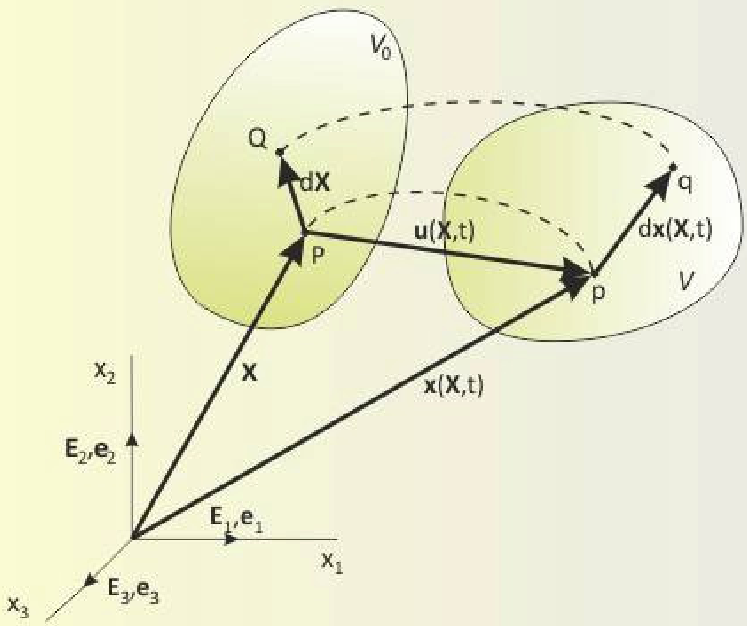
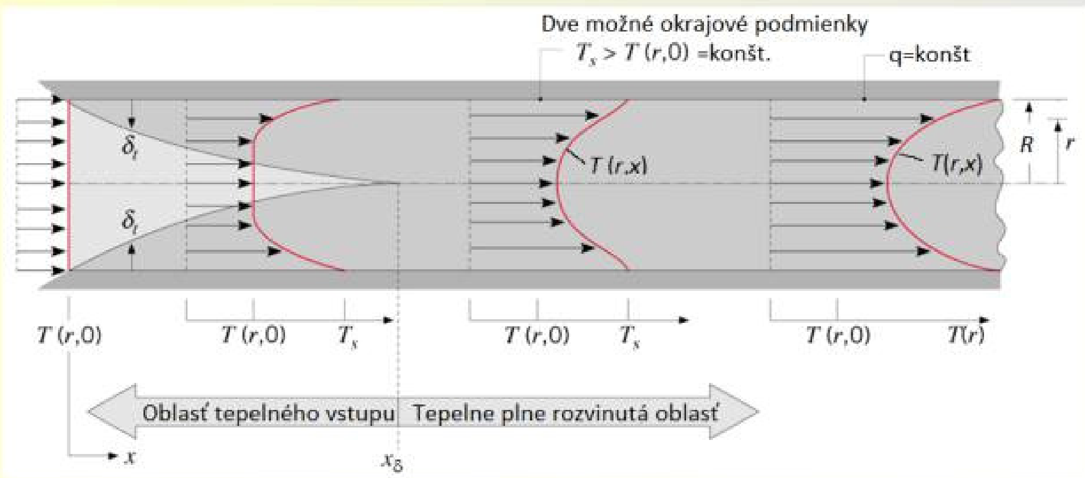
doc.Ing.Štefan Benča,PhD.

APLIKOVANÁ NELINEÁRNA MECHANIKA KONTINUA





Vydavateľstvo 1000knih.sk, 2013

© Doc. Ing. Štefan Benča, PhD.
Aplikovaná nelineárna mechanika kontinua
E-kniha formát PDF
Vydavateľstvo 1000knih.sk, 2013

OBSAH

ÚVOD

Vybrané kapitoly mechaniky kontinua uvedené v tejto práci vznikali v rokoch 2009 až 2017 ako rozširujúce doplnky monografií [1] a [2] na internetovej stránke mkp-fem.sk. Boli tvorené ako samostatné časti najprv z oblasti geometricky a fyzikálne nelineárnych úloh telesa z poddajného materiálu, potom z oblasti prúdenia tekutín, z prenosu tepla, elektromagnetizmu, kontaktu telies a akustiky. Nakoľko sa vo všekých týchto prípadoch vyšetruje spojité kontinuum metódami mechaniky kontinua [3] dochádzalo pri náraste počtu kapitol buď k opakovaniu metód, vzťahov i rovníc alebo k potrebe častého odvolávania sa na predchádzajúce časti. Nakoniec z tohto vyplynula potreba spojiť tento materiál do jedného celku a sprístupniť ho záujemcom tým najjednoduchším spôsobom – vo forme e-knihy prístupnej na internete.

