraveného **blokového diagramu**, nahradením jedného **sériového spojenia** a jednej **kladnej spätnej väzby**, ako je to vyznačené na Obr. 5.124.

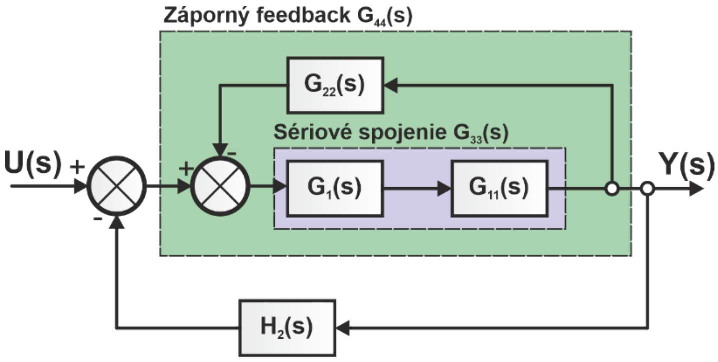


Obr. 5.124. Prvá redukcia upravenej blokovej schémy

Po vykonaní prvej redukcie blokovej schémy zobrazenej na Obr. 5.124 môžeme vyznačené **blokového spojenia** zredukovať a nahradiť ekvivalentnými blokmi, ktoré odpovedajú týmto prenosovým funkciám

$$G_{11}(s) = \frac{G_2(s)}{1 - G_2(s) \cdot H_1(s)} \ , \qquad G_{22}(s) = \frac{H_3(s)}{G_2(s)} \ . \tag{5.34}$$

Prvou redukciou blokovej schémy dostávame nasledujúci tvar zjednodušenej **blokovej schémy**, ktorý je znázornený na Obr. 5.125.

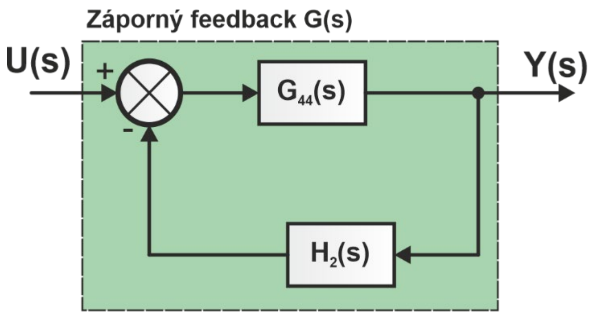


Obr. 5.125. Zjednodušený tvar blokovej schémy

Vykonaním ďalšej redukcie blokovej schémy, t. j. nájdením vyznačených dvoch základných spojení podľa Obr. 5.125, môžeme blokový diagram ďalej zjednodušiť nahradením jedným blokom $\mathbf{G_{44}(s)}$, ktorý charakterizuje **zápornú spätnú väzbu** a jedným blokom $\mathbf{G_{334}(s)}$, ktorý predstavuje **sériové spojenie**. Prenosové funkcie týchto základných spojení sú definované ako

$$G_{33}(s) = G_1(s)G_{11}(s), \qquad G_{44}(s) = \frac{G_{33}(s)}{1 + G_{33}(s)G_{22}(s)} \ . \tag{5.35}$$

Touto redukciou, ktorú sme vykonali nadobudla bloková schéma nasledujúci zjednodušený tvar spojenia dvoch blokov $\mathbf{G_{33}(s)}$ a $\mathbf{G_{44}(s)}$, ktorý je znázornený na Obr. 5.126.



Obr. 5.126. Tvar blokovej schémy po druhej redukcii

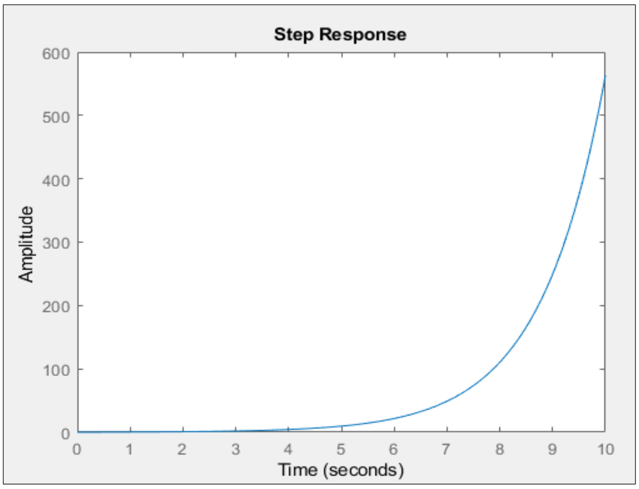
Napokon vykonaním poslednej redukcie **blokovej schémy** podľa Obr. 5.126, ktorá predstavuje spojenie **zápornej spätnej väzby**, dostávame tento tvar **výslednej prenosovej funkcie systému**

$$G(s) = \frac{G_{44}(s)}{1 + G_{44}(s) \cdot H_2(s)} = \frac{2s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 18s}{s^6 + 7s^5 + 17s^4 + 28s^3 + 32s^2 + 9s - 54} \,. \qquad (5.36)$$

Predchádzajúcu prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$ môžeme vypočítať na základe zapísania jednoduchých matematických výrazov, ktoré boli odvodené pre jednotlivé základné spojenia počas postupnej redukcie zadanej **blokovej schémy**. Odozvu dynamického systému na jednotkovú skokovú zmenu, ktorý je opísaný touto **prenosovou funkciou** vypočítame pomocou nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

```
clc
clear
g1s=tf([1],[1 3]);
g2s=tf([2],[1 1]);
h1s=tf([1],[1 0]);
h2s=tf([2],[1 3]);
h3s=tf([1 2],[1 0 3]);

g11=g2s/(1-g2s*h1s);
g22=h3s/g2s;
g33=g1s*g11;
g44=g33/(1+g33*g22);
Gs=minreal(g44/(1+g44*h2s));
step(Gs,10)
```

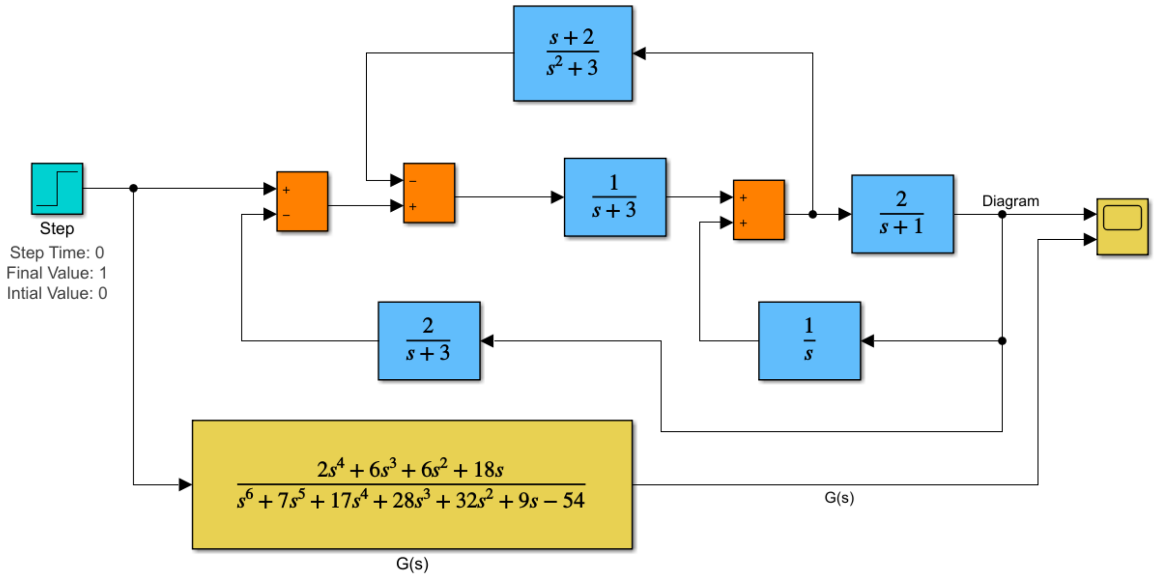
Riešenie odozvy systému na jednotkový skok, ktorý je definovaný prenosovou funkciou (5.36), ktorú sme vypočítali použitím predchádzajúceho skriptu na základe odvodených vzťahov, je znázornené na nasledujúcom Obr. 5.127.



Obr. 5.127. Odozva systému riešená v Matlabe

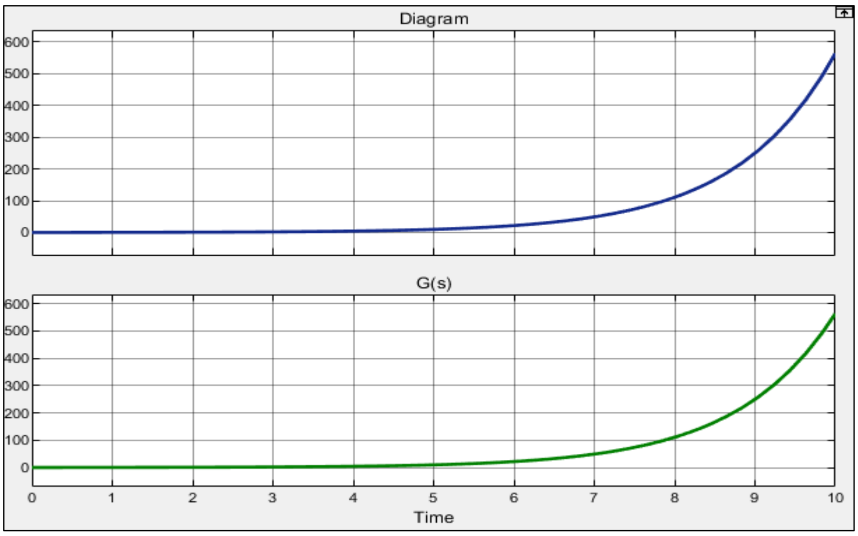
Správnosť vypočítanej skokovej odozvy systému, ktorú sme vypočítali skriptom v **Matlabe** pre systém zadefinovaný v tvare odvodenej prenosovej funkcie systému $\mathbf{G(s)}$, overíme simuláciou pôvodného **blokového diagramu** v prostredí **Simulinku** podľa Obr. 5.122.

Bloková schéma, ktorá bola vytvorená z tohto pôvodného **blokového diagramu** a simulovaná v prostredí **Simulink**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 5.128.



Obr. 5.128. Bloková schéma systému v Simulinku

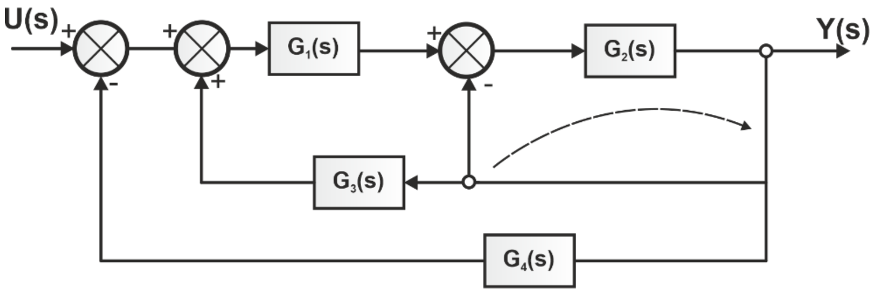
Na ďalšom Obr. 5.129 je znázornené riešenie simulácie v podobe odozvy systému na jednotkovú skokovú zmenu prechádzajúcej **blokovej schémy**. Ako možno vidieť, tak výsledok riešenia tejto simulácie realizovanej simuláciou blokového diagramu v **Simulinku**, je absolútne identický s odozvou systému na jednotkovú zmenu, ktorú sme vypočítali prostredníctvom skriptu v **Matlabe**, pozri Obr. 5.127.



Obr. 5.129. Odozva systému riešená v Simulinku

Príklad č. 5.9.

Redukciou blokového diagramu nájdite ekvivalentnú prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$ pre **blokovú schému**, ktorá je zobrazená na Obr. 5.130.



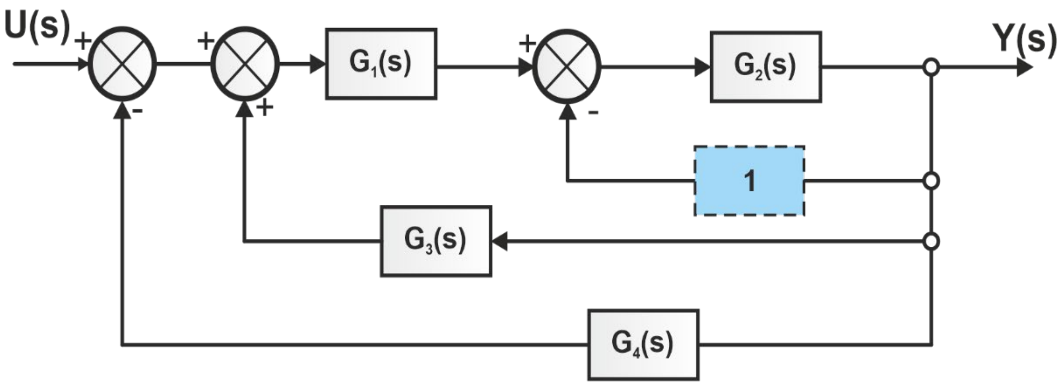
Obr. 5.130. Blokový diagram

Predpokladajme, že definície prenosových funkcií blokov, ktoré tvoria časti tejto **blokovej schémy**, sú známe a predstavujú ich tieto racionálne funkcie

$$G_1(s) = \frac{2}{s}, G_2(s) = \frac{6}{s+4}, G_3(s) = 2, G_4(s) = \frac{1}{s+2}\ . \qquad (5.37)$$

Riešenie:

Úpravou blokovej schémy podľa Obr. 5.130 na základe pravidiel na úpravu **blokových schém** podľa tabuľky, môžeme presunúť vyznačený **problematický uzol** za blok jednotkovej prenosovej funkcie $\mathbf{G(s) = 1}$. Touto úpravou dostávame nasledujúci tvar **ekvivalentnej blokovej schémy**, ktorý je znázornený na Obr. 5.131.



Obr. 5.131. Upravený blokový diagram

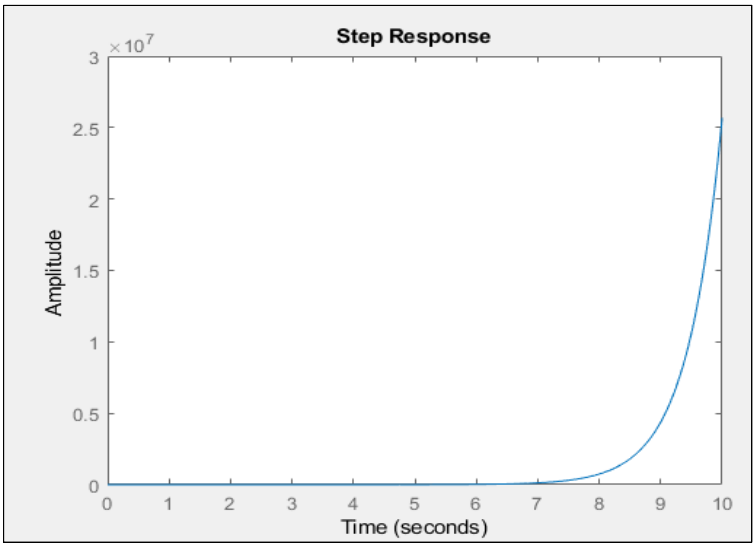
Predchádzajúcu **blokovú schému** môžeme zjednodušiť postupne v štyroch krokoch, zámenou jej častí za ekvivalentné bloky. Prvý blok, ktorý označíme ako $\mathbf{G_{11}(s)}$, bude predstavovať spojenie **kladnej spätnej väzby**. V schéme je ďalej možno nahradiť **sériové spojenie** jedným blokom, ktorý označíme ako $\mathbf{G_{22}(s)}$. Následne ďalším zjednodušením nahradíme spojenie **zápornej spätnej väzby**, ktoré nahradíme blokom $\mathbf{G_{33}(s)}$. Napokon **výsledná prenosová funkcia systému** $\mathbf{G(s)}$ bude, daná spojením jednej **kladnej spätnej väzby**. Matematicky sú všetky prenosové funkcie vymenovaných blokov, ktorými sme nahradili základné spojenia v pôvodnej blokovej schéme, definované týmito vzťahmi

$$\begin{aligned} G_{11}(s) &= \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)}, \\ G_{22}(s) &= G_1(s)\cdot G_{11}(s), \\ G_{33}(s) &= \frac{G_{22}(s)}{1-G_{22}(s)\cdot G_3(s)}, \\ G(s) &= \frac{G_{33}(s)}{1+G_{33}(s)\cdot G_4(s)} = \frac{12s+24}{s^3+12s^2-4s-36}. \end{aligned} \qquad (5.38)$$

Odozvu systému na jednotkovú skokovú zmenu použitím predchádzajúcich vzťahov, budeme riešiť použitím nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

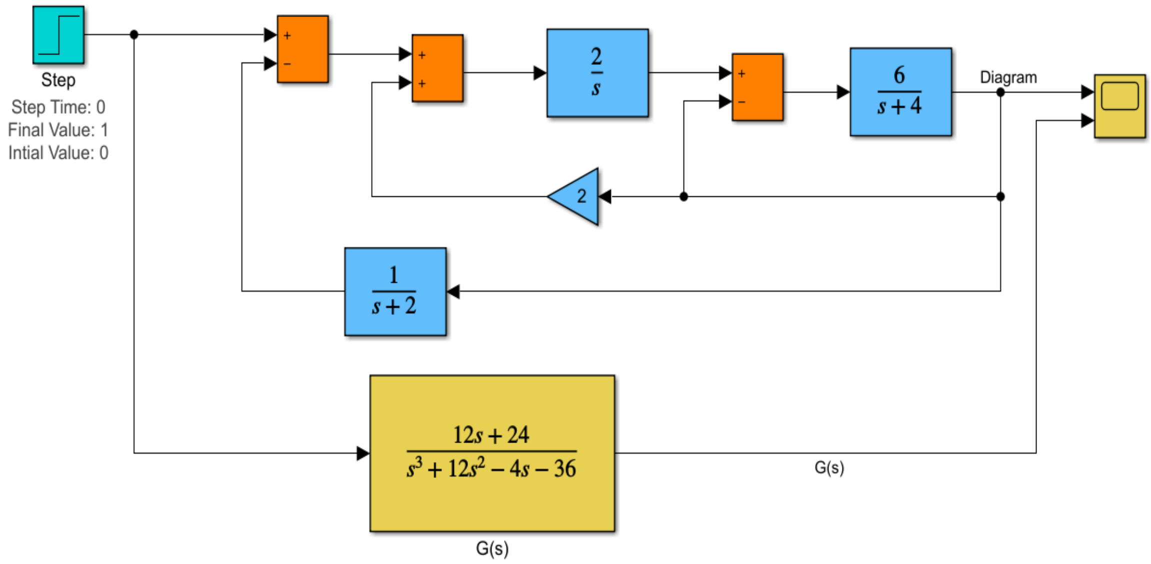
```
clc
clear
g1s=tf([2],[1 0]);
g2s=tf([6],[1 4]);
g3s=tf(2);
g4s=tf([1],[1 2]);

g11=g2s/(1+g2s);
g22=g1s*g11;
g33=g22/(1-g22*g3s);
Gs=minreal(g33/(1+g33*g4s));
step(Gs,10)
```

Priebeh riešenia vypočítanej odozvy systému na jednotkovú zmenu je znázornený na nasledujúcom grafe Obr. 5.132.



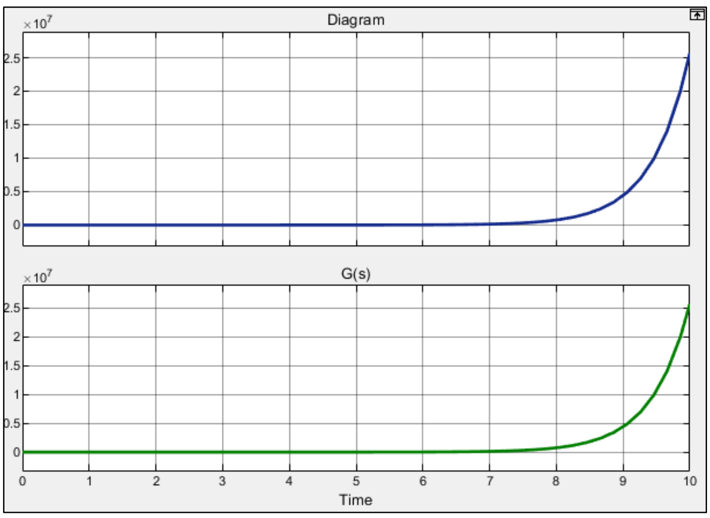
Obr. 5.132. Odozva dynamického systému v Matlabe

Správnosť vypočítanej skokovej odozvy systému, vypočítanej v predchádzajúcom skripte **Matlabu** pre systém, ktorý bol zadefinovaný v tvare odvodenej prenosovej funkcie systému **G(s)**, overíme simuláciou pôvodného **blokového diagramu** podľa Obr. 5.130. **Bloková schéma**, ktorá bola vytvorená z pôvodného **blokového diagramu** a simulovaná v prostredí **Simulink**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 5.133.



Obr. 5.133. Bloková schéma Simulink

Na ďalšom Obr. 5.134 je znázornené riešenie odozvy systému na jednotkovú skokovú zmenu prechádzajúcej **blokovej schémy**. Ako možno vidieť, tak výsledok riešenia takejto simulácie, ktorá bola realizovaná simuláciou v prostredí **Simulinku**, je absolútne identický s odozvou systému, ktorú sme vypočítali prostredníctvom jednoduchého skriptu v **Matlabe**, pozri Obr. 5.132.

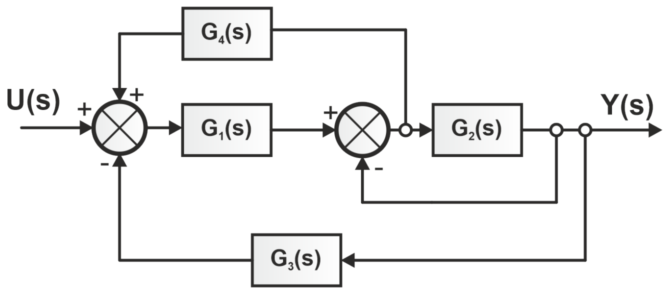


Obr. 5.134. Odozva systému riešená v Simulinku

Problémy na riešenie

Problém 5.1.

Redukciou blokového diagramu, ktorý je znázornený na Obr. 5.135, nájdite ekvivalentnú prenosovú funkciu $\mathbf{G(s)}$, ktorá nahradí celú túto blokovú schému jedným funkčným blokom.



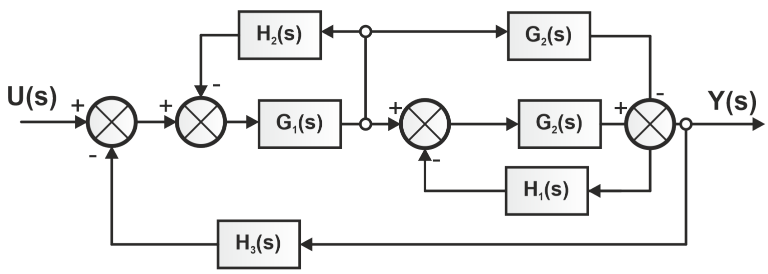
Obr. 5.135. Blokový diagram

Predpokladajme, že definície prenosových funkcií blokov, ktoré tvoria časti tejto blokovej schémy, sú známe a predstavujú ich tieto prenosové funkcie

$$G_1(s) = \frac{2s}{s+1}, G_2(s) = \frac{6s+1}{s^2+4}, G_3(s) = \frac{2}{s}, G_4(s) = \frac{1}{s+2} \quad . \tag{5.39}$$

Problém 5.2.

Predpokladajme **blokový diagram** dynamického systému, ktorý je znázornený na Obr. 5.136. Nájdite takú **ekvivalentnú prenosovú funkciu** tohto dynamického systému, ktorá nahradí celú blokovú schému jedným ekvivalentným blokom prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$. Riešenie odozvy porovnajte so simuláciou schémy v **Simulinku**



Obr. 5.136. Blokový diagram

Predpokladajme, že poznáme tieto prenosové funkcie jednotlivých blokov v základnej blokovej schéme

$$G_1(s) = \frac{1}{s+3},\ G_2(s) = \frac{2}{s+1},\ H_1(s) = \frac{1}{s},\ H_2(s) = \frac{2}{s+3},\ H_3(s) = \frac{s+2}{s^2+3} \quad . \tag{5.40}$$

6 MODELOVANIE A SIMULÁCIA MATEMATICKÝCH MODELOV SYSTÉMOV

Úloha matematického modelovania je dôležitým krokom v analýze a návrhu fyzikálnych systémov. Ako už vieme, tak na popis správania sa systémov poznáme rôzne spôsoby interpretácie matematických modelov. Model môžeme interpretovať napr. **sústavou diferenciálnych rovníc (ODE)**, ktorých výpočty **analytického riešenia** sú mnohokrát časovo náročné a zdĺhavé, navyše nie vždy musí takéto analytické riešenie pre tieto sústavy diferenciálnych rovníc existovať.

Ďalšou metódou, ktorú sme si predstavili na výpočet odozvy systémov, bola metóda riešenia, ktorá využíva princípy **Laplaceovej transformácie** - realizácia systému vo frekvenčnej oblasti. V tomto prípade transformujeme **sústavu diferenciálnych rovníc** použitím Laplaceovej transformácie z časovej oblasti $\mathbf{t}$ do komplexnej **s-roviny**. Výsledkom je **prenosová funkcia** alebo **prenosová matica systému G(s)**, ktorú možno využiť v **Laplaceovom tvare** na výpočet odozvy systému na ľubovoľný vstupný signál $\mathbf{u(t)}$ a to použitím známeho vzťahu

$$\mathrm{Y(s) = G(s) \cdot U(s)}\,, \tag{6.1}$$

kde $\mathbf{u(t)}$ je ľubovoľný signál definovaný v časovej oblasti $\mathbf{t}$, ktorý môžeme previesť použitím **Laplaceovej transformácie** do **s-roviny** na signál $\mathbf{U(s)}$. Výsledkom je racionálna funkcia alebo matica racionálnych prenosových funkcií výstupu $\mathbf{Y(s)}$, ktorú napokon aplikovaním **inverznej Laplaceovej transformácie**, transformujeme do časovej roviny $\mathbf{t}$.

V predchádzajúcej kapitole sme si ukázali, že každý dynamický systém môžeme takisto reprezentovať a simulovať formou **blokového diagramu**, ktorého odozvu potom riešime simuláciou v podobe **blokovej schémy** napr. v prostredí **Matlab/Simulink**.

Dynamické systémy okrem týchto spomenutých spôsobov realizácie môžeme modelovať ešte ďalšími spôsobmi, ktoré sú využívané v teórií riadenia systémov. Systém možno zadefinovať v tvare jeho **stavového modelu**. **Stavový model systému** definuje dynamický systém spôsobom **vnútorného opisu** resp. **stavového opisu** (z angl. **state-space**), t. j. opisu v zmysle jeho **vnútorných stavových premenných**. V tomto prípade získame pri definovaní systému prehľad o tom, ako sa menia jeho stavové premenné resp. stavy počas celej doby simulácie.

Stav systému vo všeobecnosti odkazuje na **minulý**, **súčasný** alebo **budúci** stav dynamického systému, ktorý vyplýva z matematickej interpretácie stavového opisu systému. Stav systému definuje množina **stavových premenných** $\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n}$, ktoré sú použité na matematickú interpretáciu **stavových rovníc** modelu dynamického systému. Všetky **stavové rovnice** v tomto spôsobe vnútorného opisu systému sú definované **sústavou diferenciálnymi rovnicami 1. rádu**.

Pripomeňme, že **stavové premenné systému** definujeme v podobe **stavového vektora systému** ako množinu časovo závislých premenných $\mathbf{x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T}$. Ak v počiatočnom čase $\mathbf{t = 0}$

poznáme hodnoty počiatočných hodnôt týchto premenných a systém bol vybudený budiacim signálom $\mathbf{u(t)}$, potom na základe **stavového opisu systému** možno určiť a opísať stav skúmaného dynamického systému v ľubovoľnom čase $\mathbf{t > t_0}$.

Poznamenajme, že mnohokrát dochádza k nesprávnej zámene **stavových premenných** za **výstupné premenné**, aj keď rozdiel medzi **výstupným** a **stavovými** premennými je zrejmý v tom, že hodnoty **výstupných premenných** sú spravidla merateľné v každom prípade, zatiaľ čo hodnoty **stavových premenných** nie vždy musia byť takto merateľné.

Pripomeňme, že kým premenná $\mathbf{u(t)}$ charakterizujúca **vstupný vektor**, je spravidla riaditeľná v každom čase $\mathbf{t > t_0}$, tak potom premenná $\mathbf{y(t)}$ predstavujúca **výstupný vektor**, je síce pozorovateľná v každom čase $\mathbf{t > t_0}$, ale neexistuje možnosť takúto **výstupnú premennú riadiť**. **Stavový model** systému vo všeobecnosti pozostáva z dvoch rovníc a to

stavovej rovnice

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \;, \tag{6.2}$$

a **výstupnej rovnice**

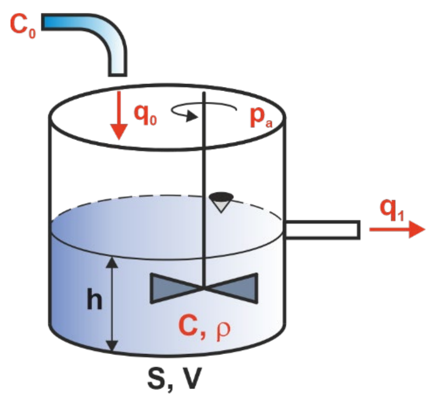
$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \,, \tag{6.3}$$

kde **A**, **B**, **C** a **D** sú matice stavového opisu, $\mathbf{x(t)}$ je stavový vektor systému, $\mathbf{u(t)}$ je vektor vstupov a $\mathbf{y(t)}$ je vektor výstupov.

Príklad č. 6.1.

Predpokladajme hydraulický systém, ktorý je tvorený hydraulickým zásobníkom kvapaliny, v ktorom udržiavame konštantný objem roztoku $\mathbf{V = 2.1\ m^3}$, ktorého koncentrácia $\mathbf{C(t)}$ je časovo závislá veličina, pozri Obr. 6.1. Hladina kvapaliny v tomto zásobníku je udržiavaná na konštantnej hodnote, čo je docielené rovnomerným **prítokom** a voľným odtokom kvapaliny cez výstupný otvor priamo do atmosférického tlaku.

Do zásobníka neustále priteká roztok známej koncentrácie $\mathbf{C_0 = 1.85\ kg.m^{-3}}$ s konštantným objemovým prítokom $\mathbf{q_0 = 0.085\ m^3.min^{-1}}$ a odteká s objemovým odtokom $\mathbf{q_1}$ neznámej koncentrácie $\mathbf{C(t)}$. Nájdite matematický model systému v tvare **stavového opisu systému** a riešte dynamickú odozvu takéhoto hydraulického systému na skokovú zmenu vstupného prítoku $\mathbf{q_0}$, ak vieme, že v čase $\mathbf{t = 0}$ bolo počiatočná koncentrácia roztoku v zásobníku $\mathbf{C(0) = 0.925\ \ kg.m^{-3}}$. Odozvu daného systému realizujte prostredníctvom napísania skriptu v **Matlabe**.



Obr. 6.1. Hydraulický systém

Riešenie:

Pri riešení úlohy a tvorbe matematického modelu budeme uvažovať nasledujúce zjednodušenia daného hydraulického systému:

1. dokonalé premiešanie roztoku,
2. konštantnú hustotu roztoku,
3. a konštantnú výšku hladiny v nádrži.

Predpokladajme, že daný hydraulický systém je v počiatočnom štádiu v relaxovanom **ustálenom stave**, t. j. musí platiť, že v čase $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ je v nádrži roztok s koncentráciou

$$C(t) = C(0) = 0.925 \ \text{kg.m}^{-3}, \quad \text{pre} \quad t \leq 0 . \qquad (6.4)$$

Aplikovaním **zákona zachovania hmotností** musí pre daný hydraulický systém zásobníka platiť táto diferenciálna rovnica

$$\frac{d}{dt}(\rho \cdot V) = \rho q_0 - \rho q_1 . \qquad (6.5)$$

Keďže na základe predpokladov uvažujeme ustálenú hladinu $\mathbf{h(t)}$ v nádrži, potom musí platiť, že $\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}$. Ak teda platí, že hustota roztoku $\boldsymbol{\rho}$ v zásobníku je konštantná, potom pre objemový prítok $\mathbf{q_0}$ a odtok $\mathbf{q_1}$ musí platiť, že

$$\rho \cdot q_0 - \rho \cdot q_1 = 0 \Rightarrow q_0 = q_1 = q . \qquad (6.6)$$

Ďalej zadefinujeme diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje, ako sa mení koncentrácia $\mathbf{C(t)}$ v nádrži v závislosti na čase $\mathbf{t}$. Koncentráciu roztoku v zásobníku možno definovať touto diferenciálnou rovnicou

$$\frac{d}{dt}(C \cdot V) = C_0 \cdot q_0 - C \cdot q_1 \ . \tag{6.7}$$

Keďže vieme, že objem v zásobníku $\mathbf{V}$ sa nemení a takisto sme dokázali, že $\mathbf{q_0 = q_1 = q}$, potom musí platiť, že

$$V \cdot \frac{dC}{dt} = q \cdot (C_0 - C) \ . \tag{6.8}$$

Predchádzajúcu rovnicu, ktorá opisuje zmenu koncentrácie $\mathbf{C(t)}$ v zásobníku, je ďalej možno upraviť do tohto výsledného tvaru **stavovej diferenciálnej rovnice 1. rádu**

$$\frac{dC}{dt} = \frac{q}{V} \cdot (C_0 - C) \ . \tag{6.9}$$

Celkové riešenie tejto diferenciálnej rovnice vo všeobecnom tvare je definované touto matematickou funkciou

$$C(t) = \bar{C}_0 + K \cdot e^{-\frac{q}{V} \cdot t} \ , \tag{6.10}$$

kde $\mathbf{K}$ je neznáma konštanta, ktorú môžeme vypočítať na základe známej počiatočnej koncentrácie roztoku $\mathbf{C(0)}$, ktorá sa nachádzala v nádrži v čase $\mathbf{t = 0}$. Musí teda platiť, že

$$C(t = 0) = \bar{C}_0 + K \cdot 1 = C(0) \Longrightarrow K = C(0) - \bar{C}_0 \ , \tag{6.11}$$

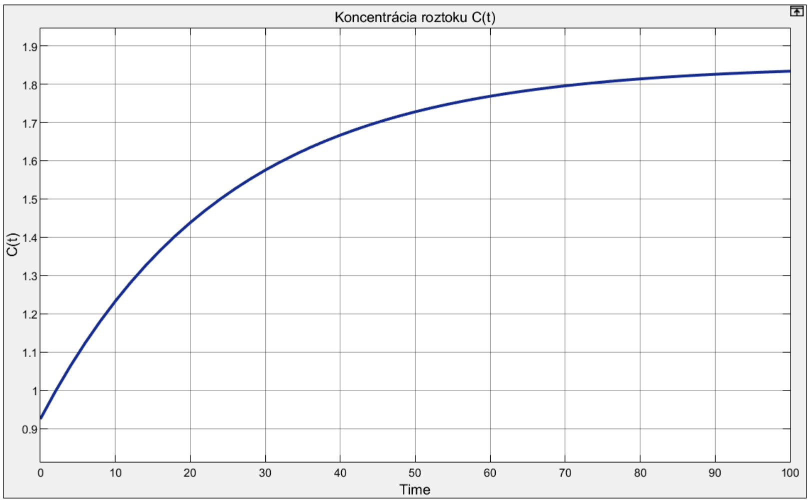
kde $\mathbf{\bar{C}_0}$ je integračná konštanta, ktorej hodnotu vypočítame na základe predpokladaného tvaru funkcie partikulárneho integrálu. Tvar vypočítaného riešenia odozvy systému, ktoré je definované touto exponenciálnou funkciou

$$C(t) = \bar{C}_0 + [C(0) - \bar{C}_0] \cdot e^{-\frac{q}{V} \cdot t} \ , \tag{6.12}$$

možno overiť simuláciou odvodenej diferenciálnej rovnice (6.9) pomocou nasledujúceho výpočtového skriptu, ktorý napíšeme v programe **Matlab**.

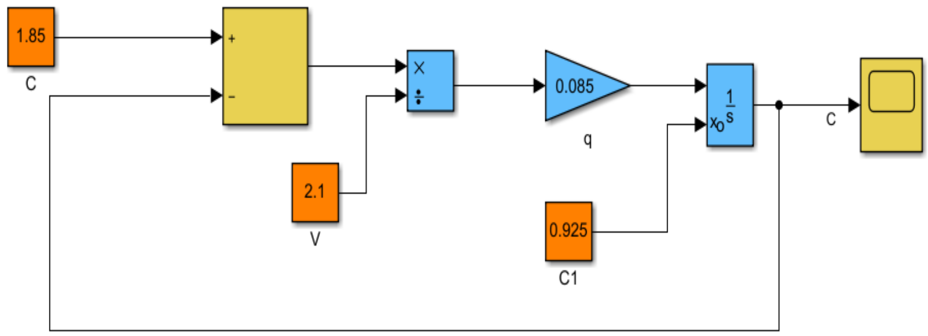
```
clc
clear
close all

q=0.085;
V=2.1;
C0=1.85;
C=0.925; %Počiatočná koncentrácia roztoku

t=0;
dt=0.01;
tmax=100;
n=(tmax-t)/dt;

for n=1:n
    X1(n,:)=[t C];
    dC=q*(C0-C)/V;
    C=C + dt*dC;
    t=t+dt;
end

plot(X1(:,1),X1(:,2),'LineWidt',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('C(t)')
title('Zmena koncentrácie roztoku v zásobníku')
grid on
```

V tomto skripte sme na výpočet odozvy systému využili metódu postupnej integrácie diferenciálnej rovnice. Priebeh vypočítanej odozvy, ktorá opisuje, ako sa mení koncentrácia roztoku v zásobníku v závislosti na čase **t**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 6.2.

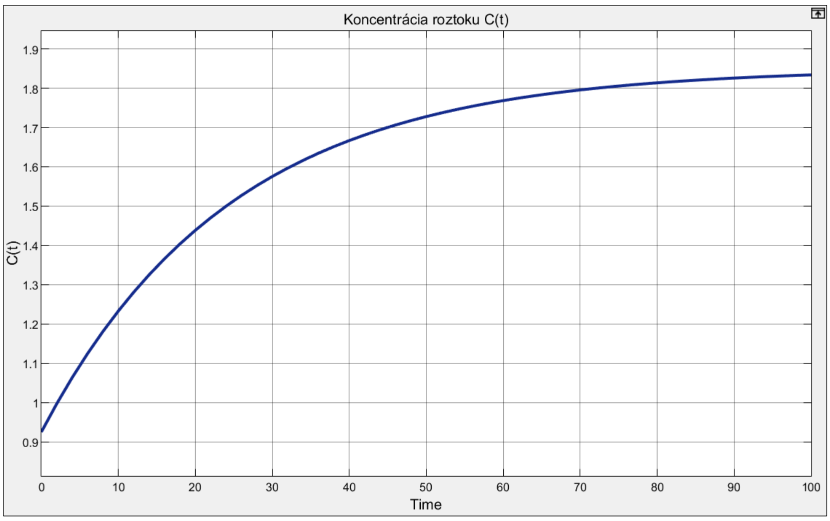


Obr. 6.2. Zmena koncentrácie roztoku v zásobníku

Predchádzajúci model systému, ktorý sme odvodili v tvare **stavového opisu systému** a riešili prostredníctvom predchádzajúceho skriptu v **Matlabe**, môžeme taktiež simulovať a riešiť aj v podobe nasledujúcej blokovej schémy, ktorá bola vytvorená v prostredí **Matlab/Simulink**, pozri Obr. 6.3. **Simuláciou** takejto **blokovej schémy** dostávame identicky vypočítanú odozvu systému, ktorá je znázornená na ďalšom Obr. 6.4.



Obr. 6.3. Bloková schéma riešená v Simulinku



Obr. 6.4. Riešenie odozvy systému vypočítané v Simulinku

6.1 ŠTANDARDNÝ TVAR PRENOSOVEJ FUNKCIE V SIMULINKU

Ako sme ukázali na predchádzajúcich príkladoch, tak proces modelovania **lineárnych dynamických systémov** predstavuje zložitý proces od nájdenia matematických vzťahov popisujúcich vzťah medzi **vstupnou** a **výstupnou** premenou, ďalej proces transformácie diferenciálnej rovnice pomocou **Laplaceovej transformácie** a následne výpočtu **inverznej Laplaceovej transformácie**, ktorá transformuje odozvu systému do časovej oblasti **t**. V predchádzajúcich príkladoch sme prevažne uvažovali systém ako **čiernu skrinku**, ktorého schéma je znázornená na Obr. 6.5.

Obr. 6.5. Vonkajší opis systému

Takýto typ realizácie systému sme nazvali **vonkajším opisom systému**, ktorý je najčastejšie definovaný touto jednoduchou **diferenciálnou rovnicou** s jedným vstupom $\mathbf{u(t)}$ a jedným výstupom $\mathbf{y(t)}$ bez derivácií vstupnej funkcie $\mathbf{u(t)}$ na pravej stane diferenciálnej rovnice

$$a_n \cdot \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = u(t)\,. \tag{6.13}$$

Aplikovaním **Laplaceovej transformácie** na obe strány tejto diferenciálnej rovnice s uvažovaním nulových počiatočných podmienok dostávame túto algebrickú rovnicu

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) \cdot Y(s) = U(s)\,, \tag{6.14}$$

potom **prenosová funkcia** tohto **systému n-tého rádu** je definovaná touto algebrickou formou ako pomer obrazu výstupu $\mathbf{Y(s)}$ a obrazu vstupu $\mathbf{U(s)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\,. \tag{6.15}$$

Pripomeňme, že ak dynamický systém je **systémom n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom, ktorý uvažujeme s deriváciami vstupnej funkcie $\mathbf{u(t)}$ na pravej strane, potom diferenciálna rovnica takéhoto systému nadobudne tento tvar

$$\begin{aligned} a_n \cdot \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) \\ = b_m \cdot \frac{d^{(m)}u(t)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{(m-1)}u(t)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + b_0 \cdot u(t) \end{aligned} \tag{6.16}$$

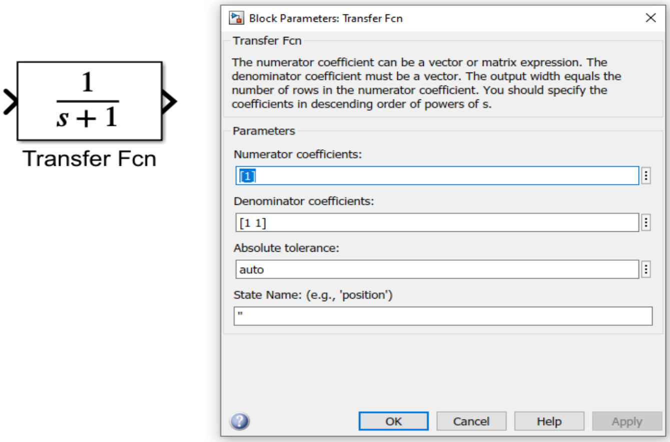
a teda **prenosová funkcia** tohto typu systému potom vedie na tento tvar racionálnej funkcie

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\,, \tag{6.17}$$

v **Matlabe** na zadefinovanie takejto prenosovej funkcie **G(s)** existuje príkaz **tf([ ], [ ])**, ktorý má tento syntax

$$Gs = tf([\, b_m\ b_{m-1} \ldots\ b_1\ b_0], [\, a_m\ a_{m-1} \ldots\ a_1\ a_0]\,)\,. \tag{6.18}$$

V prostredí **Simulinku** existuje pre definovanie tohto typu **prenosovej funkcie** (štandardného tvaru **tf**) ekvivalentná náhrada v podobe tzv. **Transfer function** bloku, ktorý je zaradený do knižnice **Continuous**. Tento je určený primárne pre modelovanie spojitých systémov. Parametre tohto **Transfer function** bloku predstavujú koeficienty čitateľa a menovateľa pôvodnej prenosovej funkcie. Dialógové okno parametrov tohto bloku je znázornené na nasledujúcom Obr. 6.6.

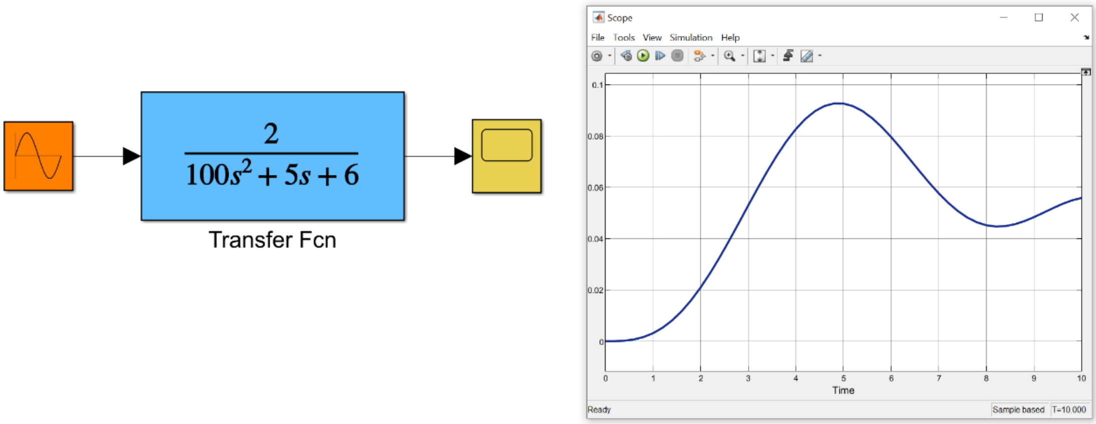


Obr. 6.6. Transfer function blok a jeho blokové parametre

Na Obr. 6.7 je znázornená **bloková schéma** a riešenie odozvy systému, ktorý bol simulovaný touto **prenosovou funkciou** systému

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{100 \cdot s^2 + 5 \cdot s + 6} \ . \qquad (6.19)$$

Ako si možno všimnúť, tak v tejto **blokovej schéme** bol ako vstupný signál **u(t)** použitý harmonický signál jednoduchej funkcie sínus $\mathbf{y(t) = sin(t)}$.



Obr. 6.7. Ukážka simulácie odozvy dynamického systému na harmonický meniaci sa vstupný signál u(t)

Ďalej predpokladajme **systém n-tého rádu** s jedným vstupom $\mathbf{u(t)}$ a jedným výstupom $\mathbf{y(t)}$, ktorý je časovo oneskoreným systémom s hodnotou **časového oneskorenia $\boldsymbol{\tau}$**. Už vieme, že takýto typ systému opisujeme touto **diferenciálnou rovnicou n-tého rádu**

$$
\begin{aligned}
a_n \cdot \frac{d^{(n)}y(t-\tau)}{dt^{(n)}} &+ a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y(t-\tau)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy(t-\tau)}{dt} + a_0 \cdot y(t-\tau) \\
&= b_m \cdot \frac{d^{(m)}u(t-\tau)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{(m-1)}u(t-\tau)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_1 \cdot \frac{du(t-\tau)}{dt} \\
&+ b_0 \cdot u(t-\tau)\,,
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

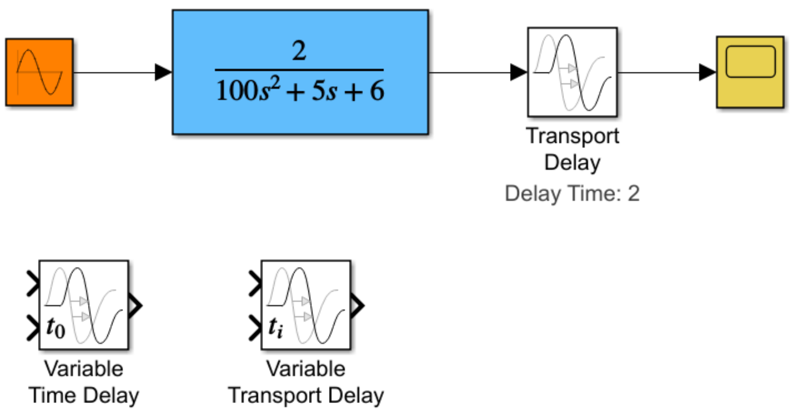
ktorého **prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$** nadobúda tento tvar

$$
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{n-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \cdot e^{-\tau t}\,. \tag{6.21}
$$

V prostredí **Matlabu** používame na zadefinovanie tohto typu systému s časovým oneskorením modifikovaný príkaz **tf** v tvare

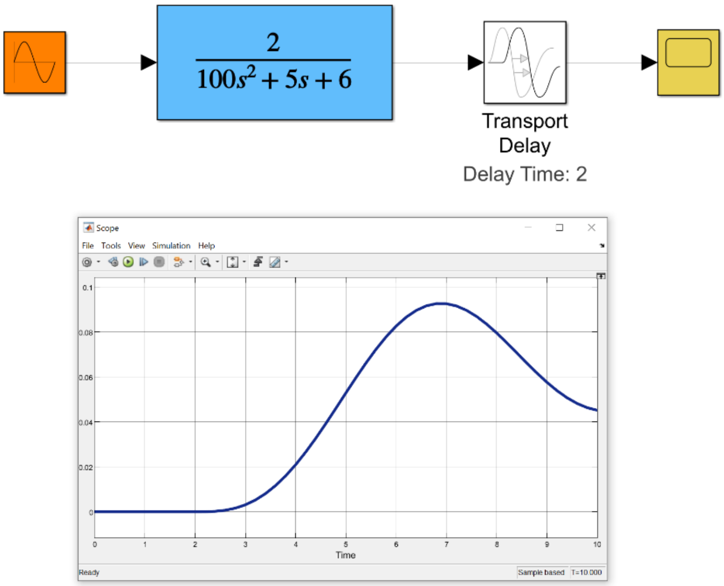
$$
Gs = tf([\,b_m\ b_{m-1} \ldots\ b_1\ b_0],[\,a_m\ a_{m-1} \ldots\ a_1\ a_0],'InputDelay',T)\,, \tag{6.22}
$$

kde hodnota **T>0** predstavuje časové oneskorenie systému $\boldsymbol{\tau}$. Poznamenajme, že ak by sme potrebovali takýto typ systému s časovým oneskorením realizovať v prostredí **Simulinku**, tak funkčný blok prenosovej funkcie, ktorý definuje tento systém s časovým oneskorením bohužiaľ neexistuje. Oneskorenie akéhokoľvek dynamického systému však môžeme riešiť kombináciou dvoch blokov, ktorými sú bloky **Transfer Function** a **Transport Delay**. **Blok Transport Delay** možno nájsť v knižnici **Continuous**, pozri Obr. 6.8**.**



Obr. 6.8. Definovanie systému s časovým oneskorením v podobe blokovej schémy v Simulinku

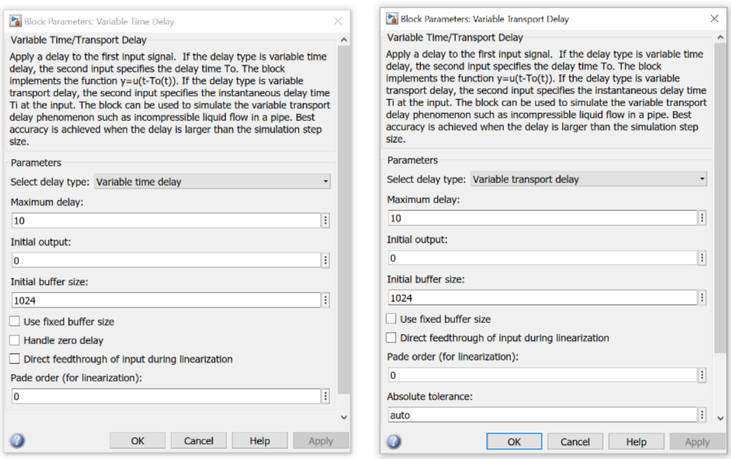
Na ďalšom Obr. 6.9 je znázornenie riešenie odozvy systému s časovým oneskorením $\mathbf{T} = \mathbf{2\ s}$, ktorý bol simulovaný pre systém prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$ podľa rovnice (6.19).



Obr. 6.9. Definovanie systému s časovým oneskorením v podobe blokovej schémy v Simulinku

V **Simulinku** existujú tri typy blokov, ktorými možno realizovať časové oneskorenie systému. Jedným z týchto blokov je blok, ktorý nazývame **Transport Delay** blok, ktorý sme použili v predchádzajúcej blokovej schéme. Ak použijeme tento typ bloku, potom oneskorenie systému sa v priebehu simulácie nemení, zostáva konštantné.

V praxi však môžu nastať aj situácie takých systémov, pri ktorých nastáva premenlivé časové **oneskorenie** alebo **zdržanie** (systémy, ktoré reagujú s premenlivým reakčným časom). V takomto prípade, nie je vhodné použiť jednoduchý **Transport Delay** blok, ale musíme siahnuť po ďalších dvoch typoch blokov, ktorými sú **Variable Time Delay** blok (kde čas $\mathbf{t_0}$ predstavuje časové oneskorenie) alebo **Variable Transport Delay** blok (kde čas $\mathbf{t_i}$ predstavuje dopravné oneskorenie), pozri Obr. 6.10.



(a) (b)

Obr. 6.10. Parametre bloku: (a) Variable Time Delay a (b) Variable Transport Delay

V prípade prvého typu bloku, ktorým je **Variable Time Delay**, sa výstup $\mathbf{y(t)}$ v danom časovom kroku určí na základe hodnoty vstupu $\mathbf{u(t-t_0)}$ v predchádzajúcom časovom kroku. Poznamenajme, že tento časový krok je daný rozdielom **aktuálneho času t** a **časového oneskorenia** $\boldsymbol{\tau}$. Platí, že

$$y(t) = u(t - t_0) = u(t - \tau)\,. \tag{6.23}$$

V prípade druhého typu bloku, ktorým je **Variable Transport Delay**, sa výstup bloku $\mathbf{y(t)}$ určí na základe vstupného signálu $\mathbf{u(t)}$ v predchádzajúcom časovom kroku, ktorý sa rovná rozdielu aktuálneho času **t** a dopravného oneskorenia $\mathbf{t_d(t)}$. Platí teda, že

$$y(t) = u(t - t_d(t))\,, \tag{6.24}$$

Simulink v tomto prípade vypočíta hodnotu dopravného oneskorenia $\mathbf{t_d(t)}$, riešením tejto rovnice

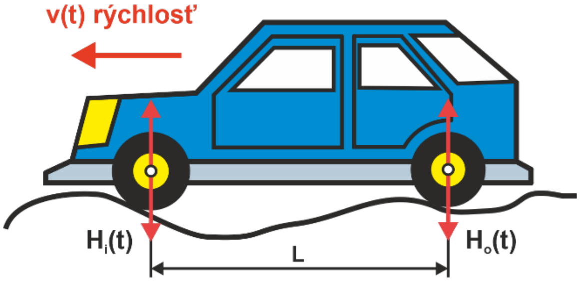
$$\int_{t-t_d(t)}^{t} \frac{1}{t_i(\tau)} d\tau = 1\,. \tag{6.25}$$

Takýto typ blok s **dopravným oneskorením** môžeme použiť napr. **na modelovanie toku kvapaliny v potrubí**, ktorej rýchlosť je premenlivá v čase. Pripomeňme, že čas oneskorenia $\mathbf{t_i(t)}$ možno v tomto prípade vypočítať, ak poznáme dĺžku potrubia **L** a rýchlosť prúdenia kvapaliny $\mathbf{v_i(t)}$. Teda

$$t_i(t) = \frac{L}{v_i(t)}\,. \tag{6.26}$$

Príklad č. 6.2.

Príklad použitia bloku s premenlivým časovým oneskorením – **Variable Time Delay** si ukážeme na jednoduchom praktickom príklade riešenia odozvy posunutia kolies automobilu so známym rázvorom **L**, ktorý sa pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v(t)}$ po nerovnej vozovke, pozri Obr. 6.11.

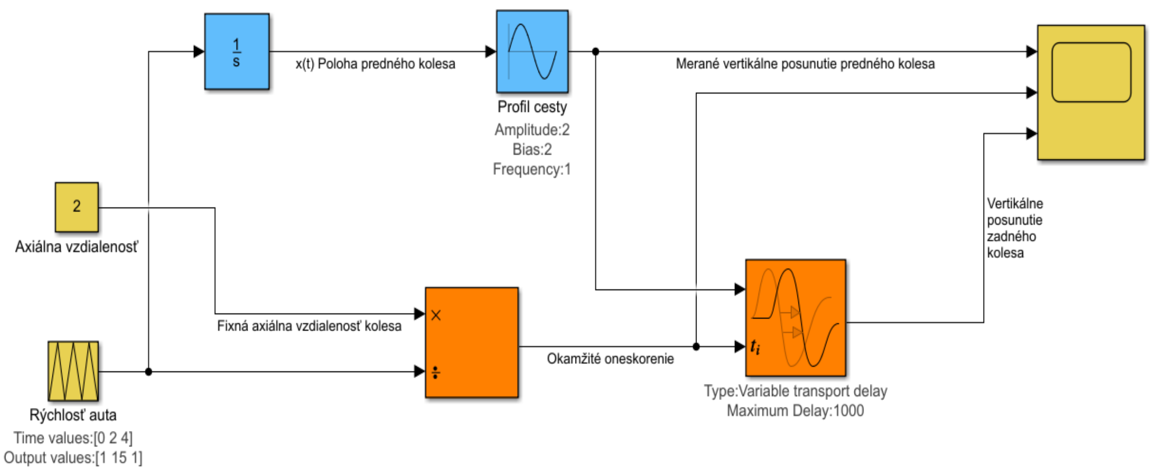


Obr. 6.11. Automobil pohybujúci sa rýchlosťou v(t) po nerovnej vozovke

Auto sa pohybuje pozdĺž vozovky rýchlosťou $\mathbf{v(t)}$. Na prednej náprave kolesa je nainštalovaný snímač polohy vertikálneho posunutia predného kolesa $\mathbf{H_i(t)}$. Ak predpokladáme, že podvozok a vozovka nikdy nestratia kontakt, potom vertikálne posunutie zadného kolesa $\mathbf{H_o(t)}$ môžeme odvodiť ako **časovo oneskorené posunutie** predného kolesa $\mathbf{H_i(t)}$. Riešte odozvu takéhoto systému formou blokovej schémy v **Simulinku**.

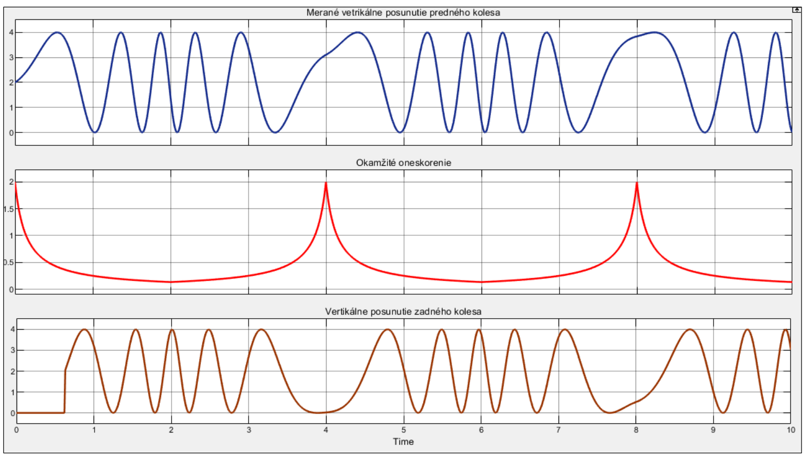
Riešenie:

Okamžité časové oneskorenie $\mathbf{t_i(t)}$ vertikálneho posunutia zadnej nápravy $\mathbf{H_o(t)}$ môžeme vypočítať použitím vzťahu (6.26), kde **L** je vzdialenosť medzi kolesami a $\mathbf{v(t)}$ je aktuálna rýchlosť, ktorou sa daný automobil pohybuje. Priebeh zmeny vertikálneho posunutia zadnej nápravy možno simulovať blokovou schémou, meraním vertikálneho posunutia prednej nápravy. Bloková schéma je znázornená na Obr. 6.12.



Obr. 6.12. Bloková schéma simulácie polohy vertikálneho posunutia kolies zadnej nápravy

Riešenie simulácie vertikálneho posunutia kolies zadnej nápravy automobilu, ktoré bolo simulované použitím predchádzajúcej blokovej schémy, je znázornené na Obr. 6.13.



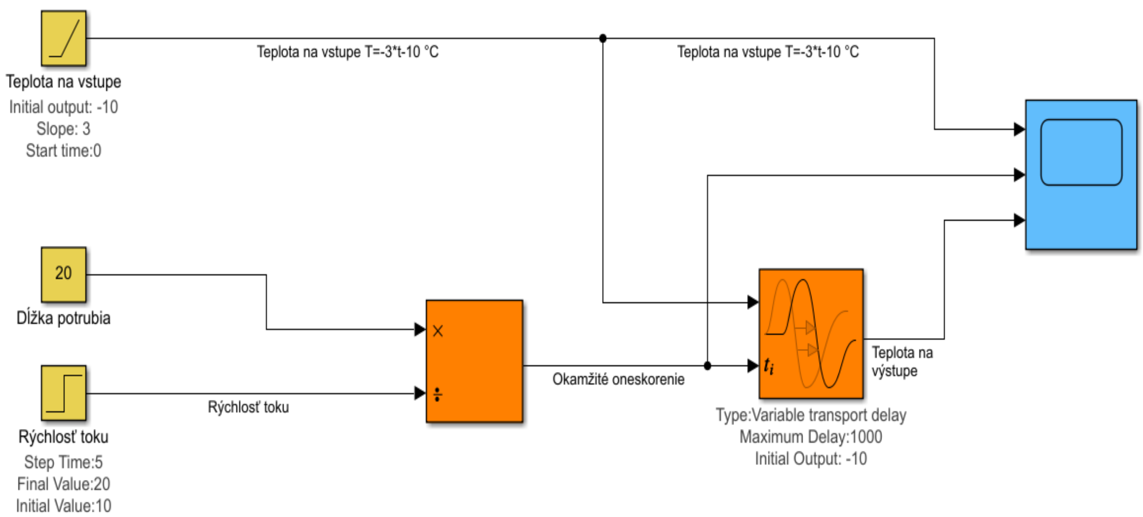
Obr. 6.13. Riešenie simulácie vertikálnej polohy kolies zadnej nápravy automobilu

Príklad č. 6.3.

Predpokladajme, že potrubím známej dĺžky $\mathbf{L = 20\ m}$ prúdi kvapalina rýchlosťou $\mathbf{v(t)}$, ktorá sa v čase $\mathbf{t = 5}$ skokovo zmení z počiatočnej hodnoty $\mathbf{v_0 = 10\ m.s^{-1}}$ na hodnotu $\mathbf{v = 20\ m.s^{-1}}$. Teplota kvapaliny, ktorá vstupuje do potrubia sa mení s časom $\mathbf{t}$; táto zmena teploty je definovaná lineárnou funkciou tvaru $\mathbf{T_i(t) = 3 \cdot t - 10}$. Ak vieme, že teplotu kvapaliny na výstupe potrubia $\mathbf{T_o}$, možno modelovať ako **dopravné oneskorenie** teploty $\mathbf{T_i}$, ktorú sme namerali na vstupe potrubia, vytvorte takú blokovú schému v **Simulinku**, ktorá dokáže tento proces prúdenia kvapaliny potrubím so zmenou teploty vhodne simulovať.

Riešenie:

Proces prúdenia kvapaliny, ktorej teplota sa mení pri prúdení potrubím známej dĺžky **L**, môžeme simulovať vytvorením nasledujúcej blokovej schémy v **Simulinku**, v ktorej použijeme na oneskorenie procesu zmeny teploty kvapaliny blok – **Variable Time Delay**, pozri Obr. 6.14.

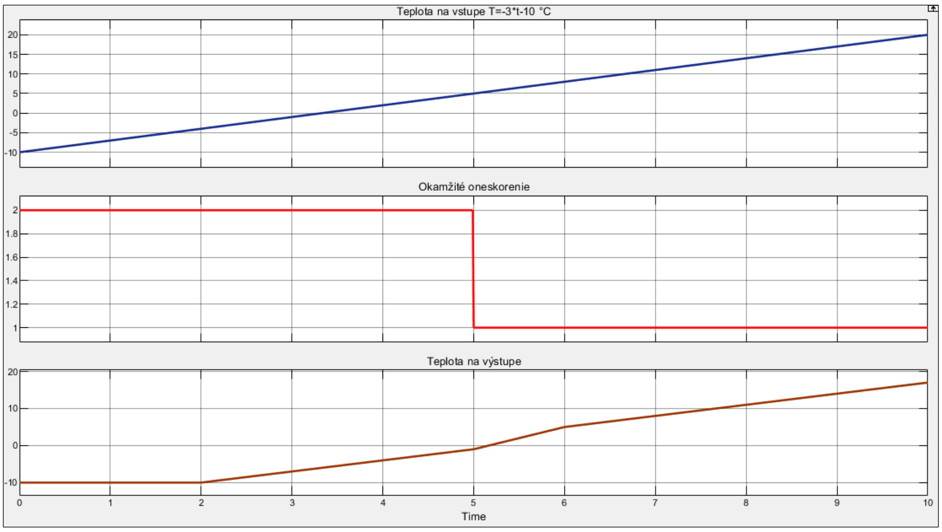


Obr. 6.14. Bloková schéma prúdenia kvapaliny so zmenou teploty dĺžky

Ak predpokladáme, že v čase $\mathbf{t = 0}$ je potrubie prázdne a v čase $\mathbf{t = 2}$ nie je na výstupe žiadny tok kvapaliny, potom výstupnú teplotu pred $\mathbf{t = 2}$ môžeme považovať za počiatočnú teplotu kvapaliny. Čas oneskorenia teploty kvapaliny vieme vypočítať použitím tohto vzťahu. Napr. v čase $\mathbf{t = 0}$ musí platiť, že

$$t_i(t) = \frac{L}{v_i(t)} = \frac{20}{10} = 2\ s\,. \qquad (6.27)$$

Výsledok riešenia simulácie v podobe zmeny teploty kvapaliny na vstupe a výstupe v **Simulinku** podľa blokovej schémy Obr. 6.14, je znázornený na nasledujúcom Obr. 6.15, na ktorom je takisto zobrazený graf okamžitej zmeny dopravného oneskorenia.



Obr. 6.15. Výsledok simulácie zmeny teploty

6.2 PRENOSOVÝ TVAR ZERO-POLE-GAIN V SIMULINKU

Predpokladajme **systém n-tého rádu** s jedným **vstupom** $\mathbf{u(t)}$ a jedným **výstupom** $\mathbf{y(t)}$ s deriváciami vstupného signálu

$$\begin{aligned} a_n \cdot \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) \\ = b_m \cdot \frac{d^{(m)}u(t)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{(m-1)}u(t)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + b_0 \cdot u(t)\,, \end{aligned} \tag{6.28}$$

s prenosovou funkciou systému $\mathbf{G(s)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\,. \tag{6.29}$$

Túto **prenosovú funkciu** $\mathbf{G(s)}$ môžeme vypočítaním koreňov polynómu v čitateli a menovateli upraviť na tento tvar **prenosovej funkcie núl, pólov** a **zosilnenia** (z angl. zero-pole-gain)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}\,, \tag{6.30}$$

kde $\mathbf{z_1, \dots, z_m}$ sú nuly systému a $\mathbf{p_1, \dots, p_n}$ predstavujú póly systému. V **Matlabe** na zadefinovanie takéhoto typu systému existuje príkaz **zpk([ ], [ ], K)**, ktorý má tento syntax

$$Gs = zpk([\, z_1\ z_2 \dots\ z_m], [\, p_1\ p_2 \dots\ p_n], K\,)\,. \tag{6.31}$$

Pre **systém n-tého rádu** s časovým oneskorením **τ**, ktorý je opísaný touto **diferenciálnou rovnicou n-tého rádu**

$$a_n \cdot \frac{d^{(n)}y(t-\tau)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y(t-\tau)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy(t-\tau)}{dt} + a_0 \cdot y(t-\tau) = b_m \cdot \frac{d^{(m)}u(t-\tau)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{(m-1)}u(t-\tau)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_1 \cdot \frac{du(t-\tau)}{dt} + b_0 \cdot u(t-\tau)\,, \qquad (6.32)$$

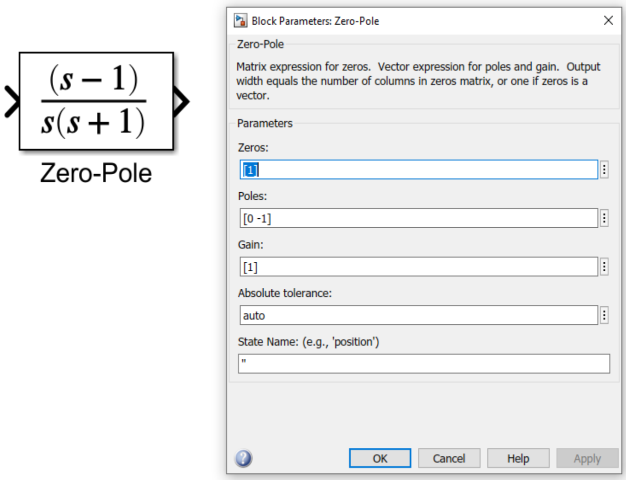
je **prenosová funkcia G(s)** definovaná touto racionálnou funkciou

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \cdot (s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \cdot e^{-\tau t}\ . \qquad (6.33)$$

Takýto typ **systému n-tého rádu** s časovým oneskoreným **T** môžeme v **Matlabe** zadefinovať, použitím modifikovaného tvaru príkazu **zpk**, ktorý má tento syntax

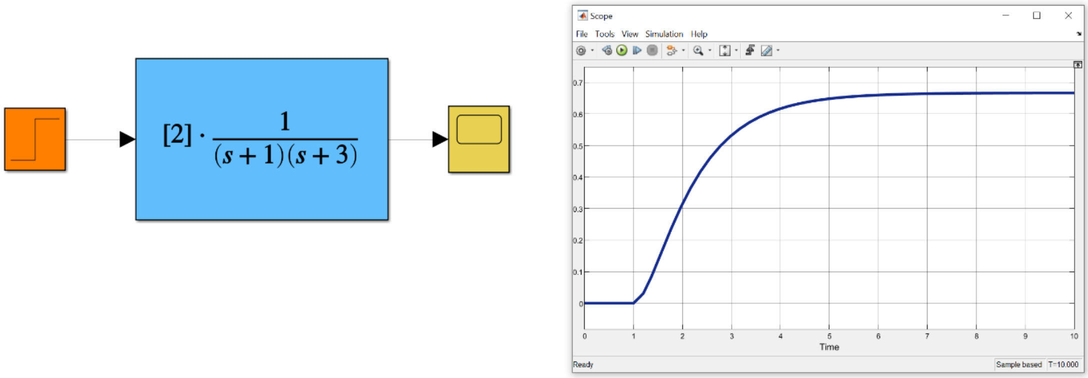
$$Gs = zpk([\,z_1\ z_2 \dots\ z_m], [\,p_1\ p_2 \dots\ p_n], K, 'InputDelay', T)\ . \qquad (6.34)$$

Ekvivalentnou náhradou príkazu **zpk** z prostredia **Matlabu** je blok **Zero-Pole**, ktorý definuje prenosovú funkciu v **Simulinku**. Tento blok je zaradený do knižnice **Continuous**, pozri Obr. 6.16



Obr. 6.16. Zero-Pole blok a jeho blokové parametre

Na ďalšom Obr. 6.17 je znázornený príklad blokovej schémy, ktorá simuluje odozvu systému definovaného prenosovou funkciou v tvare **zero-pole-gain**.



Obr. 6.17. Príklad riešenia odozvy systému na skokovú zmenu, ktorý bol definovaný prenosovou funkciou

Nuly a **póly** systému sú vo všeobecnosti komplexné čísla tvaru $\mathbf{s_i} = \mathbf{Re} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{Im}$, ktoré možno pre každý systém zobraziť v komplexnej **Gaussovej komplexnej rovine** ako mapu rozloženia núl a pólov systému. Na základe polohy zobrazených **pólov** v **Gaussovej rovine** možno posúdiť **stabilitu** daného dynamického systému, t. j. správanie sa systému po jeho vychýlení z rovnovážnej polohy a zániku všetkých prechodových stavov. Systém sa v tomto prípade môže správať ako **stabilný** (ustáli sa v rovnovážnej polohe) alebo ako **nestabilný** (rozkmitá sa nad všetky medze). Dynamický systém považujeme za **stabilný** len v takom prípade, ak sa všetky zobrazené póly systému nachádzajú v ľavej časti **Gaussovej** pol roviny. Matematicky, potom pre všetky korene menovateľa prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$ musí platiť, že ich reálne zložky sú záporné

$$\mathrm{Re} < 0 \ . \tag{6.35}$$

Ak aspoň jeden z koreňov menovateľa nespĺňa predchádzajúcu podmienku, t. j. platí, že jeho reálna zložka

$$\mathrm{Re} \geq 0 \, , \tag{6.36}$$

potom tento dynamický systém bude zaručene systémom **nestabilným** $(\mathbf{Re} > \mathbf{0})$ alebo systémom, ktorý sa nachádza na **hranici stability** $(\mathbf{Re} = \mathbf{0})$. Pripomeňme, že graficky môžeme rozloženie pólov a núl zobraziť v komplexnej rovine pomocou príkazu **Matlabu pzmap**.

Príklad č. 6.4.

Zobrazte rozloženie pólov a núl systému, ktorý definovaný touto prenosovou funkciou

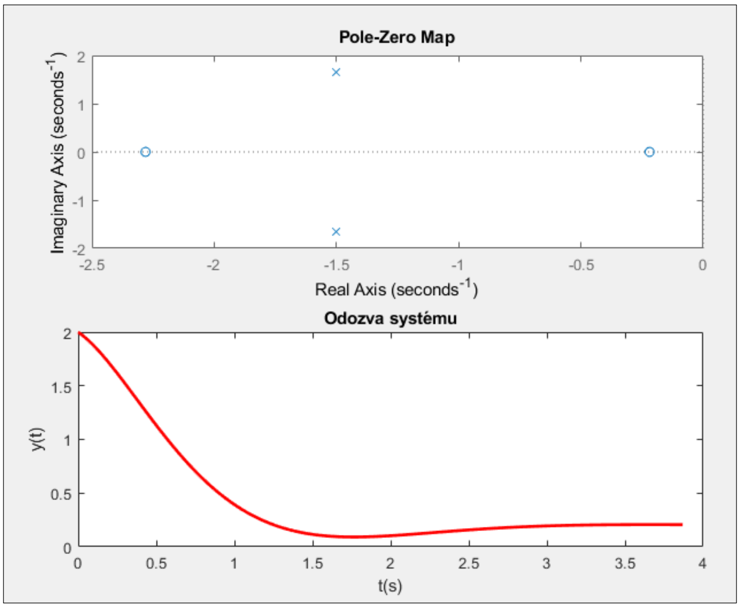
$$\mathrm{H(s)} = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 3s + 5} \, . \tag{6.37}$$

Riešenie:

Výpočtom koreňov čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie $\mathbf{H(s)}$ môžeme dokázať, že daný systém má dve reálne nuly $z_1 = -2.808, z_2 = -0.2192$ a dva imaginárne póly $\mathbf{p_1 = -1.5 + 1.6583i, p_2 = -1.5 - 1.6583i}$. Keďže obe reálne zložky komplexných koreňov, ktoré predstavujú póly systému sú záporné hodnoty, potom možno očakávať, že tento systém sa bude správať charakterom **stabilného systému**. Použitím nasledujúceho skriptu v **Matlabe** zobrazíme rozloženie núl a pólov systému v Gaussovej rovine, ako aj vypočítame odozvu tohto dynamického systému na jednotkovú skokovú zmenu.

```
clc
clear
close all

H=tf([2 5 1],[1 3 5]);
nuly=roots([2 5 1])
poly=roots([1 3 5])

figure(1)
subplot(2,1,1)
pzmap(H)

subplot(2,1,2)
[y, t]=step(H);
plot(t,y,'-r','LineWidth',2)
xlabel('t(s)')
ylabel('y(t)')
title('Odozva systému')
```

Výsledok zobrazenia polohy núl a pólov systému v **Gaussovej rovine** a taktiež priebeh riešenia odozvy systému na jednotkový skok, je znázornený na Obr. 6.18.



Obr. 6.18. Zobrazenie rozloženia pólov a núl v Gaussovej rovine (hore), odozva systému na jednotkový skok (dole)

Príklad č. 6.5.

V tomto príklade predpokladajme diskrétny systém so vzorkovacou frekvenciou $\mathbf{T_s = 0.1\ s}$, ktorý je definovaný v stavovom opise prostredníctvom týchto matíc stavového opisu

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.9 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},\quad C = [10 \quad 5],\quad D = [0]\,, \tag{6.38}$$

zobrazte rozloženie núl a pólov takéhoto diskrétneho systému a vypočítajte jeho skokovú odozvu.

Riešenie.

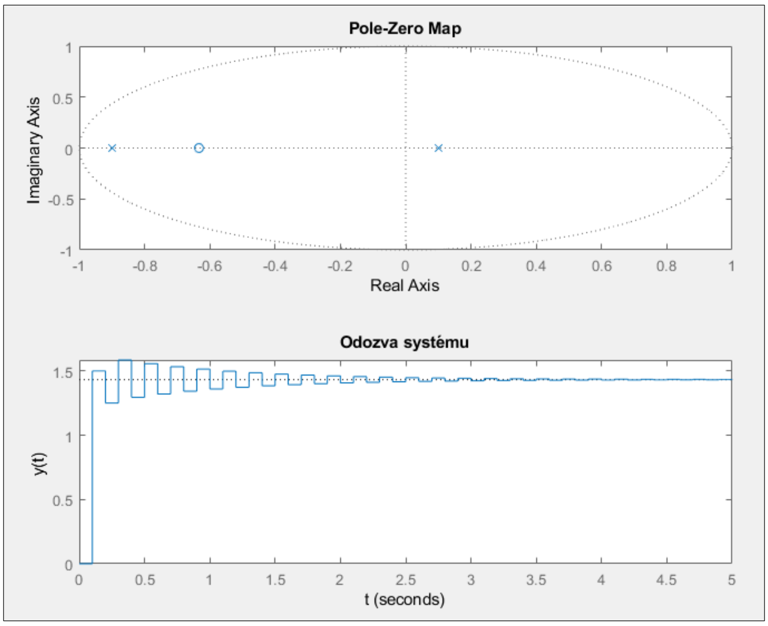
Daný systém je **diskrétnym systémom 2. rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom, ktorý má jednu nulu systému $\mathbf{z_1 = -0.6333}$ a dva imaginárne póly $\mathbf{p_1 = -0.9}$, $\mathbf{p_2 = 0.1}$. Zadefinovaním nasledujúceho skriptu v **Matlabe** zobrazíme rozloženie týchto pólov a nuly v **Gaussovej rovine** a vypočítame odozvu tohto diskrétneho systému.

```
clc
clear
close all

%Stavový opis systému
A=[0.1 0; 0.2 -0.9];
B=[0.1;0.1];
C=[10 5];
D=[0];

%Diskrétny systém
sys=idss(A, B, C, D, 'Ts', 0.1);
tf(sys)

figure(1)
subplot(2,1,1)
pzmap(sys)

subplot(2,1,2)
step(sys)
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('Odozva systému')
```

Pomocou tohto skriptu sme vypočítali prenosovú funkciu $\mathbf{H(s)}$ pre tento diskrétny systém v tomto tvare

$$H(s) = \frac{1.5z^{-1} + 0.95z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} - 0.09z^{-2}}\ . \tag{6.39}$$

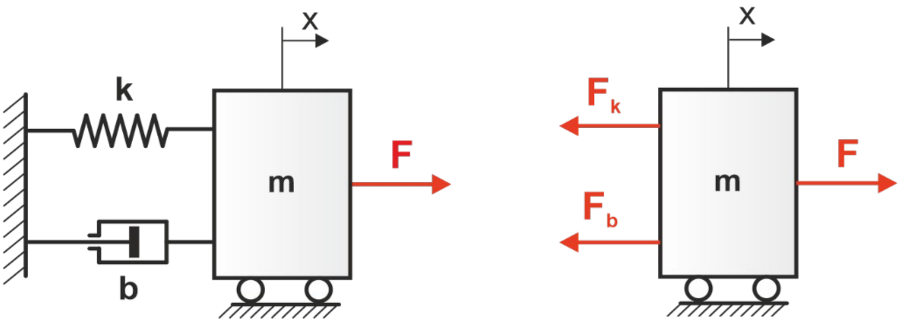
Na ďalšom Obr. 6.19 je zobrazené riešenie odozvy systému a takisto rozloženie núl a pólov v **Gaussovej rovine**.



Obr. 6.19. Zobrazenie pólov a núl v Gaussovej rovine (hore) a odozvy systému (dole)

Príklad č. 6.6.

Uvažujme jednoduchý mechanický systém podľa Obr. 6.20 (a), ktorý pozostáva z hmoty s hmotnosťou $\mathbf{m = 10\ kg}$, pružiny s tuhosťou $\mathbf{k = 3000\ N.m^{-1}}$ a tlmiča s konštantou tlmenia $\mathbf{b = 30\ N.s.m^{-1}}$. Predpokladajme, že na tento systém pôsobí sila $\mathbf{F(t)}$, ktorá sa mení skokovou zmenou z nuly na konečnú hodnotu $\mathbf{F = 1000\ N}$. Riešte odozvu tohto mechanického systému simuláciou v podobe blokového diagramu v **Simulinku** a zobrazte odozvu systému na skokovú zmenu sily $\mathbf{F(t)}$.



Obr. 6.20. Mechanický systém (a) model, (b) uvoľnenie systému

Riešenie:

Mechanický systém podľa Obr. 6.20 (a) najskôr uvoľníme, ako je to znázornené na Obr. 6.20 (b) a potom aplikovaním **II. Newtonovho zákona**, môžeme dospieť k tejto diferenciálnej rovnici

$$\mathrm{m} \cdot \ddot{\mathrm{x}} = \mathrm{F(t)} - \mathrm{F_k} - \mathrm{F_b}\,, \qquad (6.40)$$

kde $\mathbf{F_k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ a $\mathbf{F_b} = \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ sú zložkové rovnice systému, ktorých dosadením dostávame tento tvar diferenciálnej rovnice systému podľa Obr. 6.20 (a)

$$\mathrm{m} \cdot \ddot{\mathrm{x}} = \mathrm{F} - \mathrm{k} \cdot \mathrm{x} - \mathrm{b} \cdot \dot{\mathrm{x}} \,. \tag{6.41}$$

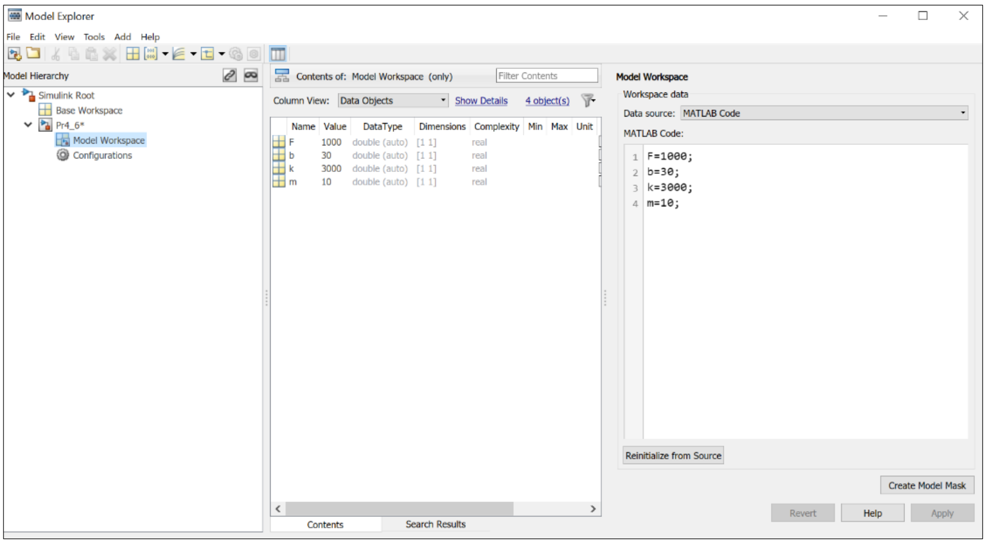
Aby bolo možné túto diferenciálnu rovnicu ďalej riešiť a simulovať metódou blokového diagramu v **Simulinku**, upravíme jej tvar do tzv. **simulinkovského** (blokového) tvaru. Simulinkovský tvar diferenciálnej rovnice získame takým spôsobom, že premennú s najvyššou deriváciou osamostatníme na pravej strane a všetky ostatné výrazy diferenciálnej rovnice prenesieme na jej druhú stranu. Aplikovaním tohto postupu na predchádzajúcu diferenciálnu rovnicu dostávame

$$\ddot{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{m}} \cdot [\mathrm{F} - \mathrm{k} \cdot \mathrm{x} - \mathrm{b} \cdot \dot{\mathrm{x}}] \,. \tag{6.42}$$

Pomocou tohto tvaru diferenciálnej rovnice možno zostaviť **blokový diagram**. Riešenie odozvy, ktorú budeme simulovať prostredníctvom tohto **blokového diagramu**, porovnáme s riešením odozvy pre systém zadefinovaný blokom prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$

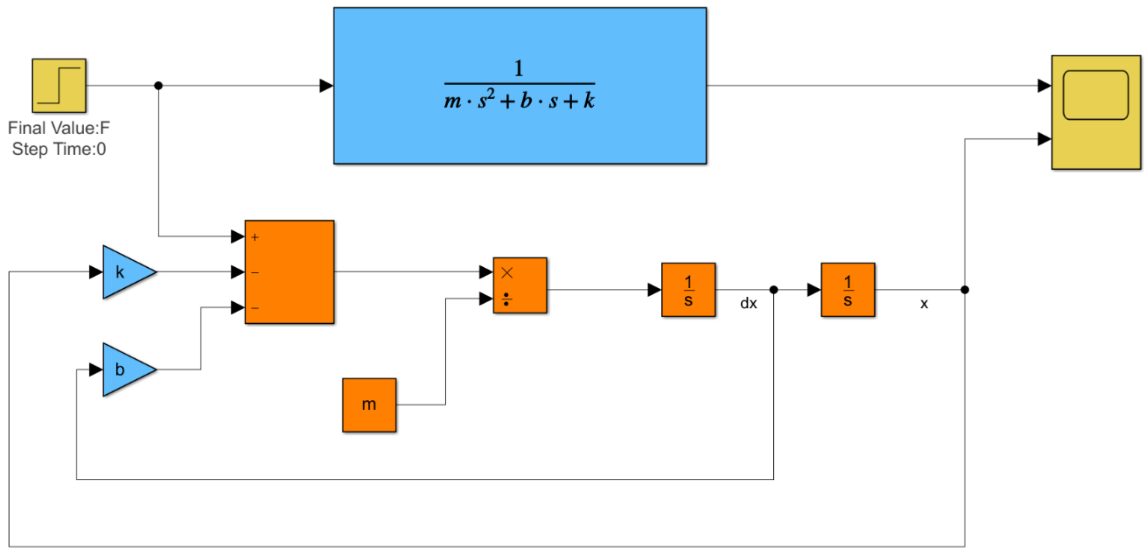
$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{F(s)}} = \frac{1}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2 + \mathrm{b} \cdot \mathrm{s} + \mathrm{k}} \,. \tag{6.43}$$

V prostredí **Simulinku** zadefinujeme parametrický model systému, parametre systému nakonfigurujeme priamo v **Model WorkSpace Explorery**, ako je to znázornené na Obr. 6.21.



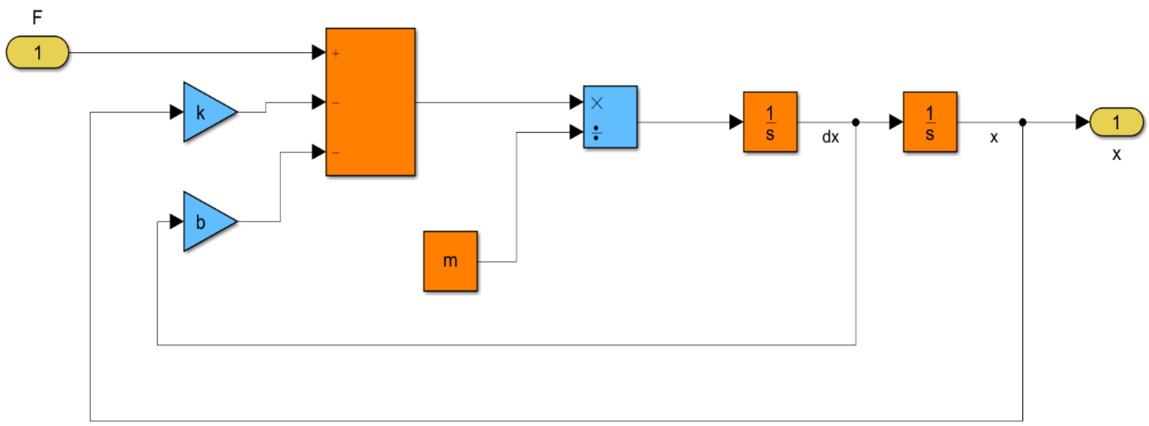
Obr. 6.21. Model Explorer Simulinku

Odozvu systému v **Simulinku** vyriešime na základe blokovej schémy podľa Obr. 6.22, v ktorej vykonáme porovnanie dvoch riešení. Prvé riešenie systému vypočítame použitím bloku prenosovej funkcie **Transfer Function**. A druhé riešenie odozvy systému budeme simulovať blokovým diagramom, ktorý vytvoríme z odvodeného matematického modelu. Túto metódu budeme nazývať tzv. **metódou postupného integrovania**.



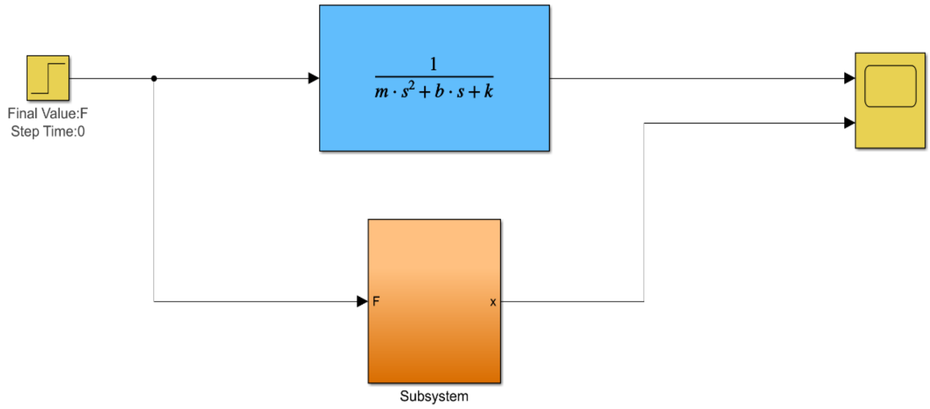
Obr. 6.22. Blokový diagram mechanického systému

Ako si možno všimnúť, tak v blokovej schéme sa nachádzajú dva spojité integrátory a ďalšie iné bloky, ktorými sú súčtový blok **Add** a bloky typu **Gain**, ktoré slúžia na zosilnenie signálu. Poznamenajme, že časti blokovej schémy, ktorá sa nachádza pod blokom systému prenosovej funkcie (**Transfer Function**), možno opäť vytvoriť jeden **Subsystém** so vstupno-výstupnými terminálovými blokmi **In** a **Out**, ako je to znázornené na Obr. 6.23. Týmto **subsystémom blokového diagramu**, ktorý vytvoríme postupom vysvetleným v kapitole (9.6), potom možno danú blokovú schému zjednodušiť.



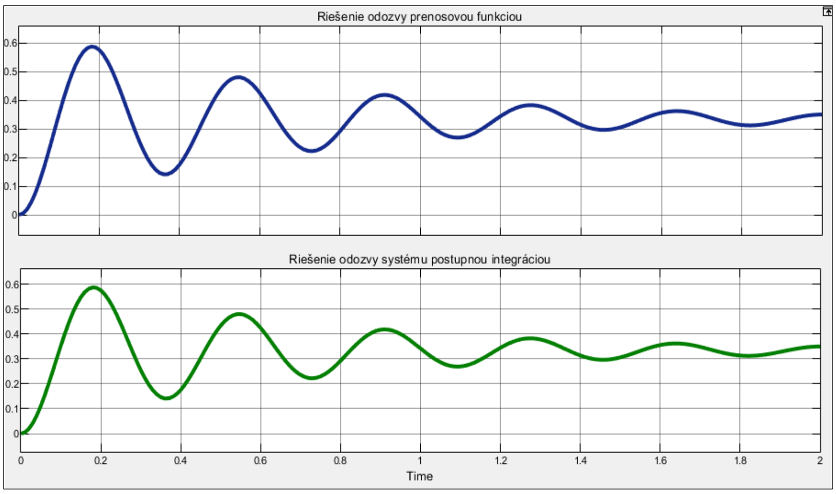
Obr. 6.23. Subsystém blokového diagramu

Zjednodušená bloková schéma s vytvoreným **Subsystémom**, v ktorom sa nachádza časť **blokovej schémy modelu** nadobudne tvar podľa Obr. 6.24.



Obr. 6.24. Zjednodušená bloková schéma

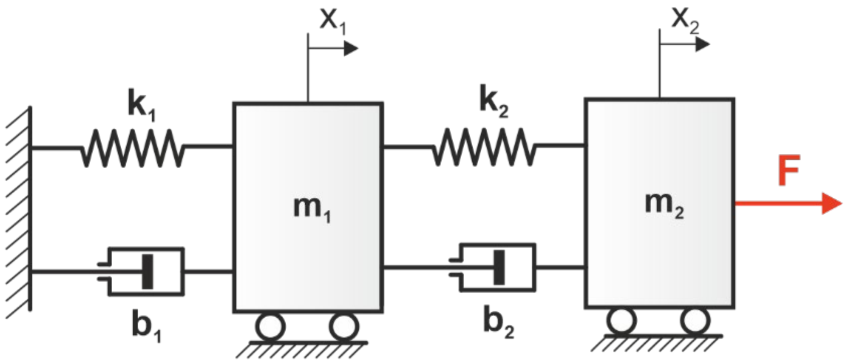
Porovnanie riešenia odozvy systémov pre obidva typy matematických modelov, ktoré boli simulované na skokovú zmenu sily $\mathbf{F(t)}$ pre simulačný čas $\mathbf{t = 2\ s}$, je znázornené na Obr. 6.25. Ako si možno všimnúť tak obe riešenia odozvy sú identické tak v prípade systému realizovaného prenosovou funkciou, ako aj systému riešeného **metódou postupného integrovania**.



Obr. 6.25. Porovnanie odozvy systému na skokovú zmenu

Príklad č. 6.7.

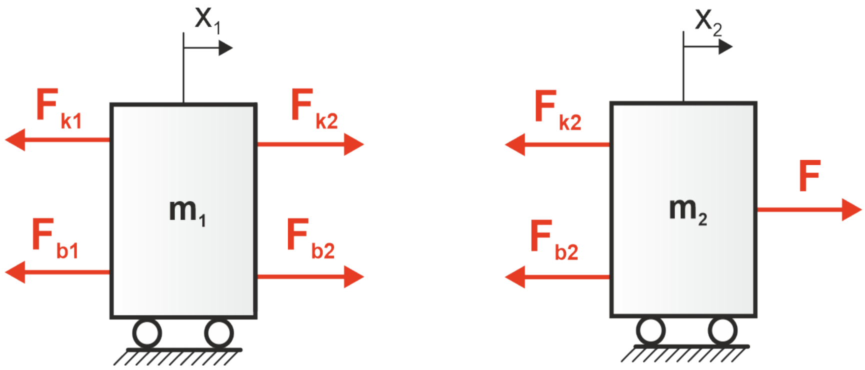
Predpokladajme mechanický systém podľa Obr. 6.26, ktorý pozostáva z dvoch hmôt $\mathbf{m_1 = 2\ kg}$, $\mathbf{m_2 = 3\ kg}$, dvoch pružín s tuhosťami $\mathbf{k_1 = 5\ N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_1 = 7\ N.m^{-1}}$ a dvoch tlmičov s konštantami tlmenia $\mathbf{b_1 = 40\ N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{b_1 = 30\ N.s.m^{-1}}$. Predpokladajme, že tento systém je zaťažený pôsobiacou silou $\mathbf{F(t)}$, ktorá sa mení skokovo na hodnotu $\mathbf{F = 5\ N}$. Zobrazte odozvu tohto dynamického systému použitím **matlabovského skriptu**, pre systém definovaný v tvare **stavového opisu**. Ako **stavový vektor** uvažujte vektor v tvare $\mathbf{x} = [\mathbf{x_1}, \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \mathbf{x_2}, \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{2}]$.



Obr. 6.26. Mechanický systém s dvomi hmotami

Riešenie:

Predtým, než pristúpime k tvorbe matematického modelu, si daný mechanický systém dvoch telies uvoľníme, nahradením komponentov systému za vnútorné účinky síl, pozri Obr. 6.27.



Obr. 6.27. Uvoľnený mechanický systém

Nahradením komponentov systému silovými účinkami síl, môžeme pre tieto sily definovať zložkové rovnice v tomto tvare

$$
\begin{aligned}
F_{k1} &= k_1 \cdot x_1\,, \\
F_{b1} &= b_1 \cdot \dot{x}_1\,, \\
F_{k2} &= k_2 \cdot (x_2 - x_1)\,, \\
F_{b2} &= b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,.
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

Potom pre hmotu $\mathbf{m_1}$ na základe **II. Newtonovho zákona** musí platiť, že

$$
m_1 \cdot \ddot{x}_1 = F_{k2} + F_{b2} - F_{k1} - F_{b1} \tag{6.45}
$$

a dosadením zložkových rovníc do predchádzajúcej rovnice dostávame

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = k_2 \cdot (x_2 - x_1) + b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 \cdot x_1 - b_1 \cdot \dot{x}_1 \qquad (6.46)$$

a podobným spôsobom pre hmotu $\mathbf{m_2}$, musí platiť, že

$$\begin{aligned} m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= F - F_{k2} - F_{b2}\,, \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= F - k_2 \cdot (x_2 - x_1) - b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,. \end{aligned} \qquad (6.47)$$

Teda matematický model tohto systému tvorí sústava týchto dvoch diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= k_2 \cdot (x_2 - x_1) + b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 \cdot x_1 - b_1 \cdot \dot{x}_1\,, \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= F - k_2 \cdot (x_2 - x_1) - b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,. \end{aligned} \qquad (6.48)$$

Predchádzajúci systém dvoch diferenciálnych rovníc možno prepísať do tohto **simulinkovského tvaru** diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} \cdot [k_2 \cdot (x_2 - x_1) + b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 \cdot x_1 - b_1 \cdot \dot{x}_1]\,, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \cdot [F - k_2 \cdot (x_2 - x_1) - b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)]\,. \end{aligned} \qquad (6.49)$$

Za účelom transformácie predchádzajúcej **sústavy dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu** na systém stavového opisu, pristúpime k voľbe **stavových premenných** v zmysle **stavového vektora x**. Pre tento dynamický systém zadefinujeme štyri stavové premenné $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}$ v tomto tvare

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\,, \\ x_2 &= \dot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2\,, \\ x_3 &= x_2\,, \\ x_4 &= \dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{x}_2 = x_4\,. \end{aligned} \qquad (6.50)$$

Na týchto zvolených **stavových premenných** možno predchádzajúci **systém diferenciálnych rovníc 2. rádu** prepísať do tvaru **stavového opisu systému diferenciálnych rovníc 1. rádu**. Aplikovaním zvolených stavových premenných dostávame tento systém v stavovom opise

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 ,\\
\dot{x}_2 &= \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}\left[k_2 \cdot (x_3 - x_1) + b_2 \cdot (x_4 - x_2) - k_1 \cdot x_1 - b_1 \cdot x_2\right] ,\\
\dot{x}_3 &= x_4 ,\\
\dot{x}_4 &= \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}\left[F - k_2 \cdot (x_3 - x_1) - b_2 \cdot (x_4 - x_2)\right] ,
\end{aligned}
\tag{6.51}
$$

ktorý prepíšeme do tohto výsledného **maticového tvaru**

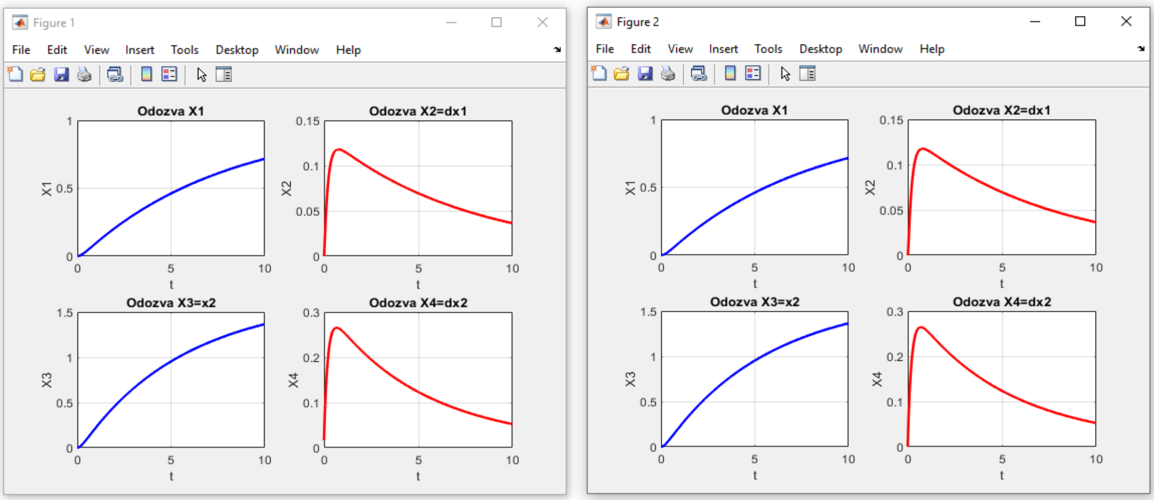
$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
-\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{b_1 + b_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{b_2}{m_1} \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{b_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{b_2}{m_2}
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix} \cdot F(t) .
\tag{6.52}
$$

Takto zapísaný systém v **maticovom tvare** stavového opisu budeme teraz simulovať napísaním nasledujúceho skriptu v **Matlabe**, v ktorom vypočítame odozvu systému metódou postupnej integrácie.

```
clc
clear
close all
t=0;
dt=0.01;
tsim=10;
n=round((tsim-t)/dt);

%Parametre systému
k1=5;
k2=7;
m1=2;
m2=3;
b1=40;
b2=30;
A=[0 1 0 0;-(k1+k2)/m1 -(b1+b2)/m1 k2/m1 ...
    b2/m1;0 0 0 1;k2/m2 b2/m2 -k2/m2 -b2/m2];
B=[0;0;0;1/m2];
C=eye(4);
D=[0];
X=[0 0 0 0]';
F=5;
for i=1:n
    dx=A*X+B*F;
    X=X+dx*dt;
    X1(i,:)=[t, X'];
    t=t+dt;
end

figure(1)
subplot(2,2,1)
plot(X1(:,1),X1(:,2),'b','LineWidth', 2)
axis([0 10 0 1])
xlabel('t')
ylabel('X1')
title('Odozva X1')
```

```
subplot(2,2,2)
plot(X1(:,1),X1(:,3),'r','LineWidth', 2)
axis([0 10 0 0.15])
xlabel('t')
ylabel('X2')
title('Odozva X2=dx1')

subplot(2,2,3)
plot(X1(:,1),X1(:,4),'b','LineWidth', 2)
axis([0 10 0 1.5])
xlabel('t')
ylabel('X3')
title('Odozva X3=x2')

subplot(2,2,4)
plot(X1(:,1),X1(:,5),'r','LineWidth', 2)
axis([0 10 0 0.3])
xlabel('t')
ylabel('X4')
title('Odozva X4=dx2')

sys=ss(A,B,C,D);
t=0:dt:tsim;
y=step(F*sys,0:dt:tsim);

figure(2)
subplot(2,2,1)
plot(t,y(:,1),'b','LineWidth', 2)
axis([0 10 0 1])
xlabel('t')
ylabel('X1')
title('Odozva X1')

subplot(2,2,2)
plot(t,y(:,2),'r','LineWidth', 2)
axis([0 10 0 0.15])
xlabel('t')
ylabel('X2')
title('Odozva X2=dx1')

subplot(2,2,3)
plot(t,y(:,3),'b','LineWidth', 2)
axis([0 10 0 1.5])
xlabel('t')
ylabel('X3')
title('Odozva X3=x2')

subplot(2,2,4)
plot(t,y(:,4),'r','LineWidth', 2)
axis([0 10 0 0.3])
xlabel('t')
ylabel('X4')
title('Odozva X4=dx2')
```

Na nasledujúcich Obr. 6.28 (a) a (b) je znázornené porovnanie dvoch riešení odozvy systému, ktoré boli vypočítané simuláciou v predchádzajúcom skripte **Matlabu**. Prvý typ odozvy systému zobrazený na grafe Obr. 6.28 (a), bol vypočítaný **metódou postupnej integrácie diferenciálneho systému** zapísaného v stavovom opise, ktorá bola počítaná pomocou cyklu **for**, pozri predchádzajúci skript. Druhá odozva systému zobrazená na Obr. 6.28 (b), bola vypočítaná použitím príkazu **step** pre daný systém, ktorý bol zadefinovaný ďalším **matlabovským príkazom**, ktorý slúži na zadefinovanie systému v **stavovom opise**. Týmto príkazom je príkaz **ss(A, B, C, D)**, pozri predchádzajúci skript.

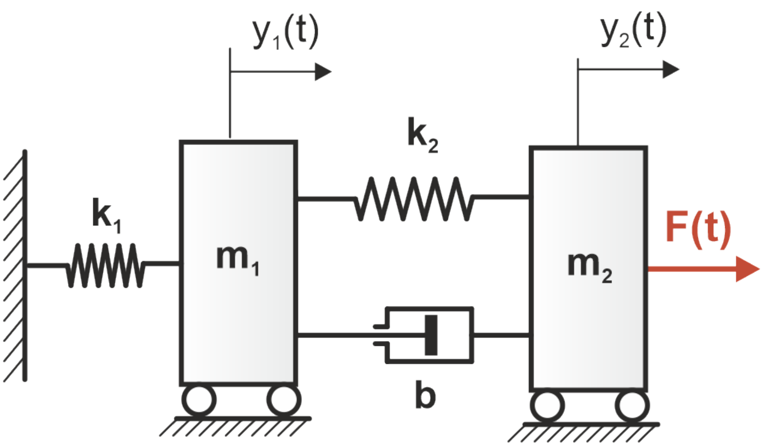


(a) (b)

Obr. 6.28. Odozva systému, (a) riešená metódou postupnej integrácie, (b) riešená pomocou príkazov ss a step

Príklad č. 6.8.

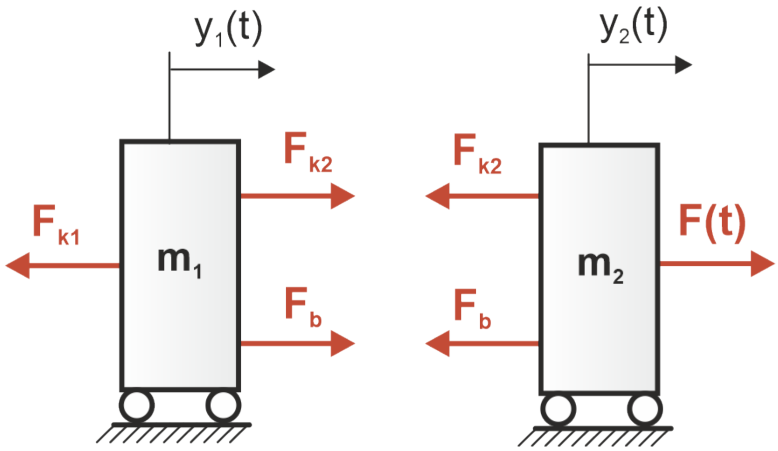
Na Obr. 6.29 je znázornený mechanický systém, ktorý je zaťažený silou $\mathbf{F = 1\,N}$. Tento mechanický systém je tvorený dvomi hmotami a pružinami, a takisto jedným tlmiacim členom. Ak poznáme vstupné parametre systému $\mathbf{m_1 = 2\,kg}$, $\mathbf{m_2 = 3.5\,kg}$, tuhostí pružín $\mathbf{k_1 = 10\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 20\,N.m^{-1}}$ a hodnotu tlmenia $\mathbf{b = 1.5\,N.s.m^{-1}}$, odvoďte matematický model systému a riešte odozvu tohto systému prostredníctvom skriptu v **Matlabe** pre uvažovaný simulačný čas $\mathbf{t\ =\ 20\,s}$.



Obr. 6.29. Systém s dvomi hmotami

Riešenie:

Predtým, než pristúpime k odvodeniu **matematického modelu systému**, si daný mechanický systém dvoch telies uvoľníme. Uvoľnený mechanický model systému je znázornený na nasledujúcom Obr. 6.30.



Obr. 6.30. Uvoľnené telesá mechanického systému

Podľa Obr. 6.30 na uvoľnené telesá pôsobia vnútorné a vonkajšie sily, pre ktoré možno zadefinovať tieto zložkové rovnice

$$
\begin{aligned}
F_{k1} &= k_1 \cdot y_1\,, \\
F_{k2} &= k_2 \cdot (y_2 - y_1)\,, \\
F_b &= b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)\,.
\end{aligned}
\qquad (6.53)
$$

Na základe **II. Newtonovho zákona** potom pre hmotu $\mathbf{m_1}$, musí platiť, že

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= F_{k2} + F_b - F_{k1}\,, \\
m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= k_2 \cdot (y_2 - y_1) + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_1 \cdot y_1
\end{aligned}
\qquad (6.54)
$$

a pre hmotu $\mathbf{m_2}$ musí platiť táto diferenciálna rovnica

$$
\begin{aligned}
m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= F(t) - F_{k2} - F_b\,, \\
m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= F(t) - k_2 \cdot (y_2 - y_1) - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)\,.
\end{aligned}
\qquad (6.55)
$$

To znamená, že dostávame túto sústavu dvoch **diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= k_2 \cdot (y_2 - y_1) + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_1 \cdot y_1\,, \\
m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= F(t) - k_2 \cdot (y_2 - y_1) - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)\,.
\end{aligned}
\qquad (6.56)
$$

Úpravou predchádzajúcej **sústavy diferenciálnych rovníc** do **simulinkovského tvaru** dostávame

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{1}{m_1} \cdot [k_2 \cdot (y_2 - y_1) + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_1 \cdot y_1] \ , \\ \ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} \cdot [F(t) - k_2 \cdot (y_2 - y_1) - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)] \ . \end{aligned} \qquad (\ 6.57\ )$$

Sústavu diferenciálnych rovníc (6.58) upravíme premiestnením všetkých jej členov, ktoré obsahujú neznáme veličiny na ľavú stranu týchto rovníc

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{y}_1 - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 \cdot (y_2 - y_1) + k_1 \cdot y_1 &= 0\ , \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 \cdot (y_2 - y_1) &= F(t) \end{aligned} \qquad (\ 6.58\ )$$

a následne tento systém prepíšeme do tohto **maticového tvaru**

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \ . \qquad (\ 6.59\ )$$

Stavový opis každého dynamického systému možno odvodiť zo **všeobecného zápisu systému v maticovom tvare**, ktorý bol odvodený zo sústavy diferenciálnych rovníc. Platí teda, že

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{y}(t) + B \cdot \dot{y}(t) + K \cdot y(t) &= F(t)\ , \\ M \cdot \ddot{y}(t) &= F(t) - B \cdot \dot{y}(t) - K \cdot y(t)\ , \\ M^{-1} \cdot M \cdot \ddot{y}(t) &= M^{-1} \cdot F(t) - M^{-1} \cdot B \cdot \dot{y}(t) - M^{-1} \cdot K \cdot y(t)\ , \\ \ddot{y}(t) &= M^{-1} \cdot F(t) - M^{-1} \cdot B \cdot \dot{y}(t) - M^{-1} \cdot K \cdot y(t)\ . \end{aligned} \qquad (\ 6.60\ )$$

Aplikujme teraz predchádzajúcu rovnicu na matematický model dynamického systému, ktorý je zapísaný v maticovom tvare (6.59). Inverzná matica hmotnosti $\mathbf{M^{-1}}$ tohto systému má tvar

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} . \qquad (\ 6.61\ )$$

Pre systém v maticovom tvare (6.59), ktorý prenásobíme **inverznou maticou hmotnosti $\mathbf{M}^{-1}$** z pravej strany, musí platiť, že

$$\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{m_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ F(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{m_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -b\\ -b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix}\frac{1}{m_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} \tag{6.62}$$

Ďalšími matematickými úpravami dostávame tento výsledný matematický model systému

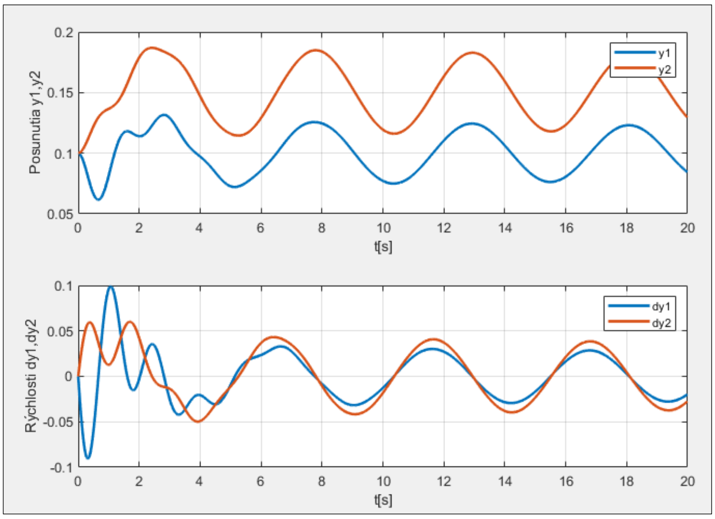
$$\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{F(t)}{m_2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{b}{m_1} & -\frac{b}{m_1}\\ -\frac{b}{m_2} & \frac{b}{m_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1}\\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}, \tag{6.63}$$

ktorý budeme simulovať a riešiť v **Matlabe** napísaním nasledujúceho skriptu.

```
clc
clear
close all

F=1;
m1=2;
m2=3.5;
b=1.5;
k1=10;
k2=20;
B=[b/m1 -b/m1;-b/m2 b/m2];
K=[(k1+k2)/m1 -k2/m1;-k2/m2 k2/m2];

%Počiatočné podmienky
Y=[0.1;0.1];
dY=[0;0];

%Čas simulácie
t=0;
tsim=20;
dt=0.01;
n=round(tsim-t)/dt;

%Metóda postupnej integrácie
for i=1:n
    X(i,:)=[t Y' dY'];
    ddY=[0;F/m2]-B*dY-K*Y;
    dY=dY+dt*ddY;
    Y=Y+dt*dY;
    t=t+dt;
end
```

```
figure(1)

subplot(2,1,1)
plot(X(:,1),X(:,2:3),'LineWidth',2)
xlabel('t[s]')
ylabel('Posunutia y1,y2')
legend('y1','y2')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(X(:,1),X(:,4:5),'LineWidth',2)
legend('dy1','dy2')
xlabel('t[s]')
ylabel('Rýchlosti dy1,dy2')
grid on
```

Riešenie odozvy daného systému je znázornené na nasledujúcich grafoch v podobe priebehov posunutí a rýchlostí, pozri Obr. 6.31.



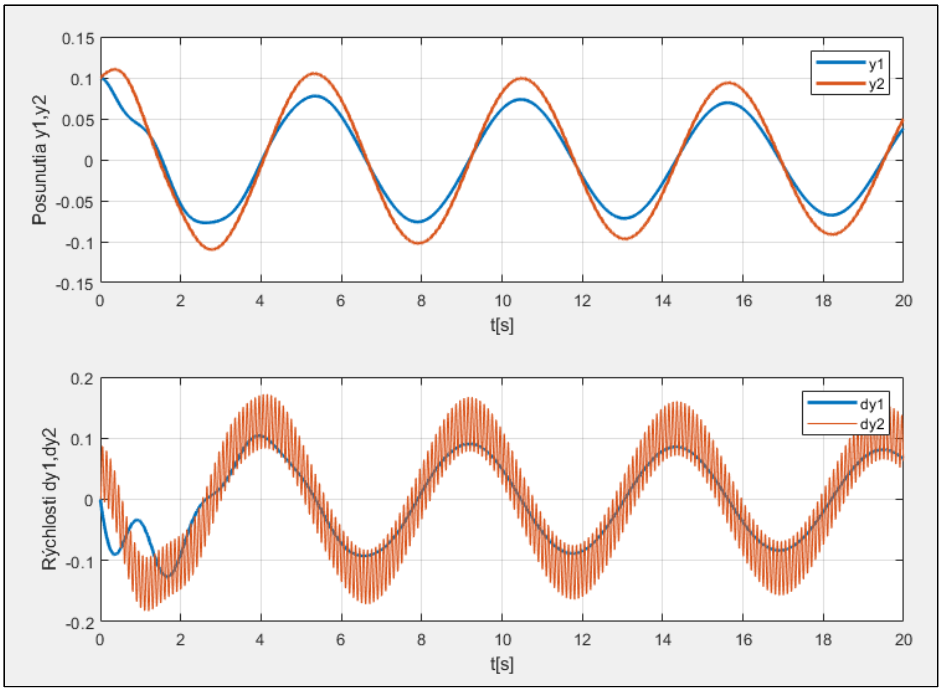
Obr. 6.31. Odozva systému na skokovú zmenu sily F(t)

Modifikujme, teraz riešenie tým, že budeme uvažovať harmonicky meniacu sa zaťažujúcu silu $\mathbf{F(t)}$. Predpokladajme, že táto harmonická sila $\mathbf{F(t)}$ je definovaná funkciou $\mathbf{F = F_0 \cdot sin(\omega \cdot t)}$, kde $\mathbf{F_0 = 10\ N}$ je amplitúda signálu a $\mathbf{f = 10\ Hz}$ je budiaca frekvencia. Poznamenajme, že v tomto prípade nie je nutné napísať nový skript v **Matlabe**, ale v pôvodnom skripte postačuje vykonať určité zmeny, pozri vyznačené časti v nasledujúcom skripte **Matlabu**.

```
clc
clear
close all

F0=10;
f=10;
m1=2;
m2=3.5;
b=1.5;
k1=10;
k2=20;
B=[b/m1 -b/m1;-b/m2 b/m2];
K=[(k1+k2)/m1 -k2/m1;-k2/m2 k2/m2];
%Počiatočné podmienky
Y=[0.1;0.1]; dY=[0;0];
```

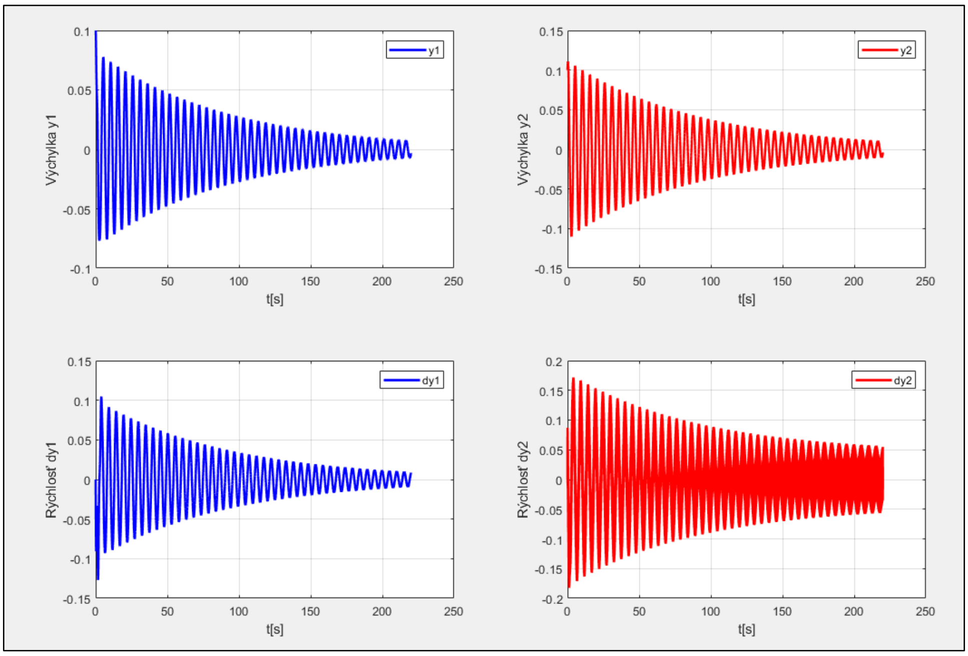
```
%Čas simulácie
t=0;
tsim=20;
dt=0.01;
n=round(tsim-t)/dt;

%Metóda postupnej integrácie
for i=1:n
    X(i,:)=[t Y' dY'];
    F=F0*sin(2*pi*f*t);
    ddY=[0;F/m2]-B*dY-K*Y;
    dY=dY+dt*ddY;
    Y=Y+dt*dY;
    t=t+dt;
end

figure(1)

subplot(2,1,1)
plot(X(:,1),X(:,2:3),'LineWidth',2)
xlabel('t[s]')
ylabel('Posunutia y1,y2')
legend('y1','y2')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(X(:,1),X(:,4:5),'LineWidth',2)
legend('dy1','dy2')
xlabel('t[s]')
ylabel('Rýchlosti dy1,dy2')
grid on
```

Riešenie odozvy systému v prípade harmonicky meniacej sa sily **F(t)** je znázornené v podobe priebehov **posunutí** a **rýchlostí** na grafoch podľa Obr. 6.32.



Obr. 6.32. Odozva systému na skokovú zmenu harmonicky meniacej sa sily F(t)

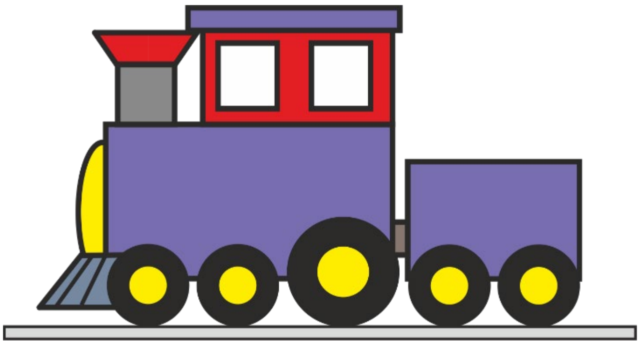
Na predchádzajúcich grafoch odozvy, ktorú sme riešili pre čas simulácie $\mathbf{t = 20\ s}$, neexistuje možnosť identifikovať čas ustálenia systému. Tento čas však možno určiť predĺžením času simulácie napr. na hodnotu $\mathbf{t = 220\ s}$, keď vieme na odozve systému zreteľne identifikovať pásmo ustálenia po uplynutí času približne $\mathbf{t = 200\ s}$. Od tohto času odozva systému nadobúda charakter kmitania vstupnej budiacej funkcie.



Obr. 6.33. Ustálenie odozvy systému

Príklad č. 6.9.

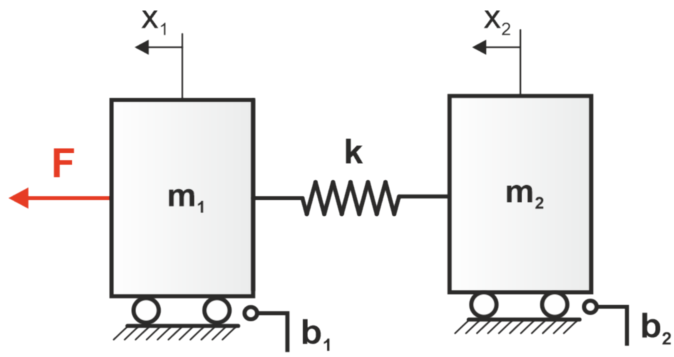
V tomto príklade budeme uvažovať model vláčika, ktorý pozostáva z lokomotívy a vozňa podľa Obr. 6.34. Vláčik tvoria dve hmoty **lokomotívy** a **vozňa**, definované známymi parametrami $\mathbf{m_1 = 1\ kg}$, $\mathbf{m_2 = 0.5\ kg}$, ktoré sú navzájom prepojené pružinou známej tuhosti $\mathbf{k = 1\ N.m^{-1}}$. Systém vláčika je zaťažený silou $\mathbf{F = 1\ N}$, ktorá predstavuje ťahovú silu rušňa. Pri pohybe kolies vláčika predpokladáme existenciu **valivého trenia**, ktoré budeme popisovať súčiniteľom $\mathbf{f = 0.02\ s.m^{-1}}$. Nájdite **stavové rovnice systému** a riešte odozvu tohto systému prostredníctvom skriptu v **Matlabe**. Získané riešenie v prostredí **Matlabu** overte simuláciou blokovej schémy v **Simulinku**.



Obr. 6.34. Systém vláčika

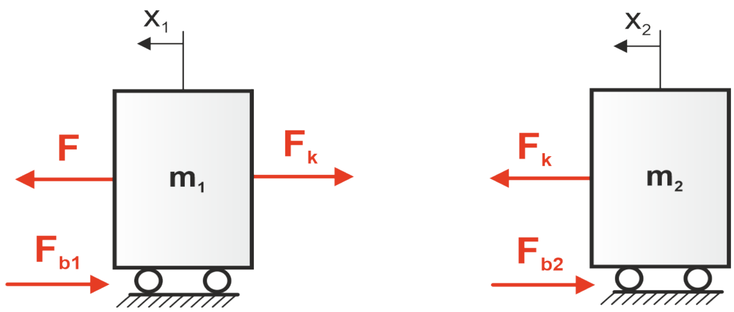
Riešenie:

Náhradou skutočného systému je model dvoch hmôt znázornený na nasledujúcom Obr. 6.35, ktoré sú spojené pružinou s tuhosťou **k**.



Obr. 6.35. Mechanický model vláčika

Predchádzajúci mechanický model dvoch hmôt spojených pružinou uvoľníme nahradením **vnútorných** a **odporových** síl, ktoré pôsobia na jednotlivé hmoty, pozri Obr. 6.36.



Obr. 6.36. Uvoľnený mechanický systém vláčika

Na jednotlivé hmoty podľa Obr. 6.36 pôsobí sila od pružiny $\mathbf{F_k}$ a takisto odporové sily valivého trenia $\mathbf{F_{b1} = f \cdot m_1 \cdot g \cdot \dot{x}_1}$ a $\mathbf{F_{b2} = f \cdot m_2 \cdot g \cdot \dot{x}_2}$, ktoré závisia jednak od súčiniteľa valivého trenia **f**, tiaže jednotlivých telies (normálových síl) charakterizovaných hmotami $\mathbf{m_1}$ a $\mathbf{m_2}$ a rýchlosťou pohybu, ktorou sa daná hmota pohybuje. Na základe predchádzajúceho možno definovať tieto zložkové rovnice daného systému

$$\begin{aligned} F_k &= k \cdot (x_1 - x_2)\,, \\ F_{b1} &= f \cdot m_1 \cdot g \cdot \dot{x}_1\,, \\ F_{b2} &= f \cdot m_2 \cdot g \cdot \dot{x}_2\,. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Aplikovaním **II. Newtonovho zákona** pre hmotu $\mathbf{m_1}$, musí platiť

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= F - B_1 \cdot \dot{x}_1 - F_k\,, \\ m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= F - f \cdot m_1 \cdot g \cdot \dot{x}_1 - k \cdot (x_1 - x_2)\,, \end{aligned} \tag{6.65}$$

kde $\mathbf{B_1 = f \cdot m_1 \cdot g}$ a pre hmotu $\mathbf{m_2}$ musí platiť, že

$$\begin{aligned} m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= -B_2 \cdot \dot{x}_2 + F_k\,, \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= -f \cdot m_2 \cdot g \cdot \dot{x}_2 + k \cdot (x_1 - x_2)\,, \end{aligned} \tag{6.66}$$

kde $\mathbf{B_2 = f \cdot m_2 \cdot g}$. To znamená, že dostávame **sústavu dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= F - f \cdot m_1 \cdot g \cdot \dot{x}_1 - k \cdot (x_1 - x_2)\,, \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= -f \cdot m_2 \cdot g \cdot \dot{x}_2 + k \cdot (x_1 - x_2)\,, \end{aligned} \tag{6.67}$$

ktorú môžeme prepísať do tohto **simulinkovského tvaru**

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1}[F - f \cdot m_1 \cdot g \cdot \dot{x}_1 - k \cdot (x_1 - x_2)]\,, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2}[-f \cdot m_2 \cdot g \cdot \dot{x}_2 + k \cdot (x_1 - x_2)]\,. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Zo systému diferenciálnych rovníc zapísaných **simulinkovskom tvare** možno odvodiť **stavový opis systému**. Predtým, než pristúpime k odvodeniu **stavového opisu systému**, zadefinujeme **stavové premenné**, ktoré zapíšeme do tohto tvaru stavového vektora

$$x^T = [x_1, v_1, x_2, v_2]^T\,, \tag{6.69}$$

kde premenné $\mathbf{x_1}$ a $\mathbf{x_2}$ budú predstavovať výchylky hmôt $\mathbf{m_1}$ a $\mathbf{m_2}$ daného systému a premenné $\mathbf{v_1}$ a $\mathbf{v_2}$ budú charakterizovať rýchlosti pohybu týchto hmôt.

Vykonaním matematických úprav s uvažovaním zvolených **stavových premenných**, ktoré aplikujeme na predchádzajúci odvodený systém **sústavy diferenciálnych rovníc 2. rádu** (6.68), môžeme odvodiť nasledujúci matematický model systému v **stavovom opise**, ktorý má tvar **sústavy diferenciálnych rovníc 1. rádu**.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x_1 = \dot{x}_1 = v_1 \,, \\
&\frac{d}{dt}v_1 = \frac{F}{m_1} - f\cdot g\cdot v_1 - \frac{k}{m_1}\cdot x_1 + \frac{k}{m_1}\cdot x_2 \,, \\
&\frac{d}{dt}x_2 = \dot{x}_2 = v_2 \,, \\
&\frac{d}{dt}v_2 = -f\cdot g\cdot v_2 + \frac{k}{m_2}\cdot x_1 - \frac{k}{m_2}\cdot x_2 \,.
\end{aligned}
\tag{6.70}
$$

Poznamenajme, že v prípade **stavového opisu systému** možno predchádzajúcu **sústavu diferenciálnych rovníc 1.** doplniť o výstupnú **lineárnu rovnicu**. Tvar tejto lineárnej výstupnej rovnice sa riadi tvarom zvoleného výstupného vektora **y**. Pre bližšie informácie ohľadom **stavového opisu** pozri kapitolu 7, ktorá sa tomuto stavovému opisu venuje podrobnejšie. Ak si za **výstup systému** zvolíme iba rýchlosť lokomotívy $\mathbf{v_1}$, potom výstupná rovnica **stavového opisu** nadobudne tento tvar

$$
y = v_1 \,. \tag{6.71}
$$

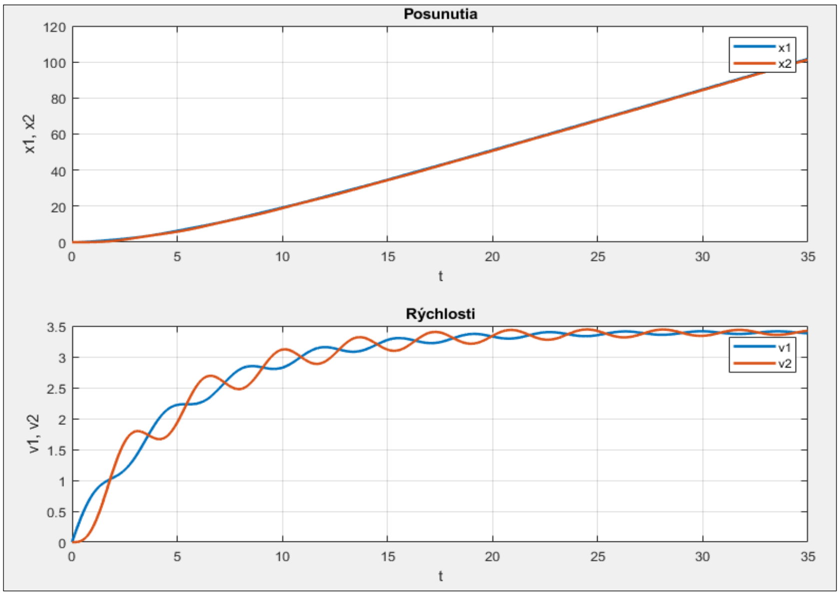
Predchádzajúce odvodené rovnice **stavového opisu** môžeme prepísať do maticového tvaru a týmto spôsobom identifikovať štyri základné matice **stavového opisu A**, **B**, **C**, **D**, ktoré charakterizujú správanie sa daného systému, bližšie pozri kapitolu 7. Prepísaním systému **diferenciálnych rovníc 1. rádu** (6.73) a **lineárnej výstupnej rovnice** (6.71) do maticového tvaru, dostávame tento stavový zápis systému

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -fg & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & -fg \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F(t) \,, \\
&y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + [0] \cdot F(t) \,.
\end{aligned}
\tag{6.72}
$$

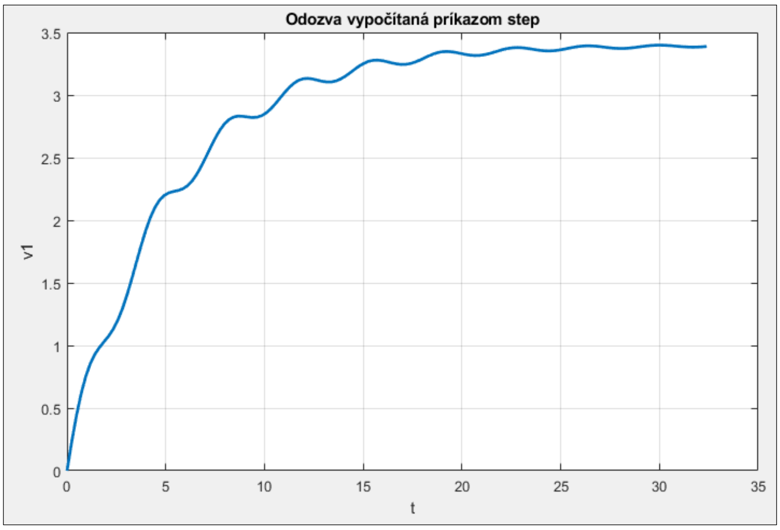
Predchádzajúci systém zapísaný v stavovom opise budeme riešiť pomocou nasledujúceho skriptu v **Matlabe** s uvažovaním **vstupných hodnôt** a **parametrov** matematického modelu podľa zadania. V tomto skripte **Matlabu** vyriešime odozvu **posunutí** a **rýchlostí** jednotlivých telies systému použitím **metódy postupnej integrácie**, pozri cyklus **for** v nasledujúcom skripte.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
k=1;
m1=1;
m2=0.5;
F=1;
f=0.02;
g=9.81;

%Matice stavového opisu
A=[0 1 0 0;-k/m1 -f*g k/m1 0;0 0 0 1;k/m2 0 -k/m2 -f*g];
B=[0;1/m1;0;0];
C=[0 1 0 0];
D=[0];
X=[0 0 0 0]'; %vektor počiatočných podmienok

%Čas simulácie
t=0;
tsim=35;
dt=0.02;
n=round(tsim-t)/dt;

for i=1:n
    X1(i,:)=[t X'];
    dx=A*X+B*F;
    X=X+dt*dx;
    t=t+dt;
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(X1(:,1),X1(:,2:2:4),'LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('x1, x2')
title('Posunutia')
legend('x1','x2')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(X1(:,1),X1(:,3:2:5),'LineWidth',2)
xlabel('t')
title('Rýchlosti')
ylabel('v1, v2')
legend('v1','v2')
grid on

%Riešenie skokovej odozvy príkazom ss
sys=ss(A,B,C,D);
figure(2)
[y, t]=step(sys);
plot(t,y,'LineWidth',2)
xlabel('t')
title('Odozva vypočítaná príkazom step')
ylabel('v1')
grid on
```

Riešenie odozvy systému, ktoré bolo vypočítané v predchádzajúcom skripte **metódou postupnej integrácie**, je znázornené na Obr. 6.37. Riešenie odozvy systému definovaného v stavovom opise, ktorý bol v skripte realizovaný príkazom **Matlabu ss** a následne podrobený analýze skokovej odozvy príkazom **step**, je znázornené na Obr. 6.38.



Obr. 6.37. Riešenie odozvy systému definovaného v stavovom opise



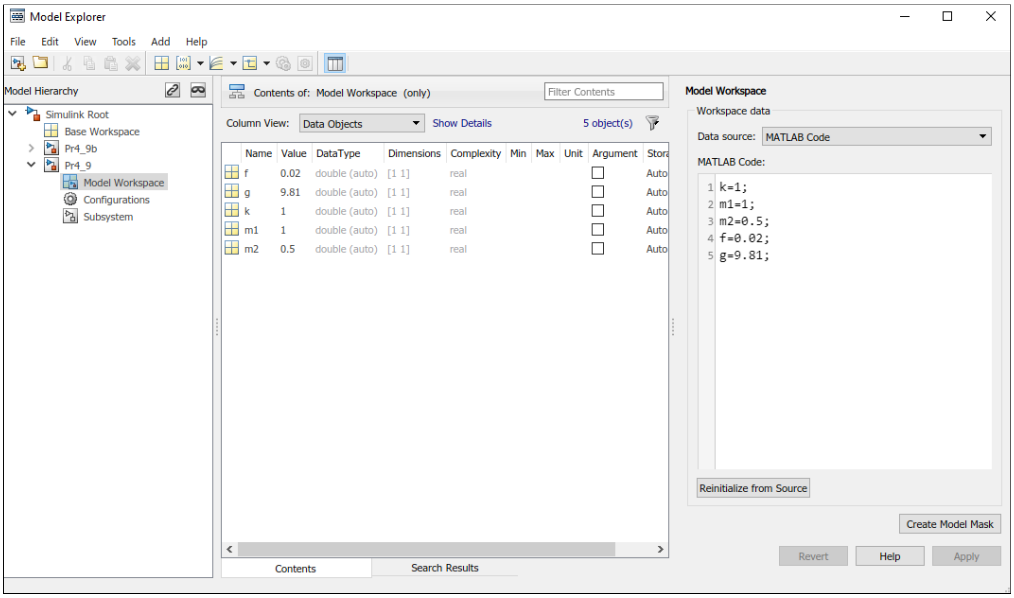
Obr. 6.38. Riešenie odozvy systému vypočítanej príkazom step

Ďalej pre nami odvodený matematický model, ktorý sme prepísali do tohto **simulinkovského tvaru**

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}[F - f \cdot m_1 \cdot g \cdot \dot{x}_1 - k \cdot (x_1 - x_2)]\,,$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}[-f \cdot m_2 \cdot g \cdot \dot{x}_2 + k \cdot (x_1 - x_2)]\,, \tag{6.73}$$

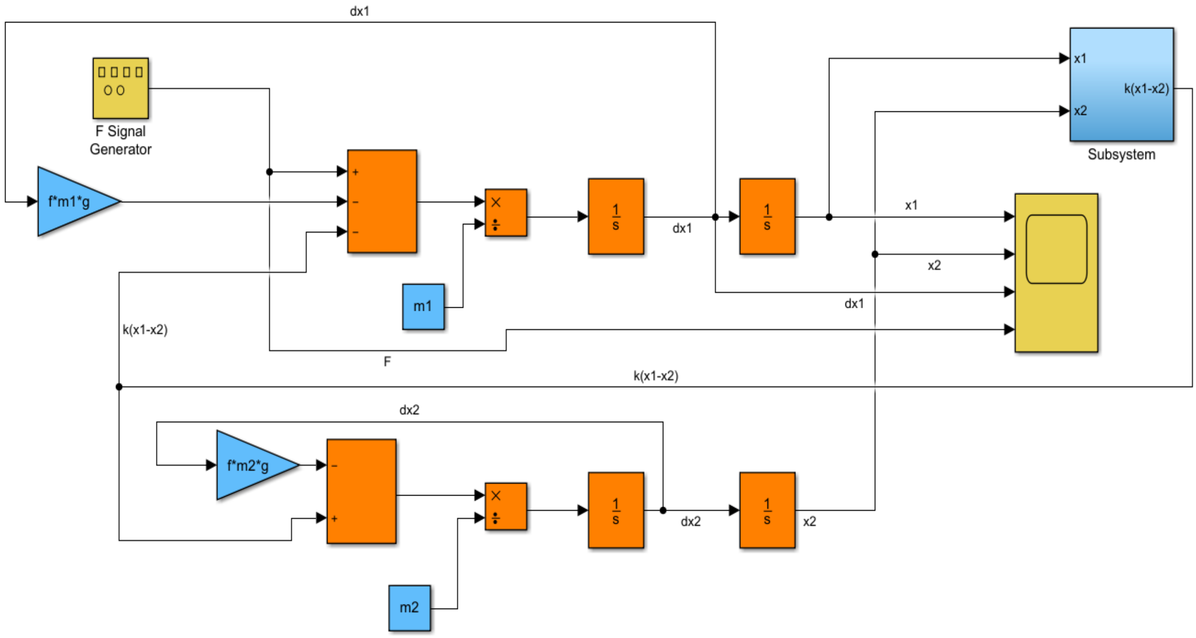
vytvoríme v prostredí **Simulinku** matematický model v podobe simulačnej blokovej schémy. Parametre systému zadefinujeme prostredníctvom **Model Explorera**.

Parametre systému podľa zadania, ktoré boli zadefinované priamo v lokálnom **Modelovom Workspace** matematického modelu prostredníctvom **Model Explorera**, sú znázornené na Obr. 6.39.



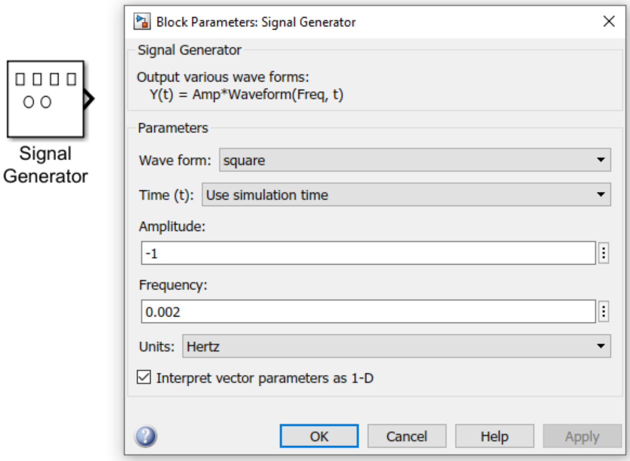
Obr. 6.39. Zadefinované parametre systému v Modelovom WorkSpace

Tieto parametre, ktoré sme zadefinovali nám umožňujú vytvoriť parametrický model **blokovej schémy**. Na základe rovníc systému zapísaného v **simulinkovskom tvare** (6.73), kde na ľavej strane rovnice sa nachádza premenná s najvyšším stupňom derivácie, možno vytvoriť a zostaviť blokovú simulačnú schému zobrazenú na Obr. 6.40.



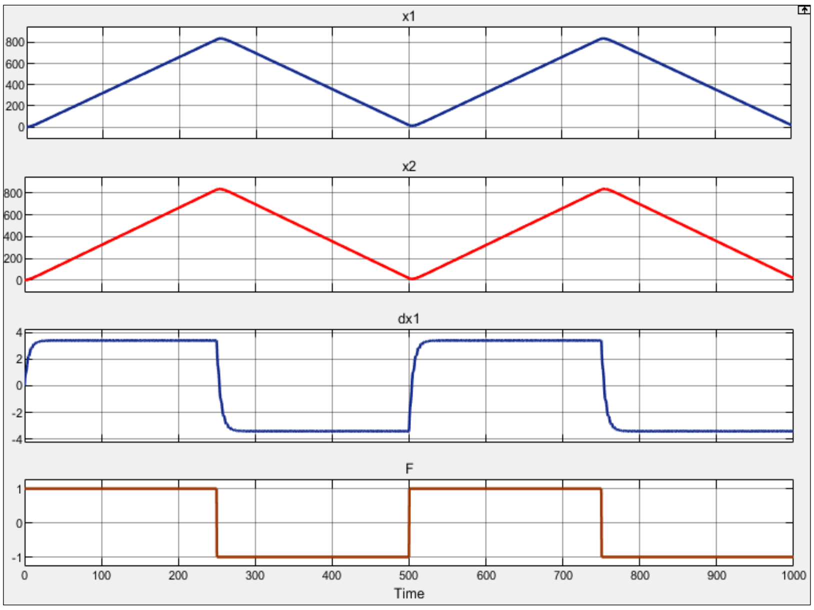
Obr. 6.40. Bloková schéma systému vláčika

Poznamenajme, že ako budiacu funkciu, ktorá predstavuje silu ťahu lokomotívy $\mathbf{F(t)}$, sme v tomto modeli realizovali funkciou **štvorcového pulzného signálu**, ktorá bola zadefinovaná použitím nového zdrojového bloku **Signal Generator**. Tento blok **Signal Generator** sme zatiaľ ešte nepoužili v žiadnej blokovej schéme. Ide o typ zdrojového bloku, ktorý možno vhodne použiť na modelovanie štyroch typov signálov (**wave form**), ktorými sú **sine wave**, **square** (štvorcový signál), **sawtooth** (pílovitý signál) a **random** (náhodný signál). V našom prípade sme na modelovanie periodicky meniaceho sa štvorcového signálu zvolili signál **square**, pre ktorý sme zadefinovali amplitúdu signálu $\mathbf{F = -1}$ a frekvenciu kmitania $\mathbf{f = 0.002\ Hz}$, pozri Obr. 6.41.



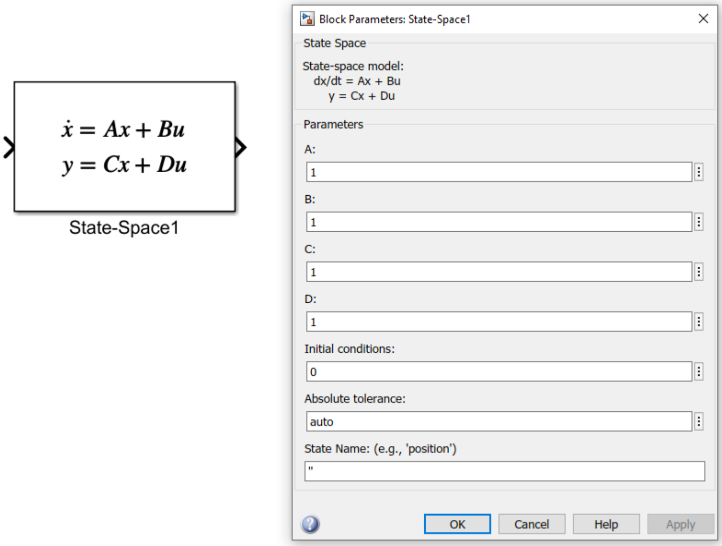
Obr. 6.41. Parametre bloku Signal Generator

Riešenie priebehov posunutí $\mathbf{x_1, x_2}$ a rýchlosti $\mathbf{dx_1}$ pre simulačný čas $\mathbf{t = 1000\ s}$, sú znázornené na nasledujúcich grafoch, pozri Obr. 6.42.



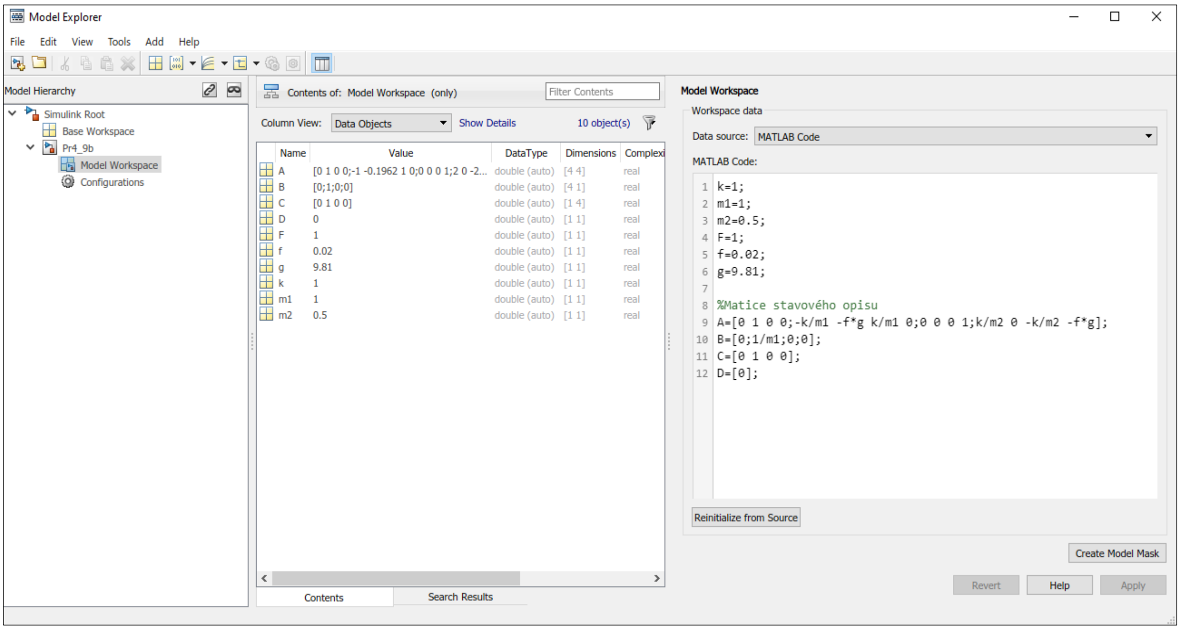
Obr. 6.42. Riešenie odozvy systému

Poznamenajme, že rovnako ako v **Matlabe** poznáme funkcie na definovanie **prenosových funkcií** a **stavového opisu**, tak v **Simulinku** je rovnako pripravený blok na riešenie systému v **stavovom opise**, ktorý je pomenovaný názvom **State-Space**. Tento blok, ktoré parametre sú znázornené na Obr. 6.43, je zaradený do knižnice **Continuous**.



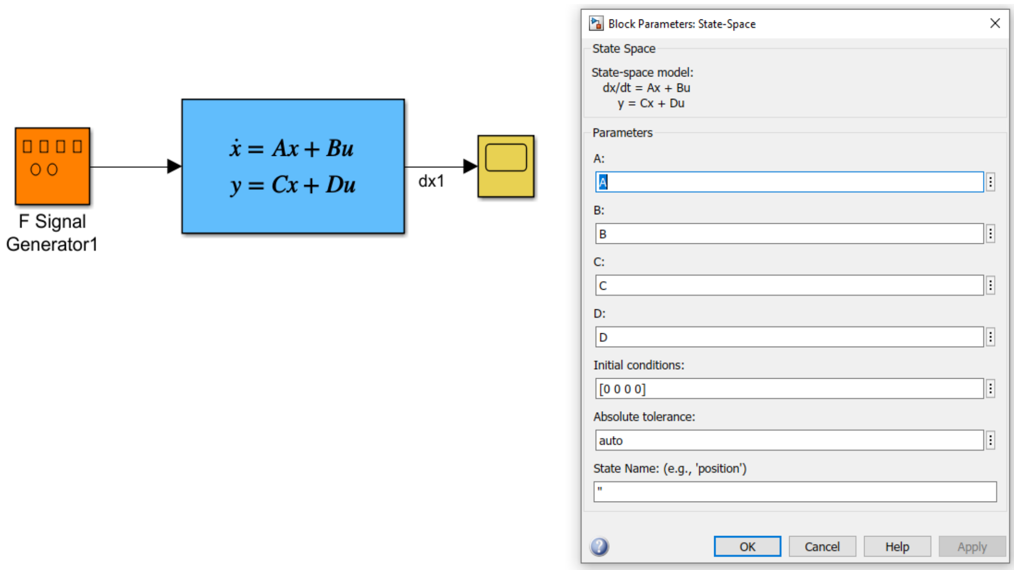
Obr. 6.43. Parametre bloku State-Space

Ak využijeme časť prechádzajúceho skriptu, ktorý sme v **Matlabe** použili na zadefinovanie matíc **A**, **B**, **C**, a **D stavového opisu**, tak že skopírujeme túto časť skriptu do lokálneho **WorkSpace modelu** v **Simulinku** podľa Obr. 6.44, potom možno parametre **A**, **B**, **C**, a **D** príslušných matíc využiť na zadefinovanie systému prostredníctvom bloku **State-Space**.



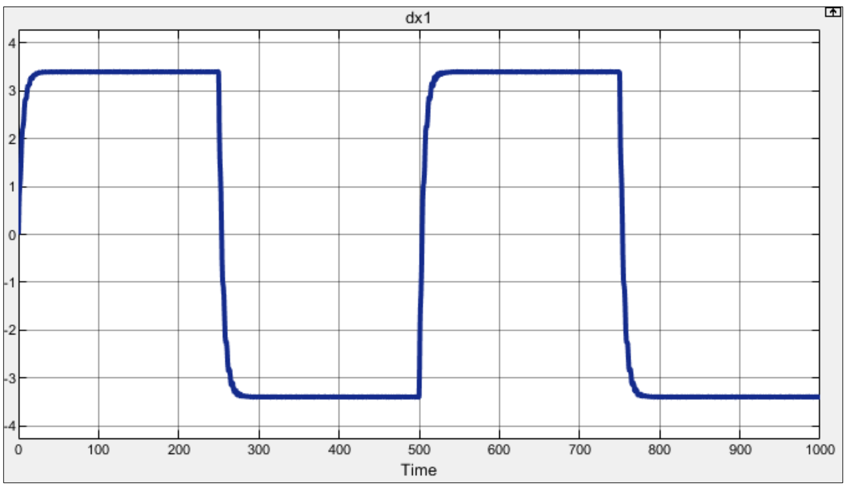
Obr. 6.44. Vstupné parametre modelu

Tieto parametre **A**, **B**, **C**, a **D** možno zadať ako vstupné parametre bloku **State-Space**, pozri Obr. 6.45 na ľavej strane. Vstupom do tohto bloku je vstupný budiaci signál (definovaný v zmysle vstupného vektora $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ stavového opisu systému). Na výstupe sa objaví výstupný vektor $\mathbf{y}(\mathbf{t})$, ktorý je definovaný v zmysle lineárnej výstupnej rovnice stavového opisu. **Bloková schéma**, ktorá rieši ekvivalentnú odozvu systému definovaného v **stavovom opise** je znázornená na Obr. 6.45.



Obr. 6.45. Bloková schéma s nadefinovanými parametrami bloku State-Space

Po spustení simulácie dostávame úplne identickú odozvu rýchlosti lokomotívy, akú sme vypočítali v predchádzajúcom modeli blokovej schémy pre čas simulácie $\mathbf{t} = \mathbf{1000\ s}$, pozri Obr. 6.46 a Obr. 6.42. Ako si možno všimnúť, tak na výstupe dostávame priebeh len pre jednu zo stavových veličín $\mathbf{v_1}$, ktorú sme požadovali zobraziť vo výstupnom vektore $\mathbf{y}(\mathbf{t})$.

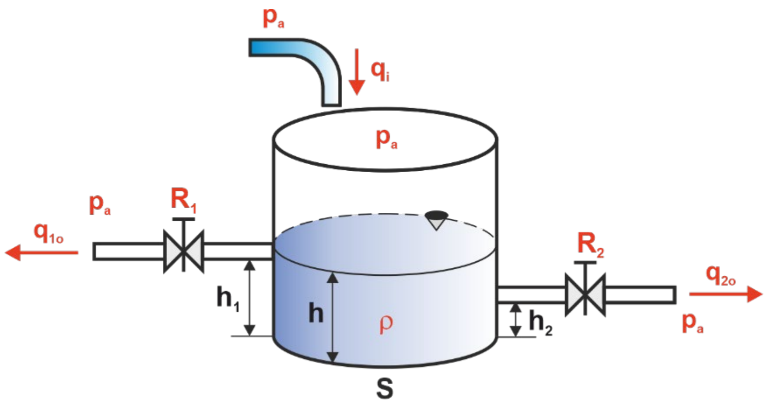


Obr. 6.46. Riešenie odozvy rýchlosti lokomotívy

Problémy na riešenie

Problém 6.1.

Predpokladajme hydraulický systém nádoby podľa Obr. 6.47. Ak vieme, že do nádoby prúdi kvapalina hustoty $\boldsymbol{\rho = 1000\ kg.m^{-3}}$ s objemovým prítokom $\boldsymbol{q_i = 0.5\ m^3.s^{-1}}$, odvoďte matematický model takéhoto hydraulického systému a riešte odozvu systému metódou postupnej integrácie v skripte v **Matlabu**.

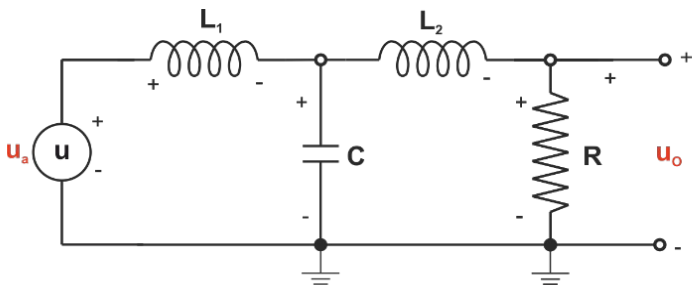


Obr. 6.47. Hydraulický systém

Pri tvorbe simulácie uvažujte tieto parametre systému, $\boldsymbol{h_1 = 1\ m}$, $\boldsymbol{h_2 = 0.5\ m}$, $\boldsymbol{S = 3\ m^2}$, $\boldsymbol{R_1 = 10000\ Pa.m^{-3}.s}$, $\boldsymbol{R_2 = 20000\ Pa.m^{-3}.s}$. Simuláciu riešte pre simulačný čas $\boldsymbol{t_{sim} = 100\ s}$.

Problém 6.2.

Odvoďte matematický model **RLC obvodu**, ktorý je zobrazený na Obr. 6.48, prepíšte do maticového tvaru a riešte metódou postupnej integrácie v skripte **Matlabu**, ak vieme, že vstupné napätie sa mení harmonickou funkciou $\boldsymbol{u_a = 12 \cdot \sin(\omega \cdot t)}$, kde $\boldsymbol{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f}$ a $\boldsymbol{f = 50\ Hz}$.

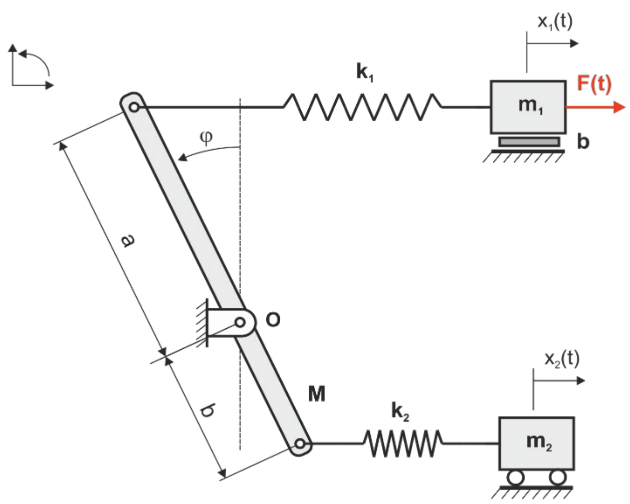


Obr. 6.48. RLC obvod

Pri tvorbe simulácie uvažujte vstupné parametre systému $\boldsymbol{L_1 = 100\ mH}$, $\boldsymbol{L_2 = 200\ mH}$, $\boldsymbol{C = 20\ \mu F}$, $\boldsymbol{R = 100\ \Omega}$. Simuláciu riešte pre simulačný čas $\boldsymbol{t_{sim} = 1\ s}$.

Problém 6.3.

Predpokladajme **pákový mechanizmus**, ktorý je zobrazený na Obr. 6.49. Tento **pákový mechanizmus** pozostáva z páky hmotnosti $\mathbf{M = 15\,kg}$ (zanedbateľnej hrúbky) a ďalších dvoch hmôt $\mathbf{m_1 = 10\,kg}$, $\mathbf{m_2 = 20\,kg}$. Hmota $\mathbf{m_1}$ je budená harmonicky meniacou sa silou $\mathbf{F(t) = 100 \cdot \cos(\omega \cdot t) + 20}$, kde $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{2 \cdot \pi \cdot f}$ a $\mathbf{f = 5\,Hz}$. Použitím metódy uvoľňovania odvoďte matematický model tohto systému, zapíšte do maticového tvaru a riešte odozvu **metódou postupnej integrácie** v skripte **Matlabu**.



Obr. 6.49. Pákový mechanizmus

Pri tvorbe simulácie uvažujte vstupné parametre systému $\mathbf{k_1 = 1000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 2000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{a = 1.5\,m}$, $\mathbf{b = 0.5\,m}$. Simuláciu riešte pre simulačný čas $\mathbf{t_{sim} = 10\,s}$.

Problém 6.4.

Pre **pákový mechanizmus** z predchádzajúceho príkladu, ktorý je zobrazený na Obr. 6.49, odvoďte stavový opis v zmysle stavového vektora $\mathbf{x^T = [x_1, v_1, x_2, v_2, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}\,]^T}$. Porovnajte riešenie získané metódou postupnej integrácie tohto systému, ktorý je zapísaný v stavovom opise s riešením systému v predchádzajúcom príklade.

7 STAVOVÝ OPIS SYSTÉMU

Už vieme, že na systém sa môžeme pozrieť aj z iného pohľadu, ako len z pohľadu **diferenciálnej rovnice** alebo **prenosovej funkcie systému**, ktorý vo všeobecnosti nazývame vonkajším opisom systému. Systém možno definovať aj iným spôsobom a to prostredníctvom jeho **vnútorných stavov**, t. j. zadefinovaním tzv. **stavových premenných systému**. Tieto premenné sú vo všeobecnosti eliminované v oboch predchádzajúcich reprezentáciách matematického modelu ako v prípade opisu **diferenciálnou rovnicou**, tak aj v prípade opisu **prenosovou funkciou**. Nakoľko v tomto prípade sa na systém pozeráme len z pohľadu matematických vzťahov medzi jeho vstupom $\mathbf{u(t)}$ a výstupom $\mathbf{y(t)}$.

Analýza systémov v zmysle **vstupno-výstupného vzťahu** však neposkytuje informácie o správaní sa daného systému v jeho vnútri, t. j. nevieme povedať ako sa menia **stavy systému** resp. jeho **vnútorné premenné** pri rôznych prevádzkových podmienkach. Pre lepšie pochopenie fungovania a správania sa vyšetrovaného systému je preto omnoho výhodnejšie použiť a zadefinovať systém v tvare **stavového opisu** (z angl. state-space). V tomto prípade reprezentácie systému, ktorý je zadefinovaný **stavovými premennými** pri analýze takéhoto systému, poskytuje matematický model viac informácií o jeho správaní sa.

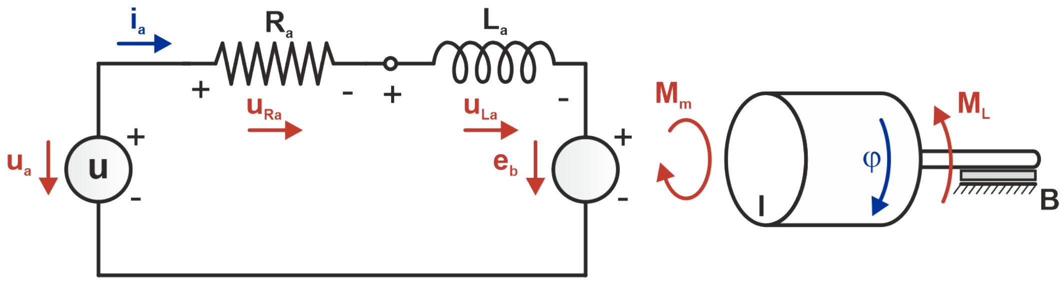
Stavový opis systému možno odvodiť pre ľubovoľný systém priamo z vonkajšieho opisu systému, ktorý je opísaný napr. jednou **diferenciálnou rovnicou** alebo **sústavou diferenciálnych rovníc**, ako aj systémom **prenosových funkcií** v Laplaceovom tvare. Už vieme, že každý takto zadefinovaný systém možno **transformovať** na odpovedajúci tvar **stavových diferenciálnych rovníc 1. rádu**.

Na niektorých predchádzajúcich príkladoch sme sa už síce z praktického hľadiska venovali tvorbe jednoduchého stavového opisu systémov, ktorý sme použili na riešenie odozvy systémov, v tejto kapitole sa predsa len pozrieme na **stavový opis systému** podrobnejšie a vysvetlíme si princíp jeho tvorby odvodenia pre ľubovoľný dynamický systém. Okrem iného si vysvetlíme, ako vhodne voliť **vnútorné (stavové) premenné** systému, a ako tieto premenné zahrnúť do celkovej reprezentácie systému. Princíp tvorby **stavového opisu systému** si vysvetlíme na jednoduchých príkladoch, v závere si predstavíme všeobecný **štandardizovaný tvar stavového opisu systému** pre **systém n-tého rádu**.

Príklad č. 7.1.

Predpokladajme systém **jednosmerného elektrického motora** podľa nasledujúceho Obr. 7.1. **Elektrická časť** tohto elektromechanického systému je reprezentovaná elektrickým obvodom **statora**, v ktorom generujeme magnetické pole so vstupným napätím $\mathbf{u_a}$. Táto elektrická časť motora je ďalej charakterizovaná elektrickým odporom $\mathbf{R_a}$, elektrickou indukčnosťou armatúry $\mathbf{L_a}$ a elektromotorickým napätím $\mathbf{e_b}$. **Mechanická časť** je reprezentovaná rotačným mechanickým systémom, ktorý predstavuje moment zotrvačnosti **I**, viskózny tlmič **B**. Mechanická časť motora je zaťažovaná krútiacim momentom

$\mathbf{M_m}$ od motora a krútiacim momentom $\mathbf{M_L}$ od záťaže. Nájdime **stavový opis systému** tohto elektromechanického systému.



Obr. 7.1. Jednosmerný elektrický motor

Riešenie:

Diferenciálne rovnice systému možno odvodiť použitím **Kirchhoffových zákonov**, ktoré aplikujeme pre elektrickú časť systému v kombinácií s **II. Newtonovým zákonom** pohybu, ktorý použijeme pre mechanickú časť systému. Odvodené diferenciálne rovnice previažeme **elektromechanickými väzbovými rovnicami**. Pre elektrický obvod aplikujeme **II. Kirchhoffov zákon pre napätia**, pre jednu uzavretú slučku elektrického obvodu musí platiť, že

$$R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + e_b - u_a = 0 \; . \qquad (7.1)$$

kde $\mathbf{i_a}$ je elektrický prúd, $\mathbf{u_a}$ je elektrické napätie, $\mathbf{R_a}$ je elektrický odpor a $\mathbf{L_a}$ je elektrická indukčnosť.

Pre **mechanickú časť** tohto elektromechanického systému možno napísať túto momentovú rovnicu pre rotačný mechanický systém

$$\begin{aligned} I \cdot \alpha &= \sum M \,, \\ I \cdot \ddot{\varphi} &= M_m - M_L - B \cdot \dot{\varphi} \,, \end{aligned} \qquad (7.2)$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ je uhlové zrýchlenie systému, $\boldsymbol{\varphi}$ je uhlové natočenie, **B** je konštanta tlmenia, **I** je moment zotrvačnosti hmoty k ťažisku, $\mathbf{M_m}$ a $\mathbf{M_L}$ je krútiaci moment od motora a záťaže. Dosadením týchto väzbových rovníc $\mathbf{e_b = K_e \cdot \boldsymbol{\omega} = K_e \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}}$ a $\mathbf{M_m = K_t \cdot i_a}$, ktoré popisujú vzťah medzi **elektrickou** a **mechanickou** časťou systému do rovnice, dostávame túto **sústavu dvoch diferenciálnych rovníc**

$$\begin{aligned} L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a + K_e \cdot \dot{\varphi} &= u_a \,, \\ I \cdot \ddot{\varphi} + B \cdot \dot{\varphi} - K_t \cdot i_a &= -M_L \,. \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Keďže v rovniciach sa nevyskytuje žiadna **tuhosť systému**, ale len tlmenie **B**, potom predchádzajúcu sústavu rovníc môžeme taktiež vyjadriť v zmysle uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$

$$\begin{gathered} L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a + K_e \cdot \omega = u_a \,, \\ I \cdot \dot{\omega} + B \cdot \omega - K_t \cdot i_a = -M_L \,. \end{gathered} \tag{7.4}$$

Poznamenajme, že v sústave SI sú fyzikálne jednotky parametrov $\mathbf{K_t}$ (pre mechanickú časť motora) a $\mathbf{K_e}$ **(**pre elektrickú časť) rovnaké a spravidla identické. Z pohľadu zjednodušenia systému budeme uvažovať, že $\mathbf{K_t} = \mathbf{K_e} = \mathbf{K}$. Potom možno predchádzajúci systém diferenciálnych rovníc zjednodušiť na tento tvar

$$\begin{gathered} L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a + K \cdot \omega = u_a \,, \\ I \cdot \dot{\omega} + B \cdot \omega - K \cdot i_a = -M_L \,. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Táto sústava rovníc popisuje vzťah medzi **vstupným napätím** $\mathbf{u_a}$ a **výstupnou uhlovou rýchlosťou** $\boldsymbol{\omega}$ elektrického motora. Aj keď všetky premenné systému sú $\mathbf{i_a}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{M_L}$, $\mathbf{M_m}$, $\mathbf{e_b}$ a $\mathbf{u_a}$, ako si možno všimnúť, tak nie všetky sú napokon obsiahnuté vo výslednom vonkajšom opise systému, ktorý sme odvodili v rovniciach (7.5). Niektoré z týchto systémových premenných zanikli v procese zjednodušovania systému resp. aplikovania matematických úprav a boli postupne z výsledného matematického modelu eliminované. Ďalšiu redukciu premenných možno docieliť napr. **kombináciou** týchto dvoch diferenciálnych rovníc 1. rádu v jednu diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu.

7.1 STAVOVÉ PREMENNÉ

V predchádzajúcom príklade sme identifikovali štyri **vnútorné premenné** $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{M_m}, \mathbf{e_b}\}$, dve **vstupné premenné** $\{\mathbf{M_L}, \mathbf{u_a}\}$ a dve **výstupné premenné** $\{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i_a}\}$. Prvú skupinu premenných, ktoré tvoria **vnútorné premenné** eliminované z výsledného modelu počas modelovania, spolu so vstupnými premennými $\{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i_a}\}$ možno to množinu nazvať **stavovými premennými systému** $\{\mathbf{i_a}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{M_m}, \mathbf{e_b}\}$.

Celkovú množinu, ktorú tvoria všetky stavové premenné spolu so všetkými **vstupnými** a **výstupnými** premennými nazývame množinou **systémových premenných**. Túto množinu v prípade elektromotora z predchádzajúceho príkladu tvoria tieto premenné $\{\mathbf{i_a}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{M_m}, \mathbf{e_b}, \mathbf{M_L}, \mathbf{u_a}, \boldsymbol{\omega}\}$.

Poznamenajme, že i keď konečný počet premenných bol vo výslednom matematickom modeli zredukovaný len na množinu štyroch premenných $\{\mathbf{i_a}, \mathbf{M_L}, \mathbf{u_a}, \boldsymbol{\omega}\}$, táto zredukovaná množina reprezentuje tento systém ako celok. Táto podmnožina, ktorá je získaná z minimálneho počtu vybraných premenných, predstavuje v tomto prípade množinu **lineárne nezávislých premenných**.

Množina **lineárne nezávislých premenných** pozostáva z minimálneho počtu **systémových premenných**, ktoré sú nutné na opis daného systému. Je nutné poznamenať, že takáto množina premenných, však nie jedinou možnou množinou **premenných**, ktorú je pre systém možno zostaviť. Nakoľko pre každý systém existuje v skutočnosti nekonečne veľa množín závislých premenných, ktoré možno použiť ako **stavové premenné systému**.

Napr. pre systém elektromotora z predchádzajúceho príkladu možno nájsť tieto množiny premenných $\{\mathbf{i_a}, \mathbf{M_L}, \mathbf{u_a}, \boldsymbol{\omega}\}$, $\{\mathbf{i_a}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{M_L}, \mathbf{u_a}\}$, $\{\mathbf{i_a}, \mathbf{M_m}, \mathbf{e_b}, \mathbf{M_L}, \mathbf{u_a}, \boldsymbol{\omega}\}$ a samozrejme aj ďalšie iné, ktoré môžeme použiť pri tvorbe **stavového opisu systému**. V prípade, že si za množinu nezávislých premenných vyberieme prvú z uvedených množín $\{\mathbf{i_a}, \mathbf{M_L}, \mathbf{u_a}, \boldsymbol{\omega}\}$, potom na základe týchto premenných možno pôvodný matematický model (7.5) prepísať do tohto **stavového opisu systému**

$$\begin{aligned} L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a + K \cdot \omega = u_a \quad &\Rightarrow \quad \frac{di_a}{dt} = \frac{u_a}{L_a} - \frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K}{L_a} \cdot \omega\,, \\ I \cdot \dot{\omega} + B\omega - K \cdot i_a = -M_L \quad &\Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{M_L}{I} - \frac{B}{I} \cdot \omega + \frac{K}{I} \cdot i_a\,. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Táto sústava rovníc tvorí matematický model systému. V tomto prípade ide o **sústavu dvoch diferenciálnych rovníc 1. rádu**, ktoré v teórií systémov nazývame **stavovými rovnicami systému**

$$\begin{aligned} \frac{di_a}{dt} &= \frac{u_a}{L_a} - \frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K}{L_a} \cdot \omega\,, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{M_L}{I} - \frac{B}{I} \cdot \omega + \frac{K}{I} \cdot i_a\,. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Príklad č. 7.2.

Riešme odozvu predchádzajúceho systému jednosmerného elektrického motora v nezaťaženom stave, ktorý je definovaný predchádzajúcim modelom stavového opisu (7.7). Ako vstupné parametre systému predpokladáme tieto hodnoty $\mathbf{I = 0.01\ kg.m^2}$, $\mathbf{B = 0.1\ N.s.rad^{-1}}$, $\mathbf{K_e = 0.01\ V.s.rad^{-1}}$, $\mathbf{K_t = 0.01\ N.m.A^{-1}}$, $\mathbf{R_a = 1}\ \Omega$, $\mathbf{L_a = 0.5\ H}$, $\mathbf{u_a = 1\ V}$ a $\mathbf{M_L = 0\ N.m}$.

Riešenie:

Zapísaním predchádzajúceho systému stavových rovníc do **maticového tvaru** dostávame

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K}{L_a} \\ \frac{K}{I} & -\frac{B}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ M_L \end{bmatrix}. \tag{7.8}$$

Stavovú rovnicu systému zapísanú v maticovom tvare doplníme o **lineárnu výstupnú rovnicu** systému v tomto tvare

$$y = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\,,$$
$$y = \omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ M_L \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

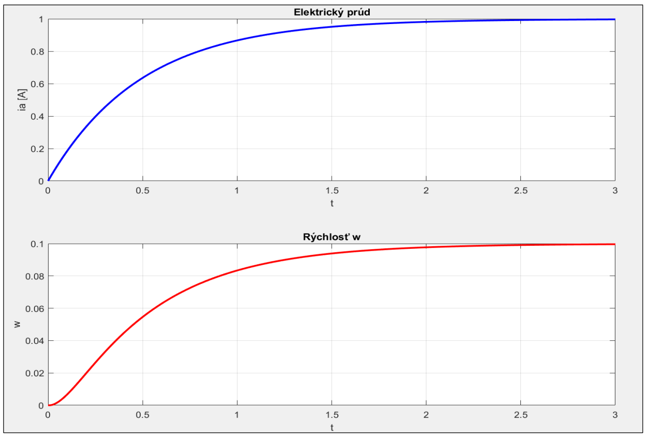
Potom simuláciu takéto systému pre čas simulácie $\mathbf{t = 3\ s}$ s uvažovaným časovým krokom $\mathbf{dt = 0.01s}$ bez existencie záťaže $\mathbf{M_L}$ môžeme riešiť nasledujúcim skriptom v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre
I=0.01;
b=0.1;
K=0.01;
Ra=1;
La=0.5;
ua=1;
ML=0;
f=1;

%Matice stavového opisu
A=[-Ra/La -K/La; K/I -b/I];
B=[1/La 0;0 -1/I];
C=[0 1];
D=[0 0];
X=[0 0]'; %vektor počiatočných podmienok

%Čas simulácie
t=0;
tsim=3;
dt=0.01;
n=round(tsim-t)/dt+1;
F=[ua; ML];

for i=1:n
    X1(i,:)=[t X'];
    dx=A*X+B*F;
    X=X+dt*dx;
    t=t+dt;
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(X1(:,1),X1(:,2),'b','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('ia [A]')
title('Elektrický prúd')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(X1(:,1),X1(:,3),'r','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('w')
title('Rýchlosť w')
grid on
```

V predchádzajúcom skripte **Matlabu** sme v úvode tohto skriptu zadefinovali vstupné parametre elektromechanického systému podľa zadania. V ďalšej časti skriptu boli zadefinované matice stavového opisu **A**, **B**, **C**, **D**, podľa predchádzajúceho matematického modelu definovaného v maticovom tvare. Takýto systém, ktorý je definovaný v **stavovom opise** riešime priamo zo všeobecnej definície systému v stavovom opise metódou postupného integrovania v cykle **for** s konečným počtom opakovaní

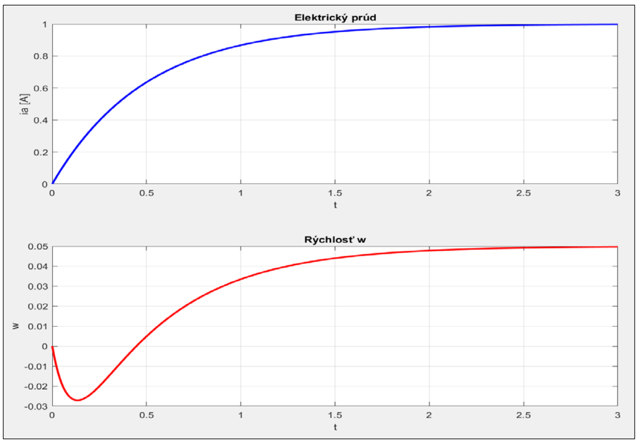
$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\,, \tag{7.10}$$

kde **A** a **B** sú matice stavového opisu, $\mathbf{x(t)}$ je stavový vektor a $\mathbf{u(t)}$ je vektor vstupov. Pri integrovaní sme uvažovali nulové počiatočné podmienky stavového vektora $\mathbf{x(t)}$. Výsledkom simulácie sú priebehy **stavových premenných** elektrického prúdu $\mathbf{i_a}$ a uhlovej rýchlosti mechanickej časti $\boldsymbol{\omega}$, zobrazené na nasledujúcom Obr. 7.2.



Obr. 7.2. Odozva elektrického motora bez záťaže

Riešenie odozvy systému pre čas simulácie $\mathbf{t = 3\,s}$ s krokom $\mathbf{dt = 0.01s}$, ak uvažujeme existenciu nenulového záťažového momentu $\mathbf{M_L = 0.005\ N.m}$, je znázornená na Obr. 7.3.



Obr. 7.3. Odozva elektrického motora so záťažou

7.2 ŠTANDARDIZOVANÝ TVAR STAVOVÝCH ROVNÍC

V metóde analýzy **stavových premenných** sa na zápis týchto premenných používajú štandardné symboly, ktoré sú určené pre definované stavové premenné $\mathbf{x(t)}$. Zápis stavových premenných je takisto **štandardizovaný**. Poďme ukázať, ako takýto **štandardizovaný tvar** stavových premenných nájdeme pre nasledujúci systém diferenciálnych rovníc. Uvažujme rovnice z predchádzajúceho príkladu elektromotora v tomto tvare stavového opisu

$$\begin{aligned} \frac{di_a}{dt} &= \frac{u_a}{L_a} - \frac{R_a}{L_a} \cdot i_a - \frac{K}{L_a} \cdot \omega\,, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{M_L}{I} - \frac{B}{I} \cdot \omega + \frac{K}{I} \cdot i_a\,. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Tvorbu **štandardizovaného stavového opisu** systému začneme voľbou alebo označením **stavových premenných** symbolmi v štandardizovanom tvare

$$\begin{aligned} x_1 &= i_a \Longrightarrow \dot{x}_1 = i_a\,, \\ x_2 &= \omega \Longrightarrow \dot{x}_2 = \dot{\omega}\,. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Potom predchádzajúce **stavové rovnice** (7.11) možno prepísať do tohto **štandardizovaného tvaru**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{u_a}{L_a} - \frac{R_a}{L_a} \cdot x_1 - \frac{K}{L_a} \cdot x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{M_L}{I} - \frac{B}{I} \cdot x_2 + \frac{K}{I} \cdot x_1\,. \end{aligned} \tag{7.13}$$

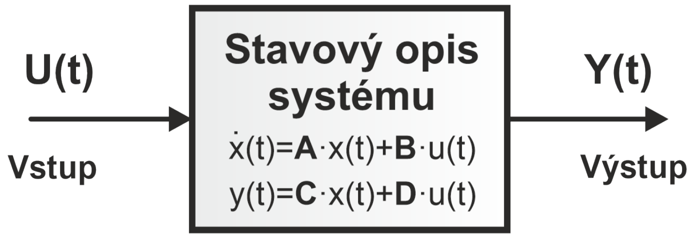
Tieto dve **diferenciálne rovnice 1. rádu** môžeme ďalej schematicky zapísať do tohto maticového tvaru systému

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K}{L_a} \\ \frac{K}{I} & -\frac{B}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ M_L \end{bmatrix}. \tag{7.14}$$

Výstupné premenné $\mathbf{i_a}$ a $\boldsymbol{\omega}$ zapísané vo výstupnom vektore $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{i_a} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix}$ sa priamo rovnajú stavových premenných $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$. Vo všeobecnosti výstupný vektor môže byť ľubovoľnou **lineárnou** kombináciou **stavových premenných** a takisto **vstupných premenných**. Tvar stavových matíc **C** a **D** závisí od tvaru výstupného vektora $\mathbf{y(t)}$. Potom ak predpokladáme výstupný vektor v tvare $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix}$, tak výstupná rovnica stavového opisu nadobudne tento tvar

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ M_L \end{bmatrix}. \qquad (7.15)$$

Tieto dve systémové rovnice v maticovom tvare tvoria **stavový model systému** jednosmerného motora. Poďme teraz zovšeobecniť prípad **stavového opisu** pre **systém n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom, ktorého štruktúra je schematicky znázornená na Obr. 7.4.



Obr. 7.4. Stavový opis systému n-tého rádu s jedným vstupom a výstupom

Pripomeňme, že v štandardizovanej forme stavového opisu je vektor **vstupných premenných** označený symbolom $\mathbf{u(t)}$ a vektor **výstupných premenných** označený symbolom $\mathbf{y(t)}$. Potom **stavový model systému n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom možno vo všeobecnom tvare zapísať týmito dvomi rovnicami

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\,, \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\,, \end{aligned} \qquad (7.16)$$

kde $\mathbf{x(t)}$ je stĺpcový vektor **n x 1**, ktorý nazývame **stavovým vektorom**, $\mathbf{u(t)}$ je **vstupný vektor** jednej premennej, $\mathbf{y(t)}$ je **výstupný vektor** jednej premennej. Ďalej sa v tomto stavovom opise nachádzajú tieto matice stavového opisu:

- matica **A** – rozmeru **n x n**, ktorú nazývame **maticou systému**,
- matica **B** – rozmeru **n x 1**, ktorá predstavuje **vstupnú maticu** stavového opisu,
- matica **C** – rozmeru **1 x n**, ktorú nazývame **výstupnou maticou** stavového opisu,
- a matica **D** – rozmeru **n x 1**, ktorá sa nazýva **maticou prepojenia** medzi vstupom $\mathbf{u(t)}$ a výstupom $\mathbf{y(t)}$.

Prvú z rovníc **stavového opisu** nazývame aj rovnicou dynamiky, ktorá je reprezentovaná **systémom n diferenciálnych rovníc 1. rádu**.

Druhú rovnicu nazývame **rovnicou výstupu**, táto popisuje vzťah medzi **vstupom** a **výstupom**. Poznamenajme, že všetky **vektory** a **matice** stavového opisu možno zapísať v tomto symbolickom tvare

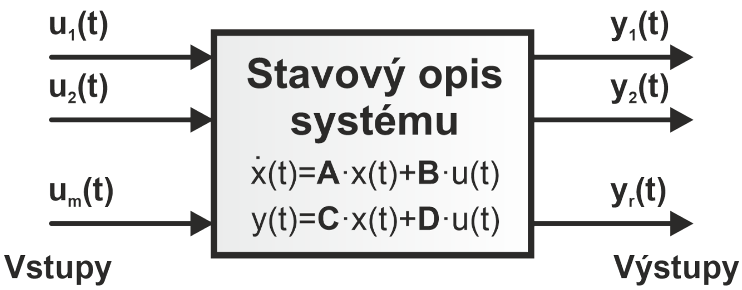
$$
x(t)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}
$$
$$
B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}c_1&c_2&\cdots&c_n\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{bmatrix}. \tag{7.17}
$$

Pripomeňme, že systémové premenné zapísané vo vektoroch $\mathbf{x(t)}$, $\mathbf{u(t)}$ a $\mathbf{y(t)}$ sú funkcie závislé od času **t**, zatiaľ čo matice **A**, **B**, **C**, a **D** obsahujú vždy konštantné koeficienty. Predchádzajúce rovnice **stavového opisu** boli odvodené pre lineárny systém s **jedným vstupom jedným výstupom**, ktoré v teórií systémov označujeme ako tzv. **SISO systémy** (z angl. single input single output system).

Poznamenajme, že technika stavových premenných poskytuje omnoho všeobecnejšiu metódu, a to aj pre dynamické systémy **nelineárneho charakteru**. V prípade, že systém, ktorý opisujeme stavovým opisom, je **nelineárneho charakteru**, potom **stavové rovnice** $\mathbf{\dot{x}(t)}$ budú vo všeobecnosti závislé od premennej $\mathbf{x(t)}$ a vstupnej premennej $\mathbf{u(t)}$. Matematicky zapísané

$$
\dot{x}(t)=f\big(x(t),u(t)\big), \tag{7.18}
$$

kde **f** je množina **nelineárnych rovníc**. Poznamenajme, že stavový opis systému môžeme taktiež odvodiť pre systémy s viacerými vstupmi a viacerými výstupmi. Uvažujme teraz systém s **m vstupmi** a **r výstupmi** podľa Obr. 7.5.



Obr. 7.5. Stavový opis pre systém s viacerými vstupmi a výstupmi

Potom pôvodne jednoprvkový vektor $\mathbf{u(t)}$ v predchádzajúcom prípade sa stáva vstupným vektorom signálov $\mathbf{u_i(t)}$ pre $\mathbf{i=\overline{1,m}}$ a $\mathbf{y(t)}$ výstupným vektorom signálov $\mathbf{y_j(t)}$ pre $\mathbf{j=\overline{1,r}}$.

Stupeň systému **n** sa rovná počtu všetkých **stavových premenných**. Takýto systém s **m vstupmi** a **r výstupmi** má tvar identického stavového opisu zapísaného vo všeobecnom tvare, ktorý sme definovali pre systém s jedným vstupom a jedným výstupom.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\,, \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\,, \end{aligned} \qquad (7.19)$$

kde $\mathbf{x(t)}$ je stĺpcový stavový vektor **n x 1** , $\mathbf{u(t)}$ je stĺpcový **vstupný vektor** rozmeru **m x 1**, $\mathbf{y(t)}$ je stĺpcový **výstupný vektor** rozmeru **r x 1**. Ďalej sa v tomto stavovom opise nachádzajú tieto matice stavového opisu:

- **matica systému A** – rozmeru **n x n**,
- **vstupná matica** stavového opisu **B** – rozmeru **n x m**,
- **výstupná matica** stavového opisu **C** – rozmeru **r x n**,
- a **matica prepojenia** medzi vstupom a výstupom **D** – rozmeru **r x m**.

V rozšírenej forme možno všetky **vektory** a **matice** stavového opisu zapísať v tomto symbolickom tvare

$$\begin{gathered} x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix}. \end{gathered} \qquad (7.20)$$

7.3 FÁZOVÉ PREMENNÉ

K reprezentácií **stavových premenných** z predchádzajúceho príkladu elektromotora sme zvolili ako premenné **elektrický prúd**, **uhlovú rýchlosť** a ďalšie iné. Z inžinierskeho pohľadu je takáto voľba obyčajne veľmi žiaduca, avšak nie vždy nutná z matematického hľadiska, z dôvodu, že takto zvolené **stavové premenné** nemusia vždy priamo korešpondovať s fyzikálnou veličinou.

Jedna z možnej voľby stavových premenných, ktorý z matematického hľadiska vychádza z vhodného tvaru stavových matíc **A, B, C,** a **D**, zavádza voľbu stavových premenných v zmysle **výstupnej premennej** $\mathbf{y(t)}$ a to až po stupeň **(n-1) derivácií** $\mathbf{y^{(n-1)}(t)}$.

Takáto špeciálna množina **stavových premenných**, ktoré takýmto spôsobom získame, sa nazýva množinou **fázových premenných**. Aby sme ukázali, ako takúto množinu **fázových premenných** odvodíme pre jednoduchý dynamický systém, predpokladajme prípad jednosmerného motora z predchádzajúcej úlohy s jedným vstupom $\mathbf{u_a}$, kde moment od záťaže považujeme za nulový $\mathbf{M_L = 0}$. To znamená, že tento systém je opísaný týmito stavovými rovnicami

$$\begin{aligned}\frac{di_a}{dt} &= \frac{u_a}{L_a} - \frac{R_a}{L_a}\cdot i_a - \frac{K}{L_a}\cdot\omega\,,\\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{B}{I}\cdot\omega + \frac{K}{I}\cdot i_a\,.\end{aligned} \tag{7.21}$$

Usporiadaním výrazov v druhej diferenciálnej rovnici a vyjadrením elektrického prúdu $\mathbf{i_a}$, možno dospieť k tomuto vzťahu

$$i_a = \frac{I}{K}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{K}\cdot\omega\ , \tag{7.22}$$

ktorý zderivujme podľa času $\mathbf{t}$

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{I}{K}\cdot\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{B}{K}\cdot\frac{d\omega}{dt} \tag{7.23}$$

a následne dosadíme za výraz $\frac{\mathbf{di_a}}{\mathbf{dt}}$ prvej z rovníc **stavového opisu**, spolu s dosadením výrazu (7.22) za premennú $\mathbf{i_a}$ a vykonaním týchto matematických úprav

$$\begin{aligned}\frac{di_a}{dt} &= \frac{u_a}{L_a} - \frac{R_a}{L_a}\cdot i_a - \frac{K}{L_a}\cdot\omega\,,\\ \frac{I}{K}\cdot\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{B}{K}\cdot\frac{d\omega}{dt} &= \frac{u_a}{L_a} - \frac{R_a}{L_a}\cdot\left[\frac{I}{K}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{K}\cdot\omega\right] - \frac{K}{L_a}\cdot\omega\,,\end{aligned} \tag{7.24}$$

môžeme dospieť k **diferenciálnej rovnici vyššieho rádu** premennej $\boldsymbol{\omega}$ v tomto tvare

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left[\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{I}\right]\cdot\frac{d\omega}{dt} + \left[\frac{R_aB}{I\cdot L_a} + \frac{K^2}{I\cdot L_a}\right]\cdot\omega = \frac{K}{I\cdot L_a}\cdot u_a\,. \tag{7.25}$$

Porovnaním so všeobecným tvarom diferenciálnej rovnice premennej **ω**, možno identifikovať hodnoty koeficientov pôvodnej diferenciálnej rovnice pri odpovedajúcich deriváciách premennej **ω**

$$\begin{gathered}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\left[\frac{R_a}{L_a}+\frac{B}{I}\right]\cdot\frac{d\omega}{dt}+\left[\frac{R_a\cdot B}{I\cdot L_a}+\frac{K^2}{I\cdot L_a}\right]\cdot\omega=\frac{K}{I\cdot L_a}\cdot u_a\,,\\ \frac{d^2\omega}{dt^2}+a_1\cdot\frac{d\omega}{dt}+a_0\cdot\omega=b_1\cdot u_a\,,\end{gathered}\tag{7.26}$$

kde

$$a_1=\left[\frac{R_a}{L_a}+\frac{B}{I}\right],\qquad a_0=\left[\frac{R_a\cdot B}{I\cdot L_a}+\frac{K^2}{I\cdot L_a}\right],\qquad b_1=\frac{K}{I\cdot L_a}\,.\tag{7.27}$$

Pretože, systém je **systémom 2. rádu**, je nutné zvoliť **dve stavové premenné**, ktorými možno daný systém zapísať do stavového opisu. Pre opis systému definujme tieto premenné

$$\begin{aligned}&x_1=\omega\,,\\ &x_2=\dot{\omega}\Longrightarrow x_2=\dot{x}_1\,.\end{aligned}\tag{7.28}$$

Potom **stavové rovnice** dynamického systému elektromotora nadobudnú tento tvar

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2\,,\\ &\dot{x}_2=-a_0\cdot x_1-a_1\cdot x_2+b_1\cdot u_a\,.\end{aligned}\tag{7.29}$$

Predchádzajúci systém v **stavovom opise** možno zapísať do tohto **maticového tvaru** systému

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ b_1\end{bmatrix}\cdot u_a\,.\tag{7.30}$$

Túto sústavu rovníc, ktorá je zapísaná v maticovom tvare, doplníme o lineárny **systém výstupnej rovnice**. Ako výstupný vektor **y** si zvolíme jednu premennú **ω**, t. j. $\mathbf{y}=\boldsymbol{\omega}=\mathbf{x_1}$. To znamená, že **výstupná rovnica** systému prejde do tohto **maticového tvaru**

$$y=\omega=x_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\cdot u_a\,.\tag{7.31}$$

Toto je priamo vyžadovaná reprezentácia **stavových premenných**, ktoré boli zvolené z fyzikálneho hľadiska. V ďalšom sa zameriame na zovšeobecnenie stavového opisu systému pre **systém n-tého rádu** s jedným vstupom $\mathbf{u(t)}$ a jedným výstupom $\mathbf{y(t)}$, ktorý je opísaný touto **diferenciálnou rovnicou n-tého rádu**

$$\frac{d^{(n)}y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = u(t)\,, \tag{7.32}$$

kde $\mathbf{a_0}, \dots, \mathbf{a_{n-1}}$ sú konštantné koeficienty.

Potom **fázové premenné** pre tento typ **systému n-tého rádu**, ktorých počet je **n**, možno navoliť týmto spôsobom

$$\begin{aligned}
&x_1 = y\,,\\
&x_2 = \frac{dy}{dt} \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1\,,\\
&x_3 = \frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow x_3 = \dot{x}_2\,,\\
&\vdots\\
&x_n = \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} \Rightarrow x_n = \frac{dx_{n-1}}{dt}\,.
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Pre takýto výber **stavových premenných**, napokon dostávame tento **maticový zápis** stavového opisu pre **všeobecný systém n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\quad,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)\,, \tag{7.34}$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [0] \cdot u(t)\,.$$

Matice stavového opisu tohto všeobecného **systému n-tého rádu** s jedným vstupom a jedným výstupom nadobúdajú tento všeobecne platný tvar

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

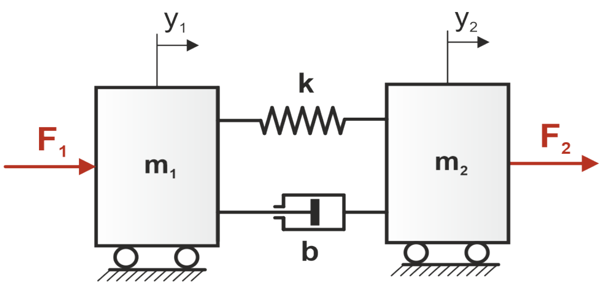
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \qquad D = [0] \,. \tag{7.35}$$

Príklad č. 7.3.

Uvažujme mechanické spojenie bežne používané pre spojenie dvoch vlakových súprav, ktorého prípad je znázornený na Obr. 7.6.

Obr. 7.6. Mechanické spojenie dvoch vlakových súprav

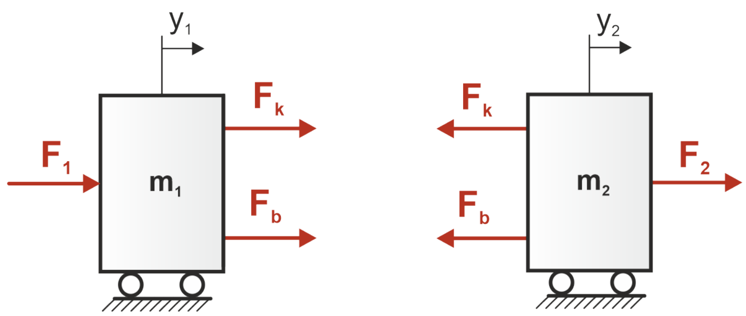
Ekvivalentný zjednodušený model mechanickej väzby systému je znázornený na ďalšom Obr. 7.7. Tento model pozostáva z dvoch hmôt $\mathbf{m_1 = 10\,000\ kg}$, $\mathbf{m_2 = 15\,000\ kg}$, jednej pružiny s tuhosťou $\mathbf{k = 5000\ N.m^{-1}}$, tlmiča s konštantou $\mathbf{b = 1500\ N.s.m^{-1}}$. Na jednotlivé hmoty pôsobia sily $\mathbf{F_1 = 10\ kN}$ a $\mathbf{F_2 = -10\ kN}$. Odvoďte matematický model tohto systému a riešte jeho odozvu.



Obr. 7.7. Ekvivalentný model mechanickej väzby

Riešenie:

Predtým, než pristúpime k tvorbe matematického modelu, telesá v prvom kroku uvoľníme, nahradením komponentov mechanického systému za vnútorné sily, pozri Obr. 7.8.



Obr. 7.8. Uvoľnené telesá hmôt mechanickej väzby

Ďalej budeme pokračovať napísaním týchto zložkových rovníc systému pre model mechanickej väzby. Pre zložkové sily podľa Obr. 7.8 musí platiť

$$F_k = k \cdot (y_2 - y_1)\,,$$
$$F_b = b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)\,. \qquad (7.36)$$

Potom aplikovaním **II. Newtonovho zákona** pre hmotu $\mathbf{m_1}$, musí platiť, že

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 = F_1 + F_b + F_k\,,$$
$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 = F_1 + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k \cdot (y_2 - y_1) \qquad (7.37)$$

a pre hmotu $\mathbf{m_2}$ musí platiť táto **diferenciálna rovnica 2. rádu**

$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = F_2 - F_b - F_k\,,$$
$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = F_2 - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k \cdot (y_2 - y_1)\,. \qquad (7.38)$$

To znamená, že dostávame tento **systém dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 = F_1 + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k \cdot (y_2 - y_1)\,,$$
$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = F_2 - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k \cdot (y_2 - y_1)\,. \qquad (7.39)$$

Prepíšme predchádzajúci **systém rovníc 2. rádu** do tohto tvaru **simulinkovskej formy** rovníc

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{m_1}[F_1 + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k \cdot (y_2 - y_1)] \; ,$$
$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{m_2}[F_2 - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k \cdot (y_2 - y_1)] \; . \tag{7.40}$$

Potom zapísaním pôvodného matematického modelu t. j. **systému dvoch diferenciálnych rovníc** do **maticového tvaru** dostávame

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 = F_1 + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k \cdot (y_2 - y_1) \, ,$$
$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = F_2 - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k \cdot (y_2 - y_1) \, ,$$
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{7.41}$$

Ak podobným spôsobom ako v predchádzajúcich príkladoch vypočítame z matice hmotností systému **M** inverznú maticu $\mathbf{M^{-1}}$, ktorá nadobudne tento tvar

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} , \tag{7.42}$$

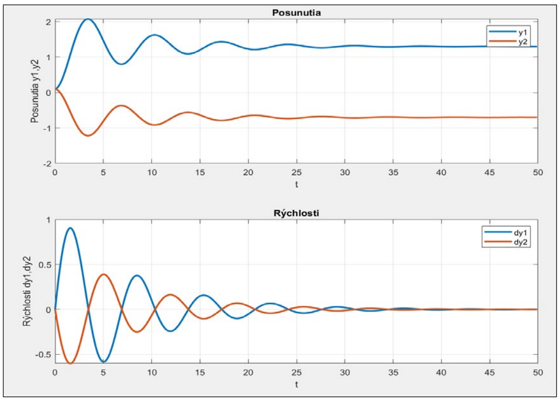
ktorou prenásobíme maticový tvar pôvodného systému (7.42) z pravej strany, možno dospieť k tomuto maticovému tvaru systému

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_1}{m_1} \\ \frac{F_2}{m_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{b}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \\ -\frac{b}{m_2} & \frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \, . \tag{7.43}$$

Tento systém zapísaný v **maticovom tvare** budeme opäť riešiť a simulovať prostredníctvom napísania nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre
F1=10000;
F2=-10000;
m1=10000;
m2=15000;
b=1500;
k=5000;
B=[b/m1 -b/m1;-b/m2 b/m2];
K=[k/m1 -k/m1;-k/m2 k/m2];

%Počiatočné podmienky
Y=[0.1; 0.1];
dY=[0;0];
t=0;
dt=0.1;
tsim=50;
n=round(tsim-t)/dt;
for i=1:n
    X1(i,:)=[t Y' dY'];
    ddY=[F1/m1;F2/m2]-B*dY-K*Y;
    dY=dY+dt*ddY;
    Y=Y+dt*dY;
    t=t+dt;
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(X1(:,1),X1(:,2:3))
xlabel('t')
ylabel('Posunutia y1,y2')
title('Posunutia')
legend('y1','y2')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(X1(:,1),X1(:,4:5))
xlabel('t')
ylabel('Rýchlosti dy1,dy2')
legend('dy1','dy2')
title('Rýchlosti')
grid on
```

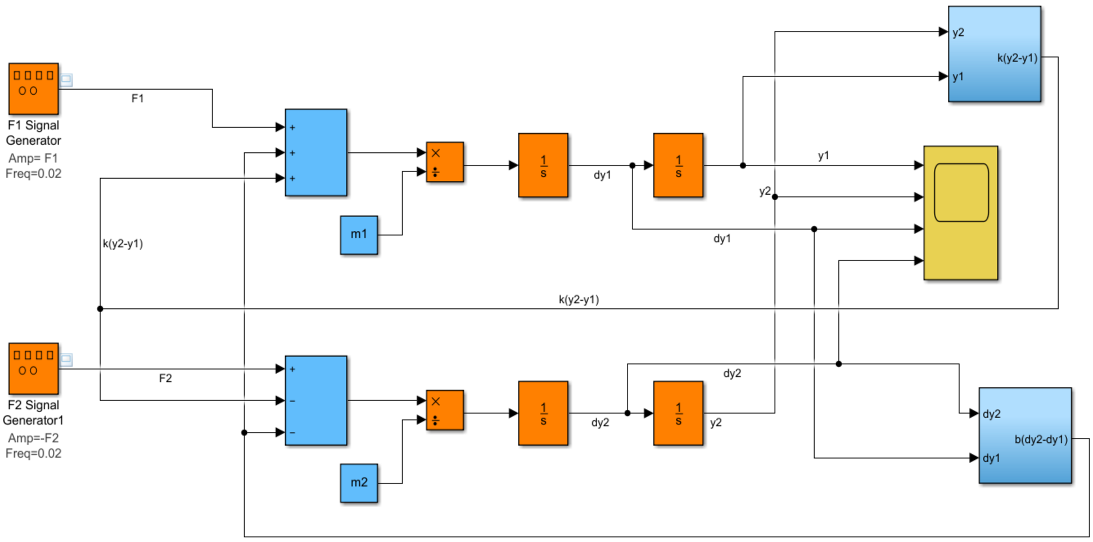
Riešenie odozvy systému pomocou predchádzajúceho skriptu v **Matlabe** je znázornené na Obr. 7.9.



Obr. 7.9. Odozva systému mechanickej väzby vlakovej súpravy

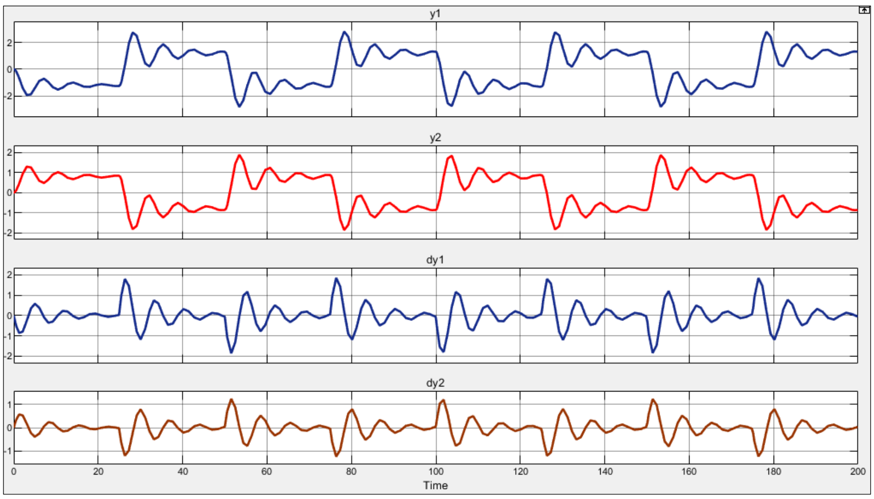
Daný mechanický systém budeme ďalej simulovať vytvorením **blokovej schémy** v **Simulinku**. Ako budiace sily $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_2}$ budeme predpokladať pulzujúce periodicky opakujúce sa signály, pozri Obr. 7.12. Model blokovej schémy, ktorá je zobrazená na Obr. 7.10, bol vytvorený na základe tohto **simulinkovského modelu systému**

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{m_1} \cdot [F_1 + b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k \cdot (y_2 - y_1)] \ ,$$
$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{m_2} \cdot [F_2 - b \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k \cdot (y_2 - y_1)] \ . \qquad (7.44)$$



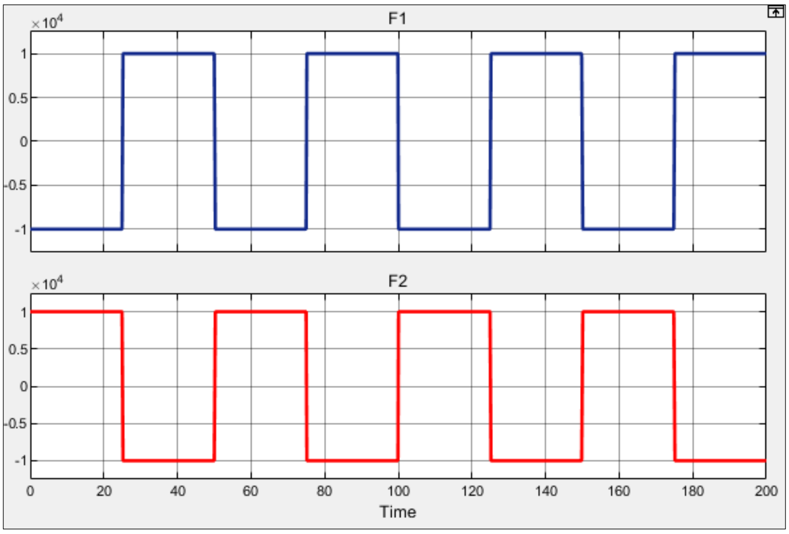
Obr. 7.10. Bloková schéma pre mechanické vlakové spojenie

Na ďalšom Obr. 7.11 je znázornená odozva simulácie systému na pulzujúce periodicky opakujúce sa signály síl $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_2}$, ktoré boli definované pre frekvenciu kmitania $\mathbf{f = 0.02\ Hz}$.



Obr. 7.11. Posunutia a rýchlosti hmôt kmitajúceho systému

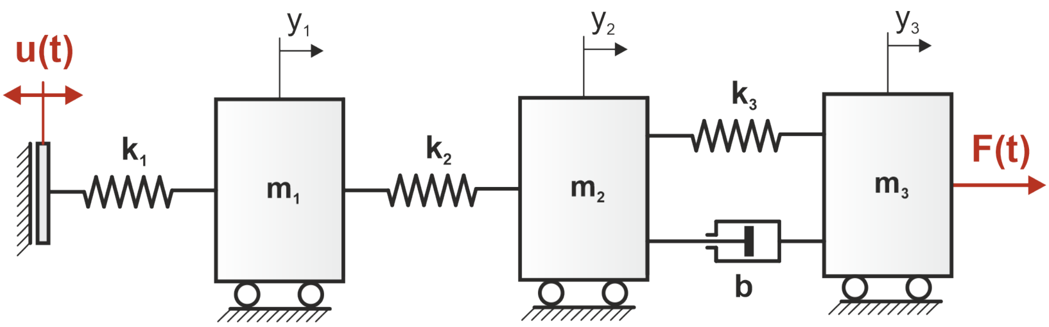
Poznamenajme, že signály síl $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_2}$ sa počas trvania simulácie $\mathbf{t = 200\,s}$ prejavia $\mathbf{200 \times 0.02 = 4}$ t. j. celkovo **4-krát** v plných cykloch opakovania. Pri riešení sme uvažovali ekvivalentné vstupné parametre, podobné ako v predchádzajúcej simulácií, ktoré boli zadefinované priamo vo **Workspace Modelu**.



Obr. 7.12: Priebehy vstupných síl $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_2}$

Príklad č. 7.4.

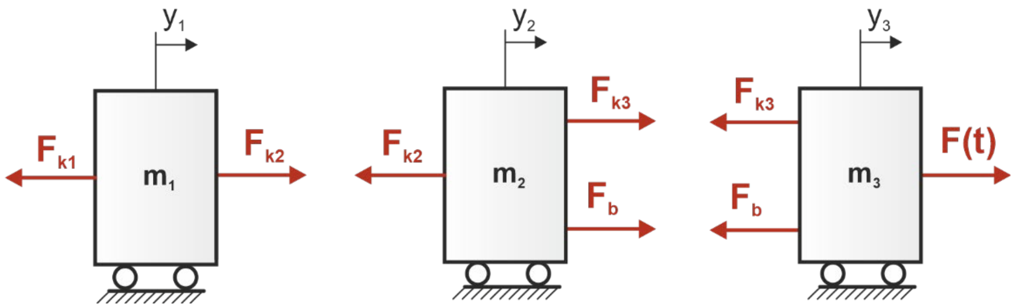
Obr. 7.13 znázorňuje mechanický systém, ktorý pozostáva z troch kmitajúcich hmôt $\mathbf{m_1 = 0.5\,kg}$, $\mathbf{m_2 = 1\,kg}$, $\mathbf{m_3 = 0.5\,kg}$, troch pružín s tuhosťami $\mathbf{k_1 = 0.1\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 0.15\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_3 = 0.05\,N.m^{-1}}$ a jedného tlmiča s konštantou tlmenia $\mathbf{b = 0.5\,N.s.m^{-1}}$. Ak predpokladáme, že hmota $\mathbf{m_1}$ je budená kinematickým kmitaním základu $\mathbf{u(t) = -0.01 \cdot sin(\omega \cdot t)}$, a na hmotu $\mathbf{m_3}$ pôsobí harmonicky meniaca sa sila $\mathbf{F(t) = 0.25 \cdot cos(\omega \cdot t + \pi) + 0.5}$, kde $\mathbf{\omega = 2\pi \cdot f, f = 5\,Hz}$, vypočítajte riešenie systému simulovaním v **Matlabe** a **Simulinku**.



Obr. 7.13. Kmitajúci systém s tromi hmotami

Riešenie:

V prvom kroku všetky telesá systému uvoľníme nahradením komponentov systému odpovedajúcimi vnútornými silovými účinkami, ako je to zobrazené na nasledujúcom Obr. 7.14.



Obr. 7.14. Uvoľnený systém telies

Pre uvoľnený systém hmôt na Obr. 7.14 možno napísať tieto zložkové rovnice systému

$$
\begin{aligned}
F_{k1} &= k_1 \cdot (y_1 - u) \ , \\
F_{k2} &= k_2 \cdot (y_2 - y_1) \ , \\
F_{k3} &= k_3 \cdot (y_3 - y_2) \, , \\
F_b &= b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) \ .
\end{aligned}
\tag{7.45}
$$

Aplikovaním **II. Newtonovho zákona** pre hmotu $\mathbf{m_1}$ musí platiť

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= F_{k2} - F_{k1} \ , \\
m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= k_2 \cdot (y_2 - y_1) - k_1 \cdot (y_1 - u) \ ,
\end{aligned}
\tag{7.46}
$$

pre hmotu $\mathbf{m_2}$ musí platiť, že

$$
\begin{aligned}
m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= F_{k3} + F_b - F_{k2} \ , \\
m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= k_3 \cdot (y_3 - y_2) + b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_2 \cdot (y_2 - y_1)
\end{aligned}
\tag{7.47}
$$

a napokon pre hmotu $\mathbf{m_3}$ platí, že

$$
\begin{aligned}
m_3 \cdot \ddot{y}_3 &= F(t) - F_{k3} - F_b \ , \\
m_3 \cdot \ddot{y}_3 &= F(t) - k_3 \cdot (y_3 - y_2) - b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) \ .
\end{aligned}
\tag{7.48}
$$

To znamená, že dostávame tento **systém troch diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= k_2 \cdot (y_2 - y_1) - k_1 \cdot (y_1 - u) \ , \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= k_3 \cdot (y_3 - y_2) + b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_2 \cdot (y_2 - y_1) \ , \\ m_3 \cdot \ddot{y}_3 &= F(t) - k_3 \cdot (y_3 - y_2) - b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) \ , \end{aligned} \tag{7.49}$$

ktorý prepíšme do tejto formy **simulinkovského tvaru**

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{1}{m_1} \cdot [k_2 \cdot (y_2 - y_1) - k_1 \cdot (y_1 - u)] \ , \\ \ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} \cdot [k_3 \cdot (y_3 - y_2) + b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_2 \cdot (y_2 - y_1)] \ , \\ \ddot{y}_3 &= \frac{1}{m_3} \cdot [F(t) - k_3 \cdot (y_3 - y_2) - b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2)] \ . \end{aligned} \tag{7.50}$$

Prepíšme teraz predchádzajúci systém (7.49) do tohto **maticového tvaru**

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= k_2 \cdot (y_2 - y_1) - k_1 \cdot (y_1 - u) \ , \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= k_3 \cdot (y_3 - y_2) + b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_2 \cdot (y_2 - y_1) \ , \\ m_3 \cdot \ddot{y}_3 &= F(t) - k_3 \cdot (y_3 - y_2) - b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b \\ 0 & -b & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(t) \\ u \end{bmatrix} \ . \tag{7.51}$$

Vypočítaním nasledujúcej inverznej matice hmotností $\mathbf{M^{-1}}$, ktorú vypočítame priamo z matice hmotností systému **M**

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{bmatrix} \tag{7.52}$$

a prenásobením pôvodného systému touto inverznou maticou systému $\mathbf{M^{-1}}$ z pravej strany, možno dospieť k tomuto systému zapísaného v **maticovom tvare**

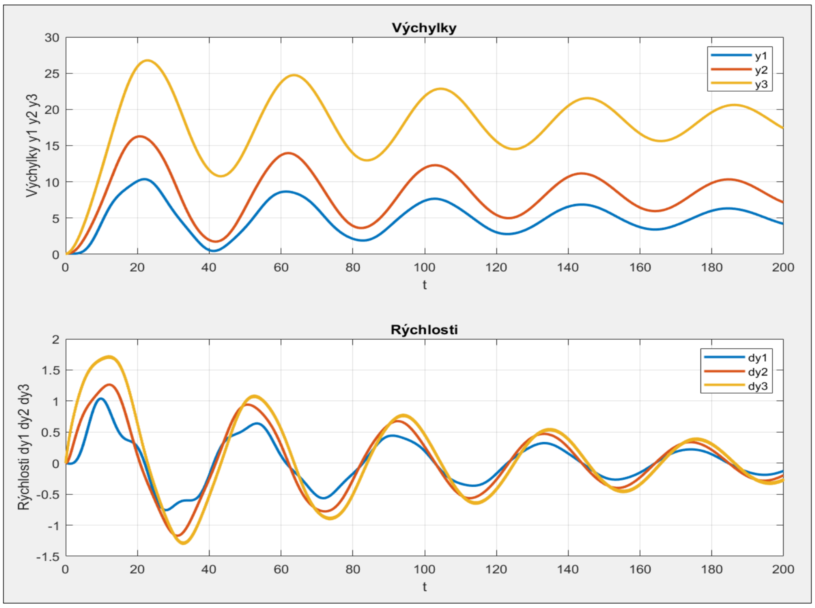
$$\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\\ \ddot{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{k_1}{m_1}\\ 0 & 0\\ \frac{1}{m_3} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F(t)\\ u\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2}\\ 0 & -\frac{b}{m_3} & \frac{b}{m_3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & 0\\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{k_3}{m_2}\\ 0 & -\frac{k_3}{m_3} & \frac{k_3}{m_3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} \tag{7.53}$$

Tento systém zapísaný v maticovom tvare budeme najskôr riešiť a simulovať prostredníctvom napísania nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

F0=0.25;
f=5;
omega=2*pi*f;
u0=-0.01;
m1=0.5;
m2=1;
m3=0.5;
k1=0.1;
k2=0.15;
k3=0.05;
b=0.5;
B=[0 0 0;0 b -b;0 -b b];
K=[k1+k2 -k2 0;-k2 k2+k3 -k3;0 -k3 k3];
Q=[0 k1;0 0;1 0];

%Počiatočné podmienky
Y=[0.1; 0.1; 0.05];
dY=[0;0;0];
tsim=200;
t=0;
dt=0.1;
n=round(tsim-t)/dt;

for i=1:n
    X1(i,:)=[t Y' dY'];
    F=F0*cos(omega*t + pi)+0.5;
    u=-0.01*sin(omega*t);
    ddY=Q*[F; u]-B*dY-K*Y;
    dY=dY+dt*ddY;
    Y=Y+dt*dY;
    t=t+dt;
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(X1(:,1),X1(:,2:4),'LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('Výchylky y1 y2 y3')
legend('y1','y2','y3')
title('Výchylky')
grid on
```

```
subplot(2,1,2)
plot(X1(:,1),X1(:,5:7),'LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('Rýchlosti dy1 dy2 dy3')
legend('dy1','dy2','dy3')
title('Rýchlosti')
grid on
```

Riešenie odozvy systému riešeného použitím predchádzajúceho skriptu, je znázornené v podobe vypočítaných výchyliek a rýchlosti na nasledujúcich grafoch, pozri Obr. 7.15.



Obr. 7.15. Riešenie odozvy systému troch kmitajúcich hmôt

Ďalej budeme uvažovaný systém riešiť formou blokovej schémy v **Simulinku**. Predtým, než vytvoríme **blokovú schému**, nájdime **stavový opis** tohto systému voľbou systému **fázových premenných** a porovnajme riešenie v **Simulinku** výpočtom pomocou **metódy postupnej integrácie** s riešením systému zapísaného v stavovom opise. Pri tvorbe blokovej schémy budeme vychádzať z pôvodného matematického modelu, ktorý sme zapísali do tohto **simulinkovského tvaru**

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{m_1} \cdot [k_2 \cdot (y_2 - y_1) - k_1 \cdot (y_1 - u)] \ ,$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{m_2} \cdot [k_3 \cdot (y_3 - y_2) + b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_2 \cdot (y_2 - y_1)] \ , \qquad (7.54)$$

$$\ddot{y}_3 = \frac{1}{m_3} \cdot [F(t) - k_3 \cdot (y_3 - y_2) - b \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_2)] \ .$$

Pre odvodenie stavového opisu systému, ktorý je definovaný predchádzajúcim systémom diferenciálnych rovníc, začneme s touto voľbou **fázových stavových premenných** podľa (7.55).

$$
\begin{aligned}
&x_1 = y_1 \ , \\
&x_2 = \dot{y}_1 \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 \ , \\
&x_3 = y_2 \ , \\
&x_4 = \dot{y}_2 \Rightarrow x_4 = \dot{x}_3 \ , \\
&x_5 = y_3 \ , \\
&x_6 = \dot{y}_3 \Rightarrow x_6 = \dot{x}_5 \ .
\end{aligned} \tag{7.55}
$$

Potom **stavové rovnice systému** nadobudnú tento tvar

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 \ , \\
&\dot{x}_2 = \ddot{y}_1 = \frac{1}{m_1} \cdot [k_2 \cdot (x_3 - x_1) - k_1 \cdot (x_1 - u)] \ , \\
&\dot{x}_3 = x_4 \ , \\
&\dot{x}_4 = \ddot{y}_2 = \frac{1}{m_2} \cdot [k_3 \cdot (x_5 - x_3) + b \cdot (x_6 - x_4) - k_2 \cdot (x_3 - x_1)] \ , \\
&\dot{x}_5 = x_6 \ , \\
&\dot{x}_6 = \ddot{y}_3 = \frac{1}{m_3} \cdot [F(t) - k_3 \cdot (x_5 - x_3) - b \cdot (x_6 - x_4)] \ ,
\end{aligned} \tag{7.56}
$$

prepísaním týchto stavových rovníc do maticového tvaru, možno dospieť k tejto prvej rovnici dynamiky, ktorá obsahuje matice **A** a **B**.

$$
\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)
$$

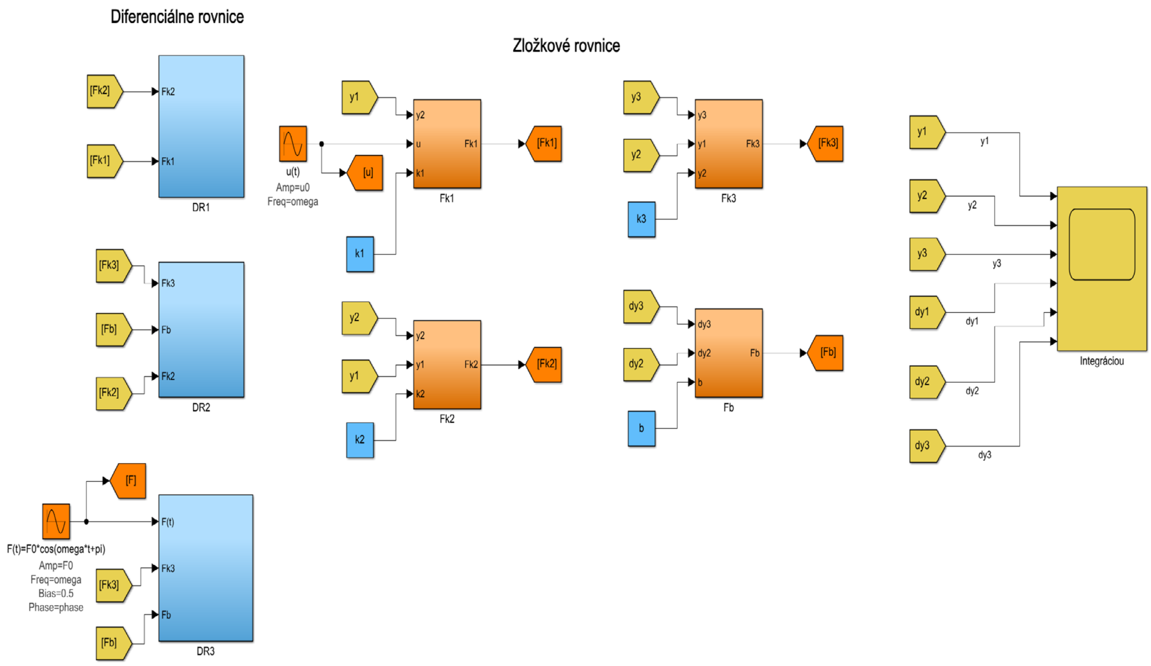
$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & -\frac{b}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & \frac{b}{m_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & \frac{b}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{b}{m_3}
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix}
0 & 0 \\
0 & \frac{k_1}{m_1} \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\frac{1}{m_3} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} F(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \ . \tag{7.57}
$$

Túto predchádzajúcu **sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu** doplníme o **výstupnú rovnicu**, ktorá bude obsahovať matice **C** a **D** stavového opisu. Pri tvorbe tejto rovnice budeme predpokladať, že výstupný vektor $\mathbf{y(t)}$ má identický tvar so stavovým vektorom $\mathbf{x(t)}$, potom musí platiť, že

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \ ,$$

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \ . \qquad (7.58)$$

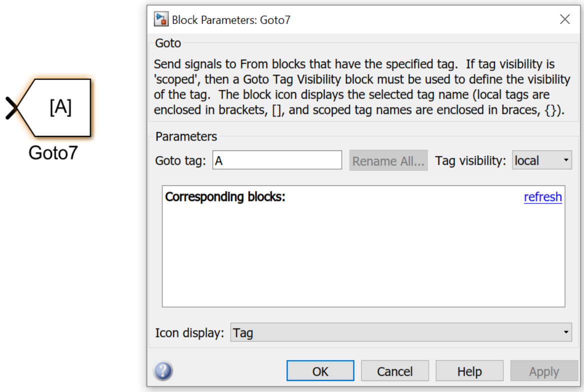
Systém budeme riešiť nasledujúcou blokovou schémou v **Simulinku** podľa Obr. 7.16, v ktorej porovnáme dve riešenia. Prvé riešenie získame **metódou postupnej integrácie** s využitím subsystémov a druhé riešenie získame výpočtom prostredníctvom bloku **State-Space**.



Obr. 7.16. Bloková schéma pre riešenie odozvy systému troch kmitajúcich hmôt

Ako si možno všimnúť, tak pri tvorbe **blokovej schémy** bol na sprehľadnenie tejto schémy použitý princíp tzv. **bezkontaktného prenosu signálov** medzi blokmi simulinkovskej schémy. Tento bezkontaktný prenos signálov možno uskutočniť a zadefinovať pre prenos medzi ľubovoľnými signálmi v každej blokovej schéme. Na realizovanie bezkontaktného prenosu signálov (t. j. prenosu bez použitia **wires – káblov**) používame bloky **From** a **Goto**, ktoré sú zahrnuté v knižnici **Signal Routing**.

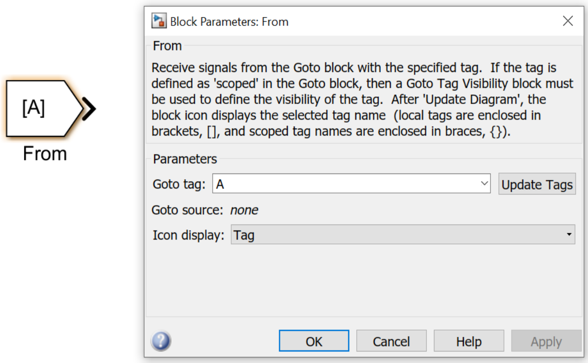
Blok **Goto** slúži na zadefinovanie unikátnej systémovej premennej v **Simulinku**, ktorá musí mať jedinečný **názov** (tzv. **Goto Tag**), zadefinovaný v dialógovom okne parametrov tohto bloku, pozri Obr. 7.17.



Obr. 7.17. Parametre bloku Goto

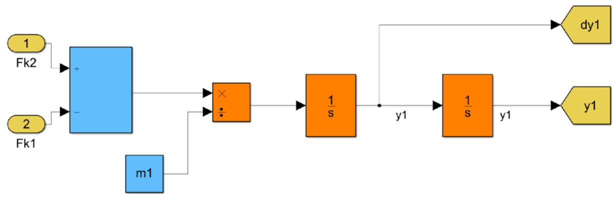
Pri definovaní novej unikátnej premennej v tomto bloku **Goto** možno navyše zvoliť spôsob viditeľnosť (**Tag Visibility**) tejto premennej v rámci projektu daného blokového diagramu. Vo všeobecnosti môžeme voliť z troch možných parametrov, ktorými sú **Local**, **Scope** a **Global**. Parameter **Local** umožňuje nastaviť viditeľnosť signálu len v rámci jedného okna blokového diagramu, v ktorom bola táto premenná definovaná, zatiaľ čo parameter **Global** dovoľuje načítavať prenášané signály prakticky vo všetkých bodoch blokovej schémy, a to aj v takom prípade, že sú tieto signály vyvolávané v rámci **blokov subsystémov**.

Pripomeňme, že premenné, ktoré sú prenášané takýmto **bezkontaktným spôsobom**, možno načítavať v ľubovoľnom mieste **blokového diagramu**, a to jednoducho použitím inverzného bloku **From**. V dialógovom okne parametrov tohto bloku, ktoré je znázornené na ďalšom Obr. 7.18, sa zobrazia aktuálne zadefinované premenené, z ktorý možno voliť požadovaný **Goto Tag** na načítanie.

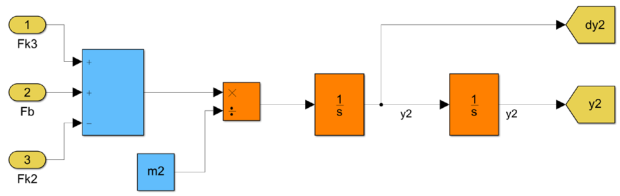


Obr. 7.18. Parametre bloku From

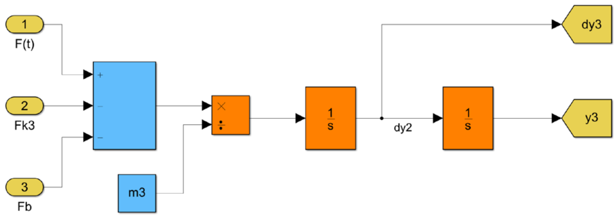
Poznamenajme, že v blokovej schéme na Obr. 7.16 boli časti tejto blokovej schémy zjednodušené a zahrnuté do logických prvkov **subsystémových blokov**, aby sa daná schéma ešte viac sprehľadnila a stala jasne čitateľnou. Tieto subsystémy predstavujú definície diferenciálnych rovníc sústavy systému, ktorými sú **DR1**, **DR2** a **DR3**. Tvary blokových diagramov, ktoré definujú schémy jednotlivých diferenciálnych rovníc sú znázornené na ďalších Obr. 7.19 (a), (b) a (c).



(a)



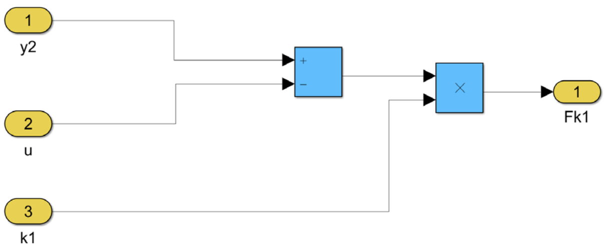
(b)



(c)

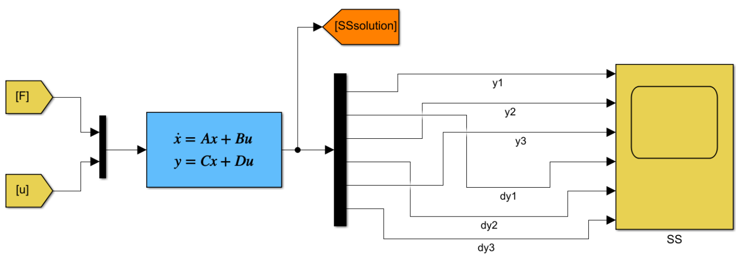
Obr. 7.19. Bloky subsystémov, (a) DR1, (b) DR2 a (c) DR3

Ďalšie štyri **subsystémové bloky $\mathbf{F_{k1}}$, $\mathbf{F_{k2}}$, $\mathbf{F_{k3}}$** a **$\mathbf{F_b}$** boli použité na zadefinovanie zložkových rovníc daného diferenciálneho systému. Príklad jedného z týchto blokov **$\mathbf{F_{k1}}$**, ktoré majú v skutočnosti podobný tvar blokovej schémy, je znázornený na Obr. 7.20.



Obr. 7.20. Subsystem F_{k1}

Na ďalšom Obr. 7.21 je zobrazená časť blokovej schémy, ktorá rieši systém definovaný v stavovom opise.

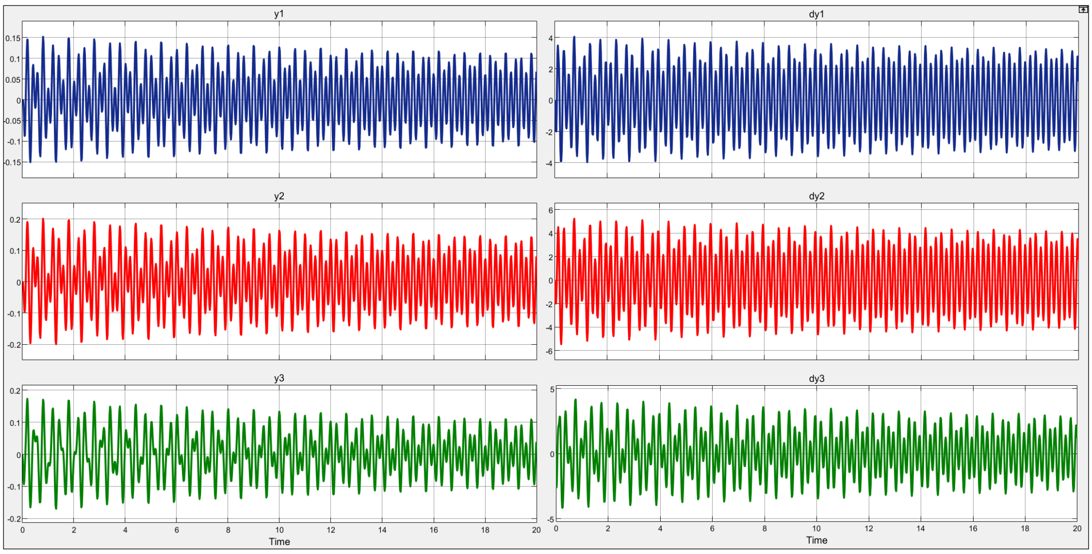


Obr. 7.21. Riešenie odozvy systému v stavovom opise

Pre načítanie vstupných parametrov do lokálneho **WorkSpace modelu**, bola použitá nasledujúca časť skriptu napísaného v **Matlabe**. Tento skript bol zadefinovaný priamo v **Model exploreri** daného blokového diagramu. Ako budenie systému predpokladajme silu $\mathbf{F(t)}$, ktorá je definovaná funkciou $\mathbf{F(t) = 100 \cdot cos(\omega \cdot t + \pi)}$, kde $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{2\pi \cdot f}$ a $\mathbf{f = 5\ Hz}$. Kinematické budenie systému je definované funkciou $\mathbf{u(t) = -0.01 \cdot sin(\omega \cdot t)}$.

```
%Vstupné parametre

F0=100;
f=5;
omega=2*pi*f;
phase=pi + pi/2;
u0=-0.01;
m1=0.5;
m2=1;
m3=0.5;
k1=1000;
k2=2000;
k3=1500;
b=10;

%Stavový opis systému

A=[0 1 0 0 0 0; ...
    -(k1+k2)/m1 0 k2/m1 0 0 0; ...
    0 0 0 1 0 0; ...
    k2/m2 0 -(k2+k3)/m2 -b/m2 k3/m2 b/m2; ...
    0 0 0 0 0 1;
    0 0 k3/m3 b/m3 -k3/m3 -b/m3];
B=[0 0;0 k1/m1;0 0;0 0;0 0;1/m3 0];
C=eye(6);
D=zeros(6,2);
```

Pripomeňme, že parametre systému je taktiež možné načítať priamo z **Globálneho Workspace Matlabu**. Riešenie odozvy systému, ktorá bola vypočítaná **metódou postupnej integrácie** je znázornené na Obr. 7.22. Identické riešenie získame riešením systému použitím bloku **State-Space**.



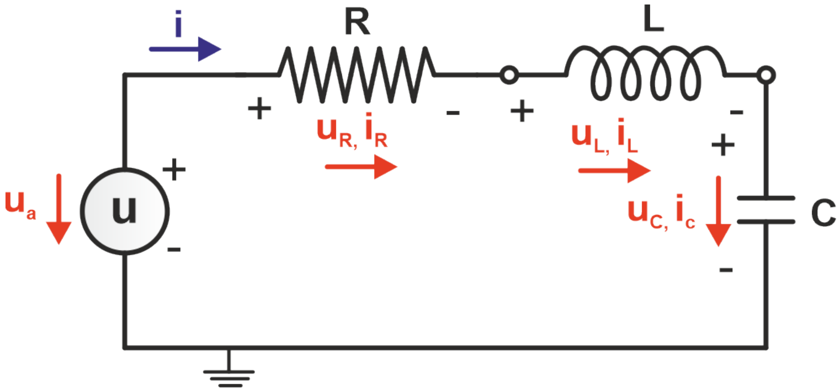
Obr. 7.22. Priebehy posunutí a rýchlosti systému troch kmitajúci hmôt s harmonickým budením sily F(t) a kinematickým budením základu u(t)

Príklad č. 7.5.

Určite stavový opis systému jednoduchého elektrického **RLC** obvodu, ktorý pozostáva z jedného **rezistora** $\mathbf{R = 100\,\Omega}$, **kondenzátora** známej kapacity $\mathbf{C = 200\,\mu F}$ a jednej **cievky** s **indukčnosťou** $\mathbf{L = 300\,mH}$, pozri Obr. 7.23. Riešte odozvu tohto **elektrického systému** simuláciou pomocou blokovej schémy v **Simulinku**, ak vieme, že vstupné napätie $\mathbf{u_a}$

a) sa v prvom prípade mení skokovou zmenou na hodnotu $\mathbf{u_a = 12V}$ a

b) v druhom prípade je definované pulzným periodickým signálom s amplitúdou $\mathbf{u_a = 12V}$ a frekvenciou $\mathbf{f = 0.2\ Hz}$.



Obr. 7.23. Elektrický RLC obvod

Riešenie:

Matematický model tohto **RLC obvodu** začneme tvoriť napísaním týchto zložkových rovníc

$$
\begin{aligned}
i_R &= \frac{u_a - u_L}{R}\ , \\
i_L &= \frac{1}{L}\cdot\int(u_L - u_c)\cdot dt\ , \\
i_C &= C\cdot\frac{d}{dt}(u_c - 0) = C\cdot\frac{du_c}{dt}\ ,
\end{aligned}
\qquad (7.59)
$$

ktoré platia pre jednotlivé elektrické prúdy pretekajúcimi komponentami toho elektrického obvodu. Využitím **I. Kirchhoffovho zákona**, ktorý platí pre dva uzlové body elektrického systému podľa Obr. 7.23, môžeme napísať tieto dve uzlové rovnice

$$
\begin{aligned}
i_R &= i_L\ , \\
i_L &= i_C\ .
\end{aligned}
\qquad (7.60)
$$

Dosaďme výrazy zložkových rovníc do týchto uzlových rovníc, potom dostávame **sústavu dvoch diferenciálnych rovníc** v tomto tvare

$$\frac{u_a - u_L}{R} = \frac{1}{L} \cdot \int (u_L - u_c) dt \,,$$
$$\frac{1}{L} \cdot \int (u_L - u_c) \cdot dt = C \cdot \frac{du_c}{dt} \;. \qquad (7.61)$$

Kombináciou predchádzajúcich dvoch rovníc v jednu diferenciálnu rovnicu, dostávame diferenciálnu rovnicu, v ktorej sa vyskytujú viaceré neznáme veličiny

$$\frac{u_a - u_L}{R} = C \cdot \frac{du_c}{dt} \;. \qquad (7.62)$$

Túto diferenciálnu rovnicou môžeme ďalšími matematickými úpravami previesť na rovnicu jednej neznámej. Postupnými matematickými úpravami dostávame rovnicu pre napätie $\mathbf{u_L}$

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int (u_L - u_c) \cdot dt \;,$$
$$u_L - u_c = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{di_C}{dt} = LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} \Longrightarrow \;, \qquad (7.63)$$
$$u_L = LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c \;.$$

Dosadením odvodeného výrazu, ktorý platí pre $\mathbf{u_L}$ a postupným vykonaním ďalších matematických operácií, možno dospieť k výslednému tomuto matematickému modelu jednej nezávislej premennej $\mathbf{u_c}$

$$\frac{u_a - u_L}{R} = C \cdot \frac{du_c}{dt} \;,$$
$$\frac{u_a - \left[LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c\right]}{RC} = \frac{du_c}{dt} \;, \qquad (7.64)$$
$$LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = u_a \;.$$

Táto výsledná **diferenciálna rovnica 2. rádu**

$$\mathrm{LC}\cdot\frac{d^2u_c}{dt^2}+\mathrm{RC}\cdot\frac{du_c}{dt}+u_c=u_a\ , \tag{7.65}$$

ktorú sme odvodili popisuje vzťah medzi výstupným napätím $\mathbf{u_c}$, ktoré nameriame na kondenzátore s kapacitou **C** a vstupným napätím $\mathbf{u_a}$, ktoré je privedené na zdroj elektrického obvodu.

Preveďme túto diferenciálnu rovnicu na stavový opis systému. Pre vytvorenie stavového opisu systému budeme voliť premenné vo forme **fázových stavových premenných**. Stavový opis systému začneme tvoriť úpravou predchádzajúcej **diferenciálnej rovnice 2. rádu** do tohto **simulinkovského tvaru**

$$\ddot{u}_c=\frac{1}{\mathrm{LC}}\cdot u_a-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot\dot{u}_c-\frac{1}{\mathrm{LC}}\cdot u_c\ . \tag{7.66}$$

V tomto štádiu pristúpime k voľbe týchto **stavových fázových premenných**

$$\begin{aligned} x_1&=u_c\ ,\\ x_2&=\dot{u}_c\Longrightarrow x_2=\dot{x}_1\ . \end{aligned} \tag{7.67}$$

To znamená, že stavový opis systému tohto **RLC obvodu** nadobudne tento výsledný tvar dvoch **stavových rovníc 1. rádu**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=x_2\ ,\\ \dot{x}_2&=\frac{1}{\mathrm{LC}}\cdot u_a-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\cdot x_2-\frac{1}{\mathrm{LC}}\cdot x_1\ . \end{aligned} \tag{7.68}$$

Prepíšme túto sústavu dvoch rovníc do tohto **maticového tvaru**

$$\begin{gathered} \dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t)\ ,\\ \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{\mathrm{LC}} & -\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{\mathrm{LC}}\end{bmatrix}\cdot[u_a]\ , \end{gathered} \tag{7.69}$$

ktorý doplníme o lineárny systém **výstupnej rovnice**. Pripomeňme, že tvar matíc **C** a **D výstupnej rovnice** závisí od tvaru navolených premenných vo výstupnom vektore $\mathbf{y(t)}$.

Potom napr. pre rôzne štyri zvolené prípady výstupných vektorov $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{y_3}$ a $\mathbf{y_4}$, môžeme dospieť k týmto tvarom výstupných rovníc, ktoré boli zapísané v maticovom tvare pomocou stavových matíc **C** a **D**

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\,,$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= [u_c] = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] \cdot [u_a]\,, \\
y_2 &= \begin{bmatrix} u_c \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [u_a]\,, \\
y_3 &= \begin{bmatrix} u_c \\ \dot{u}_c \\ u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [u_a]\,, \\
y_4 &= \begin{bmatrix} u_c \\ \dot{u}_c \\ u_c - u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [u_a]\,.
\end{aligned} \tag{7.70}$$

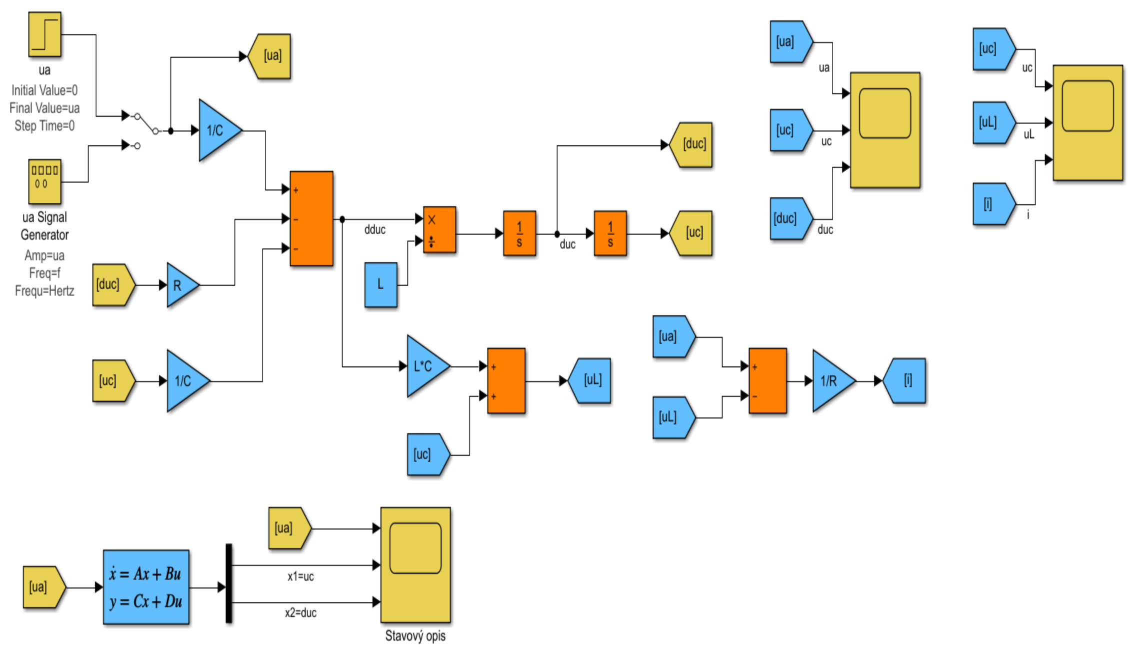
Všimnime si, že matica **D** stavového opisu je prevažne nulovou maticou, ktorá nadobúda tvar na základe počtu výstupov a vstupov systému. Rovnako si môžeme všimnúť, že ak uvažujeme na vstupe inú premennú, ktorá nie je premennou zadefinovanou v stavovom opise napr. vstupné napätie $\mathbf{u_a}$, potom matica **D** stráca tvar nulovej matice.

Ak si teraz pre náš systém **RLC obvodu** zvolíme druhý prípad **výstupného vektora $\mathbf{y_2}$**, potom všetky matice stavového opisu tohto systému nadobudnú tento tvar

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.71}$$

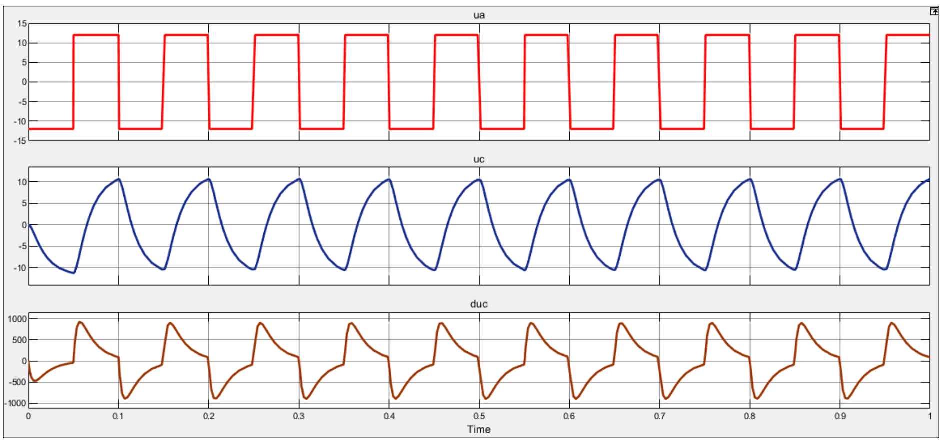
Výpočet riešenia simulácie odvodeného matematického modelu **RLC elektrického obvodu** vykonáme dvoma spôsobmi v nasledujúcej namodelovanej **blokovej schém**e v **Simulinku**, ktorá je znázornená na Obr. 7.24.

Ako si možno všimnúť, tak v tejto schéme sú paralelne zadefinované dva identické matematické modely systémov. Prvým z matematických modelov je model, ktorý predstavuje blokový diagram zostavený zo základného matematického modelu systému. Tento budeme riešiť metódu postupnej integrácie. Druhým matematickým modelom bude model zadefinovaný prostredníctvom matíc stavového opisu **A**, **B**, **C**, a **D**, ktorého odozvu vyriešime použitím bloku **stavového opisu systému** – **State-Space**. Pripomeňme, že z dôvodu porovnania riešenia v oboch prípadoch, je nutné zabezpečiť identické vstupné budiace signály napätia $\mathbf{u_a}$. Budiaci signál tohto napätia $\mathbf{u_a}$ je preto vytvorený na jednom mieste blokovej schémy, a z tohto miesta ďalej prenášaný bezkontaktným spôsobom.



Obr. 7.24. Bloková schéma na riešenie odozvy RLC obvodu

Riešenie simulácie pre periodicky opakujúci sa signál vstupného napätia je zobrazené na nasledujúcom Obr. 7.25.



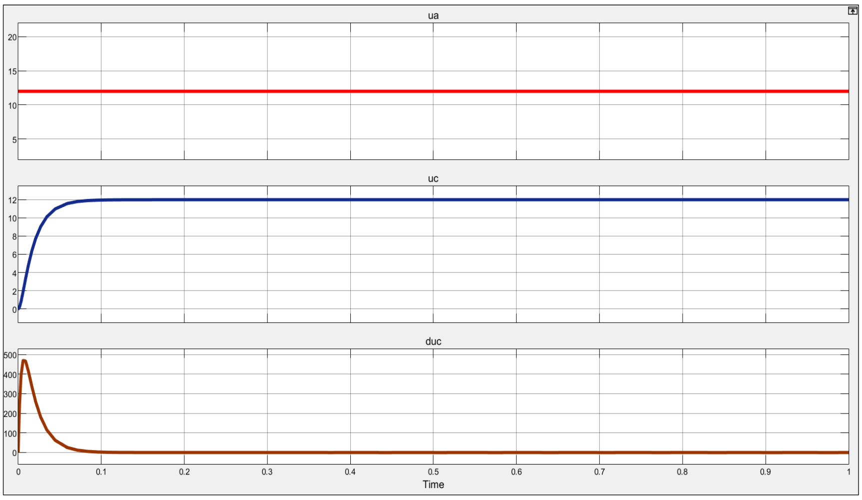
Obr. 7.25: Riešenie odozvy RLC obvodu na vstupný pulzný signál

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, tak aj v tomto prípade boli vstupné hodnoty parametrov simulácie načítané do **Workspace Modelu** prostredníctvom tohto skriptu Matlabu.

```
%Vstupné parametre

R=100;
C=200e-6;
L=300e-3;
ua=12;
f=10;
```

```
%Stavový opis systému

A=[0 1;-1/(L*C) -R/L];
B=[0;1/(L*C)];
CC=eye(2);
D=zeros(2,1);
```

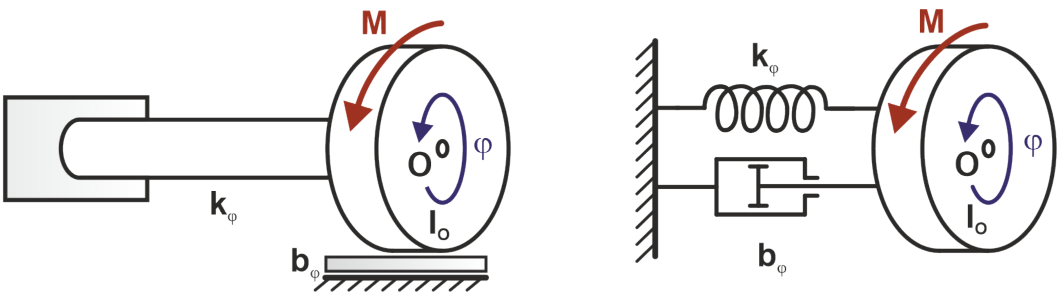
Riešenie simulácie v prípade skokovej zmeny vstupného napätia $\mathbf{u_a}$ je zobrazené na ďalšom Obr. 7.26.



Obr. 7.26. Riešenie simulácie pre prípad skokovej zmeny napätia

Príklad č. 7.6.

Rotujúci disk so známym momentom zotrvačnosti k osi rotácie $\mathbf{I_o = 0.5\ kg.m^2}$ rotuje pri pôsobení zaťažujúceho krútiaceho momentu $\mathbf{M = 0.25\ N.m}$, pozri Obr. 7.27 (a). Disk je z jednej strany fixovaný k pevnému základu prostredníctvom torzného hriadeľa. Ak predpokladáme, že daný hriadeľ možno modelovať ako kombináciu torzného tlmiča s konštantou tlmenia $\mathbf{b_\varphi = 0.5\ N.m.s.rad^{-1}}$ a torznej pružiny s tuhosťou $\mathbf{k_\varphi = 0.1\ N.m.rad^{-1}}$, potom odvoďte matematický model, nájdite stavový opis systému a riešte odozvu tohto rotačného systému v zmysle stavového opisu simuláciou v skripte **Matlabu**.

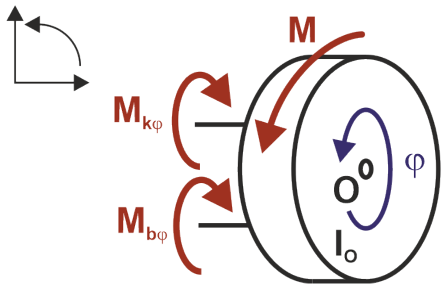


(a) (b)

Obr. 7.27. (a) Rotujúci disk, (b) ekvivalentný mechanický model

Riešenie:

Mechanický systém zobrazený na Obr. 7.27 (b) uvoľníme nakreslením obrazca uvoľnenia, ktorý možno nájsť na Obr. 7.28.