Lineárne úlohy mechaniky možno pomocou komerčných výpočtových softvérov (univerzálnych programových systémov) skoro rutinne riešiť s minimálnym a, žiaľ, často i podceňovaným nárokom na teoretickú pripravenosť užívateľa; pri nelineárnych úlohách je to ťažko mysliteľné. Už len samotné zadávanie vstupných dát (typ materiálu, okrajové podmienky, konvergenčné kritériá, voľba vhodného výpočtového modelu a i.) ako aj schopnosť odhadu dôveryhodnosti vypočítaných výsledkov vyžaduje dôkladnú teoretickú i praktickú prípravu.

Tak ako je to zdôraznené v názve, kniha je určená aj pre aplikačne založeného záujemcu a väčšina jej častí ilustruje teóriu príkladmi alebo využíva softvérové prostriedky na riešenie jednoduchých vzorových nelineárnych úloh. Postupy a využívanie softvéru pre analogické reálne úlohy je potom už obyčajne len otázka väčšej prácnosti pri editácii vstupných dát.

Kniha obsahuje kapitoly hlavne z troch fyzikálne odlišných častí

- Statické geometricky a fyzikálne nelineárne úlohy telies z poddajného materiálu. Sem patrí predovšetkým kinematika veľkých deformácií a s ňou spojené alternatívne miery napätia, ďalej pružne-plastické úlohy, viskoelasticita, viskoplasticita a kríp.
- Dynamika tekutín s dôrazom na turbulentné prúdenie, s ktorým sa skoro výhradne stretávame pri úlohách technickej praxe.
- Prenos tepla s rozborom jeho troch základných spôsobov: Prenos tepla vedením (kondukciou), sálaním (radiáciou) a prúdením (konvekciou).

Uvedená problematika spolu s elektromagnetizmom, kontaktom telies a akustikou po úvodných teoretických častiach je doplnená príkladmi, ktoré sa riešia numerickými metódami, a to metódou konečných prvkov (MKP) a metódou konečných objemov (MKO) s využitím programov *Ansys Mechanical* a *Ansys Fluent*. Pokiaľ je to možné, využíva sa program *Mathematica 5* na priamy výpočet úlohy zo základných diferenciálnych rovníc, prípadne aj program Matlab pri práci s maticovými rovnicami.

Poznamenávame, že text knihy do určitej miery predpokladá ovládanie základných pojmov a základnej lineárnej a nelineárnej teórie MKP zhruba v rozsahu učebníc [1] a [2].

1 Vzťahy medzi posunutím a deformáciou. Geometrické rovnice

1.1 Malé deformácie

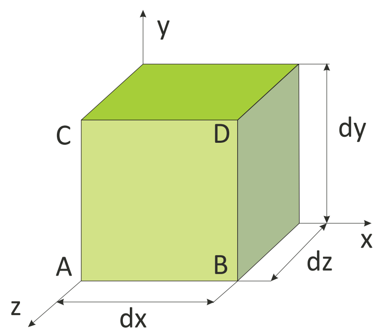
Uvažujme v kartézskom súradnicovom systéme priestorové deformovateľné teleso a zaťažme ho statickou sústavou vonkajších síl. Pretože teleso je upevnené (nemôže sa pohybovať ako tuhý celok) účinkom týchto síl sa východzia konfigurácia (geometria) telesa zmení, body telesa sa premiestnia (posunú) do novej polohy - teleso sa zdeformuje.

Predpokladajme, že poznáme vektor posunutia bodov telesa (deformačná formulácia MKP ich poskytuje na konečných prvkoch v aproximačnom tvare)

$$\mathbf{u}(x,y,z) \equiv u_i(x,y,z) \equiv \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

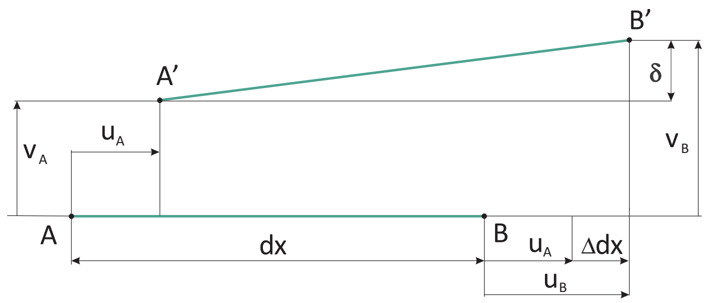
kde spojité funkcie *u, v,* a *w* sú zložky posunutia bodu *xyz* v smere súradnicových osí. Zaujíma nás vzťah medzi týmito funkciami a hľadanými funkciami, ktoré budú vyjadrovať mieru deformácie telesa v jeho bodoch.

Vyznačme vo vnútri nezaťaženého telesa vo všeobecnom mieste *xyz* diferenciálny (infinitezimálny, "nekonečne" malý, bodový) objemový element *dxdydz* (obr. 1.1).



Obr. 1.1

Účinkom zaťaženia sa element posunie v priestore a zdeformuje (vzhľadom na jeho veľmi malé rozmery sa uvažuje jednoduchý typ deformácie súvisiaci s definíciou napätia: zmenia sa jeho dĺžkové rozmery - v smere súradnicových osí sa natiahne alebo skráti - a porušia sa pravé uhly medzi jeho stenami).



Obr. 1.2

Uvažujme na elemente dva body *A* a *B* na rovnobežnej hrane s osou *x* a vzdialené od seba o *dx* (obr. 1.2). Účinkom zaťaženia sa pôvodná poloha bodov *A* a *B* zmení. Ich spojnica sa posunie, zmení svoju dĺžku a natočí sa. Pri malých deformáciách ($\varepsilon_x << 1$) zanedbávame účinok natočenia na dĺžku spojnice a za mieru deformácie elementu v smere *x* sa volí pomerná zmena *x*-ovej vzdialenosti bodov

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{u_B - u_A}{dx} \tag{1.2}$$

t.j. podiel zmeny vzdialenosti bodov Δdx k pôvodnej vzdialenosti *dx.* V prípade, keď sa element v smere osi *x* len posunie ako celok ($u_B = u_A$), je pochopiteľne $\varepsilon_x = 0$. Ako vidieť, je to bezrozmerné číslo i so znamienkom (s fyzikálnym významom pomerného predĺženia alebo skrátenia).

Posunutie u_B určíme z rozvoja funkcie *u* v bode *A* do skráteného Taylorovho radu. Vzhľadom na malé deformácie sa uvažujú len prvé dva členy

$$u_B = u_A + \frac{\partial u}{\partial x} dx \tag{1.3}$$

čo vlastne predstavuje linearizáciu funkcie *u* v okolí bodu A. Dosadením (1.3) do (1.2) dostávame vzťah pre výpočet pomernej deformácie v bodoch telesa

$$\varepsilon_x(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.4}$$

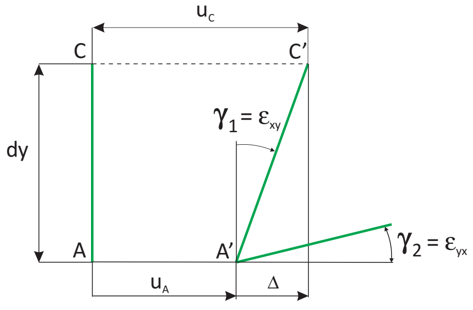
Je to vlastne gradient funkcie $u(x,y,z)$.

Analogickým rozborom deformácie elementu v smere osi *y* a *z* by sme dostali

$$\varepsilon_y(x,y,z) = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.5}$$

$$\varepsilon_z(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.6}$$

Funkcie ε_x, ε_y a ε_z, ktoré nazývame *normálové deformácie*, vyvolajú zmenu objemu elementu, ale neporušia pravé uhly medzi jeho stenami, pretože len posúvajú rovnobežné steny elementu o rozdielnu hodnotu smere ich spoločnej normály. Zaťaženie telesa však vyvolá aj tzv. *šmykové deformácie* γ_{xy}, γ_{yz} a γ_{zx}, ktoré vzájomnú kolmosť stien narušia, pričom ale nezmenia objem elementu. Ak sa napr. bod C (obr. 1.1) posunie v smere osi *x* oproti bodu *A* o hodnotu Δ, potom podľa obr. 1.3