Obr. 7.28. Uvoľnené teleso rotujúceho disku

Ak natočenie rotačného disku opíšeme uhlovým natočením **φ**, potom možno pre hmotu reprezentovanú momentom zotrvačnosti **I_o** napísať tieto zložkové rovnice, ktoré platia pre krútiace momenty pôsobiace v torznej pružine a torznom tlmiči

$$\begin{aligned} M_{k\varphi} &= k_\varphi \cdot (\varphi - 0) = k_\varphi \cdot \varphi \ , \\ M_{b\varphi} &= b_\varphi \cdot (\dot{\varphi} - 0) = b_\varphi \cdot \dot{\varphi} \ . \end{aligned} \tag{7.72}$$

Potom aplikovaním **II. Newtonovho zákona** možno odvodiť tento matematický model

$$\begin{aligned} I \cdot \ddot{\varphi} &= M - M_{k\varphi} - M_{b\varphi} \ , \\ I \cdot \ddot{\varphi} &= M - k_\varphi \cdot \varphi - b_\varphi \cdot \dot{\varphi} \ , \\ I \cdot \ddot{\varphi} + b_\varphi \cdot \dot{\varphi} + k_\varphi \cdot \varphi &= M \ , \end{aligned} \tag{7.73}$$

ktorý prepíšeme do **simulinkovského tvaru** ako

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I} \cdot \left[M - b_\varphi \cdot \dot{\varphi} - k_\varphi \cdot \varphi\right] \ . \tag{7.74}$$

Preveďme túto **diferenciálnu rovnicu 2. rádu** na stavový opis systému voľbou týchto **stavových fázových premenných**

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi \ , \\ x_2 &= \dot{\varphi} \Longrightarrow x_2 = \dot{x}_1 \ . \end{aligned} \tag{7.75}$$

Potom pre **stavový opis systému** rotujúceho disku budú platiť tieto stavového rovnice

$$\dot{x}_1 = x_2 \ ,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I} \cdot M - \frac{b_\varphi}{I} \cdot x_2 - \frac{k_\varphi}{I} \cdot x_1 \ , \qquad (7.76)$$

ktoré prepíšeme do tohto **maticového tvaru**

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \ ,$$
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_\varphi}{I} & -\frac{b_\varphi}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \cdot [M] \ , \qquad (7.77)$$

za účelom nájdenia matíc **A** a **B** stavového opisu. Túto sústavu dvoch **diferenciálnych rovníc 1. rádu v stavovom opise** doplníme o ďalšiu rovnicu výstupu $\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$. Predpokladajme opäť viaceré možné prípady pre výstupné tvary vektorov $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3}$. Pre tieto vektory výstupná rovnica nadobúda tvary

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \ ,$$
$$y_1 = [\varphi] = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] \cdot [M] \ ,$$
$$y_2 = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [M] \ , \qquad (7.78)$$
$$y_3 = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [M] \ .$$

Ak si z týchto troch výstupných vektorov $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3}$ zvolíme napr. druhý prípad **výstupného vektora** $\mathbf{y_2}$, potom pre skúmaný systém rotačného charakteru budú platiť tieto matice **stavového opisu**

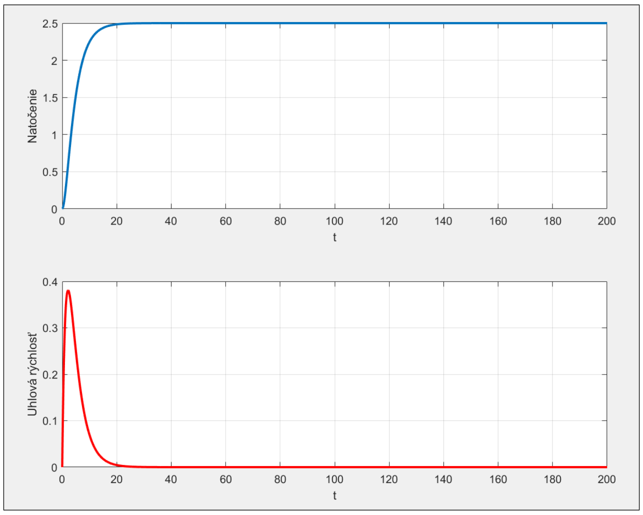
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_\varphi}{I} & -\frac{b_\varphi}{I} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ . \qquad (7.79)$$

Odozvu systému pre systém definovaný v **stavovom opise** predchádzajúcimi maticami **A**, **B**, **C** a **D**, budeme riešiť **metódou postupnej integrácie** systému v stavovom opise pomocou nasledujúceho skriptu v **Matlabe**. Simuláciu v tomto skripte budeme simulovať pre simulačný čas $\mathbf{t_{sim} = 200\ s}$ s časovým krokom $\mathbf{dt = 0.01\ s}$.

Na grafoch zobrazíme odozvu systému v podobe uhlového natočenia **φ** a uhlovej rýchlosti $\dot{\varphi}$, ktorou skúmaný rotujúci disk rotuje.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému

M=0.25;
I=0.5;
b=0.5;
k=0.1;

%Stavový opis systému

A=[0 1;-k/I -b/I];
B=[0;1/I];
C=eye(2);
D=zeros(2,1);

%Vektor počiatočných hodnôt
X=[0; 0.1];

%Čas simulácie
t=0;
tsim=200;
dt=0.1;
n=round(tsim-t)/dt;

for i=1:n
    X1(i,:)=[t X'];
    dX=A*X+B*M;
    X=X+dt*dX;
    t=t+dt;
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(X1(:,1),X1(:,2),'LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('Natočenie')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(X1(:,1),X1(:,3),'r','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('Uhlová rýchlosť')
grid on

%Riešenie vypočítané príkazom step
sys=ss(A,B,C,D);
[y, t]=step(M*sys,[0:dt:tsim]);

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,1),'LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('Natočenie')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(t,y(:,2),'r','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('Uhlová rýchlosť')
grid on
```

Riešenie odozvy, ktoré bolo vypočítané týmto skriptom v **Matlabe**, je znázornené na nasledujúcom Obr. 7.29.



Obr. 7.30. Riešenie odozvy rotujúceho disku – natočenia φ [rad] a uhlovej rýchlosti ω [rad.s^{-1}]

7.4 URČENIE MATÍC STAVOVÉHO OPISU Z MATÍC MATEMATICKÉHO MODELU SYSTÉMU

Predpokladajme všeobecný systém diferenciálnych rovníc ľubovoľného **dynamického systému**, ktorý je opísaný sústavou **n diferenciálnych rovníc 2. rádu**. Matematický model takéhoto systému, ktorý odvodíme v maticovom tvare možno symbolicky zapísať touto rovnicou

$$\mathrm{M} \cdot \ddot{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) + \mathrm{B} \cdot \dot{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) + \mathrm{K} \cdot \mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathrm{F}(\mathrm{t}) \;, \qquad (7.80)$$

kde **M** je diagonálna matica hmotností **(n x n)**, **B** je štvorcová matica tlmenia **(n x n)**, **K** je štvorcová matica tuhostí **(n x n)**, **F(t)** je stĺpcový vektor vstupov **(n x 1)** a $\mathbf{y(t)}$ je stĺpcový vektor výstupov **(n x 1)**.

Potom **matice stavového opisu systému A**, **B**, **C** a **D**, ktoré sme sa do tohto momentu určovali mechanickým spôsobom, nie je vždy nutné počítať týmto ručným spôsobom, t. j. navolením **stavových fázových premenných**; tieto matice stavového opisu **A**, **B**, **C** a **D** môžeme určiť automaticky priamo z matíc matematického modelu každého dynamického systému, ktorý zapíšeme do maticového tvaru prostredníctvom matice hmotností **M**, matice tlmenia **B**, matice tuhostí **K**. Tieto tri matice systému je nutné doplniť o ďalšiu maticu, ktorú označíme symbolom **S**. Táto matica **S** je odvodená z koeficientov, ktoré sa nachádzajú pri **vstupných budiacich funkciách** na pravej strane diferenciálnych rovníc.

Matica S je modifikovateľná matica, vo všeobecnosti nadobudne vždy formu danú poradím vstupných budiacich signálov, ktoré sú zadefinované vo vstupnom vektore $\mathbf{F(t)}$. V tomto vektore $\mathbf{F(t)}$ musia byť uvedené všetky budiace signály, usporiadané v ľubovoľnom poradí; označme tento konečný počet vstupných signálov ako **p**. Potom rozmer matice **S** bude závisieť práve od počtu týchto vstupných signálov **p** a takisto od počtu **nezávislých výstupných premenných** zapísaných vo vektore $\mathbf{y}(\mathbf{t})$.

Z predchádzajúceho vyplýva, že matica **S** bude mať práve toľko **stĺpcov**, koľko má daný systém vstupných budiacich funkcií, ktoré sú definované vo vektore $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ a práve toľko riadkov **r**, koľko je neznámych veličín vo výstupnom vektore $\mathbf{y}(\mathbf{t})$. Poznamenajme, že pre takto zadefinovaný všeobecný dynamický systém, ktorý nemusí byť zásadne **systémom mechanického charakteru**, ale aj systémom z inej fyzikálnej podstaty, môžeme potom matice stavového opisu **A**, **B**, **C** a **D** vypočítať priamo z matíc **M**, **B**, **K** a **S**. Ak teda predpokladáme dynamický systém stupňa **n** s **p** vstupnými budiacimi funkciami vektora $\mathbf{F}(\mathbf{t})$, potom maticu **A** stavového opisu možno symbolicky zapísať a vypočítať pomocou týchto príkazov **Matlabu**

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{3}{c}{-\mathrm{M}^{-1} \times \mathrm{K}} & \multicolumn{3}{c}{-\mathrm{M}^{-1} \times \mathrm{B}} \end{bmatrix}, \tag{7.81}$$

$$\mathrm{A} = [\mathrm{zeros(n)} \quad \mathrm{eye(n)};\ -\mathrm{inv(M)} \times \mathrm{K} \quad -\mathrm{inv(M)} \times \mathrm{D}]$$

a podobne maticu **B** stavového opisu definovať a vypočítať týmito príkazmi

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\mathrm{M}^{-1} \times \mathrm{S}} \end{bmatrix}, \tag{7.82}$$

$$\mathrm{B} = [\mathrm{zeros(n,p)};\ \mathrm{inv(M)} \times \mathrm{S}]\,.$$

Matica **C** stavového opisu, ktorej tvar v skutočnosti závisí na dodržaní identického poradia premenných výstupného vektora $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ (poradie tohto vektora je odvodené z poradia diferenciálnych rovníc zapísaných v maticovom tvare systému), nadobudne buď tvar jednotkovej matice – rozmeru **2 x n** ak výstupný vektor je uvažovaný v tvare vektora $\mathbf{y_1}(\mathbf{t})$, resp. rozmeru **n x n** ak výstupný vektor má tvar $\mathbf{y_2}(\mathbf{t})$, tzn. že

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{y_1(t)} = [\mathrm{y_1} \quad \dots \quad \mathrm{y_r} \quad \dot{\mathrm{y}}_1 \quad \dots \quad \dot{\mathrm{y}}_\mathrm{r}]^\mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{C} = \mathrm{eye}(2 \times \mathrm{n})\,, \tag{7.83}$$
$$\mathrm{y_2(t)} = [\mathrm{y_1} \quad \dots \quad \mathrm{y_r}]^\mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{C} = \mathrm{eye(n)}\,,$$

kde vo vektore $\mathbf{y_1}(\mathbf{t})$ sa najskôr nachádzajú usporiadané premenné $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \dots, \mathbf{y_r}$ a potom ich derivácie $\dot{\mathbf{y}}_\mathbf{1}, \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{2}, \dots, \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{r}$. Rozmer poslednej matice **D** stavového opisu bude taktiež závisieť od tvaru výstupného vektora $\mathbf{y}$. Táto nulová matica **D** nadobudne rozmer **2n x p** pre vektor $\mathbf{y_1}$, resp. **n x p** pre vektor $\mathbf{y_2}$, tzn.

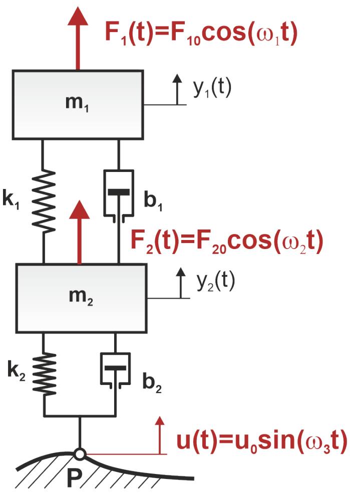
$$D = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad y_1 = [y_1 \quad \dots \quad y_r \quad \dot{y}_1 \quad \dots \quad \dot{y}_r]^T \Rightarrow D = \text{zeros}(2 \times n, p) \ ,$$
$$y_2 = [y_1 \quad \dots \quad y_r]^T \Rightarrow D = \text{zeros}(n, p) \ . \tag{7.84}$$

Ak poznáme matice systému **M**, **K**, **B** a **S**, potom môžeme na základe predchádzajúcich definícií vypočítať matice stavového opisu **A**, **B**, **C** a **D** týmto všeobecne platným skriptom v **Matlabe**.

```
%Zadefinujeme tvar vektora vstupu F(t)
F=[F1;F2;...;u1;u2];

%Zadefinujeme matice systému M, K, D a S
K=[         ];
D=[         ];
S=[         ];

M=diag([ prvky diagonálnej matice ]);
n=length(M); %vypočíta stupeň systému
p=size(F,1); %vypočítame alebo zadáme počet vstupov

%Výpočet matíc stavového opisu
A=[zeros(n)   eye(n);-inv(M)*K -inv(M)*D];
eig(A)
B=[zeros(n, p);inv(M)*S];
C=eye(2*n);
D=zeros(2*n, p);
```

Príklad č. 7.7.

Predpokladajme mechanický systém zobrazený na Obr. 7.31. Systém pozostáva z dvoch kmitajúcich hmôt $\mathbf{m_1 = 15\,kg, m_2 = 30\,kg}$, ktoré sú budené harmonickými premenlivými silami $\mathbf{F_1(t) = F_{10} \cdot cos(\omega_1 \cdot t)}$, $\mathbf{F_2(t) = F_{20} \cdot cos(\omega_2 \cdot t)}$, kde $\mathbf{F_{10} = 100\,N, f_1 = 5\,Hz, F_{20} = 200\,N}$, $\mathbf{f_2 = 6\,Hz}$. V spodnej časti tohto mechanického systému je hmota $\mathbf{m_2}$, ktorá je budená premenlivým kinematickým posunutím $\mathbf{u(t)}$. Táto budiaca funkcia kopíruje reliéf vozovky a definovaná sínusovou funkciou $\mathbf{u(t) = u_0 \cdot sin(\omega_3 \cdot t)}$, kde $\mathbf{u_0 = 0.05\,m, f_3 = 1\,Hz}$.

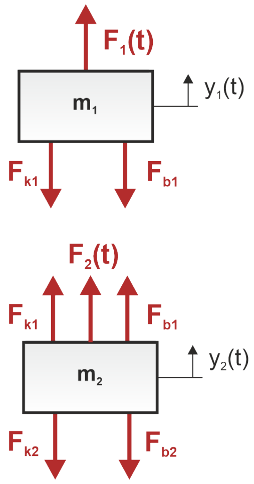


Obr. 7.31. Mechanický systém dvoch kmitajúcich hmôt

Ak predpokladáme, že ďalšie parametre systému sú $\mathbf{b_1 = 100\,N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{b_2 = 150\,N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{k_1 = 3500\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 4500\,N.m^{-1}}$, odvoďte stavový opis tohto systému a nájdite jeho odozvu simuláciou blokovej schémy v **Simulinku**.

Riešenie:

Predtým, než začneme s tvorbou matematického modelu systému, si jednotlivé hmoty tohto systému uvoľníme nakreslením obrazca uvoľnenia, pozri Obr. 7.32.



Obr. 7.32. Uvoľnené telesá mechanického systému

Ďalej napíšeme tieto zložkové rovnice systému, ktoré predstavujú sily v pružinách a tlmičoch

$$\begin{aligned} F_{k1} &= k_1 \cdot (y_1 - y_2)\,, \\ F_{b1} &= b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)\,, \\ F_{k2} &= k_2 \cdot (y_2 - u(t))\,, \\ F_{b2} &= b_2 \cdot \left(\dot{y}_2 - \dot{u}(t)\right). \end{aligned} \tag{7.85}$$

Aplikovaním **II. Newtonovho zákona** pre hmotu $\mathbf{m_1}$ musí platiť, že

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= F_1(t) - F_{k1} - F_{b1}\,, \\ m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= F_1(t) - k_1 \cdot (y_1 - y_2) - b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{aligned} \tag{7.86}$$

a pre hmotu $\mathbf{m_2}$ dosadením zložkových rovníc do systému dostávame, že

$$\begin{aligned} m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= F_2(t) + F_{k1} + F_{b1} - F_{k2} - F_{b2}\,, \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= F_2(t) + k_1 \cdot (y_1 - y_2) + b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k_2 \cdot (y_2 - u) - b_2 \cdot (\dot{y}_2 - \dot{u}). \end{aligned} \tag{.87}$$

Tzn., že matematický model tvorí tento **systém dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= F_1(t) - k_1 \cdot (y_1 - y_2) - b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)\,, \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= F_2(t) + k_1 \cdot (y_1 - y_2) + b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k_2 \cdot (y_2 - u) - b_2 \cdot (\dot{y}_2 - \dot{u})\ , \end{aligned} \tag{7.88}$$

ktorý upravíme a zapíšeme do tohto výsledného **simulinkovského** tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{1}{m_1} \cdot [F_1(t) - k_1 \cdot (y_1 - y_2) - b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)]\ , \\ \ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} \cdot [F_2(t) + k_1 \cdot (y_1 - y_2) + b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k_2 \cdot (y_2 - u) - b_2 \cdot (\dot{y}_2 - \dot{u})]\ . \end{aligned} \tag{7.89}$$

Nájdime teraz **matice stavového opisu A**, **B**, **C** a **D**, metódou, ktorú sme opísali na začiatku tejto kapitoly, t. j. výpočtom týchto matíc priamo z matíc systému **M**, **K**, **B**, a matice **S**, ktorá prislúcha vstupnému vektoru $\mathbf{F(t)}$. Predtým, než pristúpime k výpočtu týchto matíc, je nutné si stanoviť tvary **vstupného** a **výstupného** vektora. Pre náš prípad budeme predpokladať, že **vstupný vektor** $\mathbf{F(t)}$ a **výstupný vektor** $\mathbf{y(t)}$ majú tieto tvary usporiadaných premenných

$$F^T(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} \quad a \quad y^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}\ . \tag{7.90}$$

Poznamenajme, že **výstupný vektor** $\mathbf{y(t)}$, ktorý sme si zvolili, nadobudne tvar, ktorý začína poradím výchyliek $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$ na základe definovaného poradia diferenciálnych rovníc celej sústavy, ktorý je doplnený o derivácie týchto výchyliek v tom istom poradí. Tento tvar výstupného vektora súvisí so zadefinovaním tvaru matíc **C** a **D** vo výpočtovom skripte **Matlabu**. Pripomeňme, že **matice C** a **D** môžeme určiť aj vlastným spôsobom, t. j. zadefinovaním vlastného tvaru výstupného vektora $\mathbf{y(t)}$, ak však dodržíme tvar **výstupného vektora** $\mathbf{y(t)}$ podľa (7.90), potom matice **C** a **D** nadobudnú presne rovnaký tvar, ktorý sa riadi kritériám zadefinovanými podľa (7.83) a (7.84).

Predtým, než začneme tvoriť **maticový tvar systému**, upravíme si pôvodný systém diferenciálnych rovníc usporiadaním výrazov známych a neznámych veličín do tohto tvaru

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{y}_1 + k_1 \cdot (y_1 - y_2) + b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) &= F_1(t)\ , \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 - k_1 \cdot (y_1 - y_2) - b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2 \cdot y_2 + b_2 \cdot \dot{y}_2 & \\ = F_2(t) + k_2 \cdot u(t) + b_2 \cdot \dot{u}(t)\,. \end{aligned} \tag{7.91}$$

Po matematickej úprave môžeme systém prepísať do tohto **maticového tvaru**

$$
\mathrm{M}\cdot\ddot{\mathrm{y}}(\mathrm{t})+\mathrm{B}\cdot\dot{\mathrm{y}}(\mathrm{t})+\mathrm{K}\cdot\mathrm{y}(\mathrm{t})=\mathrm{S}\cdot\mathrm{F}(\mathrm{t})\ ,
$$

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_1 & b_1+b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}\ . \tag{7.92}
$$

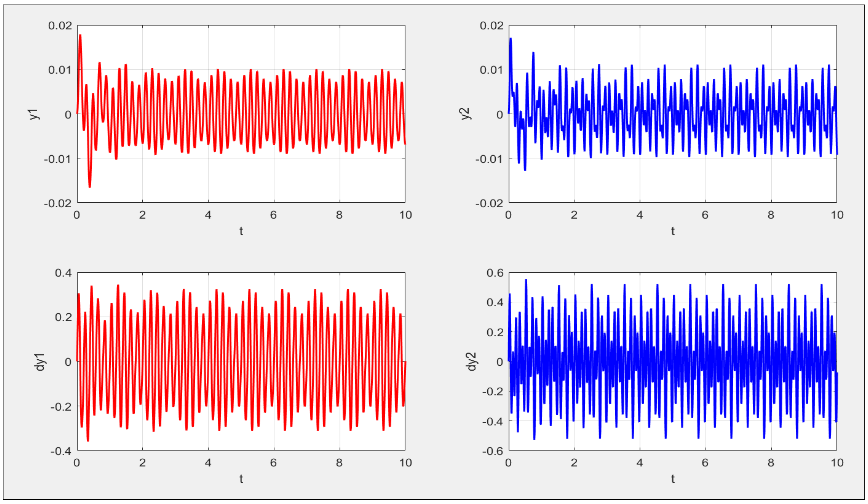
Z predchádzajúceho maticového tvaru systému môžeme identifikovať tieto matice systému **M**, **K**, **B**, a **S**

$$
M=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_1 & b_1+b_2 \end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix},
$$
$$
S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 & b_2 \end{bmatrix}\ , \tag{7.93}
$$

ktoré teraz využijeme na napísanie simulačného skriptu v **Matlabe**. V tomto skripte **Matlabu** z týchto zadefinovaných matíc systému **M**, **K**, **B**, a **S** vypočítame matice stavového opisu **A**, **B**, **C** a **D**, použitím výpočtových vzťahov, ktoré sme uviedli v úvode kapitoly 7.4.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
m1=15; m2=30;
k1=3500; k2=4500;
b1=100; b2=150;

%Budiace funkcie
F10=100; f1=5; omega1=2*pi*f1;
F20=200; f2=6; omega2=2*pi*f2;
u0=0.05; f3=10; omega3=2*pi*f3;

t=0:0.01:10; %Čas simulácie
F1=F10*cos(omega1*t);
F2=F20*cos(omega2*t);
u=u0*sin(omega3*t);
du=u0*omega3*cos(omega3*t);
F=[F1;F2;u;du]; %výstupný vektor

%Definovanie lineárnych charakteristík tlmenia a pruženia
xk1=[-1,0,1]; yk1=[-k1,0,k1];
xk2=[-1,0,1]; yk2=[-k2,0,k2];
xb1=[-1,0,1]; yb1=[-b1,0,b1];
xb2=[-1,0,1]; yb2=[-b2,0,b2];

%Zadefinovanie matíc systému M, B, K a S
M=diag([m1 m2]);
n=length(M);  %Stupeň systému
p=size(F,1);  %počet vstupov systému

K=[k1 -k1;-k1 k1+k2];
B=[b1 -b1;-b1 b1+b2];
S=[1 0 0 0;0 1 k2 b2];
```

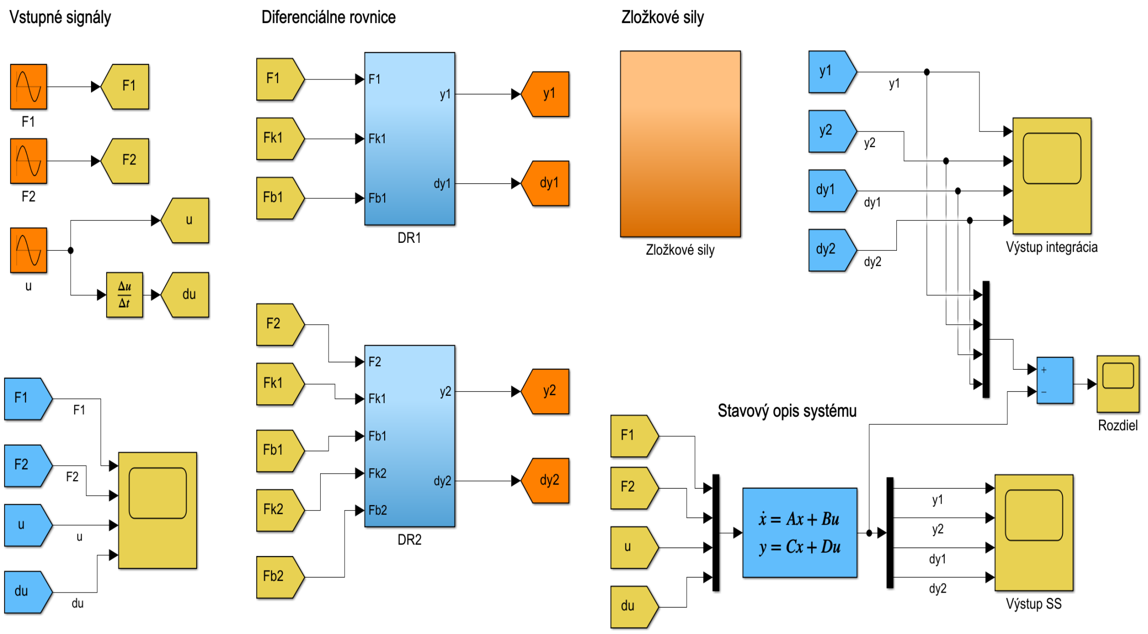
```
%Výpočet matíc A, B, C a D stavového opisu

A=[zeros(n) eye(n); -inv(M)*K  -inv(M)*B];
eig(A) %výpočet vlastných hodnôt matice A
BB=[zeros(n, p); inv(M)*S];
C=eye(2*n);
D=zeros(2*n, p);

%Zadefinovanie systému v stavovom opise

sys=ss(A,BB,C,D);
y=lsim(sys, F, t); %výpočet odozvy systému

%Vypočítaná odozva systému

figure(1)

subplot(2,2,1)
plot(t,y(:,1),'-r','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t')
ylabel('y1')

subplot(2,2,2)
plot(t,y(:,2),'-b','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t')
ylabel('y2')

subplot(2,2,3)
plot(t,y(:,3),'-r','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t')
ylabel('dy1')

subplot(2,2,4)
plot(t,y(:,4),'-b','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t')
ylabel('dy2')

%Zobrazenie vstupných budiacich funkcií systému

figure(2)

subplot(3,1,1)
plot(t,F1,'-b','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t')
ylabel('F1(t)')

subplot(3,1,2)
plot(t,F2,'-g','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t')
ylabel('F2(t)')

subplot(3,1,3)
plot(t,u,'-r','LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
```



Obr. 7.33. Riešenie odozvy vypočítanej skriptom Matlabu

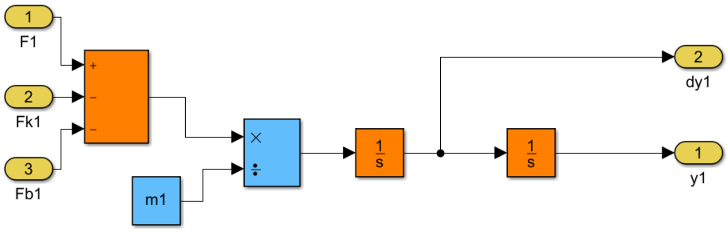
Na Obr. 7.33 je znázornené riešenie odozvy systému predchádzajúcim skriptom **Matlabu**. Vytvorme teraz **blokovú schému** na riešenie simulácie daného systému. Predchádzajúci skript využijeme taktiež pre načítanie vstupných parametrov, ktoré zadefinujeme v pracovnom **Workspace modelu**. Pri tvorbe **blokovej schémy** budeme vychádzať z tohto **simulinkovského modelu systému**

$$
\begin{aligned}
\ddot{y}_1 &= \frac{1}{m_1}\left[F_1(t) - F_{k1} - F_{b1}\right] , \\
\ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2}\left[F_2(t) + F_{k1} + F_{b1} - F_{k2} - F_{b2}\right] .
\end{aligned}
\qquad (7.94)
$$

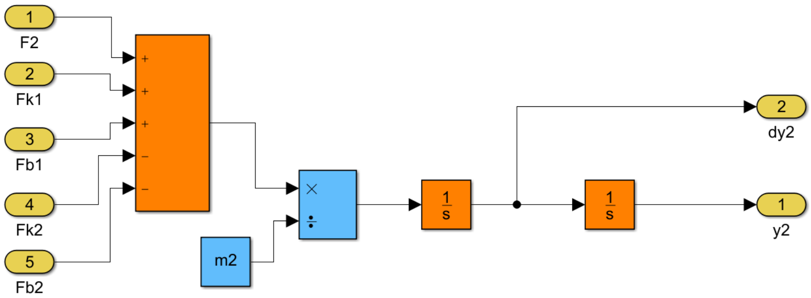


Obr. 7.34. Bloková schéma simulácie systému dvoch kmitajúcich hmôt

V blokovej schéme, ktorá je znázornená na Obr. 7.34, boli pre zjednodušenie prenosu signálov použité bloky **Goto** a **From**. V týchto blokoch bol nastavený parameter **Global**, ktorý zabezpečil viditeľnosť premenných vo všetkých použitých **subsystémoch modelu**. Týmito boli subsystémy diferenciálnych rovníc **DR1** a **DR2**, ktorých blokové diagramy sú znázornené na Obr. 7.35 a Obr. 7.36.

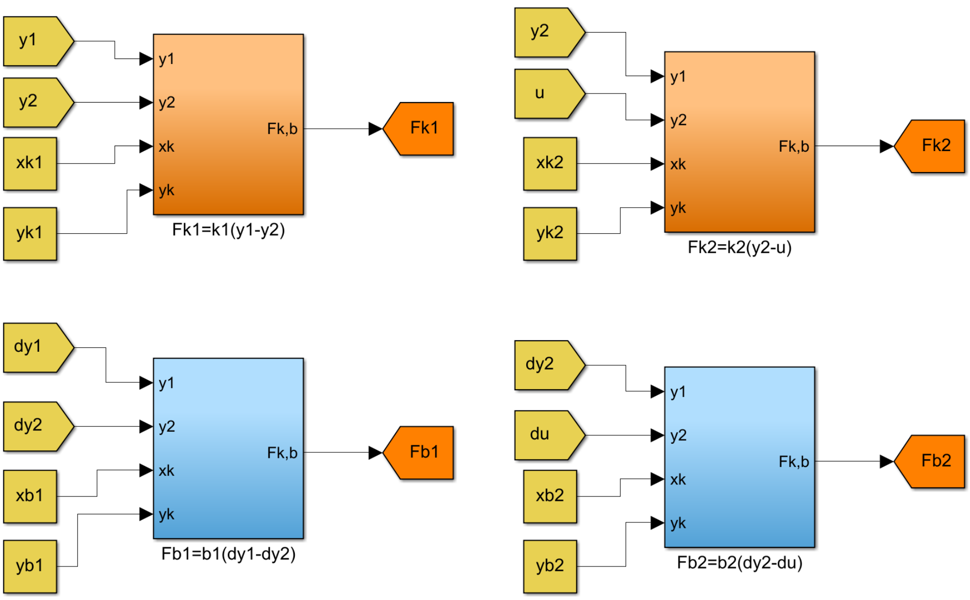


Obr. 7.35. Subsystém DR1



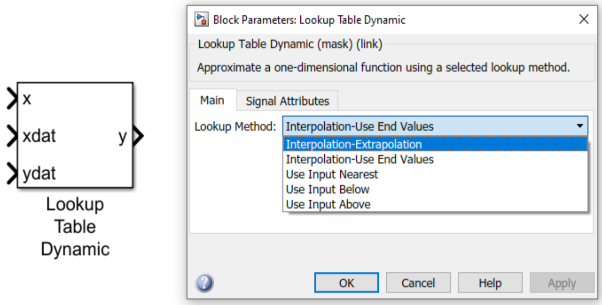
Obr. 7.36. Subsystém DR2

Ďalšie subsystémy, ktorý sme využili na zadefinovanie zložkových síl $\mathbf{F_{k1}}$, $\mathbf{F_{k2}}$, $\mathbf{F_{b1}}$, $\mathbf{F_{b2}}$, boli realizované bezkontaktným prenosom signálov simulovaných veličín $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{dy_1}$, $\mathbf{dy_2}$, pozri Obr. 7.37.



Obr. 7.37. Subsystémy zložkových síl – uložené v subsystéme zložkové sily

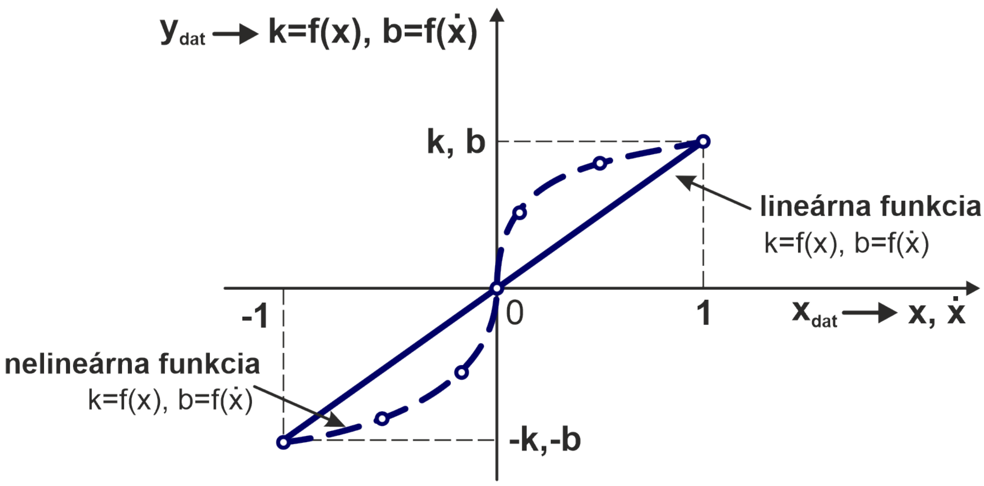
Každý subsystém zložkovej sily, ktorý bol použitý v blokovej schéme má identický tvar blokového diagramu. V týchto subsystémoch sme namiesto zosilňovacieho bloku **Gain** použili aproximačný blok pod názvom **Lookup Table Dynamic**, ktorý je začlenený do knižnice **Lookup Tables**. Parametre tohto bloku **Lookup Table Dynamic** sú znázornené na Obr. 7.38.



Obr. 7.38. Parametre bloku Lookup Table Dynamic

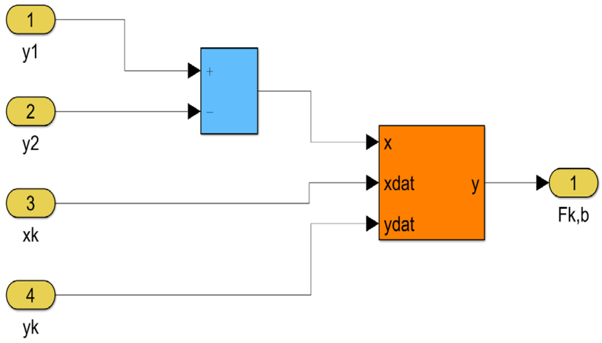
Týmto blokom **Lookup Table Dynamic** možno aproximovať funkciu jednej premennej $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ na základe zvolenej metódy aproximácie, ktorá môže byť typu **Interpolation-Extrapolation**, **Interpolation-Use End Values**, **Use Input Nearest**, **Use Input Below** alebo **Use Input Above**; pre bližšie informácie, pozri **Help Matlabu**. V našom prípade túto funkciu využijeme na výpočet funkcií zložkových síl $\mathbf{F_k}$ alebo $\mathbf{F_b}$, ktoré sú definované ako **súčin** vstupnej výchylky $\mathbf{y}$ resp. rýchlosti $\dot{\mathbf{y}}$ a súčiniteľa **tuhosti k** resp. **tlmenia b**. Teda platí, že $\mathbf{F_k} = \mathbf{k}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}$ a $\mathbf{F_b} = \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}) \cdot \dot{\mathbf{y}}$.

Parametre **tuhostí** $\mathbf{k}(\mathbf{y})$ resp. **tlmenia** $\mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}})$ sa pre odpovedajúce výchylky $\mathbf{y}$ resp. rýchlostí $\dot{\mathbf{y}}$ odčítajú priamo z grafu aproximovanej krivky definovanej pre množinu dát $\mathbf{x_{dat}}$ a $\mathbf{y_{dat}}$, pozri Obr. 7.39.



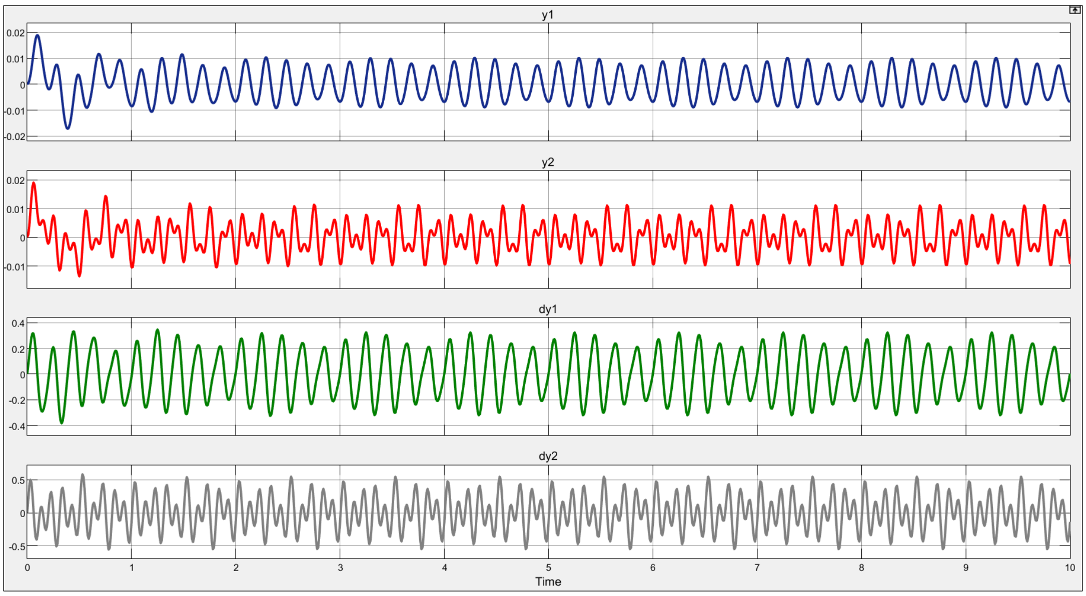
Obr. 7.39. Aproximácia funkcie v bloku Lookup table

Výhodou použitia takéhoto bloku **Lookup Table Dynamic** na výpočet zložkových síl oproti bloku **Gain** je v tom, že takýto matematický model je v budúcnosti pripravený na riešenie systému nielen **lineárneho charakteru**; keď pružiny a tlmiče vykazujú charakteristiky jednoduchých lineárnych funkcií, ale aj na riešenie **nelineárneho systému**; keď množina dát $\mathbf{x}_{\mathbf{dat}}$ a $\mathbf{y}_{\mathbf{dat}}$ definuje body **nelineárnej krivky**, ktorá v konečnom dôsledku mení charakter **lineárneho modelu systému** na model **nelineárneho** charakteru. Inak povedané, v tomto prípade uvažujeme nelineárne charakteristiky **pružín** a **tlmičov**.



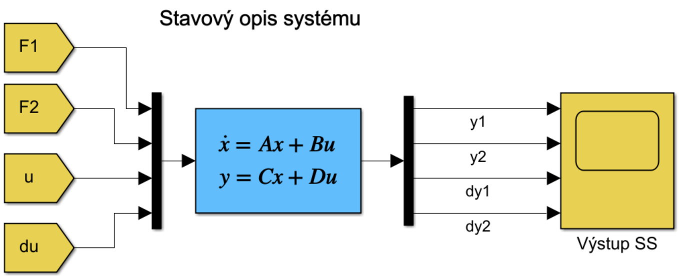
Obr. 7.40. Blokový diagram subsystému zložkových síl s využitím bloku Lookup Table Dynamic

Subsystém na výpočet zložkových síl, ktorý je rovnaký vo všetkých prípadoch s použitím bloku **Lookup Table Dynamic**, je znázornený na nasledujúcom Obr. 7.40. Riešenie simulácie systému v podobe výchyliek a rýchlosti, ktoré bolo vypočítané **metódou postupnej integrácie** rovníc v **simulinkovskom tvare** na základe blokovej schémy Obr. 7.34, je znázornené na nasledujúcom Obr. 7.41.



Obr. 7.41. Riešenie simulácie kmitajúceho systému metódou postupnej integrácie – výchylky [m] a rýchlosti [$m.s^{-1}$]

K identickému tvaru riešenia možno dospieť simulovaním tohto systému v stavovom opise. **Bloková schéma** pre riešenie odozvy systému v stavovom opise s použitím bloku **State-Space** je znázornená na ďalšom Obr. 7.42.

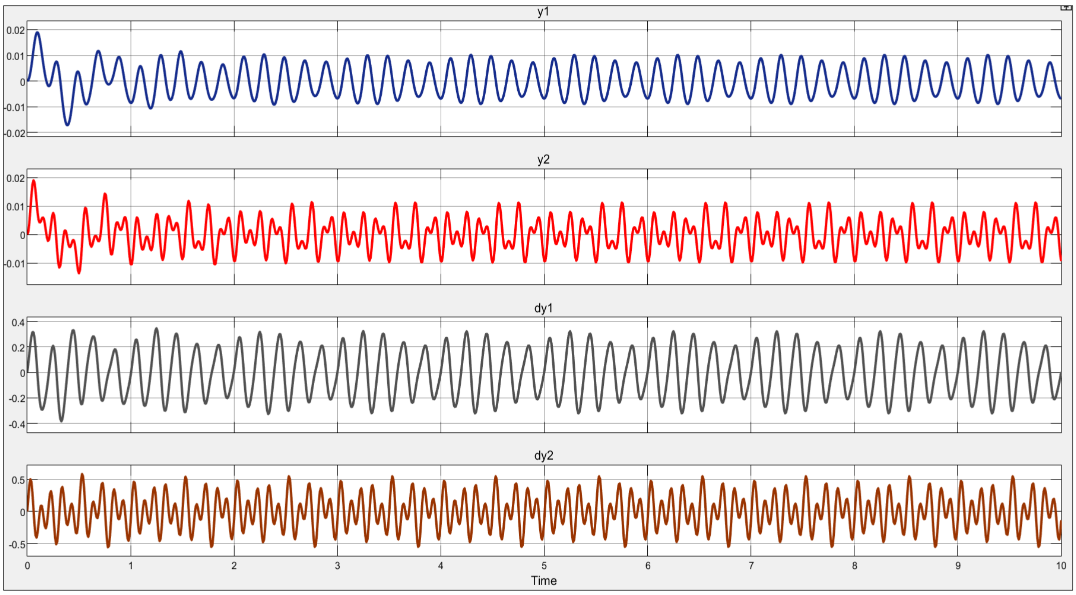


Obr. 7.42. Bloková schéma na simulácie systému v stavovom opise

Pripomeňme, že pri použití bloku **State-Space** v tejto **blokovej schéme** modelu, bolo nutné pre získanie správneho riešenia odozvy systému dodržať správne poradie vstupných signálov, ktoré boli privedené na vstup tohto bloku **State-Space** prostredníctvom bloku **Mux**. Poradie vstupných signálov, ktoré sme priviedli na vstupného terminály bloku **Mux**, bolo dané zvoleným tvarom **vstupného vektora** $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ podľa (7.90).

Na výstupnej strane bloku **State-Space** sa objaví **výstupný vektor** $\mathbf{y}(\mathbf{t})$, ktorý predstavuje skupinu signálov prenášanú v jednom výstupnom signály $\mathbf{y}(\mathbf{t})$. Poradie vypočítaných veličín v tomto výstupnom vektore $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ bolo opäť dopredu prednastavené a nadobudlo tvar podľa (7.90). Na oddelenie veličín vo výstupnom signály sme použili inverzný blok **Demux**.

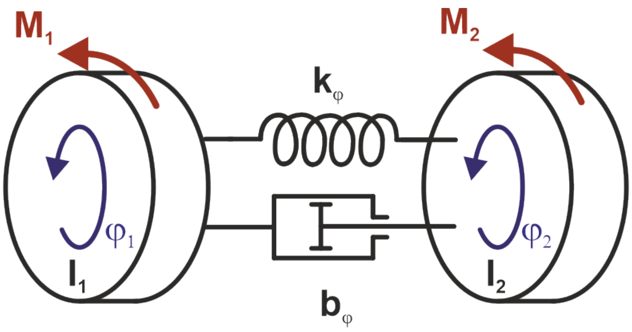
Potom riešenie simulácie systému, ktorý bol definovaný takýmto spôsobom v **stavovom opise** a simulovaný prostredníctvom bloku **State-Space** blokovou schémou podľa Obr. 7.42, je znázornené na ďalšom Obr. 7.43. Ako si možno všimnúť, tak toto vypočítané riešenie je identické s riešením systému zobrazeným na Obr. 7.41, ktoré sme získali **simuláciou blokovej schémy** metódou postupnej integrácie matematického modelu systému.



Obr. 7.43. Riešenie simulácie systému v stavovom opise – výchylky [m] a rýchlosti [m.s^{-1}]

Príklad č. 7.8.

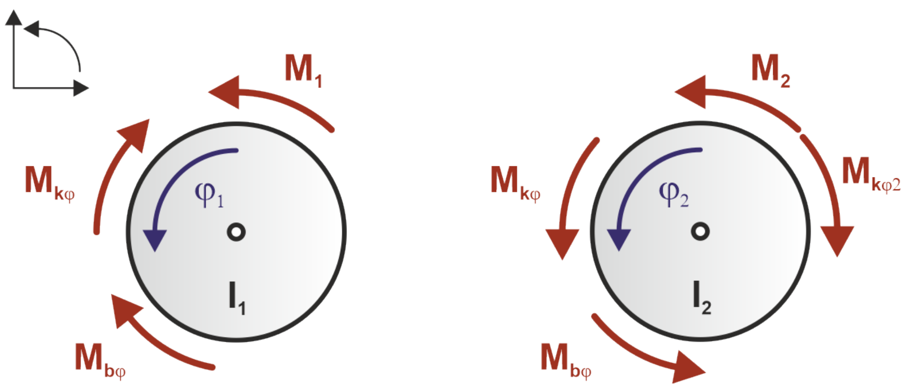
Rotačný systém s dvomi hmotami na Obr. 7.44, ktoré majú momenty zotrvačnosti $\mathbf{I_1 = 2\ kg.m^2}$, $\mathbf{I_2 = 3\ kg.m^2}$ sú prepojené torzným tlmičom s konštantou tlmenia $\mathbf{b_\varphi = 0.2\ N.m.s.rad^{-1}}$ a torznou pružinou s tuhosťou $\mathbf{k_\varphi = 2.5\ N.m.rad^{-1}}$. Na jednotlivé hmoty po oboch stranách pôsobí pulzný krútiaci moment s rovnakou frekvenciou kmitania $\mathbf{f = 5\ Hz}$ a opačného smeru s amplitúdou $\mathbf{M_1 = 10\ N.m}$ a $\mathbf{M_2 = -10\ N.m}$. Odvoďte matematický model tohto systému a riešte jeho odozvu simuláciou prostredníctvom blokovej schémy v **Simulinku**.



Obr. 7.44. Rotačný systém s dvomi hmotami

Riešenie:

Predtým, než začneme tvoriť matematický model systému, si jednotlivé hmoty rotačného systému uvoľníme podľa Obr. 7.45.



Obr. 7.45. Uvoľnené hmoty rotačného systému

Napíšeme zložkové rovnice systému pre krútiace momenty s uvažovaním, že $\boldsymbol{\varphi_1 > \varphi_2}$

$$\begin{aligned} M_{k\varphi} &= k_\varphi(\varphi_1 - \varphi_2)\ , \\ M_{b\varphi} &= b_\varphi(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\ . \end{aligned} \tag{7.95}$$

Aplikovaním **II. Newtonovho zákona** pre hmotu $\mathbf{I_1}$, musí platiť, že

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M_1(t) - M_{k\varphi} - M_{b\varphi} \;, \\ I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M_1(t) - k_\varphi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - b_\varphi \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \end{aligned} \tag{7.96}$$

a pre hmotu $\mathbf{I_2}$ musí platiť, že

$$\begin{aligned} I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_2(t) + M_{k\varphi} + M_{b\varphi} \;, \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_2(t) + k_\varphi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + b_\varphi \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \;. \end{aligned} \tag{7.97}$$

To znamená, že dostávame tento **systém dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M_1(t) - k_\varphi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - b_\varphi \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \;, \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_2(t) + k_\varphi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + b_\varphi \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \;, \end{aligned} \tag{7.98}$$

ktorý prepíšeme do tohto **maticového tvaru**

$$\begin{gathered} M \cdot \ddot{y}(t) + B \cdot \dot{y}(t) + K \cdot y(t) = S \cdot F(t) \;, \\ \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_\varphi & -b_\varphi \\ -b_\varphi & b_\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\varphi & -k_\varphi \\ -k_\varphi & k_\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} \;. \end{gathered} \tag{7.99}$$

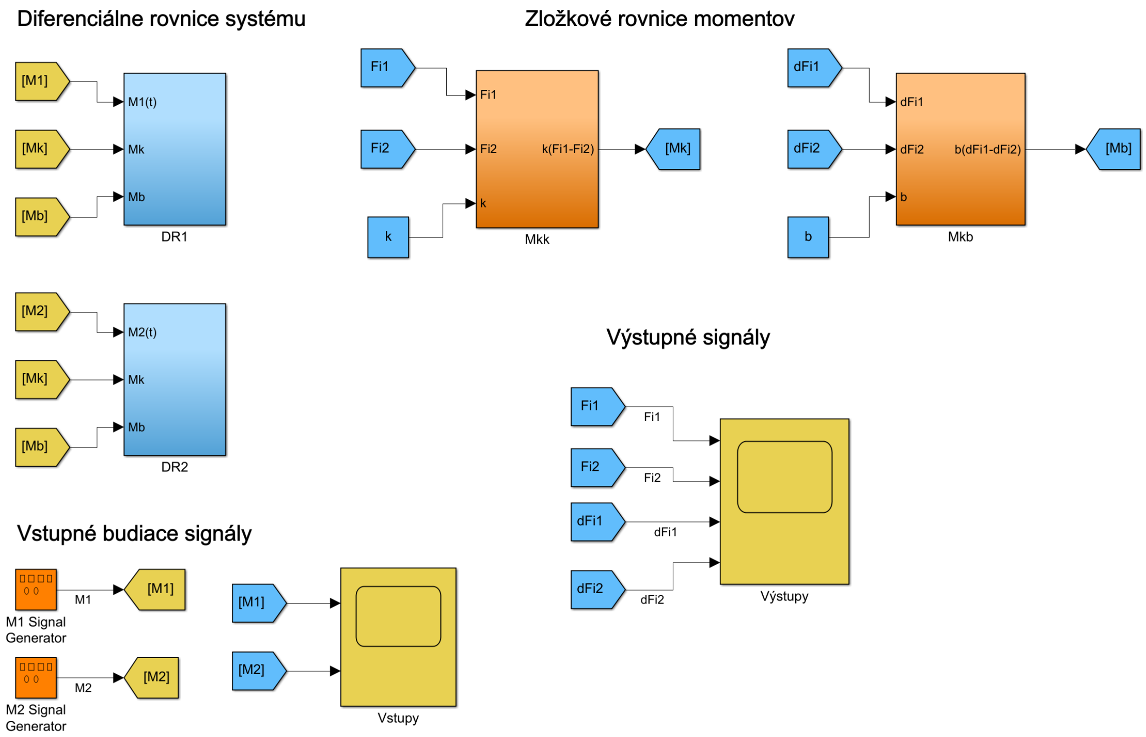
Napokon pre riešenie simulácie systému blokovou schémou využijeme tento **simulinkovský tvar sústavy diferenciálnych rovníc**

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{I_1}\left[M_1(t) - k_\varphi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - b_\varphi \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\right] \;, \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{1}{I_2}\left[M_2(t) + k_\varphi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + b_\varphi \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\right] \;, \end{aligned} \tag{7.100}$$

ktorý zapísaný v **maticovom tvare** predstavuje tento matematický model

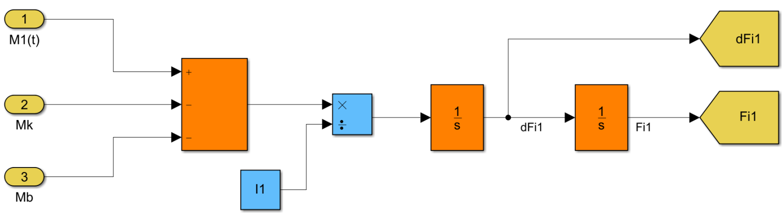
$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_1(t)}{I_1} \\ \frac{M_2(t)}{I_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{b_\varphi}{I_1} & -\frac{b_\varphi}{I_1} \\ -\frac{b_\varphi}{I_2} & \frac{b_\varphi}{I_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{k_\varphi}{I_1} & -\frac{k_\varphi}{I_1} \\ -\frac{k_\varphi}{I_2} & \frac{k_\varphi}{I_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \;. \tag{7.101}$$

Systém budeme simulovať v **Simulinku** nasledujúcou blokovou schémou, ktorá je znázornená na Obr. 7.46. Na sprehľadnenie blokovej schémy boli využité rôzne typy subsystémov a takisto bezkontaktný prenos signálov medzi blokmi **From** a **Goto**. Viditeľnosť premenných v týchto blokoch bola nastavená na **Global**.

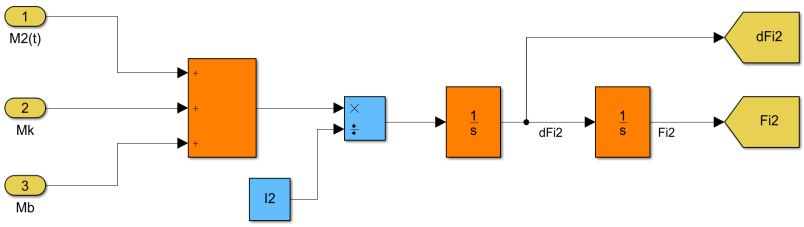


Obr. 7.46. Bloková schéma – rotačného systému s dvomi hmotami

Subsystémy diferenciálnych rovníc pre hmoty $\mathbf{I_1}$ a $\mathbf{I_2}$ sú znázornené na nasledujúcich Obr. 7.47 a Obr. 7.48.

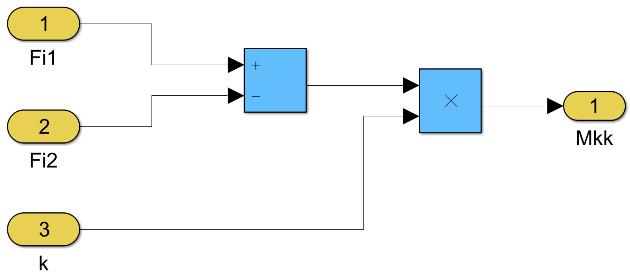


Obr. 7.47. Subsystém DR1

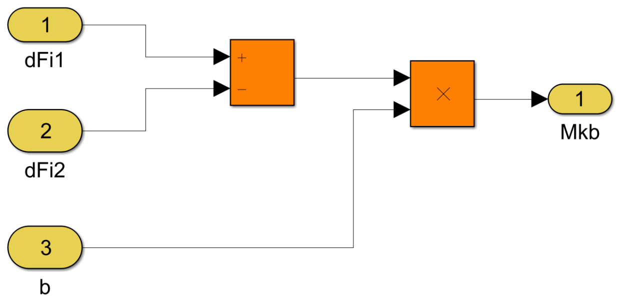


Obr. 7.48. Subsystém DR2

Ďalšie dva subsystémy $\mathbf{M_{kk}}$ a $\mathbf{M_{kb}}$ boli použité na zadefinovanie vnútorných krútiacich momentov, ktoré pôsobia v torznom tlmiči a pružine. Tvar týchto subsystémov môžeme vidieť na ďalších Obr. 7.49 a Obr. 7.50.

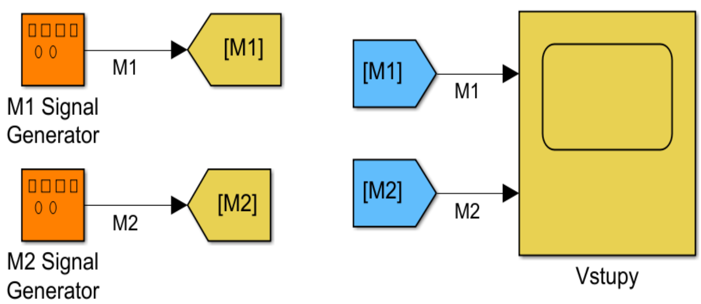


Obr. 7.49. Subsystém M_{kk}

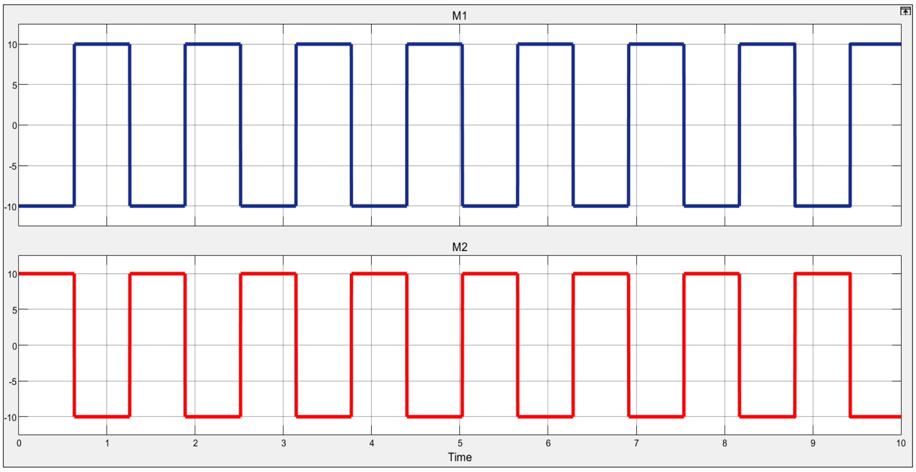


Obr. 7.50. Subsystém M_{kb}

Priebehy budiacich signálov krútiacich momentov $\mathbf{M_1}$ a $\mathbf{M_2}$ boli podľa zadania v blokovej schéme na Obr. 7.51 generované využitím bloku **Signal generator**. Tento blok sme už použili vo viacerých blokových schémach. Pripomeňme, že tento zdrojový blok umožňuje generovať štyri typy signálov, ktorými sú **sine wave** (harmonický signál sínusovej funkcie), **square** (štvorcový signál), **sawtooth** (pílovitý signál) a **random** (signál náhorného charakteru). V našom prípade boli v tomto bloku nakonfigurované signály typu **square**, ktorých priebehy možno vidieť na ďalšom Obr. 7.52.

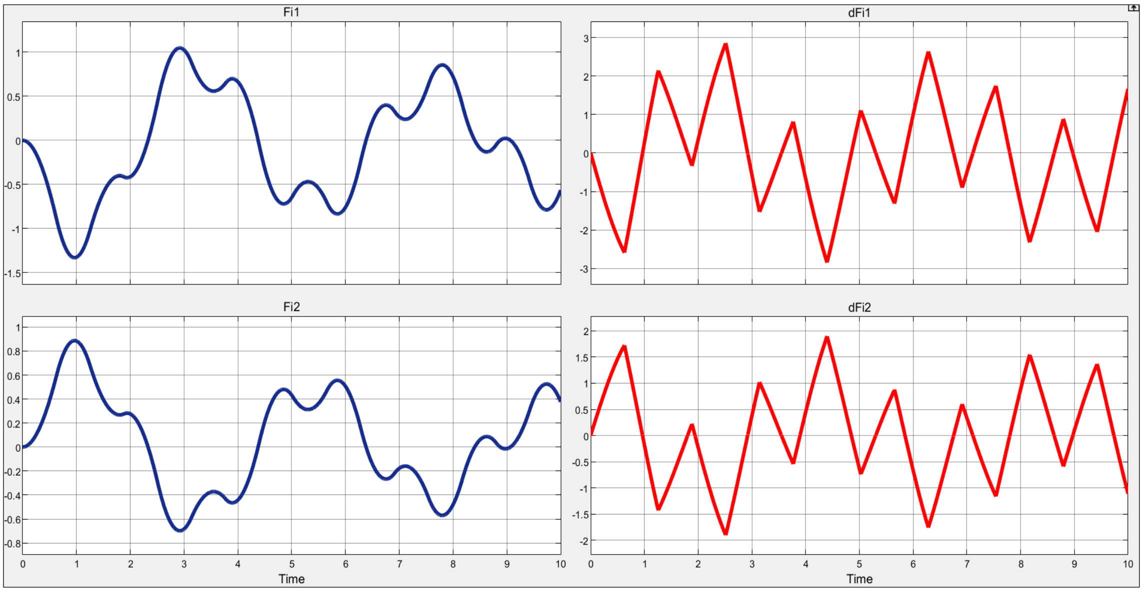


Obr. 7.51. Modelovanie vstupných signálov krútiacich momentov



Obr. 7.52. Priebehy vygenerovaných vstupných pulzných signálov krútiacich momentov

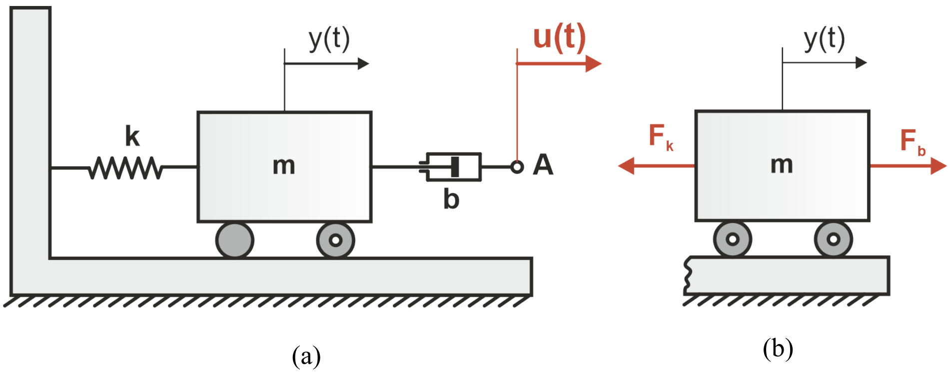
Riešenie odozvy systému v zmysle uhlových natočení $\boldsymbol{\varphi_1, \varphi_2}$ a uhlových rýchlostí $\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi_1}, \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi_2}$ je znázornené na príslušných grafoch podľa Obr. 7.53.



Obr. 7.53. Odozva rotačného kmitajúceho systému – uhlové natočenia φ_1, φ_2 [rad], uhlové rýchlosti $\mathrm{d}\varphi_1, \mathrm{d}\varphi_2$ $[\mathrm{rad.s^{-1}}]$

7.5 VZŤAH MEDZI STAVOVÝM OPISOM A PRENOSOVOU FUNKCIOU

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať prípadom, keď diferenciálna rovnica **dynamického systému** obsahuje **derivácie 1.** a **vyšších rádov vstupnej funkcie** $\mathbf{u(t)}$, ktoré sú usporiadané na pravej strane tejto diferenciálnej rovnice. Poznamenajme, že v tomto prípade premenné, ktoré predstavujú počiatočné podmienky, nie sú považované za stavové premenné. Problém nastáva pri transformácii takejto diferenciálnej rovnice na **stavový opis systému**. Otázkou je, ako zadefinovať **stavové premenné systému** takým spôsobom, aby sa všetky **derivácie vstupnej funkcie** $\mathbf{u(t)}$ zredukovali vo výstupnej **stavovej rovnici systému** $\mathbf{y(t)}$. Princíp redukcie derivácií vstupnej funkcie $\mathbf{u(t)}$, vhodnou voľbou **stavových premenných** si ukážeme na príklade mechanického systému, ktorý je zobrazený na Obr. 7.54 (a). Poznamenajme, že posunutia $\mathbf{y(t)}$ a $\mathbf{u(t)}$ sú merané od rovnovážnej polohy hmoty **m**.



Obr. 7.54. (a) Mechanický systém vozíka, (b) uvoľnený systém vozíka

Matematický model tohto systému určíme pre uvoľnený vozík podľa Obr. 7.54 (b), aplikovaním **II. Newtonovho zákona**. Na základe tohto zákona dostávame túto **diferenciálnu rovnicu 2. rádu**

$$\mathrm{m} \cdot \ddot{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) = -\mathrm{F_k} + \mathrm{F_b} = -\mathrm{k} \cdot \mathrm{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{b} \cdot (\dot{\mathrm{u}}(\mathrm{t}) - \dot{\mathrm{y}}(\mathrm{t})) \ , \qquad (7.102)$$

ktorú prepíšeme do tohto **simulinkovského tvaru** rovnice

$$\ddot{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{y}(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{m}} \cdot \dot{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{m}} \cdot \dot{\mathrm{u}}(\mathrm{t}) \ . \qquad (7.103)$$

Preveďme tento matematický model na **stavový opis**, voľbou týchto stavových premenných

$$\begin{aligned} \mathrm{x_1} &= \mathrm{y} \ , \\ \mathrm{x_2} &= \dot{\mathrm{y}} \Longrightarrow \mathrm{x_2} = \dot{\mathrm{x}}_1 \ , \end{aligned} \qquad (7.104)$$

ktoré transformujú systém opisu **diferenciálnej rovnice 2. rádu** na tieto dve **stavové rovnice 1. rádu**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m} \cdot x_1 - \frac{b}{m} \cdot x_2 + \frac{b}{m} \cdot \dot{u}(t) \ . \end{aligned} \tag{7.105}$$

Ako si možno všimnúť, tak pravá strana druhej rovnice obsahuje výraz **1. derivácie vstupnej premennej $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t})$**. Pokúsme sa tento člen z tejto **stavovej diferenciálnej rovnice** eliminovať, zavedením **stavových premenných** v tomto tvare

$$\begin{aligned} x_1 &= y \ , \\ x_2 &= \dot{y} - \frac{b}{m} \cdot u \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 - \frac{b}{m} \cdot u \ . \end{aligned} \tag{7.106}$$

Zámenou pôvodných **fázových stavových premenných** (7.104) za nové **stavové premenné** podľa (7.106), môžeme postupnými matematickými operáciami docieliť redukciu člena derivácie vstupnej premennej $\dot{\mathbf{u}}$ v pôvodnej stavovej rovnici. A teda platí, že

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{b}{m} \cdot u(t) \ , \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y}(t) - \frac{b}{m} \cdot \dot{u}(t) = -\frac{k}{m} \cdot y(t) - \frac{b}{m} \cdot \dot{y}(t) + \frac{b}{m} \cdot \dot{u}(t) - \frac{b}{m} \cdot \dot{u}(t) \\ &= -\frac{k}{m} \cdot x_1 - \frac{b}{m}\left(x_2 + \frac{b}{m} \cdot u\right) = -\frac{k}{m} \cdot x_1 - \frac{b}{m} \cdot x_2 - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot u(t) \ . \end{aligned} \tag{7.107}$$

To znamená, že dostávame **stavový opis systému** upravený do takého tvaru, v ktorom máme systém len s jedným vstupom $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, a to aj v takom prípade ak pôvodná diferenciálna rovnica systému na svojej pravej strane obsahovala deriváciu vstupného budiaceho signálu $\mathbf{u}(\mathbf{t})$. Odvodený **stavový opis systému** s jednou budiacou funkciou systému $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ prepíšme do tohto **maticového tvaru**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ -\left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u(t) \, . \tag{7.108}$$

V prípade, že diferenciálne rovnice systému obsahujú výrazy $\mathbf{u}(\mathbf{t}), \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}), \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t})$ atď., potom výber **stavových premenných** sa stáva komplikovanejším. Avšak, existujú systematické metódy pre výber **stavových premenných** takých, ktoré dokážu tieto derivácie vstupnej premennej $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ z matematického modelu **stavového opisu** eliminovať. Princíp si vysvetlíme v nasledujúcej kapitole 7.6.

7.6 STAVOVÝ OPIS DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV PRE SYSTÉMY S DERIVÁCIOU VSTUPNEJ FUNKCIE

Predpokladajme prípad, keď vstupná funkcia $\mathbf{u(t)}$ predstavuje iba jednu vstupnú budiacu funkciu ľubovoľného dynamického systému, ktorý je opísaný **diferenciálnu rovnicu systému n-tého rádu**. Matematicky model takéhoto systému s jednou budiacou vstupnou funkciou $\mathbf{u(t)}$, ktorý okrem tejto budiacej funkcie obsahuje na pravej strane aj jej derivácie $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}), \dots, \mathbf{u}^{(\mathbf{n-1})}(\mathbf{t})$, možno definovať touto všeobecnou formou

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_1 \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} \cdot \dot{y}(t) + a_n \cdot y(t) \\ = b_0 \cdot u^{(n)}(t) + b_1 \cdot u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} \cdot \dot{u}(t) + b_n \cdot u(t) \,, \end{aligned} \tag{7.109}$$

kde $\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}$ sú reálne koeficienty nezávislej premennej a $\mathbf{b_0}, \dots, \mathbf{b_n}$ sú reálne koeficienty budiacej funkcie na pravej strane.

Poznamenajme, že pre aplikovanie nasledujúcej metódy, ktorá umožňuje transformovať systém definovaný v zmysle prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$ na systém v **stavovom opise**, je dôležité dodržať, aby bol systém definovaný vo všeobecnom tvare identickým s tvarom predchádzajúcej **diferenciálnej rovnice** (7.109) resp. identický s touto odpovedajúcou **prenosovou funkciou** v tvare

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 \cdot s^n + b_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \cdot s + b_n}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot s + a_n} \quad . \tag{7.110}$$

Princíp metódy transformácie systému opísaného **diferenciálnou rovnicou** resp. **prenosovou funkciou systému $\mathbf{G(s)}$** na stavový opis systému si ukážeme na príklade **diferenciálnej rovnice 2. rádu**, v ktorej budeme predpokladať derivácie vstupnej funkcie $\mathbf{u(t)}$ po najvyšší **stupeň 2. rádu**. Všeobecný zápis takejto **diferenciálnej rovnice 2. rádu** predpokladáme v tomto tvare

$$\ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot y(t) = b_0 \cdot \ddot{u}(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot u(t) \;, \tag{7.111}$$

tejto diferenciálnej rovnici odpovedá prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$ v tomto tvare

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_2}{s^2 + a_1 \cdot s + a_2} \quad . \tag{7.112}$$

Predchádzajúcu racionálnu funkciu prenosovej funkcie $\mathbf{G(s)}$ rozdelíme na dve prenosové funkcie, zavedením nového výrazu **Z(s)**.

Tieto dve **prenosové funkcie** potom nadobudnú tento tvar

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}, \quad \frac{Y(s)}{Z(s)} = b_0 s^2 + b_1 s + b_2 \ . \tag{7.113}$$

Ďalej musí platiť, že vo všeobecnosti z predchádzajúcich dvoch prenosových funkcií, možno **inverznou Laplaceovou transformáciou** dospieť k **sústave dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu**, ktoré nadobúdajú tento tvar

$$\begin{aligned} &\ddot{z}(t) + a_1 \cdot \dot{z}(t) + a_2 \cdot z(t) = u(t) \ , \\ &b_0 \cdot \ddot{z}(t) + b_1 \cdot \dot{z}(t) + b_2 \cdot z(t) = y(t) \ , \end{aligned} \tag{7.114}$$

kde $\mathbf{z(t)}$ je nová zavedená premenná. Ak teraz zadefinujeme **stavové premenné** pre túto novú premennú $\mathbf{z(t)}$ týmto spôsobom

$$\begin{aligned} &x_1 = z \ , \\ &x_2 = \dot{z} \Longrightarrow x_2 = \dot{x}_1 \ , \end{aligned} \tag{7.115}$$

potom **prvú diferenciálnu rovnicu** môžeme prepísať do tohto tvaru stavovej rovnice systému

$$\begin{aligned} &\ddot{z}(t) + a_1 \cdot \dot{z}(t) + a_2 \cdot z(t) = u(t) \ , \\ &\dot{x}_2 = -a_1 \cdot x_2 - a_2 \cdot x_1 + u(t) \end{aligned} \tag{7.116}$$

a podobne **druhú diferenciálnu rovnicu** do tvaru tejto stavovej rovnice systému

$$\begin{aligned} &b_0 \cdot \ddot{z}(t) + b_1 \cdot \dot{z}(t) + b_2 \cdot z(t) = y(t) \ , \\ &b_0 \cdot \left(-a_1 \cdot x_2 - a_2 \cdot x_1 + u(t)\right) + b_1 \cdot x_2 + b_2 \cdot x_1 = y(t) \ . \end{aligned} \tag{7.117}$$

Napokon ďalšími matematickými úpravami **druhej diferenciálnej rovnice** možno dospieť k **výstupnej stavovej rovnici systému** v tvare

$$\begin{aligned} &b_0 \cdot \ddot{z}(t) + b_1 \cdot \dot{z}(t) + b_2 \cdot z(t) = y(t) \ , \\ &y(t) = (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot x_1 + (b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot x_2 + b_0 \cdot u(t) \ . \end{aligned} \tag{7.118}$$

Kombináciou prvej rovnice stavového opisu, ktorá vyplýva priamo z voľby stavových premenných podľa (7.115) a druhej rovnice stavového opisu systému, ktorý sme odvodili podľa (7.116), môžeme odvodiť tento **stavový opis systému**

$$\dot{x}_1 = x_2 \ , \qquad \dot{x}_2 = -a_1 \cdot x_2 - a_2 \cdot x_1 + u(t) \ , \tag{7.119}$$

ktorý prepíšeme do **maticového tvaru systému**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \ . \tag{7.120}$$

Tomuto **systému diferenciálnych rovníc 1. rádu** prislúcha táto **výstupná rovnica stavového opisu**

$$y(t) = (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot x_1 + (b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot x_2 + b_0 \cdot u(t) \ , \tag{7.121}$$

ktorú taktiež prepíšeme do **maticového tvaru**

$$[y(t)] = [b_2 - a_2 \cdot b_0 \quad b_1 - a_1 \cdot b_0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [b_0] \cdot u(t) \, . \tag{7.122}$$

To znamená, že pre nami uvažovaný **systém 2. rádu** dostávame tento výsledný tvar **stavového opisu systému** v maticovom tvare

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \, , \\ [y(t)] &= [b_2 - a_2 \cdot b_0 \quad b_1 - a_1 \cdot b_0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [b_0] \cdot u(t) \, . \end{aligned} \tag{7.123}$$

Ďalej tento prípad zovšeobecníme na systém **n-tého rádu**, pre ktorý budeme predpokladať **derivácie vstupnej funkcie $\mathbf{u(t)}$** až po jej **n-tý stupeň**. To znamená, že systém bude opísaný touto diferenciálnou rovnicou vo všeobecnom v tvare

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_1 \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} \cdot \dot{y}(t) + a_n \cdot y(t) \\ & \qquad = b_0 \cdot u^{(n)}(t) + b_1 \cdot u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} \cdot \dot{u}(t) + b_n \cdot u(t) \ , \end{aligned} \tag{7.124}$$

ktorému odpovedá táto prenosová funkcia $\mathbf{G(s)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 \cdot s^n + b_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \cdot s + b_n}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot s + a_n} \ . \tag{7.125}$$

Pre tento systém môžeme odvodiť tento tvar **stavového opisu** zapísaný v **maticovom tvare**. Tento **stavový opis**, ktorý predstavuje opis **systému n-tého rádu**, možno odvodiť podobným spôsobom, ako sme to vykonali pre jednoduchý **systém 2. rádu**.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)\ , \qquad (7.126)$$

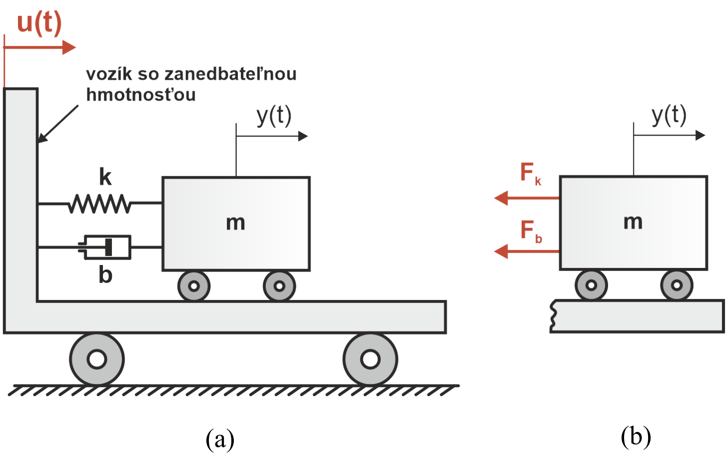
a

$$y = [b_n - a_n \cdot b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 \cdot b_0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 \cdot u(t)\ . \qquad (7.127)$$

Príklad č. 7.9.

Predpokladajme systém vozíka so zanedbateľnou hmotnosťou, ktorý je zobrazený na Obr. 7.55 (a). Na tomto vozíku, ktorý sa pohybuje a je budený harmonicky premenlivou budiacou funkciou $\mathbf{u(t) = u_0 \cdot cos(\omega \cdot t)}$, kde $\mathbf{u_0 = 0.02\ m}$ a frekvencia kmitania je $\mathbf{f = 5\ Hz}$, kmitá hmota s hmotnosťou $\mathbf{m = 10\ kg}$. Táto kmitajúca hmota je k tomuto vozíku pripevnená translačnou pružinou s tuhosťou $\mathbf{k = 4500\ N.m^{-1}}$ a translačným tlmičom s konštantou tlmenia $\mathbf{b = 35\ N.s.m^{-1}}$.

Nájdite **stavový opis** tohto systému, v ktorom vylúčite derivácie vstupnej funkcie $\mathbf{u(t)}$. Riešte a zobrazte odozvu systému pre uvažované vstupné parametre, simuláciou tohto systému v napísanom skripte v **Matlabe**.



Obr. 7.55. (a) Mechanický systém vozíka so zanedbateľnou hmotnosťou, (b) uvoľnený systém hmoty

Riešenie:

Na základe uvoľneného telesa hmoty podľa Obr. 7.55 (b), pristúpime k napísaniu **diferenciálnej rovnice systému**, ktorú odvodíme na základe **II. Newtonovho zákona** v tomto tvare

$$m \cdot \ddot{y}(t) = -F_k - F_b = -k \cdot (y(t) - u(t)) + b \cdot (\dot{y}(t) - \dot{u}(t)) \tag{7.128}$$

a prepíšeme do tohto tvaru

$$m \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = b \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t)\ . \tag{7.129}$$

Pre tento mechanický systém, ktorý je opísaný predchádzajúcou **diferenciálnou rovnicou 2. rádu**, môžeme určiť túto **prenosovú funkciu G(s)**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b \cdot s + k}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}\ . \tag{7.130}$$

Matematickou úpravou predchádzajúcej **prenosovej funkcie G(s)**, ďalej predelením jej **čitateľa** a **menovateľa** hmotou **m**, dostávame

$$G(s) = \frac{\frac{b}{m} \cdot s + \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m} \cdot s + \frac{k}{m}} = \frac{b_0 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_2}{s^2 + a_1 \cdot s + a_2}\ . \tag{7.131}$$

Porovnaním so všeobecným tvarom **prenosovej funkcie systému 2. rádu G(s)**, môžeme identifikovať tieto základné parametre diferenciálnej rovnice **systému 2. rádu**

$$\begin{gathered} b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}\ , \\ a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}\ , \end{gathered} \tag{7.132}$$

pre ktoré musí platiť, že

$$\begin{gathered} b_2 - a_2 \cdot b_0 = \frac{k}{m} - \frac{k}{m} \cdot 0 = \frac{k}{m}\ , \\ b_1 - a_1 \cdot b_0 = \frac{b}{m} - \frac{b}{m} \cdot 0 = \frac{b}{m}\ . \end{gathered} \tag{7.133}$$

Na základe všeobecného tvaru **systému n-tého radu** a jeho **stavového opisu n-tého rádu**, dostávame tento **maticový tvar** pre **systém 2. rádu** v **stavovom opise**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u(t)\,, \qquad (7.134)$$

doplnený o príslušnú **výstupnú rovnicu** v tomto tvare

$$y(t)=\begin{bmatrix}b_2-a_2\cdot b_0 & b_1-a_1\cdot b_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[b_0]\cdot u(t)=\begin{bmatrix}\frac{k}{m} & \frac{b}{m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[0]\cdot u(t)\ . \qquad (7.135)$$

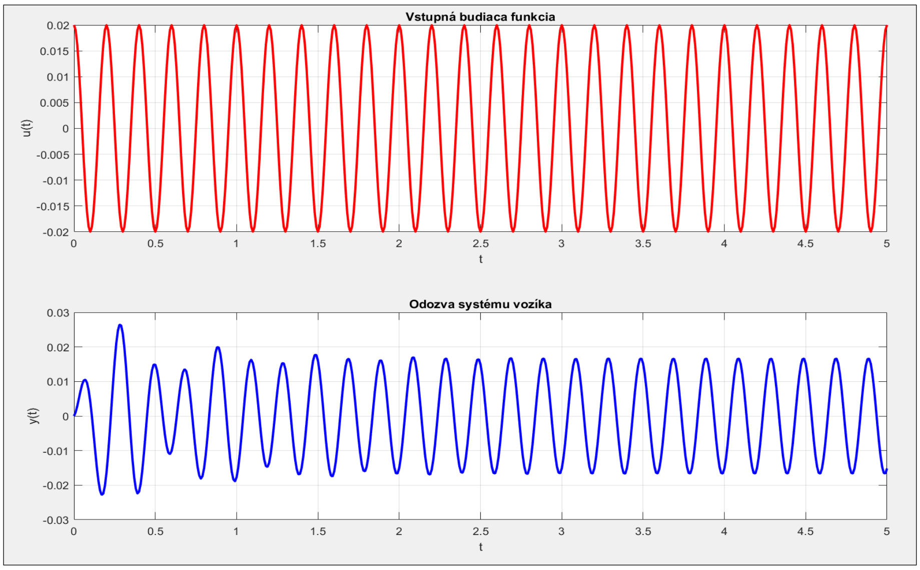
To znamená, že hľadaný **stavový opis** mechanického systému vozíka podľa zadania, ktorého odozvu budeme teraz riešiť nasledujúcim skriptom v **Matlabe**, nadobúda tento výsledný tvar rovníc

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u(t)\,,\\ y(t)&=\begin{bmatrix}\frac{k}{m} & \frac{b}{m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[0]\cdot u(t)\,.\end{aligned} \qquad (7.136)$$

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému vozíka

m=10;
b=35;
k=4500;

%Budiaca vstupná funkcia
u0=0.02;
f=5; omega=2*pi*f;
t=0:0.01:5;
u=u0*cos(omega*t);

%Matice stavového opisu
A=[0 1;-k/m -b/m];
B=[0;1];
C=[k/m b/m];
D=[0];

%Riešenie odozvy systému v stavovom opise
sys=ss(A,B,C,D);
y=lsim(sys, u, t);

figure(1)

subplot(2,1,1)
plot(t,u,'r','LineWidth',2);
grid on
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
title('Vstupná budiaca funkcia')
```

```
subplot(2,1,2)
plot(t,y(:,1),'b','LineWidth',2);
grid on
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('Odozva systému vozíka')
```

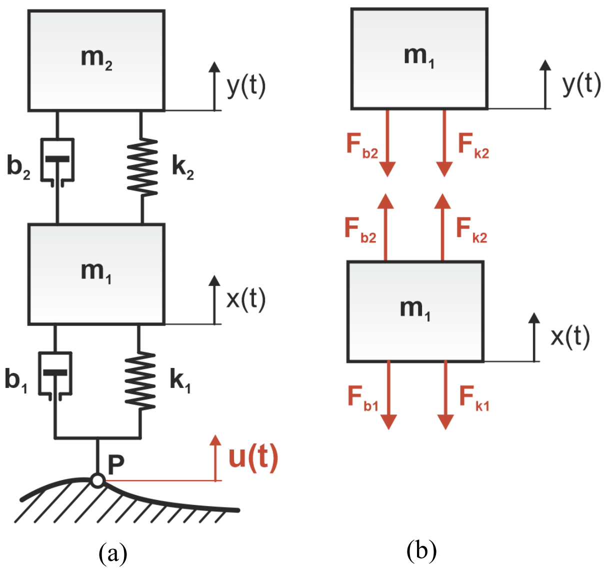
Riešenie odozvy mechanického systému vozíka so zanedbateľnou hmotnosťou je znázornené v podobe vypočítanej výchylky $\mathbf{y(t)}$ na Obr. 7.56.



Obr. 7.56. Odozva mechanického systému vozíka

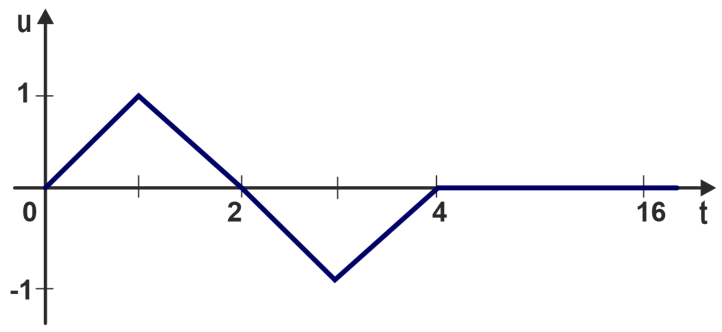
Príklad č. 7.10.

Uvažujme mechanický systém zobrazený na Obr. 7.57 (a). Nájdite stavový opis tohto systému, v ktorom eliminujete všetky derivácie **vstupnej budiacej funkcie** $\mathbf{u(t)}$.



Obr. 7.57. (a) Mechanický systém automobilu pri prejazde prekážkou, (b) uvoľnené telesá systému

Vypočítajte a zobrazte odozvu tohto systému použitím **Matlab skriptu**, ak všetky vstupné parametre systému sú známe, t. j. $\mathbf{m_1 = 10\ kg}$, $\mathbf{m_2 = 30\ kg}$, $\mathbf{b_1 = 25\ N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{b_2 = 45\ N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{k_1 = 3500\ N.m^{-1}}$ a $\mathbf{k_2 = 4500\ N.m^{-1}}$. Vstupný budiaci signál systému $\mathbf{u(t)}$, ktorý predstavuje reliéf vozovky, je znázornený na ďalšom Obr. 7.58.



Obr. 7.58. Vstupný budiaci signál u(t)

Riešenie:

Pre uvoľnený systém, ktorý je zobrazený na Obr. 7.57 (b), môžeme napísať tieto štyri zložkové rovnice síl

$$\begin{aligned} F_{k1} &= k_1 \cdot (x - u)\,, \\ F_{b1} &= b_1 \cdot (\dot{x} - \dot{u})\,, \\ F_{k2} &= k_2 \cdot (y - x)\,, \\ F_{b2} &= b_2 \cdot (\dot{y} - \dot{x})\,. \end{aligned} \tag{7.137}$$

Matematický model **mechanického systému**, ktorý odvodíme pre uvoľnené telesá systému podľa Obr. 7.57 (b), je definovaný týmto systémom **diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x} &= F_{b2} + F_{k2} - F_{k1} - F_{b1}\,, \\ m_2 \cdot \ddot{y} &= -F_{b2} - F_{k2}\,. \end{aligned} \tag{7.138}$$

Dosadením zložkových rovníc síl za jednotlivé výrazy predchádzajúceho systému, dostávame tento **systém diferenciálnych rovníc**

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x} &= b_2 \cdot (\dot{y} - \dot{x}) + k_2 \cdot (y - x) - k_1 \cdot (x - u) - b_1 \cdot (\dot{x} - \dot{u})\,, \\ m_2 \cdot \ddot{y} &= -b_2 \cdot (\dot{y} - \dot{x}) - k_2 \cdot (y - x)\,, \end{aligned} \tag{7.139}$$

ktorý usporiadaním známych a neznámych premenných možno upraviť do tohto výsledného tvaru **sústavy diferenciálnych rovníc**

$$\begin{aligned} & m_1 \cdot \ddot{x} + (b_1 + b_2) \cdot \dot{x} + (k_1 + k_2) \cdot x = b_2 \cdot \dot{y} + k_2 \cdot y + k_1 \cdot u + b_1 \cdot \dot{u} \ , \\ & m_2 \cdot \ddot{y} + b_2 \cdot \dot{y} + k_2 \cdot y = b_2 \cdot \dot{x} + k_2 \cdot x \ . \end{aligned} \tag{7.140}$$

Vykonajme **Laplaceovu transformáciu** celej sústavy diferenciálnych rovníc s uvažovaním nulových počiatočných podmienok $\mathbf{y(0) = \dot{y}(0) = 0}$, $\mathbf{x(0) = \dot{x}(0) = 0}$

$$\begin{aligned} & [m_1 \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + (k_1 + k_2)] \cdot X(s) - [b_2 s + k_2] \cdot Y(s) = [b_1 s + k_1] \cdot U(s) \, , \\ & [m_2 s^2 + b_2 s + k_2] \cdot Y(s) - [b_2 s + k_2] \cdot X(s) = 0 \, , \end{aligned} \tag{7.141}$$

ktorú prepíšeme do tohto **maticového tvaru**

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + (k_1 + k_2) & -(b_2 \cdot s + k_2) \\ -(b_2 \cdot s + k_2) & m_2 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} \\ & \qquad = \begin{bmatrix} b_1 \cdot s + k_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U(s) \end{aligned} \tag{7.142}$$

Potom prenosovú maticu systému $\mathbf{G(s)}$, ktorá bude obsahovať prenosové funkcie $\mathbf{G_{11}(s)} = \frac{\mathbf{X(s)}}{\mathbf{U(s)}}$ a $\mathbf{G_{21}(s)} = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{U(s)}}$, vyriešime prostredníctvom nasledujúceho skriptu v **Matlabe** (numerickým počítaním).

```
clc
clear
close all

%Zadefinovanie symbolických premenných
syms s m1 m2 b1 b2 k1 k2

%Definovanie matice A a vektora pravej strany

A=[m1*s^2+(b1+b2)*s+(k1+k2) -(b2*s+k2); ...
    -(b2*s+k2) m2*s^2+b2*s+k2];

b=[b1*s+k1;0];

%Riešenie prenosovej matice

simplify(collect(A\b))
```

Poznamenajme, že medzi obidvomi veličinami $\mathbf{Y(s)}$ a $\mathbf{X(s)}$, ktoré charakterizujú riešenie výchyliek hmôt, existuje táto funkčná závislosť

$$X(s) = \frac{[m_2 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + k_2]}{[b_2 \cdot s + k_2]} \cdot Y(s) \ . \tag{7.143}$$

To znamená, že nám postačuje vypočítať len jednu prenosovú funkciu systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$, napr. prenosovú funkciu $\mathbf{G_{21}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{U(s)}}$. Tvar tejto prenosovej funkcie môžeme vypočítaná predchádzajúcim skriptom v **Matlabe** a nadobúda tento tvar racionálnej funkcie

$$G_{21}(s) =$$
$$= \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot s^2 + (b_1 \cdot k_2 + b_2 \cdot k_1) \cdot s + k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2 s^4 + \big(b_1 \cdot m_2 + b_2 \cdot (m_1 + m_2)\big)s^3 + \big(b_1 \cdot b_2 + k_1 \cdot m_2 + k_2 \cdot (m_1 + m_2)\big)s^2 + (b_1 \cdot k_2 + b_2 \cdot k_1)s + k_1 k_2} \qquad (7.144)$$

Porovnaním tejto vypočítanej prenosovej funkcie $\mathbf{G_{21}}(\mathbf{s})$ so **všeobecnou prenosovou funkciou** $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ **systému 4. rádu**

$$G(s) = \frac{b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4} \ , \qquad (7.145)$$

môžeme identifikovať príslušné **koeficienty** pri rovnakých mocninách **s**

$$\begin{gathered}
b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{b_1 \cdot b_2}{m_1 \cdot m_2}, \quad b_3 = \frac{b_1 \cdot k_2 + b_2 \cdot k_1}{m_1 \cdot m_2}, \quad b_4 = \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2} \ , \\
a_1 = \frac{b_1 \cdot m_2 + b_2 \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2} \ , \\
a_2 = \frac{b_1 \cdot b_2 + k_1 \cdot m_2 + k_2 \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2} \ , \\
a_3 = \frac{b_1 \cdot k_2 + b_2 \cdot k_1}{m_1 \cdot m_2}, \quad a_4 = \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2} \ .
\end{gathered} \qquad (7.146)$$

Ak teraz využime všeobecný maticový zápis **stavového opisu** pre **systém 4. rádu**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \qquad (7.147)$$

a takisto túto odpovedajúcu **výstupná rovnicu** vo všeobecnom tvare

$$y = \begin{bmatrix} b_4 - a_4 \cdot b_0 & b_3 - a_3 \cdot b_0 & b_2 - a_2 \cdot b_0 & b_1 - a_1 \cdot b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [b_0] \cdot u(t) \ , \qquad (7.148)$$

potom dosadením vypočítaných koeficientov podľa (7.146), musí pre systém podľa zadania platiť tento výsledný maticový tvar **stavového opisu** systému

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix} = A\cdot x(t) + B\cdot u(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{k_1\cdot k_2}{m_1\cdot m_2} & -\frac{b_1\cdot k_2 + b_2\cdot k_1}{m_1\cdot m_2} & -\frac{b_1\cdot b_2 + k_1\cdot m_2 + k_2\cdot (m_1+m_2)}{m_1\cdot m_2} & -\frac{b_1\cdot m_2 + b_2\cdot (m_1+m_2)}{m_1\cdot m_2}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot u(t)\ , \tag{7.149}$$

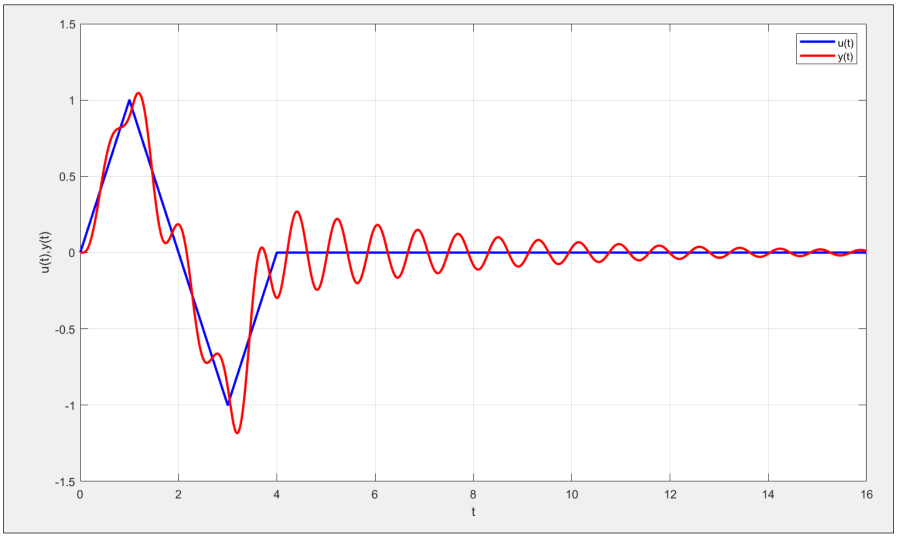
$$y = \begin{bmatrix} b_4 - a_4\cdot b_0 & b_3 - a_3\cdot b_0 & b_2 - a_2\cdot b_0 & b_1 - a_1\cdot b_0\end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + [b_0]\cdot u(t)\ .$$

Poďme ďalej vyriešiť odozvu vyšetrovaného mechanického systému podľa zadania, využitím tohto odvodeného **stavového opisu systému**. Na výpočet riešenia odozvy systému použijeme nasledujúci skript v **Matlabe**, v ktorom na začiatku zadefinujeme tvar budiacej vstupnej funkcie $\mathbf{u(t)}$.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
m1=10; m2=30;
b1=25;b2=45;
k1=3500;k2=4500;

%Vstupná budiaca funkcia u(t)
u1=[0:0.01:1];
u2=[0.99:-0.01:-1];
u3=[-0.99:0.01:0];
u4=0*[4.01:0.01:16];
u=[u1 u2 u3 u4];

%Čas simulácie
t=0:0.01:16;

%Definovanie parametrov stavového opisu
d=m1*m2;
bb0=0;
bb1=0;
bb2=b1*b2/d;
bb3=(b1*k2+b2*k1)/d;
bb4=k1*k2/d;

a1=(b1*m2+b2*(m1+m2))/d;
a2=(b1*b2+k1*m2+k2*(m1+m2))/d;
a3=(b1*k2+b2*k1)/d;
a4=k1*k2/d;


%Matice stavového opisu

A=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1;-a4 -a3 -a2 -a1];
B=[0;0;0;1];
C=[bb4-a4*bb0 bb3-a3*bb0 bb2-a2*bb0 bb1-a1*bb0];
D=[bb0];
```

```
%Definovanie systému v stavovom opise a riešenie
%odozvy systému

sys=ss(A,B,C,D);
tf(sys) %prenosová funkcia
y=lsim(sys, u, t);

figure(1)
plot(t,u,'b',t,y,'r','LineWidth',2);
xlabel('t');
ylabel('u(t),y(t)');
grid on
legend('u(t)','y(t)')
```

Riešenie výchylky $\mathbf{y(t)}$ pre hmotu $\mathbf{m_2}$ je znázornené spolu s priebehom vstupnej budiacej funkcie $\mathbf{u(t)}$ na Obr. 7.59.



Obr. 7.59. Riešenie odozvy systému pre výchylku y[m]

7.7 PREVOD STAVOVÉHO OPISU NA PRENOSOVÚ FUNKCIU SYSTÉMU

Prenosová funkcia systému a metóda **stavových premenných** pri definovaní systému jeho stavovým opisom, sú alternatívne cesty na reprezentáciu ľubovoľného fyzikálneho systému. V niektorých prípadoch sa môže vyžadovať získanie jednej realizácie systému z realizácie druhej. Spôsob ako získať **stavový opis systému** z **prenosovej funkcie** sme si už vysvetlili. Teraz budeme predpokladať, že poznáme systém zadefinovaný v jeho **stavovom opise** a budeme požadovať určenie tvaru **prenosovej funkcie** alebo **matice** $\mathbf{G(s)}$ tohto systému. Predpokladajme túto štandardnú formu **stavového opisu systému**, ktorý je definovaný pre ľubovoľný systém **n-tého rádu** s viacerými **vstupmi** a **výstupmi**, kde **m** je počet vstupných budiacich funkcií a **p** je počet výstupov

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t)\,, \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\ . \end{aligned} \qquad (7.150)$$

Pretože systém má **m vstupov** a **p výstupov**, potom existuje $\mathbf{m} \times \mathbf{p}$ prenosových funkcií a prenosová matica systému $\mathbf{G(s)}$ nadobudne tvar $\mathbf{p} \times \mathbf{m}$. Predtým, než odvodíme prenosovú maticu systému $\mathbf{G(s)}$ priamo zo známeho **stavového opisu systému**, poznamenajme, že Laplaceova transformácia **stavového vektora** $\mathbf{x(t)}$, **vstupného vektora** $\mathbf{u(t)}$ a **výstupného vektora** $\mathbf{y(t)}$ bude predstavovať vektory $\mathbf{X(s)}$, $\mathbf{U(s)}$ a $\mathbf{Y(s)}$ Laplaceových obrazov v týchto tvaroch

$$
\begin{gathered}
\mathrm{x(t)} = \begin{bmatrix} \mathrm{x_1} \\ \mathrm{x_2} \\ \vdots \\ \mathrm{x_n} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\mathrm{x(t)}] = \mathrm{X(s)} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\mathrm{x_1}) \\ \mathcal{L}(\mathrm{x_2}) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(\mathrm{x_n}) \end{bmatrix} , \\
\mathrm{u(t)} = \begin{bmatrix} \mathrm{x_1} \\ \mathrm{x_2} \\ \vdots \\ \mathrm{x_n} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\mathrm{u(t)}] = \mathrm{U(s)} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\mathrm{u_1}) \\ \mathcal{L}(\mathrm{u_2}) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(\mathrm{u_m}) \end{bmatrix} , \\
\mathrm{y(t)} = \begin{bmatrix} \mathrm{x_1} \\ \mathrm{x_2} \\ \vdots \\ \mathrm{x_n} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\mathrm{y(t)}] = \mathrm{Y(s)} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\mathrm{y_1}) \\ \mathcal{L}(\mathrm{y_2}) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(\mathrm{y_p}) \end{bmatrix} .
\end{gathered}
\qquad (7.151)
$$

Pri uvažovaní nulových počiatočných podmienok pre stavové premenné v stavovom vektore, t. j. $\mathbf{X(0)} = \dot{\mathbf{X}}\mathbf{(0)} = \cdots \mathbf{X^{(n-1)}(0)} = \mathbf{0}$, vykonajme **Laplaceovu transformáciu** rovníc stavového opisu systému vo všeobecnom tvare. Teda musí platiť, že

$$
\begin{gathered}
\mathrm{s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)} \ , \\
\mathrm{Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s)} \ .
\end{gathered}
\qquad (7.152)
$$

Upravme prvú rovnicu **stavového opisu** v Laplaceovom tvare do tohto tvaru

$$
\mathrm{(s \cdot I - A) \cdot X(s) = B \cdot U(s) \Rightarrow X(s)} \ , \qquad (7.153)
$$

potom z predchádzajúcej rovnice vyjadríme neznámu $\mathbf{X(s)}$ a dostávame

$$
\mathrm{X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)} \ . \qquad (7.154)
$$

Ak teraz dosadíme tento vypočítaný výraz $\mathbf{X(s)}$ za vektor Laplaceových obrazov $\mathbf{X(s)}$ vo výstupnej rovnici **stavového opisu**, potom môžeme dospieť k tejto rovnici

$$
\mathrm{Y(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D \cdot U(s) = [C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(s)} \ . \qquad (7.155)
$$

Ak ďalej využijeme vzťah $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{G}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{s})$, ktorý platí pre dynamický systém s jedným **vstupom** $\mathbf{U}(\mathbf{s})$ a jedným **výstupom** $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ a rozšírime túto vlastnosť aj na systémy s viacerými vstupmi a výstupmi, potom budeme môcť odvodiť vzťah pre prenosovú maticu systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$. Predpokladajme teda, že poznáme ľubovoľný všeobecný systém s viacerými **vstupmi** a **výstupmi** (tzv. MIMO systém), kde $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ predstavuje vektor $\mathbf{m}$ vstupných budiacich funkcií a $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ vektor $\mathbf{p}$ výstupných premenných. Potom platí, že prenosovú maticu systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ môžeme vypočítať z matíc stavového opisu systému **A**, **B**, **C** a **D**, využitím tejto rovnice v maticovom tvare

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \mathrm{C} \cdot (\mathrm{s} \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{D} \ . \tag{7.156}$$

Príklad č. 7.11.

Nájdite prenosovú funkciu $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ systému, ktorý je definovaný týmito stavovými maticami **A**, **B**, **C** a **D**

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{D} = [0]$$

a ďalej vieme, že tento systém je budený jedným vstupom $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{u}$.

Riešenie:

Na výpočet prenosovej matice $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ využijeme túto rovnicu zapísanú v maticovom všeobecnom tvare, ktorú sme si odvodili v predchádzajúcej teoretickej časti

$$\mathrm{G(s)} = \mathrm{C} \cdot (\mathrm{s} \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{D} \ . \tag{7.157}$$

Pri použití tohto vzťahu na výpočet prenosovej matice systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$, v prvom rade vypočítame výraz inverznej matice $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, pre ktorý platí, že

$$\begin{aligned} (\mathrm{s} \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} &= \left(\mathrm{s} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{s} & -1 \\ 3 & \mathrm{s}+1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + 3} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{s}+1 & 1 \\ -3 & \mathrm{s} \end{bmatrix} \ , \end{aligned} \tag{7.158}$$

tento vypočítaný vzťah inverznej matice následne dosadíme priamo do výrazu, ktorý platí pre **prenosovú maticu** systému $\mathbf{G}(\mathbf{s})$.

Dostávame tento výsledný tvar prenosovej funkcie systému $\mathbf{G(s)}$

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C\cdot(s\cdot I-A)^{-1}\cdot B+D=[0\quad 1]\cdot\frac{1}{s^2+s+3}\cdot\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}+[0]=\\
&=[0\quad 1]\cdot\begin{bmatrix}\frac{s+1}{s^2+s+3} & \frac{1}{s^2+s+3}\\ -\frac{3}{s^2+s+3} & \frac{s}{s^2+s+3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\\
&=\begin{bmatrix}-\frac{6}{s^2+s+3} & \frac{2\cdot s}{s^2+s+3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{s}{(s^2+s+3)}\ .
\end{aligned}
\qquad (7.159)
$$

Ak sa pozrieme na tvar vstupných matíc stavového opisu systému **B** a **C**, tak systém, ktorý sme riešili je systémom s jedným **vstupom** a jedným **výstupom**, a teda výsledkom bola jedna prenosová funkcia systému $\mathbf{G(s)}$. Dokážme, že nami odvodená prenosová funkcia systému $\mathbf{G(s)}$ je správna, využitím nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

```
clc
clear

%Zadefinovanie symbolickej premennej
syms s

%Zadefinovanie vstupných matíc stavového opisu
A=[0 1;-3 -1];
B=[0;1/2];
C=[0 2];
D=0;

%Výpočet inverznej matice
sIA=inv(s*eye(length(A))-A)

%Výpočet prenosovej funkcie systému
Gs=collect(C*sIA*B+D)

%Zadefinovanie systému v stavovom opise
%a transformácia na prenosovú funkciu

sys=ss(A,B,C,D);
tf(sys)
```

Príklad č. 7.12.

Nájdite prenosovú maticu systému $\mathbf{G(s)}$, ktorý je definovaný stavovým opisom prostredníctvom týchto matíc stavového opisu **A**, **B**, **C** a **D**.

$$
A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -10 & -2 & -3\end{bmatrix}\ ,\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ ,\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\ ,\quad D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ .
$$

Riešenie:

V prvom kroku opäť vypočítame maticu, ktorá je definovaná vzťahom $\mathbf{s \cdot I - A}$ a následne determinant tejto matice $\mathbf{det[s \cdot I - A]}$, ktorý bude predstavovať menovateľ prenosových funkcií vo výslednej **prenosovej matici** $\mathbf{G(s)}$. Teda platí, že

$$[s \cdot I - A] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 10 & 2 & s+3 \end{bmatrix} ,$$

$$\det[s \cdot I - A] = s \cdot (s^2 + 3s + 2) + 10 = s^3 + 3 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 10 \ . \tag{7.160}$$

Ďalej ak vyjdeme zo vzťahu pre prenosovú maticu systému $\mathbf{G(s)}$, dostávame, že

$$G(s) = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot [s \cdot I - A]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{7.161}$$

potom výsledná **prenosová matica** systému $\mathbf{G(s)}$ nadobudne tento tvar

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2 + 5 \cdot s + 8}{s^3 + 3 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 10} & \dfrac{1}{s^3 + 3 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 10} \\ \dfrac{2 \cdot s^2 + 6 \cdot s - 10}{s^3 + 3 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 10} & \dfrac{s}{s^3 + 3 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 10} \end{bmatrix} . \tag{7.162}$$

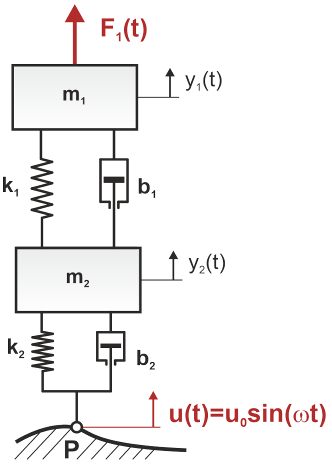
V tomto prípade systém podľa zadania predstavoval systém s dvomi **vstupmi** a dvomi **výstupmi**. To znamená, že výsledkom je prenosová matica systému $\mathbf{G(s)}$ rozmeru $\mathbf{2 \times 2}$, ktorú možno rovnako vypočítať prostredníctvom nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

```
clc
clear
syms s
%Zadefinovanie vstupných matíc stavového opisu
A=[0 1 0;0 0 1;-10 -2 -3];
B=[1 0;2 0;0 1];
C=[1 0 0;0 1 0];
D=zeros(2);

%Výpočet determinantu
det(s*eye(length(A))-A)

%Výpočet inverznej matice
sIA=inv(s*eye(length(A))-A);

%Výpočet prenosovej funkcie systému
Gs=collect(C*sIA*B+D)

% Zadefinovanie systému v stavovom opise a transformácia na prenosovú funkciu
sys=ss(A,B,C,D)
tf(sys)
```

Problémy na riešenie

Problém 7.1.

Predpokladajme mechanický systém zobrazený na Obr. 7.60. Systém pozostáva z dvoch kmitajúcich hmôt $\mathbf{m_1 = 50\,kg}$, $\mathbf{m_2 = 30\,kg}$. Hmota $\mathbf{m_1}$ je budená silou $\mathbf{F_1(t)}$, ktorá sa na základe funkcie pulzného signálu s amplitúdou $\mathbf{F_{10}(t) = 100}$ a periódou $\mathbf{T = 1\,s}$ so šírkou pulzu $\mathbf{50}\,\%$. V spodnej časti tohto mechanického systému je hmota $\mathbf{m_2}$ budená premenlivým kinematickým posunutím $\mathbf{u(t)}$, ktoré kopíruje reliéf vozovky. Toto posunutie je definované sínusovou funkciou $\mathbf{u(t) = u_0 \cdot sin(\omega \cdot t)}$, kde $\mathbf{u_0 = 0.02\,m}$, $\mathbf{f = 10\,Hz}$.

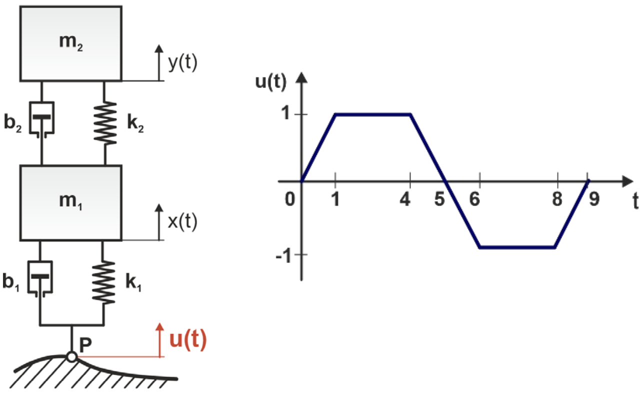


Obr. 7.60. Mechanický systém dvoch kmitajúcich hmôt

Ak predpokladáme, že ďalšie vstupné parametre systému sú $\mathbf{b_1 = 900\,N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{b_2 = 1200\,N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{k_1 = 4500\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 6800\,N.m^{-1}}$, odvoďte stavový opis tohto systému a nájdite jeho odozvu simuláciou blokovej schémy v **Simulinku**.

Problém 7.2.

Uvažujme mechanický systém zobrazený na Obr. 7.61. Nájdite stavový opis tohto systému, v ktorom eliminujete všetky derivácie **vstupnej budiacej funkcie** $\mathbf{u(t)}$.

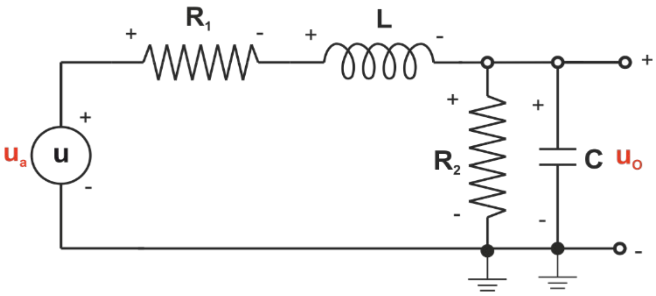


Obr. 7.61. Štvrtinový model automobilu pri prejazde cez spomaľovač

Vypočítajte a zobrazte odozvu tohto systému použitím **Matlab skriptu**, ak všetky vstupné parametre systému sú známe, t. j. $\mathbf{m_1 = 10\,kg}$, $\mathbf{m_2 = 30\,kg}$, $\mathbf{b_1 = 25\,N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{b_2 = 45\,N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{k_1 = 3500\,N.m^{-1}}$ a $\mathbf{k_2 = 4500\,N.m^{-1}}$. Vstupný budiaci signál systému $\mathbf{u(t)}$, ktorý predstavuje reliéf vozovky, je znázornený na Obr. 7.61.

Problém 7.3.

Odvoďte matematický model elektrického obvodu, ktorý je zobrazený na Obr. 7.62. Matematický model zapíšte do maticového tvaru.



Obr. 7.62. RLC obvod

Z matematického modelu systému odvoďte **stavový opis** a následne vypočítajte odozvu tohto systému simuláciou prostredníctvom blokovej schémy v **Simulinku**, ak vstupné parametre systému sú $\mathbf{R_1 = 100\,\Omega}$, $\mathbf{R_2 = 300\,\Omega}$, $\mathbf{L = 300\,mH}$, $\mathbf{C = 150\,\mu F}$ a vstupný budiaci signál napätia je $\mathbf{u_a(t) = 12 \cdot \sin(\omega \cdot t)}$, kde $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{2 \cdot \pi \cdot f}$ a $\mathbf{f = 50\,Hz}$.

Problém 7.4.

Nájdite prenosovú maticu systému $\mathbf{G(s)}$, ktorý definovaný stavovým opisom týmito maticami **A**, **B**, **C** a **D**.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8 NUMERICKÉ METÓDY RIEŠENIA DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

8.1 ÚVOD DO NUMERICKÝCH METÓD

Riešenie problémov **fyzikálneho**, **technického** a takisto aj **matematického** charakteru nás v mnohých prípadoch privedie k takým typom úloh, ktoré sa dajú opísať len pomocou obyčajných alebo parciálnych diferenciálnych rovníc. Riešenie týchto **fyzikálnych** a **technických** problémov je potom v samotnej podstate závislé od exaktného vyriešenia diferenciálnych rovníc, ktoré opisujú správanie sa skúmaného systému. Poznamenajme, že exaktne vyriešiť diferenciálnu rovnicu, resp. nájsť jej presné riešenie, možno docieliť len vo veľmi malom a obmedzenom počte prípadov. V mnohých prípadoch diferenciálnych rovníc alebo sústav diferenciálnych rovníc nie je možné získať a nájsť exaktné riešenie žiadnymi známymi matematickým metódami a postupmi.

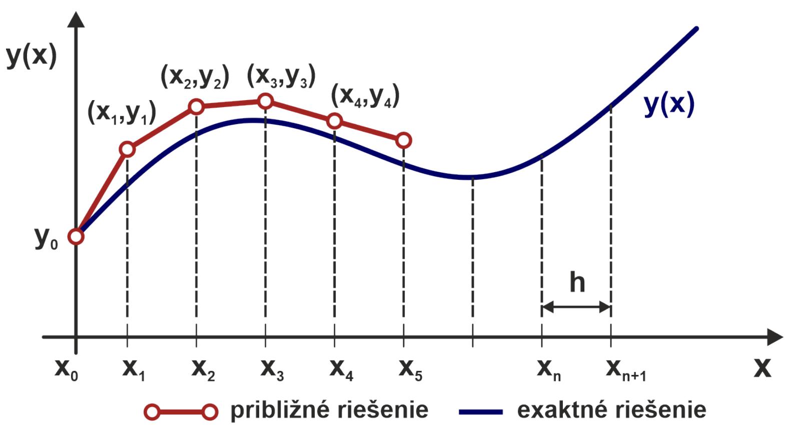
Aby bolo možno nadobudnúť riešenie aj pre takéto skupiny diferenciálnych rovníc, pre ktoré neexistuje **exaktné (presné)** riešenie, jediným možným riešením je nutnosť siahnuť po metódach, ktoré nevedú na exaktné riešenie, ale ktorých výsledkom je tzv. **približné riešenie** diferenciálnej rovnice.

Na výpočet približného riešenia diferenciálnych rovníc a ich sústav existuje celá rad **približných numerických metód**, ktoré sú založené na štatistických metódach riešenia. V tejto kapitole sa teda nebudeme zaoberať analytickými metódami riešenia diferenciálnych rovníc, ale zameriame sa na **numerické metódy riešenia** diferenciálnych rovníc dynamických systémov. Tieto metódy sú založené na hľadaní aproximácie **presného (exaktného) riešenia** diferenciálnej rovnice $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ v izolovaných bodoch

$$x_0, x_1, \dots, x_n \;, \tag{8.1}$$

kde premenná $\mathbf{x_i}$ je matematicky definovaná pre konštantný krok $\mathbf{h}$ ako

$$x_i = x_0 + i \cdot h \;, \qquad i = 0, 1, \dots, n \;. \tag{8.2}$$



Obr. 8.1. Numerické a exaktné riešenie diferenciálnej rovnice

Diferenciálne rovnice nazývané aj rovnice matematickej fyziky, opisujú matematické modely fyzikálnych javov. S analytickou riešiteľnosťou jednoduchých diferenciálnych rovníc sme sa oboznámili na kurzoch matematickej analýzy, kde sme si osvojili metódy riešenia istých typov diferenciálnych rovníc. Ako sme už uviedli, tak v živote a v praxi sa však vyskytujú rovnice omnoho zložitejšie, ktorých **analytická riešiteľnosť** je často náročná alebo dokonca nemožná. Vhodný nástroj na získanie riešenia takýchto situácií ponúka numerická matematika formou približných riešení, ktorými sa teraz začneme zaoberať.

Metodiku vysvetlíme na riešení jednej **diferenciálnej rovnici 1. rádu** s danou počiatočnou podmienkou - **Cauchyho počiatočná úloha**. Následne ukážeme možnosti zovšeobecnenia pre riešenie **sústav diferenciálnych rovníc 1. rádu**. Ukážeme tiež, že diferenciálnu rovnicu vyšších rádov so zadanými počiatočnými podmienkami možno ľahko previesť na sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu.

Pri všetkých nasledujúcich metódach budeme hľadať iba približné hodnoty v konečnom počte tzv. **uzlových bodov** $\mathbf{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = n}$, namiesto funkcií spojitých na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ ako je tomu pri analytickom riešení. Množine uzlových bodov $\{\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}\}$ hovoríme sieť a rozdiel $\mathbf{h_i = x_{i+1} - x_i}$ nazývame krok siete v uzle $\mathbf{x_i}$.

Približné hodnoty riešenia v uzlových bodoch vypočítané numerickou metódou, budeme označovať ako $\mathbf{y_0}, \mathbf{y_1}, \dots, \mathbf{y_n}$, na rozdiel od hodnôt presného riešenia, ktoré budeme označovať ako $\mathbf{y(x_0)}, \mathbf{y(x_1)}, \dots, \mathbf{y(x_n)}$, pozri Obr. 8.1. Ďalej sa podobne ako v príklade na obrázku Obr. 8.1 budeme zaoberať iba prípadmi, kedy krok **h** medzi jednotlivými uzlovými bodmi bude konštantný, t. j. výsledkom je **pravidelná** (**ekvidištantná**) **sieť**. Poznamenajme, že ak by sme potrebovali lomenú čiaru približných riešení nahradiť spojitou funkciou aj s prvou deriváciou (hladkou krivkou), resp. vedieť hodnotu v inom ako uzlovom bode použijeme niektorý z interpolačných polynómov.

8.2 CAUCHYHO POČIATOČNÁ ÚLOHA

Upriamme teraz pozornosť na **obyčajnú diferenciálnu rovnicu 1. rádu** s danou počiatočnou podmienkou, ktorú možno v symbolickom tvare zapísať týmto spôsobom

$$y' = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \ , \tag{8.3}$$

takáto diferenciálna rovnica s touto počiatočnou podmienkou sa nazýva **Cauchyho počiatočná úloha**.

Špecifikujme ďalej podmienky riešiteľnosti tejto diferenciálnej rovnice. Predpokladajme, že funkcia $\mathbf{f(x, y)}$ je spojitá na obdĺžniku

$$D = \{ (x, y) \colon \ |x - x_0| \le a, \qquad |y - y_0| \le b \} \ , \tag{8.4}$$

kde $\mathbf{a > 0}$ a $\mathbf{b > 0}$.

Potom existuje riešenie počiatočnej úlohy (8.3) na intervale $\langle \mathbf{x_0} - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x_0} + \boldsymbol{\alpha} \rangle$, kde $\boldsymbol{\alpha} = \left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{M}}\right)$ a $\mathbf{M} = \mathbf{max}|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$. Ak je navyše derivácia tejto funkcie $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$ ohraničená na obdĺžniku **D**, potom je toto riešenie jediným riešením. Táto veta určuje iba postačujúcu podmienku existencie jediného riešenia, a tiež vo veľkom počte prípadov zaručuje existenciu a jednoznačnosť iba v malom okolí bodu $\mathbf{x_0}$. V technickej praxi sa preto existencia a jednoznačnosť riešenia často posudzuje i na základe informácií o riešenej úlohe, poprípade fyzikálnych vlastností hľadaného riešenia.

8.3 EULEROVA METÓDA

Eulerova metóda je najjednoduchšou metódou na hľadanie približného riešenia **Cauchyho úlohy** (8.3). Predpokladajme pravidelnú sieť – ekvidištantné rozmiestnenie uzlových bodov $\{\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}\}$ s konštantným krokom **h**. Vo všetkých bodoch siete podľa (8.3) platí, že

$$y'(x_i) = F\big(x_i, y(x_i)\big) \ . \tag{8.5}$$

Deriváciu na ľavej strane nahradíme **numerickou deriváciou** a dostávame, že

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = F\big(x_i, y(x_i)\big) \ . \tag{8.6}$$

Ďalej nahradíme hodnoty $\mathbf{y}(\mathbf{x_i})$ približnou hodnotou $\mathbf{y_i}$, potom môžeme vyjadriť približnú hodnotu riešenia pre $\mathbf{y}(\mathbf{x_{i+1}})$ ako

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F\big(x_i, y(x_i)\big) \ . \tag{8.7}$$

Týmto spôsobom dostávame vzťah, ktorým vypočítame približnú hodnotu v nasledujúcom uzlovom bode pomocou hodnôt v predchádzajúcom uzlovom bode. Tento vzorec je tiež známy ako rekuretný vzorec numerickej **Eulerovej metódy**.

Príklad č. 8.1.

Pomocou **Eulerovej metódy** riešme **Cauchyho počiatočnú úlohu**

$$y' = x^2 - y, \quad y(0) = 1 \ , \tag{8.8}$$

na intervale $\langle \mathbf{0}; \mathbf{0.5} \rangle$ s krokom $\mathbf{h} = \mathbf{0.1}$.

Riešenie:

Zo zadania je zrejmé, že $\mathbf{x_0 = 0}$, $\mathbf{y_0 = 1}$ a $\mathbf{F(x, y) = x^2 - y}$. Približné hodnoty v nasledujúcich uzlových bodoch budeme počítať podľa vzťahu (8.7). Pre známy krok $\mathbf{h = 0.1}$ musí platiť, že

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y(x_i)) \ ,$$
$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot (x_i^2 - y_i) \ , \quad i = 0,1, \dots ,5 \, . \tag{8.9}$$

Na výpočet riešenia $\mathbf{y_{i+1}}$ v jednotlivých bodoch využijeme nasledujúci skript napísaný v **Matlabe**. Vypočítané hodnoty zapíšeme do nasledujúcej tabuľky.

```
clc
clear
close all

%Vstupné hodnoty
x0=0;
y0=1;
h=0.1;
a=0;
b=0.5;

%Definícia funkcie F(x, y)
F=@(x, y) x.^2-y;

n=(b-a)/h; %počet iterácií riešenia
Y(:,1)=y0;
X=a:h:b;

for i=1:n
   Y(:,i+1)=Y(i)+h*F(X(i),Y(i));
end

figure(1)
plot(X,Y,'-or','LineWidth',2)
xlabel('x')
ylabel('y(x)')
grid on

hold on
fun=@(x) -exp(-x)+x.^2-2*x+2; %exaktné riešenie
x=a:0.01:b;
y=fun(x); %exaktné riešenie
plot(x,y,'-b','LineWidth',2)
```

Tabuľka 8.1. Vypočítané hodnoty približného riešenia

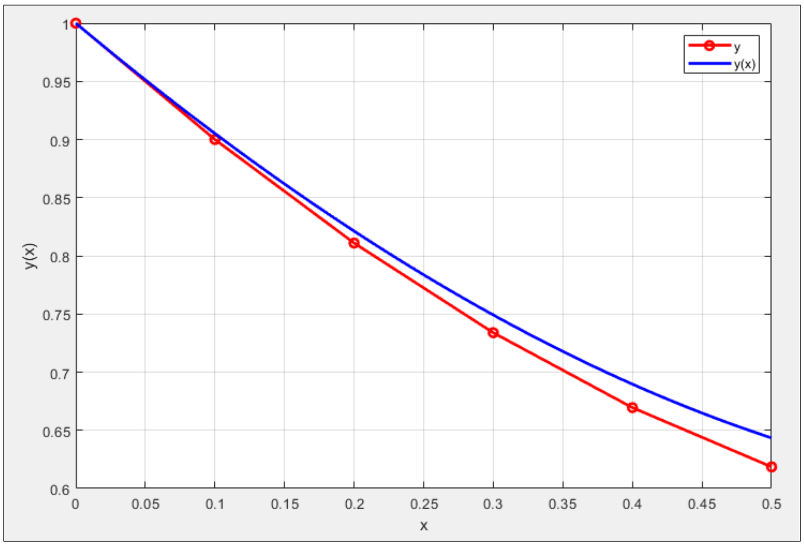
i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\mathbf{x_i}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\mathbf{y_i}$	1	0.9	0.811	0.7339	0.6695	0.6185

Pre porovnanie uvedieme aj hodnoty **presného riešenia**, ktoré je definované rovnicou $\mathbf{y(x) = -e^{-x} + x^2 - 2 \cdot x + 2}$. Hodnoty tohto riešenia boli vypočítané v jednotlivých uzlových bodoch, pozri nasledujúcu tabuľku.

Tabuľka 8.2. Exaktné hodnoty riešenia

i	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x_i}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\mathbf{y(x_i)}$	1	0.905	0.8213	0.7492	0.6897	0.6435

Z uvedeného je zrejmé, že presnosť riešenia s narastajúcim počtom uzlových bodov klesá a takisto je zrejmé, že presnosť riešenia závisí aj od kroku **h**. Porovnanie presného a približného riešenia je znázornené na Obr. 8.2.



Obr. 8.2. Porovnanie exaktného a približného riešenia diferenciálnej rovnice

8.4 MODIFIKOVANÁ EULEROVA METÓDA

Modifikovaná Eulerova metóda je vylepšením jednoduchej **Eulerovej metódy**. Pri modifikovanej **Eulerovej metóde** najskôr vypočítame pomocné hodnoty $\mathbf{k_1}$ a $\mathbf{k_2}$, pomocou ktorých potom určíme približnú hodnotu riešenia v ďalších uzlových bodoch. V prípade **1. modifikovanej Eulerovej metóde** počítame približné riešenie diferenciálnej rovnice na základe týchto vzťahov

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i) \ , \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1\right) \ , \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot k_2 \ , \end{aligned} \tag{8.10}$$

prípadne pri **2. modifikovanej Eulerovej metóde** vzťahmi

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i)\ , \\ k_2 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_1)\ , \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot (k_1 + k_2)\ . \end{aligned} \tag{8.11}$$

Príklad č. 8.2.

Pomocou **1.** a **2. modifikovanej Eulerovej metódy** riešme **Cauchyho počiatočnú úlohu** pre túto diferenciálnu rovnicu

$$y' = x^3 - 2 \cdot y, \quad y(0) = 2\ , \tag{8.12}$$

na intervale $\langle \mathbf{0}; \mathbf{0.5} \rangle$ s krokom $\mathbf{h = 0.1}$.

Riešenie:

Zo zadania je zrejmé, že $\mathbf{x_0 = 0}$, $\mathbf{y_0 = 2}$ a $\mathbf{F(x, y) = x^3 - 2 \cdot y}$. Približné hodnoty v nasledujúcich uzlových bodoch budeme počítať najskôr podľa vzťahu (8.10), t. j. pre známy krok $\mathbf{h = 0.1}$ platí, že

$$\begin{aligned} k_1 &= x_i^3 - 2 \cdot\ y_i\ , \\ k_2 &= \left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h\right)^3 - 2 \cdot \left(y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1\right)\ , \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot k_2\ ,\quad i = 0,1, \dots ,5\ , \end{aligned} \tag{8.13}$$

resp. podľa vzťahu (8.11) týmto spôsobom

$$\begin{aligned} k_1 &= x_i^3 - 2 \cdot\ y_i\ , \\ k_2 &= (x_i + h)^3 - 2 \cdot (y_i + h \cdot k_1)\ , \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot (k_1 + k_2)\ ,\quad i = 0,1, \dots ,5\ . \end{aligned} \tag{8.14}$$

Na výpočet porovnania riešenia $\mathbf{y_{i+1}}$ s exaktným riešením v jednotlivých bodoch použitím **1.** a **2. Eulerovej metódy**, využijeme nasledujúci skript napísaný v **Matlabe**. Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky.

```
clc
clear
close all

%Vstupné hodnoty
x0=0;
y0=2;
h=0.1;
a=0;
b=0.5;

%Definícia funkcie F(x, y)
F=@(x, y) x.^3-2*y;

n=(b-a)/h; %počet iterácií
Y1(:,1)=y0; Y2(:,1)=y0
X=a:h:b;

for i=1:n
   %Riešenie 1. metódy
   k1=F(X(i),Y1(i));
   k2=F(X(i)+1/2*h,Y1(i)+1/2*h*k1);
   Y1(:,i+1)=Y1(i)+h*k2;

   %Riešenie 2. metódy
   k1=F(X(i),Y2(i));
   k2=F(X(i)+h,Y2(i)+h*k1);
   Y2(:,i+1)=Y2(i)+1/2*h*(k1+k2);
end

%Presné riešenie
fun=@(x) x.^3/2 - (3*x.^2)/4 + (3*x)/4 + (19*exp(-2*x))/8 - 3/8;
x=a:0.01:b;
y=fun(x);

figure(1)
subplot(2,1,1)
hold on
plot(X,Y1,'--ob','LineWidth',2)
xlabel('x')
ylabel('y1, y(x)')
grid on
plot(x,y,'-r','LineWidth',2)
legend('y1','y(x)')
title('1. modifikovaná Eulerova metóda')

subplot(2,1,2)
hold on
plot(X,Y2,'--ob','LineWidth',2)
xlabel('x')
ylabel('y2, y(x)')
grid on
plot(x,y,'-r','LineWidth',2)
legend('y2','y(x)')
```

Tabuľka 8.3. Vypočítané hodnoty približného riešenia 1. a 2. modifikovanou Eulerovou metódu

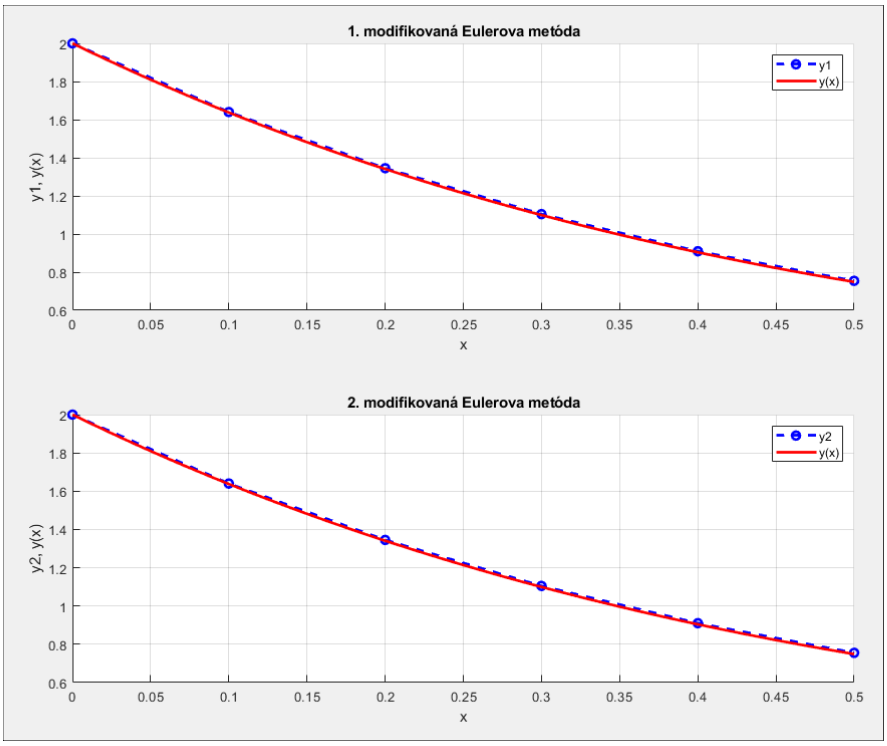
i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_{1i}	2	1.6400	1.3451	1.1045	0.9097	0.7544
y_{2i}	2	1.6401	1.3453	1.1048	0.9102	0.7552

Pre porovnanie uvedieme aj hodnoty presného riešenia, ktoré je definované rovnicou $\mathbf{y(x)} = \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{3 \cdot x^2}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{3 \cdot x}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{8}} \cdot \mathbf{e^{-2 \cdot x}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$. Hodnoty tohto riešenia boli vypočítané v jednotlivých uzlových bodoch, pozri nasledujúcu tabuľku.

Tabuľka 8.4. Exaktné hodnoty riešenia

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\mathbf{x_i}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\mathbf{y(x_i)}$	2	1.6375	1.3410	1.0994	0.9042	0.7487

Potom porovnanie presného a približného riešenia vypočítaného **1.** a **2. modifikovanou Eulerovou metódou** je znázornené na nasledujúcom Obr. 8.3.



Obr. 8.3. Porovnanie exaktného a približného riešenia diferenciálnej rovnice

8.5 METÓDA RUNGE-KUTTA 4. RÁDU

Metódy typu **Runge-Kutta** patria k jedným z najdôležitejších zo skupiny jednokrokových metód. Obe z modifikovaných Eulerových metód patria taktiež k metódam typu **Runge-Kutta**. V tejto kapitole uvedieme najčastejšie uvádzanú a najpoužívanejšiu z metód typu **Runge-Kutta** a to metódu **Runge-Kutta 4. rádu**.

Táto metóda **Runge-Kutta 4. rádu** je zovšeobecnením **Simpsonovej metódy**, kde pri výpočte približného riešenia použitím tejto metódy, sa využívajú nasledujúce koeficienty

$$
\begin{aligned}
k_1 &= F(x_i, y_i) \ , \\
k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1\right) \ , \\
k_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_2\right) \ , \\
k_4 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_3) \ , \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \ .
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

Príklad č. 8.3.

Pomocou metódy **Runge-Kutta 4. rádu** riešme **Cauchyho počiatočnú úlohu** pre túto diferenciálnu rovnicu

$$
y' = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot y, \quad y(0) = 1 \ , \tag{8.16}
$$

na intervale $\langle \mathbf{0}; \mathbf{0.5} \rangle$ s krokom $\mathbf{h = 0.1}$.

Riešenie:

Zo zadania je zrejmé, že $\mathbf{x_0 = 0}$, $\mathbf{y_0 = 1}$ a $\mathbf{F(x, y) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot y}$. V každom kroku musíme vypočítať štyri koeficienty $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$, $\mathbf{k_3}$ a $\mathbf{k_4}$, a potom pomocou nich približné hodnoty v ďalších uzlových bodoch dosadením do vzťahu (8.15). Pre známy krok $\mathbf{h = 0.1}$ musí platiť, že

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 3 \cdot x_i^2 - 2 \cdot y_i \, , \\
k_2 &= 3 \cdot \left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h\right)^2 - 2 \cdot \left(y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1\right) \ , \\
k_3 &= 3 \cdot \left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h\right)^2 - 2 \cdot \left(y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_2\right) \ , \\
k_4 &= 3 \cdot (x_i + h)^2 - 2 \cdot (y_i + h \cdot k_3) \ , \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \ , \quad i = 0,1, \ldots, 5 \, .
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

Na výpočet porovnania riešenia $\mathbf{y_{i+1}}$ s exaktným riešením v jednotlivých bodoch využijeme nasledujúci skript napísaný v **Matlabe**. Vypočítané hodnoty opäť zapíšeme do tabuľky.

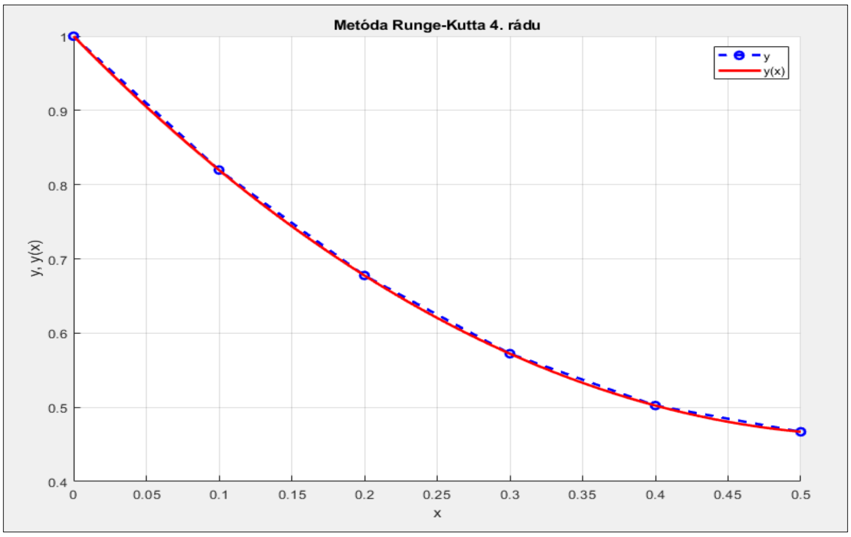
```
clc
clear
close all

%Vstupné hodnoty
x0=0;
y0=1;
h=0.1;
```

```
a=0;
b=0.5;

%Definícia funkcie F(x, y)
F=@(x, y) 3*x.^2-2*y;

n=(b-a)/h; %počet iterácií
Y(:,1)=y0;
X=a:h:b;

for i=1:n
   k1=F(X(i),Y(i));
   k2=F(X(i)+1/2*h, Y(i)+1/2*h*k1);
   k3=F(X(i)+1/2*h, Y(i)+1/2*h*k2);
   k4=F(X(i)+h, Y(i)+h*k3);
   Y(:,i+1)=Y(i)+1/6*h*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end

%Presné riešenie
fun=@(x) exp(-2*x)/4 - (3*x)/2 + (3*x.^2)/2 + 3/4;
x=a:0.01:b;
y=fun(x);

figure(1)
hold on
plot(X,Y,'--ob','LineWidth',2)
xlabel('x')
ylabel('y, y(x)')
grid on
plot(x,y,'-r','LineWidth',2)
legend('y', 'y(x)')
title('Metóda Runge-Kutta 4. rádu')
```

Tabuľka 8.5. Vypočítané hodnoty približného riešenia metódou Runge-Kutta 4. rádu

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\mathbf{x_i}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\mathbf{y_i}$	1	0.81968583	0.67758561	0.57221042	0.50234125	0.46698002
$\mathbf{y(x_i)}$	1	0.81968268	0.67758001	0.57220290	0.50233224	0.46696986
$\mathbf{k_1}$	-2	-1.60735	-1.23517	-0.87442	-0.52468	
$\mathbf{k_2}$	-1.7925	-1.41093	-1.04415	-0.68947	-0.34471	
$\mathbf{k_3}$	-1.81325	-1.43077	-1.06325	-0.70797	-0.36271	
$\mathbf{k_4}$	-1.60735	-1.23321	-0.87252	-0.52282	-0.18214	
x	0 0.05 0.05 0.1	0.1 0.15 0.15 0.2	0.2 0.25 0.25 0.3	0.3 0.35 0.35 0.4	0.4 0.45 0.45 0.5	
y	1 0.95 0.952625 0.9049875	0.9051627 0.8604046 0.8632675 0.8210860	0.8212695 0.7822060 0.7852842 0.7489911	0.7491822 0.7162230 0.7194960 0.6894826	0.6896804 0.6631964 0.6666456 0:6432659	

Potom porovnanie presného a približného riešenia vypočítaného metódou **Runge-Kutta 4. rádu** je znázornené na nasledujúcom Obr. 8.4.



Obr. 8.4. Porovnanie exaktného a približného riešenia diferenciálnej rovnice

8.6 RIEŠENIE SÚSTAV DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

Riešenie **sústav diferenciálnych rovníc 1. rádu** s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y'_1 &= F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad & y_1(x_0) &= \eta_1 \ , \\ y'_2 &= F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad & y_2(x_0) &= \eta_2 \ , \\ &\vdots \\ y'_n &= F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad & y_n(x_0) &= \eta_n \ , \end{aligned} \tag{8.18}$$

sa hľadá podobným spôsobom ako riešenie **jednej diferenciálnej rovnice** s počiatočnou podmienkou. Systém môžeme vektorovo zapísať v tomto tvare

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, y), \quad \mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\eta} \ , \tag{8.19}$$

kde $\mathbf{y} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \dots, \mathbf{y_n})^\mathbf{T}$, $\mathbf{F} = (\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \dots, \mathbf{F_n})^\mathbf{T}$ a $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \dots, \boldsymbol{\eta_n})^\mathbf{T}$.

Na riešenie tejto sústavy diferenciálnych rovníc možno použiť ktorúkoľvek z horeuvedených metód, jediná zmena je v tom, že musíme pracovať s vektormi. Potom **Eulerovu metódu** pre **systém diferenciálnych rovníc** používame v tomto tvare

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{F}(x_i, \mathbf{y}_i) \tag{8.20}$$

a **Runge-Kutta metóda 4. rádu** nadobudne tento tvar

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}(x_i, \mathbf{y}_i) \ , \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, \mathbf{y}_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \mathbf{k}_1\right) \ , \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, \mathbf{y}_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \mathbf{k}_2\right) \ , \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{F}(x_i + h, \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{k}_3) \ , \\
\mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (\mathbf{k}_1 + 2 \cdot \mathbf{k}_2 + 2 \cdot \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \ .
\end{aligned} \tag{8.21}$$

V prípade, že riešime sústavu dvoch diferenciálnych rovníc, je jednoduchšie neznáme funkcie na ľavej strane označiť ako **y** a **z**, potom funkcie na pravej strane rovnako označíme ako **F** a **G**, a to z dôvodu, aby sme sa vyhli zložitej indexácii. **Sústava diferenciálnych rovníc** nadobudne tento tvar

$$\begin{aligned}
y' &= F(x, y, z) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \ , \\
z' &= G(x, y, z) \ , \qquad z(x_0) = z_0 \ ,
\end{aligned} \tag{8.22}$$

potom **Eulerova metóda** prejde do tvaru

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h \cdot F(x_i, y_i, z_i) \ , \\
z_{i+1} &= z_i + h \cdot G(x_i, y_i, z_i)
\end{aligned} \tag{8.23}$$

a metóda **Runge-Kutta 4. rádu** do tohto tvaru

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \\
z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (l_1 + 2 \cdot l_2 + 2 \cdot l_3 + l_4) \ ,
\end{aligned} \tag{8.24}$$

kde

$$\begin{aligned}
k_1 &= F(x_i, y_i, z_i) \ , \\
k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1\right) \ ,
\end{aligned} \tag{8.25}$$

$$k_3 = F\left(x_i + \frac{1}{2}\cdot h, y_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot k_2\right) ,$$

$$k_4 = F(x_i + h, y_i + h\cdot k_3)$$

a

$$\begin{aligned} l_1 &= G(x_i, y_i, z_i) \ , \\ l_2 &= G\left(x_i + \frac{1}{2}\cdot h, y_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot k_1\right) , \\ l_3 &= G\left(x_i + \frac{1}{2}\cdot h, y_i + \frac{1}{2}\cdot h\cdot k_2\right) , \\ l_4 &= G(x_i + h, y_i + h\cdot k_3) \ . \end{aligned} \tag{8.26}$$

8.7 RIEŠENIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC VYŠŠICH RÁDOV

Každú obyčajnú **diferenciálnu rovnicu n-tého rádu** zapísanú vo všeobecnom tvare ako

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) , \tag{8.27}$$

s počiatočnými podmienkami

$$y(x_0) = y_0, \ \ y'^{(x_0)} = y'_0, \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ \ , \tag{8.28}$$

môžeme previesť na **sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu** a to nasledujúcim spôsobom. Označíme $\mathbf{y_1 = y}$, $\mathbf{y_2 = y'}$, … , $\mathbf{y_n = y^{(n-1)}}$. Potom je zrejmé, že $\mathbf{y'_1 = y_2}$, $\mathbf{y'_2 = y_3}$, atď. Ďalej podľa zadanej diferenciálnej rovnice musí platiť, že

$$y^{(n)} = F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \, . \tag{8.29}$$

Týmto spôsobom sme získali túto **sústavu n diferenciálnych rovníc 1. rádu**

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2, \quad\quad y_1(x_0) = y_0 \ , \\ y'_2 &= y_3, \quad\quad y_2(x_0) = y'_0 \ , \\ &\ \vdots \\ y'_n &= F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n), \quad\quad y_n(x_0) = y_0^{(n-1)} \ , \end{aligned} \tag{8.30}$$

ktorú môžeme riešiť ľubovoľnou z uvedených **numerických metód**. Riešenie pôvodnej **diferenciálnej rovnice n-tého rádu** je potom prvá zložka riešenia sústavy (8.32).

8.8 NUMERICKÉ METÓDY A ICH VYUŽITIE NA RIEŠENIE ODOZVY DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV

Numerické metódy na riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré sme uviedli v predchádzajúcich kapitolách, možno aplikovať aj na riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré opisujú správanie sa dynamických systémov. Tieto sme prevažne do tohto bodu riešili exaktnými metódami. Všetky dynamické systémy, s ktorými sme sa doteraz zaoberali, predstavovali prevažne **systémy lineárneho charakteru**, ktoré boli opísané **lineárnymi diferenciálnymi rovnicami** alebo ich sústavami.

Tieto rovnice bolo možné veľmi jednoducho riešiť analytickými metódami, napr. použitím metódy inverznej **Laplaceovej transformácie**, resp. ďalšími inými dostupnými analytickými metódami. Výsledkom týchto metód bolo vždy **exaktné (presné)** riešenie týchto diferenciálnych rovníc.

Ako sme si ukázali, tak toto riešenie možno vypočítať aj **metódou postupného integrovania**, napr. využitím skriptu v **Matlabe**. Pripomeňme, že ako sme už uviedli, tak v praxi sa pri riešení diferenciálnych rovníc môžeme stretnúť s problémami, kedy exaktné riešenie pre danú diferenciálnu rovnicu nie je možné nájsť, nakoľko toto riešenie neexistuje. Tieto problémy môžu nastať hlavne pri riešení rovníc, v ktorých sa vyskytujú nelineárne členy. Takéto rovnice však môžeme riešiť **numerickým metódami**, ktoré sme predstavili v predchádzajúcich kapitolách. Poznamenajme, že tieto numerické metódy sú naprogramované aj v prostredí **Matlabu**, vo forme riešičov, ktoré sa takisto využívajú na riešenie všetkých modelov, ktoré sme simulovali formou **blokovej schémy** v **Simulinku**.

8.9 NUMERICKÉ RIEŠENIE SYSTÉMU V STAVOVOM OPISE METÓDOU RUNGE-KUTTA 4. RÁDU

Už vieme, že matematické modely dynamických systémov ľubovoľného stupňa môžeme vyjadriť v tvare **stavových rovníc**, ktoré môžu mať vo všeobecnosti aj nelineárny tvar. Ak dynamický systém má $\mathbf{n}$ stavových premenných $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}$ a $\mathbf{m}$ vstupov $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_m}$, potom tento **stavový opis** môžeme zapísať vo všeobecnom tvare týmito rovnicami

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \ , \\ \dot{x}_1 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \ , \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \ , \end{aligned} \qquad (8.31)$$

kde $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \dots, \mathbf{F_n}$ sú algebrické funkcie **stavových premenných** a **vstupných** signálov funkcií. Tento systém v stavovom opise zapísaný vo vektorovom tvare, možno riešiť metódou **Runge-Kutta 4. rádu**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \ \ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_0 \ , \ \ a \le t \le b \, . \qquad (8.32)$$

Zadefinujeme celé číslo $\mathbf{N} > \mathbf{0}$ a vypočítajme krok metódy ako $\mathbf{h} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/\mathbf{N}$, potom uzlové body sú $\mathbf{t_i} = \mathbf{a} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, $\mathbf{i} = \overline{\mathbf{0}, \mathbf{N}}$. Tieto uzlové body sú definované na celom intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, ktorý je rozdelený na **N** čiastkových intervalov. Ak počiatočný vektor označíme ako $\mathbf{x_0}$ a vektor riešenia ako $\mathbf{x_i}$, potom v každom časovom kroku $\mathbf{t_i}$ vypočítame približnú hodnotu riešenia $\mathbf{x_{i+1}}$ metódou **Runge-Kutta 4. rádu** ako

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \ , \qquad (8.33)$$

kde pripomeňme, že parametre $\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \mathbf{k_3}$ a $\mathbf{k_4}$ sú

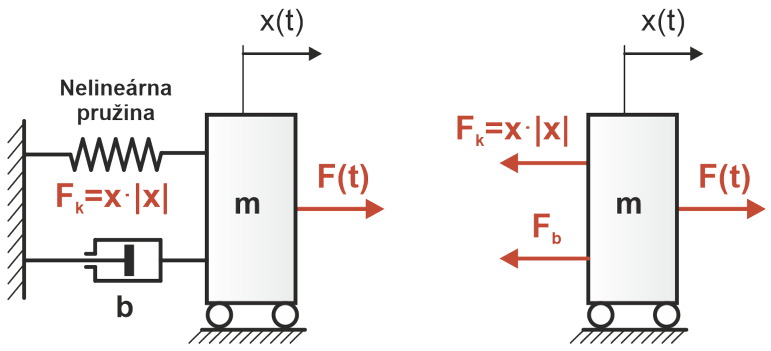
$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_i; x_i) \ , \\ k_2 &= F\left(t_i + \frac{1}{2} \cdot h; x_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1\right) \ , \\ k_3 &= F\left(t_i + \frac{1}{2} \cdot h; x_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_2\right) \ , \\ k_4 &= F(t_i + h; x_i + h \cdot k_3) \ , \end{aligned} \qquad (8.34)$$

potom nasledujúca funkcia, ktorá bola naprogramovaná v prostredí **Matlabu**, rieši odozvu systému, ktorý je definovaný v **stavovom opise** s uvažovaním počiatočných podmienok, a to numerickým spôsobom metódou **Runge-Kutta 4. rádu** pre daný časový interval $\mathbf{t} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

```
function X=Runge_Kutta(F,t,x0)
%Funkcia metódy Runge-Kutta 4. rádu

%F je m dimenzionálny vektor funkcií
%t je (n+1) dimenzionálny vektor času
%x0 je m-dimenzionálny vektor počiatočných podmienok

%x je matica rozmeru m by (n+1),
%každý stĺpec tejto matice je riešením premennej x(i)

X(:,1)=x0;  %nastavíme prvý stĺpec ako počiatočný vektor 0
h=t(2)-t(1); %krok metódy

for i=1:length(t)-1

    %Koeficienty k1, k2, k3 a k4
    k1=F(t(i), X(:,i));
    k2=F(t(i)+h/2, X(:,i)+h*k1/2);
    k3=F(t(i)+h/2, X(:,i)+h*k2/2);
    k4=F(t(i)+h, X(:,i)+h*k3);

    %Výpočet približného riešenia metódu Runge-Kutta 4. rádu
    X(:,i+1)=X(:,i) + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

end
```

Príklad č. 8.4.

Uvažujme nelineárny mechanický systém zobrazený na Obr. 8.5, ktorý obsahuje nelineárnu pružinu. Silu, ktorá vzniká v tejto pružine môžeme modelovať touto funkciou $\mathbf{F_k(x) = x \cdot |x|}$. Ak vieme, že tento systém je zaťažovaný jednotkovou skokovou silou $\mathbf{F(t) = 1}$, nájdite stavový opis takéhoto nelineárneho systému a riešte jeho odozvu numerickou metódou **Runge-Kutta 4. rádu** pre uvažovaný časový interval $\mathbf{0 \leq t \leq 10}$. Pri riešení predpokladáme počiatočné podmienky $\mathbf{x(0) = 0}$ a $\mathbf{\dot{x}(0) = 1}$.



(a) (b)

Obr. 8.5. (a) Model nelineárneho mechanického systému systém, (b) uvoľnený systém

Riešenie:

Systém možno opísať touto **nelineárnou diferenciálnou rovnicou 1. rádu**, ktorá bola odvodená na základe **II. Newtonovho zákona**

$$\ddot{x} + \dot{x} + x|x| = F(t), \ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \ , \tag{8.35}$$

S uvažovaním stavových premenných $\mathbf{x_1 = x}$ a $\mathbf{x_2 = \dot{x}}$, môžeme dospieť k tomuto nelineárnemu tvaru stavového opisu systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= -x_1|x_1| - x_2 + F(t) \ , \end{aligned} \tag{8.36}$$

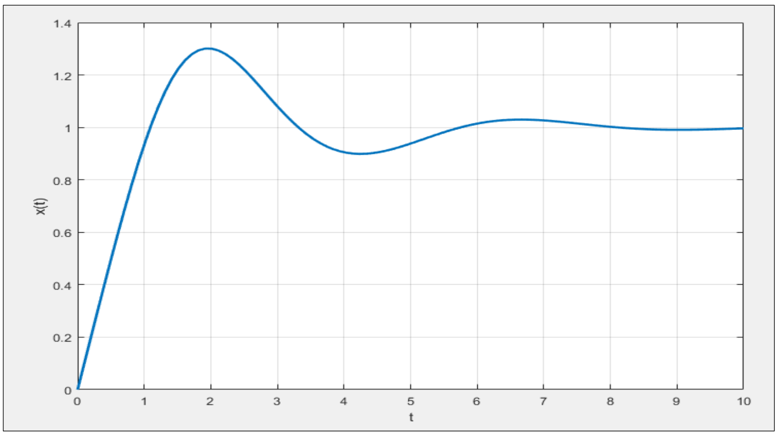
kde $\mathbf{F(t) = 1}$. Tento systém zapísaný vo vektorom tvare nadobúda tento tvar

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1|x_1| + 1 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{8.37}$$

Na riešenie odozvy tohto systému využijeme nami naprogramovanú funkciu numerickej metódy, ktorú zavoláme ako riešič v nasledujúcom skripte **Matlabu**.

```
clc
clear
close all

%Generovanie časového vektora
t=linspace(0,10);

%Vektor počiatočných podmienok
x0=[0;1];

%Definovanie funkcie riešiča
f=inline('[x(2,1);-x(2,1)-x(1,1)*abs(x(1,1))+1]','t', 'x');

%Zavolanie naprogramovanej metódy
x=Runge_Kutta(f,t,x0);
x1=x(1,:);

figure(1)
plot(t,x1,'LineWidth',2);
grid on
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
```

Riešenie odozvy nelineárneho systému podľa zadania, ktorý bol simulovaný pre čas simulácie $\mathbf{t = 10\ s}$, je zobrazené na nasledujúcom Obr. 8.6. Funkcia **inline**, ktorú sme použili v skripte definuje funkciu v príkazovom riadku **Matlabu**.



Obr. 8.6. Riešenie odozvy nelineárneho systému

Príklad č. 8.5.

Uvažujme mechanický systém definovaný týmito stavovými rovnicami s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2 \cdot x_1 \cdot |x_1| + a \cdot x_2 - 1 + \frac{1}{2} \cdot \cos(t) \ , \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - 1 \ , \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 1 \ , \end{aligned} \tag{8.38}$$

kde $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$ je parametrom systému.

Použitím metódy **Runge Kutta 4. rádu** nájdite odozvu tohto systému pre uvažované hodnoty $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ a $\mathbf{a} = \mathbf{2}$. Zobrazte porovnanie vypočítaných riešení odozvy systému na jednom grafe pre rovnaký časový interval simulácie $\mathbf{0} \le \mathbf{t} \le \mathbf{10}$.

Riešenie:

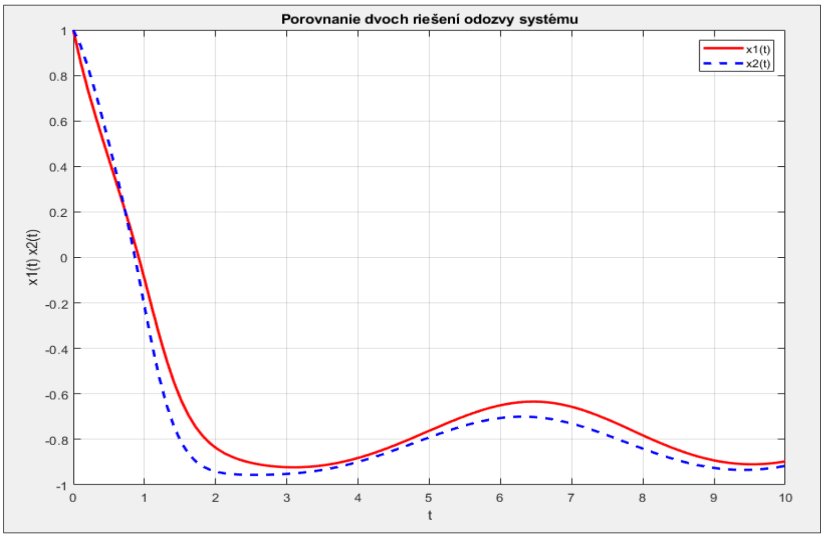
Na základe zadania môžeme identifikovať vstupné parametre pre zadefinovanie výpočtovej funkcie, ktorú použijeme pri zavolaní funkcie metódy **Runge Kutta 4. rádu**. Vstupné parametre pre funkciu riešiča sú

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} -2 \cdot x_1 \cdot |x_1| + a \cdot x_2 - 1 + \frac{1}{2} \cdot \cos(t) \\ -x_1 - x_2 - 1 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8.39}$$

Na riešenie odozvy vyšetrovaného systému naprogramujeme v **Matlabe** tento skript, ktorý rieši odozvu pre dva možné prípady parametra **a.**

```
clc
clear
close all

%Generovanie časového vektora
t=linspace(0,10);

%Vektor počiatočných podmienok
x0=[1;1];

%Definovanie funkcií riešiča
f1=inline('[-2*x(1,1)*abs(x(1,1))+x(2,1)-1+1/2*cos(t);-x(1,1)-x(2,1)-1]','t','x');
f2=inline('[-2*x(1,1)*abs(x(1,1))+2*x(2,1)-1+1/2*cos(t);-x(1,1)-x(2,1)-1]','t','x');

%Zavolanie naprogramovanej metódy

x1=Runge_Kutta(f1,t,x0);
x2=Runge_Kutta(f2,t,x0);
x11=x1(1,:);
x12=x2(1,:);

%Zavolanie naprogramovanej metódy

figure(1)
plot(t,x11,'r',t,x12,'b--','LineWidth',2);
grid on
xlabel('t')
ylabel('x1(t) x2(t)')
legend('x1(t)','x2(t)')
title('Porovnanie dvoch riešení odozvy systému')
```

Porovnanie riešenia vypočítanej odozvy pre parametre $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ a $\mathbf{a} = \mathbf{2}$ je zobrazené na nasledujúcom Obr. 8.7.



Obr. 8.7. Porovnanie riešenia odozvy pre parameter a = 1 a a = 2

8.10 NUMERICKÉ RIEŠENIA DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC V MATLABE

Matlab poskytuje niekoľko štandardných naprogramovaných funkcií, ktoré možno použiť na riešenie sústavy diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami. Tieto riešia tento systém numerickým spôsobom. Medzi funkcie, v ktorých sú naprogramované **numerické metódy riešenia** diferenciálnych rovníc možno zaradiť funkcie, ktorými sú:

- **ode15 - Eulerova metóda** (explicitná metóda) ,
- **ode15s - Eulerova metóda** (implicitná metóda) ,
- **ode23 - Heunova metóda** (explicitná metóda) ,
- **ode23s - Heunova metóda** (implicitná metóda)
- a **ode45 – Runge Kutta 4. rádu** .

Ak chceme niektorú z týchto spomenutých funkcií v **Matlabe** použiť na vyriešenie sústavy diferenciálnych rovníc. V prvom kroku, musíme daným matematický model previesť na **stavový opis** a zadefinovať tzv. **funkciu riešiča**, ktorá musí dodržať presne stanový tvar. Takúto funkciu môžem potom použiť na zavolanie niektorej z numerických metód, ktorými sú **ode45, ode23**, **ode15** a pod. Funkcia riešiča v **Matlabe** musí nadobudnúť tento tvar, kde **dy** je vektor derivácie stavových premenných.

```
function dy = nazov_funkcie(t,y)

    %Zadefinované rovnice stavového opisu

end
```

Potom syntax pre zavolanie numerickej metódy napr. **Runge-Kutta 4. rádu**, ktorá je naprogramovaná vo funkcii **ode45**, je v **Matlabe** definovaný týmto príkazom

$$[\mathrm{T}, \mathrm{Y}] = \mathrm{ode45}(\mathrm{fun}, \mathrm{t}, \mathrm{x}_0) \ , \qquad (8.40)$$

kde **fun** je referenčný odkaz na funkciu riešiča, ktorá predstavuje rovnice **stavového opisu** vyšetrovanej sústavy diferenciálnych rovníc. Ako parameter funkcie **fun** možno použiť priamo názov danej funkcie, ktorý je uvedený v apostrofoch ako **„nazov_funkcie"** alebo takisto môžeme na ľubovoľnú zadefinovanú funkciu vytvoriť referenčný odkaz prostredníctvom operátora @.

Potom **T** predstavuje časový vektor a **Y** je **výstupná matica** riešenia stavových premenných pre každý časový krok $\mathbf{t}$ (v tejto matici sú výstupné hodnoty uložené v takom istom poradí stĺpcov, ktoré zodpovedá poradiu stavových premenných v stavovom vektore), $\mathbf{t} = [\mathbf{t_{min}}: \mathbf{dt}: \mathbf{t_{max}}]$ je vektor času simulácie a $\mathbf{X_0}$ je vektor počiatočných podmienok. Spôsob ako riešiť diferenciálne rovnice numerickým spôsobom v **Matlabe** si ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad č. 8.6.

Predpokladajme **diferenciálnu rovnicu 2. rádu** s parametrom $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}$. Riešte túto diferenciálnu rovnicu v **Matlabe**, použitím numerickej metódy **ode45**, ak predpokladáme čas simulácie $\mathbf{t_{sim}} = \mathbf{20\ s}$ a časový krok $\mathbf{dt} = \mathbf{0.01\ s}$.

$$\ddot{y}_1 - \mu \cdot (1 - y_1^2) \cdot \dot{y}_1 + y_1 = 0 \ . \qquad (8.41)$$

Riešenie:

Predtým, než zadefinujeme funkciu riešiča nájdime **stavový opis**, ktorý odpovedá **diferenciálnej rovnici 2. rádu** podľa zadania. Začneme voľbou týchto stavových premenných

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \ , \\ x_2 &= \dot{y}_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dot{x}_1 \ . \end{aligned} \qquad (8.42)$$

To znamená, že hľadané **stavové rovnice** nadobudnú tento tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= \mu \cdot (1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \ . \end{aligned} \qquad (8.43)$$

Teraz pristúpime k zadefinovaniu funkcie riešiča numerickej metódy, ktorú nakonfigurujeme na základe odvodených rovníc **stavového opisu systému**. Funkcia riešiča zadefinovaného v **Matlabe** pre tento systém nadobúda tento tvar.

```
function dy=Funkcia(t, y, mi)

    dy=zeros(2,1);
    dy(1)=y(2);
    dy(2)=mi*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);

end
```

Poznamenajme, že hlavička definície funkcie musí vždy začínať tvarom $\mathbf{dy} = \mathbf{názov\_funkcie}(\mathbf{t}, \mathbf{y})$. Pripomeňme, že do týchto funkcií možno zadefinovať aj ďalšie parametre systému. Tieto je nutné zadefinovať v požadovanom poradí až za parametrami $\mathbf{t}$ a $\mathbf{y}$, napr. týmto spôsobom

$$\mathrm{dy} = \mathrm{názov\_funkcie}(\mathrm{t}, \mathrm{y}, \mathrm{parm1}, \mathrm{parm2}, \ldots.) \quad . \tag{8.44}$$

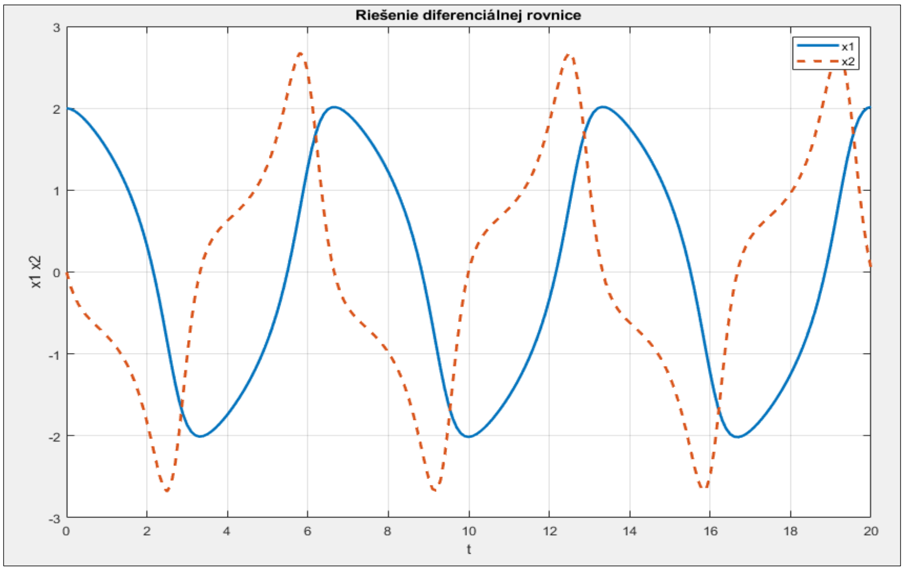
Po zadefinovaní funkcie riešiča, môžeme túto funkciu zavolať ako vstupnú funkciu pre ľubovoľne zvolenú **numerickú metódu**. Ak ďalej zvolíme počiatočné podmienky ako vektor $[\mathbf{x_{10}} = \mathbf{2}, \mathbf{x_{20}} = \mathbf{0}]$ a čas simulácie zadefinujeme prostredníctvom tohto časového vektora $\mathbf{t} = [\mathbf{0}: \mathbf{0.01}: \mathbf{20}]$, potom správny syntax **Matlabu** pre zavolanie funkcie **ode45** je v tomto tvare

$$[\mathrm{t}, \mathrm{y}] = \mathrm{ode45}(@(\mathrm{t}, \mathrm{y})\mathrm{Funkcia}(\mathrm{t}, \mathrm{y}, 1), \mathrm{t}, [2; 0]) \quad . \tag{8.45}$$

Na riešenie odozvy danej diferenciálnej rovnice podľa zadania, pre ktorú sme odvodili **stavový opis systému**, použijeme tento skript **Matlabe**.

```
clear
clc
close all

%Vstupné parametre systému
tsim=20;
t=0;
dt=0.1;
m=1;
%Časový vektor
t=[0:dt:tsim];
%Vektor počiatočných podmienok
x=[2;0];
%Zavolanie numerickej metódy
[t,y]=ode45(@(t,y)Funkcia(t, y, m),t, x);
figure(1)
plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'--','LineWidth',2);
title('Riešenie diferenciálnej rovnice')
grid on
xlabel('t')
ylabel('x1, x2')
legend('x1','x2')
```

Riešenie odozvy systému parametrickej diferenciálnej rovnice, ktoré bolo riešené simuláciu predchádzajúceho skriptu v **Matlabe**, je znázornené na nasledujúcom Obr. 8.8.



Obr. 8.8. Riešenie sústavy diferenciálnych rovníc v stavovom opise

Príklad č. 8.7.

Predpokladajme túto **sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu** s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \cdot y_3 \;, && y_1(0) = 0 \;, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 \cdot y_3 \,, && y_2(0) = 1 \;, \\ \dot{y}_3 &= -0.5 \cdot y_1 \cdot y_2 \,, && y_3(0) = 1 \;. \end{aligned} \qquad (8.46)$$

Riešte danú sústavu diferenciálnych rovníc s využitím numerickej metódy **Runge-Kutta 4. rádu** v **Matlabe**, pre uvažovaný čas simulácie $\mathbf{t_{sim} = 12\ s}$ s časovým krokom $\mathbf{dt = 0.01\ s}$.

Riešenie:

Predtým, než opäť zadefinujeme funkciu riešiča, nájdime **stavový opis** tejto sústavy diferenciálnych rovníc, voľbou týchto stavových premenných

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \;, \\ x_2 &= y_2 \;, \\ x_3 &= y_3 \;. \end{aligned} \qquad (8.47)$$

Potom **stavové rovnice systému** nadobúdajú tento tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \cdot x_3 \ , \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \cdot x_3 \ , \\ \dot{x}_3 &= -0.5 \cdot x_1 \cdot x_2 \ . \end{aligned} \tag{8.48}$$

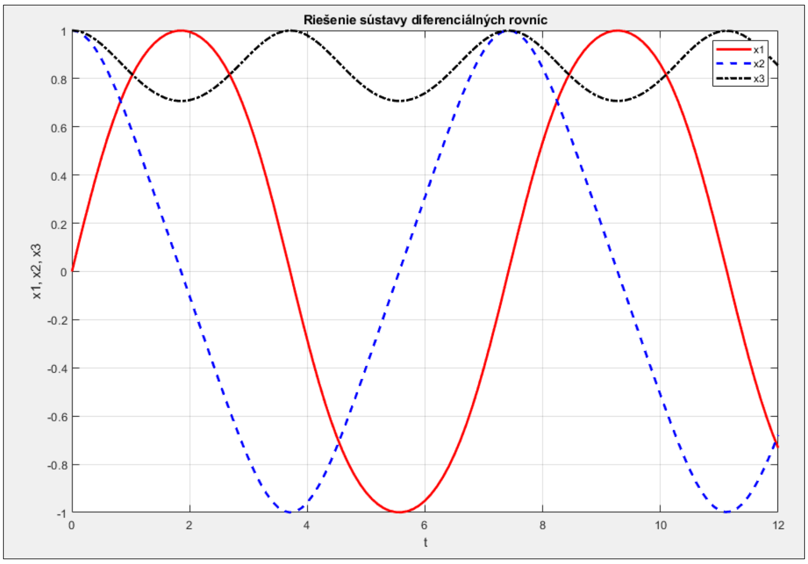
Na základe tohto matematického modelu v **stavovom opise** zadefinujeme funkciu riešiča nasledujúcim skriptom v **Matlabe**.

```
function dy = fun1(t,y)

    dy = zeros(3,1);    %stavový vektor
    dy(1) = y(2) * y(3);
    dy(2) = -y(1) * y(3);
    dy(3) = -0.5 * y(1) * y(2);

end
```

Potom riešenie **sústavy diferenciálnych rovníc** zapísaných v stavovom opise, riešime využitím nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
tsim=12;
t=0;
dt=0.1;

%Časový vektor
t=[0:dt:tsim];

%Vektor počiatočných podmienok
x=[0;1;1];

%Zavolanie numerickej metódy
[t,y]=ode45(@(t,y)fun1(t,y),t, x);

figure(1)
plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b--',t,y(:,3),'k-.','LineWidth',2);
title('Riešenie sústavy diferenciálnych rovníc')
grid on
xlabel('t')
ylabel('x1, x2, x3')
legend('x1','x2','x3')
```

Riešenie odozvy systému, ktoré sme simulovali predchádzajúcim skriptom v **Matlabe**, je znázornené na nasledujúcom grafe Obr. 8.6



Obr. 8.9: Riešenie sústavy diferenciálnych rovníc

Príklad č. 8.8.

Predpokladajme **sústavu diferenciálnych rovníc 2. rádu** s týmito počiatočnými podmienkami $\mathbf{y_1(0) = 10, \dot{y}_1(0) = 0, y_2(0) = 1, \dot{y}_2(0) = 1}$.

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 + 4\cdot\dot{y}_1 + 3\cdot y_1 = 4 \ , \\ &\ddot{y}_2 + 10\cdot(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + 5\cdot(y_2 - y_1) = 5 \ . \end{aligned} \tag{8.49}$$

Riešte túto sústavu diferenciálnych rovníc s využitím numerickej metódy **Runge-Kutta 4. rádu**, pre simulačný čas $\mathbf{t_{sim} = 15\ s}$ a časový krok $\mathbf{dt = 0.01\ s}$.

Riešenie:

Predtým, než zadefinujeme funkciu riešiča, nájdime **stavový opis** danej **sústavy diferenciálnych rovníc**, voľbou týchto stavových premenných

$$\begin{aligned} &x_1 = y_1 \ , \\ &x_2 = \dot{y}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \dot{x}_1 \ , \\ &x_3 = y_2 \ , \\ &x_4 = \dot{y}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_4 = \dot{x}_3 \ . \end{aligned} \tag{8.50}$$

Na základe týchto navolených stavových premenných prepíšeme **systém dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu** podľa zadania do tohto tvaru stavových rovníc

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \ , \\
\dot{x}_2 &= 4 - 4 \cdot x_2 - 3 \cdot x_1 \ , \\
\dot{x}_3 &= x_4 \ , \\
\dot{x}_4 &= 5 - 10 \cdot (x_4 - x_2) - 5 \cdot (x_3 - x_1) \ .
\end{aligned} \tag{8.51}$$

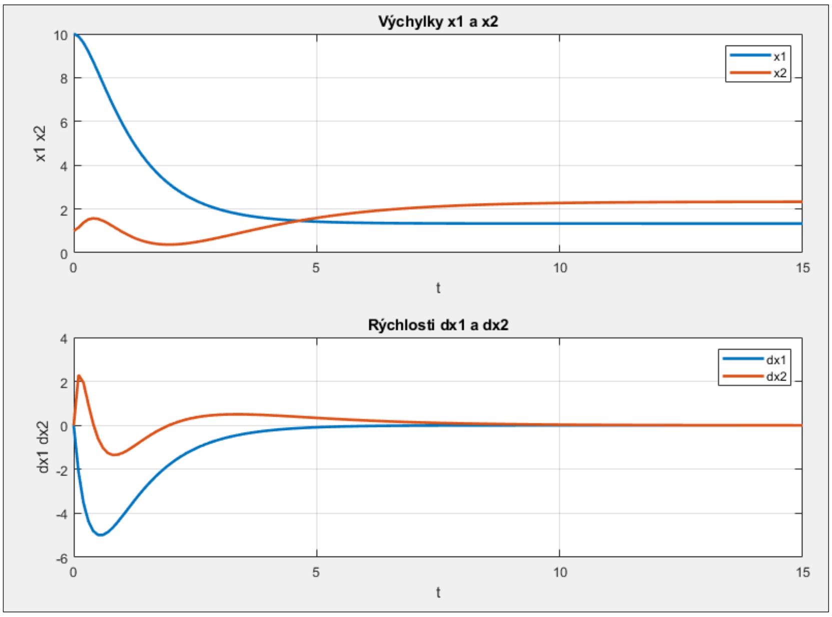
Na základe predchádzajúceho systému v stavovom opise, podobným spôsobom ako v predchádzajúcich príkladoch, zadefinujeme funkciu riešiča v **Matlabe**.

```
function dy=fun2(t, x)

      dy=zeros(4,1);
      dy(1)=x(2);
      dy(2)=4-4*x(2)-3*x(1);
      dy(3)=x(4);
      dy(4)=5-10*(x(4)-x(2))-5*(x(3)-x(1));

end
```

Napokon sústavu diferenciálnych rovníc podľa zadania, pre ktorú sme odvodili systém v **stavovom opise**, budeme riešiť na základe nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
tsim=15;
t=0;
dt=0.1;

%Časový vektor
t=[0:dt:tsim];

%Vektor počiatočných podmienok
x=[10;0;1;0];

%Zavolanie numerickej metódy
[t,y]=ode45(@(t,y)fun2(t,y),t, x);

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,3),'LineWidth',2)
grid on
xlabel('t')
ylabel('x1 x2')
legend('x1','x2')
title('Výchylky x1 a x2')

subplot(2,1,2)
plot(t,y(:,2),'-',t,y(:,4),'LineWidth',2)
grid on
xlabel('t')
ylabel('dx1 dx2')
legend('dx1','dx2')
title('Rýchlosti dx1 a dx2')
```

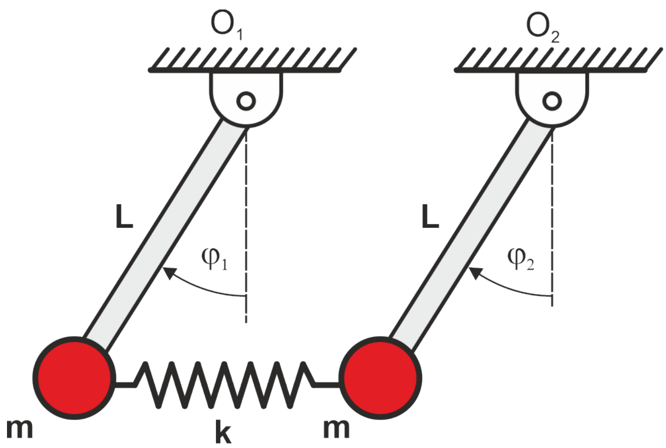
Riešenie odozvy systému sústavy diferenciálnych rovníc, ktoré bolo simulované predchádzajúcim skriptom, je znázornená na Obr. 8.10.



Obr. 8.10. Riešenie sústavy diferenciálnych rovníc

Príklad č. 8.9.

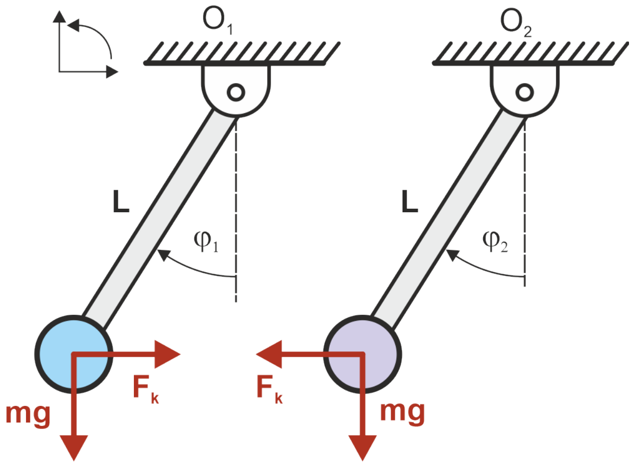
Dve kyvadlá rovnakej dĺžky $\mathbf{L = 1\,m}$ a hmotnosti $\mathbf{m}$ sú pripojené k základu vo vzdialenosti $\mathbf{l_1 = 0.5\,m}$ a previazané pružinou s konštantou tuhosti $\mathbf{k = 2000\,N.m^{-1}}$ podľa Obr. 8.11. Ak vieme, že polomery guličiek majú polomer $\mathbf{r = 0.05\,m}$ a sú vyrobené z materiálu známej hustoty $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{7800\,kg.m^{-3}}$, vytvorte animáciu kmitania takejto sústavy kyvadiel, po počiatočnom vychýlení kyvadiel o uhly $\boldsymbol{\varphi_{10}} = \mathbf{-15°}$ a $\boldsymbol{\varphi_{20}} = \mathbf{25°}$. Na riešenie odozvy systému využite numerickú metódu **Runge-Kutta 4. rádu** a riešte odozvu pre uvažovaný čas simulácie $\mathbf{t_{sim} = 5\,s}$ s krokom $\mathbf{dt = 0.01\,s}$.



Obr. 8.11. Systém dvoch spriahnutých kyvadiel spojených pružinou

Riešenie:

Systém kyvadiel zobrazených na Obr. 8.11 uvoľníme nakreslením obrazca podľa Obr. 8.12.



Obr. 8.12. Uvoľnený systém dvoch kyvadiel

Potom pre kyvadlá môžeme napísať tieto dve diferenciálne rovnice, ktoré boli odvodené zvlášť pre jednotlivé hmoty kyvadielok na základe **II. Newtonovho zákona**

$$\begin{aligned} I \cdot \ddot{\varphi}_1 &= m \cdot L^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 = -m \cdot g \cdot L \cdot \sin\varphi_1 - F_k \cdot L \cdot \cos\varphi_1 \ , \\ I \cdot \ddot{\varphi}_2 &= m \cdot L^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = -m \cdot g \cdot L \cdot \sin\varphi_2 + F_k \cdot L \cdot \cos\varphi_2 \ . \end{aligned} \qquad (8.52)$$

Poznamenajme, že $\mathbf{F_k}$ je **sila v pružine**, ktorá pôsobí medzi dvoma pohybujúcimi sa bodmi kyvadiel. Pre túto silu v pružine musí platiť tento vzťah

$$F_k = k \cdot (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \cdot L \ , \qquad (8.53)$$

ktorý dosadíme do predchádzajúceho systému diferenciálnych rovníc a dostávame

$$\begin{aligned} m \cdot L^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 &= -m \cdot g \cdot L \cdot \sin\varphi_1 - k \cdot L^2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \ , \\ m \cdot L^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 &= -m \cdot g \cdot L \cdot \sin\varphi_2 + k \cdot L^2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \ . \end{aligned} \qquad (8.54)$$

Pre malé uhly $\boldsymbol{\varphi_1, \varphi_2 < 5°}$ môžeme túto **sústavu linearizovať** a dospieť tak k tejto sústave dvoch diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} m \cdot L^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 + m \cdot g \cdot L \cdot \varphi_1 + k \cdot L^2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \ , \\ m \cdot L^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + m \cdot g \cdot L \cdot \varphi_2 - k \cdot L^{2\cdot}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \ . \end{aligned} \qquad (8.55)$$

Predchádzajúci systém prepíšeme do toho **simulinkovského tvaru**

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{-k \cdot L^2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - m \cdot g \cdot L \cdot \varphi_1}{m \cdot L^2} \ ,$$
$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{k \cdot L^2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - m \cdot g \cdot L \cdot \varphi_2}{m \cdot L^2} \tag{8.56}$$

a prevedieme na **stavový opis systému**, voľbou týchto **fázových premenných**

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1 \ , \\ x_2 &= \dot{\varphi}_1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dot{x}_1 \ , \\ x_3 &= \varphi_2 \ , \\ x_4 &= \dot{\varphi}_2 \quad \Longrightarrow \quad x_4 = \dot{x}_3 \ . \end{aligned} \tag{8.57}$$

Potom matematický model v stavovom opise nadobudne tento tvar **stavových rovníc**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= \frac{-k \cdot L^2 \cdot (x_1 - x_3) - m \cdot g \cdot L \cdot x_1}{m \cdot L^2} \ , \\ \dot{x}_3 &= x_4 \ , \\ \dot{x}_4 &= \frac{k \cdot L^2 \cdot (x_1 - x_3) - m \cdot g \cdot L \cdot x_3}{m \cdot L^2} \ . \end{aligned} \tag{8.58}$$

Na základe predchádzajúceho systému v **stavovom opise** možno zadefinovať túto matematickú funkciu riešiča v **Matlabe**.

```
function dy=fun3(t, x, m, L, k, g)

      dy=zeros(4,1);
      dy(1)=x(2);
      dy(2)=-(k*L^2*(x(1)-x(3))+m*g*L*x(1))/m*L^2;
      dy(3)=x(4);
      dy(4)=(k*L^2*(x(1)-x(3))-m*g*L*x(3))/m*L^2;

end
```

Pre vytvorenie animácie kmitania kyvadiel naprogramujeme tento skript v **Matlabe**.

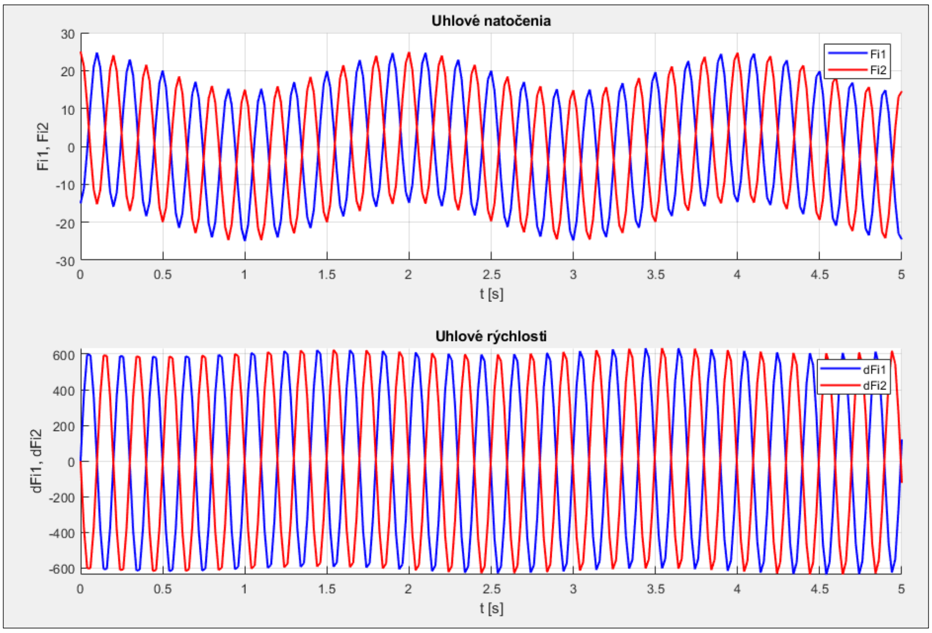
```
%Dve matematické kyvadla spojené pružinou s tuhosťou k

clc
clear;
close all;
```

```
%Vstupné hodnoty
L=1;
r=0.05;
ro=7800;
k=2000;
g=9.81;
m=4*pi*r^3*ro/3;

%Počiatočné podmienky
Fi10=-15;
Fi20=25;
dt=0.02;
tsim=5;
t=[0:dt:tsim];

%Počiatočné podmienky
x0=[Fi10;0;Fi20;0];

%numerické riešenie
[t, x]=ode45(@(t, x)fun3(t, x, m, L, k, g),t,x0);

%Vytvorenie animácie pohybu
figure(1)

for i=1:length(t)
axis([-L-r/2 1+L+r/2 -L-r/2-0.2 0.2])
axis square
hold on
%Vykreslenie ramien
plot([0 L*sin(x(i,1)*pi/180)],[0 -L*cos(x(i,1)*pi/180)],'LineWidth',2)
plot([1 L*sin(x(i,3)*pi/180)+1],[0 -L*cos(x(i,3)*pi/180)],'LineWidth',2)

%Vykreslenie guličky
Circle(L*sin(x(i,1)*pi/180),-L*cos(x(i,1)*pi/180),r, 'r')
Circle(L*sin(x(i,3)*pi/180)+1,-L*cos(x(i,3)*pi/180),r ,'r')
%Vykreslenie pružiny
plot([L*sin(x(i,1)*pi/180) L*sin(x(i,3)*pi/180)+1],[-L*cos(x(i,1)*pi/180) ...
    -L*cos(x(i,3)*pi/180)],'k')

M(i)=getframe;
    if (i<length(t))
       delete(gca);
    end
end

%Vykreslenie priebehov veličín

figure(2)
subplot(2,1,1);
hold on;
plot(t, x(:,1),'b','LineWidth',1.5)
plot(t, x(:,3),'r','LineWidth',1.5);
grid on
xlabel('t [s]');
ylabel('Fi1, Fi2')
legend('Fi1','Fi2')
title('Uhlové natočenia')

subplot(2,1,2);
hold on;
plot(t, x(:,2),'b','LineWidth',1.5)
plot(t, x(:,4),'r','LineWidth',1.5);
grid on
xlabel('t [s]');
ylabel('dFi1, dFi2')
legend('dFi1','dFi2')
```

V skripte bola použitá funkcia na vykreslenie plného kruhu, ktorý predstavuje tvar guličky kyvadielka. Funkcia, ktorá vykresľuje plný kruh je definovaná týmto skriptom.

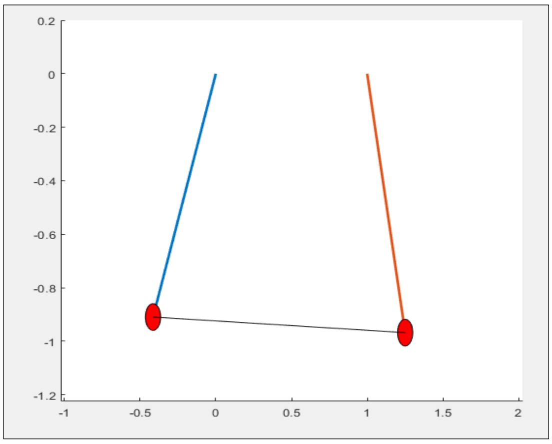
```
function Circle(x, y, r, Color)

    t=[0:pi/40:2*pi];
    x=x+r*cos(t);
    y=y+r*sin(t);
    fill(x, y, Color)

end
```

Riešenie simulácie kmitania kyvadielok pre simulačný čas $\mathbf{t_{sim}} = \mathbf{5\ s}$ s uvažovaným časovým krokom $\mathbf{dt} = \mathbf{0.01\ s}$ je znázornené na Obr. 8.13.



Obr. 8.13. Riešenie odozvy kmitania kyvadiel

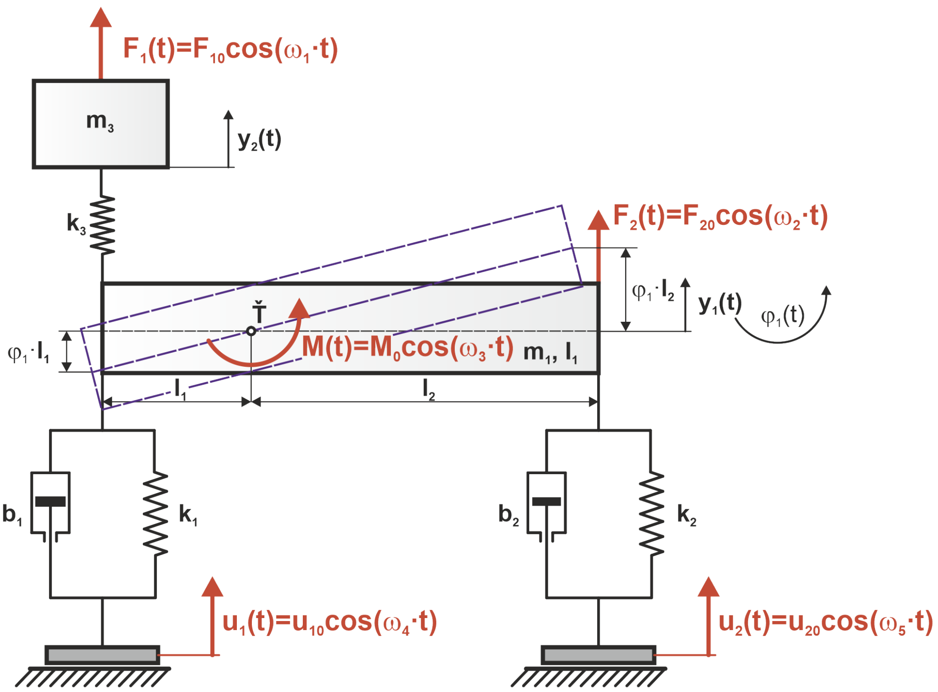
Na ďalšom Obr. 8.14 je znázornenie počiatočnej polohy kyvadiel pred samotnou animáciou pohybu.



Obr. 8.14. Vykreslenie počiatočnej polohy kyvadiel

Príklad č. 8.10.

Predpokladajme kmitajúci mechanický systém zobrazený na Obr. 8.15, ktorého hmota $\mathbf{m_1}$ má polohu ťažiska danú vzdialenosťami $\mathbf{l_1 = 0.5\ m}$, $\mathbf{l_2 = 0.5\ m}$. Systém pozostáva z dvoch hmôt, ktoré sú budené silami $\mathbf{F_1(t) = F_{10} \cdot cos(\omega_1 \cdot t)}$, $\mathbf{F_2(t) = F_{20} \cdot cos(\omega_2 \cdot t)}$ a krútiacim momentom $\mathbf{M(t) = M_0 \cdot cos(\omega_3 \cdot t)}$, ktorý pôsobí v ťažisku telesa. Okrem vonkajších síl a momentov je systém budený v spodnej časti kinematickým budením $\mathbf{u_1(t) = u_{10} \cdot cos(\omega_4 \cdot t)}$ a $\mathbf{u_2(t) = u_{20} \cdot cos(\omega_5 \cdot t)}$.



Obr. 8.15. Kmitajúci mechanický systém

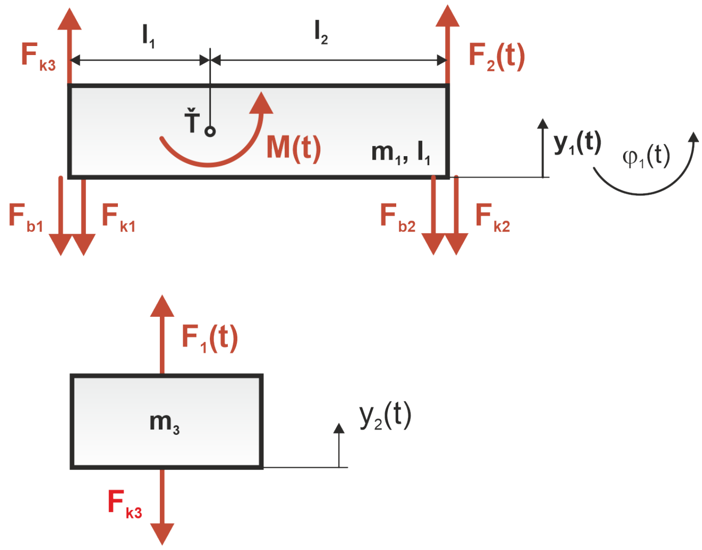
Odvoďte stavový opis tohto systému, ak predpokladáme, že poznáme hmotnosti a momenty zotrvačnosti telies $\mathbf{m_1 = 100\ kg}$, $\mathbf{I_1 = 1000\ kg.m^2}$, $\mathbf{m_3 = 30\ kg}$, ďalej tuhosti systému $\mathbf{k_1 = 35000\ N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 45000\ N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_3 = 20000\ N.m^{-1}}$ a takisto konštanty tlmenia $\mathbf{b_1 = 1000\ N.s.m^{-1}}$, $\mathbf{b_2 = 1500\ N.s.m^{-1}}$.

Ako budiace parametre budeme uvažovať tieto vstupné hodnoty $\mathbf{F_{10} = 100\ N}$, $\mathbf{f_1 = 5\ Hz}$, $\mathbf{F_{20} = 200\ N}$, $\mathbf{f_2 = 6\ Hz}$, $\mathbf{M_0 = 10\ N.m}$, $\mathbf{f_3 = 2\ Hz}$, $\mathbf{u_{10} = 0.05\ m}$, $\mathbf{f_4 = 10\ Hz}$, $\mathbf{u_{20} = 0.05\ m}$, $\mathbf{f_5 = 8\ Hz}$.

Riešte odozvu tohto systému zapísaného v stavovom opise napísaním skriptu **Matlabu** pre uvažovaný simulačný čas $\mathbf{t_{sim} = 10\ s}$.

Riešenie:

Systém uvoľníme nahradením jeho komponentov zložkovými silami, ako je to znázornené na Obr. 8.16, kde hmota $\mathbf{m_1}$ koná všeobecný pohyb a hmota $\mathbf{m_3}$ koná čisto translačný pohyb.



Obr. 8.16. Uvoľnenie kmitajúcich hmôt

Predtým, než pristúpime k tvorbe matematického modelu, napíšeme v prvom rade tieto **zložkové rovnice** daného mechanického modelu

$$
\begin{aligned}
F_{k1} &= k_1 \cdot (y_1 - \varphi_1 \cdot l_1 - u_1) \;, \\
F_{b1} &= b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot l_1 - \dot{u}_1) \;, \\
F_{k2} &= k_2 \cdot (y_1 + \varphi_1 \cdot l_2 - u_2) \;, \\
F_{b2} &= b_2 \cdot (\dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 \cdot l_2 - \dot{u}_2) \;, \\
F_{k3} &= k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1) \;.
\end{aligned} \tag{8.59}
$$

Aplikovaním **II. Newtonovho zákona** pohybu pre jednotlivé hmoty systému, platia tieto tri diferenciálne rovnice

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= F_2(t) - F_{k1} - F_{b1} - F_{k2} - F_{b2} + F_{k3} \;, \\
I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M(t) + (F_{k1} + F_{b1} - F_{k3}) \cdot l_1 - \big(F_{k2} + F_{b2} - F_2(t)\big) \cdot l_2 \;, \\
m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= F_1(t) - F_{k3} \;.
\end{aligned} \tag{8.60}
$$

Dosadením zložkových síl do predchádzajúceho systému diferenciálnych rovníc, dostávame túto sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot \ddot{y}_1 = F_2(t) - k_1 \cdot (y_1 - \varphi_1 \cdot l_1 - u_1) - b_1(\dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot l_1 - \dot{u}_1) - k_2 \cdot (y_1 + \varphi_1 \cdot l_2 - u_2) \\
- b_2(\dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 \cdot l_2 - \dot{u}_2) + k_3(y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1) \;,
\end{aligned} \tag{8.61}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M(t) + \big(&k_1 \cdot (y_1 - \varphi_1 \cdot l_1 - u_1) + b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot l_1 - \dot{u}_1) - k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1)\big) \\
&\cdot l_1 - \big(k_2 \cdot (y_1 + \varphi_1 \cdot l_2 - u_2) + b_2 \cdot (\dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 \cdot l_2 - \dot{u}_2) - F_2(t)\big) \cdot l_2 \ , \\
m_2 \cdot \ddot{y}_2 = F_1(t) - k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1) \ .&
\end{aligned}
$$

Predchádzajúci matematický model možno prepísať do tohto **simulinkovského tvaru diferenciálnych rovníc**

$$
\begin{aligned}
\ddot{y}_1 &= \frac{1}{m_1}[F_2(t) - k_1 \cdot (y_1 - \varphi_1 \cdot l_1 - u_1) - b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot l_1 - \dot{u}_1) - k_2 \cdot (y_1 + \varphi_1 \cdot l_2 - u_2) \\
&\qquad - b_2 \cdot (\dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 \cdot l_2 - \dot{u}_2) + k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1)] \ , \\
\ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{I_1}\big[M(t) + \big(k_1 \cdot (y_1 - \varphi_1 \cdot l_1 - u_1) + b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot l_1 - \dot{u}_1) - k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1)\big) \\
&\qquad \cdot l_1 - \big(k_2 \cdot (y_1 + \varphi_1 \cdot l_2 - u_2) + b_2 \cdot (\dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 \cdot l_2 - \dot{u}_2) - F_2(t)\big) \cdot l_2\big] \ , \\
\ddot{y}_2 &= \frac{1}{m_2}[F_1(t) - k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1)] \ .
\end{aligned}
\tag{8.62}
$$

Predpokladajme, že vstupný vektor $\mathbf{F(t)}$ a výstupný vektor $\mathbf{y(t)}$ majú tieto nadefinované poradie premenných

$$
F^T(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ M(t) \\ u_1(t) \\ \dot{u}_1(t) \\ u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad a \quad y^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \ .
\tag{8.63}
$$

Potom úpravou pôvodného systému diferenciálnych rovníc a usporiadaním výrazov známych a neznámych premenných po oboch stranách rovníc, dostávame

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot \ddot{y}_1 + k_1 \cdot (y_1 - \varphi_1 \cdot l_1) + b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot l_1) &+ k_2 \cdot (y_1 + \varphi_1 \cdot l_2) + b_2 \\
&\cdot (\dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 \cdot l_2) - k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1) \\
&= F_2(t) + k_1 \cdot u_1 + b_1 \cdot \dot{u}_1 + k_2 \cdot u_2 + b_2 \cdot \dot{u}_2 \ , \\
I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - \big(k_1 \cdot (y_1 - \varphi_1 \cdot l_1) + b_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot l_1) &- k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1)\big) \cdot l_1 \\
&+ \big(k_2 \cdot (y_1 + \varphi_1 \cdot l_2) + b_2 \cdot (\dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 \cdot l_2)\big) \cdot l_2 \\
&= M(t) - k_1 \cdot l_1 \cdot u_1 - b_1 \cdot l_1 \cdot \dot{u}_1 + k_2 \cdot l_2 \cdot u_2 + b_2 \cdot l_2 \cdot \dot{u}_2 + F_2(t) \\
&\cdot l_2 \ , \\
m_2 \cdot \ddot{y}_2 + k_3 \cdot (y_2 - y_1 + \varphi_1 \cdot l_1) = F_1(t) \ .&
\end{aligned}
\tag{8.64}
$$

Zapíšme tento systém diferenciálnych rovníc do **maticového tvaru**

$$\mathbf{M}\ddot{y} + \mathbf{D}\dot{y} + \mathbf{K}y = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_1 \cdot l_1 + b_2 \cdot l_2 & 0 \\ -b_1 \cdot l_1 + b_2 \cdot l_2 & b_1 \cdot l_1^2 + b_2 \cdot l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2 - k_3 \cdot l_1 & -k_3 \\ -k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2 - k_3 \cdot l_1 & k_1 \cdot l_1^2 + k_2 \cdot l_2^2 + k_3 \cdot l_1^2 & k_3 \cdot l_1 \\ -k_3 & k_3 l_1 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & k_1 & b_1 & k_2 & b_2 \\ 0 & l_2 & 1 & -k_1 \cdot l_1 & -b_1 \cdot l_1 & k_2 \cdot l_2 & b_2 \cdot l_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ M(t) \\ u_1(t) \\ \dot{u}_1(t) \\ u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (8.65)$$

To znamená, že hľadané matice systému **M**, **D**, **K** a **S** nadobudnú tieto tvary

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_1 \cdot l_1 + b_2 \cdot l_2 & 0 \\ -b_1 \cdot l_1 + b_2 \cdot l_2 & b_1 \cdot l_1^2 + b_2 \cdot l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2 - k_3 \cdot l_1 & -k_3 \\ -k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2 - k_3 \cdot l_1 & k_1 \cdot l_1^2 + k_2 \cdot l_2^2 + k_3 \cdot l_1^2 & k_3 \cdot l_1 \\ -k_3 & k_3 \cdot l_1 & k_3 \end{bmatrix}, \quad (8.66)$$

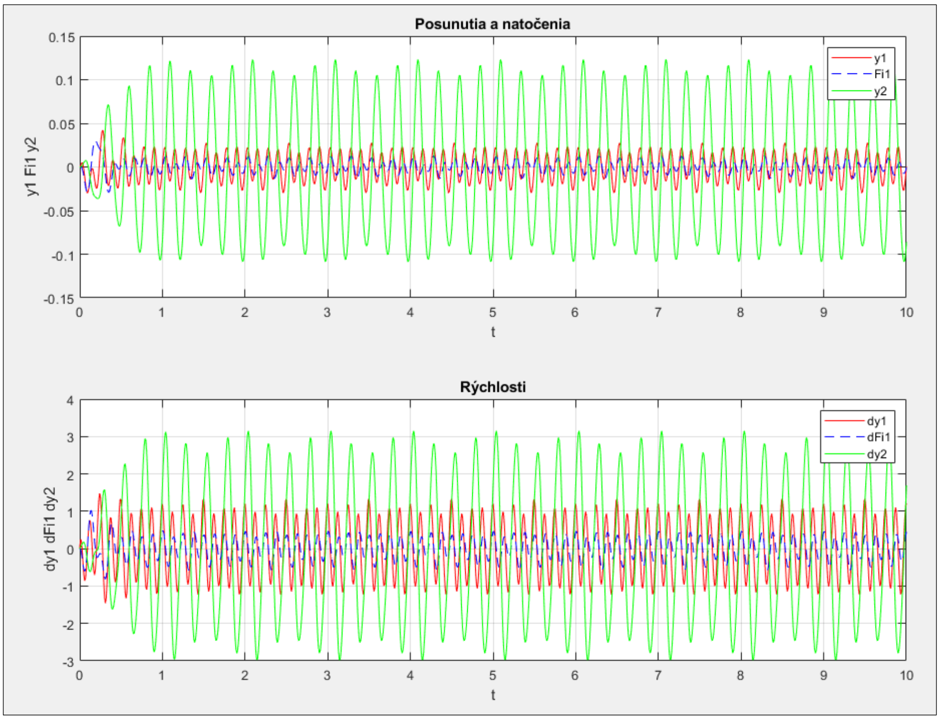
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & k_1 & b_1 & k_2 & b_2 \\ 0 & l_2 & 1 & -k_1 \cdot l_1 & -b_1 \cdot l_1 & k_2 \cdot l_2 & b_2 \cdot l_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Simuláciu odozvy kmitajúceho systému budeme riešiť napísaním nasledujúceho skriptu **Matlabu**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
l1=0.5; l2=0.5;
m1=100; I1=100; m2=30;
k1=35000; k2=45000; k3=20000;
b1=1000; b2=1500;

%Budiace parametre systému
F10=100; f1=5; omega1=2*pi*f1;
F20=200; f2=6; omega2=2*pi*f2;
M0=10; f3=3; omega3=2*pi*f3;
u10=0.05; f4=10; omega4=2*pi*4;
u20=0.05; f5=8; omega5=2*pi*f5;
```

```
%Čas simulácie
tsim=10;
dt=0.01;
t=[0:dt:tsim];

%Vstupné budiace funkcie
F1=F10*cos(omega1*t);
F2=F20*cos(omega2*t);
M=M0*cos(omega3*t);
u1=u10*cos(omega4*t);
du1=-u10*omega4*sin(omega4*t);
u2=u20*cos(omega5*t);
du2=-u20*omega5*sin(omega5*t);

%Vektor vstupu
F=[F1;F2;M;u1;du1;u2;du2];
%Určenie matíc stavového opisu
M=diag([m1 I1 m2]);
n=length(M);
p=size(F,1); %počet vstupov;

%Matice systému
K=[k1+k2+k3 -k1*l1+k2*l2-k3*l1 -k3; ...
    -k1*l1+k2*l2-k3*l1 k1*l1^2+k2*l2^2+k3*l1^2 k3*l1; ...
    -k3 k3*l1 k3];
D=[b1+b2 -b1*l1+b2*l2 0; ...
    -b1*l1+b2*l2 b1*l1^2+b2*l2^2 0; ...
    0 0 0];
S=[0 1 0 k1 b1 k2 b2; ...
    0 l2 1 -k1*l1 -b1*l1 k2*l2 b2*l2; ...
    1 0 0 0 0 0 0];

%Matice stavového opisu
A=[zeros(n) eye(n); -inv(M)*K -inv(M)*D];
eig(A)
B=[zeros(n, p); inv(M)*S];
C=eye(2*n);
D=zeros(2*n, p);

sys=ss(A,B,C,D);
y=lsim(sys, F, t);

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,1),'r', t, y(:,2),'b--',t,y(:,3),'g');
xlabel('t'); ylabel('y1 Fi1 y2');
grid on
legend('y1','Fi1','y2'); title('Posunutia a natočenia')

subplot(2,1,2)
plot(t,y(:,4),'r', t, y(:,5),'b--',t,y(:,6),'g');
xlabel('t'); ylabel('dy1 dFi1 dy2');
grid on
legend('dy1','dFi1','dy2'); title('Rýchlosti')
```

Potom riešenie simulácie systému s využitím predchádzajúceho skriptu v **Matlabe**, v ktorom sme riešili odozvu kmitajúceho systému výpočtom **matíc stavového opisu** a následne počítali odozvu systému použitím príkazu **state-space**, je znázornené na ďalšom Obr. 8.17.

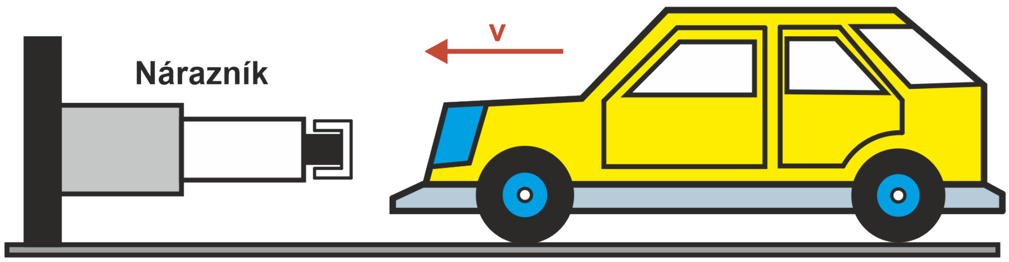


Obr. 8.17. Riešenie odozvy simulácie kmitajúceho systému

Príklad č. 8.11.

Bezpečnostný **nárazník**, ktorý je umiestnený na konci pretekárskej dráhy a slúži na zastavenie neovládateľného auta, je znázornený na Obr. 8.18. **Nárazník** je skonštruovaný takým spôsobom, že aplikovaná sila **F**, ktorá naň pôsobí je zároveň funkciou rýchlosti **v** a posunutia **x** čelnej hrany nárazníka. Táto sila je definovaná funkciou $\mathbf{F = K \cdot v^3 \cdot (x+1)^3}$, kde $\mathbf{K = 35\, kg.s.m^{-5}}$ je konštanta.

Ak predpokladáme, že auto hmotnosti $\mathbf{m = 1800\, kg}$ narazí do nárazníka rýchlosťou $\mathbf{v = 60\, km.h^{-1}}$, vypočítajte a zobrazte rýchlosť auta ako funkciu jeho polohy na intervale $\mathbf{0 \le x \le 3\, m}$.



Obr. 8.18. Bezpečnostný nárazník

Riešenie:

Tvrdenie, že auto narazí do nárazníka môžeme opísať **II. Newtonovým zákonom**

$$m \cdot a = -K \cdot v^3 \cdot (x+1)^3 \ , \qquad (8.67)$$

potom z tejto rovnice možno vypočítať zrýchlenie **a**, ktorým auto spomaľuje

$$a = -\frac{K \cdot v^3 \cdot (x+1)^3}{m} \; . \tag{8.68}$$

Rýchlosť ako funkciu polohy $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} \Rightarrow \mathbf{dt} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{v}}$ vypočítame dosadením do rovnice, ktorá platí pre zrýchlenie **a**. Teda platí, že

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v \cdot dv}{dx} \Rightarrow a \cdot dx = v \cdot dv \; , \tag{8.69}$$

z tejto rovnice potom vyplýva, že

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{Kv^3(x+1)^3}{vm} = -\frac{Kv^2(x+1)^3}{m} \; . \tag{8.70}$$

Túto diferenciálnu rovnicu budeme ďalej riešiť numerickou metódou **Runge-Kutta 4. rádu**, pre interval polohy automobilu $\mathbf{0 \leq x \leq 3}$, s uvažovanou počiatočnou podmienkou rýchlosti $\mathbf{v(0) = 60\ km.h^{-1}}$ a polohou automobilu $\mathbf{x(0) = 0}$. Funkcia riešiča, ktorú použijeme ako vstupnú pre funkciu metódy **Runge-Kutta**, je definovaná týmto skriptom v **Matlabe**.

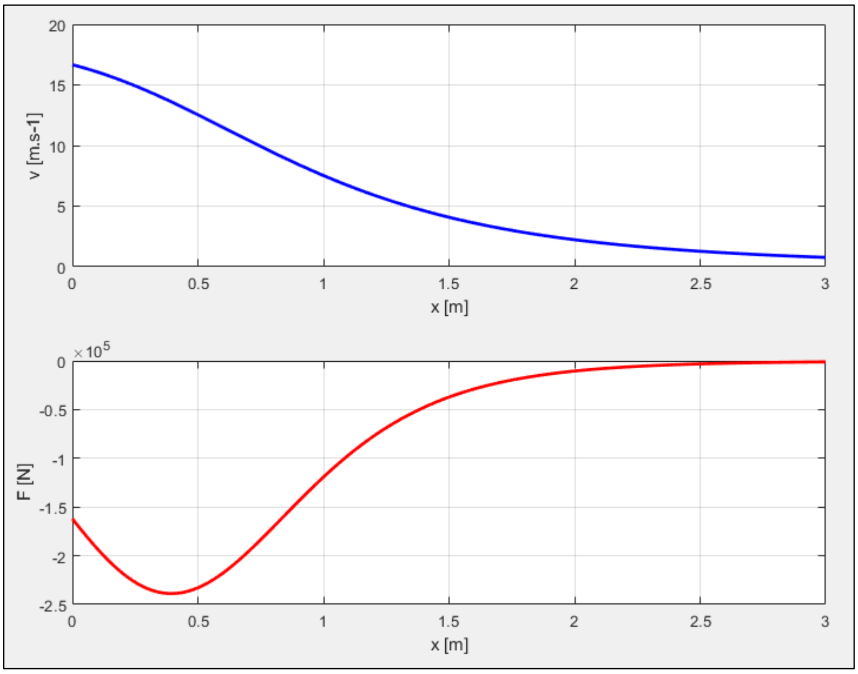
```
function dvdx=naraznik(x, v)
    global k m
    dvdx=-(k*v^2*(x+1)^3)/m;
end
```

Numerické riešenie diferenciálnej rovnice systému, ktorý definuje pohybu automobilu pri náraze do nárazníka, vypočítame nasledujúcim skriptom v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
global k m
k=35;
m=1800;
v=60;

%Definovanie intervalu polohy
x=[0:0.02:3];
```

```
%Počiatočná rýchlosť pohybu
v0=v*1000/3600;

%Numerické riešenie odozvy
[x v]=ode45('naraznik',x,v0);
F=-k*v.^3.*(x+1).^3;

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(x,v,'b','LineWidth',2)
grid on
xlabel('x [m]')
ylabel('v [m.s-1]')

subplot(2,1,2)
plot(x,F,'r','LineWidth',2)
grid on
xlabel('x [m]')
ylabel('F [N]')
```

Potom riešenie simulácie systému **nárazníka** je znázornené v podobe priebehov rýchlosti **v** a funkcie sily **F**, ktorá pôsobí na nárazník na Obr. 8.19.



Obr. 8.19. Riešenie rýchlosti a sily pri náraze auta do nárazníka

Príklad č. 8.12.

Strela je vystrelená z dela rýchlosťou $\mathbf{v_0} = \mathbf{300\ m.s^{-1}}$ pod známym uhlom $\theta = \mathbf{65°}$ z počiatočného polohového bodu $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0})$=$(\mathbf{3000}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Projektil je zamierený priamo na sever. Pri jeho pohybe naň pôsobí silný bočný vietor zo západu, ktorý má rýchlosť $\mathbf{v_x} = \mathbf{30\ m.s^{-1}}$.

Určte a zobrazte **trajektóriu** projektilu do momentu, kedy zasiahne zem pri pôsobení bočného vetra a takisto pri jeho lete za ideálnych podmienok bez pôsobenia tohto nepriaznivého vetra.

Riešenie:

Ak súradnicový systém nastavíme tak, že osi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ budú smerovať na **východ** resp. **sever**, potom pohyb projektilu môžeme analyzovať uvažovaním pohybu vo vertikálnom smere osi $\mathbf{z}$ a v dvoch horizontálnych osiach $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Keďže projektil bol vystrelený priamo na sever, jeho počiatočnú rýchlosť možno rozložiť do dvoch zložiek, a to do smeru $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \cos\theta \quad \text{a} \quad v_{0z} = v_0 \cdot \sin\theta \ . \tag{8.71}$$

Pripomeňme, že z dôvodu bočného vetra sa projektil pohybuje konštantnou rýchlosťou v opačnom smere osi $\mathbf{x}$

$$v_x = 30 \text{ m.s}^{-1} \ . \tag{8.72}$$

Počiatočná poloha strely v súradnicovom systéme $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0})$ je daná bodom $(\mathbf{3000}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Vo vertikálnom smere je rýchlosť a poloha strely daná týmito kinematickými rovnicami

$$v_z = v_{0z} - g \cdot t \quad \text{a} \quad z = z_0 + v_{0z} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \ . \tag{8.73}$$

Čas, ktorý je potrebný pri lete projektilu na dosiahnutie najvyššieho bodu t. j. bodu, v ktorom rýchlosť $\mathbf{v_z} = \mathbf{0}$ je daný touto rovnicou

$$t_{max} = \frac{v_{0z}}{g} \ . \tag{8.74}$$

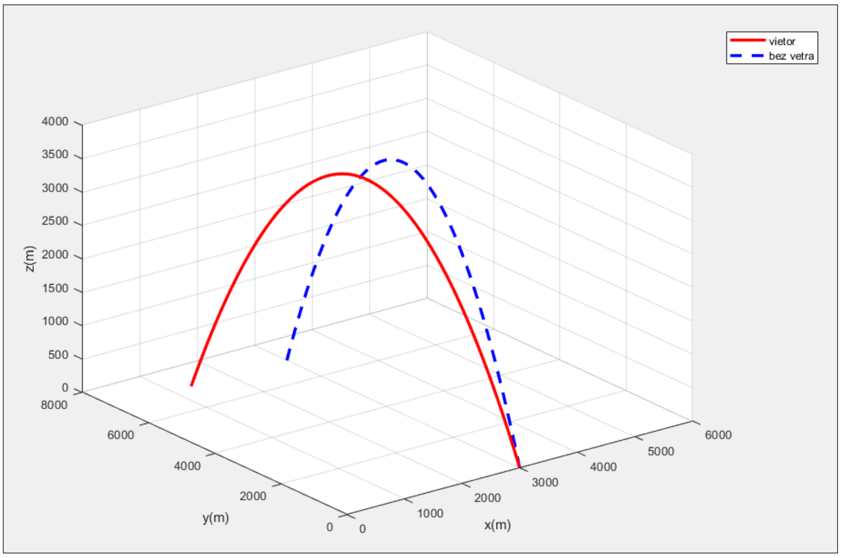
Celkový čas letu môžeme vypočítať ako dvojnásobok tohto času $\mathbf{t_{tot}} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{t_{max}}$. Rýchlosť v horizontálnom smere je konštantná v oboch smeroch $\mathbf{x}$ aj $\mathbf{y}$, a poloha projektilu je daná týmito rovnicami

$$x = x_0 + v_x \cdot t \quad \text{a} \quad y = y_0 + v_{0y} \cdot t \ . \tag{8.75}$$

Let projektilu budeme riešiť naprogramovaním odvodených rovníc v nasledujúcom skripte **Matlabu**.

```
clc
close all
clear

%Vstupné parametre systému
v0=300;
g=9.81;
theta=65;
vx=-30; %Rýchlosť vetra

%Počiatočné podmienky
v0y=v0*cosd(theta);
v0z=v0*sind(theta);
x0=3000;y0=0;z0=0;

%Čas letu
t=2*v0z/g;

%Čas stúpania
tp=t/2;

%Výpočet polohy projektilu
tplot=linspace(0,t,100);
x=x0+vx*tplot;
y=y0+v0y*tplot;
z=z0+v0z*tplot-0.5*g*tplot.^2;

xnowind(1:length(y))=x0; %Bez bočného vetra

figure(1)
plot3(x, y, z, 'r-', xnowind, y, z, 'b--','LineWidth',2)
grid on
axis([0 6000 0 8000 0 4000])
xlabel('x(m)');
ylabel('y(m)');
zlabel('z(m)');
legend('vietor', 'bez vetra')
```

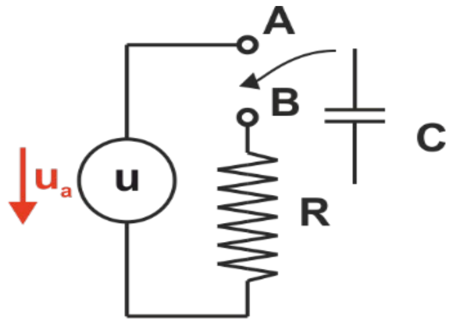
Potom vypočítaný priebeh **trajektórie** pohybu projektilu, ktorý letí v priestore pri pôsobení bočného vetra a v bezveternom prostredí, je znázornený na ďalšom Obr. 8.20.



Obr. 8.20. Trajektória letu strely

Príklad č. 8.13.

Uvažujme **elektrický kondenzátor** neznámej kapacity **C**. Aby bolo možné určiť hodnotu kapacity tohto kondenzátora, tento kondenzátor bol pripojený do elektrického obvodu podľa nasledujúceho Obr. 8.21.



Obr. 8.21. RC obvod

Konektor bol pripojený najskôr k bodu **B**, čím sa kondenzátor nabil. Potom bol konektor pripojený k bodu **A**, čím sa kondenzátor začal vybíjať cez odpor s hodnotou $\mathbf{R = 2000}\ \Omega$. Zatiaľ čo sa kondenzátor vybíjal, merala sa hodnota zmeny napätia každú $\mathbf{1\ s}$ počas intervalu času $\mathbf{t = 10\ s}$.

Namerané hodnoty napätia sú znázornené v tabuľke. Zobrazte priebeh napätia ako funkcie času a určite kapacitu kondenzátora **aproximáciou** pomocou **exponenciálnej krivky**.

Tabuľka 8.6. Namerané hodnoty napätia pri vybíjaní kondenzátora

t (s)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
U (V)	9.4	7.31	5.51	3.55	2.81	2.04	1.26	0.97	0.74	0.58

Riešenie:

Pri vybíjaní kondenzátora cez rezistor **R** sa napätie na kondenzátore mení podľa tejto exponenciálnej funkcie

$$u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} , \tag{8.76}$$

kde $\mathbf{u_0}$ je počiatočná hodnota napätia, **R** je elektrický odpor a **C** je kapacita kondenzátora. Túto exponenciálnu funkciu môžeme napísať v tvare lineárnej funkcie, ak predchádzajúcu rovnicu **zlogaritmujeme**, tzn. že dostávame

$$\ln u = \ln u_0 - \frac{1}{RC} t \ . \tag{8.77}$$

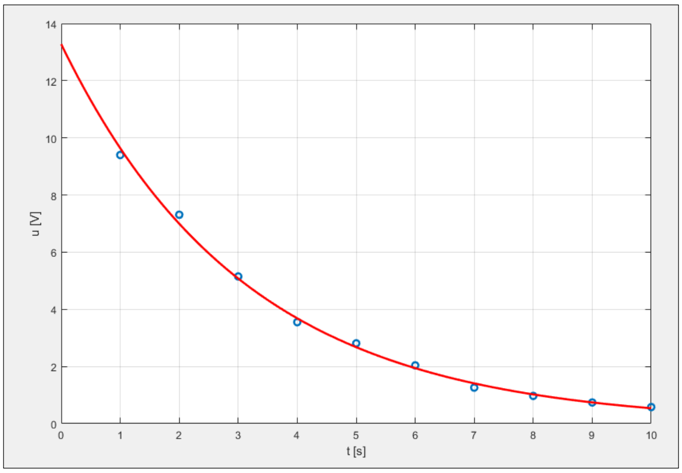
Túto rovnicu, ktorá má tvar lineárnej priamky $\mathbf{y} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$, možno aproximovať množinou bodov, použitím funkcie **polyfit(x, y, 1)**, kde čas **t** predstavuje nezávislú premennú **x** a **ln u** predstavuje závislú premennú **y**. Potom vypočítané koeficienty **m** a **b** aproximovanej krivky, môžeme použiť na výpočet neznámej kapacity kondenzátora **C** a počiatočnej hodnoty napätia $\mathbf{u_0}$, pre ktoré musí platiť, že

$$C = -\frac{1}{R \cdot m} \qquad \text{a} \qquad u_0 = e^b \ . \tag{8.78}$$

Nasledujúci skript napísaný v **Matlabe** vypočíta funkciu, ktorá aproximuje nameranú množinu dát a určí hľadanú kapacitu kondenzátora **C** ako aj počiatočné napätie $\mathbf{u_0}$, ktoré bolo namerané na kondenzátore.

```
clc
close all
clear

%Vstupné parametre systému
R=2000;
t=1:10;
u=[9.4 7.31 5.15 3.55 2.81 2.04 1.26 0.97 0.74 0.58];
p=polyfit(t, log(u),1);

%Výpočet hodnôt C a u0
C=-1/(R*p(1));
u0=exp(p(2));
tplot=0:0.1:10;
uplot=u0*exp(-tplot./(R*C));

figure(1)
plot(t,u,'o',tplot,uplot,'r-','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t [s]')
ylabel('u [V]')
```

Priebeh zmeny napätia meraného na kondenzátore počas meraného intervalu času **t**, je znázornený vo podobe aproximovanej krivky na Obr. 8.22.



Obr. 8.22. Aproximácia množiny nameraných hodnôt napätia

Príklad č. 8.14. Let modelu rakety

Let modelu rakety hmotnosti $\mathbf{m = 0.05\ kg}$ možno opísať nasledovným spôsobom. Počas prvých $\mathbf{t_e = 0.15\ s}$ je raketa poháňaná smerom nahor motorom, ktorý vyvíja silu $\mathbf{F_E = 16\ N}$. Raketa potom letí, zatiaľ čo je spomaľovaná pôsobením gravitačnej sily.

Potom ako dosiahne maximálny vrchol, začne raketa postupne padať naspäť. V okamihu, keď jej návratová rýchlosť dosiahne $\mathbf{v = 20\ m.s^{-1}}$, sa otvorí padák a raketa pokračuje pohybom smerom nadol s konštantnou rýchlosťou $\mathbf{v_p = 20\ m.s^{-1}}$, až do okamihu kým nedopadne na zem.

Napíšte program v **Matlabe**, ktorý vypočíta a zobrazí rýchlosť a polohu rakety vo vertikálnom smere v závislosti od času $\mathbf{t}$.

Riešenie:

Raketu môžeme predpokladať ako hmotný bod, ktorý sa pohybuje po priamke vo vertikálnom smere. Pri pohybe s konštantným zrýchlením pozdĺž priamky je **rýchlosť** a **poloha** rakety definovaná týmito funkciami závislými na čase

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad \text{a} \qquad s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \ , \tag{8.79}$$

kde $\mathbf{v(t)}$ je rýchlosť rakety a $\mathbf{s(t)}$ jej poloha.

V rámci výpočtu rozdelíme pohyb rakety na tri časti. Každý segment v programe budeme počítať prostredníctvom cyklu **while loop**.

Časť letu č. 1: Prvých $\mathbf{t = 0.15\ s}$ kedy je motor rakety zapnutý. Počas tohto času sa raketa pohybuje smerom nahor s konštantným zrýchlením $\mathbf{a}$. Zrýchlenie môžeme určiť zobrazením diagramu uvoľnenej rakety, na ktorú pôsobí ťahová sila od motora $\mathbf{F_E}$ a tiažová sila $\mathbf{G}$. Pri pohybe rakety platí **II. Newtonov zákon**

$$m \cdot a = \sum F \ = F_E - G = F_E - m \cdot g \ . \tag{8.80}$$

Vyjadrením zrýchlenia **a** z predchádzajúcej rovnice dostávame

$$a = \frac{F_E - m \cdot g}{m} \ . \tag{8.81}$$

Rýchlosť rakety a poloha jej vystrelenia sú funkcie závislé od času $\mathbf{t}$ a je ich možné opísať týmito rovnicami

$$v(t) = 0 + a \cdot t \qquad a \qquad h(t) = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \ , \tag{8.82}$$

kde pre počiatočnú rýchlosť $\mathbf{v_0}$ a počiatočnú polohu $\mathbf{s_0}$ rakety uvažujeme nulové hodnoty.

V programe **časť letu č. 1** začína časom $\mathbf{t = 0}$ a končí časom $\mathbf{t < 0.15\ s}$. Potom čas, rýchlosť a polohu v tejto časti letu budeme označovať ako $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{v_1}$ a $\mathbf{h_1}$.

Pohyb rakety od okamihu vypnutia motora do bodu vystrelenia padáku popisujeme ako **časť letu č. 2**. V tejto časti sa raketa pohybuje konštantným spomalením so zrýchlením $\mathbf{g}$. **Rýchlosť** a **poloha** sú definované týmito rovnicami

$$v(t) = v_1 - g \cdot (t - t_1) \qquad a \qquad h(t) = h_1 + v_1 \cdot (t - t_1) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_1)^2 \ . \tag{8.83}$$

V tento časti pohyb rakety popisuje až do bodu, kedy raketa nadobudne pádovú rýchlosť $\mathbf{v_p = -20\ m.s^{-1}}$ (opačného smeru z toho dôvodu, že raketa padá nadol). **Čas** a **poloha** na konci pohybu v tejto časti označíme ako $\mathbf{t_2}$ a $\mathbf{h_2}$.

Pohyb rakety od okamihu vypustenia padáku do okamihu, keď raketa dopadne na zemský povrch opíšeme **časťou letu č. 3**. V tomto segmente sa raketa pohybuje konštantnou rýchlosťou (s nulovým zrýchlení). **Poloha vo vertikálnom smere** je daná touto funkciou času

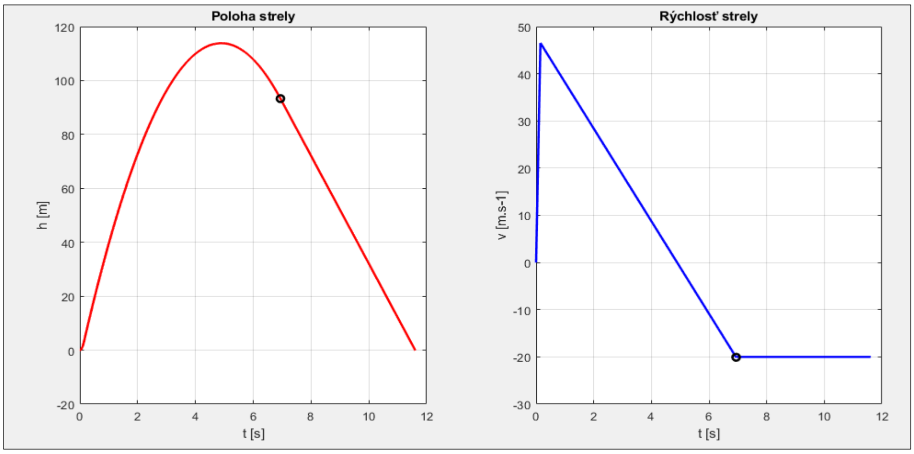
$$h(t) = h_2 + v_p \cdot (t - t_2) \ , \tag{8.84}$$

kde $\mathbf{v_p}$ je konštantná rýchlosť rakety po otvorení padáku. V tomto segmente cyklovanie pokračuje až do okamihu, keď poloha rakety sa rovná nule. Nasledujúci skript napísaný v **Matlabe**, rieši pohyb rakety, ktorý sme opísali predchádzajúcimi tromi časťami letu.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
m=0.05;
g=9.81;
tE=0.15;
FE=16;
vp=-20;
dt=0.01;

%Počiatočné podmienky
n=1;
t(n)=0;
v(n)=0;
h(n)=0;
```

```
%Časť letu 1.
a1=(FE-m*g)/m;
while(t(n)<tE & n<50000)
    n=n+1;
    t(n)=t(n-1)+dt;
    v(n)=a1*t(n);
    h(n)=a1*t(n)^2/2;
end

v1=v(n); h1=h(n); t1=t(n);

%Časť letu 2.
while(v(n)>=vp & n<50000)
    n=n+1;
    t(n)=t(n-1)+dt;
    v(n)=v1-g*(t(n)-t1);
    h(n)=h1+v1*(t(n)-t1)-g*(t(n)-t1)^2/2;
end

v2=v(n); h2=h(n); t2=t(n);

%Časť letu 3.
while(h(n)>0 & n<50000)
    n=n+1;
    t(n)=t(n-1)+dt;
    v(n)=vp;
    h(n)=h2+vp*(t(n)-t2);
end

figure(1)
subplot(1,2,1)
plot(t,h,'r',t2,h2,'ko','LineWidth',2)
grid on
title('Poloha strely')
xlabel('t [s]');
ylabel('h [m]')

subplot(1,2,2)
plot(t,v,'b',t2,v2,'ko','LineWidth',2)
grid on
title('Rýchlosť strely')
xlabel('t [s]');
```

Priebeh rýchlosti a polohy rakety pri jej pohybe na základe uvažovaných častí pohybu je znázornený na Obr. 8.23.



Obr. 8.23. Poloha rakety a jej rýchlosť v čase t

Príklad č. 8.15.

Zobrazte priebeh rýchlosti rakety, ktorá sa pohybuje v gravitačnom poli zeme v závislosti na čase pre časový interval $\mathbf{t} = \langle \mathbf{0}, \mathbf{1000} \rangle\ \mathbf{s}$. Celková hmotnosť rakety s palivom pred jej vystrelením je $\mathbf{m_c} = \mathbf{1000\ kg}$, z toho $\mathbf{p} = \mathbf{90}\%$ jej celkovej hmotnosti tvorí **palivo**.

Raketa pri svojom lete postupne toto palivo spaľuje. Proces spaľovania paliva možno opísať súčiniteľom rýchlosti spaľovania $\mathbf{k} = \mathbf{10\ kg.s^{-1}}$. Ťah motora, ktorý ženie raketu dopredu a je vyvolaný motorom, uvažujeme ako konštantný, daný silou $\mathbf{F} = \mathbf{10\ kN}$.

Riešenie:

Raketa pri svojom pohybe smerom nahor postupne spaľuje palivo, t. j. pri pohybe sa mení jej hmotnosť. Pohyb rakety počas jej letu môžeme opísať **II. Newtonovým zákonom** pohybu

$$\frac{dH}{dt} = \sum F \ ,$$
$$\frac{d}{dt}(m(t) \cdot v) = F - m(t) \cdot g \, . \tag{8.85}$$

Celkovú hmotnosť $\mathbf{m(t)}$ rakety v čase $\mathbf{t}$, ktorá závisí od času, možno vypočítať ako rozdiel počiatočnej hmotnosti rakety pred jej vystrelením $\mathbf{m_c}$ a úbytku paliva $\mathbf{m_u}$

$$m(t) = m_c - m_u = m_c - k \cdot t \ , \tag{8.86}$$

dosadením tejto hmotnosti $\mathbf{m(t)}$ do pôvodnej rovnice dostávame

$$\frac{d}{dt}(m(t) \cdot v) = F - m(t) \cdot g \ ,$$
$$\frac{d}{dt}\big((m_c - k \cdot t) \cdot v\big) = F - (m_c - k \cdot t) \cdot g \ . \tag{8.87}$$

Potom zderivovaním výrazu na pravej strane rovnice podľa času **t** dostávame

$$-k \cdot v + (m_c - k \cdot t)\frac{dv}{dt} = F - (m_c - k \cdot t) \cdot g \tag{8.88}$$

a ďalšou matematickou úpravou dospejeme k tejto **diferenciálnej rovnici 1. rádu**, ktorá platí pre zrýchlenie rakety **a**

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{F + k \cdot v}{m_c - k \cdot t} - g \ . \tag{8.89}$$

Preveďme predchádzajúcu rovnicu touto voľbou **stavových premenných** na stavový opis systému

$$\begin{aligned} x_1 &= h \ , \\ x_2 &= \dot{h} = v \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dot{x}_1 \ . \end{aligned} \tag{8.90}$$

Prostredníctvom navolených **stavových premenných** prevedieme odvodenú diferenciálnu rovnicu (8.93) na tento tvar systému v stavovom opise

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= \frac{F + k \cdot x_2}{m_c - k \cdot t} - g \ . \end{aligned} \tag{8.91}$$

Pre numerickú metódu **Runge-Kutta 4. rádu** zadefinujeme túto funkciu riešiča na základe predchádzajúceho systému v stavovom opise.

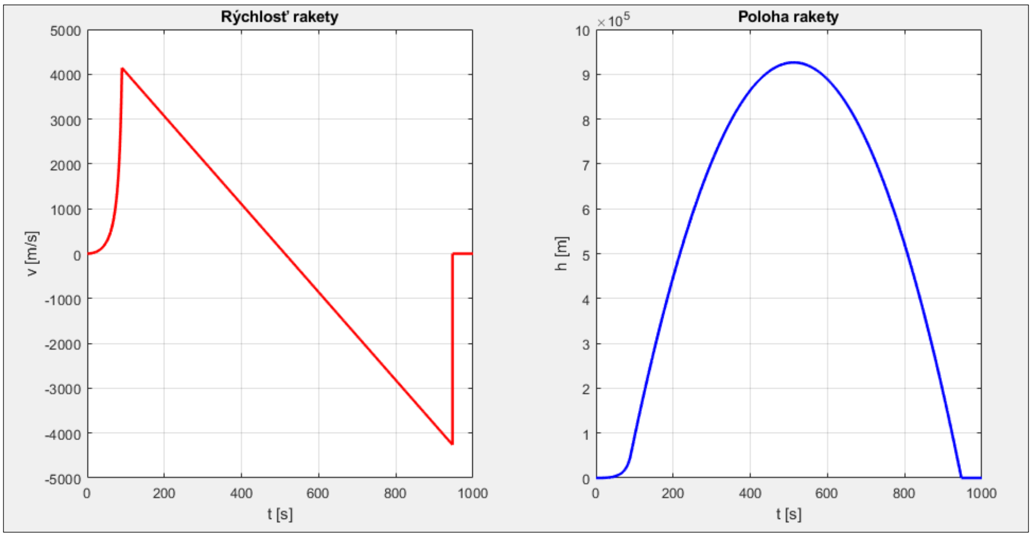
```
function dv=Raketa(t, x, mc, p, k, F, g)

dv=zeros(2,1);

if ((mc-k*t)<=mc*(1-p))
    k=0;
    F=0;
    m=mc*(1-p);
else
    m=mc-k*t;
end

dv(1)=x(2);
dv(2)=(F+ k*x(2))/m-g;

end
```

Napokon simuláciu letu rakety budeme riešiť napísaním nasledujúceho skriptu v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
mc=1000; % [kg]
p=0.9; % [x100%]
k=10; % [kg/s]
F=10000; % [N]
g=9.81;  % [m/s^2]
```

```
%Čas simulácie letu rakety
tsim=1000; % [s]
dt=0.01;
t=[0:dt:tsim];

%Počiatočné podmienky
v0=0;
h0=0;

%Riešenie odozvy
[t, x]=ode23(@(t, x)Raketa(t, x, mc, p, k, F, g),t,[h0;v0]);

y=x(:,1)<0; %Saturácia pohybu
for i=1:length(y)
    if (y(i))
        x(i,1)=0;
        x(i,2)=0;
    end
end

figure(1)
subplot(1,2,1)
plot(t, x(:,2),'r','LineWidth',2)
grid on
title('Rýchlosť rakety')
xlabel('t [s]')
ylabel('v [m/s]')

subplot(1,2,2)
plot(t, x(:,1),'b','LineWidth',2)
grid on
title('Poloha rakety')
xlabel('t [s]')
ylabel('h [m]')
```

Priebehy zmeny rýchlosti **v** a polohy rakety **h** počas jej pohybu sú znázornené na nasledujúcom Obr. 8.24.



Obr. 8.24. Rýchlosť a vertikálna poloha rakety počas jej letu

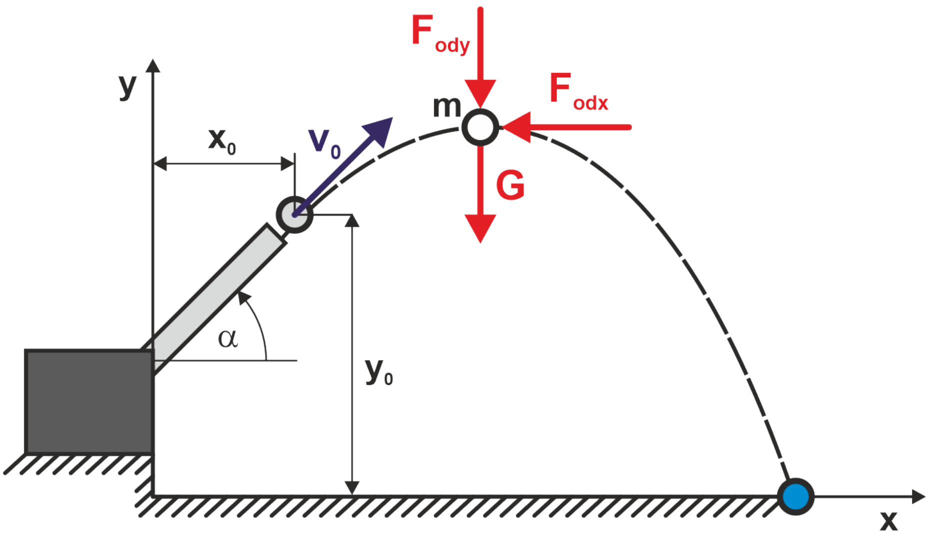
8.11 MODELY S UVAŽOVANÍM ODPORU VZDUCHU

V tejto kapitole sa zameriame na také matematické modely, pri ktorých budeme uvažovať vplyv odporu vzduchu, ktorý pôsobí proti pohybu telesa konajúceho pohyb. Takéto typy modelov sa môžu vyskytnúť vo veľkom počte, napr. sa s nimi možno stretnúť v prípade príkladov z praxe, ktorými sú napr. pohyb automobilu po ceste, let lietadla nad úrovňou zeme, let vystreleného projektilu, ktorý sa pohybuje v gravitačnom poli zeme, pohyb ľubovoľného objektu, ktorý padá s uvažovaním odporu vzduchu a ďalšie iné. Princíp ako tvoriť modely pre takéto typy úloh, si ukážeme na niektorých nasledujúcich príkladoch.

Príklad č. 8.16. Strela v gravitačnom poli zeme

Strela hmotnosti $\mathbf{m = 10\,kg}$ je vystrelená v gravitačnom poli zeme pod známym uhlom $\boldsymbol{\alpha = 65°}$, pozri Obr. 8.25. Pri lete pôsobí na túto strelu odpor vzduchu, ktorý vyvolá v smere osí **x** a **y** odporové sily. Tieto možno uvažovať ako sily priamoúmerné rýchlosti pohybu tejto strely.

Koeficienty odporu vzduchu v jednotlivých smeroch pohybu **x** a **y**, ktoré závisia od geometrického tvaru strely boli experimentálne namerané. Predpokladajme, že tieto koeficienty sú známe konštantné hodnoty $\mathbf{c_x = 0.002}$ a $\mathbf{c_y = 0.001}$. Ak vieme, že počiatočná rýchlosť strely bola $\mathbf{v_0 = 300\,m.s^{-1}}$ a strela bola vystrelená z bodu, ktorého poloha je daná súradnicami $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, zobrazte trajektóriu letu tejto strely, jej polohu a rýchlosť v závislosti od času. Takisto odmerajte čas dopadu strely na zemský povrch.



Obr. 8.25. Strela letiaca v gravitačnom poli zeme

Riešenie:

Trajektória strely, ktorou strela letí v **gravitačnom poli zeme** s uvažovaním odporu vzduchu je znázornená na Obr. 8.25. Na strelu pri jej pohybe pôsobia jednak **odporové sily** vyvolané odporom vzduchu v jednotlivých smeroch **x** a **y** a takisto tiažová gravitačná sila **G**.

Matematický model pohybu strely v rovine **xy** možno odvodiť na základe **II. Newtonovho zákona** a opísať týmito dvomi pohybovými rovnicami, ktoré sú definované pre jednotlivé smery osí **x** a **y**

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -F_{odx} \ , \\ m \cdot \ddot{y} &= -G - F_{ody} \ , \end{aligned} \tag{8.92}$$

kde $\mathbf{F_{odx} = c_x \cdot \dot{x}^2}$, $\mathbf{F_{ody} = c_y \cdot \dot{y}^2}$ a $\mathbf{G = m \cdot g}$. Dosadením týchto výrazov do prechádzajúceho modelu dostávame tento matematický model

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -c_x \cdot \dot{x}^2 \ , \\ m \cdot \ddot{y} &= -m \cdot g - c_y \cdot \dot{y}^2 \ , \end{aligned} \tag{8.93}$$

ktorý zapíšeme do tohto **simulinkovského tvaru** diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{c_x \cdot \dot{x}^2}{m} \ , \\ \ddot{y} &= -g - \frac{c_y \cdot \dot{y}^2}{m} \ . \end{aligned} \tag{8.94}$$

Tento matematický model v **simulinkovskom tvare** prevedieme na **stavový opis systému**, voľbou týchto **stavových premenných**

$$\begin{aligned} x_1 &= x \ , \\ x_2 &= \dot{x} = v_x \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dot{x}_1 \ , \\ x_3 &= y \ , \\ x_4 &= \dot{y} = v_y \quad \Longrightarrow \quad x_4 = \dot{x}_3 \ , \end{aligned} \tag{8.95}$$

potom dostávame tento tvar **stavového opisu rovníc**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c_x \cdot x_2^2}{m} \ , \\ \dot{x}_3 &= x_4 \ , \\ \dot{x}_4 &= -g - \frac{c_y \cdot x_4^2}{m} \ . \end{aligned} \tag{8.96}$$

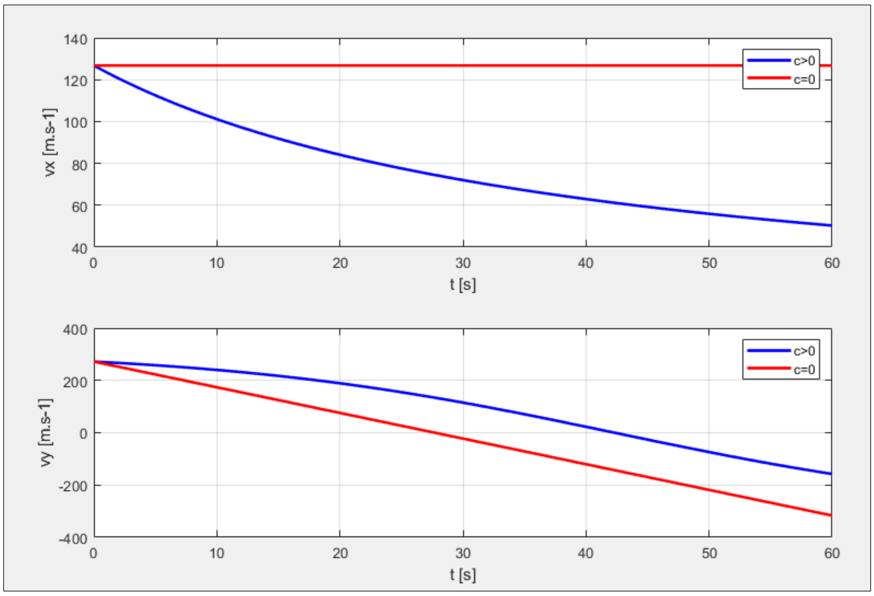
Porovnajme v prvom rade riešenie simulácie pre simulačný $\mathbf{t_{sim} = 60\,s}$ trajektórie strely vypočítanej s uvažovaním a bez uvažovania odporu vzduchu, simulovaním prostredníctvom skriptu **Matlabu**. Na riešenie využijeme túto funkciu riešiča, ktorú zadefinujeme podľa stavového opisu systému a následne zavoláme v numerickej metóde **ode45**.

```
function dx=Strela(t, x, m, cx, cy, g)

dx=zeros(4,1);
dx=[x(2);
    -cx/m*x(2)^2;
    x(4);
    cy/m*x(4)^2-g];

end
```

Na riešenie pohybu projektilu použijeme nasledujúci skript napísaný v **Matlabe**, v ktorom dvakrát zavoláme numerickú metódu **ode45** za účelom aby sme vypočítali dva varianty riešení – s uvažovaním a bez uvažovania odporu vzduchu.

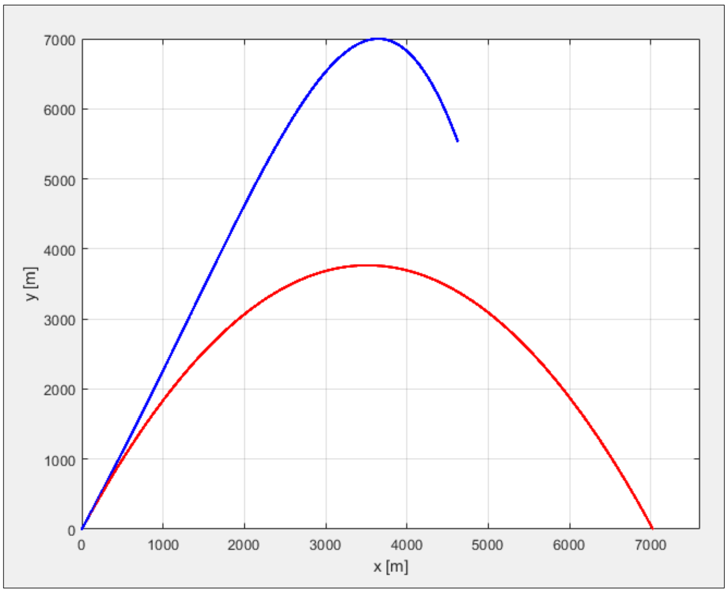
```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre
m=10; % hmotnosť strely [kg]
cx=0.002; cy=0.001; % koeficienty odporu vzduchu
g=9.81;
alfa=65;

%Počiatočné podmienky
v0=300;
x0=0;y0=0;
X=[x0;v0*cosd(alfa);y0;v0*sind(alfa)];

%Simulačný čas
tsim=60;
dt=0.05;
t=[0:dt:tsim];

% riešenie sústavy DR pre dva prípady
[t1,x1]=ode45(@(t, x)Strela(t, x, m, 0, 0, g), t, X);
[t2,x2]=ode45(@(t, x)Strela(t, x, m, cx, cy, g), t, X);

figure(1)
axis([0 max(x1(:,1)) 0 max(x2(:,3))])
xlabel('x [m]')
ylabel('y [m]')
hold on
for i=1:length(t)
    plot(x1(i,1),x1(i,3),'r.')
    plot(x2(i,1),x2(i,3),'b.')
    pause(0.00001)
end

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(t,x2(:,2),'b',t,x1(:,2),'r','LineWidth',2)
grid on
xlabel('t [s]')
ylabel('vx [m.s-1]')
```

Porovnanie priebehov zmeny rýchlosti strely v jednotlivých smeroch **x** a **y** s uvažovaním a bez uvažovania odporu vzduchu sú znázornené na Obr. 8.26.



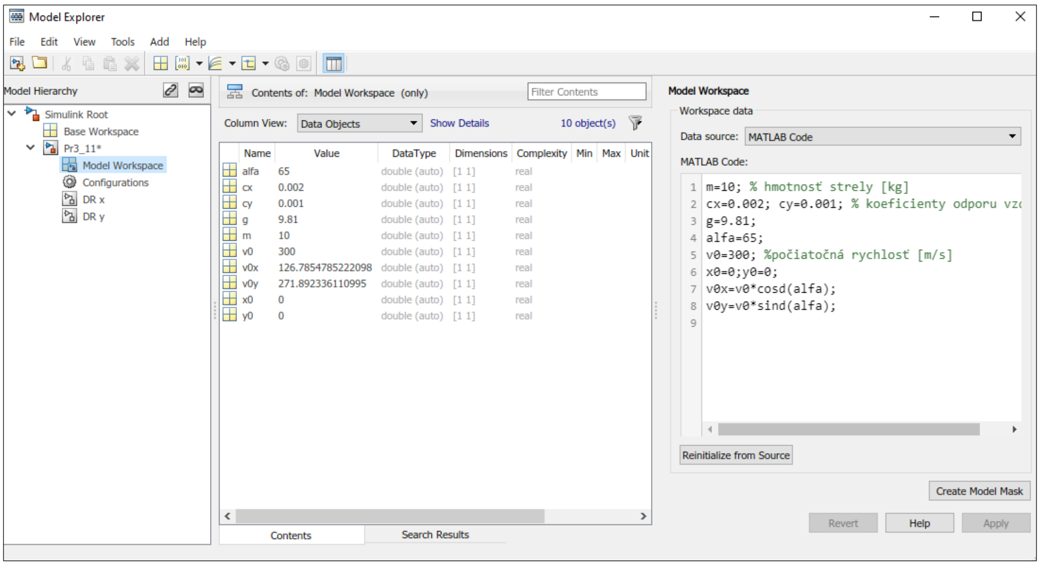
Obr. 8.26. Rýchlosť strely v_x (m.s^{-1}) a v_y (m.s^{-1})

Potom na ďalšom Obr. 8.27 je znázornená trajektória strely pri uvažovaní odporu vzduchu a bez odporu vzduchu.



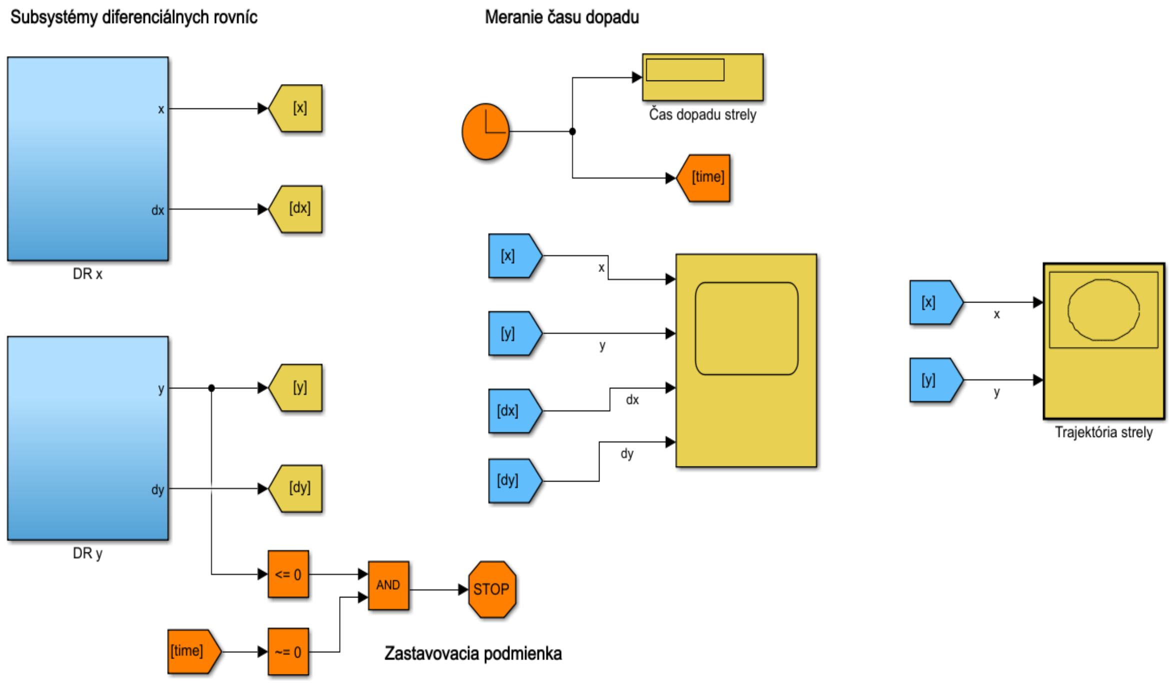
Obr. 8.27. Trajektória strely – x(m) a y(m)

Vytvorme ďalej blokovú schému v **Simulinku**, v ktorej vykonáme simuláciu letu strely a odmeriame čas dopadu tejto strely na zemský povrch. Všetky parametre systému pre blokovú schému zadefinujeme priamo v **Model Workspace**, pozri Obr. 8.28.



Obr. 8.28. Model workspace blokovej schémy

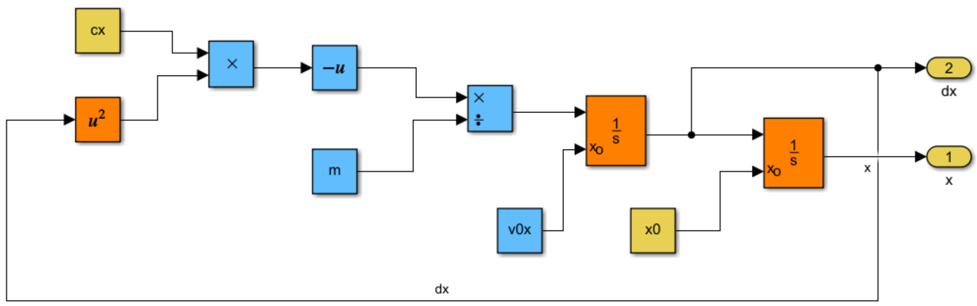
Na ďalšom Obr. 8.29 je znázornená základná **bloková schéma**, ktorá pozostáva z dvoch subsystémov **DR x** a **DR y**. Tieto boli namodelované podľa odvodených diferenciálnych rovníc pohybu strely.



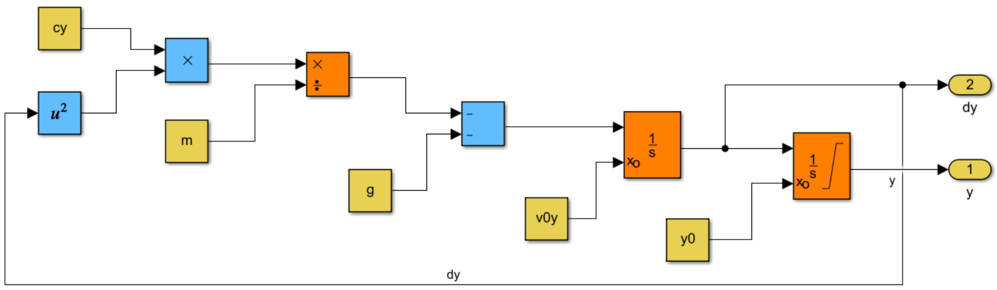
Obr. 8.29. Bloková schéma pre simuláciu letu strely s uvažovaním odporu vzduchu

Keďže **simulačný čas simulácie** nastavíme na **inf**, v tomto prípade vytvoríme v blokovej schéme **zastavovaciu podmienku**, ktorá ukončí simuláciu v okamihu, keď na blok **Stop Simulation** je privedená boolean hodnota **true**.