Obr. 1.3

opätovným využitím skráteného Taylorovho radu pre vyjadrenie u_C dostávame

$$\Delta = u_C - u_A = u_A + \frac{\partial u}{\partial y}dy - u_A = \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Zvislá stena elementu sa takto nakloní o uhol

$$\gamma_1 \approx tan\gamma_1 = \frac{\Delta}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Analogicky pre natočenie vodorovnej steny (obr. 1.3) dostávame

$$\gamma_2 \approx tan\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

a šmyková deformácia v rovine *xy* (celková zmena pravého uhlu elementu v rovine xy) je

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.7}$$

Cyklickou zámenou premenných dostaneme šmykové deformácie v ďalších dvoch rovinách

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.8}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.9}$$

Súhrnne môžeme tieto lineárne zložky deformácie vo všeobecnom bode telesa zapísať do (pseudo)vektora

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{1.10}$$

V maticovom zápise *symetrického tenzora deformácie* sa uvažuje tenzorová šmyková deformácia $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (obr. 1.3) na každej stene elementu (ako polovičná hodnota celkovej šmykovej deformácie) a platí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0{,}5\gamma_{xy} & 0{,}5\gamma_{xz} \\ 0{,}5\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0{,}5\gamma_{yz} \\ 0{,}5\gamma_{xz} & 0{,}5\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

kde členy ε_{ij} získame z jednoduchého indexového zápisu

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{1.12}$$

Pri deformačnej formulácii pevnostnej úlohy, kedy primárnymi neznámymi je pole posunutí, vzťahy (1.10) jednoznačne určujú pole deformácií. Pravda inverzný problém, ktorý sa vyskytuje pri silovej formulácii, je zložitejší, pretože zo šiestich zložiek deformácie možno jednoznačne určiť tri zložky posunutia len pri zohľadnení obmedzení kladených na funkcie zložiek deformácie vo forme tzv. *rovníc kompatibility.*

1.2 Veľké deformácie

Lineárne geometrické vzťahy medzi zložkami posunutia a deformácie (1.10), resp. (1.12) v materiálových bodoch deformovaného telesa dobre vyhovujú pri veľkom množstve pevnostných úloh, pretože dôležité materiály používané v technickej praxi (kovy, betón, drevo, sklo atď.) dovoľujú len malé hodnoty deformácií. Napr. ak jeden meter dlhý prút konštantného prierezu natiahneme o 1 mm vyvoláme v ňom číselne malú pomernú deformáciu $\varepsilon_x = 0{,}001$. Takáto deformácia však v oceľovom prúte vyvolá napätie o veľkosti zhruba 200 MPa, čo je na hranici medze sklzu bežnej ocele, u množstva iných menej tvárnych materiálov je to už za medzou pevnosti.

Pravda, existuje viacero materiálov (napr. priemyselná guma, niektoré plasty) a viacero technologických procesov (napr. rôzne druhy tvárnenia ocele), kedy lineárne geometrické rovnice nevyhovujú a pri simulačných výpočtoch sa musia použiť presnejšie vzťahy. Odvodenie týchto vzťahov nie je jednoduché, existuje viacero postupov i použitých mier deformácie, nie je jednoduchá ani ich aplikácia v MKP. Podrobnejšie o tom píšeme v [2] a v kapitole 4. Tu si uvedieme len geometrický spôsob odvodenia zložiek Green- Lagrangeovho tenzora deformácie, čo už umožňuje určitý pohľad na nelineárne geometrické vzťahy, ale treba povedať, že vlastnosti a možnosti využitia každej miery deformácie sa dajú hlbšie ozrejmiť vždy len spolu s jej silovým partnerom - napätím.

Vráťme sa k obr. 1.2 a upresnime zmenu dĺžky spojnice bodov *A* a *B* tak, že zohľadníme aj vplyv rozdielneho posunutia týchto bodov v smere osi *y*. Tento rozdiel sme označili δ a aproximáciou funkcie v v okolí bodu *A* skráteným Taylorovým radom dostávame

$$v_B = v_A + \frac{\partial v}{\partial x}dx$$

takže

$$\delta = v_B - v_A = \frac{\partial v}{\partial x}dx$$

a deformáciou zmenenú dĺžku spojnice bodov vyjadríme pomocou Pytagorovej vety

$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2} = dx\sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

Zavedieme pomernú deformáciu (len kvôli jednoduchosti zápisu označenú rovnako ako pri malých deformáciách)

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B'}{dx} - 1 = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1$$

Funkciu tvaru $\sqrt{1+x}$ možno rozložiť do radu $1 + x/2 + x^2/8 + \ldots$ a predchádzajúci vzťah, po aproximácii člena s odmocninou dvomi členmi radu, môžeme upraviť na

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \tag{1.13}$$

Analogicky možno ukázať, že platí

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \tag{1.14}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.15}$$

Je vidieť, že keď sú deformácie dostatočne malé, možno kvadratické členy zanedbať a dostaneme zložky deformácie odvodené vpredu pre takýto prípad.

Predchádzajúce vzťahy stačí už len doplniť o analogické členy pre smer osi z a môžme zapísať nezávislé zložky Green-Lagrangeovho tenzora deformácie do vektora

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

alebo v stručnom indexovom tenzorovom zápise

$$\varepsilon_{k\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_\ell}\right) \tag{1.17}$$

Poznámka: Ak prút o dĺžke ℓ_0 rovnobežný s osou x na konci umiestnenom v začiatku súradnicového systému upevneníme a na druhom konci natiahneme o dĺžku $\Delta\ell$ potom sa jeho dĺžka zmení na $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$ a funkcia posunutia bude

$$u(x) = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} x = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} x$$

Podľa vzťahu (1.3), platnom pre malé deformácie, štandardná "inžinierska" miera deformácie prúta je

$$\varepsilon_{ing} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

Zo vzťahu (1.13) pre Greenovu mieru deformácie prúta platí

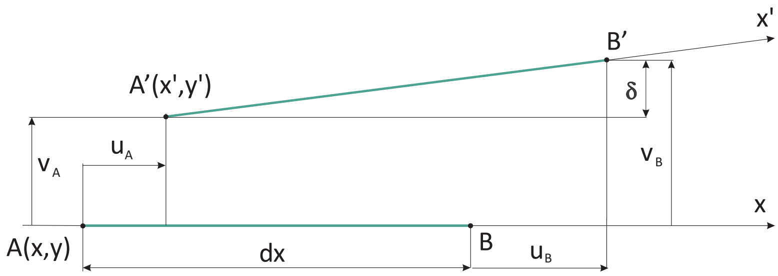
$$\varepsilon_G = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \varepsilon_{ing} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ing}^2 = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2} \qquad (1.18)$$

Pre malé deformácie ($\varepsilon_{ing} << 1$) je rozdiel medzi obidvomi mierami zanedbateľný

$$\varepsilon_{ing} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{(l - l_0)(l + l_0)}{l_0(l + l_0)} = \frac{l^2 - l_0^2}{l_0(l_0 + \Delta l + l_0)} = \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2(2 + \varepsilon_{ing})} \approx \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \varepsilon_G$$

Green-Lagrangeov tenzor deformácie je nezávislý na tuhom posunutí a tuhej rotácii telesa, a preto sa v MKP často výhodne využíva pri riešení úloh s malými deformáciami ale veľkými posunutiami a veľkými rotáciami v tzv. korotačnom súradnicovom systéme [2] .

Poznámka 2: Vráťme sa ešte raz k obrázku, z ktorého sme určovali zložky Green-Lagrangeovho tenzora deformácie:



Obr. 1.4

Green-Lagrangeovskú pomernú deformáciu ε_x vyjadruje, ako sme už uviedli, pomer

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

Je to výraz analogický s malými deformáciami, ale všimnime si, že teraz smer spojnice *A'B'*, a teda smer ε_x , je iný ako smer *AB*, resp. *dx*. Zložka má smer totožný so smerom x' , do ktorého sa natočila úsečka *dx* účinkom zaťaženia. Ak pri ďalšom zaťažovacom kroku sa úsečka len posunie a natočí, bez zmeny vzdialenosti $A'B'$, potom sa veľkosť deformácie nezmení. Zložky Green-Lagrangeovskej deformácie sledujú svojim smerom rotáciu elementu (materiálovej častice), ale ich veľkosť je na tejto rotácii (a samozrejme i na tuhom posunutí) nezávislá. Platí to potom i pre ich partnerské (energeticky zviazané) napäťové zložky *druhého Piola-Kirchhoffovho napätia* (kapitola 5).