Na ďalších Obr. 8.30 (a) a (b) možno vidieť tvary subsystémov **DR x** a **DR y**, ktoré boli namodelované pre konkrétne diferenciálne rovnice v smere osí **x** a **y**.



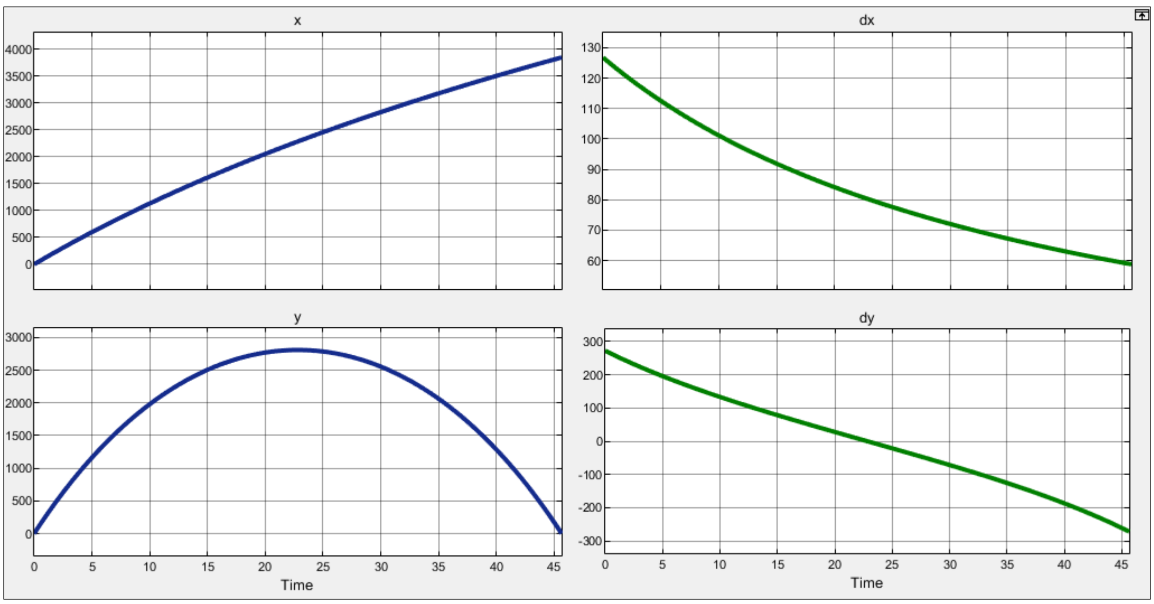
(a)



(b)

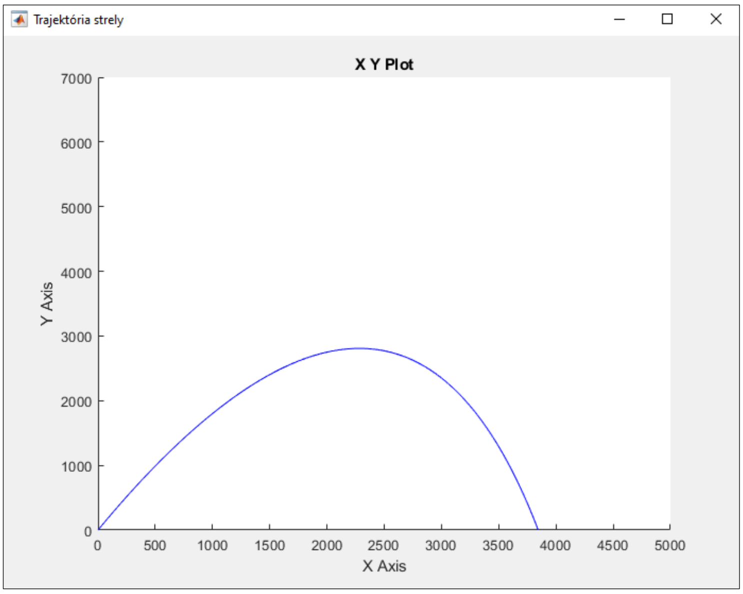
Obr. 8.30. (a) Subsystém DR x a (b) Subsystém DR y

Priebehy polohy strely v smeroch osí **x** a **y** v závislosti na čase **t** a rýchlosti **dx** a **dy** v jednotlivých smeroch sú znázornené na Obr. 8.31.



Obr. 8.31. Priebehy rýchlostí dx, dy ($m.s^{-1}$) a poloha strely v smere x a y (m)

Trajektória strely pri lete v rovine **xy** zobrazená prostredníctvom **grafu XY**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 8.32.



Obr. 8.32. Trajektória strely, x(m), y(m)

Poznamenajme, že v predchádzajúcom príklade sme neuvažovali vplyv **odporovej sily**, ktorá závisí od uhlu $\boldsymbol{\alpha}$, ktorý sa mení v každom okamihu v závislosti od rýchlosti jednotlivých smeroch $\mathbf{v_x}$ a $\mathbf{v_y}$. Pre spresnenie vplyvu odporu vzduchu možno uvažovať, že na teleso pôsobí **Newtonova odporová sila**, ktorá je definovaná týmto vzťahom

$$F_t = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \ , \qquad (8.97)$$

kde **c** je odporový koeficient, $\boldsymbol{\rho}$ je hustota vzduchu, **S** je plocha kolmá na smer pohybu a **v** je rýchlosť pohybu telesa.

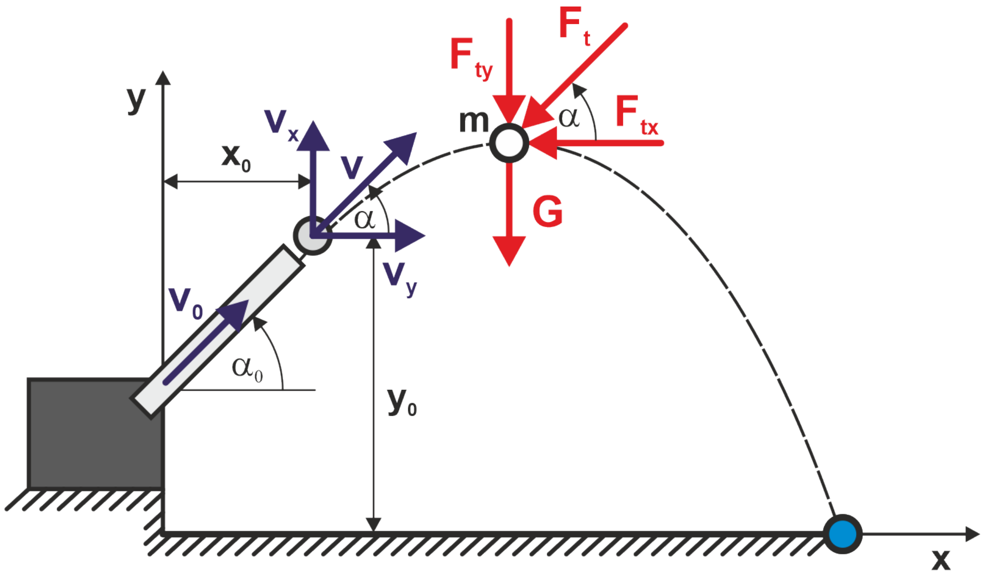
Príklad č. 8.17. Trajektória projektilu pri vystrelení z dela s odporom vzduchu

Predpokladajme delo s nasledujúcimi parametrami: kaliber $\mathbf{88\ mm}$, max. rýchlosť výstrelu $\mathbf{810\ m.s^{-1}}$, efektívna vzdialenosť **4 km** a hmotnosť $\mathbf{6861\ kg}$.

Strela hmotnosti $\mathbf{m = 10\ kg}$ je vystrelená v gravitačnom poli zeme pod rôznymi uhlami $\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{20, 30, 40, 50, 60, 70}]°$, pozri Obr. 8.33. Pri lete na strelu pôsobí odpor vzduchu, ktorý možno v smere osi **x** a **y** modelovať s použitím **Newtonovej odporovej sily**.

Koeficient odporu vzduchu pri lete projektilu uvažujeme ako $\mathbf{c = 0.002}$. Strela bola vystrelená s počiatočnou rýchlosťou $\mathbf{v_0 = 300\ m.s^{-1}}$ z bodu so súradnicami $(\mathbf{x_0, y_0}) = (\mathbf{0, 0})$.

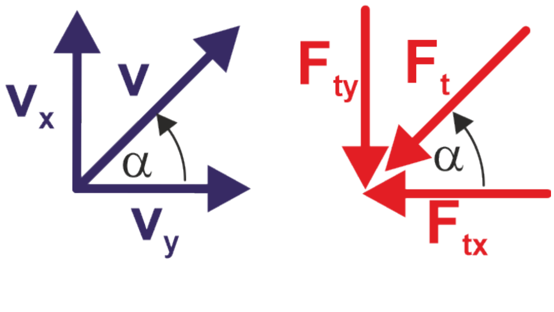
Zobrazte trajektórie strely a priebehy rýchlosti pre rôzne uhly zamierenia $\boldsymbol{\alpha}$, ak poznáme hustotu vzduchu $\rho = \mathbf{1.276\ kg.m^3}$ a efektívnu odporovú prierezovú plochu strely $\mathbf{S = 6.08e^{-3}\ m^2}$.



Obr. 8.33. Strela s uvažovaním Newtonovej odporovej sily

Riešenie:

V predchádzajúcom príklade sme predpokladali, že **odporová sila** v danom smere osí **x** a **y** bola priamoúmerná štvorcu rýchlosti v danom smere. To však v skutočnosti je len hrubým zjednodušením reality, pri ktorej sa **rýchlosť** $\mathbf{v_x}$ a $\mathbf{v_y}$ v jednotlivých smeroch **x** a **y**, ako aj odporové sily $\mathbf{F_{tx}}$ a $\mathbf{F_{ty}}$ menia v závislosti od uhla $\boldsymbol{\alpha}$. Tento uhol je v každom časovom okamihu závislý od pomeru zložiek rýchlosti v **x-ovom** a **y-novom** smere. Pod rovnakým uhlom $\boldsymbol{\alpha}$ pôsobí na teleso projektilu pri jeho pohybe aj **Newtonová odporová sila**, pozri Obr. 8.33 a Obr. 8.34.



Obr. 8.34. Sklon okamžitej rýchlosti a odporovej sily

Podľa Obr. 8.34 vyplýva, že okamžitá rýchlosť **v** a rovnako tak odporová sila $\mathbf{F_t}$ sú sklopené pod tým istým uhlom $\boldsymbol{\alpha}$ a sú opačne orientované. Potom pre zložky **rýchlosti** musí platiť, že

$$v_x = v \cdot \cos\alpha, \quad v_y = v \cdot \sin\alpha \ , \tag{8.98}$$

kde $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v_x^2} + \mathbf{v_y^2}}$. Z predchádzajúceho vyplýva, že pre uhol $\boldsymbol{\alpha}$ musia platiť tieto vzťahy goniometrických funkcií

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \;,$$
$$\sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \;. \qquad (8.99)$$

To znamená, že **Newtonovú odporovú silu**, ktorá je definovaná vzťahom $\mathbf{F_t} = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{c}\cdot \boldsymbol{\rho}\cdot \mathbf{S}\cdot \mathbf{v^2}$, možno rozložiť na základe uhla $\boldsymbol{\alpha}$ na tieto zložkové sily

$$F_{tx} = F_t\cdot\cos\alpha = F_t\cdot\frac{v_x}{v} = F_t\cdot\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \;,$$
$$F_{ty} = F_t\cdot\sin\alpha = F_t\cdot\frac{v_y}{v} = F_t\cdot\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \;. \qquad (8.100)$$

Potom aplikovaním **II. Newtonovho zákona** možno napísať tento matematický model **sústavy dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$m\cdot\ddot{x} = -F_{tx} \;,$$
$$m\cdot\ddot{y} = -G - F_{ty} \;, \qquad (8.101)$$

a dosadením odvodených **zložkových síl** do predchádzajúcich rovníc dostávame

$$\ddot{x} = -\frac{F_t}{m}\cdot\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \;,$$
$$\ddot{y} = -g - \frac{F_t}{m}\cdot\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \;, \qquad (8.102)$$

kde $\mathbf{F_t} = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{c}\cdot \boldsymbol{\rho}\cdot \mathbf{S}\cdot \mathbf{v^2} = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{c}\cdot \boldsymbol{\rho}\cdot \mathbf{S}\cdot \left(\dot{\mathbf{x}}^2 + \dot{\mathbf{y}}^2\right)$.

Prepíšme predchádzajúci systém diferenciálnych rovníc (8.102) na **stavový opis systému**, voľbou týchto stavových premenných

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x \ , \\
&x_2 = \dot{x} = v_x \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dot{x}_1 \ , \\
&x_3 = y \ , \\
&x_4 = \dot{y} = v_y \quad \Longrightarrow \quad x_4 = \dot{x}_3 \ .
\end{aligned}
\tag{8.103}
$$

To znamená, že dostávame túto **sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu** v stavovom opise

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 \ , \\
&\dot{x}_2 = -\frac{F_t}{m} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_4^2}} \ , \\
&\dot{x}_3 = x_4 \ , \\
&\dot{x}_4 = -g - \frac{F_t}{m} \cdot \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_4^2}} \ ,
\end{aligned}
\tag{8.104}
$$

kde $\mathbf{F_t} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{x_2^2} + \mathbf{x_4^2}\right)$.

Na riešenie využijeme skript **Matlabu** a numerickú metódu **Runge-Kutta 4. rádu**, pre ktorú zadefinujeme túto funkciu riešiča.

```
function dx=Strela2(t, x, m, c, ro, S, g)

dx=zeros(4,1);
v=sqrt(x(2)^2+x(4)^2);
Ft=1/2*c*ro*S*v^2;

dx(1)=x(2);
dx(2)=-Ft*x(2)/(m*v);
dx(3)=x(4);
dx(4)=-Ft*x(4)/(m*v)-g;

end
```

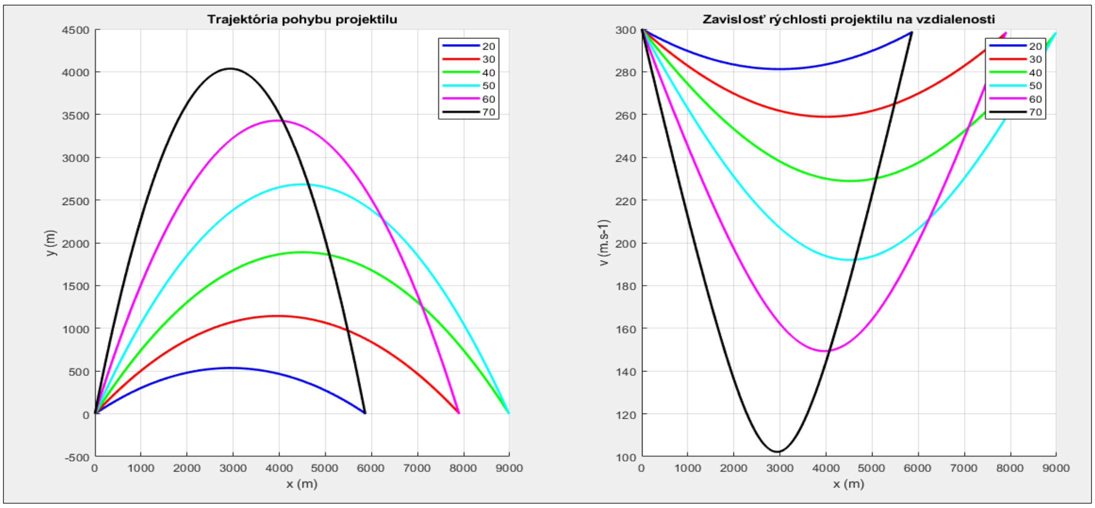
Ďalej zadefinujeme špeciálnu funkciu, ktorá zastaví riešenie pri dopadnutí projektilu na zemský povrch.

```
function [value, isterminal, direction]=Zastavenie(t, x)

  value = x(3);
  isterminal = 1;  %skončiť integrovanie
  direction = [];

end
```

Na riešenie priebehu trajektórie strely pre rôzne uvažované uhly vystrelenia projektilu napíšeme tento skript v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
g=9.81;
ro=1.276;
c=0.002;
S=6.08e-3;
m=10;
v0=300;

%Uvažované uhly vystrelenia
uhol = [20, 30, 40, 50, 60, 70];
farba=['b', 'r', 'g', 'c', 'm', 'k'];

%Simulačný čas
tsim=10000;
dt=0.1;
T=[0:dt:tsim];

%Podmienka zastavenia
options=odeset('Events', @Zastavenie)

figure(1)
for i=1:length(uhol)
    x0=0; y0=0;
    v0x=v0*cosd(uhol(i));
    v0y=v0*sind(uhol(i));
    X=[x0,v0x,y0,v0y];

    [t, dx]=ode45(@(t, x)Strela2(t, x, m, c, ro, S, g), T, X, options);

    subplot(1,2,1)
    hold on
    plot(dx(:,1),dx(:,3),farba(i),'LineWidth',2);

    subplot(1,2,2)
    hold on
    plot(dx(:,1),sqrt(dx(:,2).^2+dx(:,4).^2),farba(i),'LineWidth',2);
    pause(0.1)
end

subplot(1,2,1)
legend('20','30','40','50','60','70');
grid on
title('Trajektória pohybu projektilu');
xlabel('x (m)');
ylabel('y (m)');

subplot(1,2,2)
legend('20','30','40','50','60','70');
grid on
xlabel('x (m)');
ylabel('v (m.s-1)');
title('Závislosť rýchlosti projektilu na vzdialenosti');
```

Riešenie trajektórií a rýchlosti pohybu pre rôzne uhly vystrelenia projektilov je znázornené na nasledujúcich grafoch, pozri Obr. 8.35 (a) a (b).



Obr. 8.35. (a) Trajektórie pohybu strely, (b) závislosti rýchlosti od vzdialenosti x

Ďalej si ukážeme, že podobné riešenie možno získať, aj vytvorením **blokovej simulačnej schémy**, ktorú možno vytvoriť pre ľubovoľný prípad dynamického systému. Túto blokovú schému budeme volať a riadiť priamo zo skriptu **Matlabu**. Takýto spôsob **simulácie** realizovanej formou **blokovej schémy** a riadiaceho **skriptu Matlabu**, si ukážeme na podobnom príklade simulácie letu strely v odporovom prostredí pre rôzne uhly zamierenia, ktorý sme riešili prostredníctvom numerickej metódy **Runge-Kutta 4. rádu** v predchádzajúcom skripte **Matlabu**.

Poznamenajme, že každý model, ktorý bol vytvorený v **Simulinku**, možno riadiť a spúšťať priamo prostredníctvom príkazov zo skriptu **Matlabu**. Tieto príkazy vyžadujú poznatok názvu modelu a zadefinovanú presnú cestu k umiestneniu vytvoreného **simulinkovského modelu** typu $*.$ **slx**.

Na otvorenie modelu v **Simulinku** existuje príkaz **open_system('názov_modelu')**. Poznamenajme, že názov modelu uvádzame bez prípony $*.$ **slx** resp. $*.$ **mdl.**. Každý aktuálne otvorený model možno zatvoriť príkazom **close_system('názov_modelu')**. Prípadne vykonať uloženie uskutočnených zmien na modeli prostredníctvom príkazu **save_system('názov_modelu')**.

V prípade, že od **Matlabu** vôbec nepožadujeme otvorenie modelu vytvoreného v **Simulinku**, ale chceme tento model len zavolať a vykonať simuláciu bez jeho otvorenia na pozadí. Potom použijeme na zavolanie modelu vstavaný príkaz **load_system('názov_modelu')**, ktorý otvorí model na pozadí prostredia **Matlabu**. Spustenie simulácie na takto otvorenom modeli možno uskutočniť prostredníctvom príkazu **sim**, ktorý má základný syntax definovaný v tvare **simout=sim('model',parameters)**.

Tento príkaz môže nadobudnúť rôzne tvary, ktoré závisia od požadovaných parametrov funkcie, ktorými chceme nastaviť parametre danej simulácie priamo z príkazového riadku.

```
simOut = sim('vdp','SimulationMode','accel','AbsTol','1e-5',...
            'SaveState', 'on', 'StateSaveName', 'xoutNew',...
            'SaveOutput', 'on', 'OutputSaveName', 'youtNew')
```

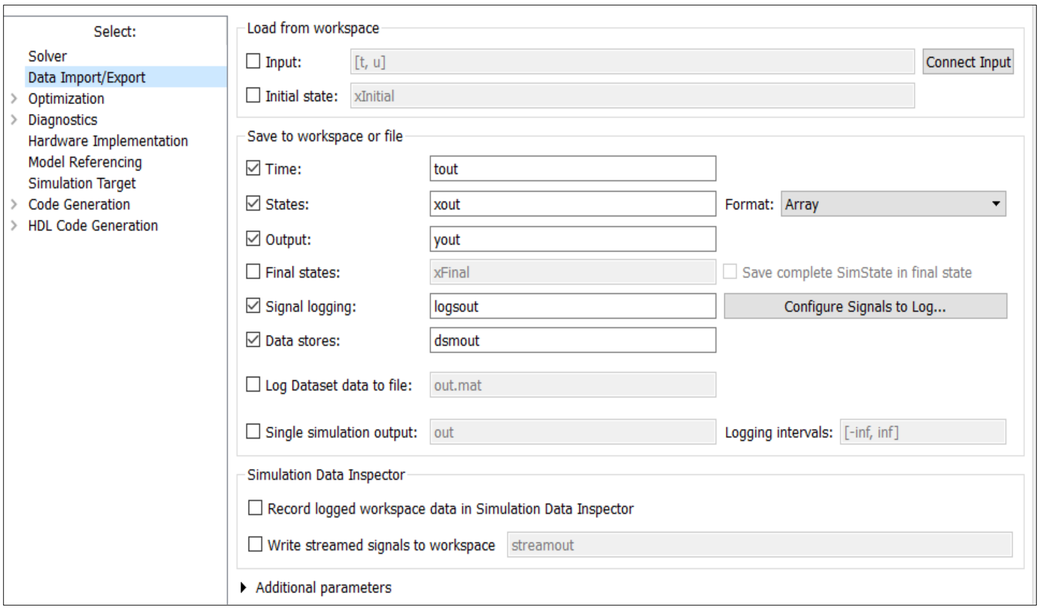
Nie vždy je nutné tento príkaz volať v zložitom tvare syntaxu, niekedy postačuje použitie jednoduchého tvaru, napr.

```
simOut = sim('model'),
```

prípadne príkaz, v ktorom nastavíme parameter simulačného módu

```
simOut = sim('model', 'SimulationMode','normal').
```

Poznamenajme, že ak si uložíme výsledok simulácie do premennej pod názvom napr. „**simout**“, potom sa do tejto premennej automaticky uloží aj vektor času do premennej **tout**, ako aj všetky stavové premenné do matice **xout**. Tieto názvy premenných možno modifikovať v nastaveniach blokovej schémy **Simulinku** prostredníctvom **Data Import/Export** dialógového okna. V tomto okne nastavení možno napr. zvoliť formát, do akého sa **výstupné premenné** majú uložiť po skončení simulácie, pozri Obr. 8.36.



Obr. 8.36. Parametre simulácie Data Import/Export

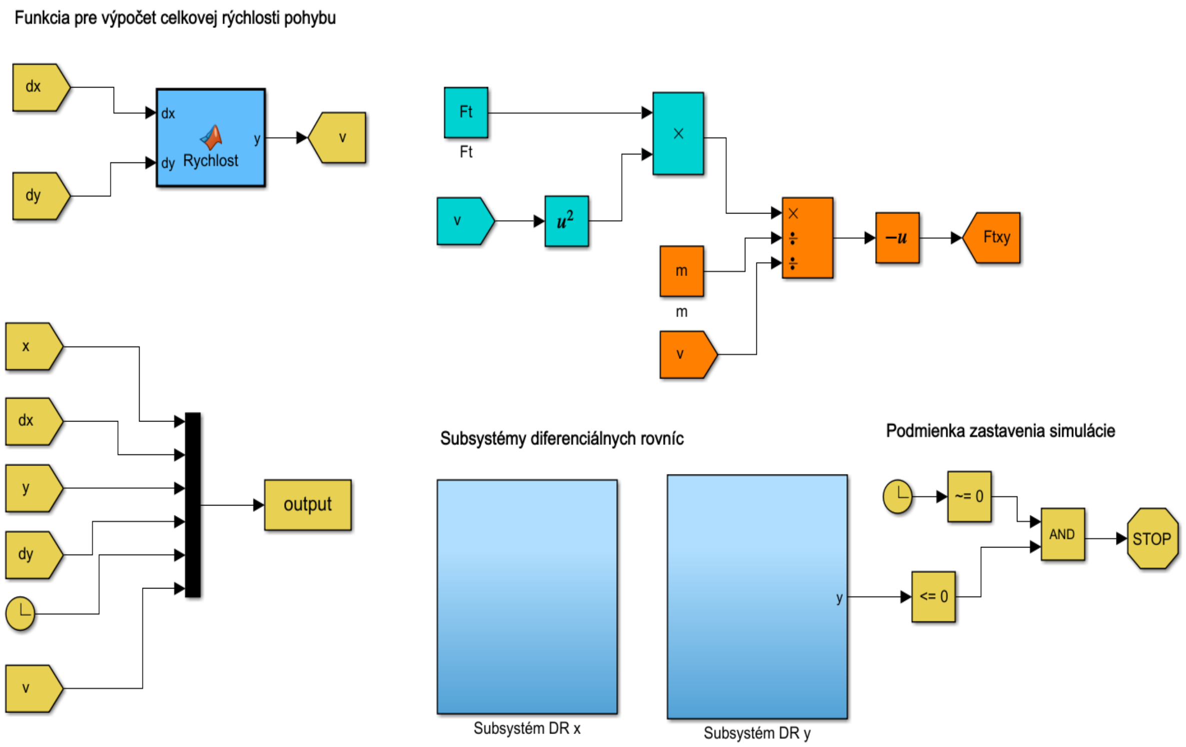
Ak si napr. ako výstupný formát zvolíme parameter **DataSet**. Potom po ukončení simulácie možno k vypočítaným hodnotám pristupovať prostredníctvom príkazu **get(‘parameter’)**. Napr. ak sa výsledok uloží do premennej s názvom **simout**, potom ukážka ako takýto výstup môže vyzerať je zobrazená nižšie.

```
Simulink.SimulationOutput:

output: [67x6 double]
  tout: [67x1 double]
  xout: [67x4 double]
```

V prípade, že chceme pristúpiť k hodnotám výstupnej matice pod názvom **output**, musíme použiť príkaz v správnom syntaxe **simout.get('output')**, ktorý umožní prístup k týmto vypočítaným hodnotám. Princíp ako riadiť a spúšťať simuláciu prostredníctvom skriptu **Matlabu**, si teraz ukážeme na podobnom príklade riešenia **trajektórií letiaceho projektilu** pre rôzne uvažované uhly zamierenia.

Základný skript **Matlabu**, ktorý sme použili na výpočet, preprogramujeme a využijeme takisto na načítanie parametrov modelu do **Globálneho Workspace** prostredia **Matlabu**, myslíme tie parametre, ktoré sa v priebehu simulácie meniť nebudú. Poznamenajme, že tieto parametre možno taktiež načítať do **Modelového Workspace** priamo v blokovej schéme **simulinkovského modelu**.

Základná bloková schéma, ktorá bola vytvorená využitím subsystémov pre matematický model projektilu na základe rovníc (8.102), je znázornená na nasledujúcom Obr. 8.37.



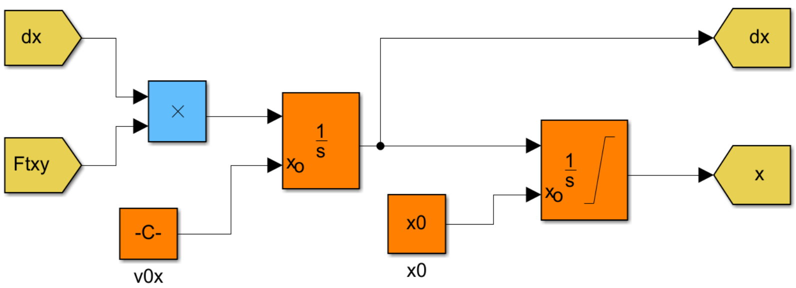
Obr. 8.37. Bloková schéma simulujúca let projektilu

Na zadefinovanie diferenciálnych rovníc pohybu boli použité dva subsystémy pod názvom **DRx** a **DRy**, ktorých blokové schémy sú znázornené na ďalších Obr. 8.38 a Obr. 8.39. Pripomeňme, že pri samotnej tvorbe blokovej schémy, ktorá simuluje let projektilu vystreleného pod uhlom **α**, bol za účelom zjednodušenia využitý **bezkontaktný prenos signálov** pomocou zadefinovaných globálne viditeľných premenných v blokoch **Goto** a **From**.

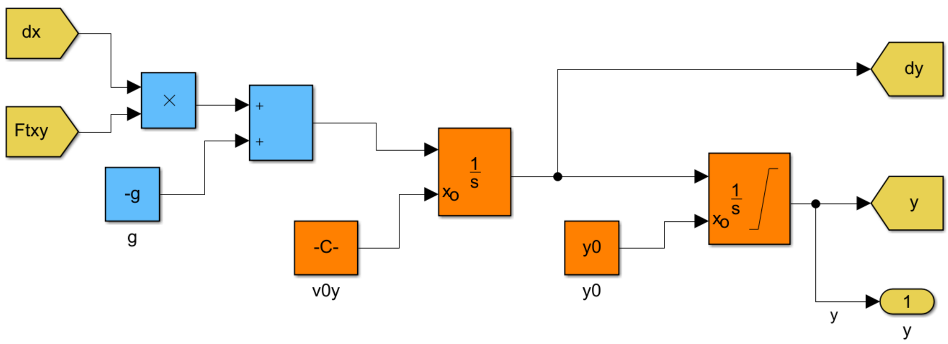
Navyše pre zjednodušenie blokovej schémy sme použili užívateľom definovanú funkciu, ktorá slúži na výpočet celkovej rýchlosti **v**. Táto funkcia je definovaná prostredníctvom bloku **MATLAB Function**, ktorú možno nájsť v knižnici **User-Defined Functions**.

V tomto bloku **MATLAB Function** možno zadefinovať vlastnú užívateľom definovanú funkciu, podobným princípom ako sa definujú jednoduché funkcie v **Matlabe**. Táto funkcia sa uloží pod tým istým menom, aké bolo zvolené v hlavičke samotnej funkcie do súboru blokového charakteru s príponu **.slx**.

```
function y  = Rychlost(dx, dy)

     y = sqrt(dx^2+dy^2);

end
```

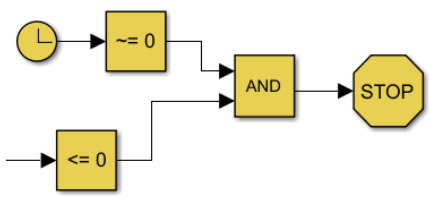


Obr. 8.38. Subsystém DR x



Obr. 8.39. Subsystém DR y

Poznamenajme, že čas simulácie v blokovom diagrame bol nastavený na hodnotu **inf**. V blokovom diagrame sme ďalej vytvorili zastavovaciu podmienku, ktorá zastaví simuláciu ak poloha projektilu v **y-novom** smere nadobudne pre čas **t > 0** nulovú hodnotu, pozri Obr. 8.40.



Obr. 8.40. Zastavovacia podmienka simulácie

V tomto štádiu môžeme pristúpiť k tvorbe riadiaceho skriptu **Matlabu**, v ktorom iteračným spôsobom v cykle zavoláme model blokovej schémy pre rôzne hodnoty nastavených parametrov.

```
clc
close all
clear

%Výstupné parametre systému
g=9.81;
ro=1.276;
c=0.002;
S=6.08e-3;
m=10;
v0=300;

%Rôzne uvažované uhly zamierenia
uhol = [20, 30, 40, 50, 60, 70];
farba=['b', 'r', 'g', 'c', 'm', 'k'];
Ft=1/2*c*ro*S;
x0=0; y0=0;

model='Pr3_12';
load_system(model);

figure(1)
for i=1:length(uhol)
    %Nastavenie parametrov simulácie
    set_param(model,'AbsTol','1e-5',...
         'SaveState', 'on', 'StateSaveName', 'xout',...
         'SaveOutput', 'on', 'OutputSaveName', 'yout')

    %Nastavenie parametrov počiatočných rýchlosti
    set_param('Pr3_12/Subsystem DR x/v0x','value',num2str(v0*cosd(uhol(i))))
    set_param('Pr3_12/Subsystem DR y/v0y','value',num2str(v0*sind(uhol(i))))

    %Zavolanie modelu blokovej schémy pod názvom Pr3_12, na vyriešenie odozvy
    simout=sim('Pr3_12','SimulationMode','normal');
    dx=simout.get('output'); %príkaz pre output typu Array
    %dx=simout.get('output').Data;  %príkaz pre output typu DataSet

    subplot(1,2,1)
    hold on
    plot(dx(:,1),dx(:,3),farba(i),'LineWidth',2);

    subplot(1,2,2)
    hold on
    plot(dx(:,1),sqrt(dx(:,2).^2+dx(:,4).^2),farba(i),'LineWidth',2);
    pause(0.1)
end

subplot(1,2,1)
legend('20','30','40','50','60','70');
grid on
title('Trajektória pohybu projektilu');
xlabel('x (m)');
ylabel('y (m)');

subplot(1,2,2)
legend('20','30','40','50','60','70');
grid on
xlabel('x (m)');
ylabel('v (m.s-1)');
title('Závislosť rýchlosti projektilu na vzdialenosti');
```

Poznamenajme, že načítavať alebo meniť hodnoty parametrov blokov v ľubovoľnej **blokovej schéme**, môžeme uskutočniť použitím príkazu **set_param**, ktorý slúži na zmenu hodnoty parametra a takisto pomocou príkazu **get_param**, ktorý slúži na načítanie hodnoty z bloku simulačnej schémy.

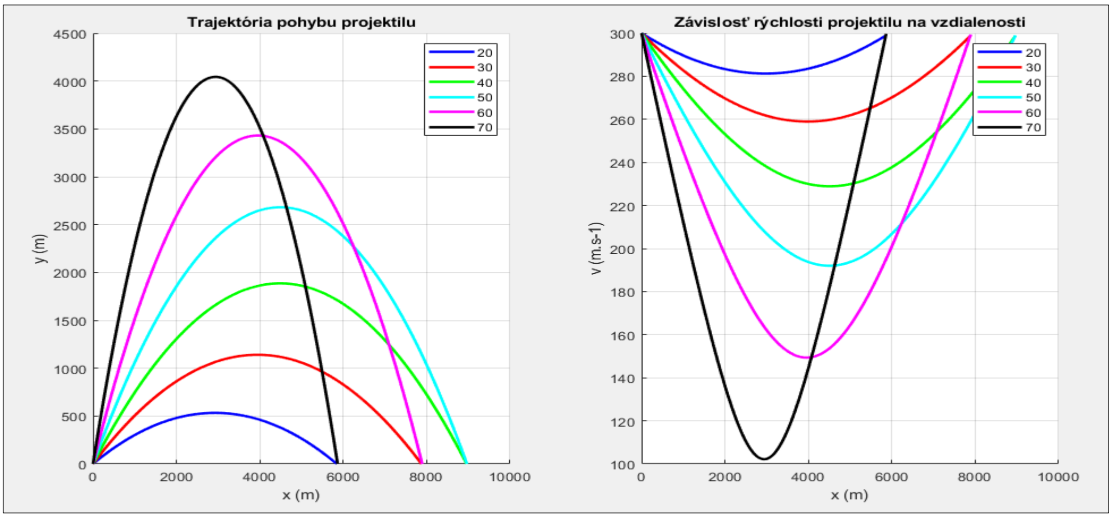
Príkaz **get_param**, ktorý má syntax v tvare **get_param('model/názov objektu','parameter')**, by bolo možné v našom príklade použiť, napr. pre načítanie hodnoty rýchlosti $\mathbf{v_{0x}}$ v tomto tvare

```
set_param('Pr3_12/DR x/v0x','value')
```

Príkaz **set_param**, ktorý má presne stanovený syntax v tvare **set_param('model/názov objektu','parameter','hodnota')**, sme v našom príklade použili v skripte pre zmenu hodnoty rýchlosti $\mathbf{v_{0x}}$ a $\mathbf{v_{0y}}$. V skripte sme napr. pre rýchlosť $\mathbf{v_{0x}}$ použili tento riadok

```
set_param('Pr3_12/DR x/v0x','value',num2str(v0*cosd(uhol(i))))
```

Výsledok riešenia, ktoré sme simulovali použitím predchádzajúceho **riadiaceho skriptu** spolu s blokovou simulačnou schémou, nadobúda identické riešenie, také ktoré sme vypočítali simuláciou prostredníctvom skriptu **Matlabu** bez simulačnej blokovej schémy. Tento výsledok riešenia je znázornený na nasledujúcich grafoch Obr. 8.41 (a) a (b).



Obr. 8.41. (a) Trajektórie pohybu, (b) Závislosť rýchlosti od vzdialenosti x

Problémy na riešenie

Problém 8.1.

Pomocou **Eulerovej numerickej metódy** riešte **Cauchyho počiatočnú úlohu**

$$y' = 2 \cdot x^3 - 5 \cdot y, \quad y(0) = 2 \ , \tag{8.105}$$

na intervale $\langle \mathbf{0}; \mathbf{3} \rangle$ s krokom $\mathbf{h = 0.01}$.

Problém 8.2.

Pomocou **1.** a **2. modifikovanej Eulerovej metódy** riešte **Cauchyho počiatočnú úlohu** pre túto diferenciálnu rovnicu

$$y' = 0.5 \cdot x^4 + e^{2 \cdot x} - 1.5 \cdot y, \quad y(0) = -2 \ , \tag{8.106}$$

na intervale $\langle \mathbf{0}; \mathbf{0.5} \rangle$ s krokom $\mathbf{h = 0.1}$.

Problém 8.3.

Pomocou metódy **Runge-Kutta 4. rádu** riešte **Cauchyho počiatočnú úlohu** pre túto diferenciálnu rovnicu

$$y' = 0.4 \cdot x^5 + 3 \cdot x^2 - y, \quad y(0) = -1 \ , \tag{8.107}$$

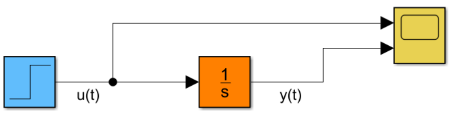
na intervale $\langle \mathbf{0}; \mathbf{2.5} \rangle$ s krokom $\mathbf{h = 0.01}$.

9 MODELOVANIE SPOJITÝCH SYSTÉMOV

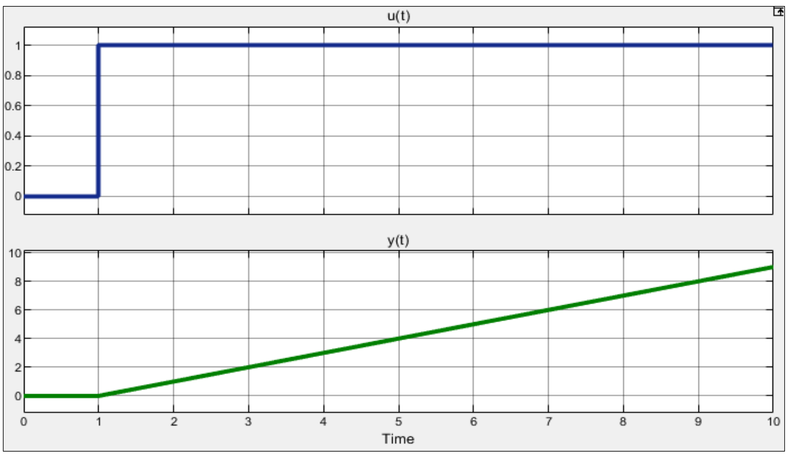
V predchádzajúcich kapitolách sme si predstavili metódy analýzy dynamických systémov, konkrétne metódu analýzy systémov použitím **Laplaceovej transformácie** a riešením odozvy systému pomocou **prenosovej funkcie**. V ďalších kapitolách sme sa venovali analýze a transformácií systémov na **stavový opis systémov**, ktoré sme riešili podobne ako aj systémy diferenciálnych rovníc zapísané v maticovom tvare, metódou postupnej integrácie matematického modelu. Túto metódu sme aplikovali, simulovaním matematického modelu prostredníctvom skriptu v **Matlabe** alebo **blokovým diagramom** v **Simulinku**. V nasledujúcich kapitolách sa obmedzíme len na simuláciu systémov, ktoré budeme simulovať formou blokového diagramu. Zameriame sa hlavne na dynamické systémy spojitého charakteru, ktoré budeme riešiť metódou postupnej integrácie v **Simulinku**.

9.1 SPOJITÝ INTEGRÁTOR

Do tohto bodu sme v **blokových schémach**, ktoré sme vytvárali na simuláciu systémov, veľmi často využívali numerické integrovanie signálov, realizované **blokom spojitého integrátora**. Tento **spojitý integrátor** sme prevažne používali na riešenie diferenciálnych rovníc a sústav diferenciálnych rovníc spojitých dynamických systémov. Blok **integrátora**, ktorý sme do tohto štádia používali, nevyžadoval pre naše jednoduché úlohy žiadne špeciálne nastavenia parametrov tohto bloku. Poznamenajme, že tento **integrátor**, ktorý sa prevažne používa len na jednoduchý proces spojitého integrovania, ktorý demonštruje nasledujúca bloková schéma na Obr. 9.1, možno použiť aj na zložitejšie spôsoby integrácie, ktorých princíp si vysvetlíme v rámci tejto kapitoly.

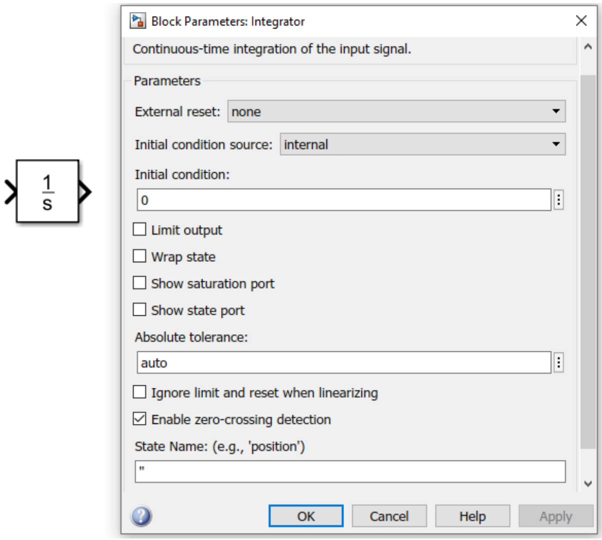


Obr. 9.1. Spojitý integrátor



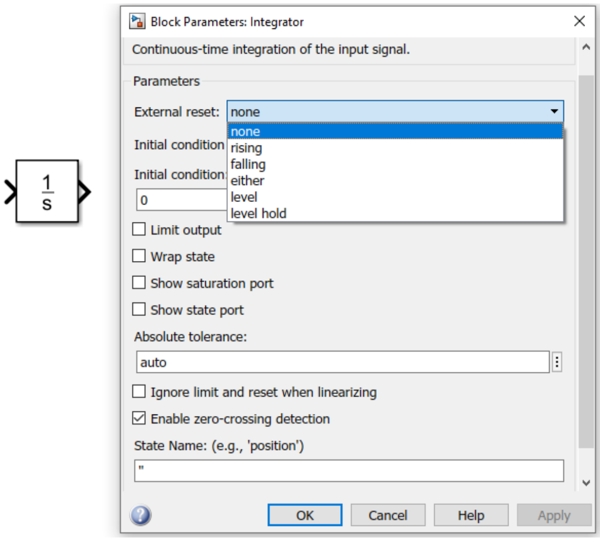
Obr. 9.2. Riešenie integrácie signálu u(t) s využitím bloku Integrator

Pripomeňme, že ak privedieme na vstup spojitého integrátora signál $\mathbf{y(t)}$, výstup tohto bloku bude odpovedať signálu $\int \mathbf{y(t)dt}$ a naopak, ak na vstup integrátora privedieme signál $\frac{\mathbf{dy(t)}}{\mathbf{dt}}$, potom na výstupe tohto bloku sa objaví signál $\mathbf{y(t)}$. Riešenie numerickej integrácie signálu $\mathbf{u(t)}$, ktoré bolo simulované blokovou schémou podľa Obr. 9.1, je znázornené na Obr. 9.2. Každý blok spojitého integrátora – **Integrator**, poskytuje možnosť nastaviť rôzne parametre spôsobu integrácie. Tieto možno meniť v dialógovom okne parametrov, pozri Obr. 9.3.



Obr. 9.3. Parametre bloku spojitého integrátora

Medzi základné parametre spojitého integrátora môžeme zaradiť parametre, ktorými sú **External reset**, **Initial condition**, **Limit Output**, **Saturation port** a ďalšie iné, pozri Obr. 9.4.



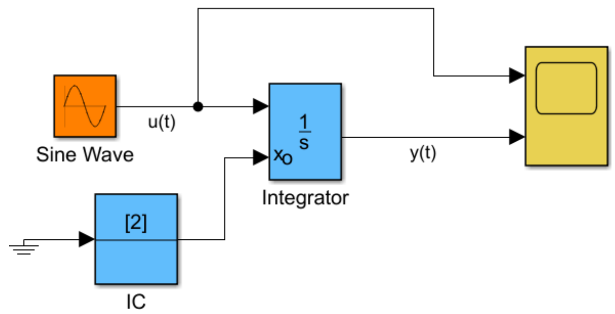
Obr. 9.4. External reset integrátora

Poznamenajme, že každý **integrátor** možno v priebehu procesu integrovania **resetovať** zapnutím vlastnosti **External reset**.

Vo všeobecnosti môžeme voliť zo šiestich možností **automatického resetovania integrátora**, ktorými sú **none**, **rising**, **falling**, **either**, **level**, **level hold**, pozri Obr. 9.4. Ďalšou možnosťou pri nastavení parametrov integrovania je možnosť špecifikovať počiatočné podmienky – **Initial conditions**. Tieto môžeme zadať buď priamo **interným zadaním** v tomto bloku alebo prostredníctvom **externého portu**, ktorý pre podmienku vytvorí vstupný terminál.

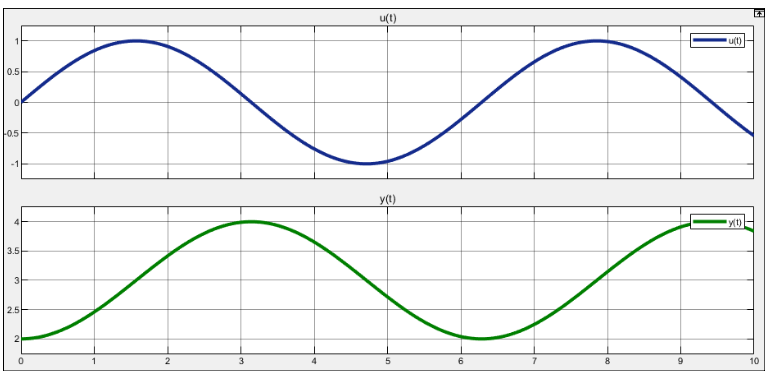
Na základe zvoleného typu riešiča v parametroch nastavenia simulácie, blok **Integrator** vypočíta výstupný signál v aktuálnom časovom kroku, použitím **numerickej integrácie** so vstupnej aktuálnej hodnoty signálu. Ako sme už spomenuli, tak prostredníctvom dialógového okna možno meniť vstupnú počiatočnú podmienku – **Initial condition**. Počiatočné podmienky môžu alebo nemusia byť v každom čase integrácie konštantné. Z tohto dôvodu existuje na **integrátore** možnosť zapnutia **externého portu**, na ktorý môžeme priviesť ľubovoľný signál vstupnej počiatočnej podmienky.

Zapnutie externého portu priamo súvisí s možnosťou **automatického resetovania integrátora**. V blokovej schéme nasledujúceho Obr. 9.5 je použitý špeciálny blok **IC block**, ktorý sa nachádza v knižnici **Signal attributes**. Tento blok sa primárne používa na zadefinovanie počiatočnej podmienky, ktorá v čase $\mathbf{t = 0}$ nadobúda hodnotu špecifikovanú priamo v tomto bloku **IC** a v ďalších časových krokoch nadobúda hodnotu privedenú vstupným signálom. Ak zvolíme možnosť externej počiatočnej podmienky pre **blok integrátora**, potom ikona tohto **integrátora** zmení svoj tvar podľa Obr. 9.5.



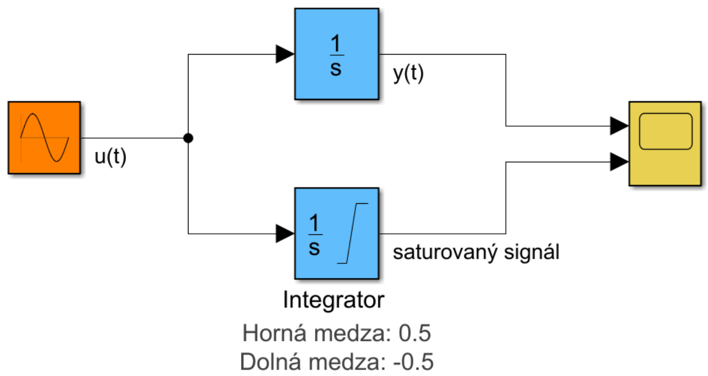
Obr. 9.5. Použitie externého portu na zadefinovanie počiatočnej podmienky

Výsledok použitia bloku **Integrator** so zapnutím vstupným portom pre externú počiatočnú podmienku, na ktorý je privedený signál z bloku **IC**, je znázornený na Obr. 9.6.



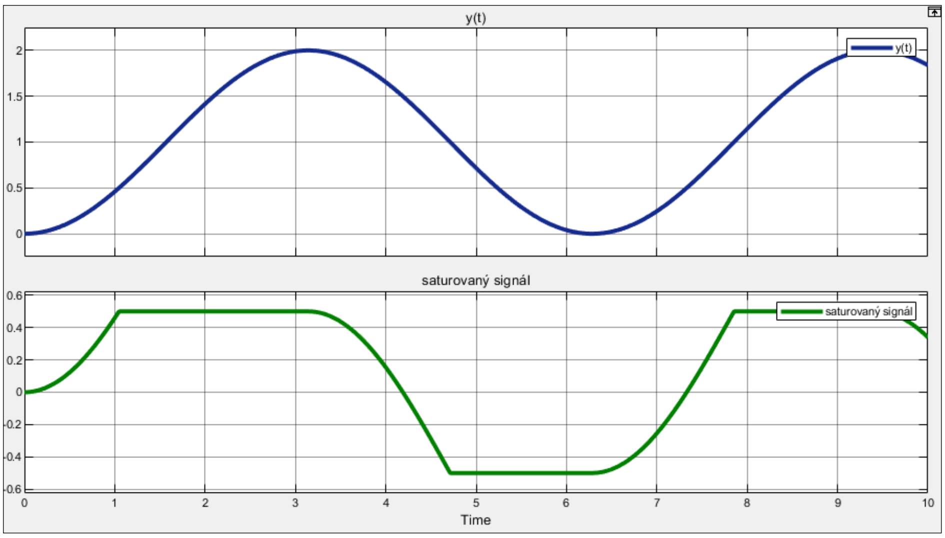
Obr. 9.6. Zobrazenie integrácie signálu s využitím počiatočnej

Ďalší parameter, ktorý možno meniť v bloku **Integrator**, je **saturácia** výstupného signálu integrátora pomocou parametra **Limit output**, ktorý môžeme voliť v rozmedzí **dolného** a **horného** limitu. Ikona bloku **Integrator** sa zmení na tvar podľa Obr. 9.7.



Obr. 9.7. Saturácia signálu v bloku Integrator

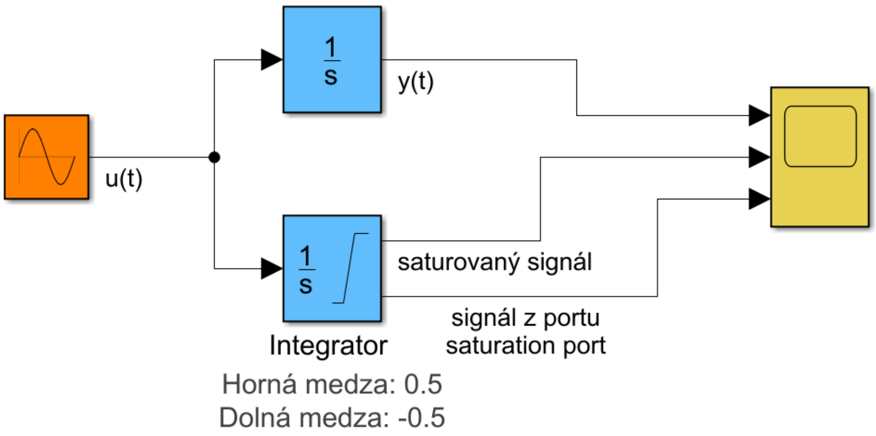
Výsledok použitia bloku **Integrator** pri zapnutej vlastnosti parametra **Limit out**, ktorý saturuje signál v rozmedzí dolnej $(\mathbf{-0.5})$ a hornej $(\mathbf{0.5})$ medze, je znázornený na Obr. 9.8.



Obr. 9.8. Výsledok integrovania a saturácie signálu sínus použitím bloku Integrator

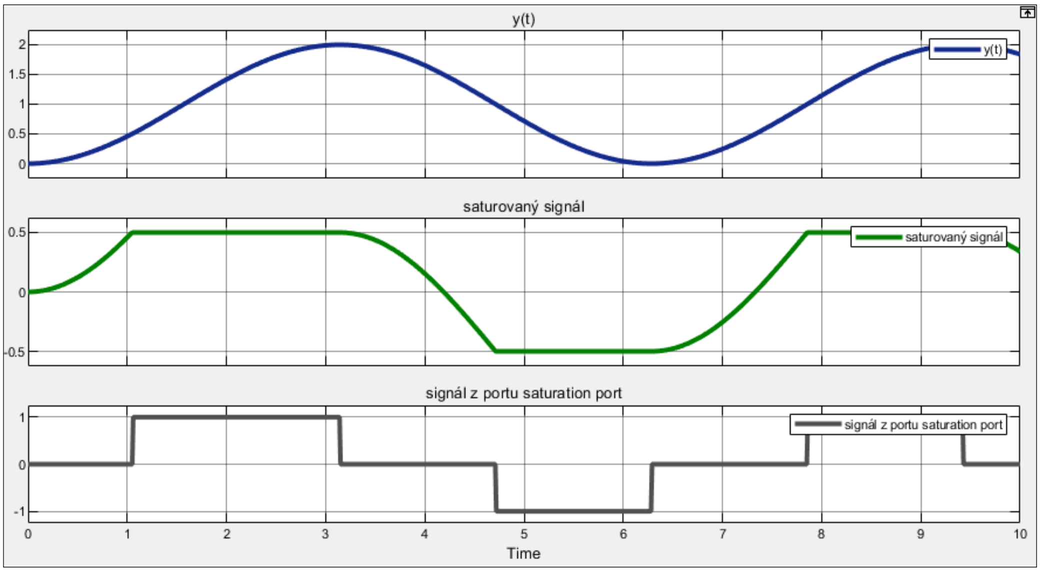
Spolu s **Limit out** parametrom priamo súvisí možnosť zapnutia saturačného portu – **Show saturation port**, ktorý slúži na zobrazenie výstupného saturačného portu, na ktorom výstupný signál nadobúda tri možné hodnoty. Tieto hodnoty indikujú, či došlo v procese integrovania k saturácií **dolnej (-1)** resp. **hornej (1)** medze. Ak signál nadobudne hodnotu **(0)**, potom k saturácii signálu nedošlo.

Bloková schéma, v ktorej bol použitý proces saturácie signálu so zobrazením saturačného portu – **Show saturation port**, je zobrazená na Obr. 9.9.



Obr. 9.9. Saturácia signálu v bloku Integrator

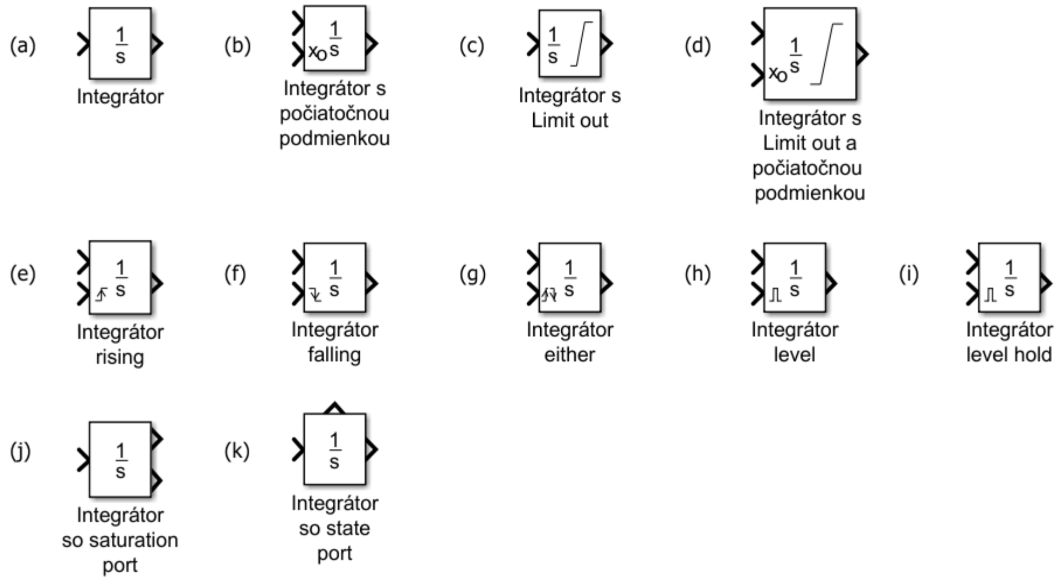
Výsledok simulácie blokovej schémy, v ktorej sme využili zapnutie saturácie signálu pomocou parametra **Limit out**, ktorý saturuje signál v rozmedzí dolnej $(-\mathbf{0.5})$ a hornej $(\mathbf{0.5})$ a zobrazenia saturačného portu, je znázornený na ďalšom Obr. 9.10.



Obr. 9.10. Saturácia signálu v bloku Integrator a zobrazenie saturačného portu

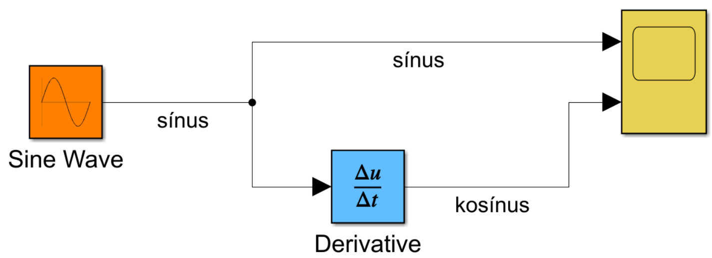
Ikona bloku **Integrator** sa mení podľa toho, aké parametre a vlastnosti sú zvolené v dialógovom okne parametrov tohto **integrátora**. Integrátor môže nadobudnúť celkovo 11 modifikácií, ktorými sú **Integrator**, **Integrator s počiatočnou podmienkou**, **Integrator s Limit out**, **Integrator s IC a Limit out**, **Integrator Rising**, **Integrator Falling**, **Integrator Either**, **Integrator Level**, **Integrator Level Hold**, **Integrator so Saturation Port** a **Integrator so State Port**.

Na nasledujúcom Obr. 9.11 sú znázornené všetky možné modifikácie integrátora a jeho odpovedajúce tvary ikony.

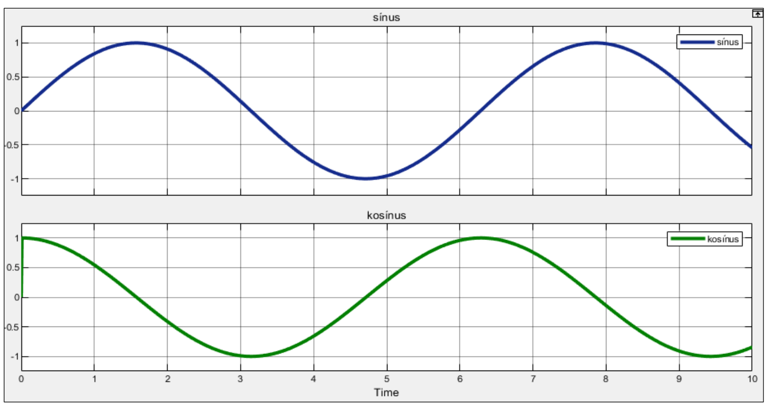


Obr. 9.11. Rôzne konfigurácie bloku **Integrátor**, (a) klasický integrátor, (b) externá počiatočná podmienka, (c) saturácia signálu, (d) saturácia s externou IC, (e) rising reset, (f) falling reset, (g) either reset, (h) level reset, (i) level hold reset, (j) saturation output port, (k) state port

Pripomeňme, že v knižnici **Continuous** možno okrem blokov **Integrator**, **Transfer Fcn**, **Zero-pole** a **State-Space**, ktoré sme vysvetlili v predchádzajúcich kapitolách, nájsť aj blok pod názvom **Derivative**. Použitie tohto bloku **Derivate**, ktorý slúži na numerické derivovanie signálu, je znázornené na Obr. 9.12. Výsledok numerického derivovania signálu **sínus** je znázornený na ďalšom Obr. 9.13.



Obr. 9.12. Príklad použitia bloku Derivate



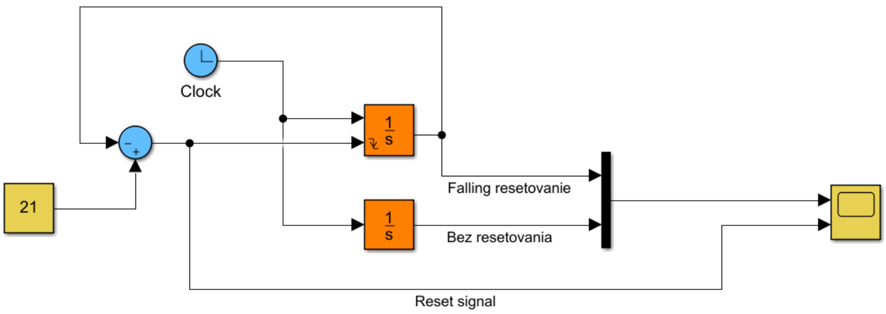
Obr. 9.13. Výsledok numerického derivovania funkcie sínus

9.2 RESETOVANIE INTEGRÁTORA TYPU FALLING

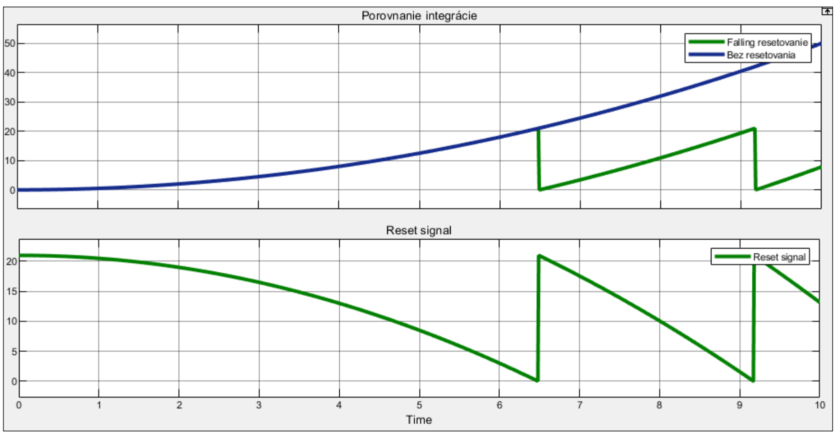
Externý reset integrátora v podobe piatich možností typu **Rising**, **Falling**, **Either, Level** a **Level Hold** umožňuje riadiť automatický **reset integrátora**, pozri Obr. 9.4. Poznamenajme, že pod resetovaním integrátora rozumieme zmenu aktuálnej výstupnej hodnoty **integrátora** na hodnotu **počiatočnej podmienky IC**. Výhoda použitia automatického resetovania je v tom, že zapnutím portu **External Reset** môžeme integrátor pomocou riadiaceho signálu, ktorý je privedený na tento **External Reset port**, automaticky resetovať podľa nastavenej podmienky resetovania napr. typu **Falling** a ďalších iných.

Príklad **integrátora** s podmienkou typu **Falling**, ktorý sa automaticky resetuje, je zobrazený na blokovej schéme Obr. 9.14. Ako možno vidieť, tak v tejto schéme boli použité dva typy **integrátorov**. Jeden z nich je upravený na funkciu automatického resetu typu **Falling** a druhý **integrátor** je ponechaný v stave bez resetovania. Vstupný signál týchto integrátorov je rovnaký pre obidva integrátory a v oboch prípadoch integrátorov bola predpokladaná nulová hodnota počiatočnej podmienky.

Poznamenajme, že k resetovaniu integrátora typu **Falling** dochádza, ak sa **riadiaci signál** na vstupnom **reset porte** mení **z kladnej hodnoty na nulovú hodnotu** alebo **z kladnej hodnoty na zápornú hodnotu**. Na ďalšom Obr. 9.15 je znázornené porovnanie integrovania signálu pri nastavení integrátora na typ **Falling** a takisto integrovanie signálu bez použitia funkcionality resetovania.



Obr. 9.14. Bloková schéma integrátora s parametrom Falling

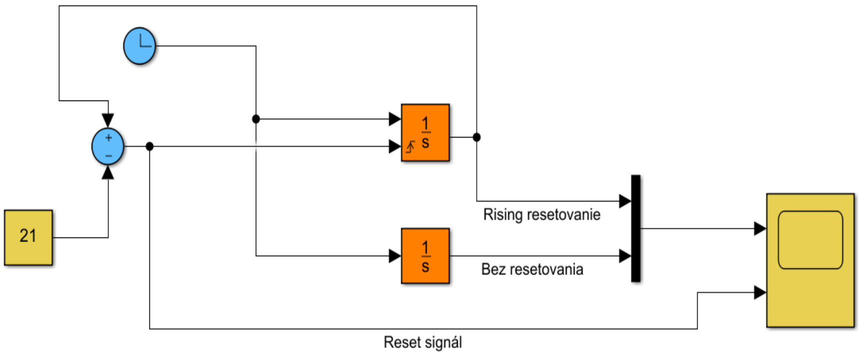


Obr. 9.15. Porovnanie integrácie signálu s resetovaním – integrátora typu Falling a bez resetovania integrátora

Na predchádzajúcom Obr. 9.15 možno vidieť, že k resetovaniu integrátora na počiatočnú hodnotu **IC = 0**, dochádza v bodoch, keď sa riadiaci reset signál mení z **kladnej** hodnoty na **nulovú**, resp. na **zápornú** hodnotu.

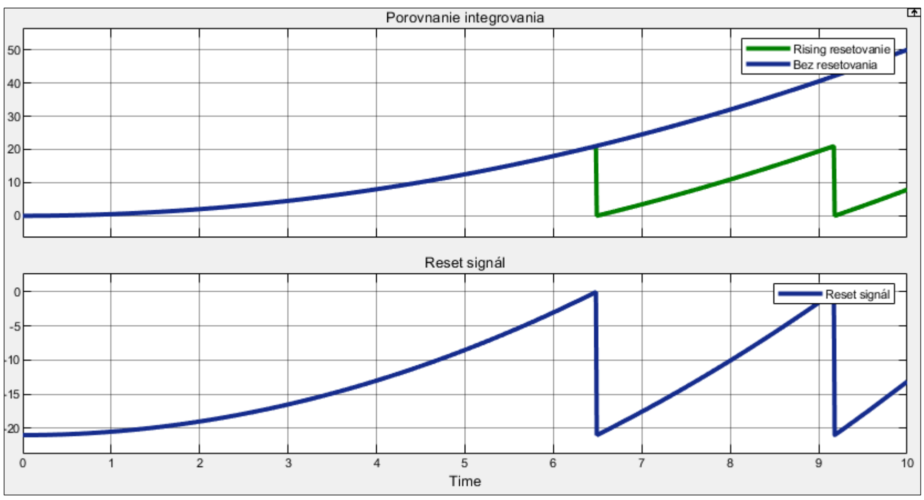
9.3 RESETOVANIE INTEGRÁTORA TYPU RISING

Ak zvolíme na danom spojitom integrátore parameter **Rising**, potom tento integrátor je nastavený do stavu resetovania, ku ktorému dochádza v momente, keď sa riadiaci **reset signál** mení z **nulovej hodnoty na kladnú hodnotu** alebo **zo zápornej hodnoty na hodnotu kladnú**. Princíp resetovania typu **Rising** si ukážeme na nasledujúcom príklade blokovej schémy podľa Obr. 9.16.



Obr. 9.16. Bloková schéma integrátor typu Rising

Potom na ďalšom Obr. 9.17 je znázornené porovnanie integrovanej veličiny pri nastavení resetovania integrátora typu **Rising** a bez nastavenia tejto funkcionality resetovania.

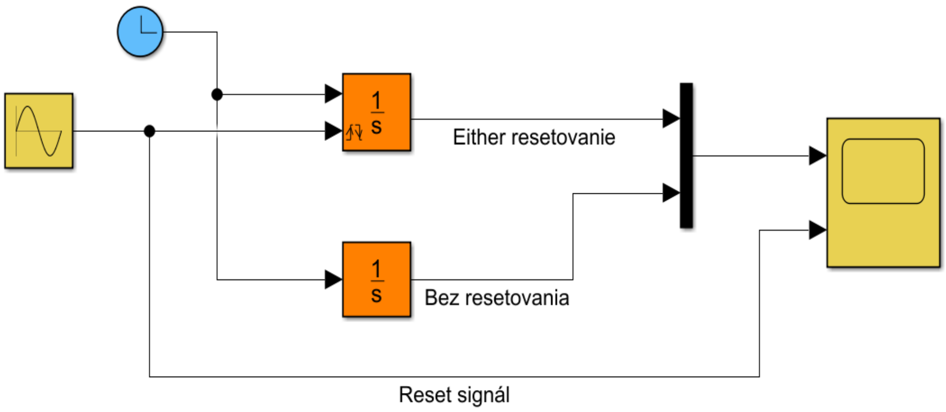


Obr. 9.17. Porovnanie integrácie signálu s resetovaním – integrátora typu Rising a bez resetovania integrátora

Ako možno vidieť na predchádzajúcom Obr. 9.17, tak k resetovaniu integrátora dochádza v okamihu, ak **reset signal** mení hodnotu so **zápornej hodnoty** na **nulovú**, resp. **kladnú hodnotu**.

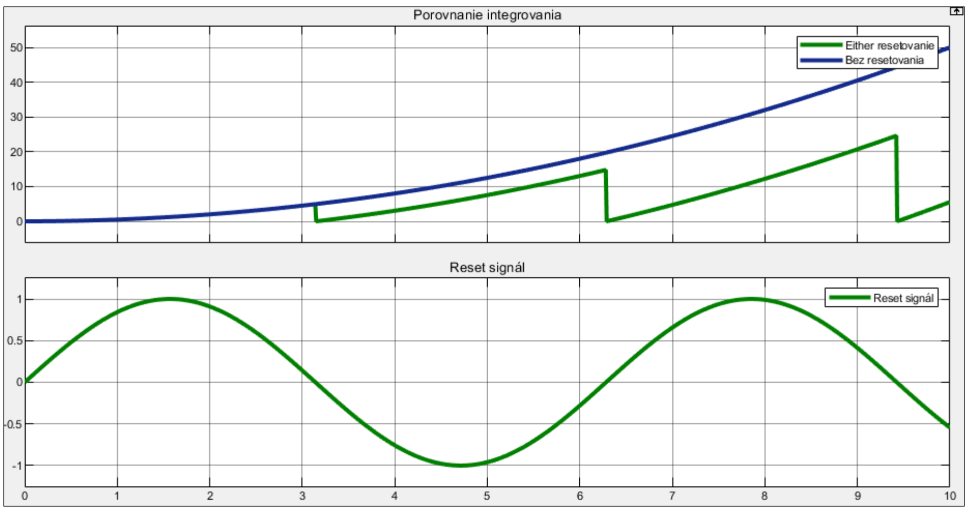
9.4 RESETOVANIE INTEGRÁTORA TYPU EITHER

Ďalej sa budeme zaoberať nastavením integrátora typu **Either**. V tomto prípade nastavenia integrátora dochádza k resetovaniu integrátora v okamihu, keď sa riadiaci **reset signál** mení z **nulovej hodnoty na nenulovú hodnotu**, prípadne **sa mení znamienko** tohto riadiaceho signálu. Ukážku funkcionality resetovania typu **Either** si ukážeme na nasledujúcej blokovej schéme podľa Obr. 9.18.



Obr. 9.18. Bloková schéma integrátora typu Either

Potom na nasledujúcom Obr. 9.19 je znázornené porovnanie integrovanej veličiny signálu, pri nastavení integrátora na typ **Either** a takisto integrovanie signálu vstupnej veličiny pri klasickom spôsobe integrovania bez zapnutej funkcionality **resetovania**.

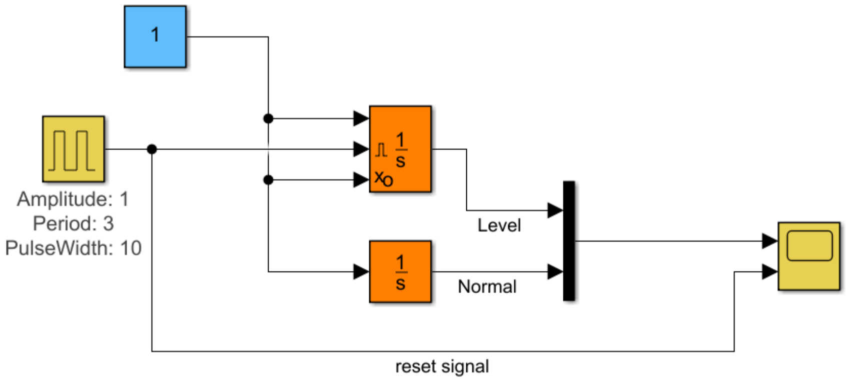


Obr. 9.19. Porovnanie integrácie signálu s resetovaním – integrátora typu Either a bez resetovania integrátora

Ako možno vidieť na predchádzajúcom Obr. 9.19, tak k resetovaniu tohto integrátora dochádza v prípade, že **reset signal** mení hodnotu so **zápornej** hodnoty na **kladnú** hodnotu, prípadne, že sa reset signál mení z **kladnej** na **zápornú** hodnotu.

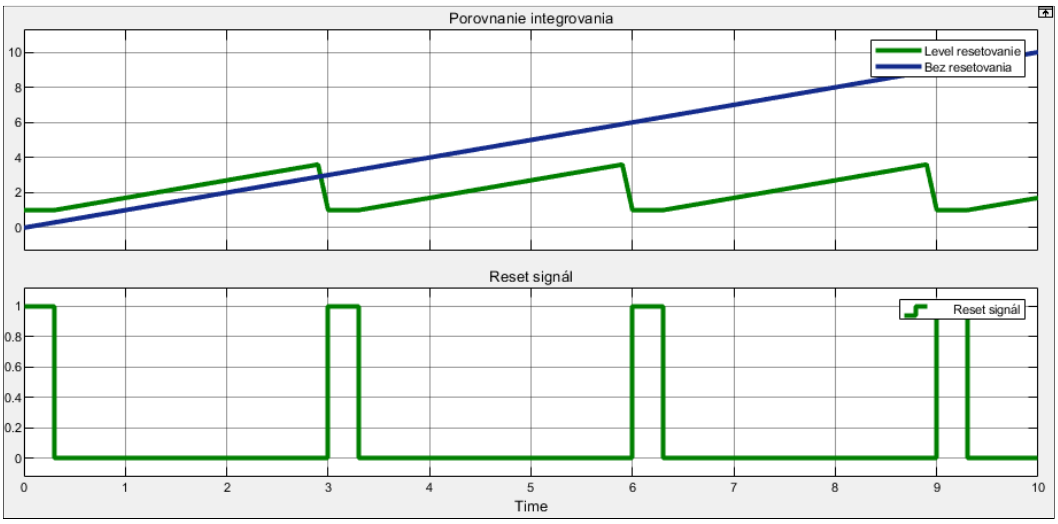
9.5 RESETOVANIE INTEGRÁTORA TYPU LEVEL A LEVEL HOLD

V prípade, že zvolíme na integrátore možnosť resetovania **Level** alebo **Level Hold**, k resetovaniu integrátora bude dochádzať v okamihu, keď **reset signál** bude nadobúdať **nulovú hodnotu v aktuálnom** časovom kroku alebo sa bude meniť z **nenulovej hodnoty** v prechádzajúcom časovom kroku **na nulovú hodnotu** v aktuálnom časovom kroku. Funkcionalitu si ukážeme na nasledujúcej blokovej schéme podľa Obr. 9.20.



Obr. 9.20. Bloková schéma integrátora typu Level

Na ďalšom Obr. 9.21 je znázornené porovnanie integrovanej veličiny pri nastavení resetovania integrátora typu **Level** a bez nastavenia tejto funkcionality resetovania.



Obr. 9.21. Porovnanie integrácie signálu s resetovaním – integrátora typu Level a bez resetovania integrátora

Ako možno vidieť na predchádzajúcom Obr. 9.17, tak k resetovaniu integrátora dochádza v okamihu, ak **reset signal** mení hodnotu z **nenulovej hodnoty** na **nulovú** resp. z nulovej hodnoty na **nenulovú hodnotu**.

9.6 TVORBA SUBSYSTÉMU V SIMULINKU

V tejto kapitole si ukážeme, ako možno jednoduchým spôsobom vytvoriť z ľubovoľnej schémy v **Simulinku** tzv. **Subsystém**. **Subsystém** predstavuje vlastný užívateľom vytvorený blok z vybranej časti **blokovej schémy**. O použití subsystému je výhodné uvažovať vtedy, ak chceme sprehľadniť zložitejšie a neprehľadné blokové diagramy, prípadne ak sa niektoré časti blokovej schémy opakujú.

Princíp vytvorenia **subsystému** z niektorej z časti **blokového diagramu** spočíva v označení tejto časti diagramu myšou, kliknutí pravého tlačítka myši na vyznačenú časť diagramu a zvolení príkazu **Create Subsystem from Selection**. Druhým spôsobom je použitie klávesovej skratky **CTRL+G**. Ako vytvoriť subsystém si ukážeme na ďalšom príklade.

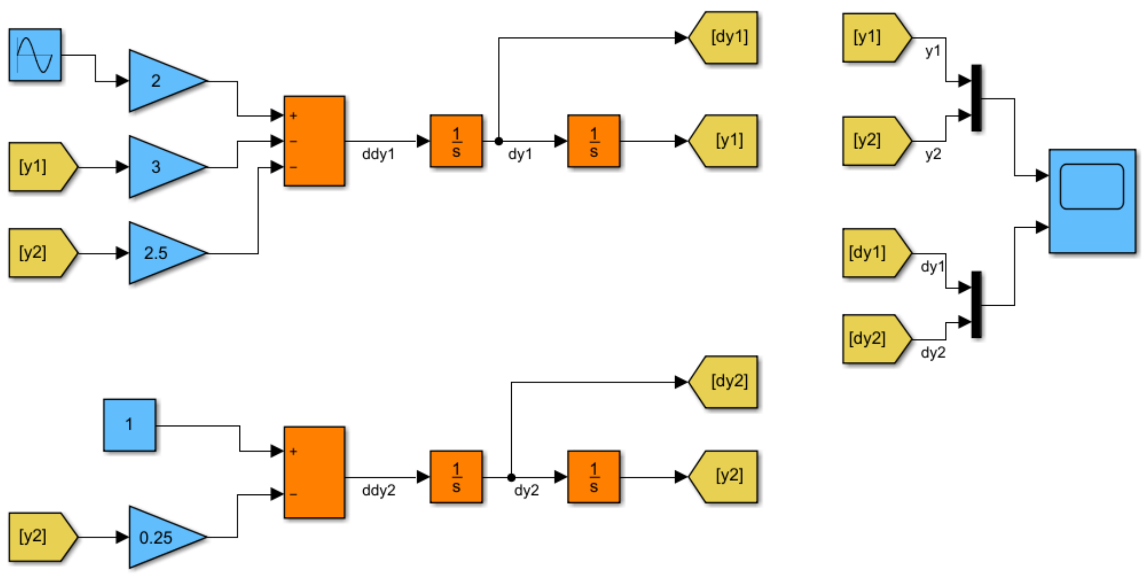
Príklad č. 9.1.

Riešte sústavu dvoch diferenciálnych rovníc vyššieho rádu pomocou blokovej schémy v **Simulinku** s využitím bezkontaktného prenosu signálu.

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1(t) + 2.5 \cdot y_2(t) + 3 \cdot y_1(t) = 2 \cdot \sin(t)\,, \\ &\ddot{y}_2(t) + 0.25 \cdot y_2(t) = 1\,. \end{aligned} \tag{9.1}$$

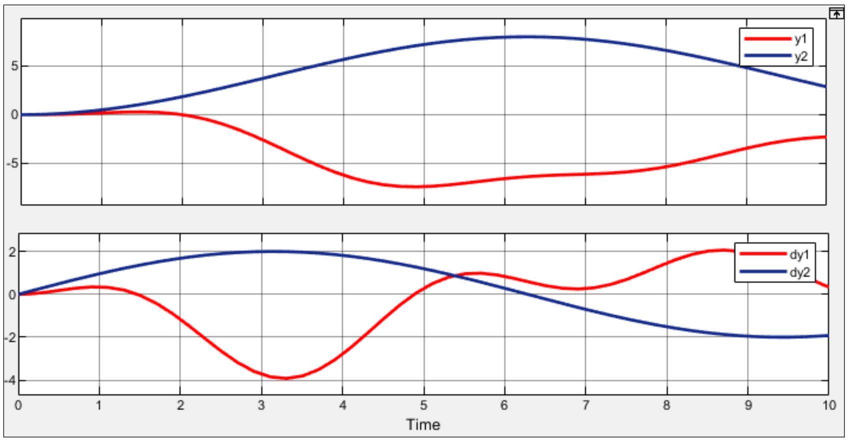
Riešenie:

Systém diferenciálnych rovníc podľa zadania budeme realizovať **blokovou schémou** s využitím **bezkontaktného prenosu signálov**. V schéme zadefinujme dve unikátné premenné s názvom $\mathbf{y_1}$ a $\mathbf{y_2}$. Bloková schéma, ktorá simuluje odozvu systému rovníc podľa zadania je zobrazená na Obr. 9.22.



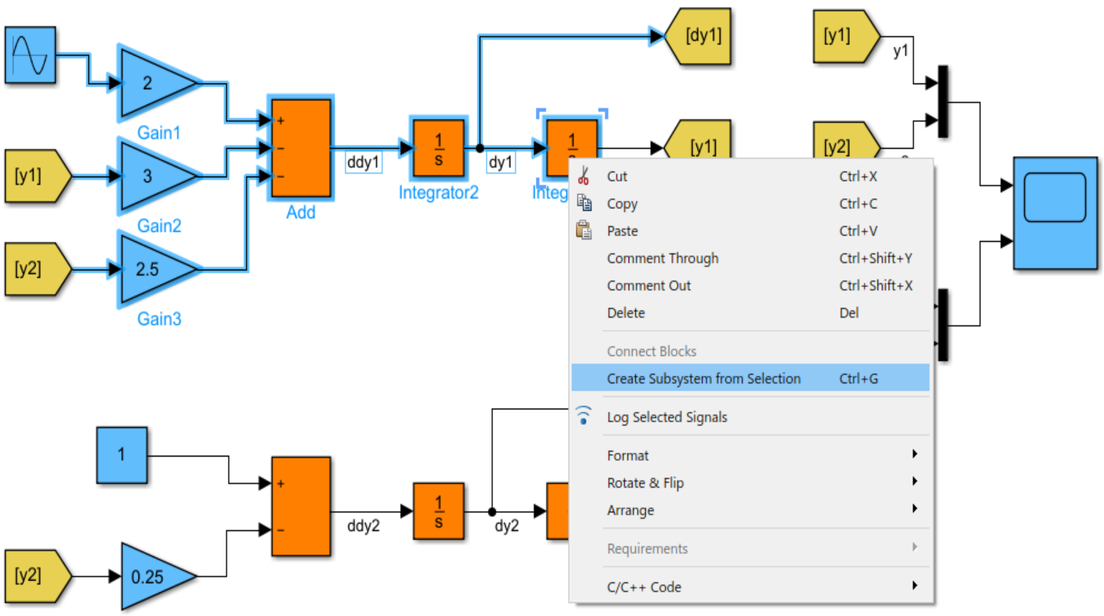
Obr. 9.22. Bloková schéma s bezkontaktným prenosom signálu

Potom riešenie odozvy tohto systému diferenciálnych rovníc možno nájsť na nasledujúcom Obr. 9.23.



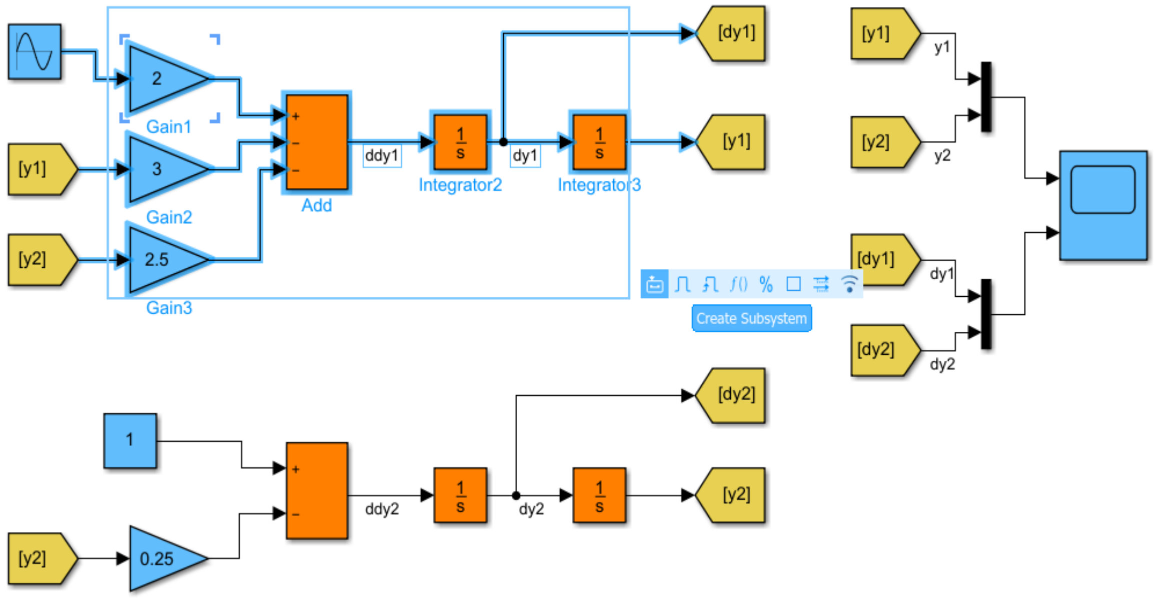
Obr. 9.23. Riešenie sústavy diferenciálnych rovníc

Blokovú schému zobrazenú na Obr. 9.22 zjednodušíme vytvorením dvoch subsystémov. Prvý spôsob ako vytvoriť subsystém z označenej časti blokovej schémy a to použitím príkazu **Create Subsystem from Selection**, ktorý vyvoláme z kontextového menu, je zobrazený na Obr. 9.24.



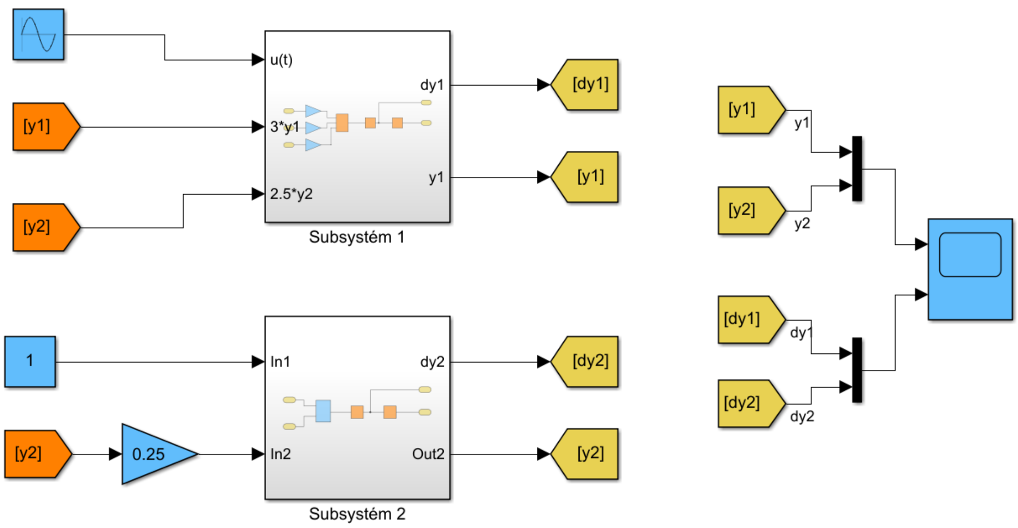
Obr. 9.24. Princíp tvorby Subsystému z kontextového menu

Toto však nie je posledná z možností ako vytvoriť subsystém. V novších verziách **Matlabu** možno **subsystém** vytvoriť napr. z nástrojového menu, ktoré sa zobrazí vždy po vyznačení určitej časti blokovej schémy v **Simulinku**, pozri Obr. 10.12.



Obr. 9.25. Vytvorenie subsystému pomocou nástrojového menu Simulink

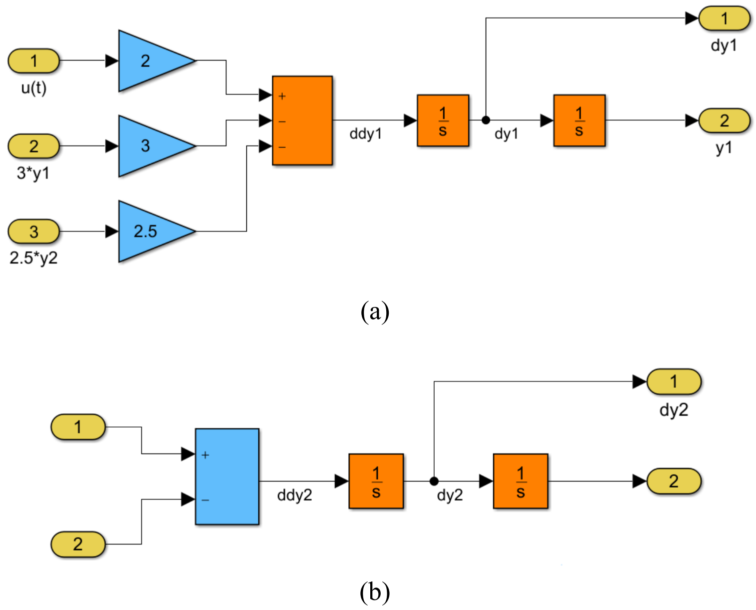
Výsledkom vykonania operácie prvým alebo druhým spôsobom, je subsystém, do ktorého je zbalená vyznačená časť blokového diagramu. Tento subsystém predstavuje užívateľom novo vytvorenú funkciu. **Simulink** automaticky vytvorí **vstupno-výstupné terminály** pre každý **vstupný** a **výstupný** signál, pozri Obr. 9.26.



Obr. 9.26. Bloková schéma s vytvorenými subsystémami

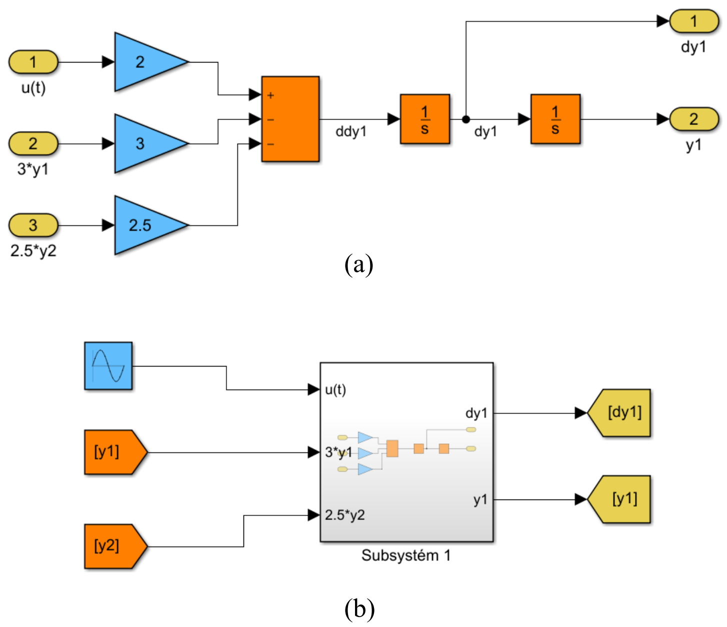
Každý **subsystém** možno po jeho vytvorení otvoriť a nahliadnuť do jeho vnútra, v ktorom sa nachádza bloková schéma tohto subsystému. Samozrejmosťou je možnosť **pre-editovať** a upraviť tento subsystém podľa potreby. Všimnite si, že **subsystém** má **vstupné/výstupné** terminály, ktoré sú vytvorené prostredníctvom blokov **In/Out** blokov.

Pripomeňme, že tieto základné bloky **In/Out** možno nájsť knižnici **Signal routing**. V prípade potreby vytvoriť ďalšie vlastné **vstupy** alebo **výstupy**, pomocou týchto blokoch môžeme každý vytvorený subsystém vhodne modifikovať. Na Obr. 9.27 (a) a (b) je znázornený **Subsystém 1** a **Subsystém 2** blokovej schémy podľa Obr. 9.26.



Obr. 9.27. (a) Subsystém 1, (b) Subsystém 2

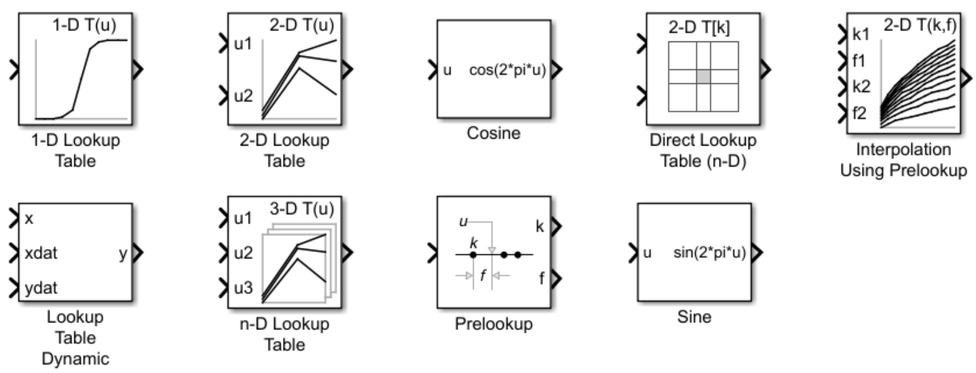
Každý **vstupno-výstupný terminál** možno pomenovať príslušným **názvom** (z angl. **label**), ktorý sa potom zobrazí na maske vytvoreného subsystému, pozri Obr. 9.28.



Obr. 9.28. Popis terminálov subsystému: (a) bloková schéma subsystému, (b) bloková schéma so subsystémom s pomenovanými terminálovými vstupmi a výstupmi

9.7 LOOKUP TABLES BLOKY

V mnohých prípadoch je nutné priradiť hodnotu na základe funkčnej závislosti $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, ktorá je definovaná množinou nameraných bodov. Interpolácie množiny bodov sú v **Simulinku** veľmi sofistikovane riešené prostredníctvom použitia tzv. **Lookup tables**. Tieto bloky možno nájsť v knižnici **Lookup tables**, pozri Obr. 9.29.



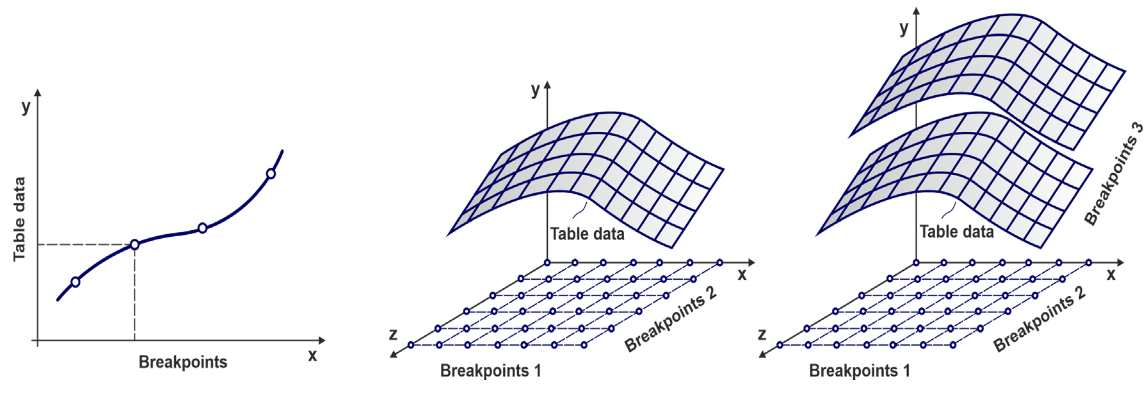
Obr. 9.29. Knižnica blokov Lookup tables

Z tejto knižnice môžeme spomenúť tieto tri najpoužívanejšie interpolácie, ktorými sú:

a) **Lookup Table 1-D** (interpoluje krivku bodov), pozri Obr. 9.30 (a),

b) **Lookup Table 2-D** (interpoluje plochu v rovine zostavenú z mriežky bodov v rovine xz), pozri Obr. 9.30 (b),

c) **Lookup Table n-D** (interpoluje množinu plôch v priestore zostavených z mriežky bodov v rovine xz), pozri Obr. 9.30 (c).



(a) (b) (c)

Obr. 9.30. Lookup tables: (a) 1-D Lookup table, (b) 2-D Lookup table, (c) 3-D Lookup table

Poznamenajme, že v prípade **Lookup table 1-D** je nutné špecifikovať ako vstupné parametre závislosti $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dva typy prvkov, ktorými sú tzv. **breakpoints**, tieto predstavujú **x-ové** súradnice bodov a **Table data**, ktoré predstavujú odpovedajúce **y-ové** súradnice bodov.

10 MODELOVANIE ĎALŠÍCH TYPOV DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV V SIMULINKU

V tejto kapitole sa zameriame na modelovanie ďalších príkladov dynamických systémov spojitého charakteru a to z rôznej fyzikálnej podstaty, ktorými sú **mechanické**, **elektrické**, **fluidné** a **tepelné systémy**. Na modelovanie a simuláciu týchto dynamických systémov využijeme poznatky a skúsenosti, ktoré sme doteraz nadobudli z predchádzajúcich kapitol tejto knihy a takisto princípy modelovania, ktoré boli bližšie popísané v knihe **Modelovanie a simulácia mechatronických systémov 1**, pozri [16]. Na jednoduchých príkladoch dynamických systémov si ukážeme spôsoby modelovania a simulácie týchto dynamických systémov blokovým diagramom v **Simulinku**.

10.1 PRÍKLADY MODELOVANIA MECHANICKÝCH SYSTÉMOV

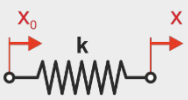
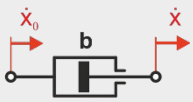
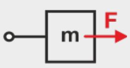
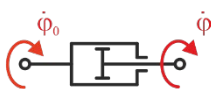
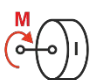
Mechanický systém je systém, ktorý najčastejšie pozostáva z pohyblivých častí – **hmoty** a nepohyblivých častí – **rámy**. Všetky zariadenia alebo stroje konajúce nejaký pohyb, ktoré poznáme z bežnej praxe prakticky predstavujú nejaký typ **mechanického systému**. Medzi základné stavebné bloky **mechanického systému** patria **pružiny**, **tlmiče** a **hmoty**. **Pružiny** predstavujú **tuhosť systému**, **tlmiče** plnia úlohu tlmiaceho charakteru a napokon **hmoty** reprezentujú **zotrvačnosť** systému a kladú **odpor proti pohybu** telies pri ich akcelerácií.

Mechanické systémy možno rozdeliť na tri základné typy a to:

- mechanické systémy **translačného charakteru**
- mechanické systémy **rotačného charakteru**
- a mechanické systémy **kombinované** (translačného aj rotačného charakteru)

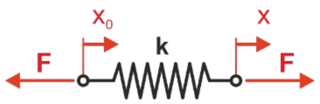
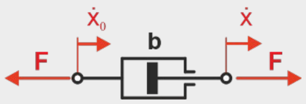
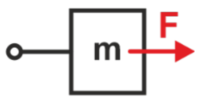
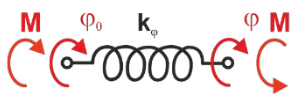
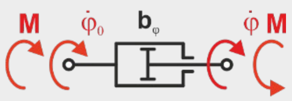
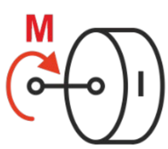
Podľa príslušného typu mechanického systému môžeme rozlíšiť tieto tri základné komponenty mechanického systému a používať ich schematické značky zobrazené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 10.1. Základné schematické značky mechanického systému

Systém	Pružina	Tlmič	Hmota	Zaťaženie systému	Odozva systému
Translačný systém				**F** (sila)	Posunutie **x**, Rýchlosť **v**
Rotačný systém				**M** (moment)	uhlové natočenie **φ**, uhlová rýchlosť **ω**

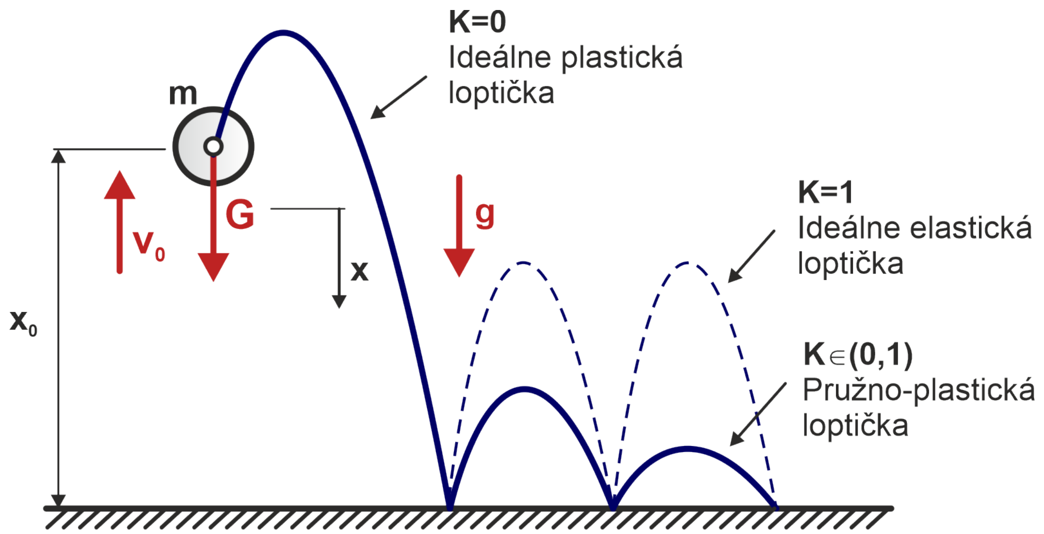
Pri modelovaní systémov **mechanického charakteru** možno využiť matematické vzťahy uvedené v ďalšej tabuľke. V tejto tabuľke sú prezentované zložkové rovnice pre jednotlivé stavebné prvky a takisto diferenciálne rovnice, ktoré popisujú platnosť **II. Newtonovho zákona**.

Tabuľka 10.2. Základné stavebné prvky mechanického systému a ich matematické vzťahy

Stavebný prvok	Rovnica	Uchovaná / Pohltená energia
Translačný systém		
Pružina 	$F = k \cdot (x - x_0)$	$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x - x_0)^2$
Tlmič 	$F = b \cdot (\dot{x} - \dot{x}_0)$	$P = b \cdot (\dot{x} - \dot{x}_0)^2$
Hmota 	$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \ddot{x} = \sum F$	$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$
Rotačný systém		
Torzná pružina 	$M = k_\varphi \cdot (\varphi - \varphi_0)$	$E = \frac{1}{2} \cdot k_\varphi \cdot (\varphi - \varphi_0)^2$
Torzný tlmič 	$M = b_\varphi \cdot (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0)$	$P = b_\varphi \cdot (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0)^2$
Moment zotrvačnosti 	$I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \cdot \ddot{\varphi} = \sum M$	$E = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2$

Príklad č. 10.1.

Elastická loptička hmotnosti $\mathbf{m = 0.1\ kg}$ so známym koeficientom reštitúcie $\mathbf{K = 0.8}$, ktorá je zobrazená na Obr. 10.1, je vrhnutá smerom nahor z počiatočnej výšky $\mathbf{x_0 = 10\ m}$ s počiatočnou rýchlosťou $\mathbf{v_0 = 15\ m.s^{-1}}$. Po dopade na zemský povrch loptička stráca časť svojej **kinetickej energie** a je spätne odrazená smerom nahor. Popíšte pohyb takejto loptičky matematickým modelom a vytvorte simuláciu prostredníctvom blokovej schémy v **Simulinku**.



Obr. 10.1. Skákajúca loptička

Riešenie:

Stratu energie loptičky pri jej pohybe môžeme riadiť koeficientom reštitúcie **K**. V prípade, že hodnota koeficientu **K** sa nachádza v intervale $\mathbf{K \in (0, 1)}$, hovoríme o tzv. **pružne-plastickej** loptičke, ak koeficient reštitúcie $\mathbf{K = 1}$, potom sa loptička správa ako ideálne **elastická**. Napokon ak koeficient $\mathbf{K = 0}$, potom loptička predstavuje prípad **ideálne plastickej** loptičky, pozri Obr. 10.1.

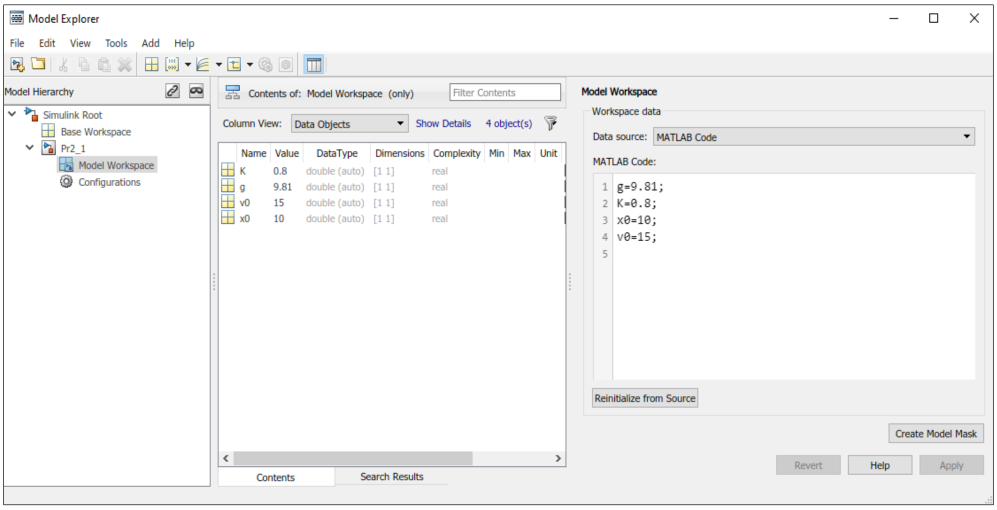
Matematicky možno pohyb loptičky opísať touto diferenciálnu rovnicou, ktorá bola odvodená na základe **II. Newtonovho zákona**. Ako si je možno všimnúť, tak táto diferenciálna rovnica vo všeobecnosti vôbec nezávisí na hmotnosti danej loptičky

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{y} &= -G\ , \\ \ddot{y} &= -g\ . \end{aligned} \tag{10.1}$$

Rýchlosť pohybu loptičky bude postupne klesať, tento pokles závisí od hodnoty **koeficientu reštitúcie K**. Pri každom dopade sa zmení smer dopadovej rýchlosti $\dot{\mathbf{y}}^-$ na odrazovú rýchlosť $\dot{\mathbf{y}}^+$. Tento stav možno v simulácií riadiť prostredníctvom rovnice pre rýchlosť, ktorú budeme počas simulácie meniť použitím koeficientu reštitúcie **K** a to týmto spôsobom

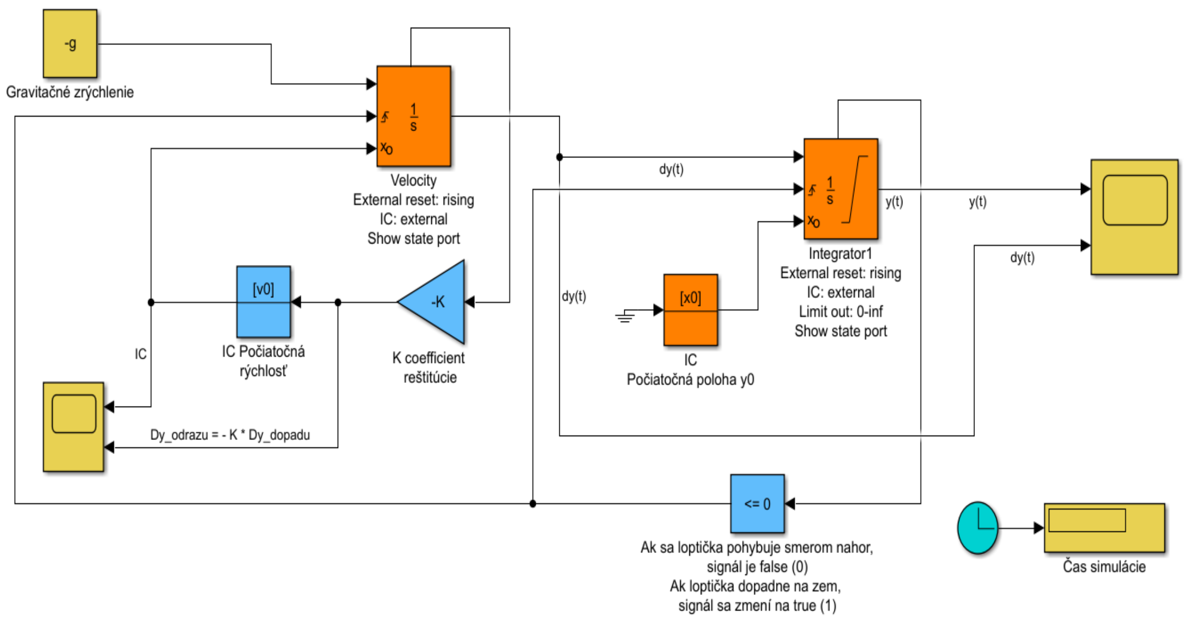
$$\dot{y}^{+} = -K \cdot \dot{y}^{-} \; . \qquad (10.2)$$

Vstupné parametre simulácie, ktoré použijeme na výpočet simulácie zadáme priamo prostredníctvom **Model Explorera** a načítame do **Model Workspace** modelu, pozri Obr. 10.2.



Obr. 10.2. Model Workspace pre skákajúcej loptičku

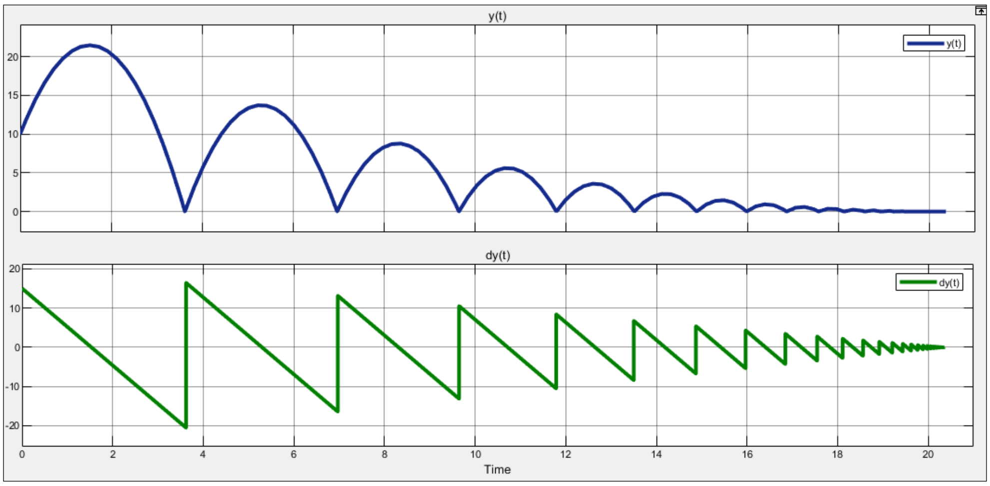
Bloková schéma, ktorá bola vytvorená na riešenie pohybu **skákajúcej loptičky** podľa odvodenej diferenciálnej rovnice (10.1), je zobrazená na Obr. 10.3.



Obr. 10.3. Bloková schéma modelu skákajúcej loptičky

Pri riešení simulácie bola vytvorená automatická podmienka zastavenia, ktorá ukončí beh simulácie, ktorá bola nastavená nekonečne dlhý čas. Táto situácia odpovedá stavu, keď loptička nadobudne prakticky nulovú **kinetickú energiu**. Na ďalšom Obr. 10.4 sú zobrazené grafy **polohy** a **rýchlosti** skákajúcej loptičky, ktorá počas svojho pohybu postupne stráca **kinetickú energiu**.

Pripomeňme, že na výpočet takéhoto pohybu bolo nutné využiť princíp resetovania integrátorov, ktorému sme sa venovali v kapitole 9.3. V tomto prípade sme na resetovanie integrátorov použili nastavenie typu **Rising**, pozri predchádzajúci Obr. 10.3.



Obr. 10.4. Riešenie odozvy pohybu skákajúcej loptičky

10.2 TVORBA SUBSYSTÉMU S MASKOU

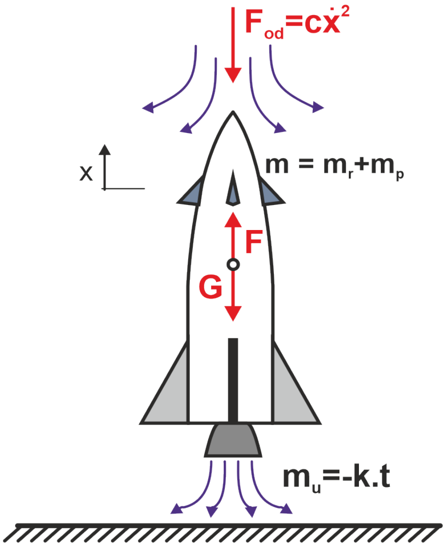
V prechádzajúcej kapitole 9.6 sme si ukázali, ako možno z každej označenej časti **blokovej schémy** vytvoriť **subsystém**. Pripomeňme, že tieto **subsystémy** vytvárame za účelom sprehľadnenia **blokovej schémy**. Už vieme, že pri vytvorení takéhoto subsystému môžeme prostredníctvom **In/Out** blokov jednoducho vytvoriť **vstupné/výstupné terminály**, prostredníctvom ktorých môžeme potom vhodne pomenovať názvy na **maske** vytvoreného **subsystému**.

Teraz si ukážeme, že pre takto vytvorený subsystém môžeme navyše vytvoriť **vlastné dialógové okno** parametrov. Prostredníctvom takto vytvoreného dialógového okna možno meniť vstupné parametre subsystému. Výhodou je, že takéto parametre nie je nutné vôbec definovať ani v lokálnom, a ani v globálnom **Workspace Matlabu**. Nakoľko tieto vstupné parametre sa načítajú priamo z objektov tohto dialógového okna. Takto vytvorené okno nazývame **Maskou subsystému**. Spôsob ako vytvoriť subsystém s maskou si ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad č. 10.2.

Predpokladajme raketu naplnenú palivom $\mathbf{m_p = 50\ kg}$ a vystrelenú smerom nahor. Hmotnosť tejto rakety bez paliva je $\mathbf{m_r = 30\ kg}$, pozri Obr. 10.5. Po vystrelení raketa začne postupne spaľovať palivo, tzn. že začne klesať jej hmotnosť. Raketa počas svojho letu spaľuje palivo rýchlosťou, ktorú možno opísať lineárnou funkčnou závislosťou $\mathbf{m_u} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}$, kde súčiniteľ $\mathbf{k} = \mathbf{0.05\ kg.s^{-1}}$. Ťah motora, ktorý ženie raketu smerom nahor je vyvolaný konštantou silou $\mathbf{F} = \mathbf{1000\ N}$.

Pri pohybe rakety predpokladajme odpor vzduchu, ktorý je priamoúmerný štvorcu jej rýchlosti $\mathbf{v}$. Tvarový odporový súčiniteľ je daný hodnotou $\mathbf{c} = \mathbf{1.8}$. Zobrazte na grafe, ako sa mení poloha a rýchlosť rakety v čase $\mathbf{t}$.



Obr. 10.5. Raketa letiaca v gravitačnom poli zeme

Riešenie:

Celková hmotnosť rakety pred jej vystrelením je daná súčtom hmotnosti rakety bez paliva a hmotnosti paliva, ktorou bola raketa naplnená t. j. $\mathbf{m} = \mathbf{m_r} + \mathbf{m_p}$. Pri tvorbe matematického modelu budeme vychádzať zo **zákona zachovania hybnosti**

$$\frac{dH}{dt} = \sum F \ , \tag{10.3}$$

kde pre hybnosť rakety musí platiť, že $\mathbf{H} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{x}}$. Dosadením hybnosti do predchádzajúcej rovnice dostávame vzťah

$$\frac{d(m \cdot \dot{x})}{dt} = F - m \cdot g - c \cdot \dot{x}^2 \ , \tag{10.4}$$

kde celkovú hmotnosť rakety $\mathbf{m(t)}$ v ľubovoľnom čase $\mathbf{t}$ možno definovať týmto vzťahom

$$m(t) = m_r + m_p - m_u = m_r + m_p - k \cdot t \ . \tag{10.5}$$

Potom dosadením celkovej hmotnosti rakety $\mathbf{m(t)}$ do rovnice (10.4), dostávame tento matematický model

$$\frac{d\left[\left(m_r + m_p - k \cdot t\right) \cdot \dot{x}\right]}{dt} = F - \left(m_r + m_p - k \cdot t\right) \cdot g - c \cdot \dot{x}^2 \ . \qquad (10.6)$$

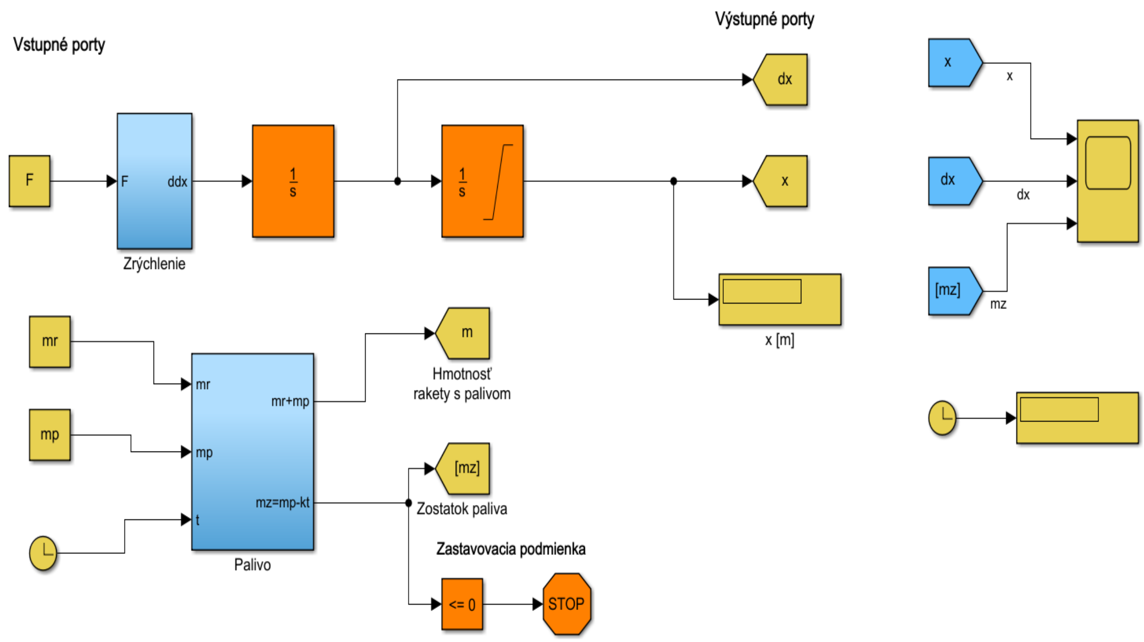
Zderivovaním ľavej strany tejto diferenciálne rovnice podľa času **t**, môžeme dospieť k tejto **diferenciálnej rovnici 2. rádu**

$$-k \cdot \dot{x} + \left(m_r + m_p - k \cdot t\right) \cdot \ddot{x} = F - \left(m_r + m_p - k \cdot t\right) \cdot g - c \cdot \dot{x}^2 \ . \qquad (10.7)$$

Ak teraz túto diferenciálnu rovnicu predelíme výrazom $\left(\mathbf{m_r + m_p - k \cdot t}\right)$, dospejeme k výslednému matematickému modelu v **simulinkovskom tvare**, ktorý budeme riešiť blokovou schémou v **Simulinku**

$$\ddot{x} = \frac{F + k \cdot \dot{x} - c \cdot \dot{x}^2}{\left(m_r + m_p - k \cdot t\right)} - g \ . \qquad (10.8)$$

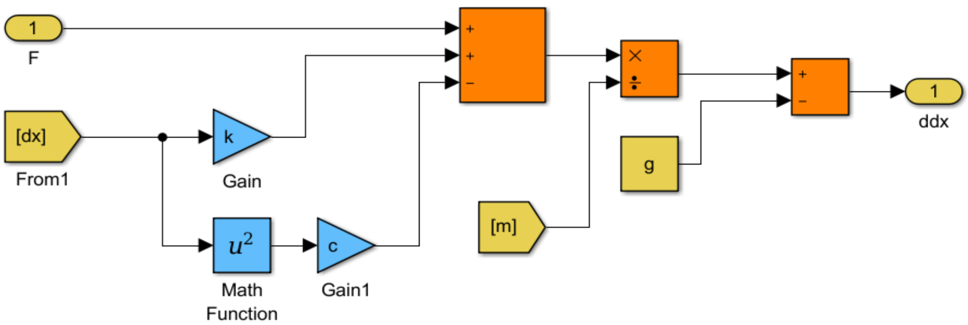
Vstupné parametre nutné pre simuláciu **blokovej schémy rakety** podľa Obr. 10.6, v tomto štádiu nenačítame prostredníctvom **Model Workspace**, ani prostredníctvom **Globálneho Workspace Matlabu**, tak ako sme to uskutočňovali v **Simulinku** do tohto momentu, ale prostredníctvom **Masky**.



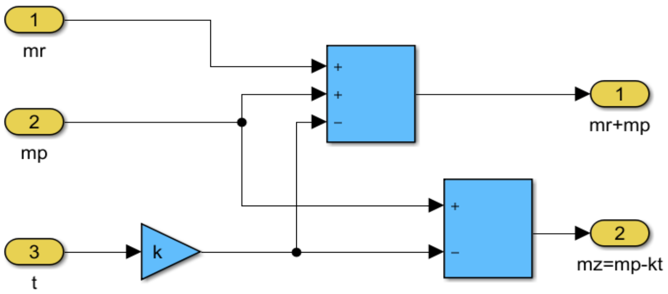
Obr. 10.6. Bloková schéma rakety spaľujúcej palivo

Pri tvorbe subsystému s maskou, zo samotnej blokovej schémy, ktorá rieši simuláciu letu rakety, vytvoríme v prvom rade **subsystém** a následne tomuto subsystému nakonfigurujme **masku subsystému**. Bloková schéma pre letiacu raketu, ktorá letí v odporovom prostredí a počas svojho letu spaľuje palivo je zobrazená na predchádzajúcom Obr. 10.6.

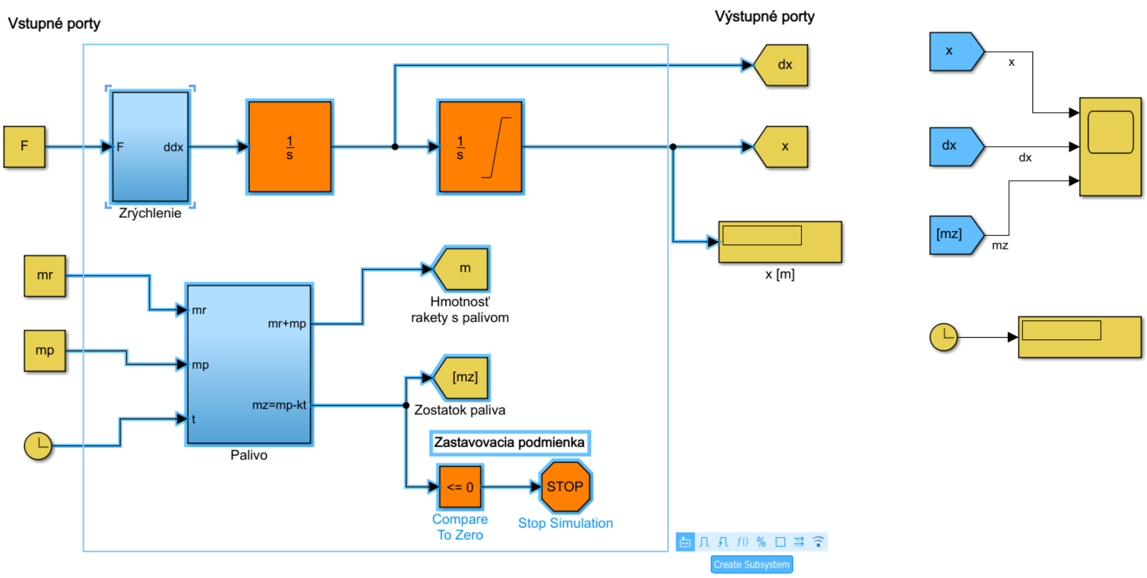
V predchádzajúcej blokovej schéme boli použité dva subsystémy **Zrýchlenie** a **Palivo**. Prvý subsystém – **Zrýchlenie**, ktorý slúži na výpočet zrýchlenia rakety, je zobrazený na Obr. 10.7 a druhý subsystém – **Palivo**, ktorý slúži na výpočet zostatku paliva rakety, je zobrazený na ďalšom Obr. 10.8.



Obr. 10.7. Subsystém Zrýchlenie

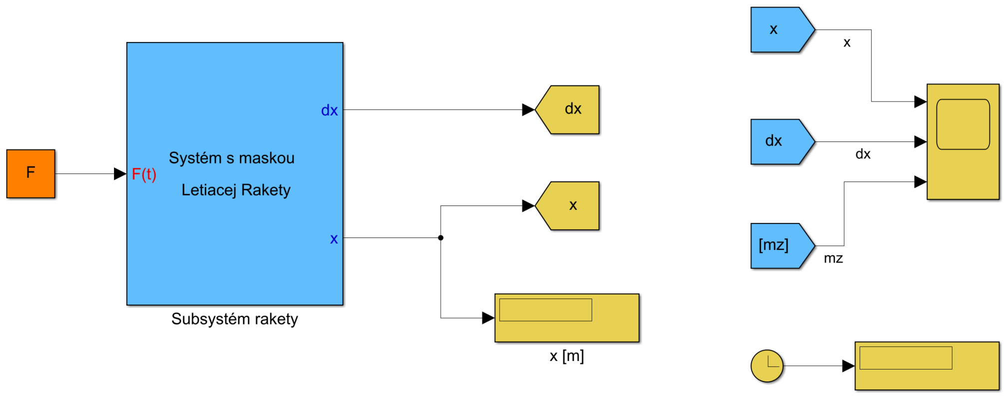


Obr. 10.8. Subsystém Palivo



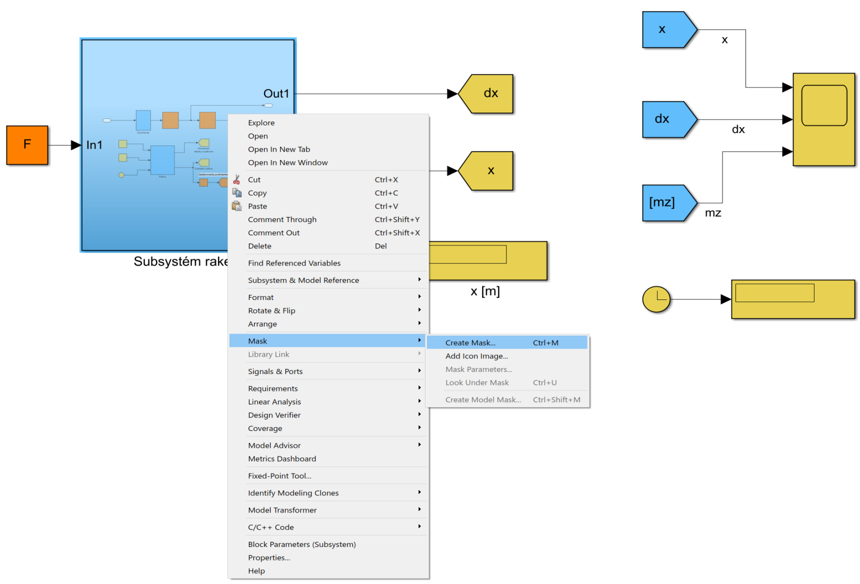
Obr. 10.9. Vytvorenie hlavného subsystému z časti blokovej schémy

Usporiadajme bloky pôvodnej blokovej schémy, ktorá je zobrazená na Obr. 10.6, takým spôsobom, aby sa po oboch stranách subsystémov nachádzali len **vstupno-výstupné terminály** týchto subsystémov. Potom zo strednej časti tejto blokovej schémy vytvoríme **hlavný subsystém** spôsobom ako je to znázornené na Obr. 10.9. Zjednodušená bloková schéma s takto vytvoreným **subsystémom** nadobudne tvar, ktorý je znázornený na ďalšom Obr. 10.10.



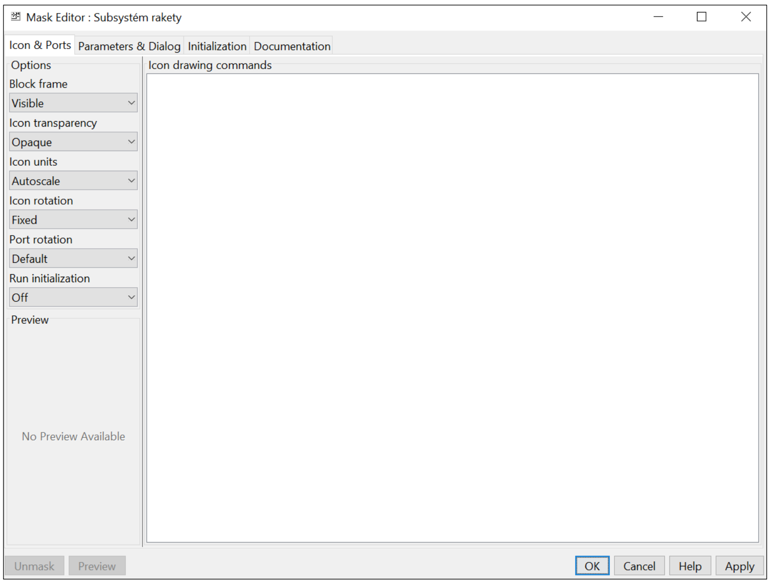
Obr. 10.10. Zjednodušený model rakety so subsystémom

Poznamenajme, že ak by sme v tomto štádiu spustili riešenie **simulácie**, tak **Simulink** bude hlásiť chybovú hlášku. Z toho dôvodu, pretože **nepozná vstupné parametre**, ktoré sme v jednotlivých blokov definovali ako všeobecné platné parametre. Tieto vstupné parametre teraz nebudeme zadávať cez skript prostredníctvom **Model Workspace**, ale zadefinujeme ich prostredníctvom **masky subsystému**. Každý parameter systému, ktorý umožníme meniť pred spustením simulácie zadefinujeme ako parameter v tejto **maske subsystému**. Predtým, než to pristúpime k tvorbe tohto dialógového okna parametrov, musíme daný subsystém pretransformovať na **subsystém s maskou**. Toto uskutočníme, buď klávesovou skratkou **CTRL+M** alebo pomocou príkazu **Mask/Create Mask** z kontextového menu **Matlabu**, pozri Obr. 10.11.



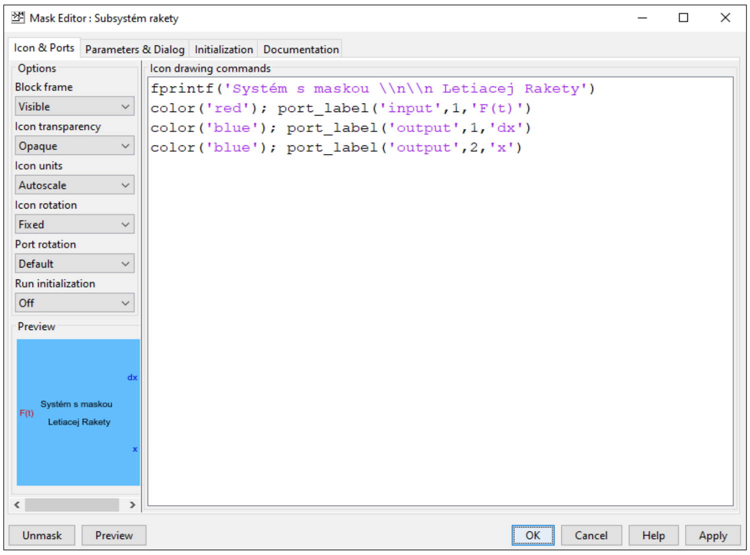
Obr. 10.11. Priradenie masky danému subsystému

Otvorí sa dialógové okno **editora masky subsystému** tzv. **Mask Editor**, ktoré obsahuje viacero sekcií začlenených do nástrojových líšt, pozri Obr. 10.12.



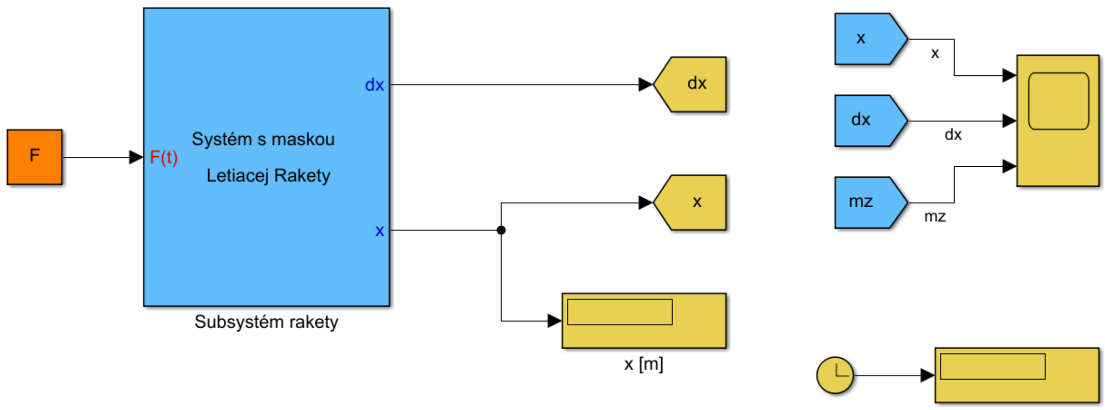
Obr. 10.12. Editor masky subsystému

Na základe editovania prostredníctvom príkazov možno na titulnej lište meniť napr. vizuálny tvar ikony daného subsystému. Na maske subsystému existuje možnosť napr. zobraziť obrázok systému, ktorý daný subsystém reprezentuje a to použitím príkazu **image('cesta k súboru')**, prípadne zobraziť text príkazom **fprintf('text')**, ako aj pomenovať vstupné a výstupné porty subsystému príkazom **port_label ('input/output', port_number)**. Takisto môžeme zmeniť farbu textu tohto portu príkazom **Color**. Pripomeňme, že editor masky možno kedykoľvek vyvolať klávesovou skratkou **CTRL+M**. Ukážka **Mask editora** pre vytvorenie masky subsystému s použitím príkazov je znázornená na Obr. 10.13.



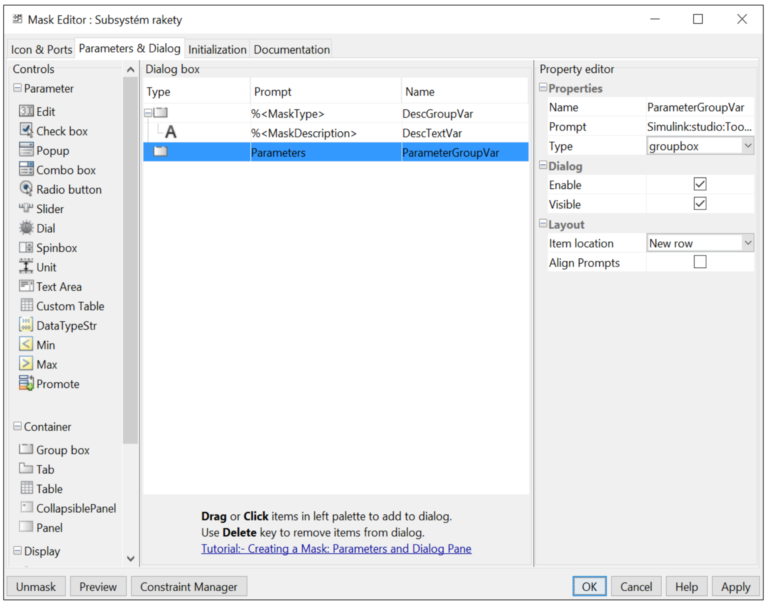
Obr. 10.13. Editor masky subsystému s príkazmi na zobrazenie ikony

Výsledok blokovej schémy s vytvoreným subsystémom s maskou, ktorá bola vytvorená použitím príkazov **fprintf**, **port_label** a **color** podľa editora masky Obr. 10.13, je znázornený na ďalšom Obr. 10.14.



Obr. 10.14. Bloková schéma s vytvorením subsystémom s maskou

Poďme teraz nakonfigurovať masku dialógového okna parametrov, ktorá sa bude zobrazovať pri každom dvoj kliknutí na ikonu subsystému. Masku začneme tvoriť v **Editore masky** na ďalšej lište pod názvom **Parameters & Dialog**, pozri Obr. 10.15.

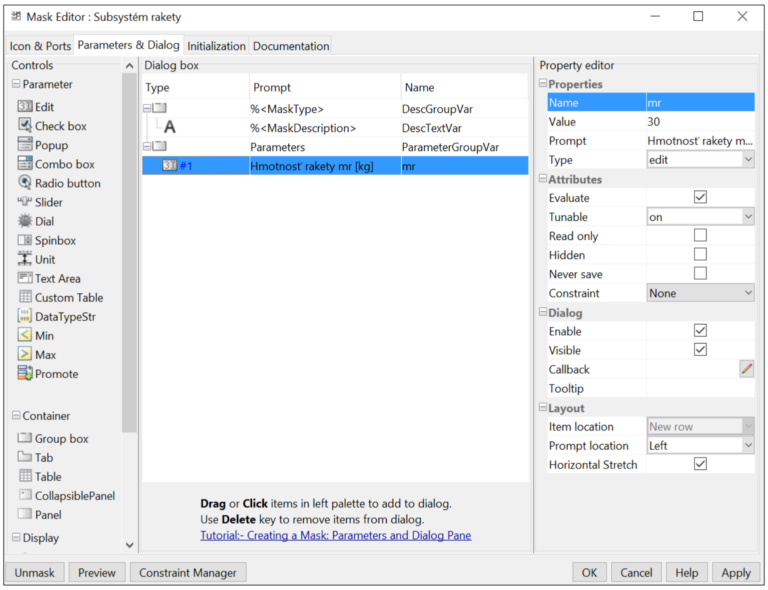


Obr. 10.15. Parametre dialógového okna masky

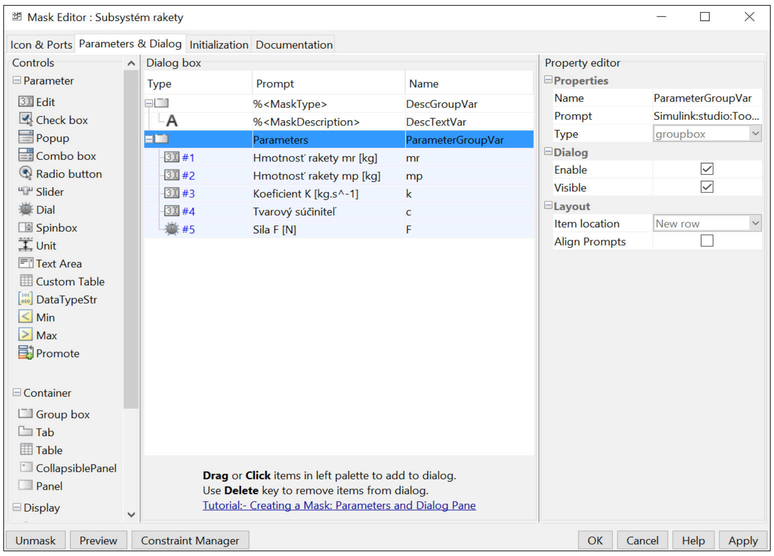
Ako možno vidieť na Obr. 10.15, tak v nástrojového menu na ľavej strane sa nachádza množstvo ovládačov, ktoré menia vzhľad dialógového okna masky subsystému. Z danej množiny ovládačov môžeme spomenúť napr. **Edit**, **Check box**, **Popup menu, Radio button, Slider, Dial** a **Min/Max** a ďalšie iné. Tieto ovládače slúžia na zadávanie vstupných parametrov.

Ak je príslušný ovládač zvolený ako prvok **dialógového okna**, tak potom na pravej strane môžeme meniť jeho vlastnosti. Napr. zvoliť jeho názov pomocou parametra **Name**. Tento parameter predstavuje unikátny identifikátor, pre ktorý **Simulink** takisto zadefinuje systémovú premennú pod tým istým názvom v **Model Workspace**. Ďalší parameter **Prompt** predstavuje názov, ktorý sa zobrazí na maske vytvoreného subsystému. Každému vytvorenému ovládaču možno prednastaviť jeho počiatočnú hodnotu; zadaním tejto hodnoty pomocou parametra **Value**. Medzi ďalšie atribúty, ktoré môžeme danému ovládaču nastaviť patrí napr. **Visible**, **Type**, **Enable**, **Hidden** a ďalšie iné.

Na nasledujúcom Obr. 10.16 je znázornený príklad vytvorenia prvého ovládača, ktorý charakterizuje hmotnosť rakety v našom modeli. Postupne takýmto spôsobom vytvoríme všetky potrebné ovládače pre kompletný **subsystém**. Výsledný tvar editora masky je znázornený na Obr. 10.17.

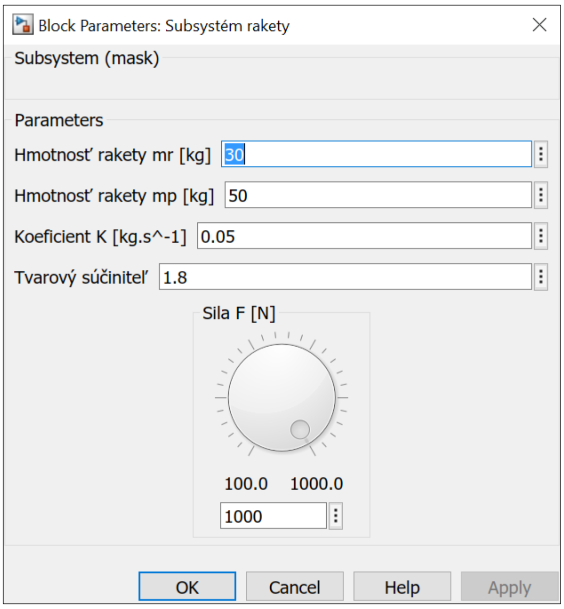


Obr. 10.16. Príklad vytvorenia ovládača typu Edit



Obr. 10.17. Výsledok po vytvorení všetkých ovládačov masky subsystému

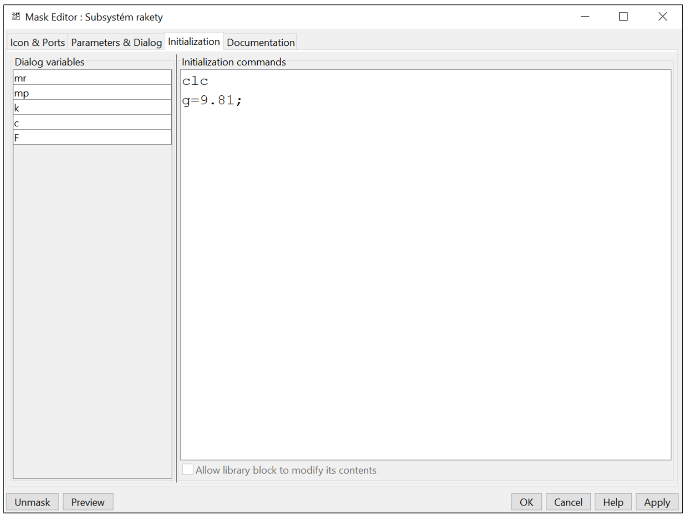
Ak teraz potvrdíme zmeny tlačítkom **Apply** a vrátime sa k pôvodnému subsystému, potom dvoj kliknutím myšou na masku tohto subsystému, sa nezobrazí tvar blokovej schémy tohto subsystému, ale naopak dialógové okno s nakonfigurovanou maskou tohto subsystému, pozri Obr. 10.18.



Obr. 10.18. Dialógové okno parametrov masky subsystému

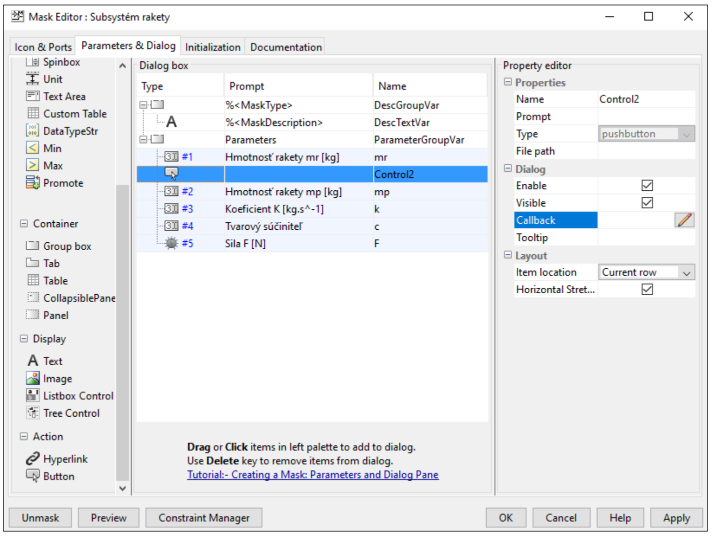
V tomto momente sa môžeme vrátiť k **blokovému diagramu** subsystému len použitím klávesovej skratky **CTRL+U**, resp. kliknutím na šípku smerom dole na ikone subsystému, alebo pomocou príkazu **Mask/Look under mask** z kontextového menu.

Prepnime sa na poslednú z líšt editora masky, ktorou je lišta **Initialization**. V tejto lište existuje možnosť napísať **inicializačný skript** pre každý matematický model. Pri editovaní príkazov možno využívať premenné, ktoré boli zadefinované parametrami na dialógovom okne masky, prípadne definovať ďalšie iné parametre systému, ktoré nie sú súčasťou masky subsystému, pozri Obr. 10.19.



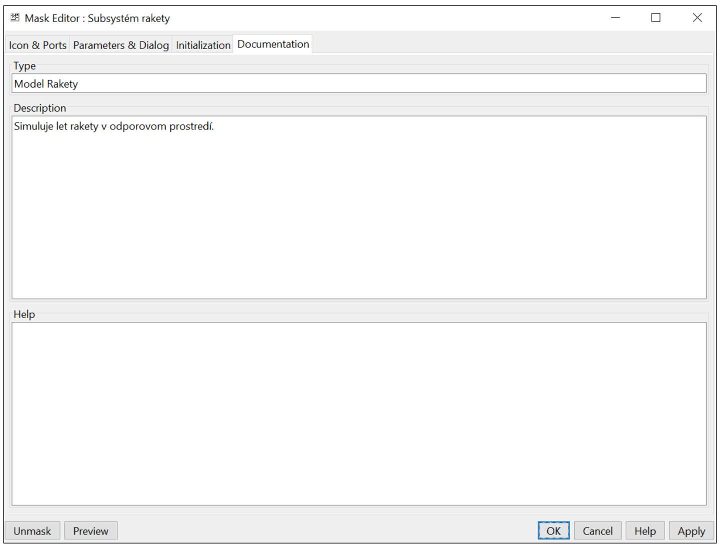
Obr. 10.19. Inicializačný skript masky subsystému

Každú masku subsystému možno vylepšovať a tvoriť takým spôsobom veľmi sofistikované dialógové okná, ktoré obsahujú veľké množstvo parametrov. V sekcii **Display** sa nachádzajú objekty ako **Panel**, **Group box**, **Tab**, **Text** alebo **Image**. Tieto sa používajú na začlenenie ovládačov do logických skupín, pozri Obr. 10.20. Pre každý ovládač a objekt masky možno zadefinovať automatické akcie (**Actions**), ktoré sa vykonajú automaticky. Napr. akcia typu **Button**; po kliknutí na objekt, ktorému priradíme túto akciu, spustí skript **Matlabu** naprogramovaný pomocou editora **Callback**.



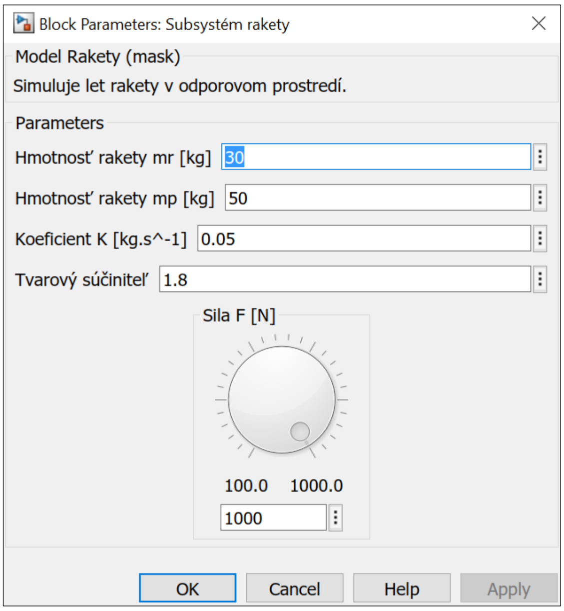
Obr. 10.20. Ďalšie možnosti masky subsystému – Display a Action

Pre každý vytvorený subsystém môžeme ďalej vytvoriť popis subsystému a taktiež jeho dokumentáciu prostredníctvom poslednej lišty **Documentation**, pozri Obr. 10.21.



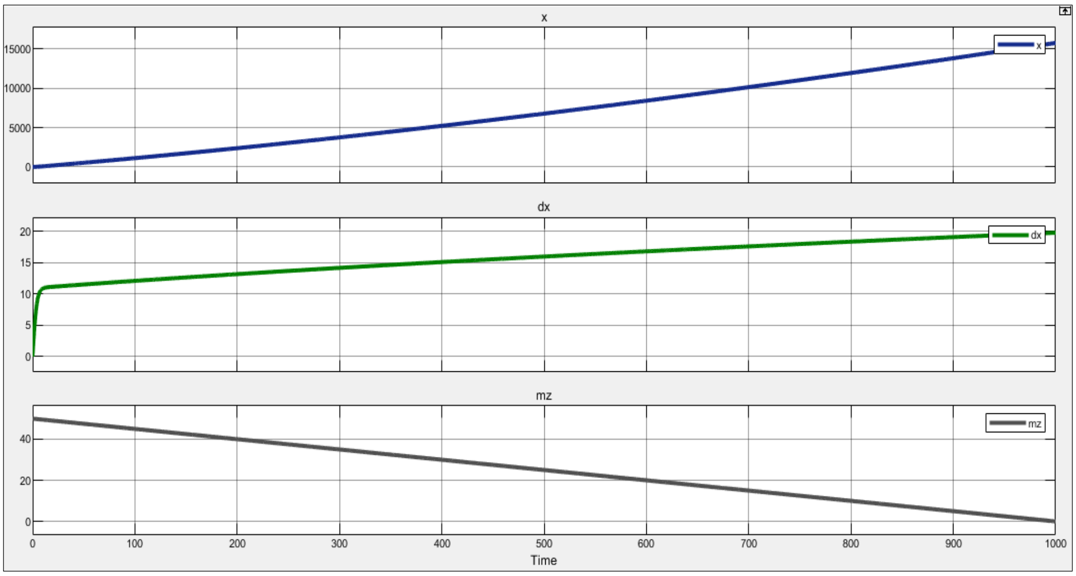
Obr. 10.21. Popis a dokumentácia masky subsystému

Potom výsledný tvar vytvorenej masky subsystému, ktorú sme vytvorili aj s popisom masky, je zobrazený na Obr. 10.22.



Obr. 10.22. Výsledné dialógové okno parametrov masky subsystému

Pre zadané vstupné hodnoty podľa zadania z príkladu letiacej rakety, bola vykonaná simulácia letu rakety prostredníctvom blokovej schémy so subsystémom do okamihu, keď raketa spáli všetko svoje palivo. Na základe tejto blokovej schémy, v ktorej sme vytvorili zastavovaciu podmienku simulácie, sme zistili, že tento stav počas letu rakety nastane po uplynutí času $\mathbf{t = 1000\ s}$. Priebehy **polohy** a **rýchlosti** rakety, ako aj graf úbytku **paliva počas letu** sú znázornené na Obr. 10.23.

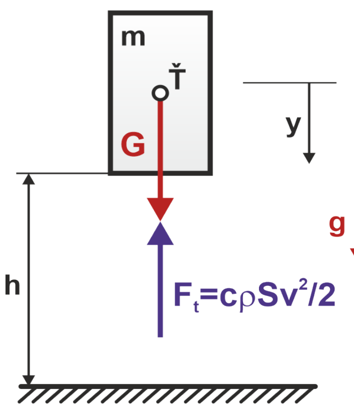


Obr. 10.23. Riešenie simulácie letu rakety

Príklad č. 10.3.

Predpokladajme teleso hmotnosti $\mathbf{m = 70\ kg}$, ktoré má tvar valca s priemerom $\mathbf{D = 1.5\ m}$. Teleso padá z počiatočnej výšky $\mathbf{h_0 = 10\ 000\ m}$, pozri Obr. 10.24. Poznamenajme, že teplota vzduchu sa významne mení s výškou pri lete páde tohto telesa. Namerané hodnoty teploty vzduchu $\mathbf{T(h)}$, ktorá sa mení s nadmorskou výškou $\mathbf{h}$, sú uvedené v príslušnej tabuľke.

Počas pádu telesa v gravitačnom poli zeme, pôsobí na tento valec odporová silu vzduchu, ktorá je definovaná vzťahom **Newtonovej odporovej sily** $\mathbf{F_t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c \cdot S \cdot v^2}$, kde $\mathbf{c = 0.5}$ je tvarový súčiniteľ odporu vzduchu, $\mathbf{S}$ je odporová prierezová plocha valca kolmá na smer pohybu a $\boldsymbol{\rho}$ je hustota vzduchu. Hustota vzduchu $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{T})$ sa mení v závislosti od teploty $\mathbf{T}$. Namerané hodnoty zmeny hustoty vzduchu v závislosti od teploty sú uvedené v ďalšej tabuľke. Vytvorte **simulačnú blokovú schému** matematického modelu, ktorý opisuje pohyb tohto valca. Zobrazte priebeh **polohy** telesa v smere osi **y** a jeho pádovú **rýchlosť** až do okamihu, keď teleso dopadne na zemský povrch.



Obr. 10.24. Teleso padajúce v gravitačnom poli zeme

Tabuľka 10.3. Závislosť zmeny teploty vzduchu **T(h)** od výšky **h**

h [m]	T [°C]	h [m]	T [°C]	h [m]	T [°C]
0	15	**3500**	-7.75	**8000**	-37.00
100	14.35	**4000**	-11.00	**8500**	-40.25
200	13.7	**4500**	-14.25	**9000**	-43.50
500	11.75	**5000**	-17.5	**9500**	-46.75
1000	8.5	**5500**	-20.75	**10 000**	-50.00
1500	5.25	**6000**	-24.00		
2000	2	**6500**	-27.25		
2500	-1.25	**7000**	-30.50		
3000	-4.5	**7500**	-33.75		

Tabuľka 10.4. Závislosť zmeny hustoty vzduchu $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{T})$ od teploty **T**

T [°C]	ρ [kg.m^{-3}]
-50	1.5826
-40	1.5147
-30	1.4524
-20	1.3951
-10	1.3420
0	1.2959
5	1.2693
15	1.2697

Riešenie:

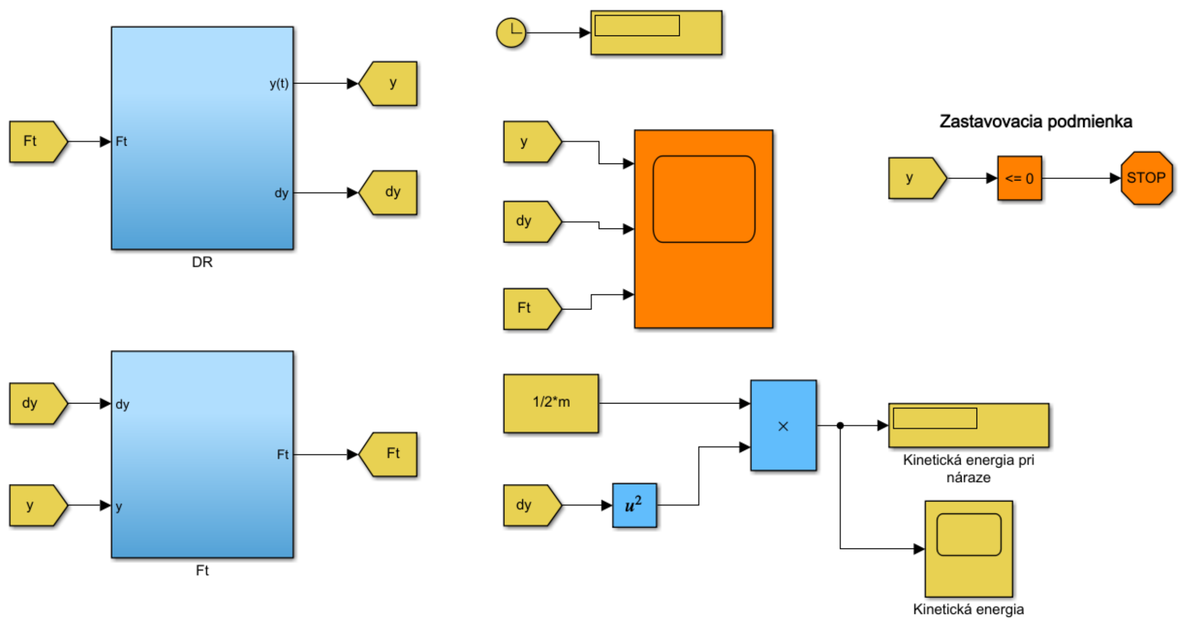
Podľa Obr. 10.24 na teleso pri jeho pohybe pôsobia dve sily, ktorými sú tiažová sila **G** a odporová sila vzduchu $\mathbf{F_t}$. Teleso koná pohyb iba v jednom smere osi **y**, tzn. že v tomto prípade nám postačuje napísať iba jednu pohybovú rovnicu aplikovaním **II. Newtonovho zákona**

$$\mathrm{m} \cdot \ddot{\mathrm{y}} = -\mathrm{G} + \mathrm{F_t} \ , \qquad (10.9)$$

kde $\mathbf{F_t} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{y}}^2$. Upravme túto diferenciálnu rovnicu do tohto **simulinkovského tvaru**, ktorý využijeme na vytvorenie blokovej schémy modelu

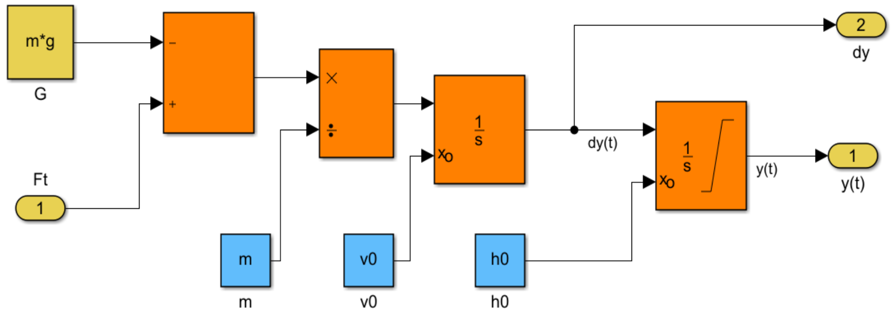
$$\ddot{\mathrm{y}} = \frac{1}{\mathrm{m}} \cdot \left[-\mathrm{m} \cdot \mathrm{g} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \mathrm{c} \cdot \mathrm{S} \cdot \dot{\mathrm{y}}^2\right] . \qquad (10.10)$$

Bloková schéma, ktorá bola namodelovaná na základe predchádzajúcej diferenciálnej rovnice s využitím **subsystémov**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.25.

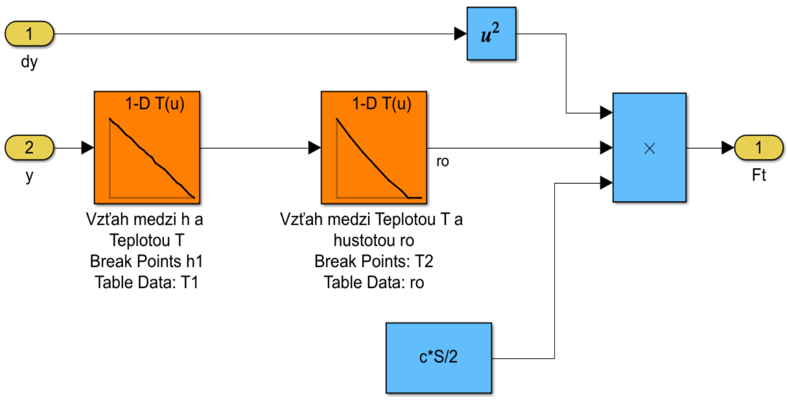


Obr. 10.25. Bloková schéma, ktorá simuluje pád telesa v gravitačnom poli zeme

V predchádzajúcej **blokovej schéme** boli použité na zjednodušenie blokového diagramu dva **subsystémy**. Prvý zo **subsystémov** pod názvom **DR**, ktorý predstavuje **subsystém** hlavnej diferenciálnej rovnice podľa Obr. 10.26. Druhý **subsystém** pod názvom $\mathbf{F_t}$ slúži na výpočet odporovej sily vzduchu $\mathbf{F_t}$, ktorá závisí od rýchlosti telesa v čase **t**, pozri Obr. 10.27.



Obr. 10.26. Subsystém DR

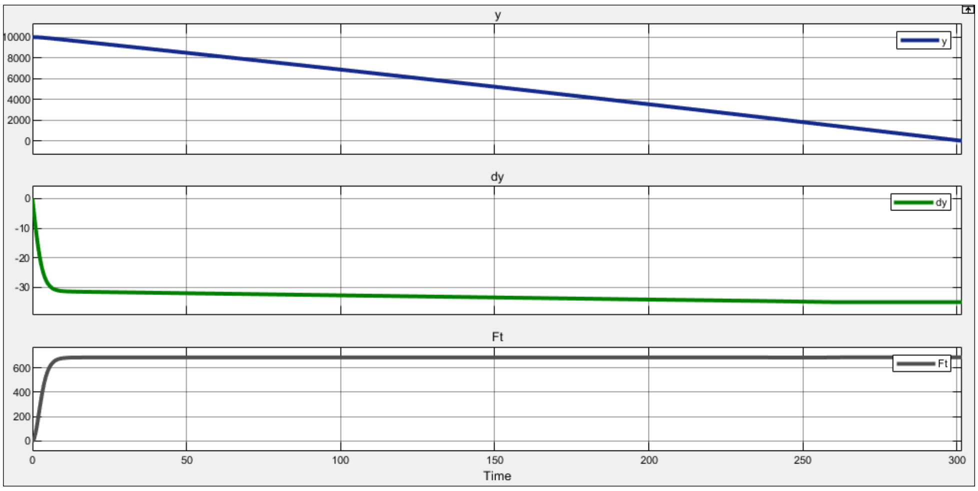


Obr. 10.27. Subsystém odporovej sily F_t

Pre zadefinovanie vstupných parametrov bol vytvorený tento skript v modelovom **Workspace blokového diagramu**.