2 Matice nelineárneho prútového prvku (veľké posunutia, veľké rotácie, malé deformácie)

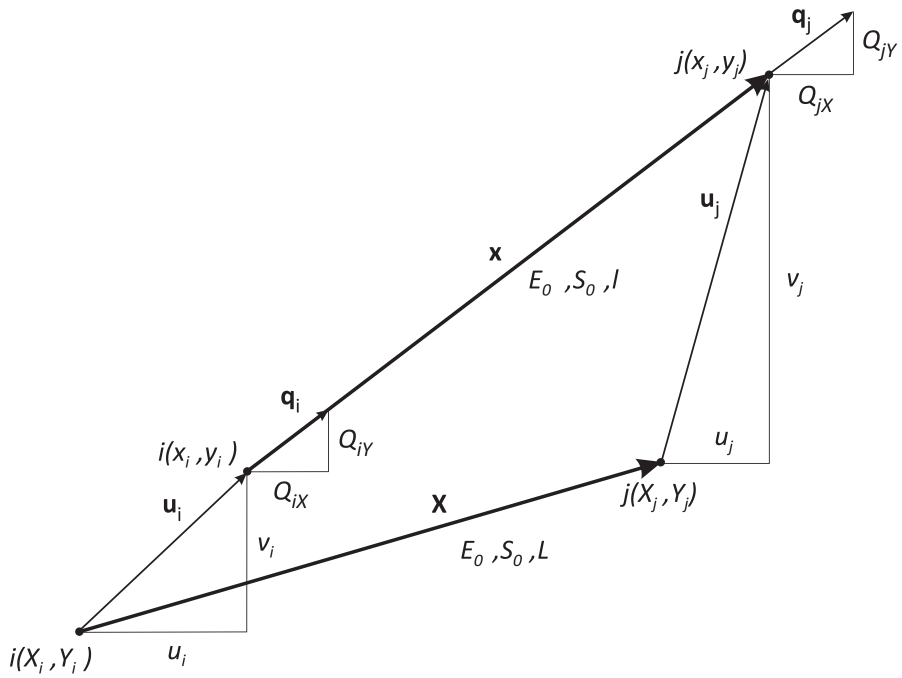
V kapitole 7 práce [2] sme sa zaoberali rovinným prútovým prvkom pre veľké posunutia a rotácie. Uviedli sme, že pre prúty (prútové konečné prvky) s *konštantnou hodnotou pomernej deformácie* po ich dĺžke je tvorba matíc prvku pomerne jednoduchá, pretože nie je nutné vyjadrovať posunutie ani deformáciu všeobecného bodu prúta. V takomto prípade sa deformácia vyjadruje pomocou súradníc a posunutí koncových bodov prúta. Možno tiež zaviesť predpoklad (aproximáciu) o nemennosti prierezu prúta a modulu pružnosti počas deformácie a integrály vykonávať po začiatočnom objeme, resp. po začiatočnej dĺžke prúta. Dokumentovali sme to na tvorbe matíc rovinného prútového prvku vhodného na riešenie úloh s veľkými posunutiami a rotáciami a *malými deformáciami*. Použili sme Greenovu mierku deformácie a pre určenie matíc prvku sme využili *princíp minima celkovej energie* prúta. Voľba Greenovej deformácie formuláciu zjednodušila natoľko, že členy matíc prvku sa dali vyjadriť explicitne pomocou všeobecných parametrov prvku.

Vychádzajúc z práce [4] odvodíme teraz základné matice takéhoto prvku pomocou vektorového počtu s využitím *princípu virtuálnych posunutí*. Je to elegantný, i keď trochu menej názorný postup, ktorým možno súčasne vytvoriť matice rovinného i priestorového prvku.

2.1 Vektor vnútorných uzlových síl prvku

Uvažujme tesne vedľa uzlov vyrezaný ľubovoľný prvok *rovinnej* prútovej konštrukcie (obr. 2.1), ktorého dĺžka je v začiatočnej (nezaťaženej) polohe určená veľkosťou vektora

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i \tag{2.1}$$



Obr. 2.1

kde

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_i & Y_i \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} X_j & Y_j \end{bmatrix}^T \tag{2.2}$$

a kvadrát dĺžky prúta je

$$L^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tag{2.3}$$

Pre vektor $\mathbf{x}$, udávajúci dlžku prúta po zaťažení, platí

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \tag{2.4}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i \end{aligned} \tag{2.5}$$

takže kvadrát dĺžky prúta sa účinkom zaťaženia zmenil na

$$\ell^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{X} + \mathbf{u})^T (\mathbf{X} + \mathbf{u}) \tag{2.6}$$

Teraz už môžeme vyjadriť deformáciu prúta pomocou ľubovoľnej z používaných jednorozmerných mierok (kap. 6 [2]); kvôli jednoduchosti zvolíme Greenovu mierku (1.18)

$$\varepsilon_G = \frac{\ell^2 - L^2}{2L^2} = \frac{1}{L^2}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{u}\right) = \frac{1}{L^2}\left(\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^T \mathbf{u} = \frac{1}{2L^2}(\mathbf{X} + \mathbf{x})^T \mathbf{u} \tag{2.7}$$

ktorej variácia je

$$\delta\varepsilon_G = \frac{1}{L^2}(\mathbf{X} + \mathbf{u})^T \delta\mathbf{u} = \frac{1}{L^2}\mathbf{x}^T \delta\mathbf{u} \tag{2.8}$$

Prút je mysleným rezom vyrezaný zo sústavy tesne vedla uzlov a jeho rovnovážny stav po zaťažení zabezpečujú vnútorné uzlové sily sily $\mathbf{q}_i$ a $\mathbf{q}_j$ (ktoré sa v tomto prípade chovajú ako vonkajšie koncové sily prúta - pozri obr. 2.1) a pre jeho rovnováhu platí *princíp virtuálnych posunutí*

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext} = \int_L N \delta\varepsilon_G d\ell - \mathbf{q}_i^T \delta\mathbf{u}_i - \mathbf{q}_j^T \delta\mathbf{u}_j \tag{2.9}$$

Pretože riešime úlohu s malými deformáciami možno v (2.9) integrovať po začiatočnej dĺžke prúta L a po dosadení $\delta\varepsilon_G$ z (2.8) dostávame

$$\delta W = \int_0^L \frac{1}{L^2}\left(N\mathbf{x}^T\right)\left(\delta\mathbf{u}_j - \delta\mathbf{u}_i\right) dL - \mathbf{q}_i^T \delta\mathbf{u}_i - \mathbf{q}_j^T \delta\mathbf{u}_j = 0 \tag{2.10}$$

Transponovanie tejto rovnice a úprava dáva

$$\delta W = \delta\mathbf{u}_i^T \left(\int_0^L \frac{1}{L^2} N\mathbf{x} dL - \mathbf{q}_i \right) + \delta\mathbf{u}_j^T \left(\int_0^L \frac{1}{L^2} N\mathbf{x} dL - \mathbf{q}_j \right) = 0 \tag{2.11}$$

Po vhodnej voľbe virtuálnych posunutí (jednotkové a nulové) a vyjadrení integrálov dostaneme dve rovnice

$$\mathbf{q}_i = -N\frac{\mathbf{x}}{L} = -N\frac{\ell}{L}\mathbf{n}, \qquad \mathbf{q}_j = N\frac{\mathbf{x}}{L} = N\frac{\ell}{L}\mathbf{n} \tag{2.12}$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor v smere prúta v aktuálnej (zaťaženej) polohe. Osová sila v smere prúta pri použití Greenovej deformácie takto je

$$N_G = N\frac{\ell}{L} \tag{2.13}$$

Skreslenie sily *N* vyvolané pomerom ℓ/L je pri úlohách s malou deformáciou zanedbateľne malé

Ak pre lineárne elastický materiál zvolíme jednoduchú konštitutívnu rovnicu

$$N = E_0 S_0 \varepsilon_G \tag{2.14}$$

potom pre vnútorné uzlové sily prúta podľa (2.12) platí

$$\mathbf{q}_i = -E_0 S_0 \varepsilon_G \frac{\mathbf{x}}{L} \qquad \mathbf{q}_j = E_0 S_0 \varepsilon_G \frac{\mathbf{x}}{L} \tag{2.15}$$

Po dosadení za ε_G a $\mathbf{x}$ by sa názorne ukázala nelineárna závislosť zložiek týchto síl od zložiek posunutia.