```
%Vstupné parametre systému
m=70;
h0=10000;
v0=0;
c=0.5;
D=1.5;
S=pi*D^2/4;
g=9.81;


%Funkčná závislosť teploty od výšky
h1=[0 100 200 500 1000 1500 2000 2500 3000 3500 4000 4500 ...
5000 5500 6000 6500 7000 7500 8000 8500 9000 9500 10000];


T1=[15 14.35 13.7 11.75 8.5 5.25 2 -1.25 -4.5 -7.75 -11 ...
-14.25 -17.5 -20.75 -24 -27.25 -30.5 -33.75 -37 -40.25...
-43.5 -46.75 -50];


%Funkčná závislosť hustoty vzduchu od teploty
T2=[-50 -40 -30 -20 -10 -0 5 15];
ro=[1.5826 1.5147 1.4524 1.3951 1.3420 1.2959 1.2693 1.2697];
```

Potom na nasledujúcom Obr. 10.28 sú znázornené priebehy riešenia simulácie pre teleso padajúce v gravitačnom poli zeme. Teleso dopadne na zemský povrch za čas $\mathbf{t = 301.6\ s}$. Zastavenie simulácie za účelom odmerania času dopadu, bolo realizované pre nekonečne dlhý prednastavený čas simulácie $\mathbf{t = inf}$, s využitím zastavovacej podmienky vytvorenej podľa Obr. 10.25.



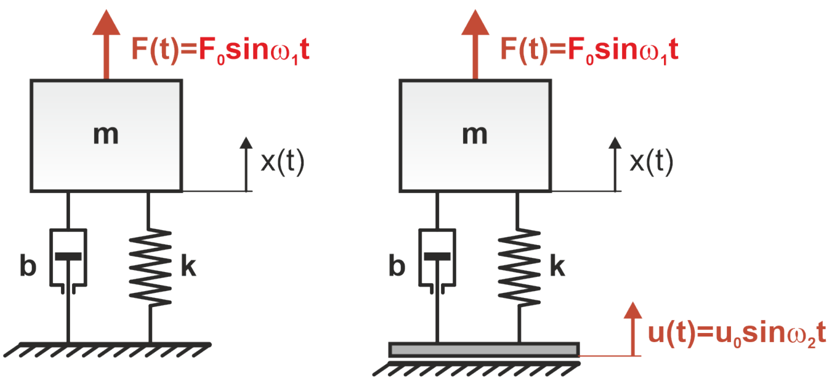
Obr. 10.28. Riešenie simulácie padajúceho valca z výšky h_0

Príklad č. 10.4.

Predpokladajme dynamický tlmený mechanický systém s jedným stupňom voľnosti, ktorý je zobrazený na Obr. 10.29. Daný systém, ktorý pozostáva z hmoty s hmotnosťou $\mathbf{m = 30\ kg}$, uvažujeme v dvoch prevedeniach. V prvom prípade ako systém fixovaný k základu a budený harmonickou silou $\mathbf{F(t) = F_0 \cdot sin(\omega_1 \cdot t)}$, kde $\mathbf{F_0 = 200\ N}$ a frekvencia kmitania je $\mathbf{f_1 = 15\ Hz}$, pozri Obr. 10.29 (a).

A v druhom prípade v poslednej časti kinematicky budený harmonickou funkciou $\mathbf{u(t) = u_0 \cdot sin(\omega_2 \cdot t)}$, kde $\mathbf{u_0 = 0.01\ m}$ a frekvencia kmitania je $\mathbf{f_2 = 10\ Hz}$, pozri Obr. 10.29 (b).

Zobrazte odozvu tohto systému, ak **pružno-tlmiace** charakteristiky sú nelineárneho charakteru a boli experimentálne namerané podľa nasledujúcich tabuliek.



(a) (b)

Obr. 10.29. Kmitajúci mechanický systém: (a) fixovaný k základu, (b) kinematicky budený

Tabuľka 10.6. Závislosť sily $\mathbf{F_k}$ v pružine na deformácii **x**

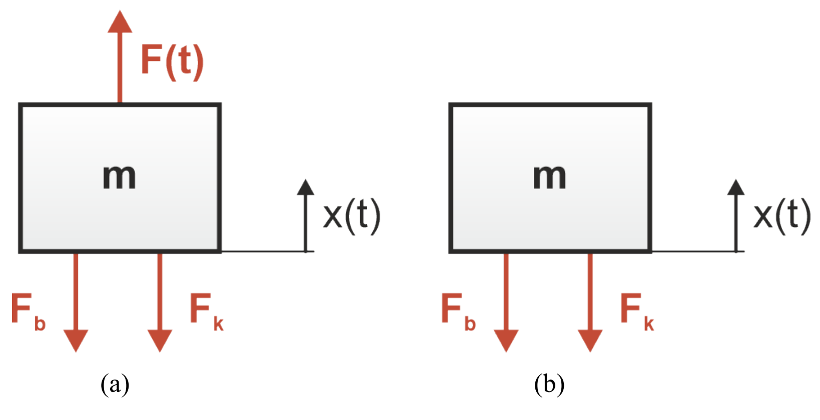
x [m]	Fk [N.m^{-1}]
-0.01	-5000
-0.008	-2560
-0.006	-1080
-0.004	-320
-0.002	-40
0	0
0.0021	42
0.0045	350
0.0067	1125
0.0089	2580
0.012	5150

Tabuľka 10.5. Závislosť sily $\mathbf{F_b}$ v tlmiči na rýchlosti **dx**

dx [m.s^{-1}]	Fb [N.s.m^{-1}]
-0.13	-108
-0.1	-94
-0.07	-79
-0.04	-60
-0.01	-30
0	0
0.02	42
0.05	67
0.08	84
0.11	99

Riešenie:

Dané dva mechanické systémy podľa zadania uvoľníme nahradením ich komponentov za sily v pružinách a tlmičoch podľa Obr. 10.30 (a) a (b).



Obr. 10.30. Uvoľnenie mechanického systému: (a) fixovaný k základu, (b) kinematicky budený

Potom pre každé uvoľnené teleso podľa riešeného variantu možno napísať jednu pohybovú rovnicu na základe **II. Newtonovho zákona**. Pre teleso podľa Obr. 10.30 (a) platí táto rovnica

$$m \cdot \ddot{x} = F - F_k - F_b \qquad (10.11)$$

a pre systém podľa Obr. 10.30 (b) platí táto diferenciálna rovnica

$$m \cdot \ddot{x} = -F_k - F_b \ . \tag{10.12}$$

Pre každý systém môžeme napísať dve zložkové rovnice, ktoré platia pre sily v **pružinách** a **tlmičoch**. Pre prípad telesa podľa Obr. 10.30 (a) platia tieto zložkové rovnice síl

$$F_k = k \cdot x, \quad F_b = b \cdot \dot{x} \tag{10.13}$$

a pre prípad telesa podľa Obr. 10.30 (b) platia tieto zložkové rovnice

$$F_k = k \cdot \left(x - u(t)\right), \quad F_b = b \cdot \left(\dot{x} - \dot{u}(t)\right) \ . \tag{10.14}$$

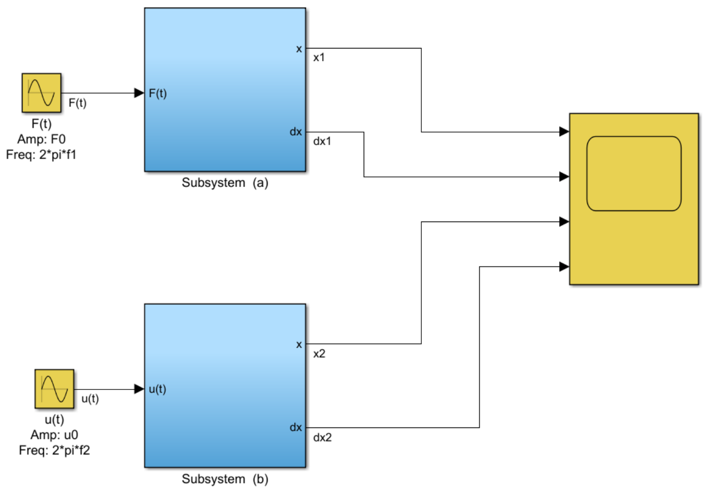
Dosadením týchto zložkových rovníc do diferenciálnych rovníc systémov, dostávame túto **diferenciálnu rovnicu 2. rádu** pre systém podľa Obr. 10.30 (a)

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot [F - k \cdot x - b \cdot \dot{x}] \tag{10.15}$$

a pre systém podľa Obr. 10.30 (b) táto rovnica

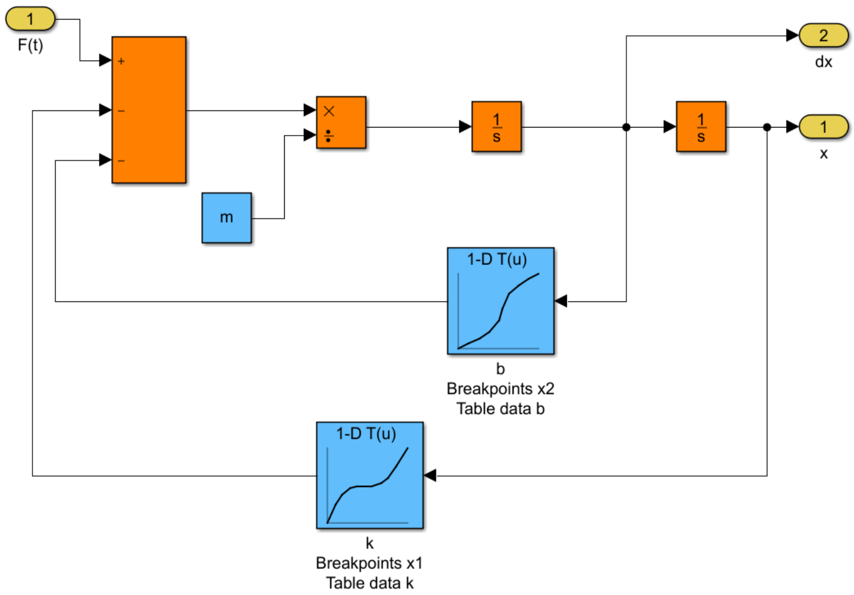
$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot [k \cdot (x - u(t)) - b \cdot (\dot{x} - \dot{u}(t))] \ . \tag{10.16}$$

Bloková schéma, v ktorej sme pre každý zo systémov podľa Obr. 10.30 (a) a (b) vytvorili samostatný **subsystém**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.31.



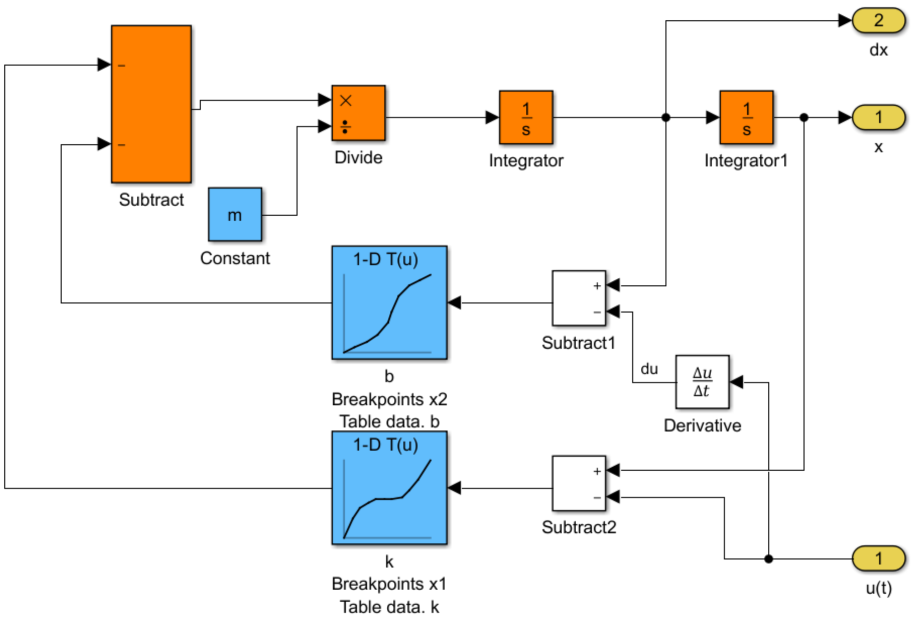
Obr. 10.31. Bloková schéma na riešenie odozvy systémov

Subsystém v predchádzajúcej blokovej schéme, ktorý bol zadefinovaný pre mechanický systém podľa Obr. 10.30 (a), je znázornený na Obr. 10.32.



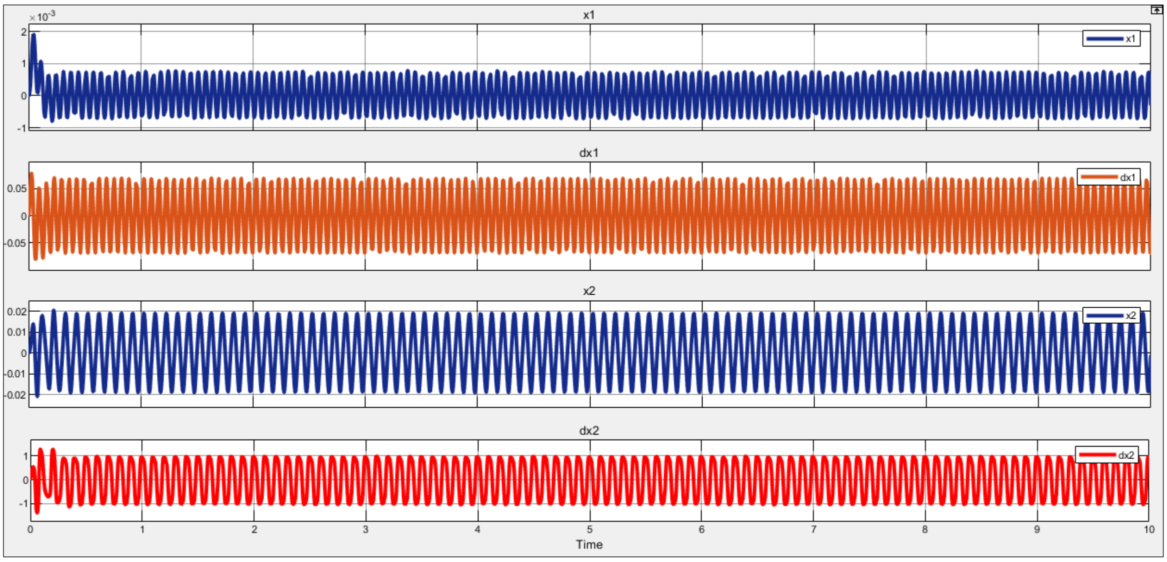
Obr. 10.32. Bloková schéma pre Subsystém (a)

Na ďalšom Obr. 10.33 je potom znázornená bloková schéma, ktorá bola vytvorená pre subsystém mechanického systému podľa Obr. 10.30 (b). Ako si možno všimnúť v oboch blokových schémach boli použité bloky **Lookup tables 1-D**, ktoré sme využili na aproximáciu množiny nameraných charakteristík **pruženia** a **tlmenia**, pozri tabuľky podľa zadania.



Obr. 10.33. Bloková schéma pre Subsystém (b)

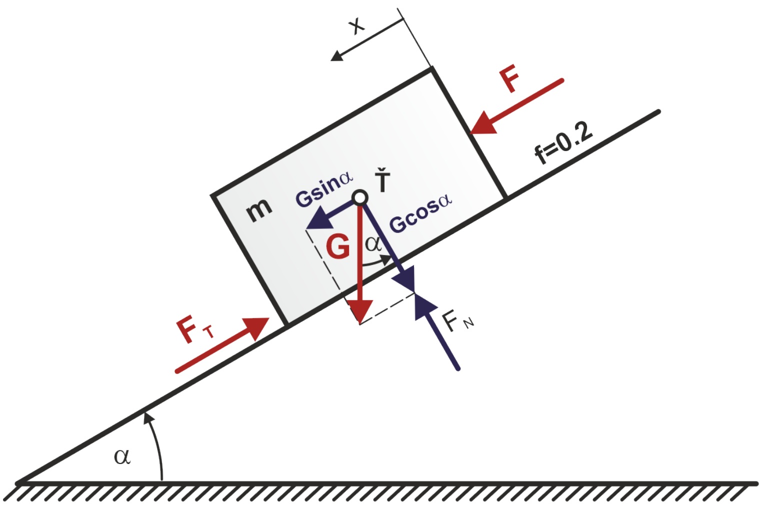
Riešenie odozvy riešených dvoch typov mechanických systémov podľa Obr. 10.30 (a) a (b) je znázornené na Obr. 10.34.



Obr. 10.34. Riešenie odozvy systému typu (a) a (b)

Príklad č. 10.5.

Predpokladajme teleso hmotnosti $\mathbf{m = 40\ kg}$, ktoré sa pohybuje po naklonenej rovine, sklopenej pod uhlom $\boldsymbol{\alpha = 30°}$, ako je to zobrazené na Obr. 10.35. Teleso sa pohybuje smerom dole s počiatočnou rýchlosťou $\mathbf{v_0 = 0.2\ m.s^{-1}}$, pričom pri svojom pohybe je budené pôsobením hnacej sily $\mathbf{F = 40\ N}$ a spomaľované pôsobením odporovej trecej sily $\mathbf{F_T}$, ktorá závisí od súčiniteľa trenia $\mathbf{f = 0.2}$. Ak poznáme dĺžku plošiny $\mathbf{L = 2\ m}$ a teleso sa v čase $\mathbf{t = 0}$ nachádza v jej hornej časti v počiatočnej polohe $\mathbf{x_0 = 0\ m}$, určte čas, za ktorý toto teleso prejde celú dĺžku dráhy $\mathbf{L}$.



Obr. 10.35. Teleso pohybujúce sa po naklonenej rovine

Riešenie:

Zo silových pomerov zobrazených na Obr. 10.35 možno napísať túto pohybovú rovnicu, ktorá popisuje pohyb telesa v smere osi **x**

$$m \cdot \ddot{x} = F + G \cdot \sin\alpha - F_T \ , \qquad (10.17)$$

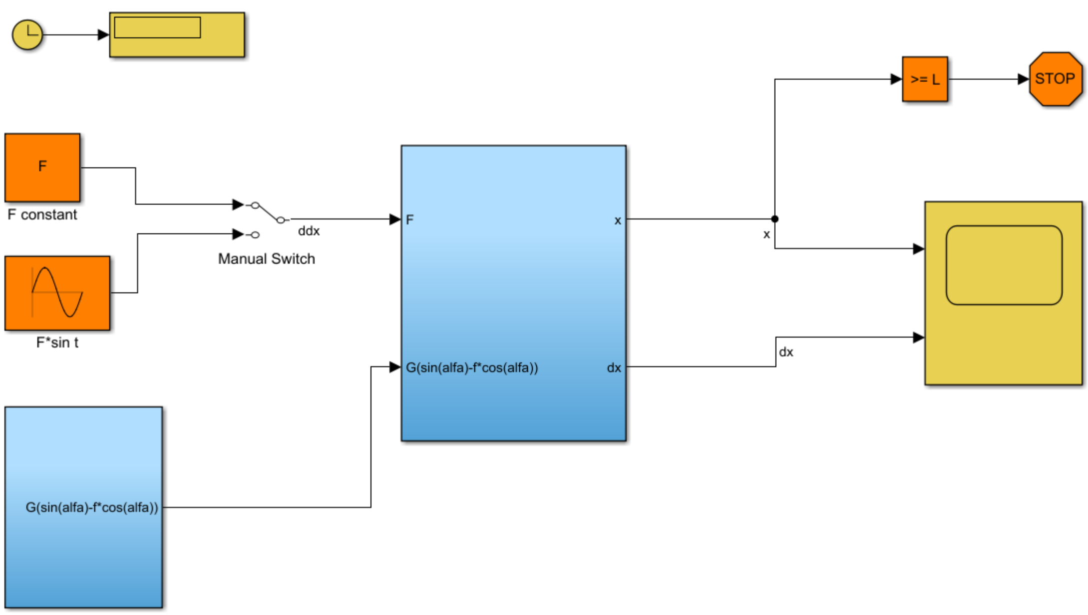
kde $\mathbf{F_T = F_N \cdot f = G \cdot \cos\alpha \cdot f}$. Normálovú silu $\mathbf{F_N}$, ktorá pôsobí na teleso v smere osi **y**, vieme vypočítať z rovnice rovnováhy

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow F_N - G \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow F_N = G \cdot \cos\alpha \ . \qquad (10.18)$$

Upravme rovnicu do riešiteľného tvaru formou **blokovej schémy** v **Simulinku**, takého, že všetky výrazy okrem derivácie premennej najvyššieho stupňa ponecháme na pravej strane diferenciálnej rovnice a za $\mathbf{F_T}$ dosadíme odvodený tvar trecej sily. Dostávame tento tvar diferenciálnej rovnice

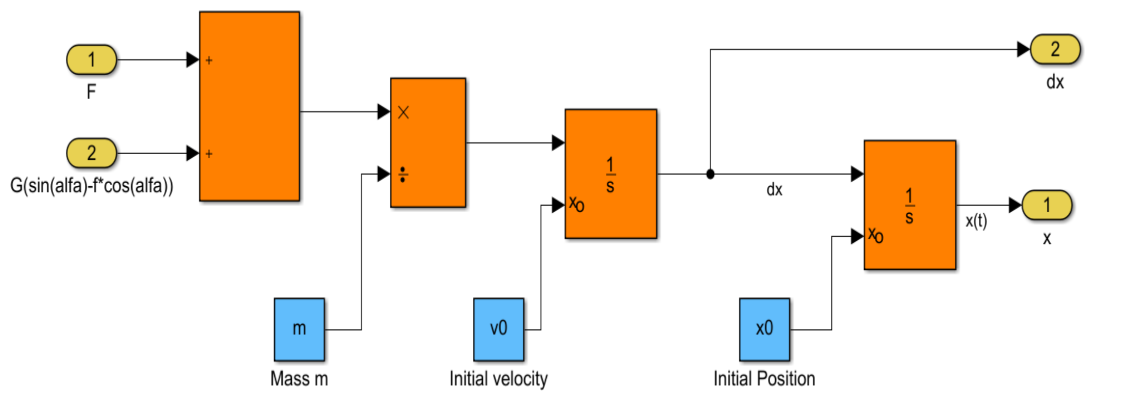
$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot [F + G \cdot \sin\alpha - G \cdot \cos\alpha\, f] = \frac{1}{m} \cdot [F + G \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)] \ . \qquad (10.19)$$

Bloková schéma systému, ktorá bola vytvorená podľa predchádzajúceho tvaru diferenciálnej rovnice, je zobrazená na nasledujúcom Obr. 10.36.

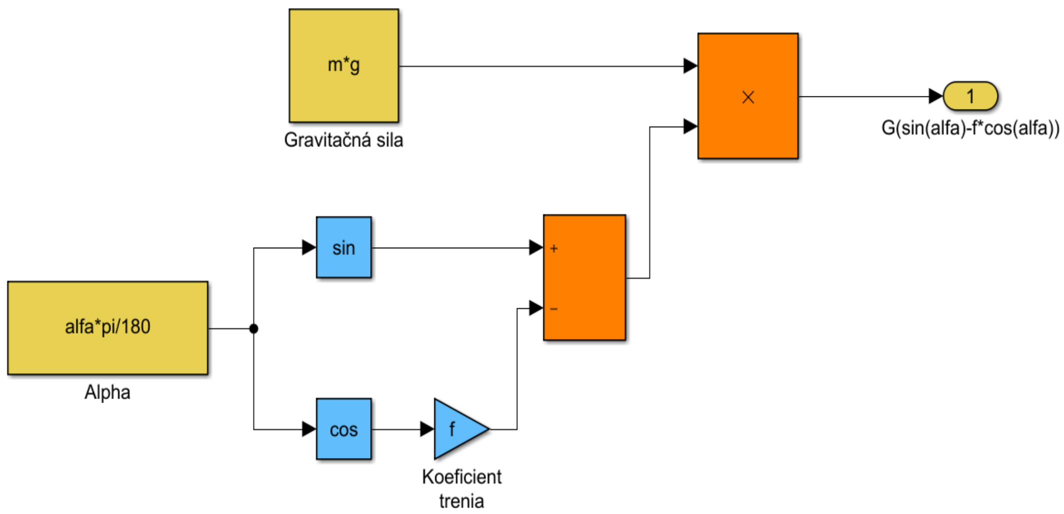


Obr. 10.36. Bloková schéma pre teleso pohybujúce sa po naklonenej rovine

V predchádzajúcej blokovej schéme boli použité dva subsystémy pre zjednodušenie daného blokového diagramu, a to **Subsystém 1**, pozri Obr. 10.37. Druhým je subsystém pod názvom **Subsystem**, pozri Obr. 10.38, v ktorý slúži na výpočet veľkosti gravitačnej sily a jej odpovedajúcej trecej sily.

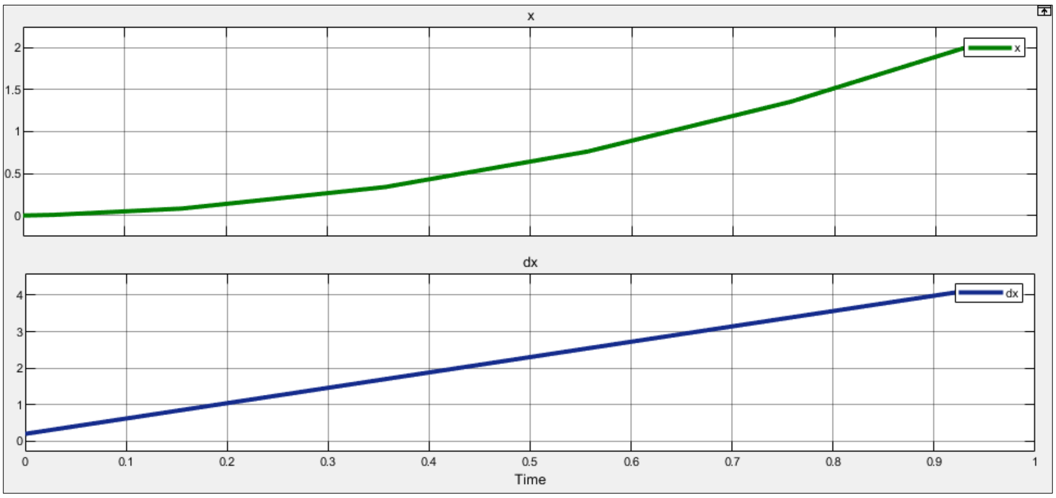


Obr. 10.37. Subsystém 1



Obr. 10.38. Subsystém, ktorý slúži na výpočet tiažovej a trecej sily

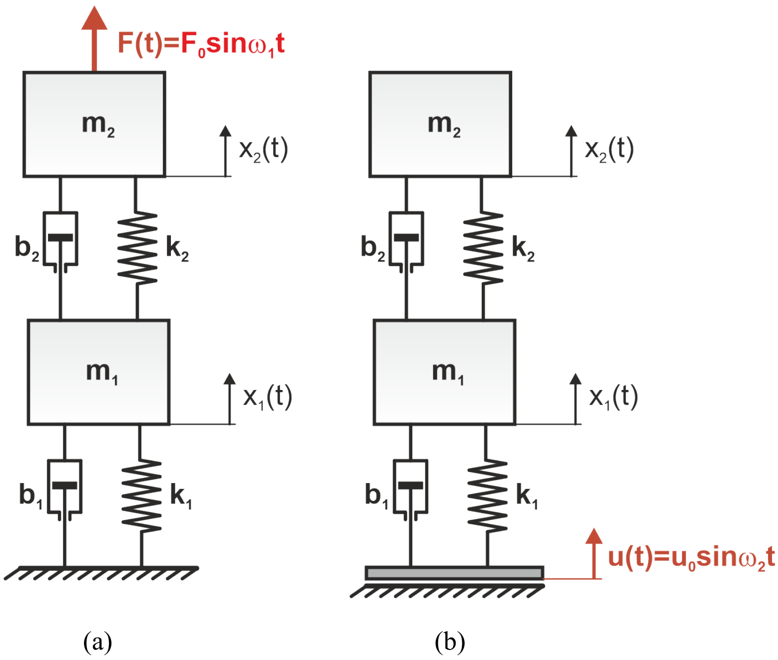
Teleso s hmotnosťou **m**, ktoré sa začne pohybovať po naklonenej rovine z počiatočnej polohy rýchlosťou $\mathbf{v_0}$ pri uvažovaní trenia, prejde celkovú dráhu dĺžky $\mathbf{L = 2\ m}$ za čas $\mathbf{t = 0.9288\ s}$. Riešenie simulácie v podobe grafického zobrazenia posunutia telesa v smere osi **x** a priebeh rýchlosti tohto telesa, je znázornené na nasledujúcom Obr. 10.39.



Obr. 10.39. Riešenie simulácie pohybu telesa po naklonenej rovine – x(m), dx(m.s^{-1})

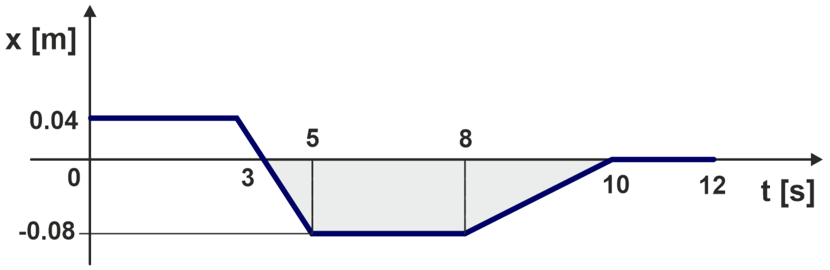
Príklad č. 10.6.

Predpokladajme dynamický tlmený mechanický systém s dvomi stupňami, ktorého dva varianty prevedenia sú zobrazené na Obr. 10.40 (a) a (b). Predpokladajme, že kmitajúce hmoty týchto dvoch systémov majú hmotnosť $\mathbf{m_1 = 50\,kg}$ a $\mathbf{m_2 = 150\,kg}$. V prvom prípade systému podľa Obr. 10.40 (a) uvažujeme, že tento mechanický systém je fixovaný k základu a budený harmonicky meniacou sa silou $\mathbf{F(t) = F_0 \cdot sin(\omega_1 \cdot t)}$, ktorá pôsobí na hmotu $\mathbf{m_2}$, kde $\mathbf{F_0 = 1200\,N}$ a frekvencia kmitania je $\mathbf{f_1 = 20\,Hz}$.



Obr. 10.40. Mechanický systém (a) fixovaný k základu, (b) kinematicky budený

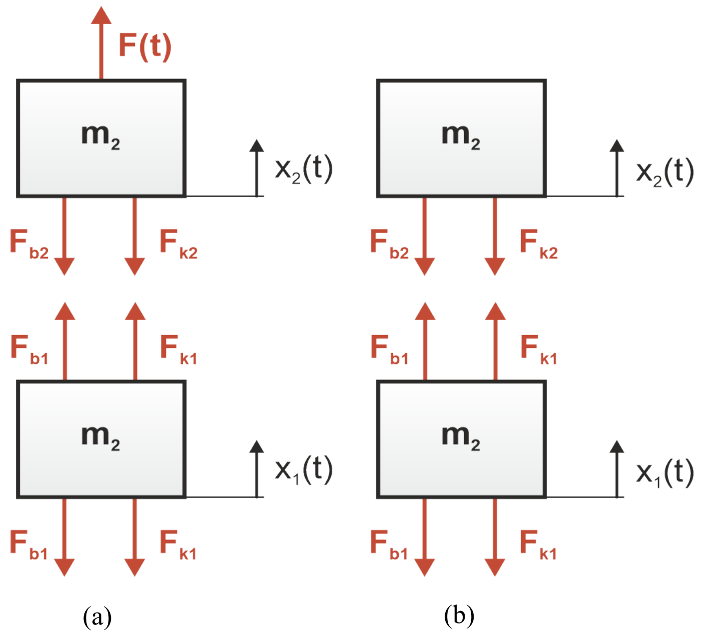
V druhom prípade systému podľa Obr. 10.40 (b) predpokladáme, že tento systém je budený kinematickým budením, ktoré je dané funkciou $\mathbf{u(t)}$. Táto funkcia $\mathbf{u(t)}$, ktorá modeluje prejazd automobilu cez prekážku, je znázornená na Obr. 10.41. Zobrazte odozvu obidvoch typov systémov podľa Obr. 10.40 (a) a (b), ak poznáme všetky vstupné pružno-tlmiace charakteristiky týchto dvoch systémov, ako sú $\mathbf{k_1 = 3000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 5000\,N.m^{-1}}$, $\mathbf{b_1 = 300\,N.s.m^{-1}}$ a $\mathbf{b_2 = 500\,N.s.m^{-1}}$.



Obr. 10.41. Profil vozovky

Riešenie:

Mechanické systémy podľa dvoch variantov zobrazených na Obr. 10.40 (a) a (b), uvoľníme nahradením ich komponentov silami v pružinách a tlmičoch podľa Obr. 10.42 (a) a (b).



Obr. 10.42. Uvoľnený mechanický systém: (a) fixovaný k základu, (b) kinematicky budený

Potom pre uvoľnené telesá podľa Obr. 10.42 (a) možno napísať túto **sústavu dvoch pohybových rovníc 2. rádu**

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= F_{k2} + F_{b2} - F_{k1} - F_{b1}\ , \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= F(t) - F_{k2} - F_{b2}\ . \end{aligned} \qquad (10.20)$$

a pre systém podľa Obr. 10.42 (b) zase odvodiť túto **sústavu dvoch diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 &= F_{k2} + F_{b2} - F_{k1} - F_{b1} \ , \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 &= -F_{k2} - F_{b2} \ . \end{aligned} \tag{10.21}$$

Pre každý systém môžeme zvlášť zadefinovať tieto zložkové rovnice pre sily v **pružinách** a **tlmičoch**, a to pre prípad systému podľa Obr. 10.42 (a) platí, že

$$F_{k1} = k_1 \cdot x_1, \quad F_{b1} = b_1 \cdot \dot{x}_1, \ F_{k2} = k_2 \cdot (x_2 - x_1), \quad F_{b2} = b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{10.22}$$

a podobne pre prípad podľa Obr. 10.42 (a) musia platiť tieto zložkové rovnice

$$\begin{aligned} &F_{k1} = k_1 \cdot \big(x_1 - u(t)\big), \quad F_{b1} = b_1 \cdot \big(\dot{x}_1 - \dot{u}(t)\big), \\ &F_{k2} = k_2 \cdot (x_2 - x_1), \ \ F_{b2} = b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \ . \end{aligned} \tag{10.23}$$

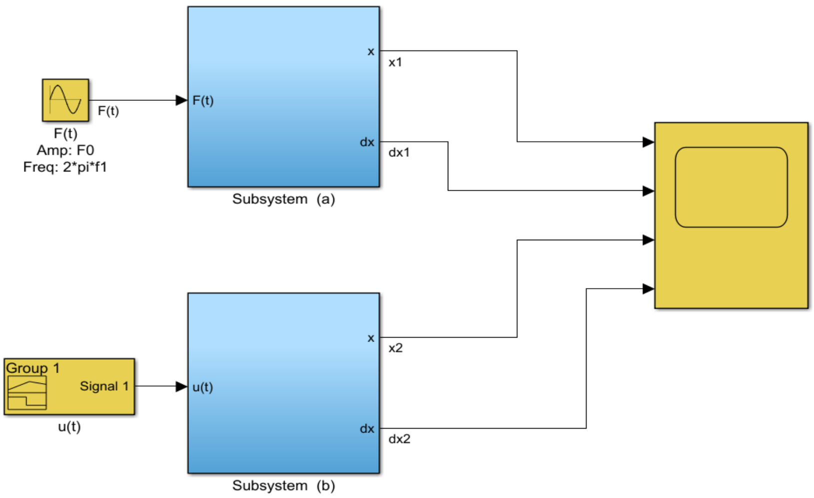
Po dosadení **zložkových rovníc** do odvodených diferenciálnych rovníc a vykonaním ďalších matematických úprav, možno dospieť pre systém podľa Obr. 10.42 (a) k tomuto tvaru **sústavy diferenciálnych rovníc 2. rádu**

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} \cdot [k_2 \cdot (x_2 - x_1) + b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 \cdot x_1 - b_1 \cdot \dot{x}_1] \ , \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \cdot [F - k_2 \cdot (x_2 - x_1) - b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)] \end{aligned} \tag{10.24}$$

a podobným spôsobom pre variant systému podľa Obr. 10.42 (b) k tomuto tvaru **diferenciálnych rovníc 2. rádu**

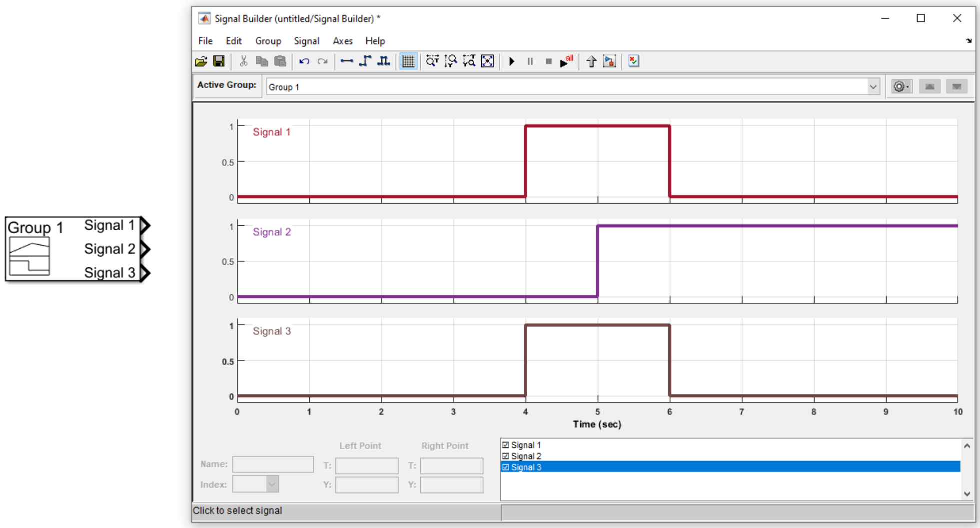
$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} \cdot \big[k_2 \cdot (x_2 - x_1) + b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 \cdot \big(x_1 - u(t)\big) \cdot \big(\dot{x}_1 - \dot{u}(t)\big)\big] \ , \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \cdot [-k_2 \cdot (x_2 - x_1) - b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)] \ . \end{aligned} \tag{10.25}$$

Bloková schéma, v ktorej sme pre každý zo systémov podľa Obr. 10.42 (a) a (b) vytvorili príslušný **subsystém**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.43.



Obr. 10.43. Bloková schéma na riešenie odozvy dvoch systémov

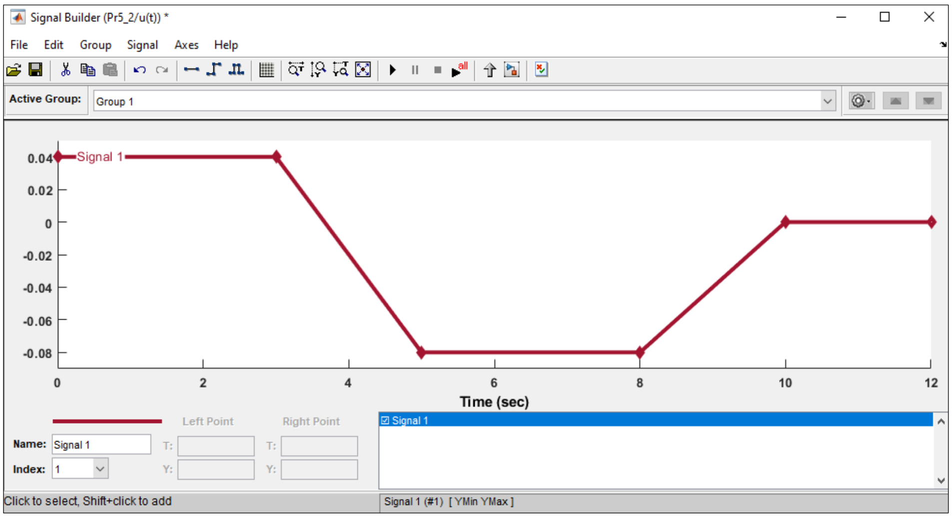
Na namodelovanie signálu $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, ktorý predstavuje profil vozovky podľa Obr. 10.41, bol použitý blok **Signal builder**, ktorý je zaradený do knižnice **Sources**. Poznamenajme, že ak máme k dispozícii ľubovoľný nameraný úsek signálu v podobe **tabuľky** $[\mathbf{t}, \mathbf{x}]$ alebo **grafu**, použitím tohto bloku **Signal builder**, môžeme namodelovať budiaci signál pomocou jeho nameraných bodov $[\mathbf{t}, \mathbf{x}]$. V tejto funkcii možno paralelne vytvoriť ľubovoľný počet budiacich signálov, pozri Obr. 10.44.



Obr. 10.44. Blok Signal builder

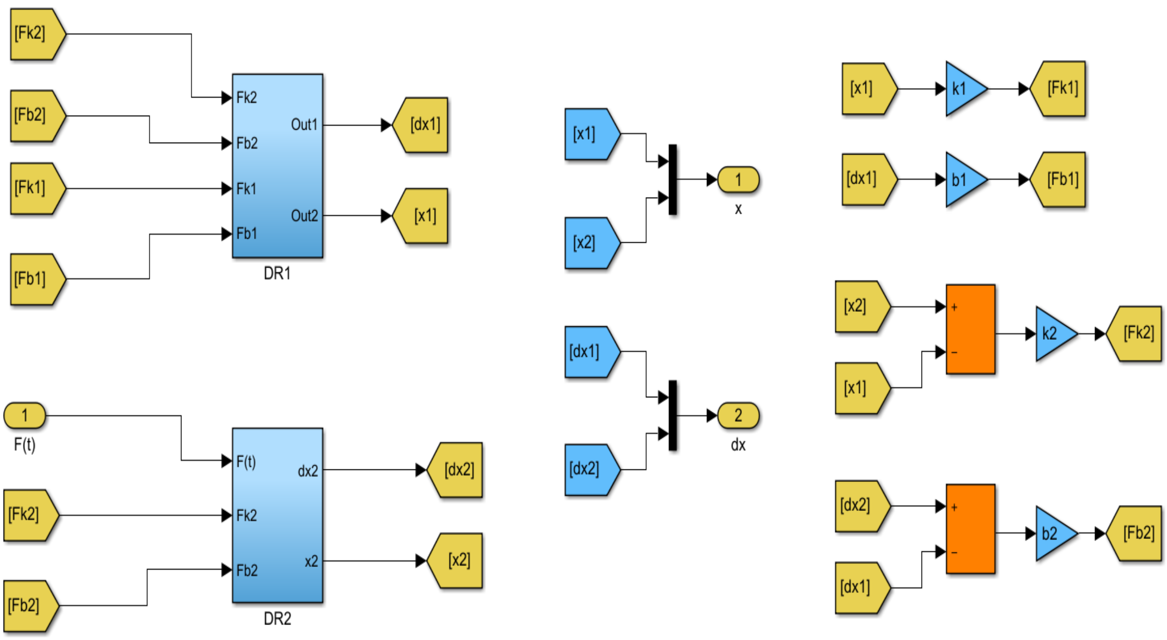
Práca so signálom v tomto bloku **Signal builder** je veľmi jednoduchá. Pridať nový bod na čiaru signálu môžeme prostredníctvom klávesovej skratky **Shift + Ľavé tlačítko myši**. Všetky novo pridané body signálu možno modifikovať zmenou zadaného času **t** alebo zmenou veľkosti veličiny vybraného časového bodu pomocou ovládacích prvkov, ktoré sa nachádzajú v ľavom dolnom rohu.

Každý vytvorený **bod signálu** možno kedykoľvek vymazať použitím tlačítka **Delete**. Na nasledujúcom Obr. 10.45 je zobrazený **budiaci signál u(t)**, ktorý bol namodelovaný v bloku **Signal builder** pre prípad systému podľa Obr. 10.41 (b) a predstavuje profil vozovky.



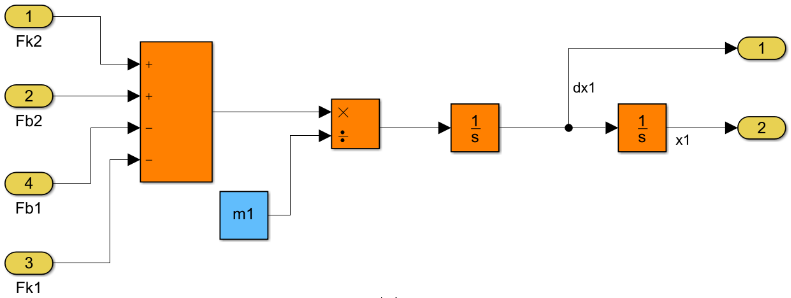
Obr. 10.45. Profil vozovky namodelovaný v bloku Signal builder

Na ďalšom Obr. 10.46 je zobrazený **subsystém blokovej schémy** podľa Obr. 10.43 pre systém podľa Obr. 10.42 (a). V prípade tejto blokovej schémy bol využitý bezkontaktný prenos signálu medzi vytvorenými blokmi a takisto dva subsystémy diferenciálnych rovníc **DR1** a **DR2**.

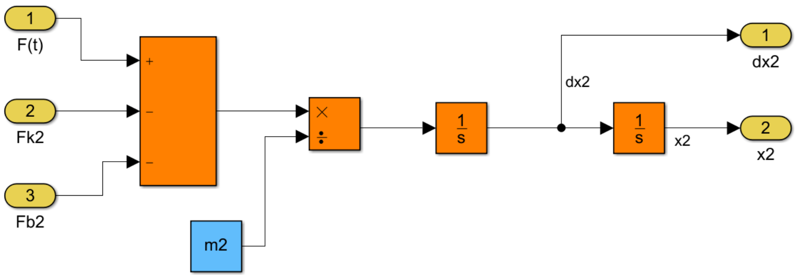


Obr. 10.46. Subsystém variantu (a)

Subsystémy **DR1** a **DR2** pre systém podľa Obr. 10.42 (a) sú znázornené na nasledujúcich Obr. 10.47 (a) a (b).



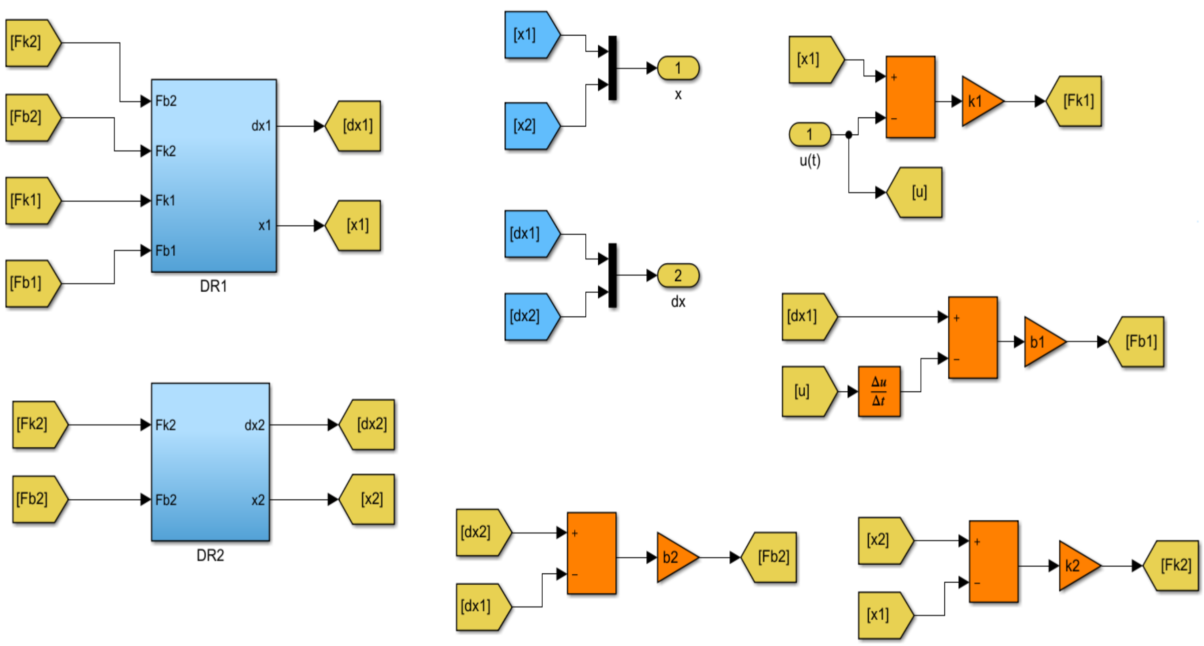
(a)



(b)

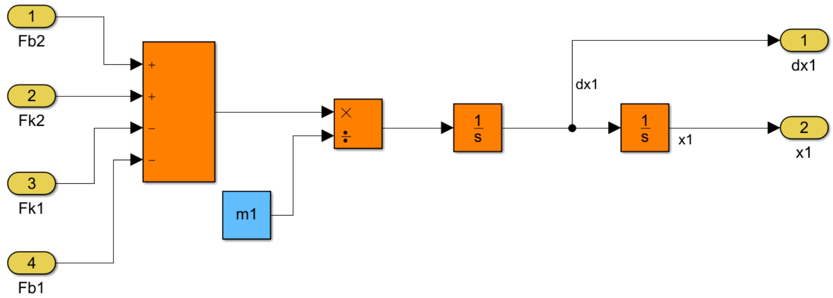
Obr. 10.47. Subsystémy mechanického systému pre variant riešenia (a): (a) DR1, (b) DR2

Na ďalšom Obr. 10.48 je znázornená bloková schéma pre systém podľa Obr. 10.42 (b), ktorý je kinematicky budený budiacou funkciou $\mathbf{u(t)}$.

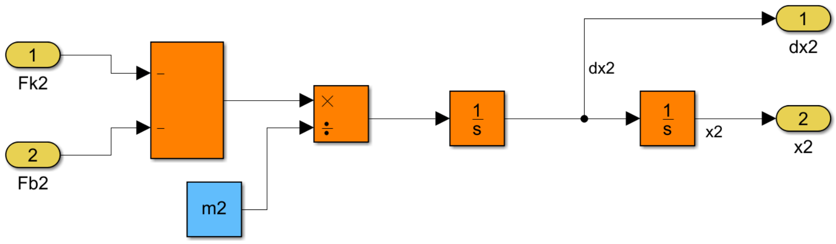


Obr. 10.48. Subsystém variantu (b)

Subsystémy **DR1** a **DR2** pre systém podľa Obr. 10.42 (b) sú znázornené na nasledujúcich Obr. 10.49 (a) a (b).



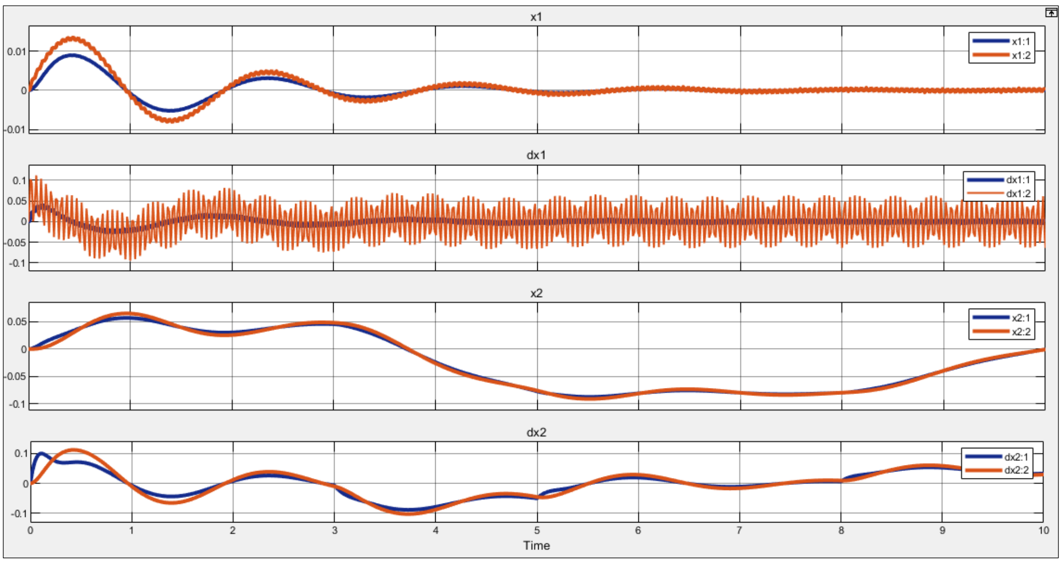
(a)



(b)

Obr. 10.49. Subsystémy mechanického systému pre variant (b): (a) DR1, (b) DR2

Potom riešenie odozvy pre dané dva typy mechanických systémov podľa Obr. 10.40 (a) a (b) je znázornené na ďalšom Obr. 10.50.

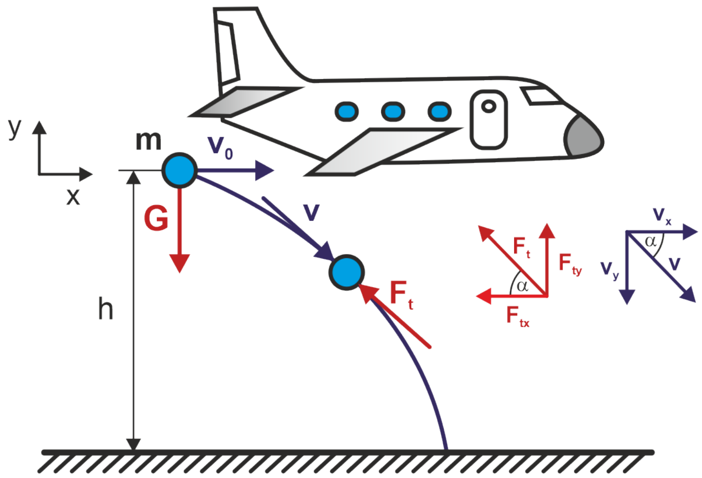


Obr. 10.50. Riešenie odozvy systémov pre varianty (a) a (b), $x_{1,2}$ (m), $dx_{1,2}$ (m.s^{-1})

Príklad č. 10.7.

Nájdite matematický model, ktorý popíše pohyb letiaceho balíčka hmotnosti $\mathbf{m = 100\,kg}$, ktorý je v čase $\mathbf{t = 0}$ vyhodený z lietadla, ktoré letí nad úrovňou zeme vo výške $\mathbf{h_0 = 2000\,m}$, rýchlosťou $\mathbf{v_0 = 220\,m.s^{-1}}$, ako je to zobrazené na Obr. 10.51.

Balíček, ktorý je vyhodený z lietadla, je guľového tvaru s polomerom $\mathbf{R = 0.01\,mm}$. Počas jeho letu naň pôsobí odporová sila vzduchu, ktorá sa mení v závislosti od uhlu $\boldsymbol{\alpha}$. Tento závisí od smeru vektora aktuálnej rýchlosti $\mathbf{v}$ pohybu balíčka. Odporovú silu budeme predpokladať ako **Newtonovú odporovú** silu $\mathbf{F_t = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho \cdot S \cdot v^2}$, kde $\mathbf{c}$ je tvarový súčiniteľ $\mathbf{c = 0.17}$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1.276\,kg.m^{-3}}$ je hustota vzduchu, $\mathbf{S = \pi \cdot R^2}$ je prierezová plocha kolmá na smer pohybu. Zobrazte trajektóriu pohybu letiaceho balíčka a odmerajte čas, kedy balíček dopadne na zemský povrch.



Obr. 10.51. Balíček vyhodený z lietadla

Riešenie:

Podľa Obr. 10.51 je zrejmé, že balíček pri svojom pohybe koná v rovine **všeobecný pohyb**. Počas jeho pohybu naň pôsobí odporová sila $\mathbf{F_t}$, ktorej smer sa mení podľa uhla $\boldsymbol{\alpha}$, ktorý závisí od smeru vektora aktuálnej rýchlosti pohybu $\mathbf{v}$. Celkový pohyb balíčka môžeme rozložiť na dva **translačné pohyby** v jednotlivých smeroch súradnicových osí $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Potom na základe **II. Newtonovho zákona** musí platiť, že

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -F_{tx} \;, \\ m \cdot \ddot{y} &= -G + F_{ty} \;, \end{aligned} \qquad (10.26)$$

kde $\mathbf{F_{tx} = F_t \cdot \cos(\alpha)}$ a $\mathbf{F_{ty} = F_t \cdot \sin(\alpha)}$. Uhol sklonu odporovej sily $\mathbf{F_t}$ sa počas letu balíčka mení v závislosti od smeru výslednej rýchlosti $\mathbf{v}$, ktorou sa balíček pohybuje v danom časovom okamihu.

Túto celkovú rýchlosť pohybu balíčka môžeme vypočítať použitím **Pytagorovej vety**

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ . \tag{10.27}$$

Pre jednotlivé zložky vektora rýchlosti **v** môžeme napísať tieto rovnice, ktoré platia pre jednotlivé smer osí **x** a **y**

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\dot{x}}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\ , \\ v_y &= \dot{y} = v \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\dot{y}}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\ . \end{aligned} \tag{10.28}$$

Využitím predchádzajúcich rovníc môžeme odvodiť tieto vzťahy pre zložky **Newtonovej odporovej** sily $\mathbf{F_t}$, ktoré budú platiť v každom časovom okamihu **t**

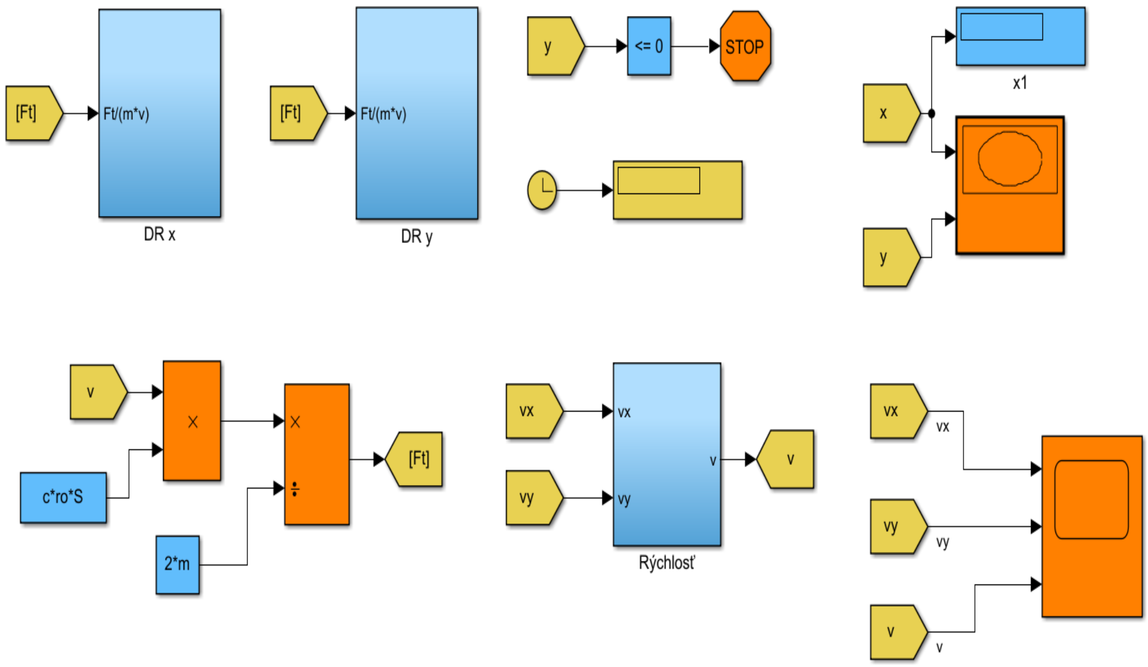
$$\begin{aligned} F_{tx} &= F_t \cdot \cos\alpha = F_t \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\ , \\ F_{ty} &= F_t \cdot \sin\alpha = F_t \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\ . \end{aligned} \tag{10.29}$$

Dosadením do pohybových rovníc a ich predelením hmotou **m**, dostávame rovnice pohybu balíčka v čase **t**

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{F_t}{m} \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\ , \\ \ddot{y} &= -g + \frac{F_t}{m} \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\ , \end{aligned} \tag{10.30}$$

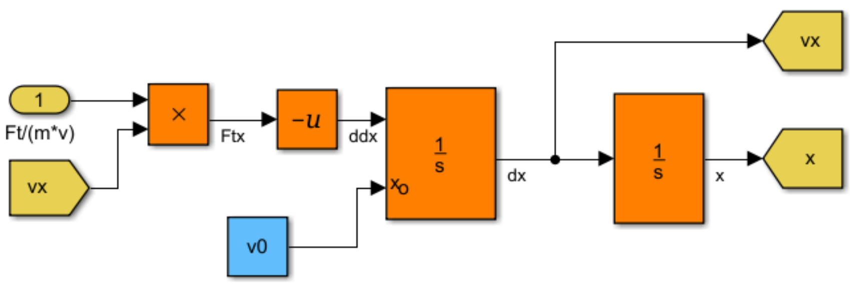
kde $\mathbf{F_t = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho \cdot S\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}$ a $\mathbf{S = \pi \cdot R^2}$.

Počiatočnú rýchlosť v integrátoroch pre jednotlivé smery osí **x** a **y** budeme predpokladať ako rýchlosti $\mathbf{v_{0x} = v_0}$ a $\mathbf{v_{0y} = 0}$. Z hľadiska počiatočnej polohy balíčky postačuje nastaviť integrátor polohy v smere osi **y** na počiatočnú výšku $\mathbf{h_0}$. Bloková schéma, ktorá simuluje let vyhodeného balíčka z výšky $\mathbf{h_0}$, je znázornená na Obr. 10.52.

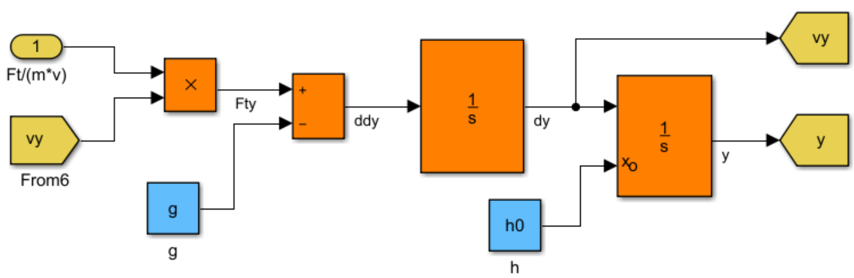


Obr. 10.52. Bloková schéma pre letiaci balíček

Predchádzajúca bloková schéma pozostáva z troch subsystémov, ktorými bola táto bloková schéma zjednodušená. Subsystémy, ktoré sme použili v tejto blokovej schéme sú napr. subsystémy **DR x** a **DR y**, pozri Obr. 10.53 (a) a (b).



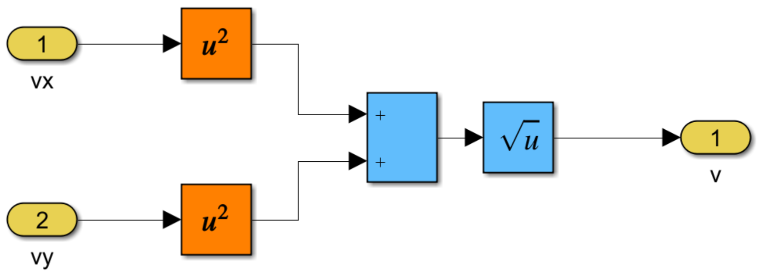
(a)



(b)

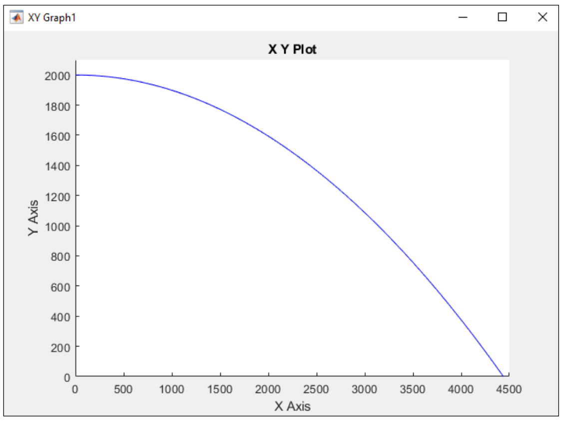
Obr. 10.53. Subsystémy: (a) DR x a (b) DR y

Ďalším subsystémom v tejto **blokovej schéme** je **subsystém**, ktorý slúži na výpočet celkovej **aktuálnej rýchlosti** letiaceho balíčka. Tento subsystém je znázornený na nasledujúcom Obr. 10.54.

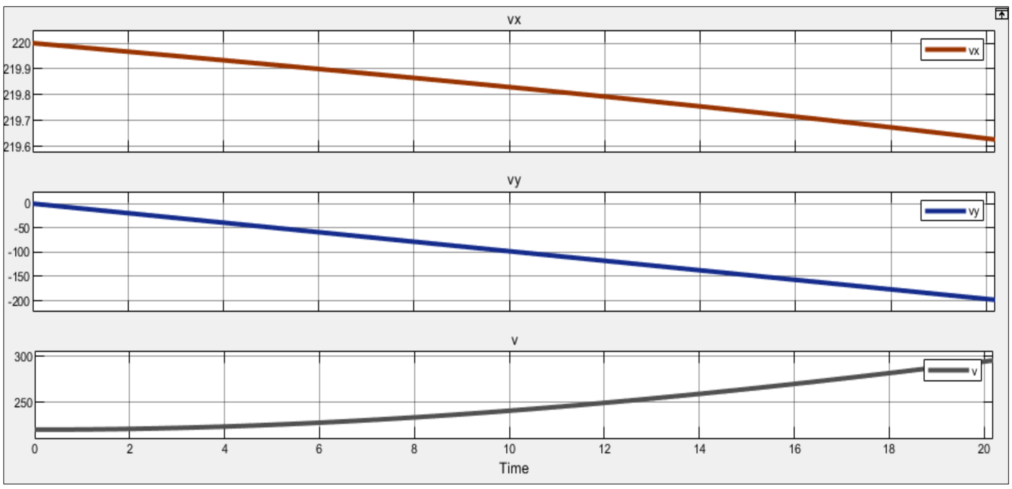


Obr. 10.54. Subsystém - Rýchlosť

Na ďalšom Obr. 10.55 je znázornená trajektória pohybu letiaceho balíčka, ktorý bol vyhodený z lietadla v počiatočnej výške $\mathbf{h_0 = 2000\ m}$. Trajektória bola zobrazená pomocou grafu **XYGraph**. Riešenia priebehov rýchlosti $\mathbf{v_x}$ a $\mathbf{v_y}$, ako aj celkovej aktuálnej rýchlosti $\mathbf{v}$ pohybu balíčka, sú znázornené na ďalších grafoch, pozri Obr. 10.56. Balíček dopadne na zemský povrch po čase $\mathbf{t = 20.19\ s}$.



Obr. 10.55. Trajektória letu balíčka – x(m) a y(m)

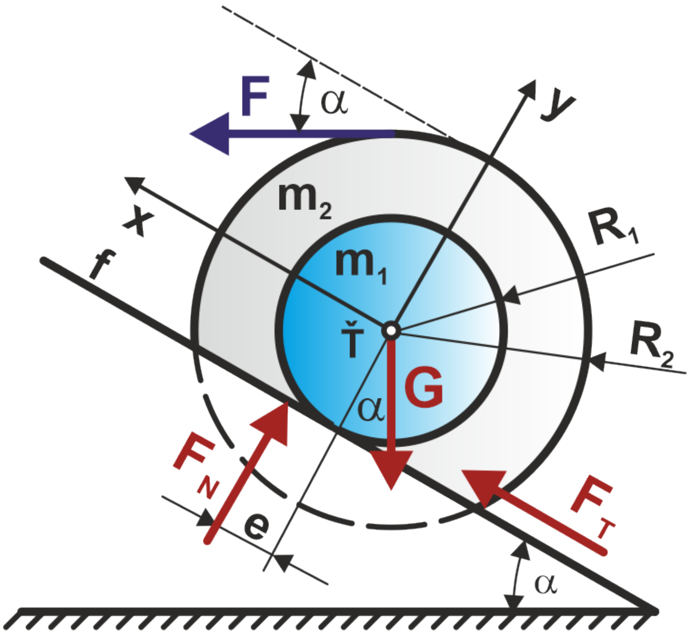


Obr. 10.56. Riešenie kinematických veličín – v_x (m.s[-1]), v_y (m.s[-1]) a v (m.s[-1]), pre letiaci balíček

Príklad č. 10.8.

Predpokladajme valec, ktorý sa pohybuje smerom nahor po naklonenej rovine, sklopenej pod uhlom $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{15}\,°$. Pri pohybe tohto valca uvažujeme pôsobenie trecej sily, ktorá závisí od súčiniteľa trenia $\mathbf{f} = \mathbf{0.2}$. Valec pozostáva z dvoch častí hmôt s hmotnosťami $\mathbf{m_1} = \mathbf{10\ kg}$ a $\mathbf{m_2} = \mathbf{20\ kg}$, ktoré majú známe polomery $\mathbf{R_1} = \mathbf{0.2\ m}$ a $\mathbf{R_2} = \mathbf{0.3\ m}$, pozri Obr. 10.57.

Na valec pri jeho pohybe pôsobí konštantná sila $\mathbf{F} = \mathbf{100\ N}$ a normálová sila $\mathbf{F_N}$, ktorej pôsobisko je excentricky posunuté vo vzdialenosti $\mathbf{e} = \mathbf{4.10^{-3}\ m}$ od ťažiska tohto valca. Vytvorte simuláciu pohybu takéhoto valca formou blokového diagramu v **Simulinku** pre čas simulácie $\mathbf{t} = \mathbf{1\ s}$.



Obr. 10.57. Valec pohybujúci sa smerom nahor po naklonenej rovine

Riešenie:

Podľa Obr. 10.57 je zrejmé, že **valec** pri svojom pohybe po naklonenej rovine koná **všeobecný pohyb**. K pohybu valca dochádza z dôvodu existencie trecej sily medzi podložkou a valcom. Pri pohybe budeme predpokladať reálny prípad pôsobenia normálovej sily $\mathbf{F_N}$, ktorej pôsobisko je dané excentricitou $\mathbf{e}$. Pohyb valca v každom čase $\mathbf{t}$ môžeme rozložiť na dva základné pohyby, t. j. **translačný pohyb** v smere osi $\mathbf{x}$ a **rotačný pohyb** valca okolo jeho ťažiska. Potom aplikovaním **II. Newtonovho zákona** musí platiť, že

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} &= F \cdot \cos\alpha + F_T - G \cdot \sin\alpha \ , \\
I_{\check{T}} \cdot \ddot{\varphi} &= F \cdot R_2 - F_T \cdot R_1 - F_N \cdot e \ ,
\end{aligned}
\qquad (10.31)
$$

kde moment zotrvačnosti valca k ťažisku $\mathbf{I_{\check{T}}}$ môžeme vypočítať na základe tohto vzťahu

$$I_{\check{T}} = I_{\check{T}1} + I_{\check{T}2} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R_2^2 \ . \tag{10.32}$$

Z rovnice rovnováhy v smere osi **y** môžeme vypočítať hodnotu neznámej normálovej sily $\mathbf{F_N}$

$$\sum F_{iy} = 0: \ -F \cdot \sin\alpha + F_N - G \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow F_N = F \cdot \sin\alpha + G \cdot \cos\alpha \ . \tag{10.33}$$

Ak dosadíme do sústavy diferenciálnych rovníc (10.31) za normálovú silu $\mathbf{F_N}$ a moment zotrvačnosti $\mathbf{I_{\check{T}}}$ odvodené vzťahy, potom dospejeme k týmto dvom diferenciálnym rovniciam

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} = F \cdot \cos\alpha + (F \cdot \sin\alpha + G \cdot \cos\alpha) f - G \cdot \sin\alpha \ , \\ &\frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot R_1^2 + m_2 \cdot R_2^2) \cdot \ddot{\varphi} \\ &\qquad = F \cdot R_2 - (F \cdot \sin\alpha + G \cdot \cos\alpha) \cdot f \cdot R_1 - (F \cdot \sin\alpha + G \cdot \cos\alpha) \cdot e \ . \end{aligned} \tag{10.34}$$

Predelením druhej diferenciálnej rovnice polomerom $\mathbf{R_1}$ a napokon sčítaním oboch rovníc so zavedením **kinematickej väzbovej rovnice** $\boldsymbol{\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{R_1}}$, dospejeme odvodením k jednej **diferenciálnej rovnici 2. rádu**

$$\ddot{x} = \frac{F \cdot \frac{R_2}{R_1} - G \cdot (\sin\alpha + e \cdot \cos\alpha) + F \cdot (\cos\alpha - e \cdot \sin\alpha)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} \cdot m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right)} \ . \tag{10.35}$$

Pripomeňme, že valivý pohyb bez prešmyku možno kontrolovať na základe nasledovnej podmienky

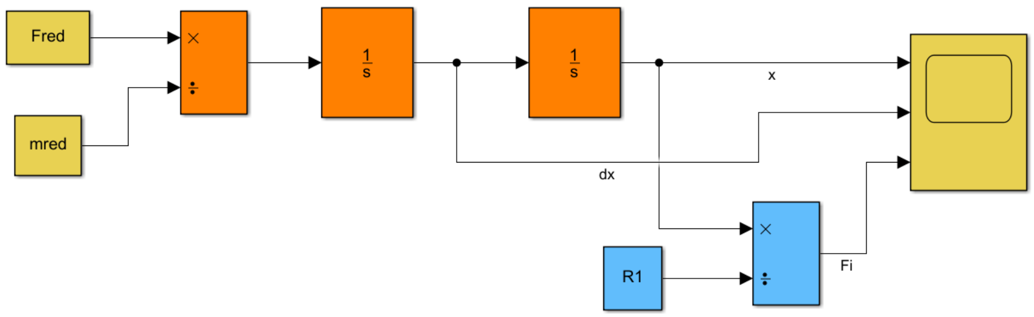
$$|F_T| \le f \cdot F_N \ , \tag{10.36}$$

kde $\mathbf{F_N = F \cdot \sin\alpha + G \cdot \cos\alpha}$ a $\mathbf{F_T = G \cdot \sin\alpha - F \cdot \cos\alpha}$. Na riešenie blokovej schémy budeme predpokladať vstupné parametre, ktoré zadefinujeme pomocou skriptu v **Model Workspace**.

```
%Vstupné parametre systému
m1=15;
m2=25;
R1=0.2;
R2=0.3;
e=4e-3;
f=0.2;
alfa=15*pi/180;
```

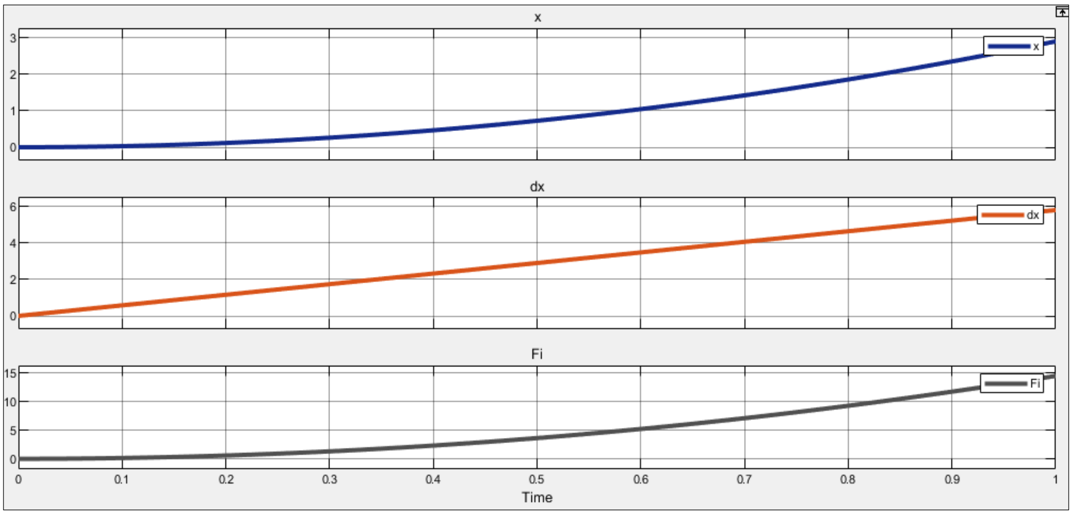
```
g=9.81;

%Hmotnosť valca a tiažová sila G
m=m1+m2;
G=m*g;

%Redukovaná hmotnosť a sila Fred
mred=m1+m2+1/2*m1+1/2*m2*(R2/R1)^2;
Fred=F*R2/R1-G*(sin(alfa)+e*cos(alfa))+F*(cos(alfa)-e*sin(alfa));
```

Potom bloková schéma pre daný valec pohybujúci sa po naklonenej rovine, je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.58.



Obr. 10.58. Bloková schéma, ktorá simuluje pohyb valca po naklonenej rovine

Na ďalšom Obr. 10.59 sú znázornené priebehy posunutia, translačnej rýchlosti pohybu a uhlu pootočenia pre simulovaný valec, ktorý sa pohybuje po naklonenej rovine počas času $\mathbf{t = 1\,s}$.



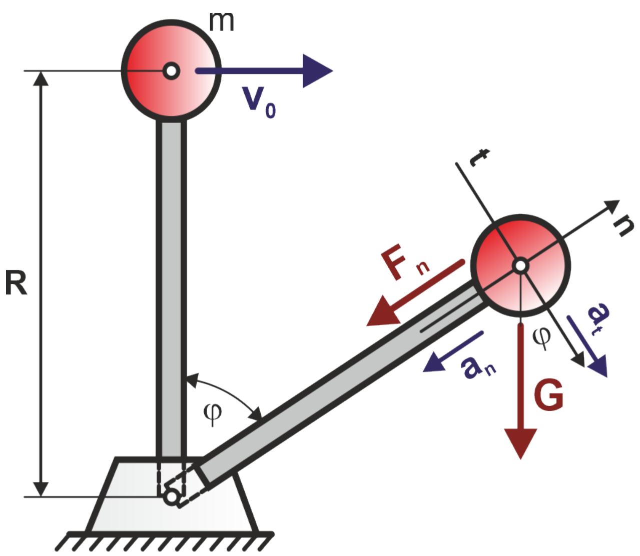
Obr. 10.59. Priebehy odozvy systému valca – x (m), d_x (m.s^{-1}) a φ (rad)

Príklad č. 10.9.

Hmotný bod s hmotnosťou $\mathbf{m = 0.5\ kg}$ je pripevnený k tyčke dĺžky $\mathbf{R = 1\ m}$, ktorá má zanedbateľnú hmotnosť, pozri Obr. 10.60. V počiatočnej polohe sa tyčka nachádza vo vertikálnej polohe, z ktorej je uvedená do rotačného pohybu počiatočnou obvodovou rýchlosťou $\mathbf{v_0 = 0.25\ m.s^{-1}}$. Na základe vytvorenej blokovej schémy a simulácie pohybu tyčky v **Simulinku** vypočítajte:

a) veľkosť normálovej sily v závislosti od zmeny uhla natočenia

b) a uhlovú rýchlosť tyčky.



Obr. 10.60. Hmotný bod na bezhmotnej tyčke

Riešenie:

Na tyčku pôsobí **tiažová** a **normálová** sila. Pohyb tyčky možno opísať týmito dvomi pohybovými rovnicami, ktoré platia v **normálovom** a **tangenciálnom** smere

$$\begin{aligned} t: &\quad m \cdot a_t = G \cdot \sin\varphi\ , \\ n: &\quad m \cdot a_n = G \cdot \cos\varphi + F_n\ , \end{aligned} \qquad (10.37)$$

kde $\mathbf{a_t}$ je **tangenciálne zrýchlenie** a $\mathbf{a_n}$ **normálové zrýchlenie**. Tangenciálne zrýchlenie $\mathbf{a_t}$, ktoré závisí od obvodovej rýchlosti **v** môžeme vyjadriť vzťahom

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \ddot{\varphi}\ , \qquad (10.38)$$

ale takisto aj vzťahom

$$a_t = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} = v \cdot \frac{dv}{ds} = v \cdot \frac{dv}{R \cdot d\varphi} \ , \tag{10.39}$$

pre **normálové zrýchlenie $\mathbf{a_n}$** platí, že

$$a_n = \frac{v^2}{R} \ . \tag{10.40}$$

Ak teraz dosadíme do prvej z dvoch **diferenciálnych rovníc** za tangenciálne zrýchlenie odvodený výraz (10.38), dospejeme k tejto diferenciálnej rovnici v tangenciálnom smere

$$\begin{aligned} &t: \quad m \cdot R\ddot{\varphi} = m \cdot g \cdot \sin\varphi \ , \\ &t: \quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{R} \sin\varphi \ . \end{aligned} \tag{10.41}$$

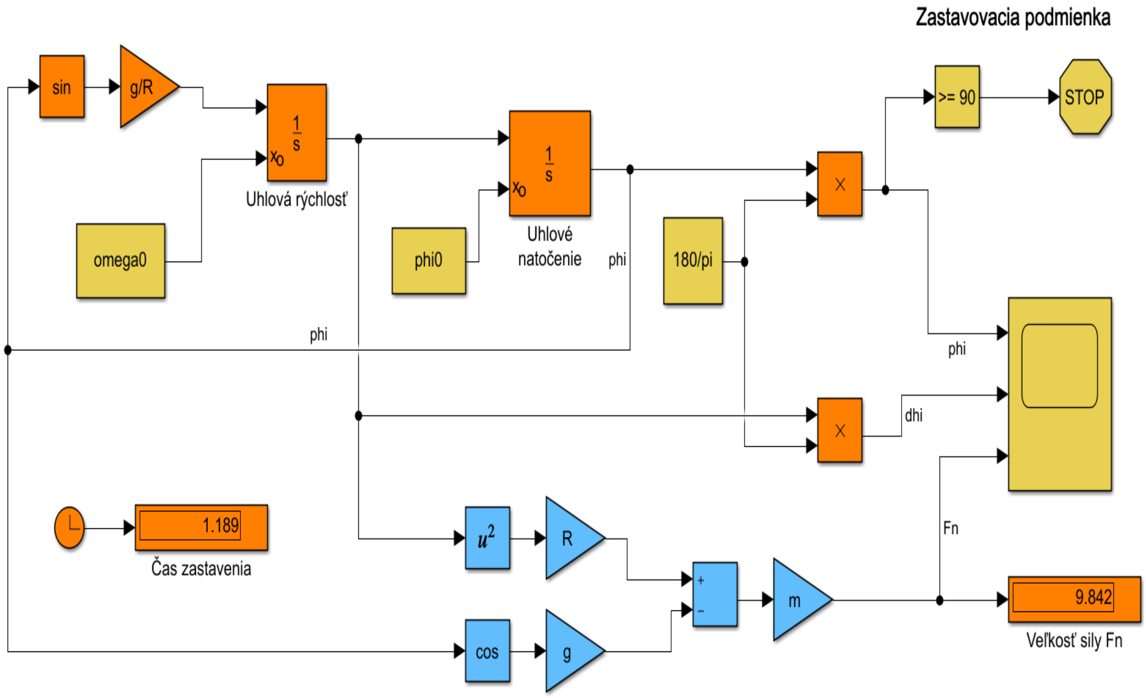
Ako počiatočnú podmienku pre túto diferenciálnu rovnicu môžeme uvažovať uhlovú rýchlosť $\boldsymbol{\omega_0}$

$$\begin{aligned} &v = \omega \cdot R \Longrightarrow \omega = \frac{v}{R} \Longrightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R} \ , \\ &\varphi_0 = 0 \ . \end{aligned} \tag{10.42}$$

Ďalej vypočítame veľkosť **normálovej sily** v závislosti od uhlu natočenia tyčky $\boldsymbol{\varphi}$. Pre odvodenie tejto **normálovej sily** vyjdeme z **druhej diferenciálnej rovnice** (10.38), ktorá platí pre normálový smer. Platí, že

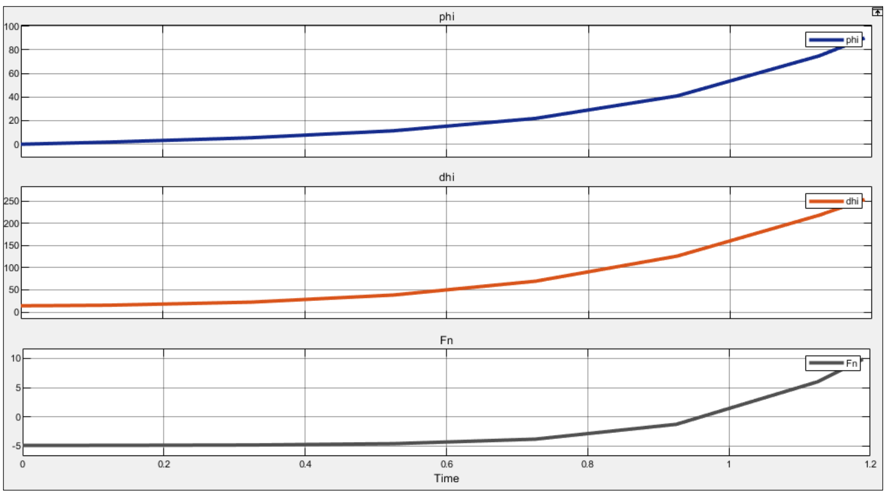
$$\begin{aligned} &F_n = m \cdot a_n - G \cdot \cos\varphi = m \cdot \frac{v^2}{R} - m \cdot g \cdot \cos\varphi \ , \\ &F_n = m \cdot \frac{\omega^2 R^2}{R} - m \cdot g \cdot \cos\varphi \ , \\ &F_n = m \cdot [\omega^2 R - g \cdot \cos\varphi] \ . \end{aligned} \tag{10.43}$$

Bloková schéma pre **systém hmotného bodu**, ktorý rotuje na **bezhmotnej tyčke**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.61. V tejto blokovej schéme, ktorú sme simulovali pre nastavený nekonečný čas simulácie $\mathbf{t = inf}$, sme vytvorili zastavovaciu podmienku, ktorá zastaví chod simulácie v okamihu, keď tyčka prekoná pri svojom pohybe uhol natočenia $\boldsymbol{\varphi = 90}$°. Simulácia sa zastaví prakticky po uplynutí času cca $\mathbf{t = 1.189\ s}$.



Obr. 10.61. Bloková schéma pre hmotný bod rotujúci na tyčke

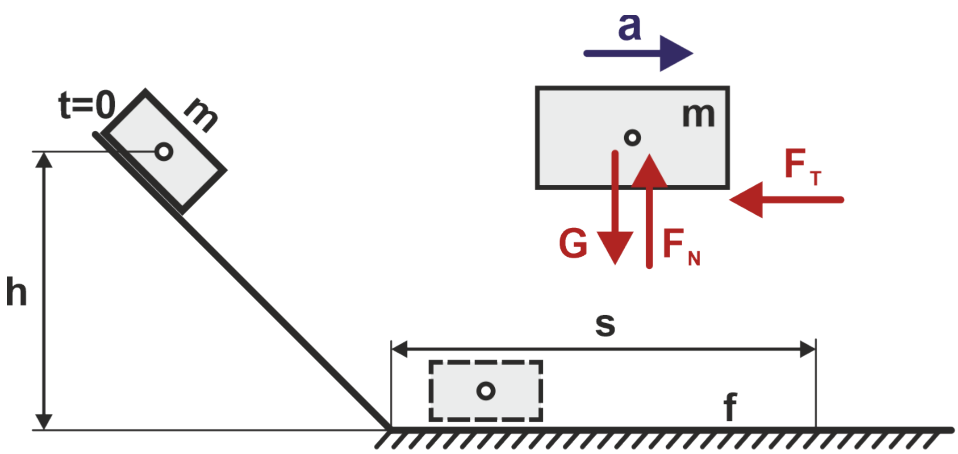
Na ďalšom Obr. 10.62 je znázornené riešenie simulácie pohybu bodu, ktorý sa pohybuje súčasne s bezhmotnou tyčkou. Na tomto obrázku sú zobrazené priebehy zmeny **natočenia tyčky φ** a **uhlovej rýchlosti ω**, ktorou sa tyčka pohybuje, ďalej priebeh zmeny veľkosti normálovej sily $\mathbf{F_n}$, ktorá pôsobí na tyčku v axiálnom smere k bodu otáčania. Maximálna hodnota tejto normálovej sily pri pootočení tyčky o uhol $\boldsymbol{\varphi = 90°}$ je $\mathbf{F_n = 9.842\ N}$.



Obr. 10.62. Priebehy pootočenia tyčky φ (°), uhlovej rýchlosti ω (s^{-1}) a veľkosti normálovej sily Fn (N)

Príklad č. 10.10.

Z výšky $\mathbf{h = 2\ m}$ sa začne pohybovať balíček hmotnosti $\mathbf{m = 5\ kg}$ po hladkej naklonenej rovine, pozri Obr. 10.63. Po skĺznutí tohto balíčka z tejto naklonenej plochy, sa balíček ďalej pohybuje kĺzavým pohybom z dôvodu zotrvačnosti po drsnej rovnej podložke. Pri pohybe tohto balíčka po tejto podložke naň pôsobí **trecia sila** daná súčiniteľom trenia $\mathbf{f = 0.8}$. Vypočítajte dráhu, ktorú balíček prekoná pohybom po podložke zo svojej počiatočnej polohy, až do úplného zastavenia. Odmerajte čas, kedy sa balíček zastaví.



Obr. 10.63. Balíček, ktorý sa kĺže v horizontálnom smere, po skĺznutí z naklonenej roviny

Riešenie:

Pre pohyb balíčka po naklonenej rovine musí platiť **zákon zachovania energií**. V počiatočnej polohe na naklonenej rovine má balíček potenciálnu energiu $\mathbf{E_p}$, v okamihu keď opúšťa naklonenú rovinu a začne sa pohybovať po rovnej ploche, má kinetickú energiu $\mathbf{E_k}$, tzn. že musí platiť

$$E_{k0} + E_{p0} = E_k + E_p = \text{konšt.}\ ,$$
$$0 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + 0\ . \qquad (10.44)$$

Potom počiatočnú rýchlosť pohybu, ktorou sa začne **balíček** pohybovať po **horizontálnej podložke**, môžeme vypočítať na základe tohto vzťahu

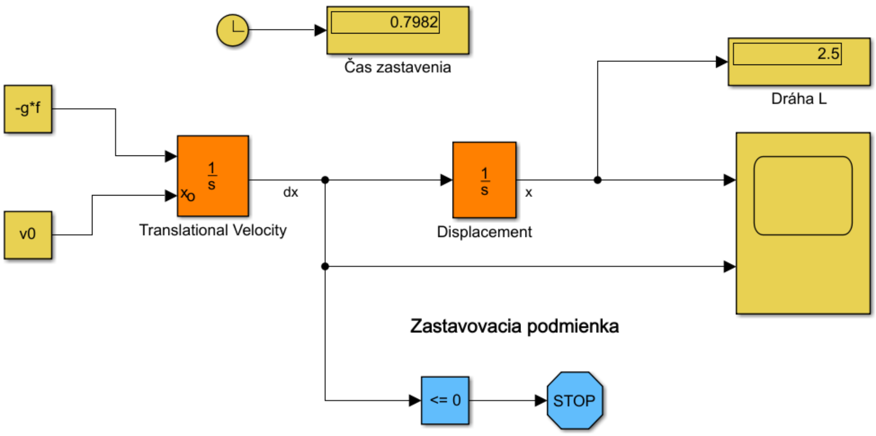
$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}\ . \qquad (10.45)$$

Pri pohybe po horizontálnej podložke koná **balíček** jednoduchý **translačný pohyb**. Pre tento pohyb musí platiť **II. Newtonov zákon**, tzn. že dostávame túto **diferenciálnu rovnicu 2. rádu**

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -F_T \ , \\ m \cdot \ddot{x} &= -f \cdot m \cdot g \ , \\ \ddot{x} &= -f \cdot g \ , \end{aligned} \tag{10.46}$$

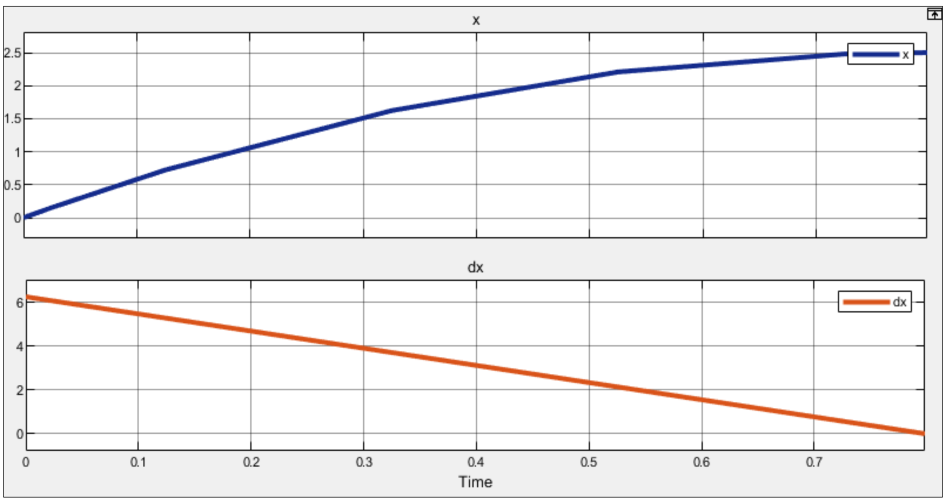
s počiatočnou podmienkou $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \sqrt{\mathbf{2} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}}$, kde $\mathbf{F_T} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{F_N} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{g}$.

Bloková schéma pre pohyb balíčka, ktorý sa pohybuje na drsnej podložke s počiatočnou rýchlosťou $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0})$, je znázornená na Obr. 10.64. Balíček sa zastaví po uplynutí času $\mathbf{t} = \mathbf{0.7982\ s}$. Za tento uplynutí čas prekoná dráhu dĺžky $\mathbf{L} = \mathbf{2.5\ m}$.



Obr. 10.64. Bloková schéma pre balíček pohybujúci po drsne podložke

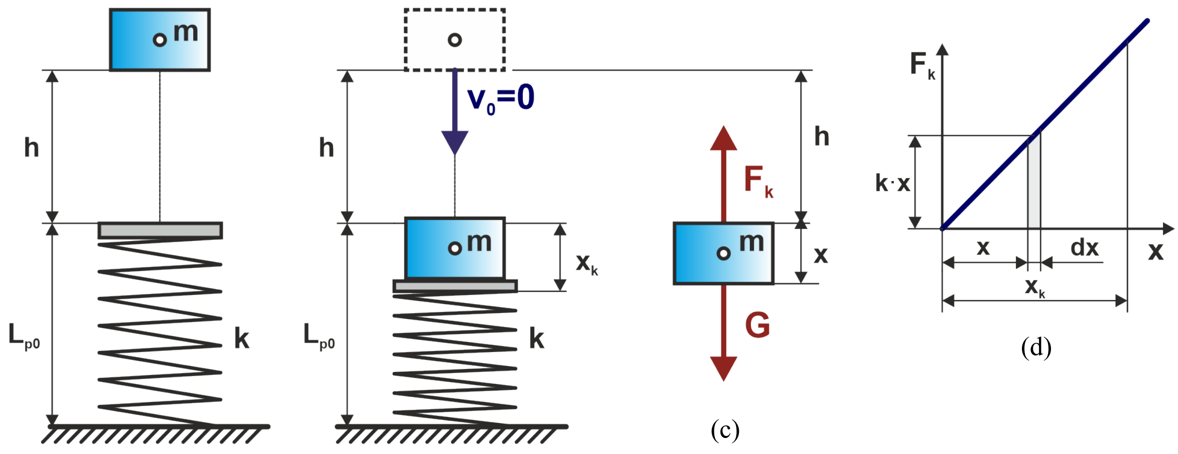
Na ďalšom Obr. 10.65 sú znázornené priebehy translačného posunutia a translačnej rýchlosti **balíčka**, ktorý sa pohybuje pri pôsobení trenia po horizontálnej podložke, až do jeho úplného zastavenia.



Obr. 10.65. Riešenie simulácie pohybu balíčka, poloha x (m) a rýchlosť dx ($m.s^{-1}$)

Príklad č. 10.11.

Z výšky $\mathbf{h = 1\,m}$ začne padať balíček hmotnosti $\mathbf{m = 5\,kg}$ na pružný podklad so známou tuhosťou $\mathbf{k = 2000\,N.m^{-1}}$, pozri Obr. 10.66. Vypočítajte stlačenie pružiny po dopade balíčka, ktorý je začne padať na tento pružný podklad z výšky **h** s nulovou počiatočnou rýchlosťou $\mathbf{v_0}$.



Obr. 10.66. (a) Balíček hmotnosti m padajúci na pružný podklad, (b) stlačenie pružiny po dopade balíčka, (c) silový obrazec, (d) závislosť sily v pružine F_k od deformácie x

Riešenie:

Pohyb balíčka po dopade na **pružný podklad** s tuhosťou **k** môžeme opísať jednoduchou diferenciálnou rovnicou s počiatočnou podmienku stlačenia pružiny $\mathbf{x_k}$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \ . \qquad (10.47)$$

Ďalej aplikovaním zákona o zmene **kinetickej energie** medzi dvomi polohami, musí platiť, že

$$A = \Delta E_k = E_k - E_{k0} \ . \qquad (10.48)$$

Prácu, ktorú koná sila $\mathbf{F_k}$ pri stláčaní pružiny, môžeme vypočítať na základe tohto vzťahu

$$A_{F_k} = \int_0^r \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = -\int_0^{x_k} k \cdot x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_k^2 \qquad (10.49)$$

a prácu gravitačnej sily **G** zase nasledujúcim vzťahom

$$A_G = \vec{G} \cdot \vec{r}_G = G \cdot (h + x_k) \cdot \qquad (10.50)$$

Potom pre kinetickú energiu $\mathbf{E_{k0}}$ na začiatku pohybu **balíčka** musí platiť, že

$$E_{k0} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = 0 \qquad (10.51)$$

a pre kinetickú energiu $\mathbf{E_k}$ na konci pohybu musí platiť, že

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_k^2 = 0 \ . \qquad (10.52)$$

Po dosadení za kinetickú energiu $\mathbf{E_k}$ vo vzťahu (10.48), ktorý definuje vetu o **zmene kinetickej energie**, dostávame tento výraz

$$\begin{gathered} m \cdot g \cdot (h + x_k) - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_k^2 = 0 - 0 \ , \\ x_k^2 - \frac{2}{k} \cdot m \cdot g \cdot x_k - \frac{2}{k} \cdot m \cdot g \cdot h = 0 \ . \end{gathered} \qquad (10.53)$$

Potom počiatočnú deformáciu pružiny $\mathbf{x_k}$ môžeme vypočítať z riešenia nasledujúcej kvadratickej rovnice

$$\begin{gathered} x_k = \frac{\frac{2}{k} \cdot m \cdot g \pm \sqrt{\frac{4}{k^2} \cdot m^2 \cdot g^2 + 4 \cdot \frac{2}{k} \cdot m \cdot g \cdot h}}{2 \cdot 1} \ , \\ x_k = \frac{m \cdot g}{k}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h \cdot k}{m \cdot g}}\right] . \end{gathered} \qquad (10.54)$$

To znamená, že počiatočná deformácia pružiny $\mathbf{x_k}$ je daná týmto vzťahom

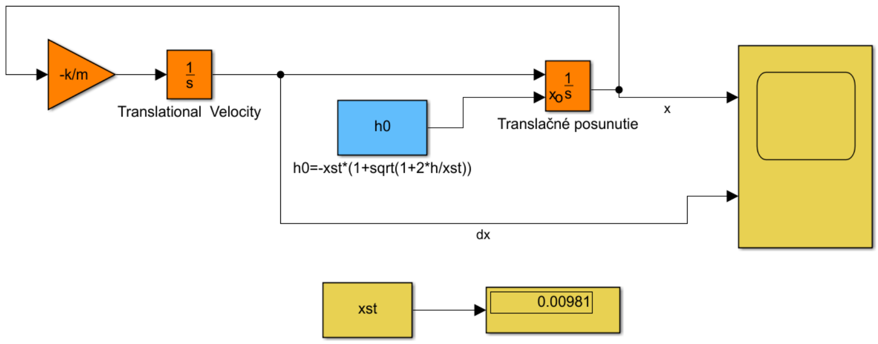
$$x_k = \frac{m \cdot g}{k}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h \cdot k}{m \cdot g}}\right] \qquad (10.55)$$

kde $\mathbf{x_{st}} = \frac{\mathbf{m \cdot g}}{\mathbf{k}}$ je **statická deformácia pružiny**.

Predchádzajúci vzťah môžeme prepísať do tohto výsledného tvaru

$$x_k = x_{st}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{x_{st}}}\right]. \qquad (10.56)$$

Bloková schéma, ktorá simuluje pohyb **padajúceho balíčka** na pružný podklad s nulovú počiatočnou rýchlosťou, je znázornená na Obr. 10.67.

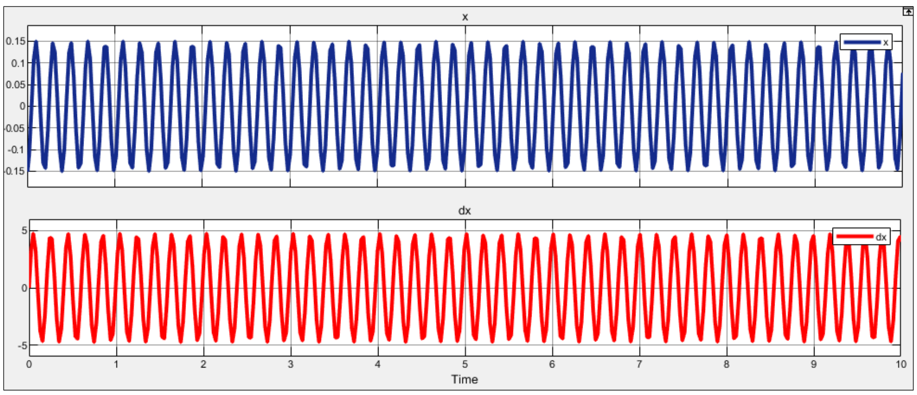


Obr. 10.67. Bloková schéma kmitania balíčka po dopade na pružinu

Ako vstupné parametre pri simulácií boli uvažované vstupy, ktoré boli zadefinované prostredníctvom **Model Workspace**, použitím nasledujúceho **Matlab** skriptu.

```
%Vstupné parametre
m=2;
h=1;
k=2000;
g=9.81;
xst=m*g/k;
h0=-xst*(1+sqrt(1+2*h/xst));
```

Na ďalšom Obr. 10.68 sú znázornené priebehy translačného posunutia a translačnej rýchlosti balíčka, ktorý kmitá po dopade na pružný podklad z výšky $\mathbf{h = 1\ m}$.



Obr. 10.68. Riešenie odozvy pohybu po dopade balíčka – x(m) a dx ($m.s^{-1}$)

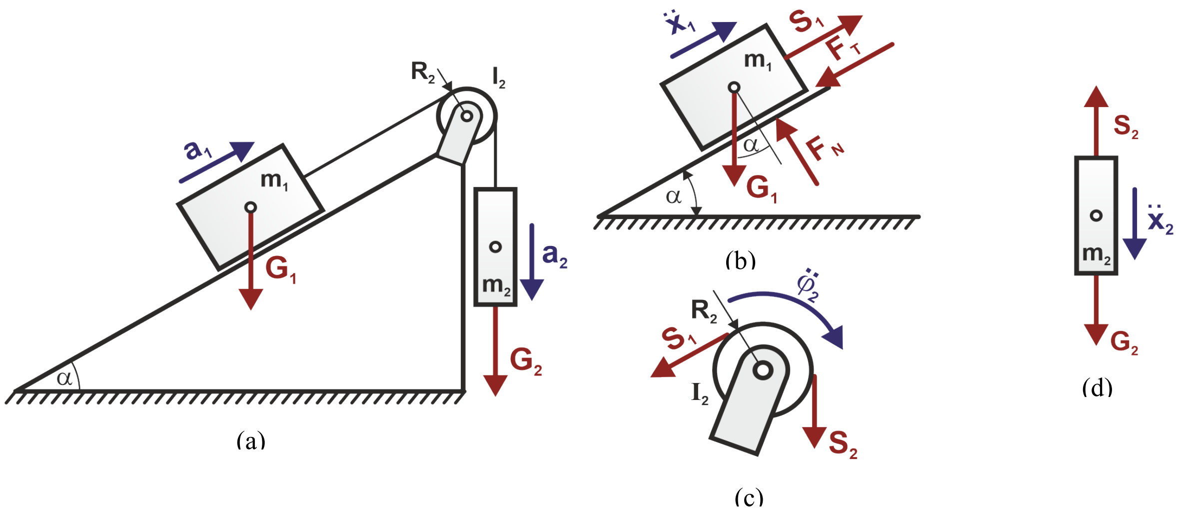
10.3 RIEŠENIE ÚLOH METÓDOU UVOĽŇOVANIA

Metóda postupného uvoľňovania spočíva v úplnom uvoľnení všetkých telies a nahradení väzieb väzbovými silami. Pre takto uvoľnené telesa sa napíšu pohybové rovnice, aplikovaním **II. Newtonovho zákona**. Sústava pohybových rovníc sa doplní o **kinematické väzbové rovnice**, ktoré definujú kinematické závislosti pohybov medzi jednotlivými telesami.

Takýmto postupom získame **sústavu diferenciálnych rovníc**, ktoré tvoria matematický model. **Metóda postupného uvoľňovania** je univerzálnou metódou, ktorá je vhodná pre všetky druhy mechanických sústav. Výhodou tejto metódy je, že pomocou nej môžeme vypočítať vnútorné silové účinky sústavy.

Príklad č. 10.12.

Predpokladajme systém viazaných telies zobrazený na Obr. 10.69. Dve telesá hmotnosti $\mathbf{m_1 = 10\,kg}$ a $\mathbf{m_2 = 30\,kg}$ sú spojené tuhým lanom, ktoré je vedené cez kladku so známym momentom zotrvačnosti $\mathbf{I_2 = 0.2\,kg.m^2}$ a polomerom $\mathbf{R_2 = 0.2\,m}$. Na obe telesá $\mathbf{m_1}$ a $\mathbf{m_2}$ pôsobí gravitačná sila. Teleso $\mathbf{m_1}$ sa pohybuje po naklonenej rovine, sklonenej pod uhlom $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{30}\,°$, pri pohybe tohto telesa uvažujeme vplyv trenia, daný koeficientom trenia $\mathbf{f = 0.2}$. Druhé teleso hmotnosti $\mathbf{m_2}$ voľne visí na lane. Nájdite matematický model tohto systému – **metódou postupného uvoľňovania** a odmerajte čas, za ktorý teleso $\mathbf{m_1}$ prekoná vzdialenosť dĺžky $\mathbf{L = 1\,m}$ zo svojej počiatočnej polohy.



Obr. 10.69. (a) Systém viazaných telies, (b) uvoľnenie telesa m_1, (c) uvoľnenie kladky, (d) uvoľnenie telesa m_2

Riešenie:

Matematický model odvodíme použitím **metódy postupného uvoľňovania**. Všetky telesá sústavy uvoľníme podľa Obr. 10.69 (b), (c) a (d). Potom aplikovaním **II. Newtonovho zákona** môžeme odvodiť tri pohybové rovnice systému.

Pre **teleso $\mathbf{m_1}$** musí platiť táto pohybová rovnica

$$\sum F_{ix} = 0:\ m_1 \cdot \ddot{x}_1 = S_1 - G_1 \cdot \sin\alpha - F_T\ , \qquad (10.57)$$

kde treciu silu $\mathbf{F_T = F_N \cdot f = G_1 \cdot \cos\alpha \cdot f}$ môžeme vypočítať pomocou normálovej sily $\mathbf{F_N}$, pre ktorú musí platiť táto rovnovážna rovnica

$$\sum F_{iy} = 0:\ F_N - G \cdot \cos\alpha = 0 \Longrightarrow F_N = G_1 \cdot \cos\alpha\ . \qquad (10.58)$$

Pre **teleso $\mathbf{I_2}$**, ktoré koná čisto rotačný pohyb musí platiť pohybová rovnica

$$I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = S_2 \cdot R_2 - S_1 \cdot R_2 \qquad (10.59)$$

a napokon pre **teleso $\mathbf{m_2}$** vieme napísať túto pohybovú rovnicu

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = G_2 - S_2\ . \qquad (10.60)$$

To znamená, že dostávame sústavu troch **diferenciálnych rovníc** v tomto tvare

$$\begin{aligned} &m_1 \cdot \ddot{x}_1 = S_1 - G_1 \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha \cdot f)\ , \\ &I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = S_2 \cdot R_2 - S_1 \cdot R_2\ , \\ &m_2 \cdot \ddot{x}_2 = G_2 - S_2\ . \end{aligned} \qquad (10.61)$$

Pre systém viazaných telies podľa Obr. 10.69 (a) vieme napísať tieto **kinematické väzbové rovnice**, ktorými možno predchádzajúci systém diferenciálnych rovníc zjednodušiť

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_2 \cdot R_2 \Longrightarrow \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_1}{R_2}\ , \\ &\dot{x}_2 = \dot{\varphi}_2 \cdot R_2 \Longrightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1\ . \end{aligned} \qquad (10.62)$$

Z poslednej rovnice sústavy diferenciálnych rovníc (10.61) vyjadríme neznámu silu v lane $\mathbf{S_2}$

$$S_2 = G_2 - m_2 \cdot \ddot{x}_2 = G_2 - m_2 \cdot \ddot{x}_1 \qquad (10.63)$$

a dosadením za $\mathbf{S_2}$ v druhej diferenciálnej rovnici systému (10.61), môžeme vypočítať silu v lane $\mathbf{S_1}$

$$S_1 = G_2 - m_2 \cdot \ddot{x}_1 - I_2 \cdot \frac{\ddot{x}_1}{R_2^2} \ . \qquad (10.64)$$

Ďalej dosadíme výraz (10.64) za $\mathbf{S_1}$ v prvej diferenciálnej rovnici systému (10.61). Vykonaním ďalších matematických úprav dospejeme k tejto diferenciálnej rovnici systému

$$\begin{gathered} m_1 \cdot \ddot{x}_1 = G_2 - m_2 \cdot \ddot{x}_1 - I_2 \cdot \frac{\ddot{x}_1}{R_2^2} - G_1 \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha \cdot f) \ , \\ \left[m_1 + m_2 + \frac{I_2}{R_2^2}\right] \cdot \ddot{x}_1 = G_2 - G_1 \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha \cdot f) \ . \end{gathered} \qquad (10.65)$$

Výsledný matematický model **systému viazaných telies** môžeme opísať jednou nezávislou diferenciálnou rovnicou v tomto tvare

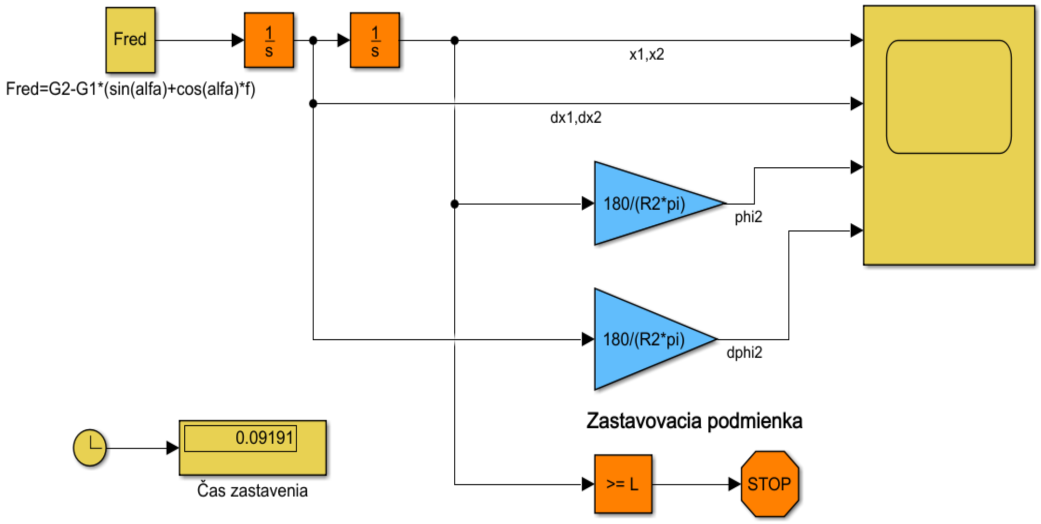
$$\ddot{x}_1 = \frac{G_2 - G_1 \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha \cdot f)}{m_1 + m_2 + \frac{I_2}{R_2^2}} = \frac{G_2 - G_1 \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha \cdot f)}{m_{red}} = \frac{F_{red}}{m_{red}} \ , \qquad (10.66)$$

kde $\mathbf{m_{red} = m_1 + m_2 + \frac{I_2}{R_2^2}}$ a $\mathbf{F_{red} = G_2 - G_1 \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha \cdot f)}$.

Ako vstupné parametre pre blokovú schému, ktorá simuluje pohyb viazaných telies podľa Obr. 10.69 (a), budeme uvažovať veličiny, ktoré načítame prostredníctvom skriptu **Matlabu** priamo v **Model Workspace**.

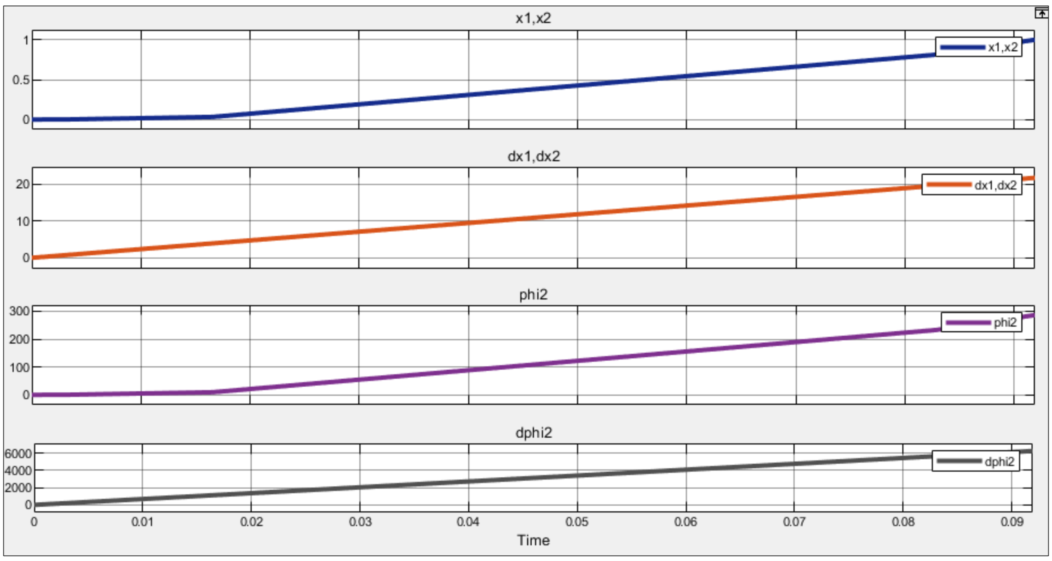
```
%Vstupné parametre systému
m1=10;
m2=30;
I2=0.2;
R2=0.2;
g=9.81;
f=0.1;
alfa=30*pi/180;
L=1;


%Tiažové sily
G1=m1*g;
G2=m2*g;


%Redukovaná hmotnosť a sila
mred=m1+m2+I2/R2^2;
Fred=G2-G1*(sin(alfa)+cos(alfa)*f);
```

Bloková schéma pre systém viazaných telies podľa Obr. 10.69 (a) je znázornená na ďalšom Obr. 10.70.



Obr. 10.70. Bloková schéma pre systém viazaných telies

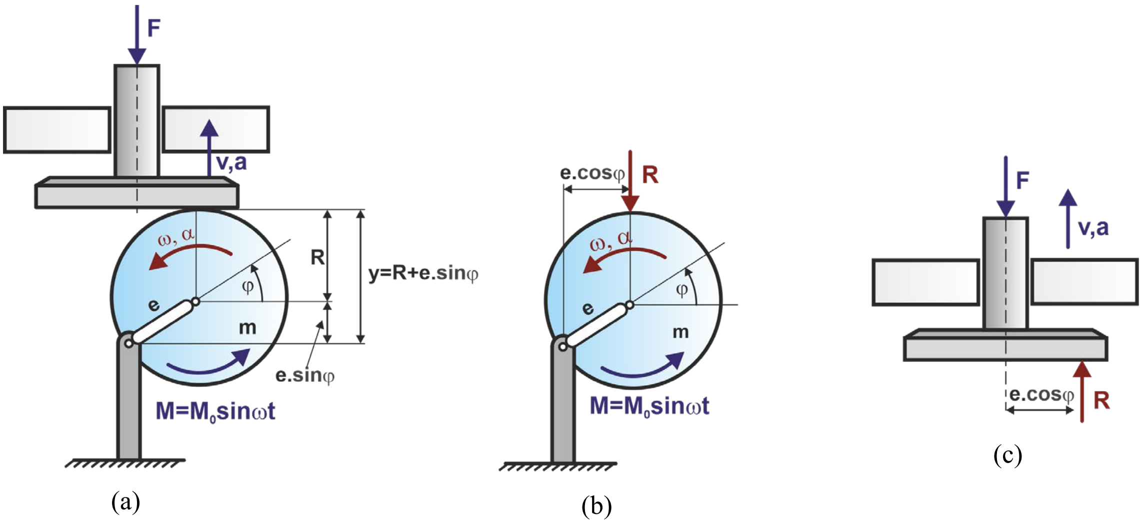
Na ďalšom Obr. 10.71 sú znázornené priebehy translačného a rotačného posunutia viazaných telies, ako aj priebehy translačnej a uhlovej rýchlosti týchto telies. Simuláciou blokového diagramu sme zistili, že teleso $\mathbf{m_1}$ prejde dráhu $\mathbf{L = 1\,m}$, po uplynutí času $\mathbf{t = 0.09191\,s}$.



Obr. 10.71. Priebehy pohybu viazaných telies – $x_{1,2}$(m), $dx_{1,2}$ (m.s^{-1}), φ_2(°) a $d\varphi_2$(s^{-1})

Príklad č. 10.13.

Na ďalšom Obr. 10.72 (a) je znázornený **vačkový systém** viazaných telies. **Hnacím systémom** je **vačka** kruhového tvaru s polomerom $\mathbf{R = 0.05\,m}$, ktorá má rovnakú hmotnosť $\mathbf{m = 0.2\,kg}$, ako **ventil** tohto systému. Stred otáčania vačky je daný excentricitou $\mathbf{e = 0.03\,m}$ od stredu vačky. Zatiaľ čo, na vačku pôsobí harmonicky meniaci sa moment $\mathbf{M = M_0 \sin \omega t}$, kde $\mathbf{M_0 = 0.2\,N.m}$ a frekvencia kmitania je $\mathbf{f = 10\ Hz}$, tak na ventil z hornej časti pôsobí sila konštantnej hodnoty $\mathbf{F = 10\ N}$. Odvoďte matematický model **metódou postupného uvoľňovania** a simuláciou tohto modelu formou blokovej schémy pre simulačný čas $\mathbf{t = 10\ s}$. Určte **translačné posunutie** a **rýchlosť** piesta v závislosti na čase **t**.



Obr. 10.72. (a) Vačkový systém, (b) uvoľnenie vačky, (c) uvoľnenie ventilu

Riešenie:

Vačkový mechanizmus podľa Obr. 10.72 (a) je mechanizmom s **jedným stupňom voľnosti** a jeho pohyb teda môžeme opísať jednou nezávislou súradnicou. Za túto nezávislú súradnicu zvolíme uhol pootočenia vačky $\boldsymbol{\varphi}$. Závislou súradnicou je translačné posunutie ventilu **y**. Toto posunutie závisí od uhlu pootočenia $\boldsymbol{\varphi}$, ktoré môžeme v každom čase **t** definovať touto rovnicou zdvihu

$$y = R + e \cdot \sin\varphi \ . \tag{10.67}$$

Deriváciou prechádzajúcej rovnice podľa času **t** možno vypočítať **zdvihovú rýchlosť piesta** v čase **t**, pre ktorú musí platiť, že

$$v = \dot{y} = e \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = \omega \cdot e \cdot \cos\varphi \ . \tag{10.68}$$

Druhou deriváciou predchádzajúcej rovnice podľa času **t** vypočítame **zrýchlenie zdvihu piesta** **a**, pre ktoré platí, že

$$a = \ddot{y} = e \cdot \dot{\omega} \cdot \cos\varphi - \omega \cdot e \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = e \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos\varphi - e \cdot \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \ . \tag{10.69}$$

Pre uvoľnené telesá **vačky** a **ventilu** podľa Obr. 10.72 (b) a (c) môžeme napísať tieto diferenciálne rovnice pohybu. Pre **vačku**, ktorá koná **rotačný pohyb** musí platiť táto rovnica pohybu

$$\mathrm{I} \cdot \ddot{\varphi} = \mathrm{M} - \mathrm{R} \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi \tag{10.70}$$

a **pre ventil**, ktorý koná čisto **translačný pohyb** táto rovnica pohybu

$$\mathrm{m} \cdot \ddot{\mathrm{y}} = \mathrm{R} - \mathrm{F} \Longrightarrow \mathrm{R} = \mathrm{m} \cdot \ddot{\mathrm{y}} + \mathrm{F} \ . \tag{10.71}$$

Ak teraz dosadíme odvodený vzťah pre reakciu **R** do predchádzajúcej diferenciálnej rovnice (10.70), potom dostávame tento **matematický model**

$$\mathrm{I} \cdot \ddot{\varphi} = \mathrm{M} - (\mathrm{m} \cdot \ddot{\mathrm{y}} + \mathrm{F}) \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi \ . \tag{10.72}$$

Postupnými matematickými operáciami môžeme dospieť k diferenciálnej rovnici v tomto tvare

$$\mathrm{I} \cdot \ddot{\varphi} + \mathrm{m} \cdot \ddot{\mathrm{y}} \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi = \mathrm{M} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi \ . \tag{10.73}$$

Dosadením vypočítaného zrýchlenia zdvihu piesta $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}$ do predchádzajúcej pohybovej rovnice pre **ventil**, dostávame

$$\begin{gathered}
\mathrm{I} \cdot \ddot{\varphi} + \mathrm{m} \cdot [\mathrm{e} \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos\varphi - \mathrm{e} \cdot \dot{\varphi}^2 \sin\varphi] \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi = \mathrm{M} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi \ , \\
\mathrm{I} \cdot \ddot{\varphi} + \mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^2 \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi - \mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \mathrm{M} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi \ , \\
[\mathrm{I} + \mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^2 \cdot \cos^2\varphi] \cdot \ddot{\varphi} = \mathrm{M} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi + \mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin\varphi \cos\varphi \ .
\end{gathered} \tag{10.74}$$

Napokon výsledná diferenciálna rovnica, ktorá popisuje pohybu daného systému nadobúda tento tvar

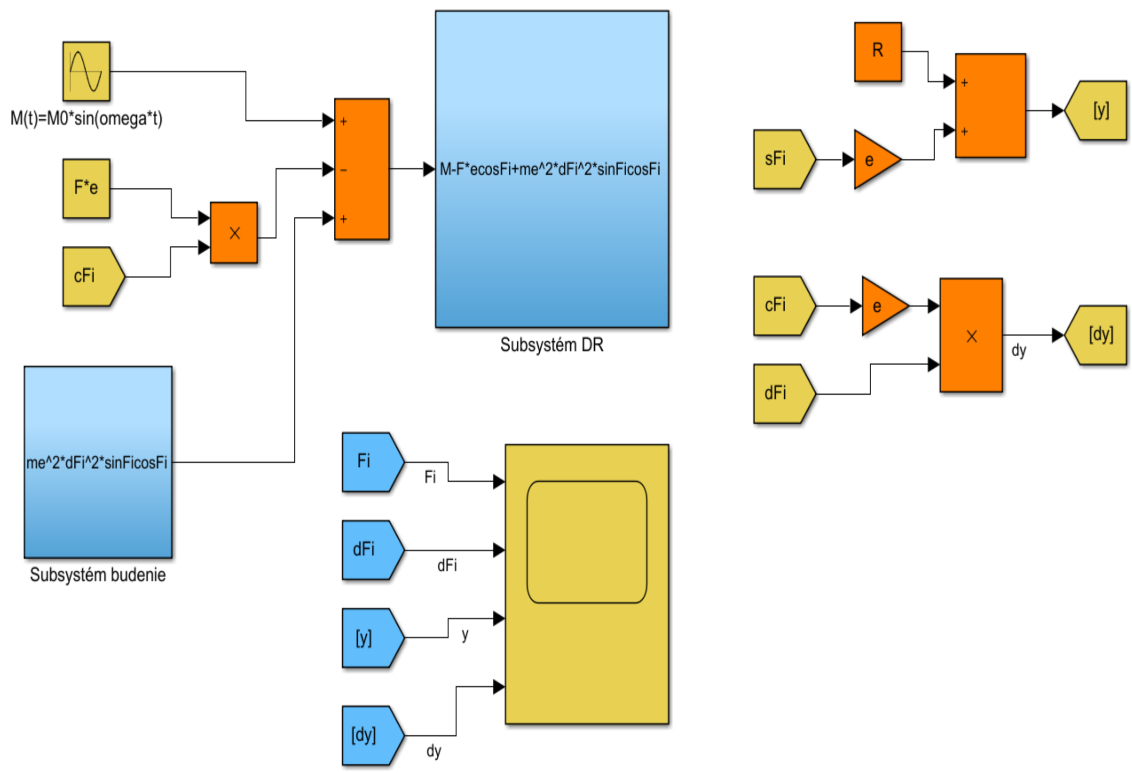
$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{M} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{e} \cdot \cos\varphi + \mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\mathrm{I} + \mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^2 \cdot \cos^2\varphi} \ . \tag{10.75}$$

kde $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\check{\mathrm{T}}} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}^2 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{m} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \mathbf{R}^2 + \mathbf{e}^2\right]$.

Ako vstupné parametre pre danú **blokovú schému** sme opäť uvažovali hodnoty načítané prostredníctvom skriptu **Matlabu**.

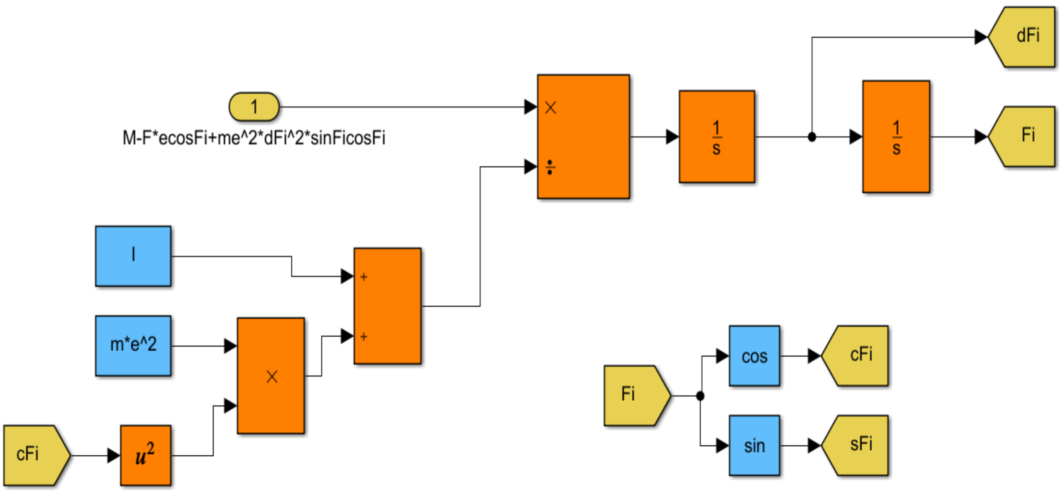
```
%Vstupné parametre systému
m=0.2;
R=0.05;
e=0.03;
M0=0.2;
f=10;
omega=2*pi*f;
F=10;


%Moment zotrvačnosti vačky
I=m*(1/2*R^2+e^2);
```

Na Obr. 10.73 je zobrazená **bloková schéma**, ktorá rieši simuláciu pohybu systému dvoch viazaných telies. Jedným z telies je **kruhová vačka**, ktorá je excentricky umiestnená vo vzdialenosti **e** a budená momentom **M**. Druhým telesom je ventil, na ktorý pôsobí sila **F**.

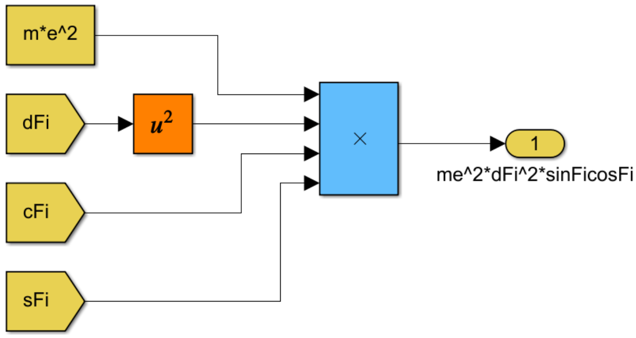


Obr. 10.73. Bloková schéma pre vačkový systém

V predchádzajúcej **blokovej schéme** na Obr. 10.73 boli použité na zjednodušenie celého blokového diagramu dva subsystémy, a to **Subsystém DR** a **Subsystém budenie**, ktorých blokové schémy sú znázornené na ďalších Obr. 10.74 a Obr. 10.75.

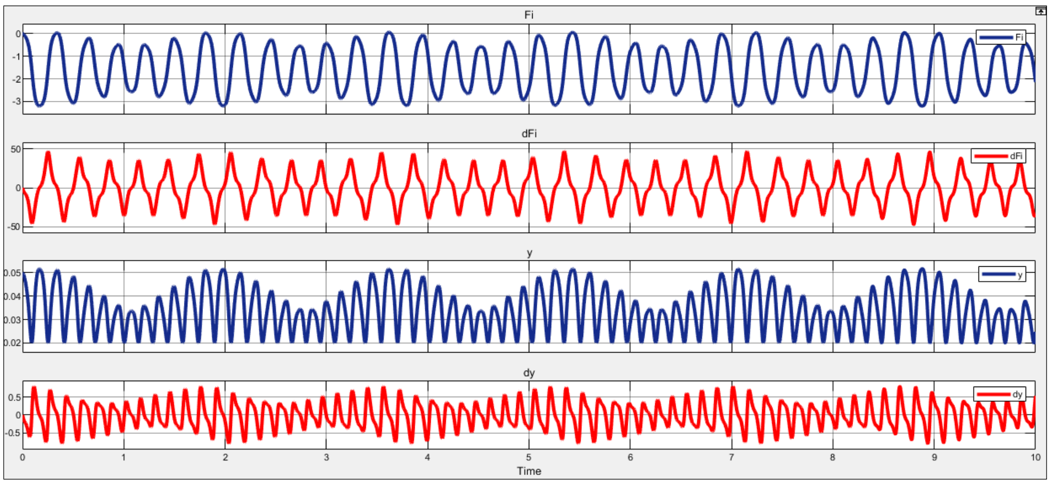


Obr. 10.75. Subsystém DR



Obr. 10.74. Subsystém budenie

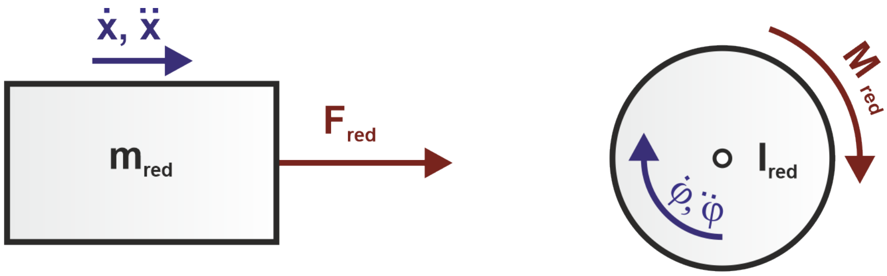
Výsledok riešenia simulácie v podobe priebehov **translačného posunutia** a **uhlového natočenia** telies **vačkového systému**, ako aj **translačnej** a **uhlovej** rýchlosti pohybu telies, je zobrazený na Obr. 10.76.



Obr. 10.76. Priebeh odozvy vačkového systému – y(m), dy(m.s^{-1}), φ(rad) a dφ(s^{-1})

10.4 RIEŠENIE ÚLOH METÓDOU REDUKCIE

Metóda redukcie spočíva v nahradení celej mechanickej sústavy jednoduchou **redukovanou** (fiktívnou) sústavou, ktorá koná buď **translačný** alebo **rotačný pohyb**, pozri Obr. 10.77 (a) a (b). Celkom nevhodné by bolo redukovať sústavu na všeobecný rovinný pohyb. Pohyb takejto redukovanej sústavy definujeme jednoduchou pohybovou rovnicou pre **translačný** alebo **rotačný pohyb**, z ktorej vyriešime príslušnú kinematicky nezávislú premennú, ktorou môžeme popísať pohyb celej sústavy. Pripomeňme, že **redukovaná sústava** musí byť vytvorená takým spôsobom, aby dôkladne nahradila celú pôvodnú mechanickú sústavu.



(a) (b)

Obr. 10.77. (a) Redukcia sústavy na translačný pohyb, (b) redukcia sústavy na rotačný pohyb

Pohybová rovnica **redukovanej sústavy s nekonštantným prevodom** podľa predchádzajúcich Obr. 10.77 (a) a (b) má pre **translačný** resp. **rotačný** pohyb definovaný tento všeobecný tvar

$$
\begin{aligned}
m_{red} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{dm_{red}}{dx}\dot{x}^2 &= F_{red} \ , \\
I_{red} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dI_{red}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 &= M_{red} \ .
\end{aligned}
\qquad (10.76)
$$

Odvodenie prechádzajúcich dvoch diferenciálnych rovníc vychádza z porovnania **zmeny kinetickej energie ΔE_k** a mechanickej **práce A**, ktorá je vykonaná celou sústavou telies

$$\Delta E_k = A \ . \qquad (10.77)$$

Ak predchádzajúcu rovnicu predelíme časom Δt, dostávame tento tvar

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{A}{\Delta t} \ , \qquad (10.78)$$

ktorý zapísaný v diferenciálnom tvare môžeme definovať týmto spôsobom

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{dA}{dt} = P\,, \tag{10.79}$$

kde pravá strana rovnice **P** predstavuje **výkon celej sústavy**. Výkon sústavy pre **translačný** resp. **rotačný** pohyb môžeme vyjadriť ako

$$\begin{aligned} P &= F_{red} \cdot \dot{x}\,, \\ P &= M_{red} \cdot \dot{\varphi}\,, \end{aligned} \tag{10.80}$$

kde $\mathbf{F_{red}}$ je redukovaná sila sústavy a $\mathbf{M_{red}}$ je redukovaný moment. Ak ďalej vyjdeme z poznatku **kinetickej energie sústavy** pre translačný a rotačný pohyb

$$E_k = \frac{1}{2} m_{red} \cdot \dot{x}^2\,, \quad E_k = \frac{1}{2} I_{red} \cdot \dot{\varphi}^2\,, \tag{10.81}$$

potom celú ľavú stranu rovnice možno upraviť do tohto tvaru

$$\begin{aligned} m_{red} \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{red}}{dx} \cdot \dot{x}^3 &= \left[m_{red} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{red}}{dx} \cdot \dot{x}^2 \right] \cdot \dot{x} = F_{red} \cdot \dot{x}\,, \\ I_{red} \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_{red}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^3 &= \left[I_{red} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_{red}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 \right] \cdot \dot{\varphi} = M_{red} \cdot \dot{\varphi}\,, \end{aligned} \tag{10.82}$$

kde $\mathbf{m_{red}}$ je redukovaná hmotnosť sústavy a $\mathbf{I_{red}}$ je redukovaný moment zotrvačnosti.

Vykrátením **translačnej rýchlosti $\dot{\mathbf{x}}$** resp. **uhlovej rýchlosti $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$** na oboch stranách rovníc, dospejeme k týmto diferenciálnym rovniciam **redukovanej sústavy s nekonštantným prevodom**

$$\begin{aligned} m_{red} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{red}}{dx} \cdot \dot{x}^2 &= F_{red}\,, \\ I_{red} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_{red}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 &= M_{red}\,. \end{aligned} \tag{10.83}$$

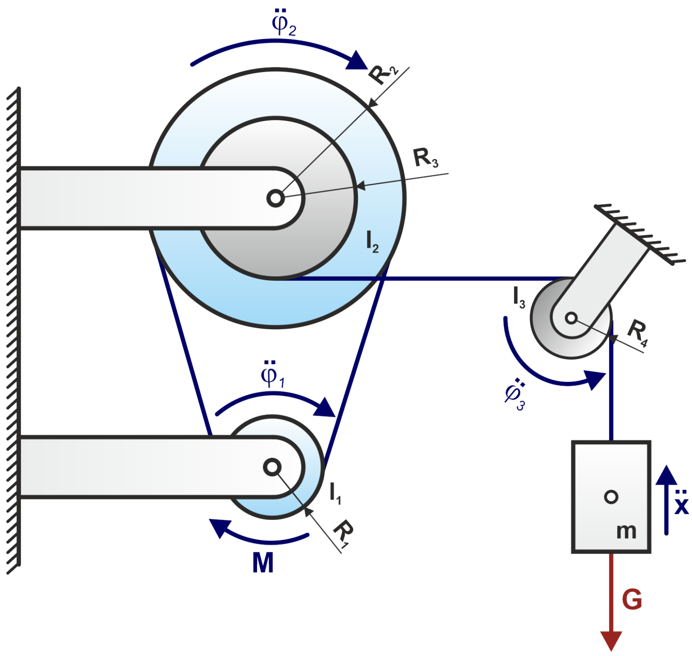
V prípade, že budeme predpokladať sústavu s konštantným prevodom, potom **redukovaná hmotnosť $\mathbf{m_{red}}$** resp. **redukovaný moment zotrvačnosti $\mathbf{I_{red}}$** nezávisia od premennej **x** resp. **φ**, a teda v tomto prípade môžeme predchádzajúce rovnice zjednodušiť na tento tvar

$$m_{red} \cdot \ddot{x} = F_{red} \; ,$$
$$I_{red} \cdot \ddot{\varphi} = M_{red} \; . \qquad (10.84)$$

Príklad č. 10.14.

Sústava viazaných telies pozostáva z kladky so známym momentom zotrvačnosti $\mathbf{I_1 = 0.004\ kg.m^2}$ a polomerom $\mathbf{R_1 = 0.2\ m}$. Táto kladka, ktorá je hnacím prvkom celej sústavy, je poháňaná konštantným krútiacim momentom $\mathbf{M = 100\ N.m}$, pozri Obr. 10.78.

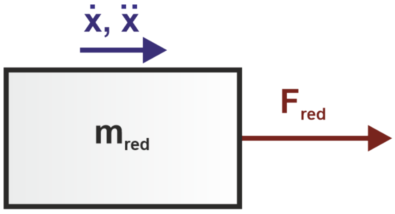
Hnacia kladka č. 1 je kinematicky spojená s ďalšou zložitou **kladkou č. 2**, ktorej moment zotrvačnosti je $\mathbf{I_2 = 0.08\ kg.m^2}$. Táto kladka pozostáva z kladky väčšieho polomeru $\mathbf{R_2 = 0.5\ m}$, a taktiež navíjacieho bubna, na ktorý sa navíja lano pri zdvíhaní bremena. Menší polomer kladky $\mathbf{R_3 = 0.5\ m}$ je priamo previazaný lanom so zdvíhaným telesom známej hmotnosti $\mathbf{m = 10\ kg}$. Kladka s polomerom $\mathbf{R_4}$ je fixovaná k základu. Využitím metódy redukcie nájdite **matematický model** a porovnajte riešenie **sústavy redukciou na translačný pohyb** telesa **m** a **rotačný pohyb kladky č. 1**. Odmerajte čas, za ktorý teleso **m** prekoná dráhu $\mathbf{L = 1\ m}$.



Obr. 10.78. Kladkový systém

Riešenie:

Pripomeňme, že sústava viazaných telies podľa Obr. 10.78 je tvorená hnacou kladkou so známymi geometrickými parametrami, ktorá je poháňaná **momentom** $\mathbf{M(t)}$ a rotuje **uhlovou rýchlosťou** $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{1}}$. Ďalej dvojitou kladkou rotujúcou **uhlovou rýchlosťou** $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{2}}$ a kladkou zanedbateľnej hmotnosti, ktorá slúži na podopretie **bremena hmotnosti m**, cez ktorú je bremeno zdvíhané smerom nahor translačnou rýchlosťou $\dot{\mathbf{x}}$. V prvom rade vykonáme redukciu systému na **translačný člen** podľa nasledujúceho Obr. 10.79.



Obr. 10.79. Redukcia na translačný pohyb telesa

Napíšme **kinetickú energiu E_k** celej sústavy, ktorá sa musí rovnať **kinetickej energii redukovanej sústavy**. A teda platí, že

$$E_k = \frac{1}{2} m_{red} \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 \ . \tag{10.85}$$

Zaveďme rovnice, ktoré popisujú kinematické väzby medzi telesami s uvažovaním redukcie na **translačný pohyb** telesa **m**. Dostávame tieto rovnice

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_2 \cdot R_3 = \dot{x} \Longrightarrow \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}}{R_3} \ , \\ &\dot{\varphi}_1 \cdot R_1 = \dot{\varphi}_2 \cdot R_2 \Longrightarrow \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_2 \cdot R_2}{R_1} = \frac{\dot{x}}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} \ , \end{aligned} \tag{10.86}$$

dosadením týchto rovníc kinematických väzieb do vzťahu pre **kinetickú energiu**, dostávame

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 \ , \\ &\frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \left[\frac{\dot{x}}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1}\right]^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \left[\frac{\dot{x}}{R_3}\right]^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 \ . \end{aligned} \tag{10.87}$$

Eliminovaním člena $\frac{1}{2} \cdot \dot{x}^2$ na oboch stranách rovnice, dospejeme k tomuto vzťahu, ktorý definuje redukovanú hmotnosť $\mathbf{m_{red}}$ redukovanej sústavy

$$m_{red} = I_1 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2 \cdot R_3^2} + I_2 \cdot \frac{1}{R_3^2} + m \ . \tag{10.88}$$

Ďalej vyjadríme **výkon redukovanej sústavy**, z ktorého potom vypočítame vzťah pre redukovanú silu $\mathbf{F_{red}}$.

Keďže z fyziky vieme, že práca vyjadruje dráhový účinok sily $\mathbf{A = F \cdot x}$, potom pre výkon **translačného pohybu** musí platiť tento vzťah $\mathbf{P = \frac{dA}{dt} = F \cdot \dot{x}}$ a **pre výhon rotačného pohybu vzťah** $\mathbf{P = M \cdot \dot{\varphi}}$. To znamená, že redukciou sústavy na translačný pohyb telesa **m** platí, že

$$P = F_{red} \cdot \dot{x} = M \cdot \dot{\varphi}_1 - G \cdot \dot{x} \ , \tag{10.89}$$

do ktorého dosadíme vzťahy, ktoré platia pre **kinematické väzby** a dospejeme k tejto rovnici

$$F_{red} \cdot \dot{x} = M \cdot \frac{\dot{x}}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} - G \cdot \dot{x} \ . \tag{10.90}$$

Z predchádzajúcej rovnice po vykrátení člena $\dot{\mathbf{x}}$ na oboch stranách rovnice, dostávame vzťah pre redukovanú silu sústavy telies $\mathbf{F_{red}}$

$$F_{red} = M \cdot \frac{1}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} - G \ . \tag{10.91}$$

Keďže **redukovaná hmotnosť** $\mathbf{m_{red}}$ v tomto prípade nie je závislá od premennej **x**, tzn. že $\mathbf{\frac{dm_{red}}{dx} = 0}$, potom jej dosadením do základnej diferenciálnej rovnice pre redukovanú sústavu, dostávame **systém s konštantným prevodom**, pre ktorý platí táto diferenciálna rovnica pohybu

$$\begin{gathered} m_{red} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{dm_{red}}{dx}\dot{x}^2 = F_{red} \ , \\ m_{red} \cdot \ddot{x} = F_{red} \ . \end{gathered} \tag{10.92}$$

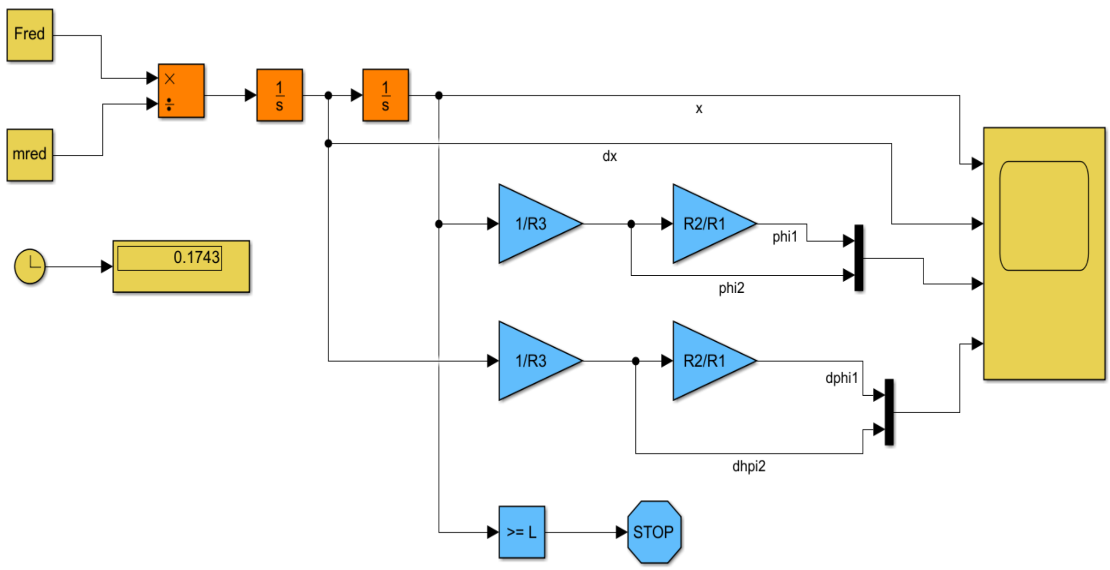
Predchádzajúcu **diferenciálnu rovnicu 2. rádu** upravíme do tohto **simulinkovského tvaru**

$$\ddot{x} = \frac{F_{red}}{m_{red}} = \frac{M \cdot \frac{1}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} - G}{I_1 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2 \cdot R_3^2} + I_2 \cdot \frac{1}{R_3^2} + m} \ . \tag{10.93}$$

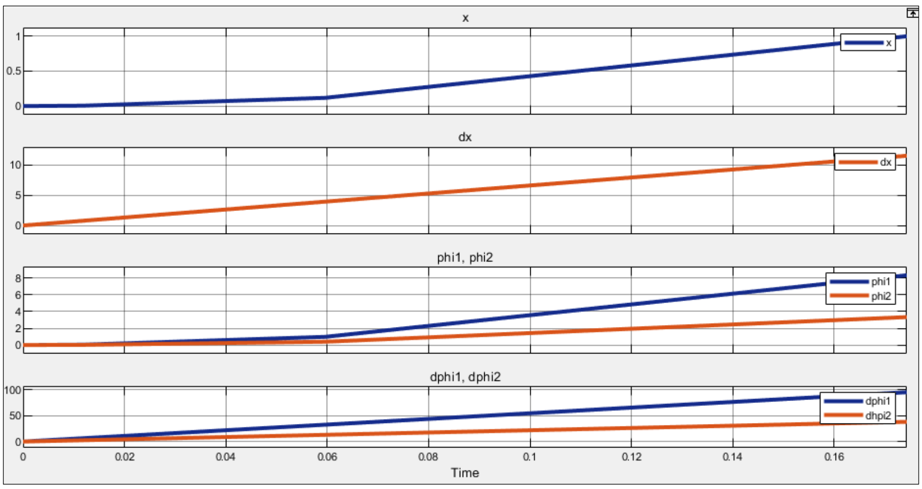
Vstupné parametre podľa zadania z príkladu, ktoré využijeme ako vstupné parametre systému viazaných telies pre namodelovanie **blokovej schémy**, načítame prostredníctvom nasledujúceho skriptu v **Matlabe**, ktorý vytvoríme v **Model Workspace**.

```
%Vstupné parametre systému
R1=0.2;
R2=0.5;
R3=0.3;
I1=0.004;
I2=0.08;
m=10;
M=100;
g=9.81;
L=1;
G=m*g;


%Výpočet redukovanej hmotnosti a redukovanej sily
mred=m+I1*R2^2/(R1^2*R3^2)+I2/R3^2;
Fred=M*R2/(R3*R1)-G;
```

Bloková schéma, ktorá rieši simuláciu pohybu redukovaného systému viazaných telies, je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.80.



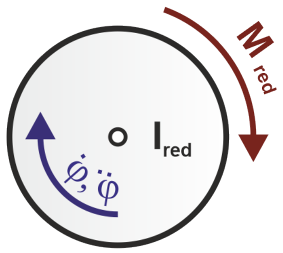
Obr. 10.80. Bloková schéma redukcie na translačný člen m



Obr. 10.81. Riešenie simulácie systému kladiek redukovaného na translačný pohyb člena m

Na predchádzajúcom Obr. 10.81 sú znázornené priebehy **translačného posunutia** a **uhlového natočenia** telies vačkového systému, ako aj priebehy **translačnej** a **uhlovej** rýchlosti pohybu telies tohto systému, ktorý sme redukovali na translačný pohyb telesa **m**. V blokovej schéme, ktorá simulovala pohyb sústavy viazaných telies, sme vytvorili zastavovaciu podmienku, ktorá slúžila na odmeranie času, kedy teleso **m** prejde dráhu $\mathbf{L = 1\ m}$ zo svojej počiatočnej polohy. Simuláciou sme identifikovali, že toto teleso prekoná túto dráhu za čas $\mathbf{t\ =\ 0.1743\ s}$.

Teraz vykonáme redukciu systému viazaných telies na **rotačný pohyb kladky č. 1**, pozri Obr. 10.82.



Obr. 10.82. Redukcia sústavy na rotačný pohyb

Napíšme opäť **kinetickú energiu** $\mathbf{E_k}$ celej sústavy, ktorá sa musí rovnať kinetickej energii redukovanej sústavy na rotačný pohyb **kladky č. 1**

$$E_k = \frac{1}{2}\cdot I_{red}\cdot\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2}\cdot I_1\cdot\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2\ . \qquad (10.94)$$

Zaveďme rovnice, ktoré popisujú kinematické väzby medzi telesami s uvažovaním redukcie na **rotačný pohyb** telesa kladky č. 1. Dostávame tieto vzťahy

$$\begin{gathered}\dot{\varphi}_1\cdot R_1 = \dot{\varphi}_2\cdot R_2 \Longrightarrow \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{\varphi}_1\cdot R_1}{R_2}\ ,\\ \dot{x} = \dot{\varphi}_2\cdot R_3 \Longrightarrow \dot{x} = \dot{\varphi}_1\cdot\frac{R_1\cdot R_3}{R_2}\ ,\end{gathered} \qquad (10.95)$$

ktoré dosadíme do vzťahu pre **kinetickú energiu** a dostávame, že

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\cdot I_{red}\cdot\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2}\cdot I_1\cdot\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}m\cdot\dot{x}^2\ ,\\ \frac{1}{2}\cdot I_{red}\cdot\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2}\cdot I_1\cdot\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\left[\frac{\dot{\varphi}_1\cdot R_1}{R_2}\right]^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left[\dot{\varphi}_1\frac{R_1\cdot R_3}{R_2}\right]^2\ .\end{gathered} \qquad (10.96)$$

Eliminovaním člena $\frac{1}{2} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1^2$ na oboch stranách rovnice, dospejeme k tomuto vzťahu, ktorý definuje redukovaný moment zotrvačnosti $\mathbf{I_{red}}$ danej redukovanej sústavy

$$I_{red} = I_1 + I_2 \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2} + m \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_3^2}{R_2^2} \ . \tag{10.97}$$

Ďalej vyjadríme vzťah pre **výkon** redukovanej sústavy **P**, z ktorého vypočítame redukovaný moment $\mathbf{M_{red}}$. Ak vieme, že pre rotačný pohyb je výkon daný ako $\mathbf{P = M \cdot \dot{\varphi}}$, potom pre redukovanú sústavu platí, že

$$P = M_{red} \cdot \dot{\varphi}_1 = M \cdot \dot{\varphi}_1 - G \cdot \dot{x} \ . \tag{10.98}$$

Dosadením kinematických väzieb do predchádzajúcej rovnice dostávame vzťah

$$M_{red} \cdot \dot{\varphi}_1 = M \cdot \dot{\varphi}_1 - G \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \cdot \dot{\varphi}_1 \ , \tag{10.99}$$

z ktorého vylúčením člena $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1$ po oboch stranách rovnice, dospejeme k redukovanému momentu sústavy

$$M_{red} = M - G \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \ . \tag{10.100}$$

Ako môžeme vidieť, tak redukovaný moment zotrvačnosti nie je závislý od premennej $\boldsymbol{\varphi}_1$, tzn. že $\frac{\mathbf{dI_{red}}}{\mathbf{d\varphi_1}} = \mathbf{0}$, a teda aj v tomto prípade dostávame prípad redukovanej sústavy s konštantným prevodom

$$\begin{aligned} I_{red} \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_{red}}{d\varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 &= M_{red} \ , \\ I_{red} \cdot \ddot{\varphi}_1 &= M_{red} \ . \end{aligned} \tag{10.101}$$

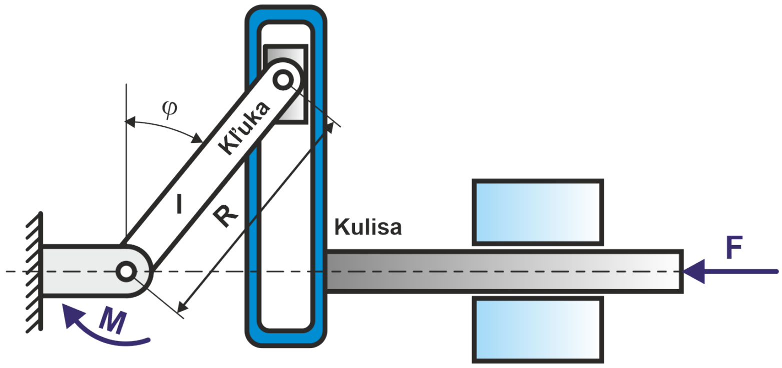
Predchádzajúcu **diferenciálnu rovnicu 2. rádu** upravíme do tohto **simulinkovského tvaru**

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M_{red}}{I_{red}} = \frac{M - G \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}}{I_1 + I_2 \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2} + m \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_3^2}{R_2^2}} \ . \tag{10.102}$$

Príklad č. 10.15.

Hnacím členom **kľukového mechanizmu** je kľuka známeho polomeru $\mathbf{R = 0.5\ m}$, ktorej moment zotrvačnosti je $\mathbf{I = 120\ kg.m^2}$. Kľuka rotuje uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ a pri pohybe na ňu pôsobí harmonicky meniaci sa krútiaci moment $\mathbf{M = M_0 \cdot \sin \omega t}$, kde $\mathbf{M_0 = 10\ N.m}$ a frekvencia kmitania je $\mathbf{f = 20\ Hz}$, pozri Obr. 10.83.

Hnaným členom mechanizmu je kulisa hmotnosti $\mathbf{m = 10\ kg}$, na ktorú v každom čase pôsobí sila známej veľkosti $\mathbf{F = 100\ N}$. Metódou redukcie na **rotačný pohyb kľuky** odvoďte matematický model a vytvorte simuláciu takéhoto mechanizmu formou **blokového diagramu** v **Simulinku**.



Obr. 10.83. Kľukový mechanizmus

Riešenie:

Polohu kulisy **x**, ktorá sa pohybuje **translačným pohybom**, môžeme v každom časovom okamihu **t** definovať v závislosti na uhlového pootočenia tejto kľuky $\boldsymbol{\varphi}$. To znamená, že platí

$$x(t) = R \cdot \sin \varphi \qquad (10.103)$$

a pre **translačnú rýchlosť kulisy v** musí platiť, že

$$v(t) = \dot{x}(t) = R \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi = R \cdot \omega \cdot \cos \varphi\,. \qquad (10.104)$$

Vykonajme redukciu na **rotačný pohyb kľuky**, napísaním vzťahu pre celkovú kinetickú energiu sústavy, ktorá sa musí rovnať kinetickej energii redukovanej sústavy

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I_{red} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2\ , \qquad (10.105)$$

kde dosadením za $\mathbf{\dot{x} = R \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \cos \boldsymbol{\varphi}}$, dostávame

$$\frac{1}{2} \cdot I_{red} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot [R \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi]^2 \ . \qquad (10.106)$$

Potom vykrátením výrazu $\mathbf{\frac{1}{2} \cdot \dot{\varphi}^2}$ na oboch stranách rovnice, dostávame tento vzťah pre **redukovaný moment zotrvačnosti $\mathbf{I_{red}}$** sústavy

$$I_{red} = I + m \cdot R^2 \cdot \cos^2\varphi \ . \qquad (10.107)$$

Výkon v sústave kľukového mechanizmu koná krútiaci moment **M** a sila **F**, ktorá pôsobí na kulisu. To znamená, že **redukovaný výkon** celej sústavy môžeme napísať v tomto tvare

$$P = M_{red} \cdot \dot{\varphi} = M \cdot \dot{\varphi} - F \cdot \dot{x} = M \cdot \dot{\varphi} - F \cdot R \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi \ , \qquad (10.108)$$

potom dosadením vzťahu $\mathbf{\dot{x} = R \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi}$ kinematickej rovnice do prechádzajúcej rovnice a následne vykrátením člena $\boldsymbol{\dot{\varphi}}$ po oboch stranách, dostávame vzťah pre **redukovaný moment $\mathbf{M_{red}}$** sústavy

$$M_{red} = M - F \cdot R \cdot \cos\varphi \ . \qquad (10.109)$$

Keďže v tomto prípade je redukovaný moment zotrvačnosti $\mathbf{I_{red}}$ závislý od premennej $\boldsymbol{\varphi}$, táto sústava je sústavou s **nekonštantným prevodom**. Pre túto sústavu musí platiť táto diferenciálna rovnica pohybu

$$I_{red} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dI_{red}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 = M_{red} \ . \qquad (10.110)$$

Predtým, než dosadíme do predchádzajúcej rovnice vypočítané vzťahy pre redukovaný moment $\mathbf{M_{red}}$ a moment zotrvačnosti $\mathbf{I_{red}}$, musíme odvodený vzťah pre **redukovaný moment zotrvačnosti $\mathbf{I_{red}}$** zderivovať podľa premennej $\boldsymbol{\varphi}$. Platí, že

$$\frac{dI_{red}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}[I + m \cdot R^2 \cdot \cos^2\varphi] = -2 \cdot m \cdot R^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi \ . \qquad (10.111)$$

V tomto štádiu môžeme všetky odvodené vzťahy dosadiť do všeobecnej diferenciálnej rovnice pre **systém s nekonštantným prevodom**.

Dosadením do diferenciálnej rovnice a vykonaním matematických úprav, dospejeme k tejto **diferenciálnej rovnici 2. rádu**

$$I_{red} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_{red}}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 = M_{red} \ ,$$

$$[I + m \cdot R^2 \cdot \cos^2 \varphi] \cdot \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot R^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = M - F \cdot R \cdot \cos\varphi \ , \qquad (10.112)$$

$$[I + m \cdot R^2 \cdot \cos^2 \varphi] \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot R^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = M - F \cdot R \cdot \cos\varphi \ .$$

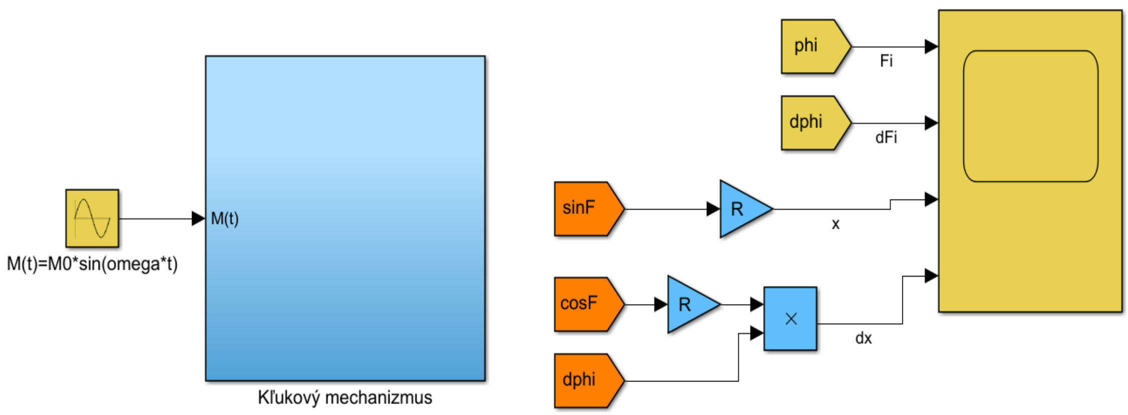
Potom výslednú diferenciálnu rovnicu **sústavy s nekonštantným prevodom** môžeme prepísať do tohto **simulinkovského tvaru**

$$\ddot{\varphi} = \frac{M - F \cdot R \cdot \cos\varphi + m \cdot R^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2}{I + m \cdot R^2 \cdot \cos^2 \varphi} \ . \qquad (10.113)$$

Ako vstupné parametre na vytvorenie blokovej schémy boli uvažované hodnoty, ktoré boli načítané prostredníctvom tohto skriptu **Matlabu** v **Model Workspace**.

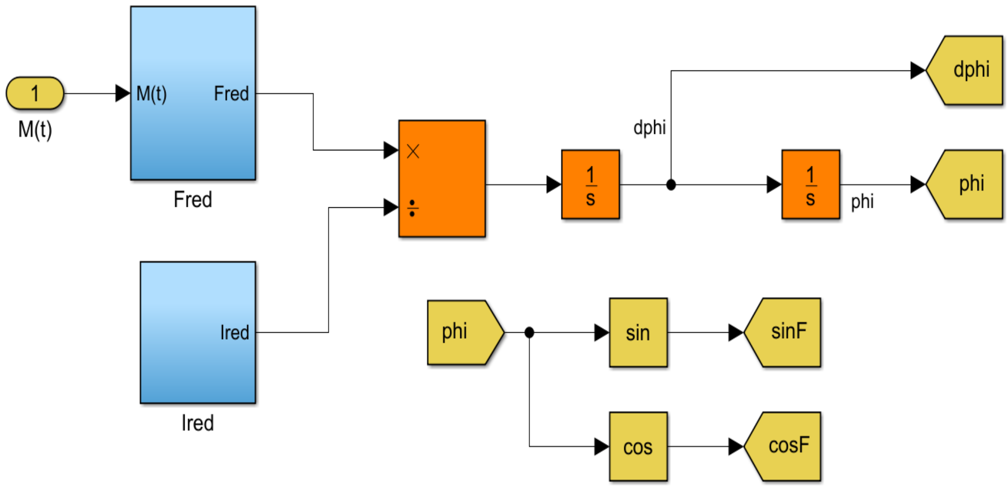
```
%Vstupné parametre systému
R=0.5;
I=120;
M0=10;
f=20;
F=100;
m=10;
omega=2*pi*f;
```

Bloková schéma, ktorá rieši simuláciu pohybu daného systému **kľukového mechanizmu**, je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.84.



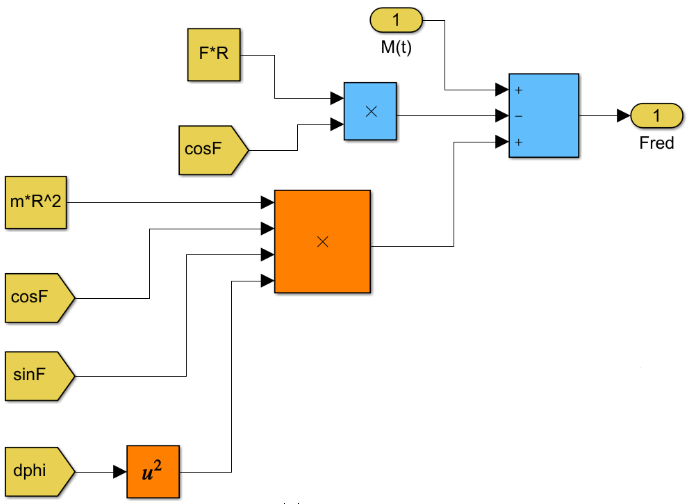
Obr. 10.84. Bloková schéma kľukového mechanizmu

V predchádzajúcej blokovej schéme bol na zjednodušenie použitý jeden **subsystém** pod názvom **Kľukový mechanizmus**, ktorého blokový diagram je znázornený na ďalšom Obr. 10.85.

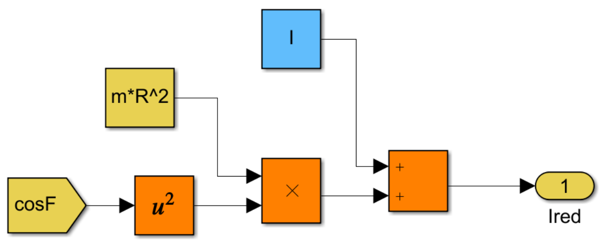


Obr. 10.85. Subsystém – kľukový mechanizmus

Ďalšie dva subsystémy, ktorá sa nachádzajú v **Subsystéme kľukový mechanizmus**, slúžia na výpočet redukovanej sily $\mathbf{F_{red}}$ a redukovaného momentu zotrvačnosti $\mathbf{I_{red}}$, pozri Obr. 10.86 (a) a (b).



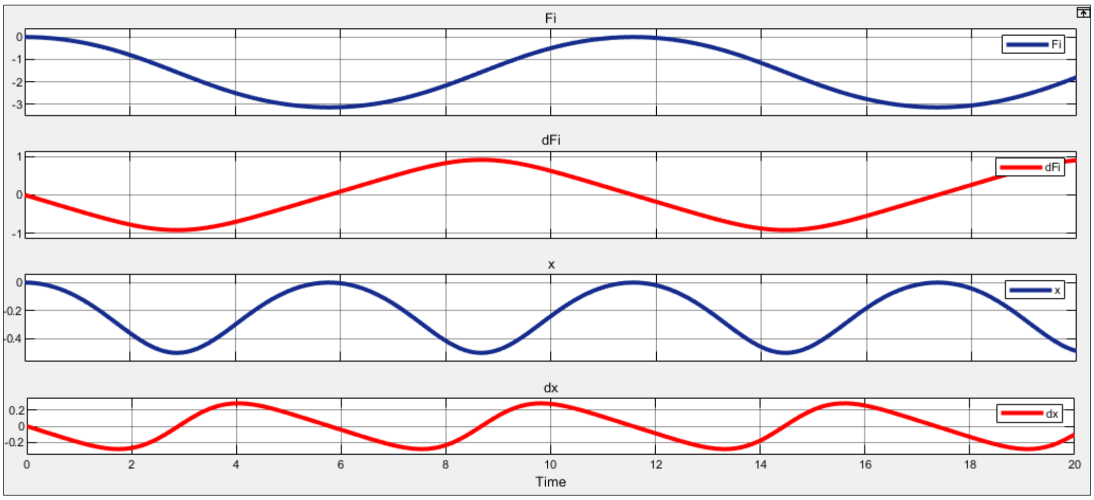
(a)



(b)

Obr. 10.86. (a) Subsystém redukovanej sily Fred, (b) subsystém redukovaného momentu zotrvačnosti Ired

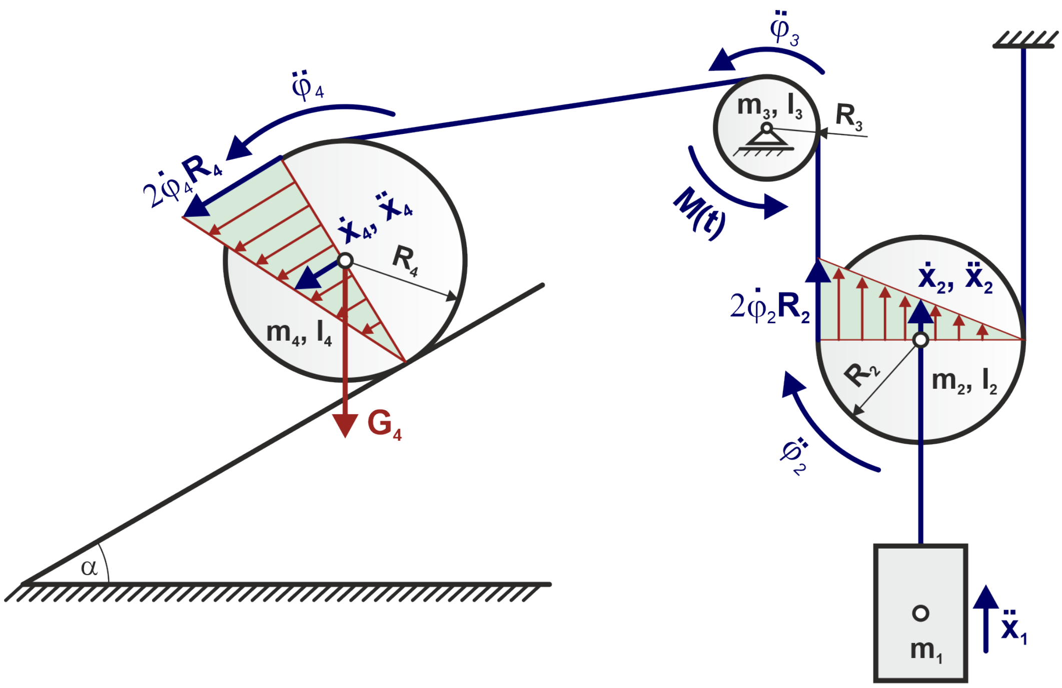
Na ďalšom Obr. 10.87 sú znázornené vypočítané priebehy **translačného** posunutia a **uhlového natočenia** členov **kľukového mechanizmu**.



Obr. 10.87. Riešenie odozvy kľukového mechanizmu

Príklad č. 10.16.

Predpokladajme systém viazaných telies, ktorý je zobrazený na Obr. 10.88. **Teleso č. 2**, ktoré koná všeobecný pohyb má hmotnosť $\mathbf{m_2 = 30\,kg}$ a polomer $\mathbf{R_2 = 0.4\,m}$, druhé **teleso č. 4**, ktoré rovnako vykonáva **všeobecný pohyb** má hmotnosť $\mathbf{m_4 = 120\,kg}$ a polomer $\mathbf{R_4 = 0.5\,m}$. Zostávajúce dve telesá **č. 1** a **č. 3**, ktoré konajú čisto translačný a rotačný pohyb, sú dané parametrami $\mathbf{m_1 = 30\,kg}$, $\mathbf{I_3 = 0.112\,kg.m^2}$ a $\mathbf{R_3 = 0.15\,m}$. Na **teleso č. 3** pôsobí časovo premenlivý hnací moment $\mathbf{M(t) = M_0 \cdot \sin(\omega t)}$, kde $\mathbf{M_0 = 1000\,N.m}$ a frekvencia kmitania je $\mathbf{f = 10\,Hz}$.



Obr. 10.88. Kladkový systém viazaných telies

Pri pohybe **telesa č. 4** po naklonenej rovine pod uhlom $\boldsymbol{\alpha = 35}$ ° zanedbávame vplyv trecej sily. Metódou redukcie odvoďte matematický model a vykonajte simuláciu formou blokového diagramu, v ktorej odmeriate čas, za ktorý prejde **teleso č. 4** dráhu dĺžky $\mathbf{L = 1.5\ m}$ zo svojej počiatočnej polohy.

Riešenie:

Vykonáme redukciu sústavy na translačný pohyb **telesa č. 4**, ktoré koná všeobecný pohyb. To znamená, že pre **kinetickú energiu** $\mathbf{E_k}$ celej a redukovanej sústavy musí platiť, že

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{m_{red}}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2 = \frac{1}{2}\mathrm{m_1}\cdot \dot{\mathrm{x}}_1^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I_2}\cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m_2}\cdot \dot{\mathrm{x}}_2^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I_3}\cdot \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m_4}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I_4}\cdot \dot{\varphi}_4^2 \ . \qquad (10.114)$$

Napíšme **kinematické väzbové rovnice**, ktoré platia medzi jednotlivými telesami daného systému. Podľa Obr. 10.88 môžeme na základe prepojení jednotlivých telies identifikovať a nájsť tieto **kinematické väzbové rovnice**, ktoré budú platiť pre uvažované **obvodové rýchlosti**. Pri písaní týchto väzbových rovníc začneme s **telesom č. 4.**, na ktoré vykonávame redukciu. Musí platiť, že

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{\mathrm{x}}_4}{\mathrm{R_4}} = \frac{2\cdot\dot{\varphi}_4\cdot \mathrm{R_4}}{2\cdot \mathrm{R_4}} \Longrightarrow \dot{\varphi}_4 = \frac{\dot{\mathrm{x}}_4}{\mathrm{R_4}}\ ,\\
&2\cdot\dot{\varphi}_4\cdot \mathrm{R_4} = \dot{\varphi}_3\cdot \mathrm{R_3} \Longrightarrow \dot{\varphi}_3 = 2\cdot\dot{\varphi}_4\cdot\frac{\mathrm{R_4}}{\mathrm{R_3}} = \frac{2}{\mathrm{R_3}}\cdot\dot{\mathrm{x}}_4\ ,\\
&\dot{\varphi}_3\cdot \mathrm{R_3} = 2\cdot\dot{\varphi}_2\cdot \mathrm{R_2} \Longrightarrow \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3\cdot\frac{\mathrm{R_3}}{2\cdot \mathrm{R_2}} = \frac{\dot{\mathrm{x}}_4}{\mathrm{R_2}}\ ,\\
&\frac{\dot{\mathrm{x}}_2}{\mathrm{R_2}} = \frac{2\cdot\dot{\varphi}_2\cdot \mathrm{R_2}}{2\cdot \mathrm{R_2}} \Longrightarrow \dot{\mathrm{x}}_2 = \dot{\varphi}_2\cdot \mathrm{R_2} = \dot{\mathrm{x}}_4 = \dot{\mathrm{x}}_1\ .
\end{aligned} \qquad (10.115)$$

Dosadením týchto vzťahov do **celkovej kinetickej energie** $\mathbf{E_k}$ sústavy a po eliminácií výrazu $\boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot \dot{x}_4^2}$ na oboch stranách tejto rovnice, môžeme odvodiť tento vzťah pre redukovanú hmotnosť $\mathbf{m_{red}}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot \mathrm{m_{red}}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2 = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{m_1}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{I_2}\cdot\frac{1}{\mathrm{R_2^2}}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{m_2}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{I_3}\cdot\frac{4}{\mathrm{R_3^2}}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{m_4}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{I_4}\cdot\frac{1}{\mathrm{R_4^2}}\cdot \dot{\mathrm{x}}_4^2\ ,\\
&\mathrm{m_{red}} = \mathrm{m_1} + \mathrm{m_2} + \mathrm{m_4} + \mathrm{I_2}\cdot\frac{1}{\mathrm{R_2^2}} + \mathrm{I_3}\cdot\frac{4}{\mathrm{R_3^2}} + \mathrm{I_4}\cdot\frac{1}{\mathrm{R_4^2}}\ .
\end{aligned} \qquad (10.116)$$

Ďalej vyjadríme výkon redukovanej sústavy **P**, ktorý sa rovná výkonu pôvodnej mechanickej sústavy. Z tohto porovnania výkonov vypočítame redukovanú silu $\mathbf{F_{red}}$.

$$P = F_{red} \cdot \dot{x}_4 = G_4 \cdot \sin\alpha \cdot \dot{x}_4 + M(t) \cdot \dot{\varphi}_3 - (G_1 + G_2) \cdot \dot{x}_1 \ . \qquad (10.117)$$

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch dosadením **väzbových rovníc** do predchádzajúcej rovnice a elimináciou člena $\mathbf{\dot{x}_4}$ na oboch stranách rovnice, dostávame vzťah pre redukovanú silu $\mathbf{F_{red}}$

$$P = F_{red} \cdot \dot{x}_4 = G_4 \cdot \sin\alpha \cdot \dot{x}_4 + M(t) \cdot \frac{2}{R_3} \cdot \dot{x}_4 - (G_1 + G_2) \cdot \dot{x}_4 \ ,$$

$$F_{red} = G_4 \cdot \sin\alpha + M(t) \cdot \frac{2}{R_3} - (G_1 + G_2) \ . \qquad (10.118)$$

Poznamenajme, že systém je **systémom s konštantným prevodom**, nakoľko vzťah pre redukovanú hmotnosť $\mathbf{m_{red}}$ nie funkcionálne závislý od premennej $\mathbf{x_4}$. Potom pohyb tohto systému viazaných telies opíšeme touto diferenciálnou rovnicou

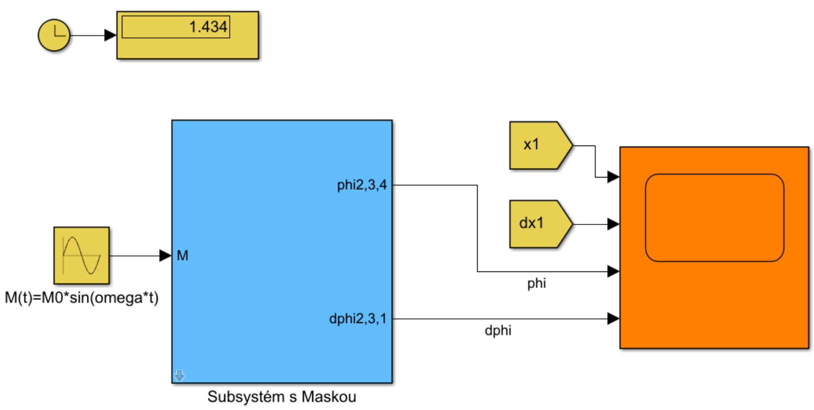
$$m_{red} \cdot \ddot{x}_4 = F_{red} \ . \qquad (10.119)$$

Túto diferenciálnu rovnicu prepíšeme do tohto **simulinkovského tvaru**

$$m_{red} \cdot \ddot{x}_4 = F_{red} \ ,$$

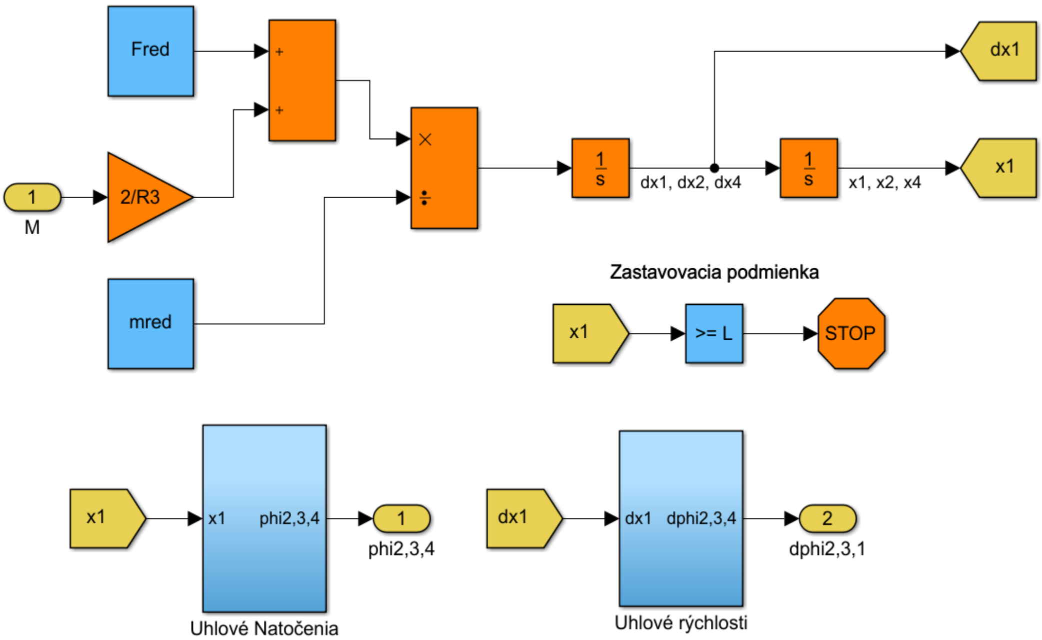
$$\ddot{x}_4 = \frac{G_4 \cdot \sin\alpha + M(t) \cdot \frac{2}{R_3} - (G_1 + G_2)}{m_1 + m_2 + m_4 + I_2 \cdot \frac{1}{R_2^2} + I_3 \cdot \frac{1}{R_3^2} + I_4 \cdot \frac{1}{R_4^2}} \ . \qquad (10.120)$$

Bloková schéma so **subsystémom s maskou**, ktorá rieši simuláciu pohybu pre daný systém viazaných telies, je znázornená na nasledujúcom Obr. 10.89.



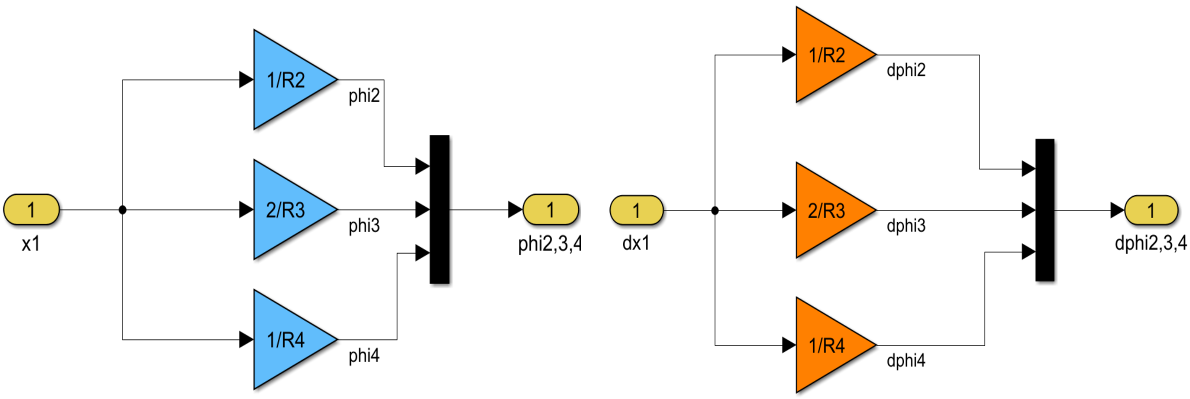
Obr. 10.89. Bloková schéma so subsystémom s maskou

Pre danú blokovú schému bol vytvorený **subsystém s maskou**, ktorého bloková schéma je zobrazená na Obr. 10.90.



Obr. 10.90. Bloková schéma Subsystému s maskou

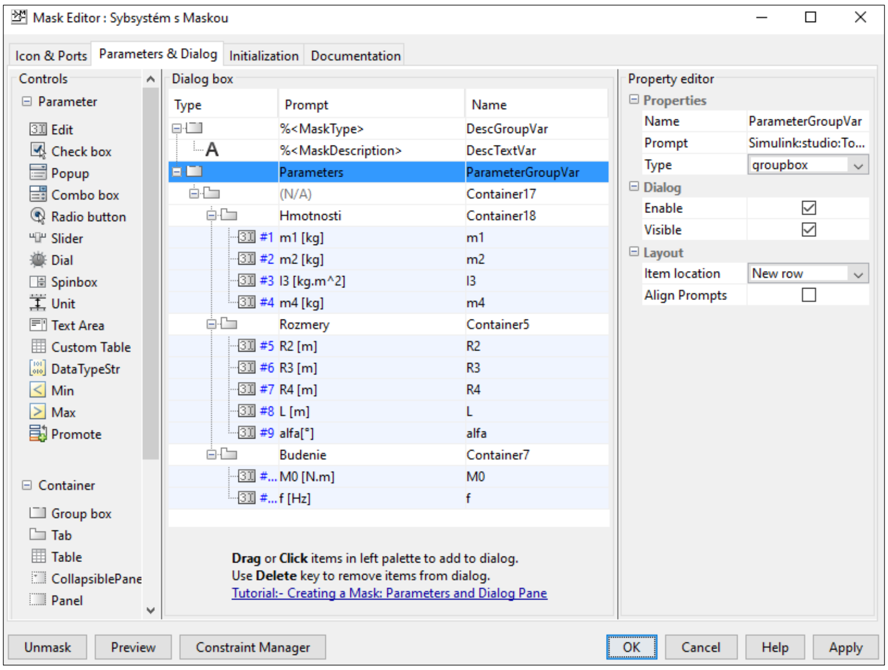
Ako si možno všimnúť, tak v tejto **blokovej schéme** boli vytvorené dva **subsystémy** na prepočet väzbových rovníc pre **uhlové natočenia** a **uhlové rýchlostí**, pozri Obr. 10.91 (a) a (b).



(a) (b)

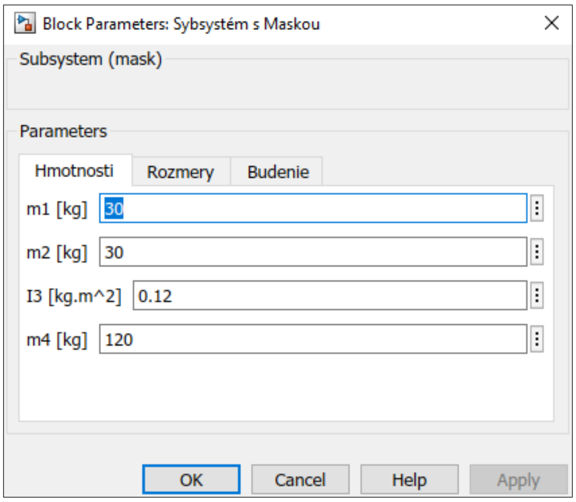
Obr. 10.91. Subsystémy (a) uhlové natočenia, (b) uhlové rýchlosti

Pre hlavný subsystém bola vytvorená maska subsystému prostredníctvom **editora masiek**, pozri Obr. 10.92.



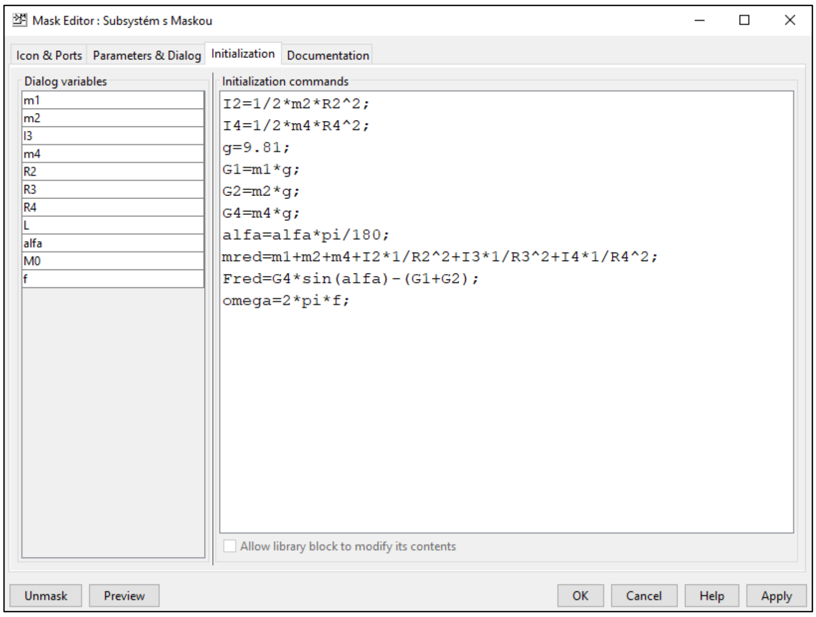
Obr. 10.92. Editor masky

V tomto editore masiek boli vytvorené tri lišty, v ktorých boli parametre subsystému začlenené do troch skupín, ktorými sú **Hmotnosti**, **Rozmery** a **Budenie**. V sekcii **Hmotnosti** a **Rozmery** možno meniť hmotnosť a rozmery daných kladiek. Na lište **Budenie** môžeme meniť budiace charakteristiky daného systému. **Vytvorená maska subsystému** je vizuálne zobrazená na nasledujúcom Obr. 10.93. V tomto dialógovom okne t. j. maske subsystému boli prednastavené počiatočné parametre systému, ktoré môžeme takisto meniť pomocou tohto dialógového okna.



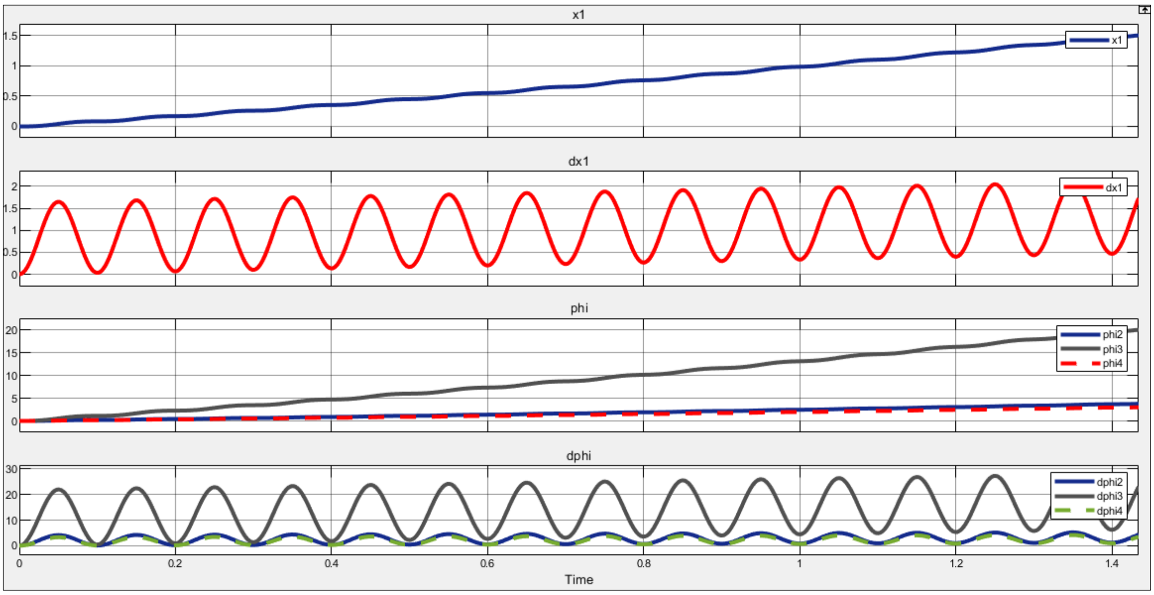
Obr. 10.93. Maska subsystému

Prostredníctvom editora masky bol taktiež vytvorený **inicializačný skript** pre ďalšie parametre simulácie, ktoré nie je možno meniť priamo z dialógového okna masky systému, pozri Obr. 10.94.



Obr. 10.94. Inicializačný skript

Na ďalšom Obr. 10.95 sú znázornené priebehy translačného a rotačného posunutia členov viazaného systému.

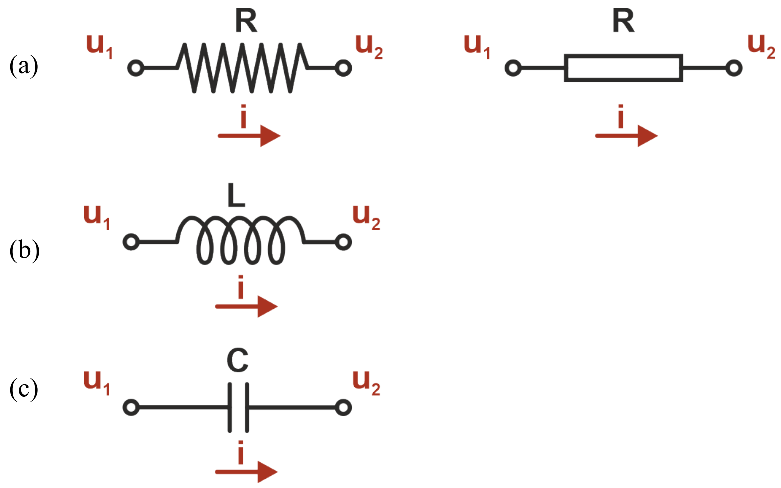


Obr. 10.95. Riešenie simulácie systému viazaných telies – $x_{1,2,3}$ [rad], $dx_{1,2,3}$ [m.s^{-1}], $\varphi_{1,2,3}$[rad], $d\varphi_{1,2,3}$ [rad. s^{-1}]

10.5 PRÍKLADY MODELOVANIA ELEKTRICKÝCH SYSTÉMOV

Elektrické systémy možno charakterizovať ako prepojenie sústredených základných elektrických elementov, ktorými sú **cievky** predstavujúce **indukčné prvky**, ďalej **kondenzátory**, ktoré predstavujú **kapacitné prvky** a napokon **rezistory**, ktoré charakterizujeme ako **odporové prvky**. Okrem týchto základných prvkov sa v elektrických obvodoch nachádzajú rôzne zdroje elektrickej energie a to buď **napäťové** alebo **prúdové**.

Rezistory, **kondenzátory** a **cievky** dokážu **elektrickú energiu** uchovávať alebo ju pohlcovať, nedokážu však elektrickú energiu do elektrického obvodu priviesť prípadne ju zosilniť. Z tohto dôvodu tieto prvky elektrického systému nazývame **pasívnymi prvkami**. Na druhej strane v elektrickom obvode môžu byť zapojené aj také prvky, ktoré dokážu elektrickú energiu do systému dodať, ovplyvniť alebo zosilniť, takéto prvky elektrických obvodov potom nazývame **aktívnymi** prvkami. Medzi aktívne prvky radíme napr. **elektrický zdroj, tranzistor, dióda, transformátor** a iné. Schematické značky základných elektrických stavebných prvkov, ktoré sa používajú pri tvorbe **elektrických obvodov** sú znázornené na nasledujúcom Obr. 10.96.



Obr. 10.96. Stavebné prvky elektrického systému, (a) elektrický odpor, (b) elektrická cievka a (c) elektrický kondenzátor

Medzi dve základné fyzikálne veličiny, ktoré charakterizujú dynamické správanie sa elektrického systému radíme **elektrický prúd i** a **elektrické napätie u**. Elektrický prúd je definovaný ako zmena **elektrického náboja** za jednotku času:

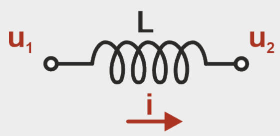
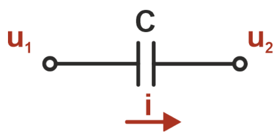
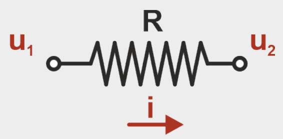
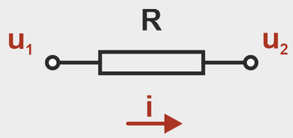
$$i = \frac{dq}{dt}, \qquad (10.121)$$

kde **q** je náboj fyzikálnej jednotky **Coulomb (C)** a **i** je elektrický prúd fyzikálnej jednotky **Ampér (A)**. **Elektrické napätie** v ľubovoľnom bode elektrického obvodu meriame ako **potenciálový rozdiel** medzi meraným a referenčným bodom, ktorý nazývame **uzemnenie** (z angl. **ground** – miesto s nulovým potenciálom). **Elektrické napätie** na dvoj terminálovom elemente je dané potenciálovým rozdielom

$$u = u_1 - u_2 \,, \tag{10.122}$$

kde **u** je celkové napätie na elemente. V nasledujúcej tabuľke sú zhrnuté všetky komponentné vzťahy pre jednotlivé stavebné bloky elektrického systému, ktorými sú **rezistor**, **kondenzátor** a **cievka**.

Tabuľka 10.7. Základné stavebné prvky elektrického systému

Stavebný prvok	Opis rovnice	Uchovaná alebo pohltená energia
Cievka 	$u = L\frac{di}{dt} = LDi$ $u_1 - u_2 = L\frac{di}{dt} = LDi$	$E = \frac{1}{2}Li^2$
Kondenzátor 	$u = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{i}{CD}$ $u_1 - u_2 = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{i}{CD}$	$E = \frac{1}{2}Cu^2$
Rezistor  	$i = \frac{u}{R} = \frac{u_1 - u_2}{R}$ $u = i \cdot R$ $u_1 - u_2 = i \cdot R$	$P = \frac{u^2}{R}$

Ak sú elektrické komponenty zapojené do formy elektrického obvodu – matematický model dynamického systému môžeme odvodiť použitím **napäťovo-prúdových** vzťahov medzi elementami opisovanými na základe fyzikálnych zákonov. Vo fyzike poznáme dva základne fyzikálne zákony **I. Kirchhoffov zákon** pre elektrické prúdy a **II. Kirchhoffov zákon** pre elektrické napätie.

I. Kirchhoffov zákon opisuje zákon **zachovania elektrického náboja**; hovorí, že v každom bode (uzle) elektrického obvodu platí, že súčet prúdov vstupujúcich do uzla sa rovná súčtu prúdov z uzla vystupujúcich. Ak terminály dvoch alebo viacerých elementov elektrického obvodu sú navzájom spojené spoločne, potom tento bod spojenia nazývame **uzlom**. Pre ľubovoľný uzol v elektrickom obvode možno **I. Kirchhoffov zákon** matematicky zapísať ako

$$\sum_{j} \pm i_j = 0\,, \tag{10.123}$$

kde $\mathbf{i_j}$ je elektrický prúd **j-tého** elementu v uzle.

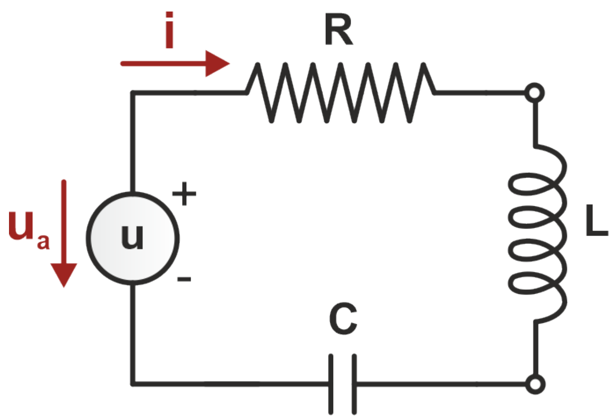
II. Kirchhoffov zákon formuluje pre elektrické obvody **zákon zachovania elektrickej energie**; hovorí, že súčet úbytkov napätí na spotrebičoch sa v uzavretej časti elektrického obvodu (slučke) rovná súčtu **elektromotorických napätí zdrojov** v tejto časti obvodu, tzn. že súčet všetkých napätí na zdrojoch a jednotlivých elementov v danej slučke musí byť rovný nule

$$\sum_{j} u_j = 0\,, \tag{10.124}$$

kde $\mathbf{u_j}$ je napätie na **j-tom** prvku slučky obvodu.

Príklad č. 10.17.

Odvoďte stavový opis **RLC elektrického systému obvodu**, ktorý je zobrazený na Obr. 10.97. Parametre tohto elektrického systému sú $\mathbf{R = 10}\,\Omega$, $\mathbf{L = 15\,H}$ a $\mathbf{C = 0.05\,F}$. Porovnajte riešenie odozvy riešenia systému pre rôzne typy vstupných signálov napätí $\mathbf{u(t) = 5 \cdot e^{-t}}$, $\mathbf{u(t) = 4 \cdot \sin(t)}$ a $\mathbf{u_{\boldsymbol{a}}(t) = 4}$. Tieto riešenia zobrazte na grafoch.



Obr. 10.97. RLC obvod sériový

Riešenie:

Podľa **I. Kirchhoffovho zákona** pre tento elektrický obvod, ktorým preteká rovnaký elektrický prúd, musí platiť, že

$$i = i_L = i_R = i_C \ . \tag{10.125}$$

Potom aplikovaním **II. Kirchhoffovho zákona** pre jednu uzavretú slučku elektrického obvodu, môžeme napísať túto rovnicu pre napätia

$$u_a = u_R + u_L + u_C \ . \tag{10.126}$$

Z druhej rovnice systému vyplýva, že

$$\begin{aligned} u_L &= u_a - u_R - u_C \ , \\ u_L &= L \cdot \frac{di_L}{dt} = u_a - R \cdot i_R - u_C \end{aligned} \tag{10.127}$$

a teda dostávame **prvú stavovú rovnicu**, ktorá platí pre elektrický prúd $\mathbf{i_L}$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}[u_a - R \cdot i_L - u_C] \ . \tag{10.128}$$

V predchádzajúcej rovnici sa nachádza neznáme napätie na kondenzátore $\mathbf{u_C}$. Toto napätie vieme vypočítať pomocou diferenciálnej rovnice v tvare

$$u_C = \frac{1}{C}\int i_C \, dt \ , \tag{10.129}$$

ktorú teraz zderivujeme podľa času **t**, čím dostávame **druhú stavovú rovnicu** v tomto tvare

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{i_L}{C} \ . \tag{10.130}$$

Z predchádzajúceho odvodenia vyplýva, že systém je definovaný touto **sústavou dvoch stavových rovníc** s dvomi stavovými premennými $\mathbf{i_L}$ a $\mathbf{u_C}$

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}[u_a - Ri_L - u_C] \ , \\ \frac{du_C}{dt} &= \frac{i_L}{C} . \end{aligned} \tag{10.131}$$

Zapíšme tieto dve predchádzajúce rovnice do tohto maticového tvaru **stavového opisu** systému

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_a \ . \tag{10.132}$$

Výstupnú rovnicu odvodíme voľbou výstupného vektora v tomto tvare

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_a \ . \tag{10.133}$$

To znamená, že **stavový opis systému** zapísaný v maticovom tvare, nadobúda tento tvar **sústavy diferenciálnych rovníc 1. rádu**, ktorá je doplnená o systému výstupnej rovnice pre výstup **y**

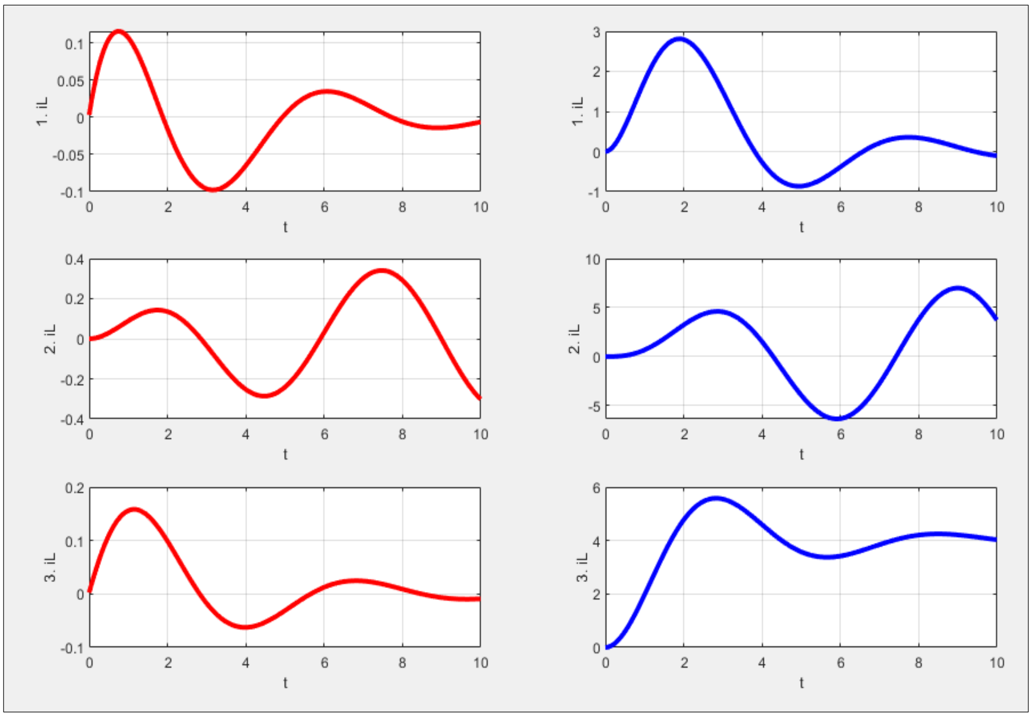
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_a \ , \\ y(t) = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_a \ . \end{aligned} \tag{10.134}$$

Odozvu tohto elektrického systému, ktorého matematický model sme odvodili v tvare **stavového opisu**, vyriešime nasledujúcim skriptom zapísaný v **Matlabe**.

```
clc
clear
close all

%Vstupné parametre systému
R=10;
L=15;
C=0.05;
t=0;
dt=0.01;
tsim=10;
n=round((tsim-t)/dt);

%Matice stavového opisu
A=[-R/L -1/L; 1/C 0];
B=[1/L; 0];
C=eye(2);
D=zeros(2,1);

%Budiace signály
time=[t:dt:tsim];
u(:,1)=5*exp(-time);
u(:,2)=4*sin(time);
```

```
u(:,3)=time*0+4;

%Výstupný vektor
X1=zeros(n,7);

for j=1:3
X=[0 0]'; %počiatočný vektor
t=0;

    for i=1:n
        dx=A*X+B*u(i, j);
        X=X+dx*dt;
        Y=C*X+D*u(i, j);
        X1(i)=t;
        X1(i, j*2:j*2+1)=X';
        t=t+dt;
    end

end

figure(1)
subplot(3,2,1)
plot(X1(:,1),X1(:,2),'r','LineWidth',3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('1. iL')

subplot(3,2,2)
plot(X1(:,1),X1(:,3),'b','LineWidth',3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('1. iL')

subplot(3,2,3)
plot(X1(:,1),X1(:,4),'r','LineWidth',3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('2. iL')

subplot(3,2,4)
plot(X1(:,1),X1(:,5),'b','LineWidth',3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('2. iL')

subplot(3,2,5)
plot(X1(:,1),X1(:,6),'r','LineWidth',3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('3. iL')

subplot(3,2,6)
plot(X1(:,1),X1(:,7),'b','LineWidth',3)
grid on
xlabel('t')
ylabel('3. iL')
```

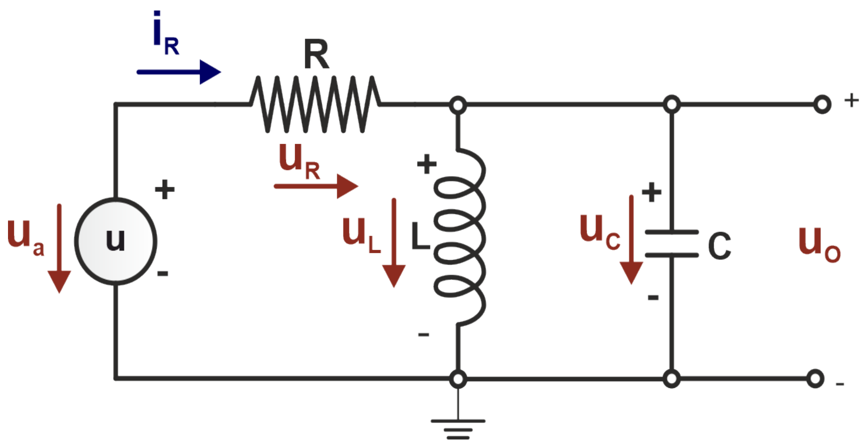
Porovnanie riešenia odozvy systému, ktoré sme v skripte riešili prostredníctvom cyklu **for** pre tri rôzne prípady uvažovaných vstupných signálov napätia $\mathbf{u(t)}$, je znázornené na nasledujúcich grafoch, pozri Obr. 10.98.



Obr. 10.98. Riešenie simulácie elektrického systému

Príklad č. 10.18.

Na Obr. 10.99 je zobrazený **RLC elektrický obvod**, ktorý pozostáva z **kondenzátora**, **cievky** a **rezistora**. **Cievka** a **kondenzátor** sú zapojené paralelne. Odvoďte matematický model a nájdite stavový opis tohto elektrického systému. Riešte simuláciu tohto systému formou blokového diagramu v **Simulinku**, ak poznáme tieto vstupné parametre $\mathbf{R = 100}\,\Omega$, $\mathbf{L = 20\,H}$ a $\mathbf{C = 0.5\,F}$. Elektrický obvod je budený elektrickým napätím $\mathbf{u(t)}$, ktorého priebeh je daný harmonickou funkciou $\mathbf{u_a(t) = 5 \cdot sin(2 \cdot t)}$, $\mathbf{du_a(t) = 10 \cdot cos(2 \cdot t)}$.



Obr. 10.99. RLC elektrický obvod

Riešenie:

Podľa **I. Kirchhoffovho zákona** pre jeden referenčný uzol elektrického obvodu musí platiť, že

$$i_R = i_L + i_C \ , \tag{10.135}$$

kde pre **zložkové rovnice** elektrických prúdov, ktoré tečú vetvami elektrického obvodu, musia platiť tieto vzťahy

$$\begin{aligned} i_R &= \frac{u_a - u_C}{R} \ , \\ i_C &= C \cdot \frac{du_C}{dt} \ , \\ i_L &= \frac{1}{L} \cdot \int u_L \, dt = \frac{1}{L} \cdot \int u_C \, dt \ . \end{aligned} \tag{10.136}$$

Dosadením týchto zložkových rovníc do prvej rovnice, dostávame túto **integrálno-diferenciálnu rovnicu**

$$\begin{aligned} i_R &= i_L + i_C \ , \\ \frac{u_a - u_C}{R} &= \frac{1}{L} \cdot \int u_C \, dt + C \cdot \frac{du_C}{dt} \ . \end{aligned} \tag{10.137}$$

Zderivujme predchádzajúcu rovnicu podľa času **t**, aby sme rovnicu previedli na tento tvar **diferenciálnej rovnice 2. rádu**, ktorá predstavuje matematický model skúmaného systému

$$RC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} + \frac{R}{L} \cdot u_C = \frac{du_a}{dt} \ . \tag{10.138}$$

Transformujme túto diferenciálnu rovnicu na **stavový opis systému**, voľbou týchto stavových premenných

$$\begin{aligned} x_1 &= u_C \ , \\ x_2 &= \dot{u}_C \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 \ . \end{aligned} \tag{10.139}$$

Potom **stavové rovnice systému** nadobudnú tento tvar **diferenciálnych rovníc 1. rádu**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{RC} \cdot \left[\frac{du_a}{dt} - \frac{R}{L} \cdot x_1 - x_2 \right] \ , \end{aligned} \tag{10.140}$$

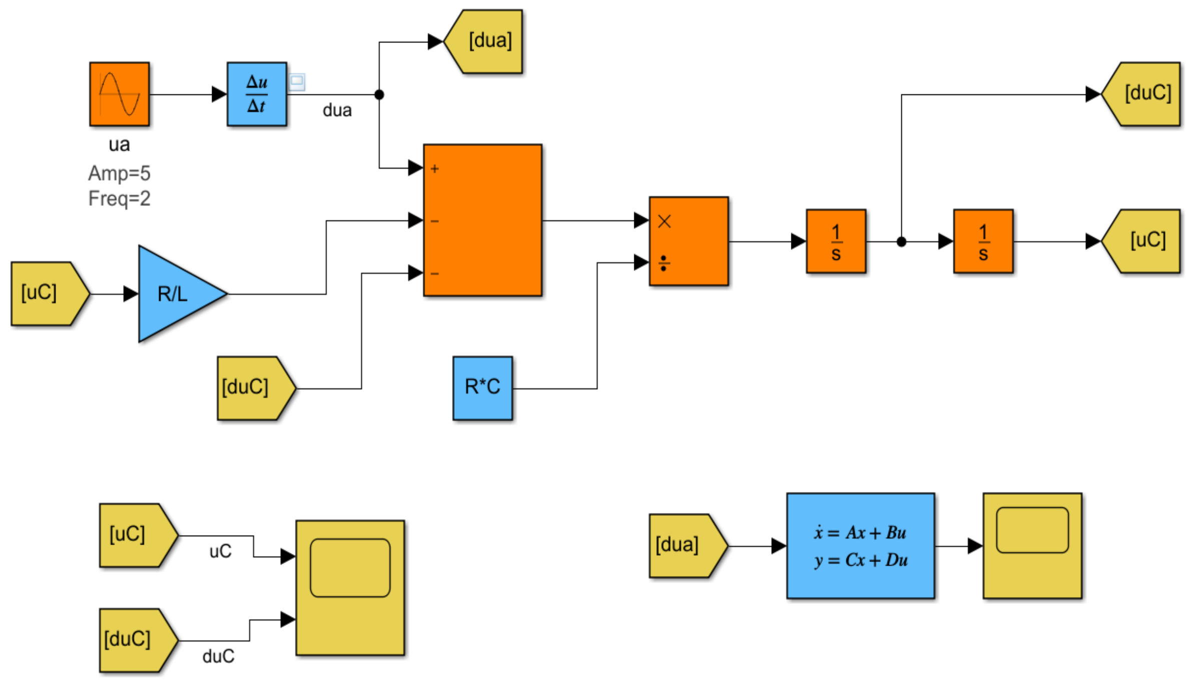
ktoré zapíšeme do **maticového tvaru**, čím dostávame tento tvar **stavových rovníc**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{RC}\end{bmatrix}\dot{u}_a \ . \qquad (10.141)$$

Stavové rovnice doplníme o **výstupnú rovnicu** systému, ktorá nadobudne tvar podľa uvažovaného výstupného vektora $\mathbf{y} = \mathbf{u_C} = \mathbf{x_1}$. Táto výstupná rovnica zapísaná v maticovom tvare je daná touto sústavou

$$y = u_C = x_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + [0]\cdot\dot{u}_a \ . \qquad (10.142)$$

Odvodenú **diferenciálnu rovnicu 2. rádu**, ktorá opisuje správanie sa daného systému, budeme riešiť v **Simulinku** pomocou blokovej schémy podľa Obr. 10.100.

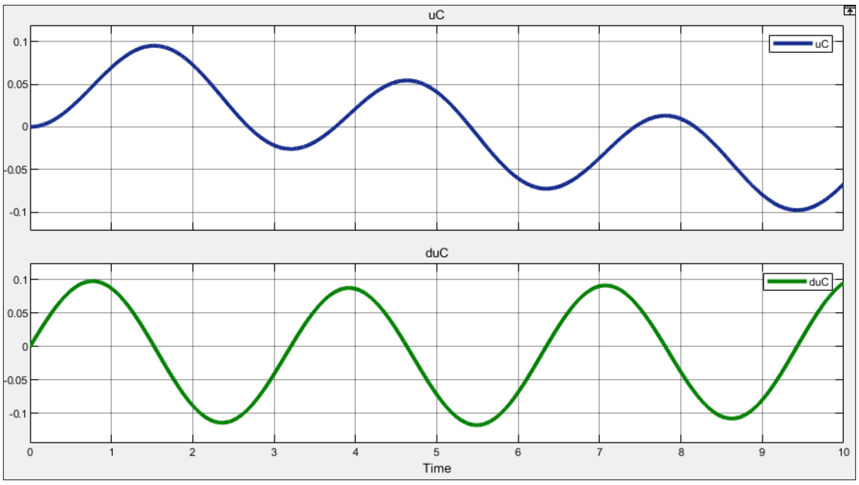


Obr. 10.100. Bloková schéma pre elektrický systém

V tejto **blokovej schéme** riešime súčasne odozvu systému **metódou postupnej integrácie diferenciálnej rovnice 2. rádu** ako aj odozvu systému prostredníctvom bloku **stavového opisu** – **State-Space**. Ako vstupné parametre pri tvorbe tejto blokovej schémy sme využili parametre systému podľa zadania, ktoré boli do funkčných blokov načítané prostredníctvom nasledujúceho skriptu **Matlabu**. Tento bol zadefinovaný v **Model Workspace**.

```
%Vstupné parametre systému
R=100;
L=20;
C=0.5;


%Matice stavového opisu
A=[0 1;-1/(L*C) -1/(R*C)];
B=[0;1/(R*C)];
CC=[1 0];
D=[0];
```

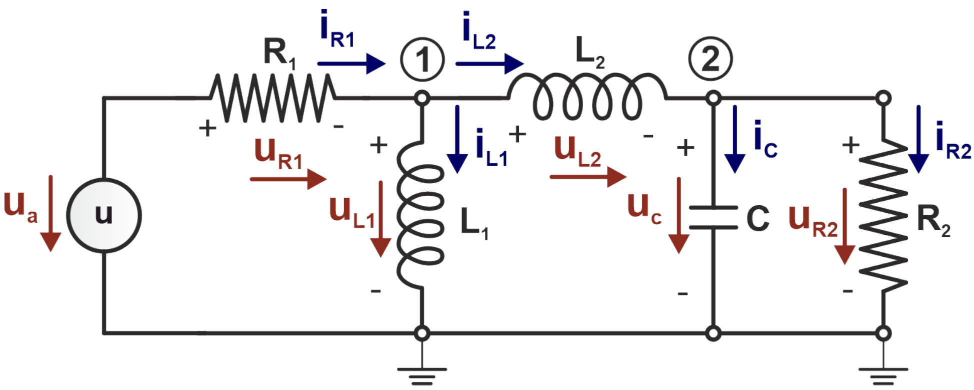
Grafické riešenie odozvy simulácie **elektrického systému** je znázornené na Obr. 10.101.



Obr. 10.101. Odozva elektrického systému – u_c [V], du_c [V.s^{-1}]

Príklad č. 10.19.

Na Obr. 10.102 je znázornený elektrický **RLC** obvod, ktorý pozostáva z kondenzátora s kapacitou $\mathbf{C = 100\ \mu F}$, dvoch cievok s indukčnosťou $\mathbf{L_1 = 20\ H}$ a $\mathbf{L_2 = 40\ H}$ a dvoch rezistorov s odpormi $\mathbf{R_1 = 100\ \Omega}$ a $\mathbf{R_2 = 200\ \Omega}$. Odvoďte matematický model a riešte odozvu tohto systému simuláciou blokovej schémy v **Simulinku**, ak vstupné napätie $\mathbf{u_a(t)}$ je dané pulzným štvorcovým signálom s amplitúdou $\mathbf{u_a = 12\ V}$ a frekvenciou $\mathbf{f = 10\ Hz}$.



Obr. 10.102. Elektrický obvod

Riešenie:

Podľa **I. Kirchhoffovho zákona** pre dva nezávislé **uzlové body** elektrického obvodu musí platiť, že

$$
\begin{aligned}
i_{R1} &= i_{L1} + i_{L2} \ , \\
i_{L2} &= i_C + i_{R2} \ ,
\end{aligned}
\qquad (10.143)
$$

kde pre **zložkové rovnice** elektrických prúdov, ktoré tečú jednotlivými vetvami elektrického obvodu, môžeme napísať tieto rovnice

$$
\begin{aligned}
i_{R1} &= \frac{u_a - u_1}{R_1}, \qquad i_{R2} = \frac{u_2}{R_2} \ , \\
i_{L1} &= \frac{1}{L_1} \cdot \int u_1 \, dt \ , \\
i_{L2} &= \frac{1}{L_2} \cdot \int (u_1 - u_2) \, dt \ , \\
i_C &= C \cdot \frac{du_2}{dt} \ .
\end{aligned}
\qquad (10.144)
$$

Dosadením týchto rovníc do prechádzajúcich dvoch rovníc matematického modelu, dostávame **systém integrálno-diferenciálnych rovníc**

$$
\begin{aligned}
\frac{u_a - u_1}{R_1} &= \frac{1}{L_1} \cdot \int u_1 \, dt + \frac{1}{L_2} \cdot \int (u_1 - u_2) \, dt \ , \\
\frac{1}{L_2} \cdot \int (u_1 - u_2) \, dt &= C \cdot \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_2} \ .
\end{aligned}
\qquad (10.145)
$$

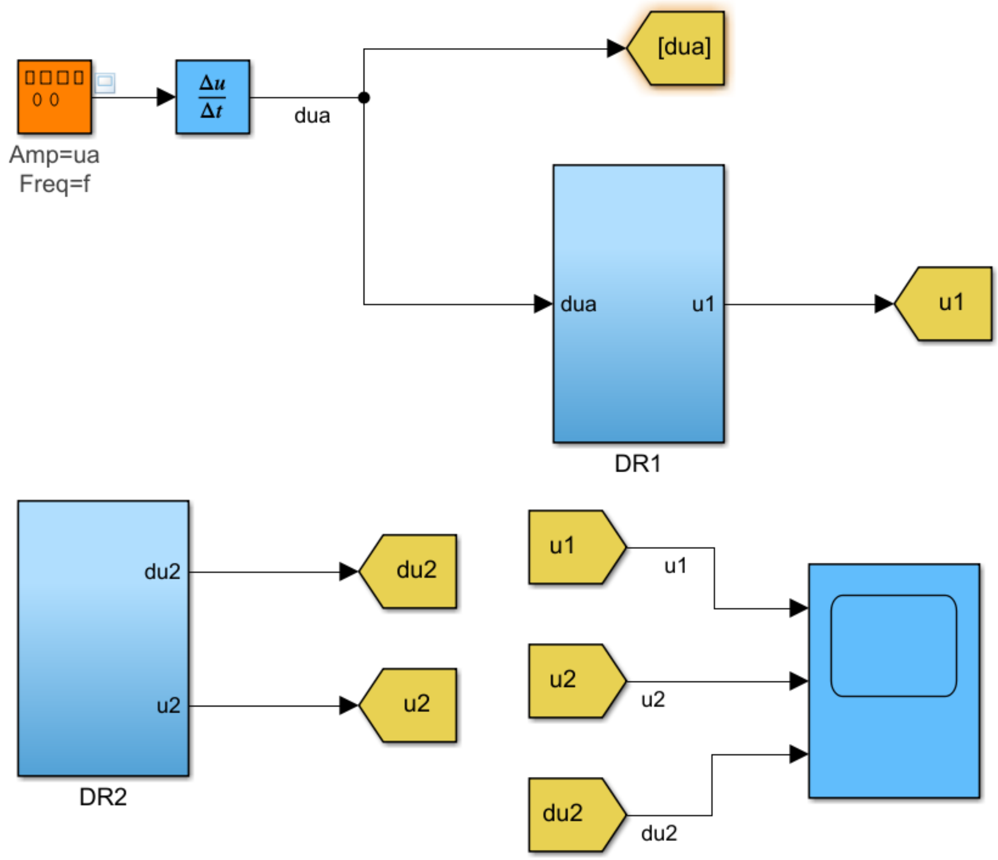
Zderivovaním predchádzajúceho systému diferenciálnych rovníc podľa času **t**, dostávame systém

$$
\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} + \frac{R_1}{L_1} u_1 + \frac{R_1}{L_2} (u_1 - u_2) &= \frac{du_a}{dt} \ , \\
\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{R_2 C} \frac{du_2}{dt} - \frac{u_1 - u_2}{L_2 C} &= 0
\end{aligned}
\qquad (10.146)
$$

ktorý prepíšeme do tohto tvaru diferenciálnych rovníc v **simulinkovskom tvare**

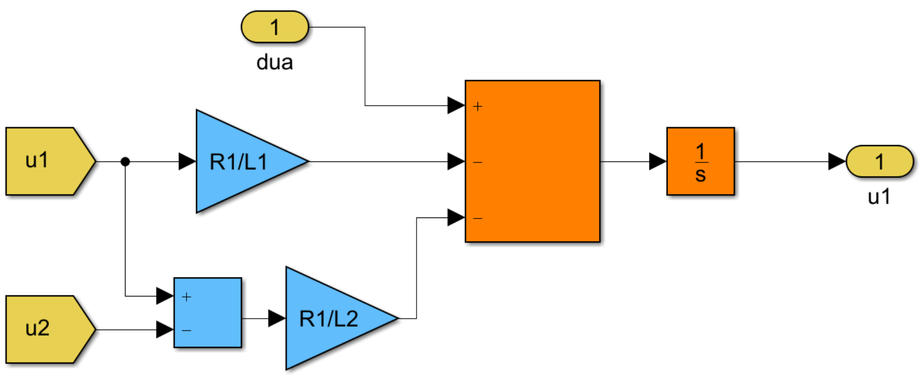
$$
\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= \frac{du_a}{dt} - \frac{R_1}{L_1} \cdot u_1 - \frac{R_1}{L_2} \cdot (u_1 - u_2) \ , \\
\frac{d^2 u_2}{dt^2} &= -\frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot \frac{du_2}{dt} + \frac{u_1 - u_2}{L_2 \cdot C} \ .
\end{aligned}
\qquad (10.147)
$$

Systém diferenciálnych rovníc, ktorý tvorí matematický model skúmaného elektrického systému podľa zadania, budeme riešiť v **Simulinku** vytvorením **blokovej schémy**, ktorá je znázornená na Obr. 10.103.

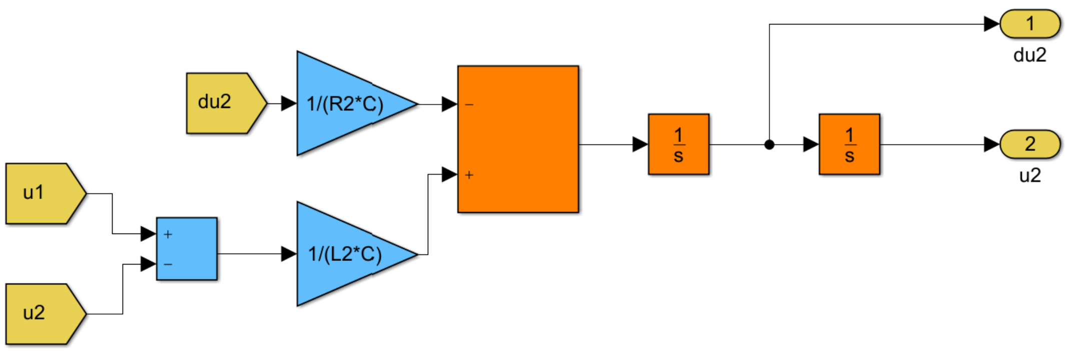


Obr. 10.103. Bloková schéma elektrického systému

V predchádzajúcej blokovej schéme sme vytvorili dva subsystémy s názvom **DR1** a **DR2**, ktoré sú zobrazené na nasledujúcich Obr. 10.104 a Obr. 10.105.



Obr. 10.104. Subsystém DR1

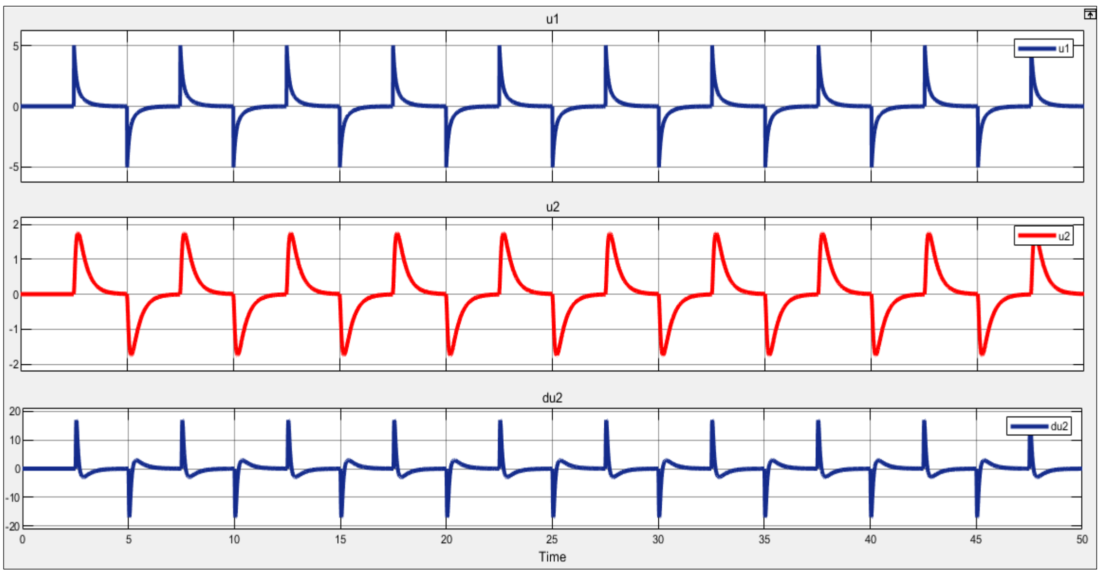


Obr. 10.105. Subsystém DR2

Ako vstupné parametre pri tvorbe **blokovej schémy** sme využili parametre systému podľa zadania, ktoré boli do funkčných blokov načítané prostredníctvom nasledujúceho skriptu **Matlabu**, ktorý boli zadefinovaný v **Model Workspace**.

```
%Vstupné parametre systému
C=100e-6;
L1=20;
L2=40;
R1=100;
R2=200;


%Parametre budiaceho signálu ua
ua=12;
f=0.2;
```

Potom riešenie odozvy elektrického systému pre čas simulácie $\mathbf{t = 50\,s}$ je znázornené na Obr. 10.106.



Obr. 10.106. Riešenie odozvy elektrického systému – $u_{1,2}$[V], du_2[V.s^{-1}]

10.6 PRÍKLADY MODELOVANIA ELEKTRO-MECHANICKÝCH SYSTÉMOV

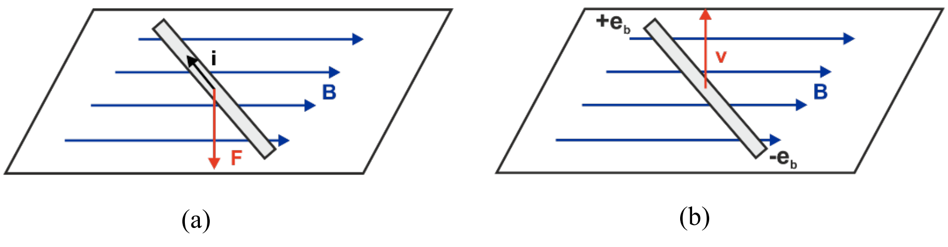
Mnohé užitočné zariadenia ako sú **elektrické motory**, **elektrické generátory**, **reproduktory**, **mikrofóny** alebo **akcelerometre**, sú zariadenia konštruované kombináciou **elektrických** a **mechanických** komponentov. Takéto systémy nazývame **elektromechanickými systémami**. Ide o systémy, ktoré sú vo všeobecnosti kombináciou dvoch systémov z rôznej fyzikálnej podstaty a to **mechanického** a **elektrického systému**.

V prípade tvorby matematického modelu systému pre takéto **elektromechanické systémy** je nutné aplikovať dva rôzne fyzikálne prístupy. Oddelene pre **elektrickú časť** systému, keď definujeme rovnice na základe **I.** alebo **II. Kirchhoffovho zákona** a samostatne pre **mechanickú časť** systému, keď aplikujeme princíp s využitím **II. Newtonovho zákona**. Systém tvorby modelu spočíva v napísaní matematických rovníc, ktoré sú istým spôsobom prepojené rovnicami, ktoré nazývame **väzbovými rovnicami**.

Vzťah **magnetickej väzby** medzi **elektrickým** a **mechanickým** subsystémom jednosmerného motora možno odvodiť na základe jednoduchých **elektro-magnetických zákonov**. Ak predpokladáme, že vodič elektrického prúdu je kolmo umiestnený na smer magnetického poľa, potom na daný vodič bude pôsobiť magnetická sila **F**, ktorej vzťah možno opísať nasledujúcou rovnicou

$$F = B \cdot L \cdot i\,, \qquad (10.148)$$

kde **B** magnetická indukcia v jednotke **Tesla** (1T =1 Wb/m^2), **L** je dĺžka vodiča v magnetickom poli. Smer magnetickej sily **F** možno určiť **pravidlom pravej ruky** podľa Obr. 10.107 (a).



Obr. 10.107. (a) Smer magnetickej sily pôsobiacej na vodič v magnetickom poli, (b) indukované elektromotorické napätie na pohybujúcom sa vodiči rýchlosťou v

Ak sa vodič pohybuje v magnetickom poli, potom sa na tomto vodiči **indukuje elektromotorické napätie** $\mathbf{e_b}$. Obr. 10.107 (b) zobrazuje pohyb vodiča v magnetickom poli **B**, ktorý sa pohybuje v tomto magnetickom poli rýchlosťou **v**, ktorá je kolmá na smer magnetického toku. Ak sa vodič pohybuje v smere kolmom na smer magnetického poľa **B**, potom medzi indukovaným napätím $\mathbf{e_b}$ a rýchlosťou vodiča **v** pohybujúceho sa v magnetickom poli **B** platí tento vzťah

$$e_b = B \cdot L \cdot v\,. \qquad (10.149)$$

Poznamenajme, že indukované napätie $\mathbf{e_b}$ pôsobí proti smeru elektrickému prúdu **i** a je známe ako tzv. **elektromotorické napätie** $\mathbf{e_b}$. Ak pre jednoduchý jednosmerný elektrický motor predpokladajme, že elektrický prúd **i** preteká **armatúrou rotora** so známym počtom cievok **n**, potom z rovnice pre magnetickú silu **F**, ktorá pôsobí na rotor s **n** cievkami, bude pôsobiť magnetická sila **F**, ktorá je daná týmto vzťahom

$$F = n \cdot B \cdot L \cdot i\,. \qquad (10.150)$$

Ak uvažujeme, že polomer rotora je **r**. Potom **moment** $\mathbf{M_m}$, ktorý pôsobí na rotor je daný týmto vzťahom

$$M_m = F.r = n \cdot B \cdot L \cdot i \cdot r = K_t \cdot i\,, \qquad (10.151)$$

kde $\mathbf{K_t = n \cdot B \cdot L \cdot r}$ je konštanta krútiaceho momentu mechanickej časti elektromotora.

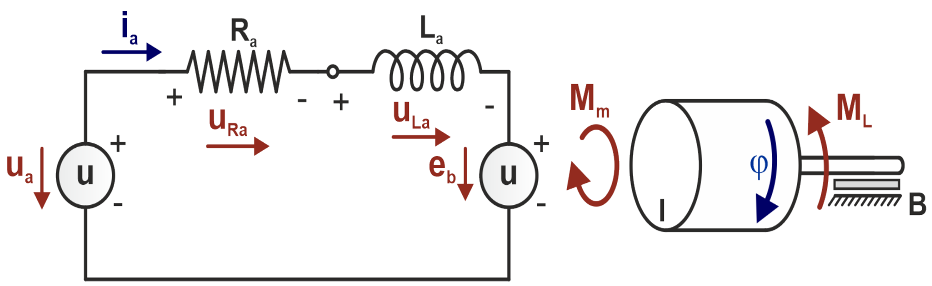
Poznamenajme, že lineárna obvodová rýchlosť cievok je priamoúmerná uhlovej rýchlosti pohybu $\mathbf{v = \omega \cdot r}$. Využitím rovnice pre **elektromotorické napätie** $\mathbf{e_b}$, ktoré generuje napätie v prípade jedného vodiča a jej aplikovaním pre prípad rotora so známym počtom cievok **n**, potom rovnica nadobudne tento tvar

$$e_b = n \cdot B \cdot L \cdot v = n \cdot B \cdot L \cdot \omega \cdot r = K_e \cdot \omega\,, \qquad (10.152)$$

kde $\mathbf{K_e = n \cdot B \cdot L \cdot r}$ je konštanta **elektromotorického napätia** elektrickej časti elektromotora.

Príklad č. 10.20.

Na Obr. 10.108 je znázornený jednosmerný elektrický motor s hriadeľom, ktorý je pripojený na záťaž s krútiacim momentom $\mathbf{M_L}$. Predpokladajme, že tento hriadeľ je dokonalé tuhý a má zanedbateľnú hmotnosť; plní len funkciu torzného tlmiaceho člena so známou konštantou tlmenia $\mathbf{B = 0.1\ N.s.rad^{-1}}$.



Obr. 10.108. Jednosmerný elektrický motor

K tomuto hriadeľu je pripevnená mechanická časť elektromotora so známym momentom zotrvačnosti $\mathbf{I = 0.02\, kg.m^2}$ a známou konštantnou mechanickej časti $\mathbf{K_t = 0.1\, N.m.A^{-1}}$. Elektrická časť pozostáva z rezistora s odporom $\mathbf{R_a = 2\,\Omega}$ a cievky s indukčnosťou $\mathbf{L_a = 0.5\, H}$. Konštanta, ktorá charakterizuje elektrickú časť elektromotora je $\mathbf{K_e = 0.1\, V.s.rad^{-1}}$.

Odvoďte matematický model tohto **elektromechanického systému** a riešte jeho odozvu simuláciou **blokovej schémy** v **Simulinku**.

Riešenie:

Na základe **II. Kirchhoffovho zákona** musí pre elektrickú časť daného elektromotora platiť táto diferenciálna rovnica

$$R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + e_b = u_a. \tag{10.153}$$

Dosadením známeho vzťahu **väzbovej rovnice** $\mathbf{e_b = K_e \cdot \omega}$ za elektromotorické napätie $\mathbf{e_b}$ v predchádzajúcej rovnici, dostávame

$$R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + K_e \cdot \omega = u_a \tag{10.154}$$

alebo

$$R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + K_e \cdot \dot{\varphi} = u_a\ . \tag{10.155}$$

Podobným spôsobom pre **mechanickú časť** platí táto diferenciálna rovnica, ktorú odvodíme aplikovaním **II. Newtonovho zákona**

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} + B \cdot \omega = M_m - M_L\ . \tag{10.156}$$

Dosadením väzbovej rovnice $\mathbf{M_m = K_t \cdot i_a}$ za moment motora $\mathbf{M_m}$, dospejeme k tejto **diferenciálnej rovnici 1. rádu**

$$I \cdot \dot{\omega} + B \cdot \omega = K_t \cdot i_a - M_L \tag{10.157}$$

alebo

$$I \cdot \ddot{\varphi} + B \cdot \dot{\varphi} = K_t \cdot i_a - M_L\ . \tag{10.158}$$

Správanie sa systému elektrického motora teda môžeme opísať týmto **systémom dvoch diferenciálnych rovníc**

$$\begin{gathered} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_e \omega = u_a \ , \\ I\dot{\omega} + B\omega = K_t i_a - M_L \end{gathered} \tag{10.159}$$

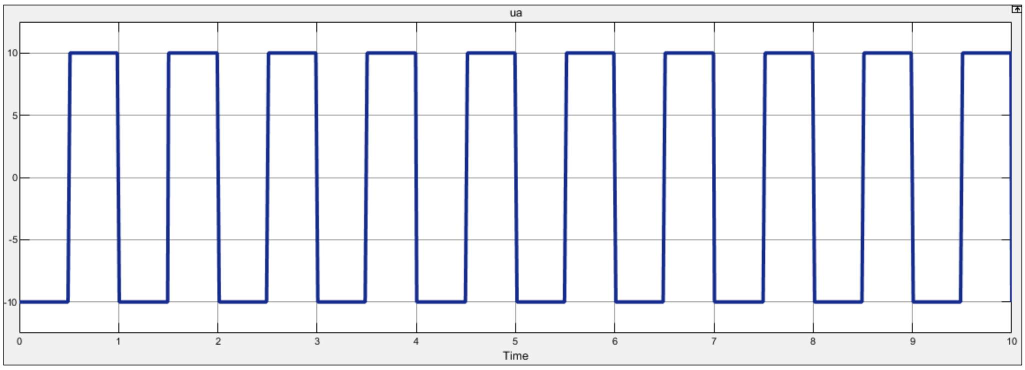
alebo

$$\begin{gathered} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_e \dot{\varphi} = u_a \ , \\ I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} = K_t i_a - M_L \ . \end{gathered} \tag{10.160}$$

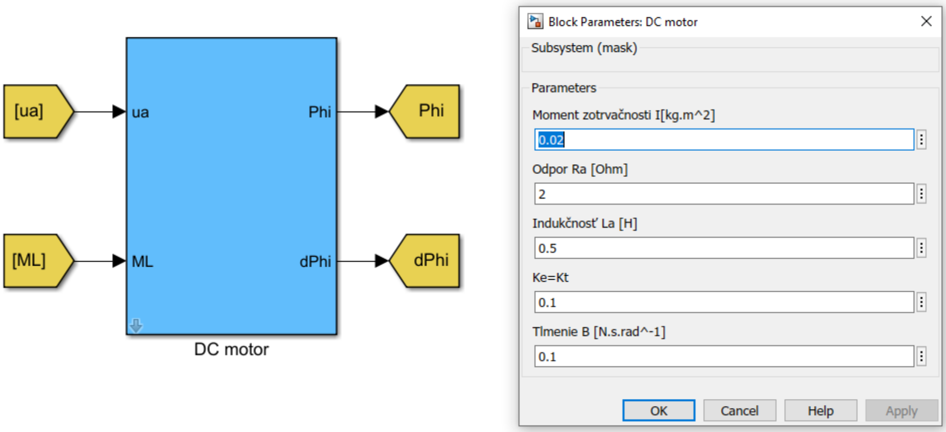
Táto sústava zapísaná do maticového tvaru nadobúda tento výsledný tvar diferenciálnych rovníc

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & -K_t \\ K_e & R_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_L \\ u_a \end{bmatrix} . \tag{10.161}$$

Odozvu systému budeme riešiť pre uvažovaný vstupný signál **štvorcového typu** s amplitúdou $\mathbf{u_a = 10\ V}$ a frekvenciou kmitania $\mathbf{f = 1\ Hz}$, pozri Obr. 10.109.



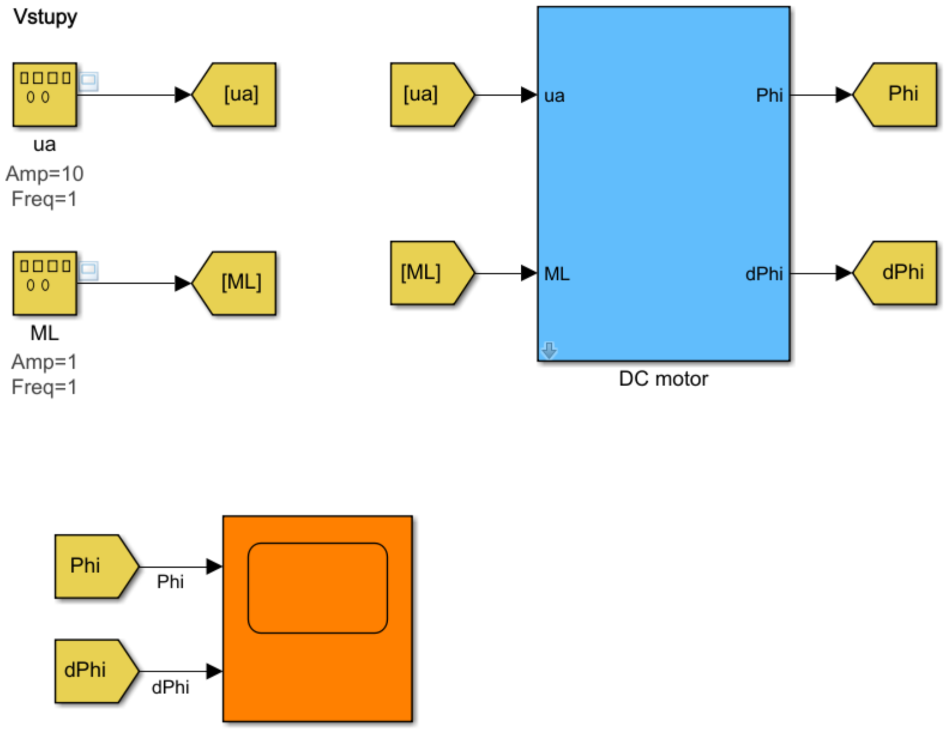
Obr. 10.109. Vstupné napätie u_a [V]



Obr. 10.110. Subsystém DC motora s maskou

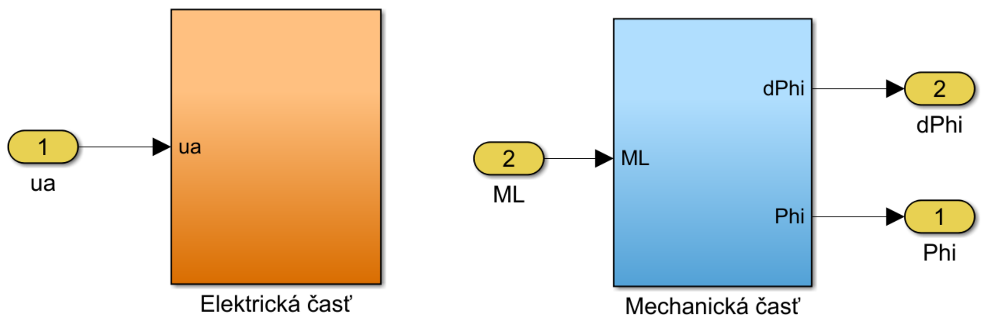
Ako vstupný signál na strane záťaže budeme predpokladať štvorcový signál s amplitúdou $\mathbf{M_L = 1\ N.m}$, ktorý je harmonicky meniacim sa signálom s rovnakou frekvenciou kmitania $\mathbf{f}$. Vstupné parametre budeme načítavať z **masky subsystému**, ktorú vytvoríme pre subsystém **DC motora**, pozri predchádzajúci Obr. 10.110.

Bloková schéma elektrického motora, ktorá simuluje odvodený matematický model **systému diferenciálnych rovníc**, v ktorej je sme použili **subsystém DC motor**, je znázornená na Obr. 10.111.



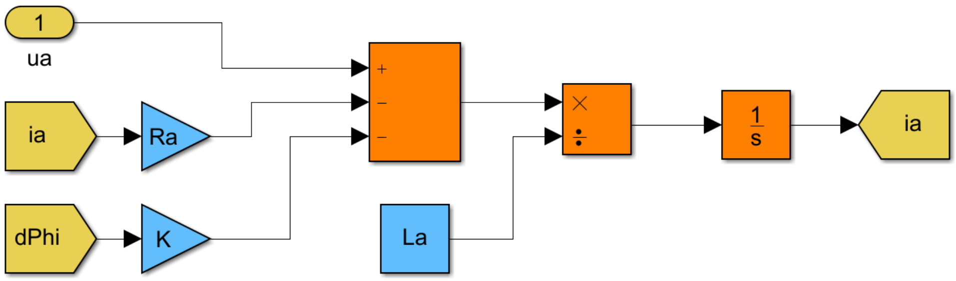
Obr. 10.111. Bloková schéma elektromotora

V predchádzajúcej blokovej schéme bol **subsystém DC motor** vytvorený z dvoch samostatných subsystémov **Elektrická časť** a **Mechanická časť**, pozri Obr. 10.112.

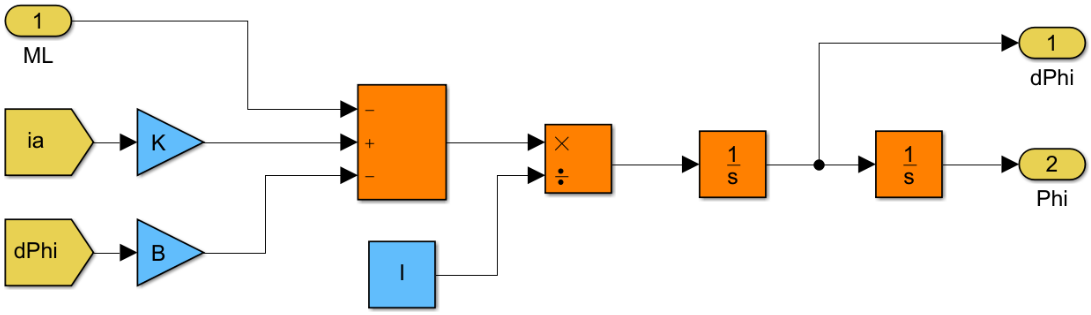


Obr. 10.112. Subsystém DC motor

Jednotlivé subsystémy, ktoré predstavujú modely diferenciálnych rovníc pre **elektrickú** a **mechanickú** časť **elektro-mechanického systému**, sú znázornené v podobe **blokových schém** na Obr. 10.113 (a) a (b).



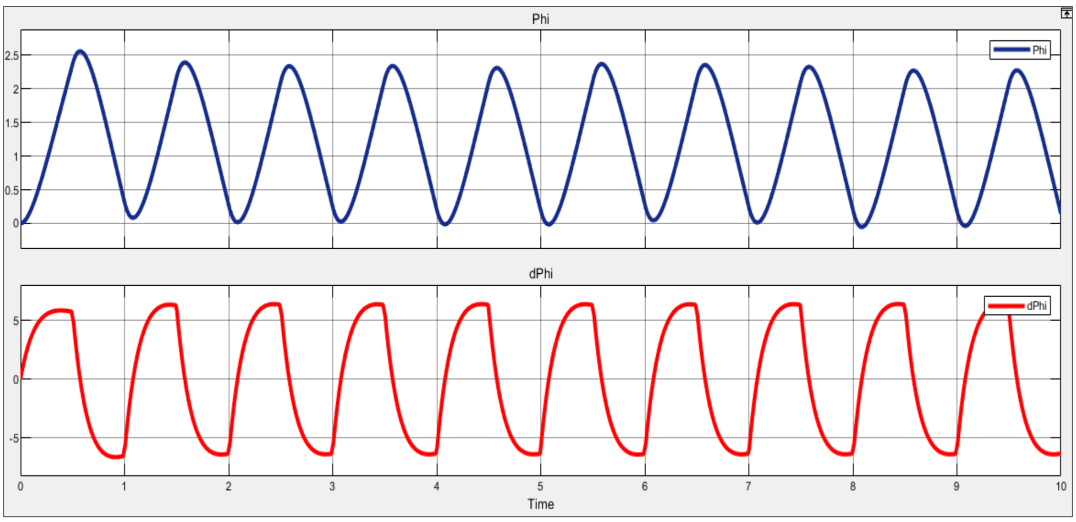
(a)



(b)

Obr. 10.113. Subsystémy: (a) Elektrická časť, (b) Mechanická časť

Riešenie odozvy elektrického motora na vstupné signály **napätia u_a** a **momentu záťaže M_L** je zobrazené na ďalšom Obr. 10.114.



Obr. 10.114. Odozva elektro-mechanického systému DC motora – φ[rad], dφ[rad.s^{-1}]

10.7 PRÍKLADY MODELOVANIA FLUIDNÝCH SYSTÉMOV

Tekutina je všeobecný termín reprezentujúci **plyn** alebo **kvapalinu**. Tekutinu považujeme za **nestlačiteľnú** v prípade, že **hustota** $\boldsymbol{\rho}$ sa nemení s tlakom $\mathbf{p}$, tzn. že $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{f}(\mathbf{p})$ resp. $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{konšt.}$. V opačnom prípade tekutinu považujeme za **stlačiteľnú**, tzn. **hustota** $\boldsymbol{\rho}$ sa mení s tlakom $\mathbf{p}$ resp. $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{f}(\mathbf{p})$ a teda $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{konšt}$. Vo všeobecnosti všetky plyny sú uvažované ako **stlačiteľné** tekutiny, zatiaľ čo kvapaliny uvažujeme ako **nestlačiteľné** tekutiny. Aj keď kvapaliny sú v skutočnosti **stlačiteľné**, zmena hustoty kvapaliny $\boldsymbol{\rho}$ nie je až tak významná pri zmene tlaku tejto kvapaliny $\mathbf{p}$.

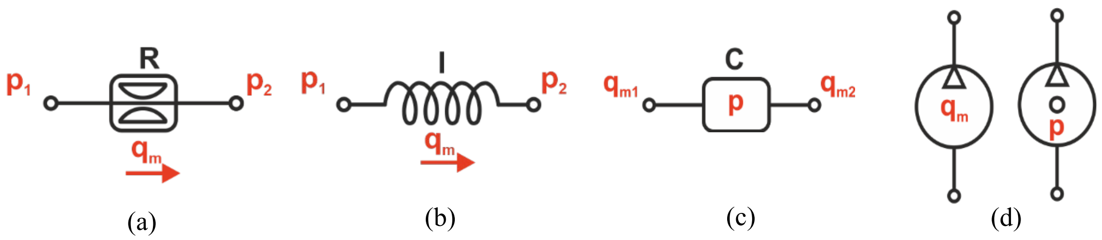
Fluidné (tekutinové) systémy vo všeobecnosti delíme na dve skupiny:

a) pneumatické systémy
b) hydraulické systémy

Pneumatický systém je systém, pri ktorom tekutinu uvažujeme ako **stlačiteľné médium**, na druhej strane v prípade **hydraulického systému** je tekutina uvažovaná ako **nestlačiteľné médium**. Typickým príkladom hydraulického systému je napr. hydraulický systém, pri ktorom kontrolujeme výšku hladiny kvapaliny v zásobníku resp. nádrži, ďalším príkladom môžu byť napr. rôzne technické úpravne vody, **hydraulické potrubné** (transportné) systémy prípadne **mechanicko-hydraulické systémy**, ktorými sú napr. **servo-mechanizmus**, **hydraulický motor** a iné.

Pracovným médiom **pneumatického systému** je stlačiteľný plyn (najčastejšie **vzduch)**. Na odvodenie matematického modelu pneumatického systému je nutné vychádzať z termodynamických vlastností plynov na základe, ktorých sú definované vzťahy pre základné stavebné prvky všetkých pneumatických systémov.

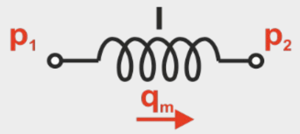
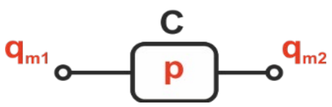
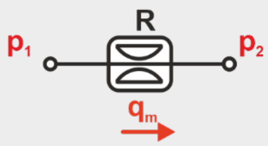
Schematické značky základných prvkov **pneumatického systému** s uvažovaním hmotnostného prietoku $\mathbf{q_m}$ sú znázornené na nasledujúcom Obr. 10.115.



Obr. 10.115. Schematické značky pneumatického systému, (a) pneumatický odpor, (b) pneumatická indukčnosť, (c) pneumatická kapacita, (d) zdroje hmotnostného prietoku a tlaku

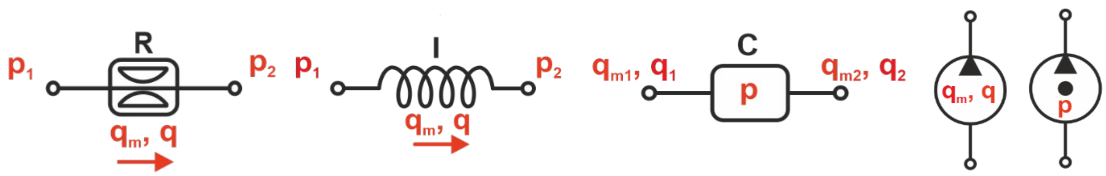
Rovnice základných stavebných prvkov **pneumatickej indukčnosti**, **pneumatickej kapacity** a **pneumatického odporu** pre pneumatický systém sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 10.8. Základné stavebné prvky pneumatického systému

Stavebný prvok	Opis rovnice
Pneumatická indukčnosť 	$\dot{q}_m = \rho \cdot \dot{q} = \frac{p_1 - p_2}{I}$ $I = \frac{L}{S}$
Pneumatická kapacita 	$C\frac{dp}{dt} = q_{m1} - q_{m2} = \rho q_1 - \rho q_2$ $C = \frac{V}{n \cdot R_g \cdot T}$
Pneumatický odpor 	$q_m = \rho \cdot q = \frac{p_1 - p_2}{R}$

Kvapaliny na rozdiel od plynov sú teoreticky **nestlačiteľné tekutiny**. To, že kvapaliny uvažujeme ako nestlačiteľné, veľmi uľahčuje modelovanie **hydraulických systémov**. Všeobecná kategória hydraulických systémov sú **hydraulické systémy** opisujúce zmenu výšky hladiny v nádobe počas času **t**, ktoré sa môžu vyskytnúť v napr. **úpravniach** a **zásobárňach vôd** a v ďalších iných aplikáciách, napr. v **chemickom priemysle** (rôzne typy komplikovaných potrubných systémov).

Schematické značky, ktoré používame pri zostavovaní **hydraulického systému** sú znázornené na nasledujúcom Obr. 10.116.

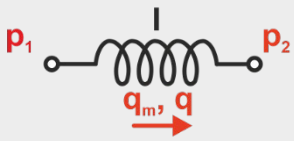
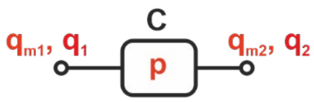
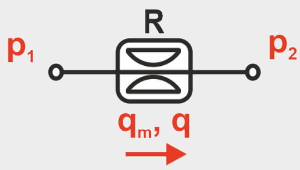


(a) (b) (c) (d)

Obr. 10.116. Schematické značky hydraulického systému, (a) hydraulický odpor, (b) hydraulická indukčnosť, (c) hydraulická kapacita, (d) zdroje hmotnostného (objemového) prietoku a tlaku

Dynamické správanie sa hydraulického systému s úrovňou hladiny kvapaliny **h** možno opísať použitím **objemového (hmotnostného) prietoku q** ($\mathbf{q_m}$), **tlaku p** a aktuálnej výšky hladiny **h** v hydraulickom zásobníku. Poznamenajme, že pri modelovaní hydraulických systémov sa často uplatňuje **hydrostatický tlak** vo viacerých prípadoch, skôr než tlak **dynamický**. **Hydrostatický tlak** je definovaný ako tlak $\mathbf{p_h}$, ktorý vzniká v kvapaline v jej pokoji a je spôsobený vlastnou tiažou samotnej kvapaliny. Rovnice základných stavebných prvkov **hydraulickej indukčnosti**, **hydraulickej kapacity** a **hydraulickej odporu** pre hydraulický systém možno nájsť zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

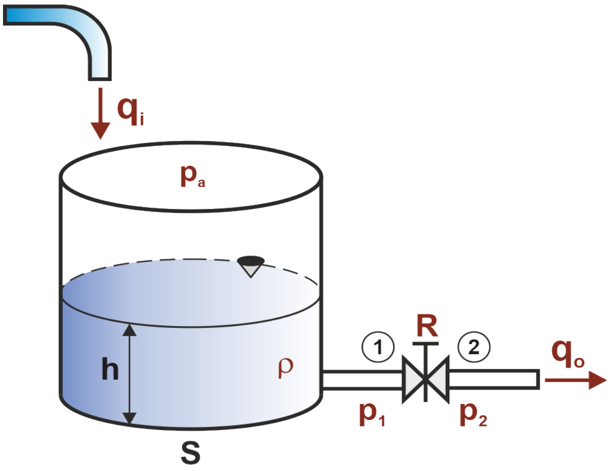
Tabuľka 10.9. Základné stavebné prvky hydraulického systému

Stavebný prvok	Opis rovnice
Hydraulická indukčnosť 	$\frac{dq_m}{dt} = \frac{(p_1 - p_2)}{I}$ $\frac{dq}{dt} = \frac{(p_1 - p_2)}{I_h}$ $I_h = I \cdot \rho = \frac{L \cdot \rho}{S}$
Hydraulická kapacita 	$C \cdot \frac{dp}{dt} = q_{m1} - q_{m2} = \rho \cdot q_1 - \rho \cdot q_2$ $C = \frac{dm}{dp}, C = \frac{S(h)}{g}$
Hydraulický odpor 	$q_m = \rho \cdot q = \frac{p_1 - p_2}{R}$

Príklad č. 10.21.

Na nasledujúcom Obr. 10.117 je znázornený hydraulický systém s jedným hydraulickým zásobníkom kvapaliny. Do tohto zásobníka, ktorý má prierezovú plochou $\mathbf{A = 2\ m^2}$, v každom časovom okamihu priteká kvapalina známej hustoty $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1000\ kg.m^{-3}}$. Vstupný objemový prítok do zásobníka je charakterizovaný periodicky meniacim sa signálom **pílovitého charakteru** so známou amplitúdou $\mathbf{q_i} = \mathbf{1.5\ m^3.s^{-1}}$ a frekvenciou $\mathbf{f} = \mathbf{0.1\ Hz}$. Kvapalina odteká z nádrže s odtokom $\mathbf{q_o}$ cez otvor so známym hydraulickým odporom $\mathbf{R} = \mathbf{10000\ Pa.m^{-3}.s}$.

Odvoďte matematický model, ktorý definuje vzťah medzi výškou hladiny v zásobníku a vstupným prítok $\mathbf{q_i}$. Riešte odozvu tohto odvodeného matematického modelu simuláciou **blokovej schémy** v **Simulinku**.



Obr. 10.117. Systém s hydraulickým zásobníkom

Riešenie:

Na základe **zákona zachovania hmotnosti** pre hydraulický systém podľa Obr. 10.117 musí platiť táto **diferenciálna rovnica 1. rádu**

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d(\rho\cdot V)}{dt}=\rho\cdot A\cdot\frac{dh}{dt}=q_{mi}-q_{mo}=\rho\cdot q_i-\rho\cdot q_o\ ,$$
$$A\cdot\frac{dh}{dt}=q_i-q_o\ . \tag{10.162}$$

Usporiadaním členov predchádzajúcej diferenciálnej rovnice môžeme dospieť k tomuto tvaru **matematického modelu systému**

$$A\cdot\frac{dh}{dt}+q_o=q_i\ . \tag{10.163}$$

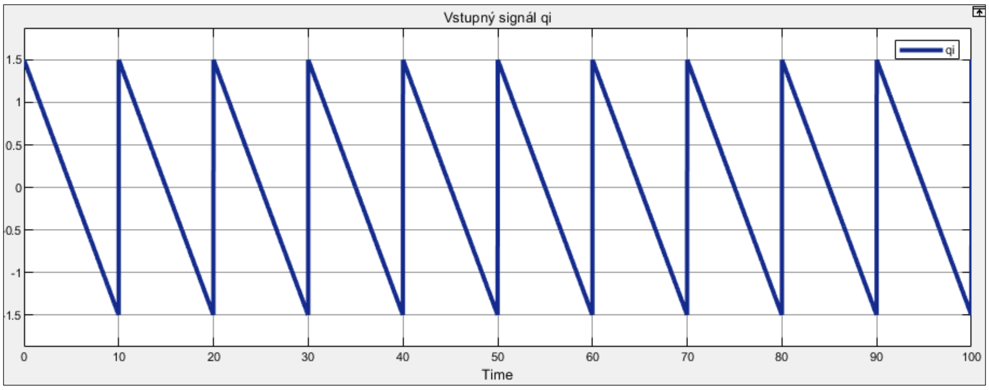
Keďže rozdiel tlakov $\mathbf{p_1-p_2=R\cdot q_o}$, potom pre **objemový odtok** zo zásobníka musí platiť, že

$$q_o=\frac{p_1-p_2}{R}=\frac{p_a+h\cdot\rho\cdot g-p_a}{R}=\frac{h\cdot\rho\cdot g}{R}\ , \tag{10.164}$$

ktorý keď dosadíme do odvodenej rovnice systému, dostávame tento matematický model systému

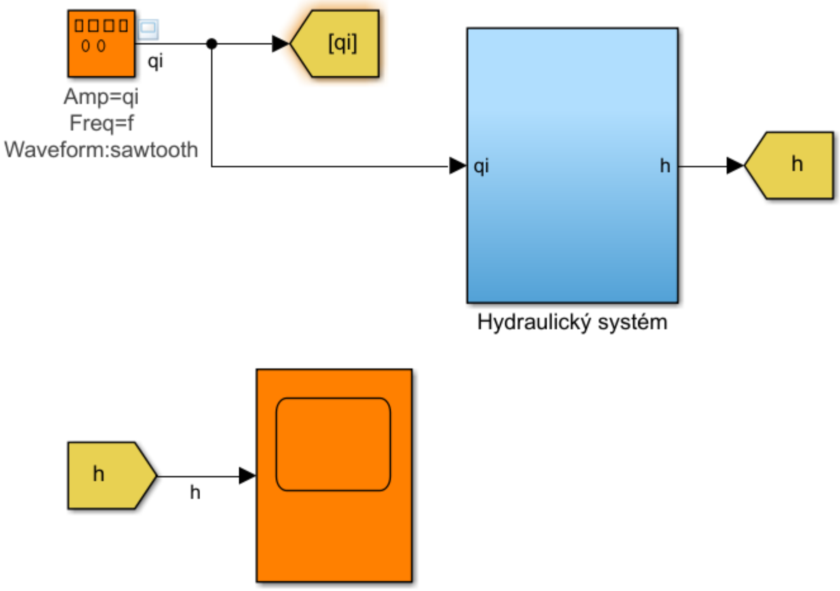
$$A\cdot\frac{dh}{dt}+\frac{h\cdot\rho\cdot g}{R}=q_i\ . \tag{10.165}$$

Riešme odozvu hydraulického systému simuláciou **blokovej schémy** v **Simulinku**, v ktorej ako vstupný signál namodelujeme periodicky meniaci sa signál pílovitého charakteru s amplitúdou $\mathbf{q_i = 1.5\,m^3.s^{-1}}$ a frekvenciou $\mathbf{f = 0.1\,Hz}$. Tento vstupný signál je znázornený na grafe Obr. 10.118.



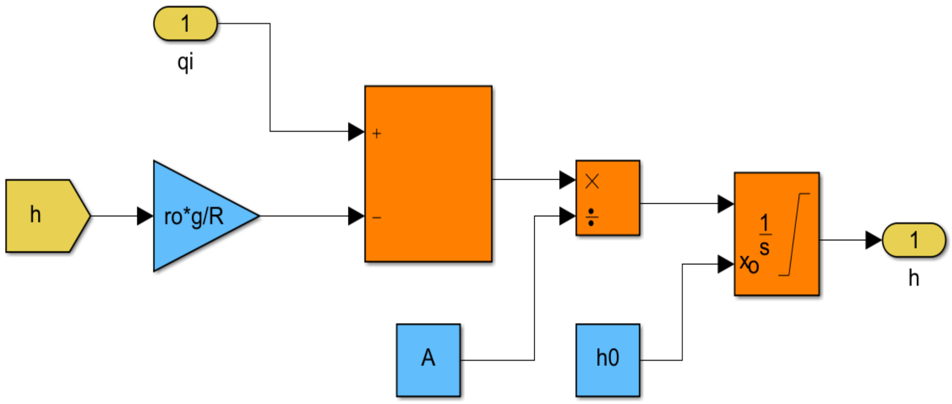
Obr. 10.118. Vstupný pílovitý signál – $q_i\ [m^3.s^{-1}]$

Systém riešime nasledujúcim **blokovým diagramom** podľa Obr. 10.119 v **Simulinku** pre čas simulácie $\mathbf{t_{sim} = 100\,s}$, ak predpokladáme, že počiatočná výška hladiny v čase $\mathbf{t = 0}$ bola $\mathbf{h_0 = 1\,m}$.



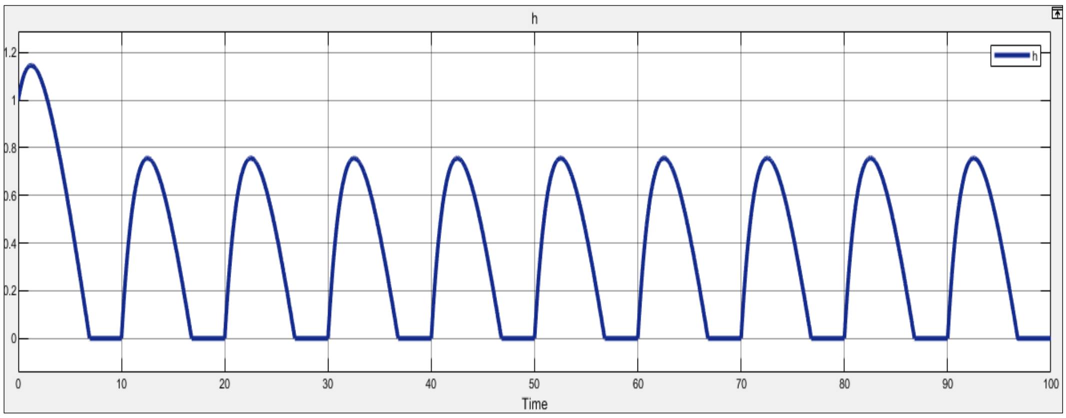
Obr. 10.119. Bloková schéma hydraulického systému

V predchádzajúcej schéme sme použili na zjednodušenie blokovej schémy **Subsystém – Hydraulický systém**, v ktorom sme namodelovali odvodený matematický model systému. **Bloková schéma** tohto subsystému je znázornená na Obr. 10.120.



Obr. 10.120. Subsystém Hydraulický systém

Potom odozva daného systému, ktorá charakterizuje ako sa mení **výška hladiny v zásobníku**, je znázornená na nasledujúcom grafe, pozri Obr. 10.121.

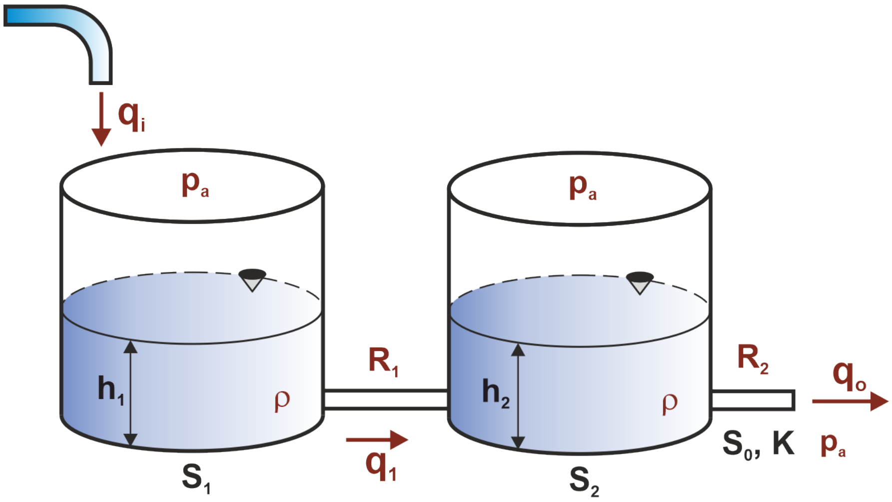


Obr. 10.121. Riešenie odozvy zmeny výšky hladiny v zásobníku hydraulického systému h[m]

Príklad č. 10.22.

Na Obr. 10.122 je znázornený hydraulický systém, ktorý pozostáva z dvoch nádrží, ktoré sú navzájom prepojené s ventilom so známym odporom $\mathbf{R_1}$. Predpokladajme, že kvapalina s hustotou $\boldsymbol{\rho = 1000\ kg.m^{-3}}$ priteká do **zásobníka č. 1** s objemovým prítokom $\mathbf{q_i}$. **Zásobník č. 1** má prierezovú plochu $\mathbf{A_1 = 2\ m^2}$. Kvapalina ďalej prúdi do **zásobníka č. 2** cez ventil so známym odporom $\mathbf{R_1 = 1.10^5\ Pa.m^{-3}.s}$ s objemovým prítokom $\mathbf{q_1}$. Zo **zásobníka č. 2** s prierezovou plochou $\mathbf{A_2 = 1\ m^2}$ nakoniec kvapalina odteká cez ventil s odporom $\mathbf{R_2 = 1.10^4\ Pa.m^{-3}.s}$ do atmosférického tlaku. Ako počiatočné výšky hladín v nádržiach v čase $\mathbf{t = 0}$ predpokladajme tieto hodnoty $\mathbf{h_{10} = 1\ m}$ a $\mathbf{h_{20} = 1.5\ m}$. Odvoďte matematický model pre takýto typ hydraulického systému, ktorý definuje vzťah medzi zmenou výšky hladín v zásobníkoch a vstupným objemovým prítokom $\mathbf{q_i}$.

Vstupný budiaci signál predpokladajme v tvare periodicky meniaceho sa signálu **štvorcového charakteru** s amplitúdou $\mathbf{q_i = 1.5\ m^3.s^{-1}}$ a frekvenciou $\mathbf{f = 0.1\ Hz}$. Riešte odozvu odvodeného matematického modelu simuláciou **blokovej schémy**, ktorú vytvoríte v **Simulinku** pre simulačný čas $\mathbf{t = 100\ s}$.



Obr. 10.122. Systém s dvomi nádržami

Riešenie:

Aplikovaním **zákona zachovania hmotnosti** pre **zásobník č. 1**, môžeme napísať túto diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dV_1}{dt} = q_i - q_1 \ , \tag{10.166}$$

kde

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{d}{dt}(A_1 \cdot h_1) = A_1 \cdot \frac{dh_1}{dt} = q_i - q_1 \ . \tag{10.167}$$

Pre výstupný objemový prítok vtekajúci do **zásobníka č. 1**, ktorý priteká do zásobníka cez ventil s odporom $\mathbf{R_1}$, musí platiť, že

$$q_1 = \frac{p_1 - p_2}{R_1} = \frac{p_a + \rho \cdot g \cdot h_1 - (p_a + \rho \cdot g \cdot h_2)}{R_1} \ . \tag{10.168}$$

To znamená, že

$$q_1 = \frac{\rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}{R_1} \ . \tag{10.169}$$

Dosadením do diferenciálnej rovnice, ktorá platí pre **zásobník č. 1**, dospejeme k tejto diferenciálnej rovnici

$$A_1 \cdot \frac{dh_1}{dt} = q_i - \frac{\rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}{R_1} \ . \tag{10.170}$$

Podobne pre **zásobník č. 2** aplikovaním **zákona zachovania hmotnosti**, musí platiť táto diferenciálna rovnica

$$\frac{dV_2}{dt} = q_1 - q_o \ . \tag{10.171}$$

Pričom pre neznámy výstupný objemový odtok $\mathbf{q_o}$, ktorý odteká zo **zásobníka č. 2** do atmosférického tlaku cez ventil s odporom $\mathbf{R_2}$, musí platiť tento vzťah

$$q_o = \frac{p_2 - p_a}{R_2} = \frac{p_a + \rho \cdot g \cdot h_2 - p_a}{R_2} \tag{10.172}$$

a potom pre hľadaný objemový odtok $\mathbf{q_o}$ po matematickej úprave, dostávame tento vzťah

$$q_o = \frac{\rho \cdot g \cdot h_2}{R_2} \ . \tag{10.173}$$

Dosadením predchádzajúceho vzťahu objemového odtoku $\mathbf{q_o}$ do diferenciálnej rovnice, ktorá platí pre **zásobník č.2**, dostávame druhú diferenciálnu rovnicu systému

$$A_2 \cdot \frac{dh_2}{dt} = \frac{\rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}{R_1} - \frac{\rho \cdot g \cdot h_2}{R_2} \ . \tag{10.174}$$

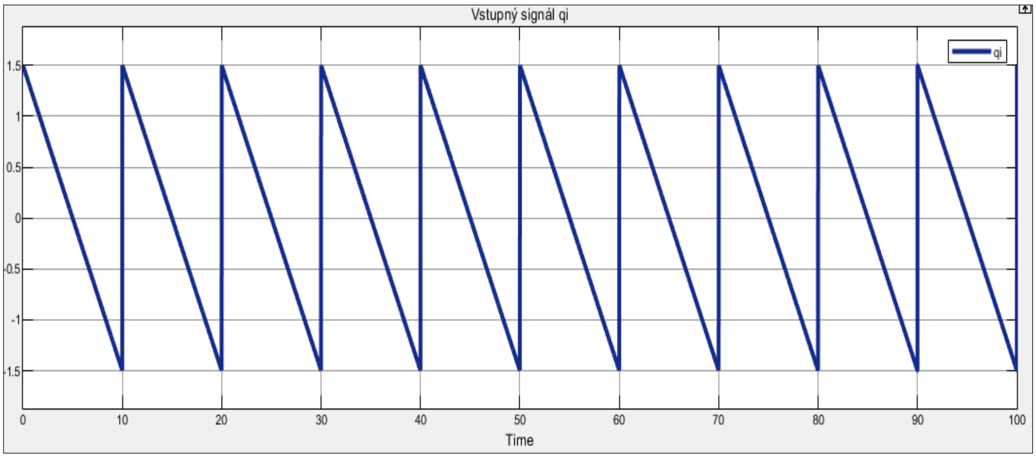
To znamená, že správanie sa systému definuje tento **systém dvoch diferenciálnych rovníc prvého 1. rádu**

$$A_1 \cdot \frac{dh_1}{dt} = q_i - \frac{\rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}{R_1} \ ,$$
$$A_2 \cdot \frac{dh_2}{dt} = \frac{\rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}{R_1} - \frac{\rho \cdot g \cdot h_2}{R_2} \ , \qquad (10.175)$$

ktorý možno prepísať do tohto **maticového tvaru systému**

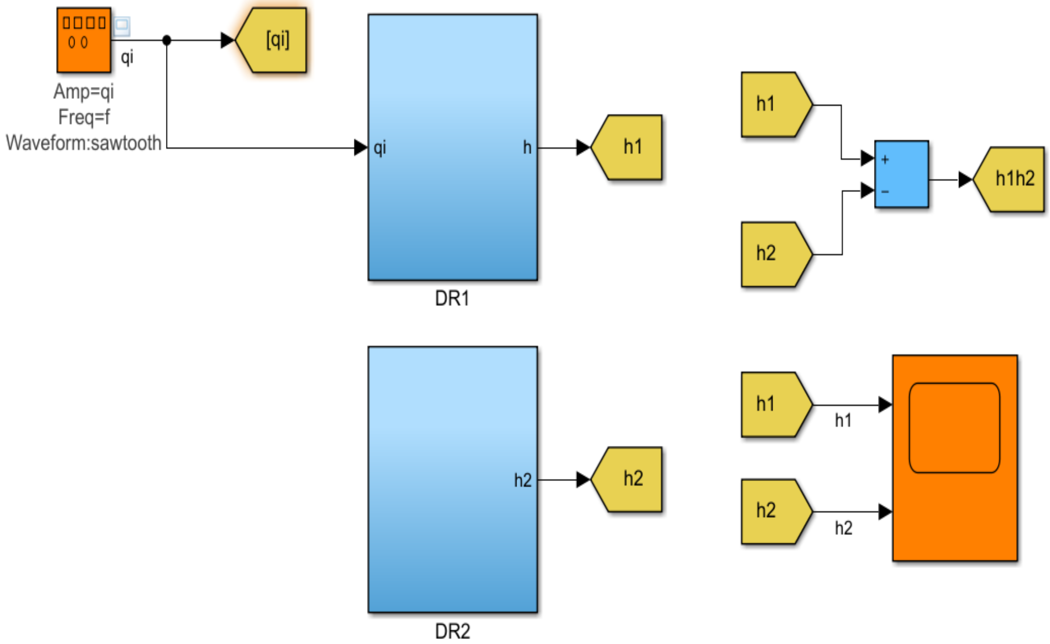
$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\rho \cdot g}{R_1} & -\frac{\rho \cdot g}{R_1} \\ -\frac{\rho \cdot g}{R_1} & \rho \cdot g \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad (10.176)$$

Riešme odozvu hydraulického systému simulačnou blokovou schémou v **Simulinku**. Ako vstupný budiaci signál objemového prítoku namodelujeme tento periodicky meniaci sa signál štvorcového charakteru s amplitúdou $\mathbf{q_i = 1.5\, m^3.s^{-1}}$ a frekvenciou $\mathbf{f = 0.1}$ **Hz**, ktorý je znázornený na grafe podľa Obr. 10.123.



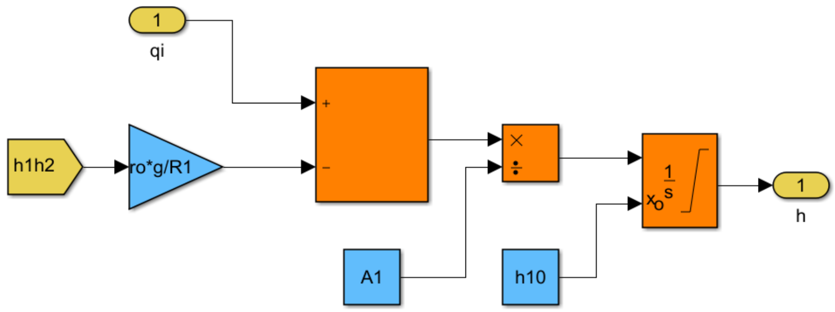
Obr. 10.123. Vstupný pílovitý signál – $q_i[m^3 \cdot s^{-1}]$

Odozvu hydraulického systému dvoch spojených zásobníkov budeme simulovať vytvorením blokovej schémy pre simulačný čas $\mathbf{t = 100\, s}$. V blokovej schéme, ktorá je znázornená na ďalšom Obr. 10.124, boli vytvorené dva subsystémy **DR1** a **DR2**.

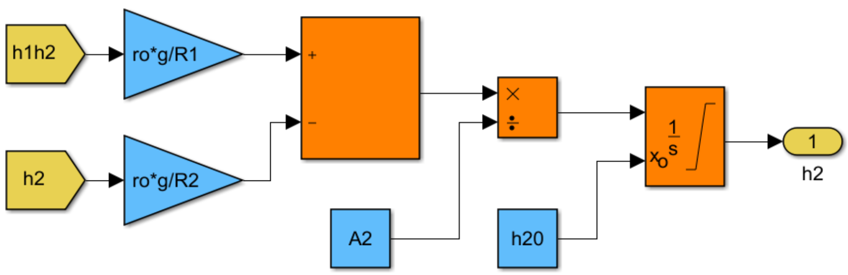


Obr. 10.124. Bloková schéma hydraulického systému dvoch nádrží

Pri tvorbe blokového diagramu podľa Obr. 10.124 boli použité dva subsystémy, ktoré boli namodelované podľa odvodených diferenciálnych rovníc. Blokové diagramy týchto subsystémov **DR1** a **DR2** sú znázornené na Obr. 10.125 (a) a (b).



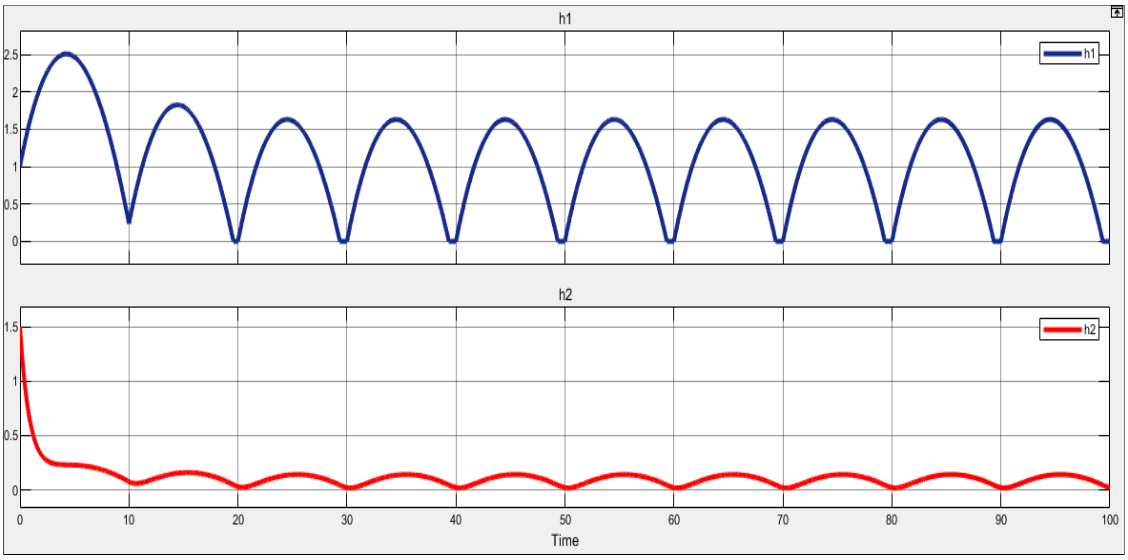
(a)



(b)

Obr. 10.125. Subsystémy: (a) DR1 a (b) DR2

Riešenie odozvy hydraulického systému, ktorá popisuje ako sa mení výška hladín v **zásobníkoch č. 1** a **č. 2**, je znázornená na nasledujúcich grafoch podľa Obr. 10.126.



Obr. 10.126. Riešenie odozvy hydraulického systému – h_1 [m], h_2 [m]

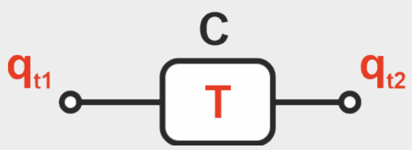
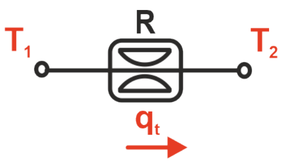
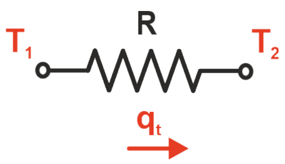
10.8 PRÍKLADY MODELOVANIA TEPELNÝCH SYSTÉMOV

Tepelné systémy sú také systémy, v ktorých dochádza k procesom, ktoré sú charakterizované prenosom tepla medzi objektom na iný objekt. Ak sa objekt s **teplotou T** nachádza v prostredí s rozdielnou teplotou okolia alebo sa nachádza v blízkosti iný objekt, ktorý má inú teplotu, potom nastáva **prenos** tepla z objektu s **vyššou teplotou na objekt s nižšou teplotou**, ktorý je daný **II. termodynamickým zákonom**. Pre **tepelný systém** existujú len dva základne stavebné prvky a to **tepelný odpor** a **tepelná kapacita**. **Tepelná indukčnosť** v prípade tepelných systémov neexistuje.

Ako príklady tepelných systémov možno uviesť napr. **vykurovacie telesá**, **klimatizácie**, **chladiace systémy** a iné. Je nutné poznamenať, že zákonitosti tepelných systémov sa riadia podobnými princípmi, ktoré platia pre **fluidné systémy** (pneumatické alebo hydraulické). Pripomeňme si, že v prípade fluidných systémov sme definovali ako stavebné prvky **fluidnú kapacitu** a **fluidný odpor**.

Ak hovoríme o **tepelných systémoch**, potom pre tieto systémy zadefinujeme **tepelnú kapacitu** a **tepelný odpor**. Kým princíp modelovania fluidných systémov sa riadi **zákonom zachovania hmotnosti**, tak správanie sa tepelných systémov opisuje **I. a II. termodynamický zákon**. Vzťahy, ktoré platia pre **stavebné prvky tepelného systému** možno nájsť v nasledujúcej tabuľke.

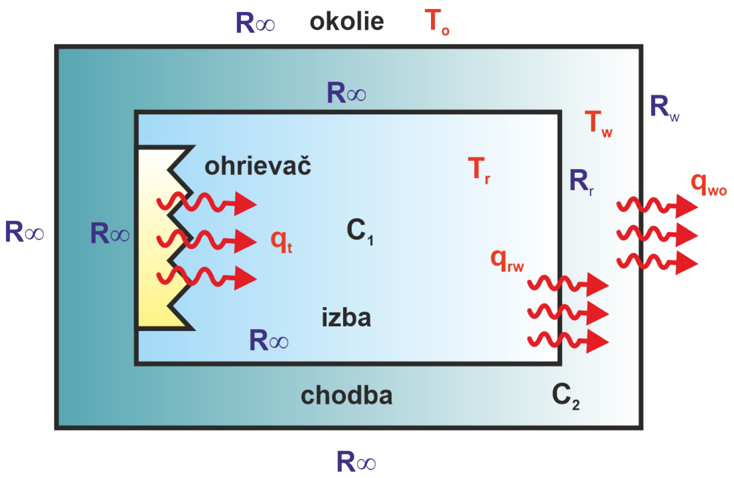
Tabuľka 10.10. Základné stavebné prvky tepelného systému

Stavebný prvok	Opis rovnice
Tepelná kapacita 	$C = mc = \rho V c$ $C = \frac{dQ}{dT}$ $\frac{dU}{dt} = \frac{d(CT)}{dt} = C\frac{dT}{dt} = q_{ti} - q_{to}$
Tepelný odpor  	$q_t = \frac{T_1 - T_2}{R}$ **a) kondukcia** $R = \frac{L}{S \cdot k}$ **b) konvekcia** $R = \frac{1}{S \cdot h}$ **c) sálanie** $q_t = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot (T_1^4 - T_2^4)$

Príklad č. 10.23.

Na Obr. 10.127 je znázornený **tepelný systém** s výhrevným telesom vo vnútri izby, ktorá je obkolesená chodbou. **Tepelný prenos** je možný iba cez jednu stranu tohto systému, ostatné časti predpokladáme ako dokonale izolované. Vnútorná teplota v izbe v čase $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ bola $\mathbf{T_r} = \mathbf{8}\,°$, zatiaľ čo teplota v okolitej chodbe bola $\mathbf{T_w} = \mathbf{4}\,°\mathbf{C}$. Ak vieme, že vonkajšia teplota prostredia je $\mathbf{T_o} = \mathbf{3}\,°\mathbf{C}$, odvoďte matematický model, ktorý definuje vzťah medzi dodávaným tepelným tokom $\mathbf{q_t} = \mathbf{5\,W}$ a teplotami $\mathbf{T_r}$ a $\mathbf{T_w}$.

Riešte odozvu tohto systému formou simulácie blokovej schémy v **Simulinku**, ak predpokladáme, že poznáme tepelný odpor steny izby, cez ktorú dochádza k tepelnému prenosu t. j. $\mathbf{R_r} = \mathbf{1000}\,°\mathbf{C.s/J}$, ďalej tepelný odpor medzi stenou chodby a vonkajším okolitým prostredím $\mathbf{R_w} = \mathbf{2000}\,°\mathbf{C.s/J}$ a taktiež tepelnú kapacitu izby a okolitej chodby ako $\mathbf{C_1} = \mathbf{1000}\ \mathbf{J/(kg.°C)}$ a $\mathbf{C_2} = \mathbf{3000}\ \mathbf{J/(kg.°C)}$.



Obr. 10.127. Jednoduchý tepelný systém

Riešenie:

Tepelný tok $\mathbf{q_{rw}}$, ktorý prestupuje z izby do okolitej chodby cez jednu stenu, je daný týmto vzťahom

$$q_{rw} = \frac{T_r - T_w}{R_r}\,, \tag{10.177}$$

kde $\mathbf{R_r}$ je tepelný odpor izby. Podobným spôsobom **tepelný tok $\mathbf{q_{wo}}$**, ktorý prestupuje z okolitej chodby do vonkajšieho prostredia cez nezaizolovanú stenu, môžeme vypočítať týmto vzťahom

$$q_{wo} = \frac{T_w - T_o}{R_w}\,, \tag{10.178}$$

kde $\mathbf{R_w}$ je tepelný odpor stien.

Diferenciálna rovnica, ktorá opisuje zmenu teploty v izbe $\mathbf{T_r}$, ktorá sa mení v závislosti od **tepelných tokov** vstupujúcich resp. opúšťajúcich danú izbu, je definovaná na základe tohto vzťahu

$$C_1 \cdot \frac{dT_r}{dt} = q_t - q_{rw} = q_t - \frac{T_r - T_w}{R_r} \ ,$$
$$C_1 \cdot \frac{dT_r}{dt} + \frac{T_r - T_w}{R_r} = q_t \ , \tag{10.179}$$

kde $\mathbf{q_t}$ je vstupný tepelný tok, ktorý dodáva do izby výhrevné teleso. Podobne môžeme odvodiť diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje správanie sa systému pri prestupe tepla z okolitej chodby do vonkajšieho prostredia

$$C_2 \cdot \frac{dT_w}{dt} = q_{rw} - q_{wo} = \frac{T_r - T_w}{R_r} - \frac{T_w - T_o}{R_w} \ ,$$
$$C_2 \cdot \frac{dT_w}{dt} - \frac{T_r - T_w}{R_r} + \frac{T_w - T_o}{R_w} = 0 \ . \tag{10.180}$$

To znamená, že matematický model, ktorý opisuje správanie tohto tepelného systému, tvorí **sústava dvoch diferenciálnych rovníc 1. rádu** v tomto tvare

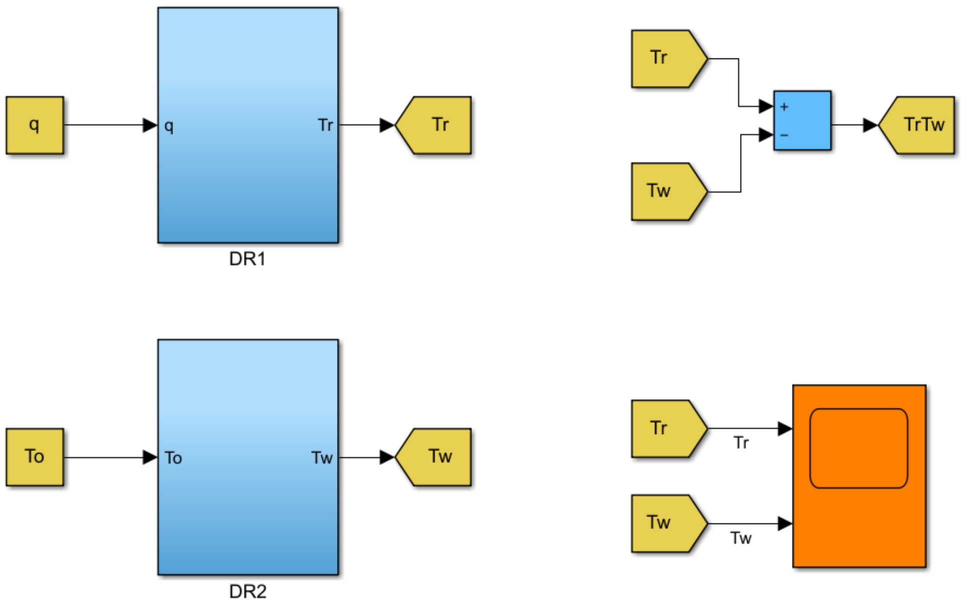
$$C_1 \cdot \frac{dT_r}{dt} + \frac{T_r - T_w}{R_r} = q_t \ ,$$
$$C_2 \cdot \frac{dT_w}{dt} - \frac{T_r - T_w}{R_r} + \frac{T_w}{R_w} = \frac{T_o}{R_w} \ , \tag{10.181}$$

kde $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$ sú **tepelné kapacity** izby a okolitej chodby. Prepíšme tento systém dvoch diferenciálnych rovníc do **maticového tvaru**

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{T}_r \\ \dot{T}_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_r} & -\frac{1}{R_r} \\ -\frac{1}{R_r} & \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_r \\ T_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \frac{T_o}{R_w} \end{bmatrix} \ . \tag{10.182}$$

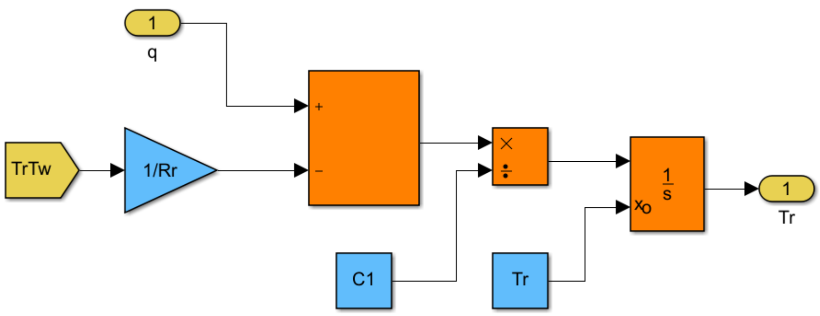
Na riešenie matematického modelu tohto tepelného systému využijeme **blokovú schému**, ktorú vytvoríme v **Simulinku**. V tejto blokovej schéme namodelujeme dva subsystémy **DR1** a **DR2**, ktoré budú predstavovať jednotlivé diferenciálne rovnice daného systému.

Blokovú schému, ktorá je zobrazená na Obr. 10.128, budeme simulovať pre vstupný tepelný tok $\mathbf{q_t}$ a simulačný čas $\mathbf{t_{sim}} = \mathbf{1800\ s}$.

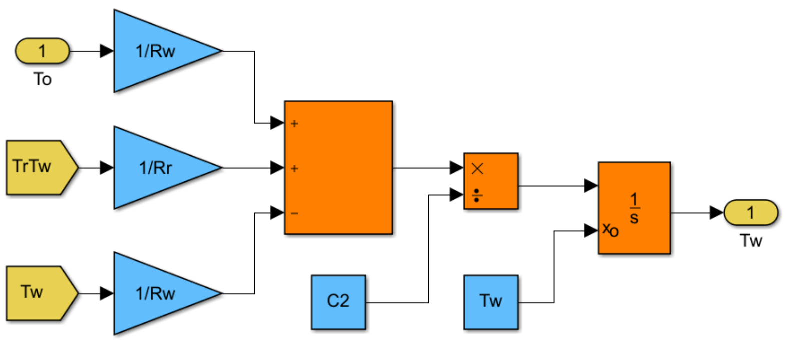


Obr. 10.128. Bloková schéma tepelného systému

Tvary **blokových diagramov**, ktoré predstavujú jednotlivé subsystémy **DR1** a **DR2**, sú zobrazené na nasledujúcich Obr. 10.129 (a) a (b).



(a)



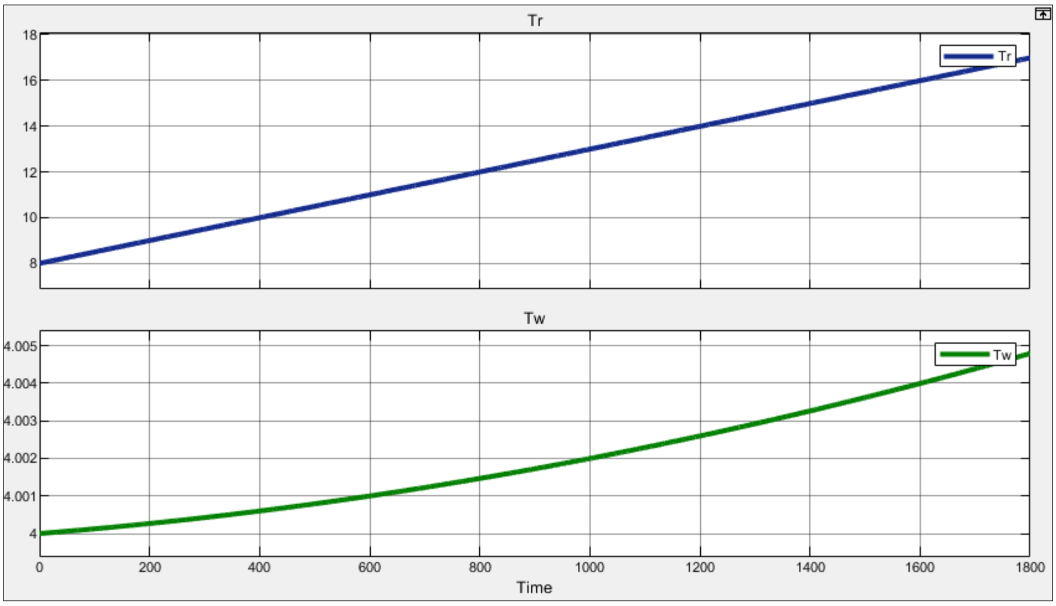
(b)

Obr. 10.129. Subsystémy: (a) DR1 a (b) DR2

Vstupné parametre na simuláciu blokovej schémy podľa Obr. 10.128 sme načítali prostredníctvom tohto **Matlab** skriptu v **Model Workspace**.

```
%Vstupné parametre systému
C1=1000;
C2=3000;
Rr=1000;
Rw=2000;
q=5;


%Počiatočné teploty
Tr=8;
Tw=4;
To=3;
```

Priebehy grafov, ktoré zobrazujú ako sa mení teplota v izbe $\mathbf{T_r}$ a v okolitej chodbe $\mathbf{T_w}$ v závislosti na čase **t**, sú znázornené na nasledujúcom Obr. 10.130.

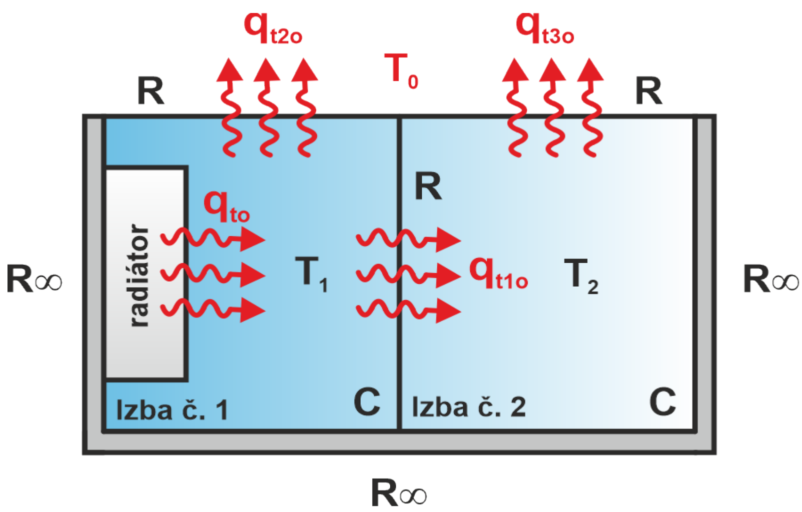


Obr. 10.130. Riešenie odozvy tepelného systému – T_r a T_w [°C]

Príklad č. 10.24.

V jednej z dvoch izieb štandardného dvojizbového bytu, ktorého zjednodušený model je znázornený na Obr. 10.131, sa nachádza výhrevné teleso dodávajúce do miestnosti **vstupný tepelný tok**, ktorý sa mení pulzným signálom s amplitúdou $\mathbf{q_{to} = 3\ W}$, s periódou $\mathbf{T = 1000\ s}$ a šírkou pulzu $\mathbf{40}$ %. Predpokladajme, že izby majú rovnaké tepelné kapacity $\mathbf{C = 10000\ J/(kg.°C)}$. Ak vieme, že vonkajšia teplota $\mathbf{T_0}$ sa mení s časom funkciou $\mathbf{T_0(t) = 15 - 0.001 \cdot t}$ **°C**, odvoďte matematický model, ktorý opisuje, ako sa mení teplota v jednotlivých miestnostiach $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$. Poznamenajme, že teplo z miestnosti **č. 1** a **č. 2** má možnosť prestupu cez spoločnú stenu týchto izieb a ďalšiu stenu, ktorou prúdi teplo do vonkajšieho prostredia. **Tepelný odpor** týchto nezaizolovaných stien uvažujeme ako $\mathbf{R = 1000\ °C.s/J}$.

Vykonajte simuláciu takéhoto tepelného systému formou vytvorenej **blokovej schémy** v **Simulinku** pre uvažovaný čas simulácie $\mathbf{t_{sim} = 10000\,s}$ a počiatočné hodnoty teplôt $\mathbf{T_1(0) = T_2(0) = 20}$ **°C** v **miestnostiach č. 1** a **č. 2**.



Obr. 10.131. Model dvojizbového bytu

Riešenie:

Pre **miestnosť č. 1** môžeme na základe **I. termodynamického zákona** napísať túto diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dU}{dt} = q_{to} - q_{t1o} - q_{t2o}\,. \qquad (10.183)$$

V predchádzajúcej diferenciálnej rovnici veličiny $\mathbf{q_{ti}}$, $\mathbf{q_{t1o}}$ a $\mathbf{q_{t2o}}$ predstavujú **tepelné toky**, ktoré vstupujú alebo opúšťajú **miestnosť č. 1** cez steny s **tepelným odporom R**. Pre zmenu **vnútornej energie U** na základe tepelnej kapacity **C** v **miestnosti č. 1** musí platiť, že

$$\frac{dU}{dt} = C \cdot \frac{dT_1}{dt} = q_{ti} - q_{t1o} - q_{t2o}\ , \qquad (10.184)$$

kde tepelné toky $\mathbf{q_{ti}}$, $\mathbf{q_{t1o}}$ a $\mathbf{q_{t2o}}$ sú

$$\begin{aligned} q_{ti} &= q_{to}\,, \\ q_{t1o} &= \frac{T_1 - T_2}{R}\,, \\ q_{t2o} &= \frac{T_1 - T_0}{R}\,. \end{aligned} \qquad (10.185)$$

Predchádzajúce výrazy **tepelných tokov** teraz využijeme a dosadíme do matematického modelu systému, tým dospejeme k tejto **prvej diferenciálnej rovnici** matematického modelu

$$\begin{gathered}\frac{dU}{dt} = C \cdot \frac{dT_1}{dt} = q_{ti} - q_{t1o} - q_{t2o}\,, \\ C \cdot \frac{dT_1}{dt} = q_{to} - \frac{T_1 - T_2}{R} - \frac{T_1 - T_0}{R}\,. \end{gathered} \tag{10.186}$$

Usporiadaním výrazov v predchádzajúcej diferenciálnej rovnici dostávame tento tvar

$$RC \cdot \frac{dT_1}{dt} + 2 \cdot T_1 - T_2 = q_{to} \cdot R + T_0\,. \tag{10.187}$$

Odvoďme teraz druhú diferenciálnu rovnicu modelu, ktorá definuje, ako sa mení teplota v **miestnosti č. 2**. Na základe **I. termodynamického zákona** musí pre **miestnosť č. 2** platiť, že

$$\frac{dU}{dt} = C \cdot \frac{dT_2}{dt} = q_{t1o} - q_{t3o}\,, \tag{10.188}$$

kde **C** je rovnaká tepelná kapacita ako v prípade **miestnosti č. 1**, výraz $\mathbf{q_{t1o}}$ je známym **tepelným tokom**, ktorý prúdi z **miestnosti č. 1** do **miestnosti č. 2** cez stenu s **tepelným odporom R**, zatiaľ čo $\mathbf{q_{t3o}}$ je zatiaľ neznámy **tepelný tok**, ktorý opúšťa **miestnosť č. 2** do okolitého priestoru. Tento tepelný tok môžeme vypočítať týmto vzťahom

$$q_{t3o} = \frac{T_2 - T_0}{R}\,. \tag{10.189}$$

Dosadením vypočítaných tepelných tokov do matematického modelu, ktorý platí pre **miestnosť č. 2**, môžeme dospieť tejto **diferenciálnej rovnici**

$$\begin{gathered} C \cdot \frac{dT_2}{dt} = q_{t1o} - q_{t3o}\,, \\ C \cdot \frac{dT_2}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R} - \frac{T_2 - T_0}{R}\,, \end{gathered} \tag{10.190}$$

následne usporiadaním výrazov v tejto rovnici, dostávame druhú **diferenciálnu rovnicu** systému v tomto tvare

$$RC \cdot \frac{dT_2}{dt} - T_1 + 2 \cdot T_2 = T_0\,. \tag{10.191}$$

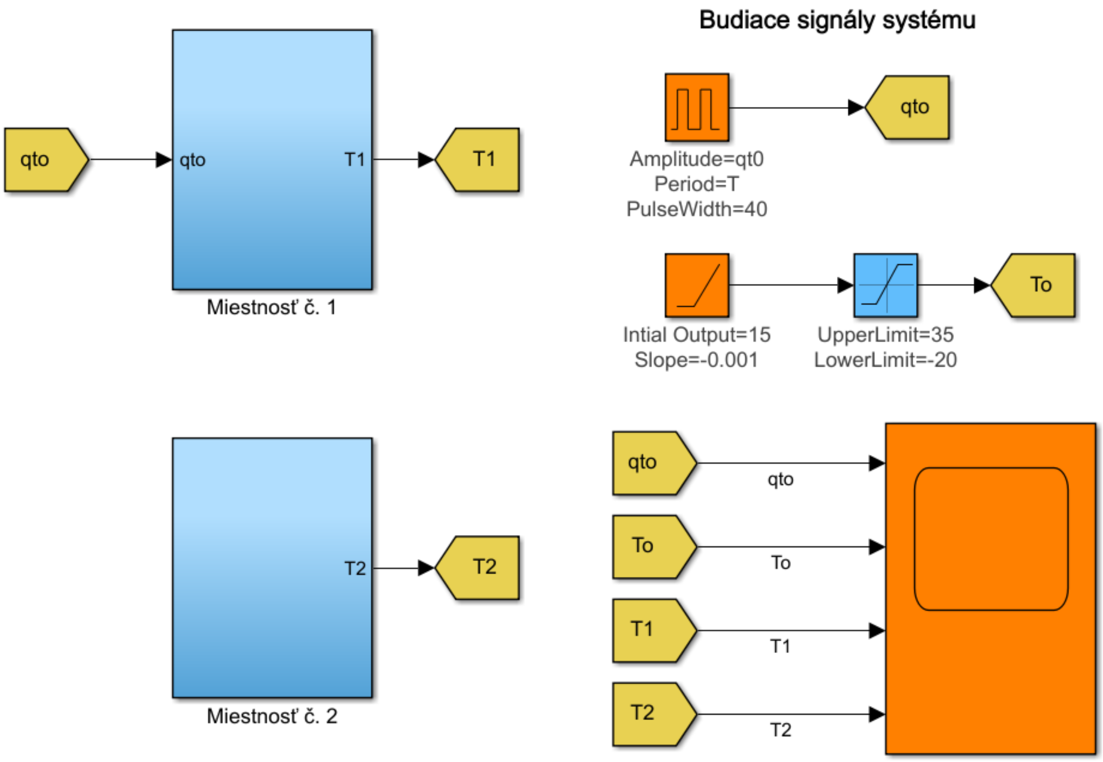
Napokon matematický model, ktorý opisuje správanie sa tepelného systému dvoch izieb podľa Obr. 10.131, je definovaný týmto **systémom dvoch diferenciálnych rovníc 1. rádu**

$$
\begin{aligned}
&RC \cdot \frac{dT_1}{dt} + 2 \cdot T_1 - T_2 = q_{to} \cdot R + T_0 \,, \\
&RC \cdot \frac{dT_2}{dt} - T_1 + 2 \cdot T_2 = T_0 \,.
\end{aligned}
\qquad (10.192)
$$

Prepíšme tento systém diferenciálnych rovníc do **simulinkovského tvaru**

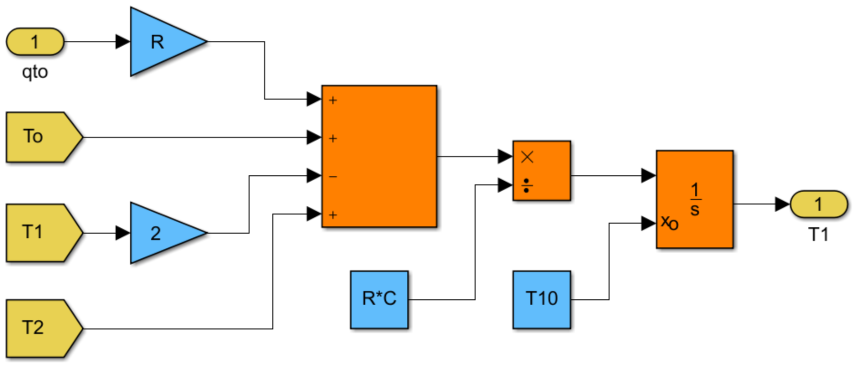
$$
\begin{aligned}
&\frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot [q_{to} \cdot R + T_0 - 2 \cdot T_1 + T_2] \,, \\
&\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot [T_0 + T_1 - 2 \cdot T_2] \,.
\end{aligned}
\qquad (10.193)
$$

Matematický model systému (10.192), ktorý sme odvodili budeme simulovať vytvorením **blokovej schémy** s dvomi subsystémami **Miestnosť č. 1** a **Miestnosť č. 2**. Tieto vytvoríme individuálne pre matematické modely odvodených diferenciálnych rovníc. Takto vytvorenú **blokovú schému**, ktorá je zobrazená na Obr. 10.132, budeme simulovať pre vstupný tepelný tok $\mathbf{q_{to}}$ a simulačný čas $\mathbf{t_{sim} = 10000\ s}$.

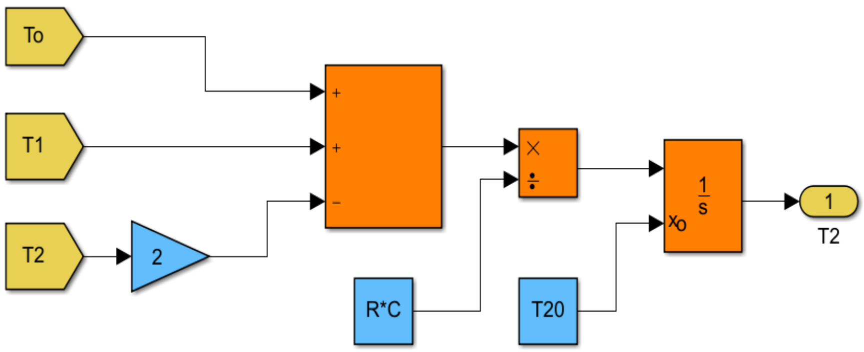


Obr. 10.132. Bloková schéma tepelného systému

Tvary blokových diagramov, ktoré predstavujú jednotlivé subsystémy **DR1** a **DR2**, sú zobrazené na nasledujúcich Obr. 10.133 (a) a (b).



(a)



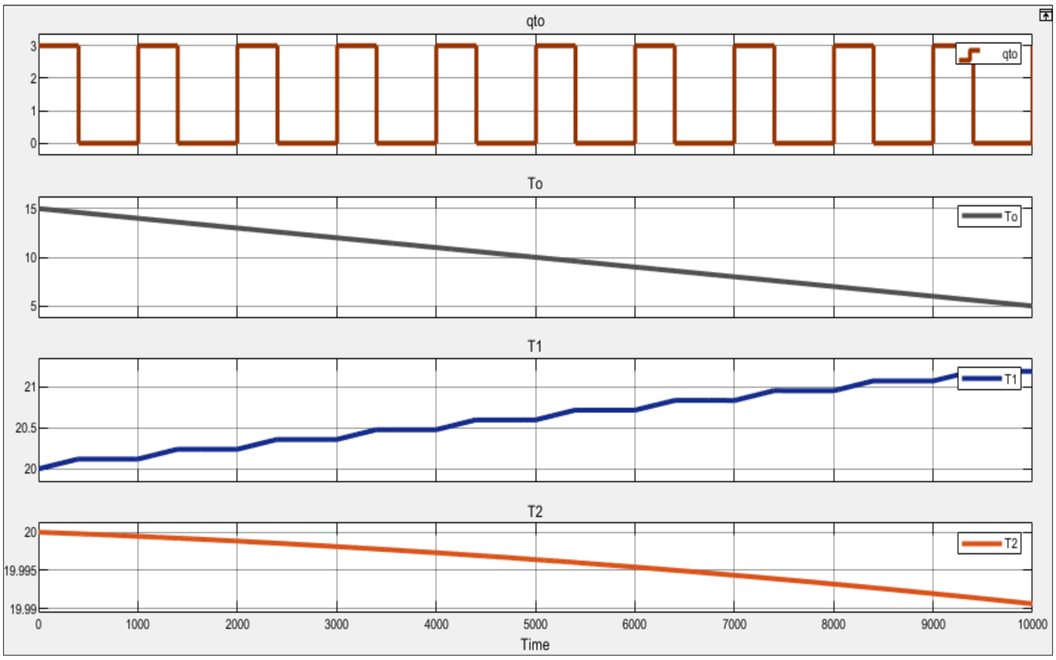
(b)

Obr. 10.133. Subsystémy: (a) Miestnosť č. 1 a (b) Miestnosť č. 2

Vstupné parametre na simuláciu blokovej schémy podľa Obr. 10.132 sme načítali prostredníctvom tohto **Matlab** skriptu v **Model Workspace**.

```
%Vstupné parametre systému
C=10000;
qt0=3;
T=1000;
R=1000;


%Počiatočné teploty
T10=20;
T20=20;
```

Priebehy grafov, ktoré zobrazujú ako sa mení teplota $\mathbf{T_1}$ a $\mathbf{T_2}$ v závislosti na čase **t**, sú znázornené na Obr. 10.134.

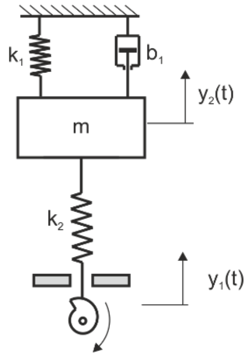


Obr. 10.134. Riešenie odozvy tepelného systému – q_{to} [W], T_o, T_1, T_2 [°C]

Problémy na riešenie

Problém 10.1.

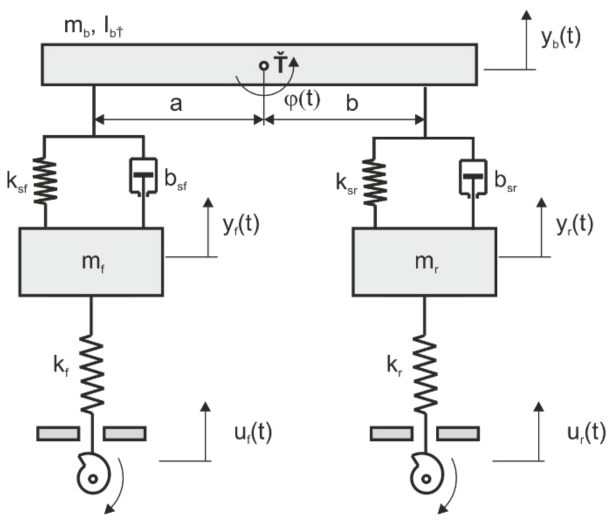
Predpokladajme mechanický systém kmitajúcej hmoty zobrazený na Obr. 10.135. Odvoďte metódou postupného uvoľňovania matematický model tohto systému a riešte jeho odozvu simuláciou v **Simulinku**. Parametre tohto systému sú $\mathbf{m = 100\,kg}$, $\mathbf{k_1 = 1000\ N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_2 = 2000\ N.m^{-1}}$. Systém je budený otáčaním vačky, ktorá generuje posuv daný harmonickou funkciu $\mathbf{u(t) = 0.2 \cdot sin(t)}$.



Obr. 10.135. Mechanický systém č.1

Problém 10.2.

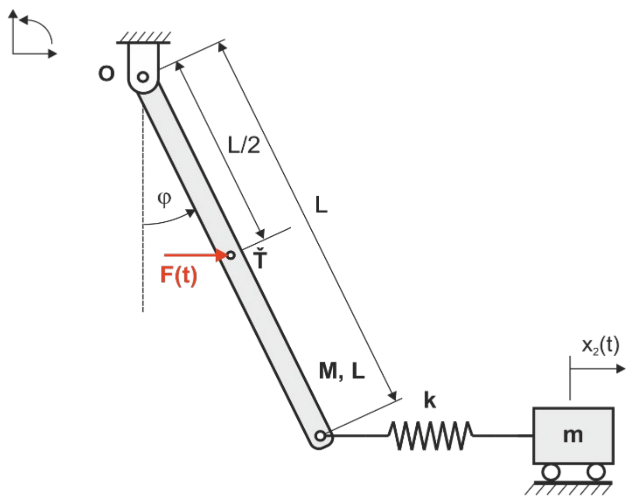
Kmitajúci mechanický systém zobrazený na Obr. 10.136, pozostáva z troch kmitajúcich hmôt. Tento mechanický systém je v spodnej časti budený kinematickým budením $\mathbf{u(t) = 0.05 \cdot sin(\omega \cdot t)}$, kde $\mathbf{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f}$ **a** $\mathbf{f = 5\,Hz}$. Použitím metódy postupného uvoľňovania odvoďte matematický model a zapíšte ho do maticového tvaru. Riešte odozvu tohto systému simuláciou v **Simulinku**. Parametre tohto systému sú $\mathbf{m_f = 100\,kg}$, $\mathbf{m_r = 150\,kg}$, $\mathbf{m_b = 200\,kg}$, $\mathbf{I_{b\check{T}} = 110\,kg.m^2}$, $\mathbf{a = b = 1.2\,m}$, $\mathbf{k_f = 15000\ N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_r = 17000\ N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_{sf} = 6000\ N.m^{-1}}$, $\mathbf{k_{sr} = 7000\ N.m^{-1}}$ a $\mathbf{b_{sr} = b_{sf} = 1200\ N.s.m^{-1}}$.



Obr. 10.136. Mechanický systém č. 2

Problém 10.3.

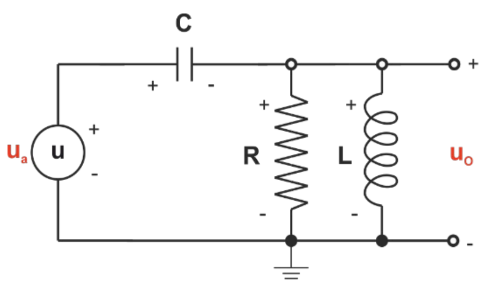
Predpokladajme pákový mechanizmus, ktorý je znázornený na Obr. 10.137. Použitím energetickej metódy odvoďte matematický model takéhoto systému a riešte jeho odozvu simuláciou v **Simulinku**, ak vieme, že v ťažisku páky pôsobí pulzujúca premenlivá sila $\mathbf{F(t)}$, ktorej amplitúda je $\mathbf{F = 100\ N}$. Pulzný signál sily sa mení periódou $\mathbf{T = 2\ s}$ a jeho šírka pulzu je $\mathbf{40}$ %. Parametre tohto mechanického systému sú $\mathbf{M = 100\ kg}$, $\mathbf{L = 1.5\ m}$, $\mathbf{k = 1050\ N.m^{-1}}$. Páku možno modelovať ako tyčku so zanedbateľnou hrúbkou.



Obr. 10.137. Pákový mechanizmus č. 2

Problém 10.4.

Odvoďte matematický model pre **RLC obvod**, ktorý je zobrazený na Obr. 10.138, zapíšte do maticového tvaru a riešte simuláciou v **Simulinku** pre simulačný čas $\mathbf{t = 1\ s}$. Parametre tohto systému sú $\mathbf{R = 150\ \Omega}$, $\mathbf{L = 250\ mH}$, $\mathbf{C = 105\ \mu F}$. Vstupné napätie $\mathbf{u_a(t)}$ sa mení harmonicky funkciou $\mathbf{u_a(t) = 12 \cdot cos(\omega \cdot t) + 24}$, kde $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{2 \cdot \pi \cdot f}$ a $\mathbf{f = 50\ Hz}$.

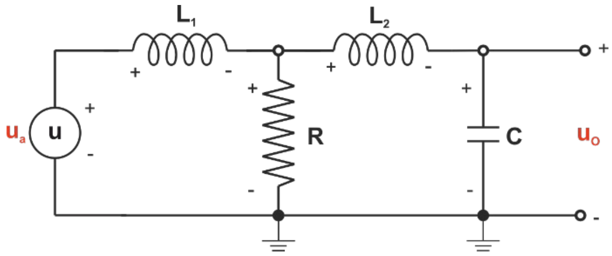


Obr. 10.138. RLC obvod č. 1

Problém 10.5.

Odvoďte matematický model pre elektrický obvod, ktorý je zobrazený na Obr. 10.139, zapíšte tento model do maticového tvaru a riešte simuláciou v **Simulinku** pre simulačný čas $\mathbf{t = 0.5\ s}$. Parametre tohto systému sú $\mathbf{R = 150\ k\Omega}$, $\mathbf{C = 105\ \mu F}$, $\mathbf{L_1 = 150\ mH}$, $\mathbf{L_2 = 250\ mH}$.

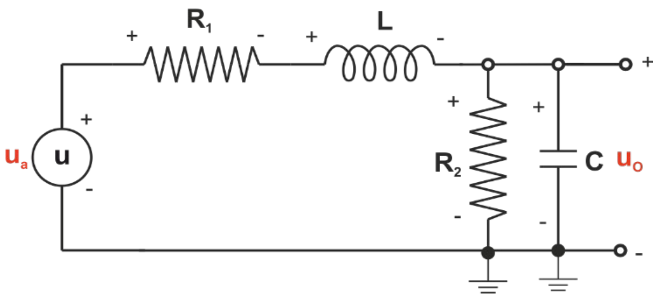
Vstupné napätie $\mathbf{u_a(t)}$ sa mení pulzným signálom s amplitúdou $\mathbf{u_a(t) = 24}$ s periódou $\mathbf{T = 0.02\ s}$ a šírkou pulzu $\mathbf{40}$ %.



Obr. 10.139. RLC obvod č. 2

Problém 10.6.

Odvoďte matematický model pre elektrický obvod zobrazený na Obr. 10.140, zapíšte ho do maticového tvaru riešte simuláciou v **Simulinku** pre simulačný čas $\mathbf{t = 1\ s}$. Parametre tohto systému sú $\mathbf{R_1 = 250\ \Omega}$, $\mathbf{R_2 = 350\ \Omega}$, $\mathbf{C = 300\ \mu F}$, $\mathbf{L = 150\ mH}$. Vstupné napätie $\mathbf{u_a(t)}$ sa mení pulzným signálom s amplitúdou $\mathbf{u_a(t) = 12}$, periódou $\mathbf{T = 0.05\ s}$ a šírkou pulzu $\mathbf{50}$ %.

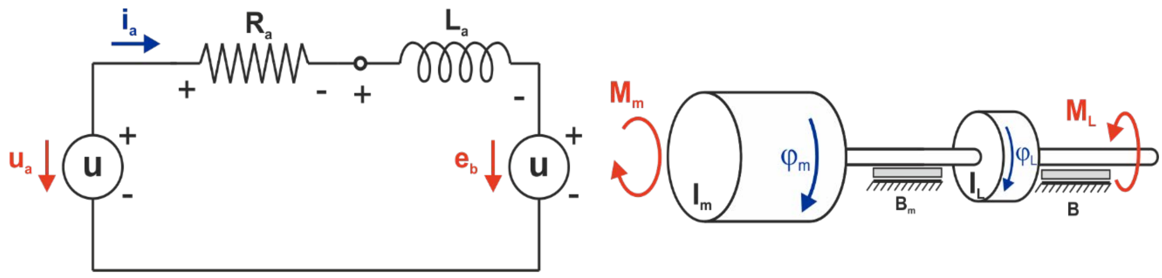


Obr. 10.140. RLC obvod č. 3

Problém 10.7.

Elektromechanický systém zobrazený na nasledujúcom Obr. 10.141, je budený jednosmerným elektromotorom. Predpokladajme, že indukčnosť $\mathbf{L_a = 500\ mH}$, odpor $\mathbf{R_a = 300\ \Omega}$ a konštanty elektrického a mechanickej časti sú $\mathbf{K_t = K_e = 20}$. Mechanická časť modelu pozostáva z momentov zotrvačnosti $\mathbf{I_m = 100\ kg.m^2}$ a $\mathbf{I = 150\ kg.m^2}$ a s tlmičov viskózneho tlmenia $\mathbf{B_m = 0.05\ N.m.s.rad^{-1}}$ a $\mathbf{B = 0.08\ N.m.s.rad^{-1}}$. Motor je na jednej strane zaťažený momentom od záťaže $\mathbf{M_L = 5 \cdot \sin(t)}$ a na strane druhej momentom od motora $\mathbf{M_m}$. Nájdite matematický model opisujúci vzťah medzi vstupným napätím $\mathbf{u_a(t) = 12 \cdot \cos(\omega \cdot t) + 12}$, kde $\boldsymbol{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f}$ a $\mathbf{f = 50\ Hz}$, zaťažujúcim momentom $\mathbf{M_L}$ a elektrickým prúdom $\mathbf{i_a}$ s uvažovaním natočenia od motora $\boldsymbol{\varphi_m}$ a natočenia hmoty $\boldsymbol{\varphi_L}$ na strane záťaže.

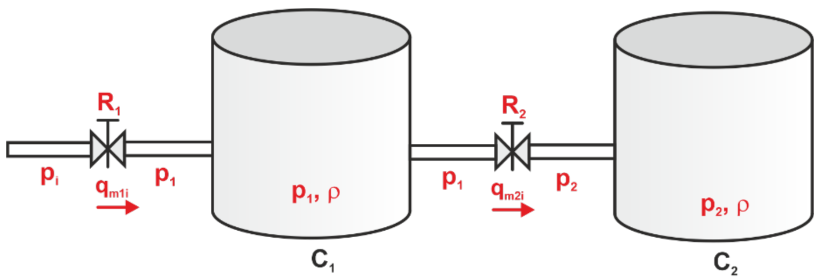
Výsledný matematický model zapíšte do maticového tvaru a riešte simuláciou blokovej schémy v **Simulinku** pre simulačný čas $\mathbf{t = 2\ s}$.



Obr. 10.141. Elektromechanický systém

Problém 10.8.

Nasledujúci Obr. 10.142 zobrazuje **pneumatický systém**, ktorý pozostáva z dvoch zásobníkov plynu s kapacitami $\mathbf{C_1 = 3.5 \times 10^{-3}\ kg.m^2.N^{-1}}$ a $\mathbf{C_2 = 4.5 \times 10^{-3}\ kg.m^2.N^{-1}}$.



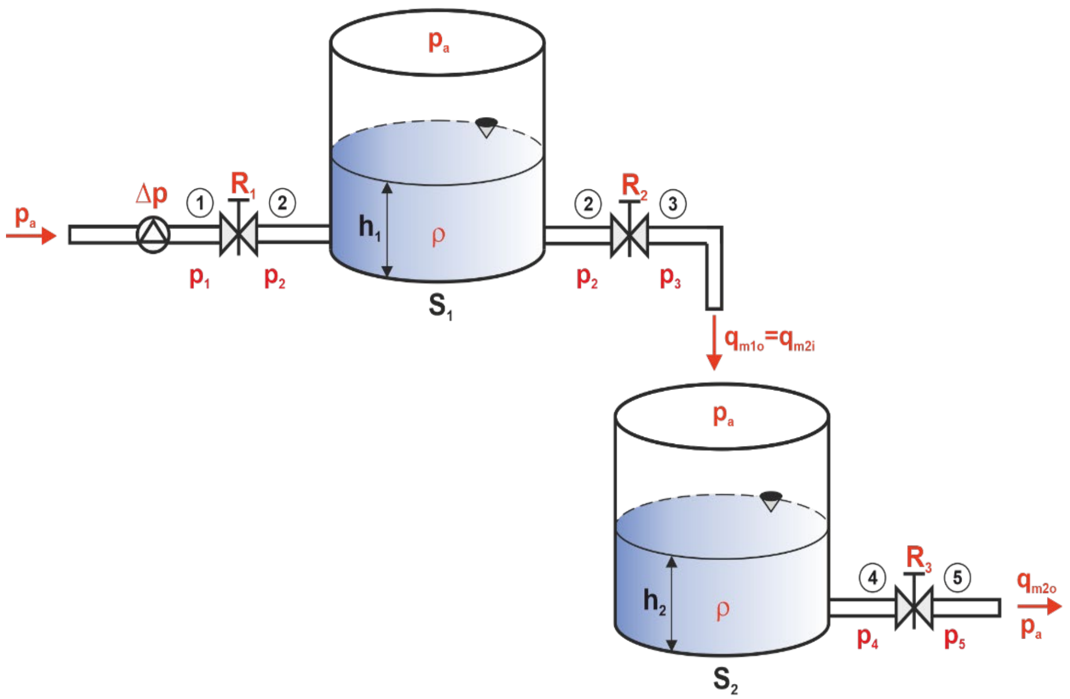
Obr. 10.142. Pneumatický systém

Suchý vzduch konštantnej teploty $\mathbf{T = 25\ °C\ (298\ K)}$ prúdi cez ventil s odporom $\mathbf{R_1 = 100\ Pa.s.kg^{-1}}$ do **zásobníka č. 1**. Tlak plynu na vstupe ventilu $\mathbf{p_i = 6\ MPa}$ je konštantný a väčší ako tlak $\mathbf{p_1}$ v **zásobníku č. 1**. Vzduch ďalej prúdi do **zásobníka č. 2** cez ventil s konštantným odporom $\mathbf{R_2 = 200\ Pa.s.kg^{-1}}$. Odvoďte diferenciálne rovnice systému, zapíšte ich do maticového tvaru a riešte simuláciou blokovej schémy v **Simulinku** pre simulačný čas $\mathbf{t\ =\ 10\ s}$.

Problém 10.9.

Nasledujúci Obr. 10.143 zobrazuje hydraulický systém dvoch nádrží s prierezovými plochami $\mathbf{S_1 = 15\ m^2}$ a $\mathbf{S_2 = 25\ m^2}$. Čerpadlo s konštantným tlakom $\mathbf{\Delta p = 5\ MPa}$ je pripojené v spodnej časti **nádrže č. 1** k ventilu s odporom $\mathbf{R_1 = 15000\ Pa.s.m^{-3}}$. Kvapalina priteká z **nádrže č. 1** do **nádrže č. 2** cez ventil s odporom $\mathbf{R_2 = 25000\ Pa.s.m^{-3}}$ a opúšťa **nádrž č. 2** cez ventil s odporom $\mathbf{R_3 = 18000\ Pa.s.m^{-3}}$.

Hustota kvapaliny je $\mathbf{\rho = 1000\ kg.m^{-3}}$. Odvoďte diferenciálne rovnice v zmysle $\mathbf{h_1}$ a $\mathbf{h_2}$, ktoré zapíšte do maticového tvaru. Riešte odozvu tohto hydraulického systému simuláciou blokovej schémy v **Simulinku** pre simulačný čas $\mathbf{t\ =\ 1000\ s}$.



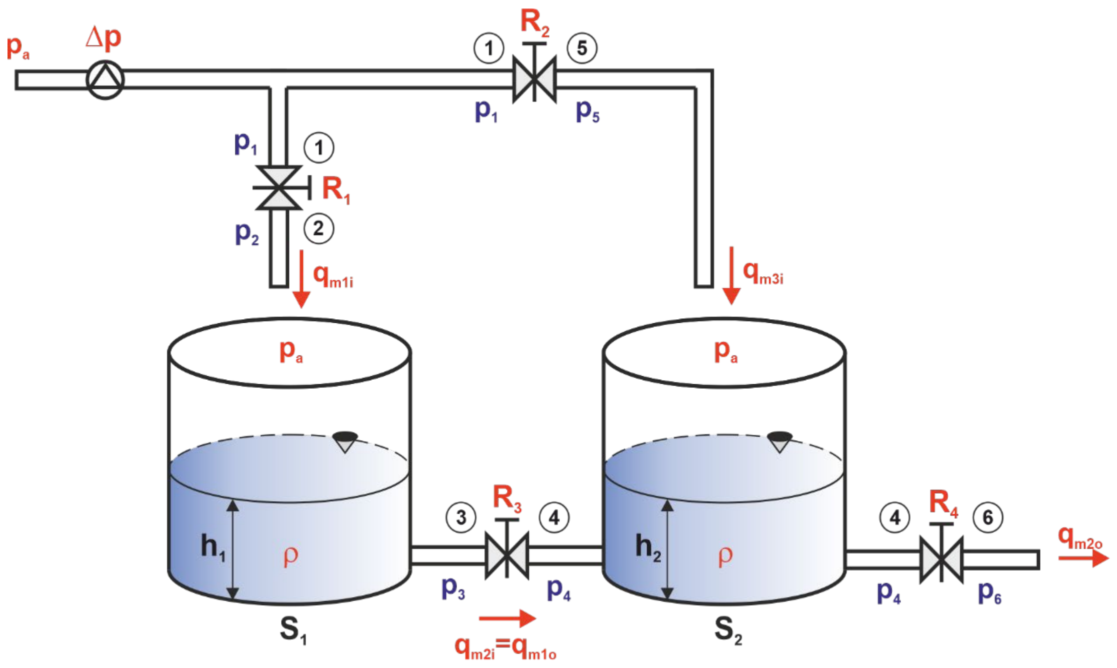
Obr. 10.143. Hydraulický systém dvoch nádrží s čerpadlom

Problém 10.10.

Na ďalšom Obr. 10.144 je zobrazený hydraulický systém dvoch nádrží s plochami prierezu $\mathbf{S_1 = 25\ m^2}$ a $\mathbf{S_2 = 35\ m^2}$. Čerpadlo s konštantným tlakom $\mathbf{\Delta p = 10\ MPa}$ v hornej časti pumpuje súčasne kvapalinu do nádoby **č. 1** cez ventil s odporom $\mathbf{R_1 = 20000\ Pa.s.m^{-3}}$ a do nádrže **č. 2** cez ventil s odporom $\mathbf{R_2 = 15000\ Pa.s.m^{-3}}$. Obe nádrže sú v spodnej časti prepojené prostredníctvom hydraulického ventilu s odporom $\mathbf{R_3 = 15000\ Pa.s.m^{-3}}$. Z nádoby **č. 2** odteká kvapalina cez ventil s odporom $\mathbf{R_4 = 25000\ Pa.s.m^{-3}}$ priamo do atmosférického tlaku. Hustota kvapaliny je $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1000\ kg.m^{-3}}$.

Odvoďte matematický model pre takýto hydraulický systém dvoch nádrží, ktoré opisuje ako sa mení výška hladín v zásobníkoch $\mathbf{h_1}$ a $\mathbf{h_2}$ v závislosti na čase a vstupnom tlaku, ktorý je vyvolaný pumpovaním čerpadla. Zapíšte tento matematický model do maticového tvaru a riešte odozvu takéhoto systému vytvorením blokovej schémy v **Simulinku**.

Pri tvorbe **blokovej schémy** využite **bezkontaktný prenos** signálov medzi jednotlivými blokmi a takisto subsystémy, ktorými zadefinujete pre odvodené diferenciálne rovnice systému. Odozvu tohto systému riešte pre simulačný čas $\mathbf{t\ =\ 1500\ s}$.



Obr. 10.144. Hydraulický systém s čerpadlom

REGISTER

A

B

C

D

E

F

G

Š

T

U

V

W

X

Z

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] **Woods, R. L. – Lawrence, K. L.**: Modeling and simulation of dynamic systems. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice – Hall, Inc., 1997. ISBN 0-13-337379-7

[2] **Smaili, A. – Mrad, F.**: Mechatronics. Integrated technologies for intelligent machines. Oxford: Oxford University Press, 2088. ISBN 978-0-19-532239-2

[3] **Bolton, W.**: Mechatronics. Electronic control systems in mechanical and electrical engineering. 2nd edition. Pearson Education Limited, Harlow: Prentice – Hall, Inc., 1999. ISBN 0-582-35705-5

[4] **Russell, K. – Shen, Q. – Sodhi, S. R.**: Kinematics and Dynamics of Mechanical systems. Croydon, UK: CRC Press, 2016. ISBN 978-1-4978-2493-7

[5] **Katshuhiko, O.**: System dynamics. 4th edition. Pearson Education Limited: University of Minesota, Harlow: Prentice – Hall, Inc., 2004. ISBN 0-13-142462-9

[6] **Esfandiari, R. S. – Lu, B.**: Modeling and Analysis of Dynamic Systems. CRC Press, 2014. ISBN 978-1-4665-7493-9

[7] **Chmelko, V. – Garan, M. – Šulko, M.**: Pružnosť a pevnosť. 1. vydanie. Spektrum: Strojnícka fakulta STU, 2017. ISBN 978-80-227-4667-0

[8] **Craig, J. J.**: Introduction to Robotics: Mechanis and Control, 3rd edition. Prentice Hall, 2005. ISBN 0-13-123629-6

[9] **Esfandiari, R.**: Applied Mathematics for Engineers, 5th edition. Los Angeles: Atlantis, 2013. ISBN 978-097299907

[10] **Floyd, T. L.**: Electric Circuit Fundamentals, 7th edition Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2006. ISBN 978-0135072936

[11] **Hibbeler, R. C.**: Engineer Mechanics: Dynamics, 12th ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2010. ISBN 978-0132911276

[12] **Inman, D. J.**: Engineering Vibration, 3rd ed. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2007. ISBN 978-0132871693

[13] **Meirovitch, L.**: Fundamentals of Vibrations. New York : McGraw-Hill, 2001. ISBN 978-1577666912

[14] **Spong, M. W. – Hutchinson, S. – Vidyasagar, M.**: Robot Modeling and Control. New York: John Viley & Son. 1996. ISBN 978-0471649908

[15] **Street, R. L. – Watters, G. Z. – Vennerd, J. K.**: Elementary Fluid Mechanics, 7th edition. New York: John Viley & Son, 1996. ISBN 978-1406700107

[16] **Garan, M.**: Modelovanie a simulácia mechatronických systémov 1. Spektrum: Strojnícka fakulta STU, 2020. ISBN 978-227-4496-1

POUŽITÉ ZNAČKY

Typ jednotiek	Veličina	Názov jednotka	Symbol	Označenie
Základné jednotky	Dĺžka	meter	m	l
	Hmotnosť	kilogram	kg	m
	Čas	sekunda	s	t
	Elektrický prúd	ampér	A	i
	Teplota	kelvin	K	T
	Látkové množstvo	mól	mol	n
Pomocné jednotky	Rovinný uhol	radián	rad	φ
	Priestorový uhol	steradián	sr	ϑ
Odvodené jednotky	Zrýchlenie	meter za sekundu štvorcovú	$m.s^{-2}$	a
	Uhlové zrýchlenie	radián za sekundu štvorcovú	$rad.s^{-2}$	α
	Rýchlosť	meter za sekundu	$m.s^{-1}$	v
	Uhlová rýchlosť	radián za sekundu	$rad.s^{-1}$	ω
	Moment zotrvačnosti	kilogram meter štvorcový	$kg.m^2$	I
	Plocha	meter štvorcový	m^2	S
	Hustota	kilogram na meter kubický	$kg.m^{-3}$	ρ
	Energia	joule	J	E
	Mechanická práca	joule	J	W
	Elektrická kapacita	farad	F	C
	Elektrický náboj	coulomb	C	Q
	Elektrické napätie	volt	V	u
	Elektrický odpor	ohm	Ω	R
	Sila	newton	N	F
	Moment	newton krát meter	N.m	M
	Frekvencia	hertz	Hz, s^{-1}	f
	Magnetické pole	weber	Wb	B
	Tlak	pascal	Pa (N/m^2)	p
	Výkon	watt	W	P
	Tepelná kapacita	joule na kilogram kelvin	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	c, C
	Tepelná vodivosť	watt na meter kelvin	$W.m^{-1}.K^{-1}$	k
	Tepelná kondukcia	watt na meter štvorcový kelvin	$W.m^{-2}.K^{-1}$	h
	Objem	meter kubický	m^3	V
	Teplo	joule	J	Q

Martin GARAN

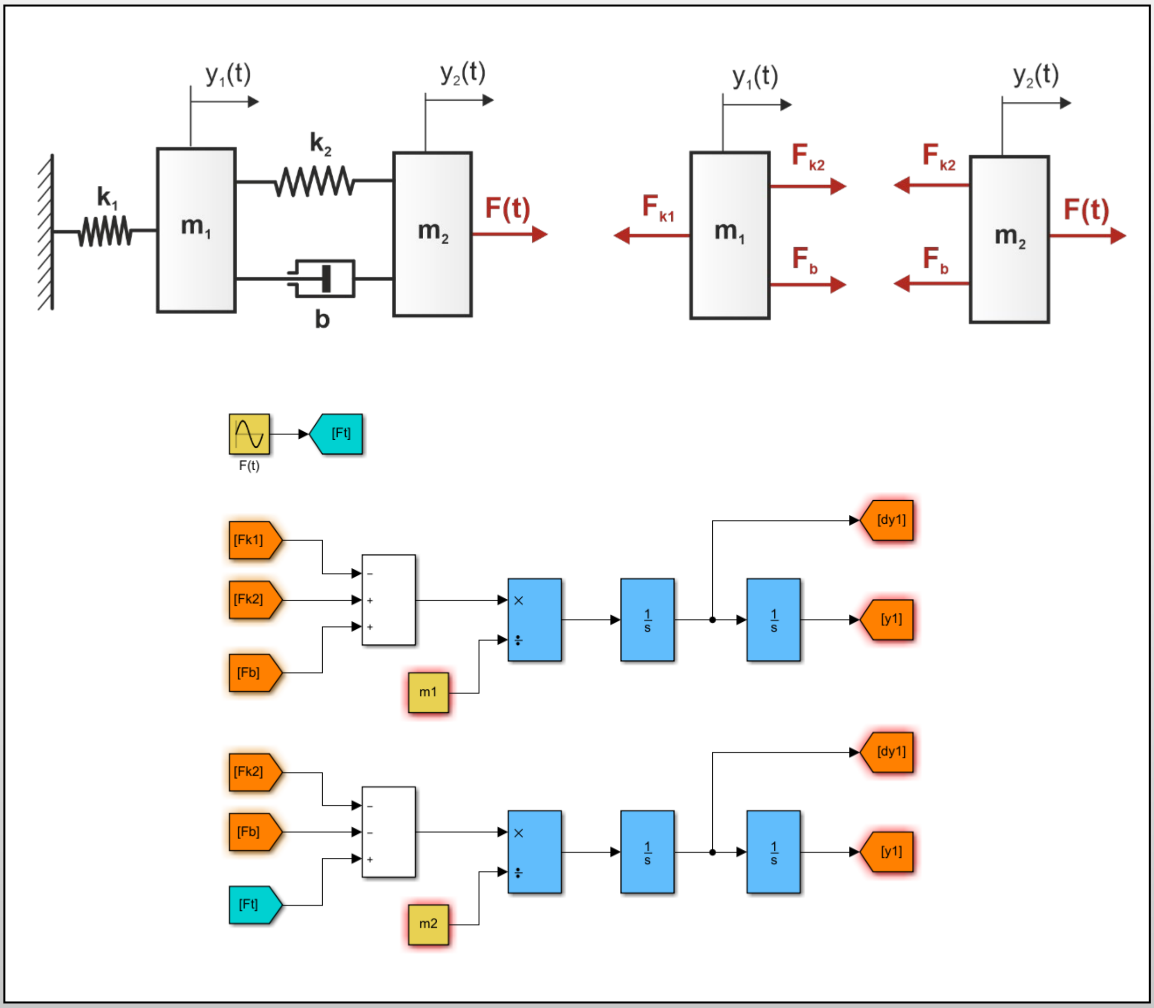
MODELOVANIE A SIMULÁCIA MECHATRONICKÝCH SYSTÉMOV 2

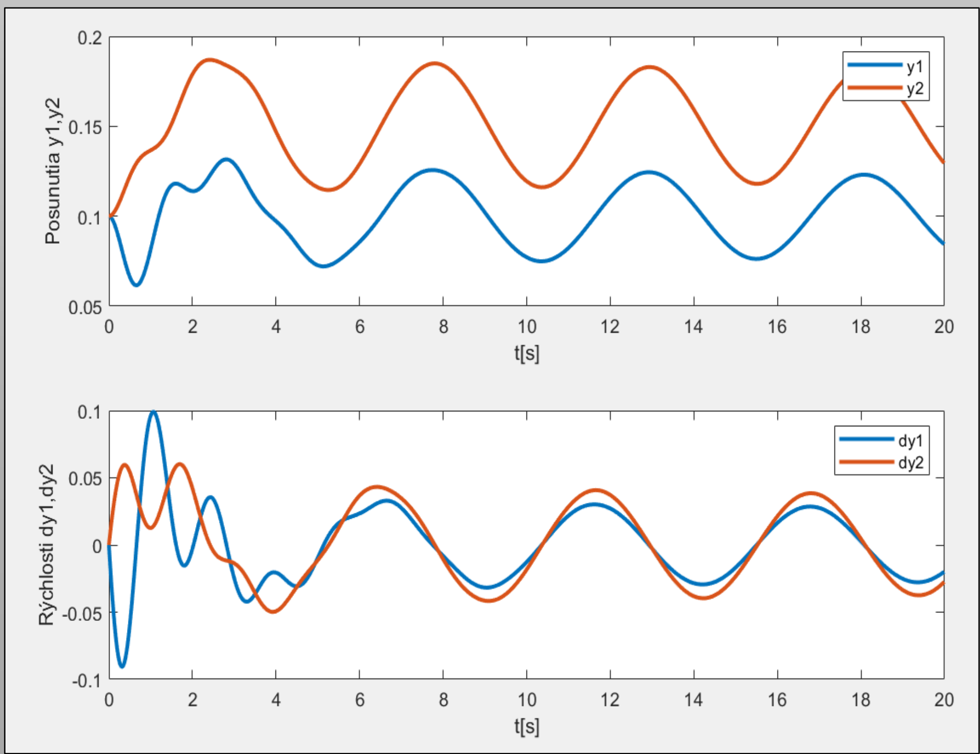
Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve
SPEKTRUM STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2020

Edícia vysokoškolských učebníc

Rozsah 492 strán, 500 obrázkov, 19 tabuliek, 14.692 AH, xxxx VH,
1. vydanie, edičné číslo xxxx, tlač ForPress NITRIANSKE TLAČIARNE, s. r. o.

75 – 201 – 2020
ISBN xxx-xx-xxx-xxxx-x





ISBN xxx-xx-xxx-xxxx-x