Pravda, v MKP sa pracuje s kompletnými vektormi (stĺpcovými maticami) *prvku*

$$\mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

kde uzlové vektory sú jedno, dvoj, alebo trojčlenné, podľa toho, či sa prvok využíva v jedno, dvoj, alebo trojrozmernom priestore. Doteraz odvodené vzťahy možno využiť aj s týmito vektormi pomocou matice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matica 2x2 pri rovinnom prúte a 3x3 pri priestorovom prúte. Aplikáciou tejto matice v (2.3), (2.7) a (2.15) dostaneme

$$L_e^2 = \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}_e^T\mathbf{P}\mathbf{X}_e \tag{2.18}$$

$$\varepsilon_G^e = \frac{1}{2L_e^2}\left(\mathbf{X}_e + \mathbf{x}_e\right)^T \mathbf{P}\mathbf{u}_e \tag{2.19}$$

a nakoniec *vektor vnútorných uzlových síl prvku* vyjadrený pomocou priestorových (aktuálnych) súradníc

$$\mathbf{q}_{akt}^e = \frac{E_e S_e \varepsilon_G^e}{L_e}\mathbf{P}\mathbf{x}_e \tag{2.20}$$

a pomocou materiálových (začiatočných) súradníc

$$\mathbf{q}_e = \frac{E_e S_e \varepsilon_G^e}{L_e}\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_e + \mathbf{u}_e\right) \tag{2.21}$$

2.2 Tangenciálna matica tuhosti prvku

Tangenciálnu maticu tuhosti prvku vyjadríme ako vzťah medzi diferenciálnym prírastkom posunutia prvku $d\mathbf{u} = d(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)$ a diferenciálnym prírastkom vektora vnútorných uzlových síl $d\mathbf{q}$. Podľa (2.14) a (2.15) dostávame

$$d\mathbf{q}_i = -\mathbf{x}\frac{dN}{L} - \frac{N}{L}d\mathbf{x} = \left(-\frac{\mathbf{x}}{L}\frac{dN}{d\mathbf{u}} + \frac{N}{L}\mathbf{I}\right)d(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \tag{2.22}$$

$$d\mathbf{q}_j = -d\mathbf{q}_i \tag{2.23}$$

a pre deriváciu N podľa zložiek $\mathbf{u}$ s ohľadom na (2.14) a (2.7)

$$\frac{dN}{d\mathbf{u}} = E_e S_e \frac{d\varepsilon_G^e}{d\mathbf{u}} = \frac{E_e S_e}{L_e^2}\left(\mathbf{X}^T + \mathbf{u}^T\right) = \frac{E_e S_e}{L_e^2}\mathbf{x}^T \tag{2.24}$$

Po dosadení tohto výrazu do (2.22) a (2.23) dostávame výsledok

$$d\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} d\mathbf{q}_i \\ d\mathbf{q}_j \end{bmatrix} = \left(\frac{E_e S_e}{L_e^3}\begin{bmatrix} \mathbf{x}\mathbf{x}^T & -\mathbf{x}\mathbf{x}^T \\ -\mathbf{x}\mathbf{x}^T & \mathbf{x}\mathbf{x}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{L}\mathbf{P}\right)\begin{bmatrix} d\mathbf{u}_i \\ d\mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{akt}^e d\mathbf{u}_e \tag{2.25}$$

kde $\mathbf{K}_{akt}^e$ je tangenciálna matica prvku vyjadrená pomocou *priestorových (aktuálnych) súradníc* prvku (2.4), pričom prvá matica v tomto vzťahu sa nazýva *matica materiálovej tuhosti* a druhá je *matica geometrickej tuhosti*.

Maticu tuhosti prvku vyjadrenú pomocou *materiálových (začiatočných) súradníc* dostaneme, keď do (2.25) dosadíme (2.4)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_u^e + \mathbf{K}_\sigma^e \tag{2.26}$$

Je zložená z lineárnej matice tuhosti

$$\mathbf{K}_0^e = \frac{E_e S_e}{L_e^3}\begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{X}^T & -\mathbf{X}\mathbf{X}^T \\ -\mathbf{X}\mathbf{X}^T & \mathbf{X}\mathbf{X}^T \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

matice tuhosti začiatočného posunutia

$$\mathbf{K}_u^e = \frac{E_e S_e}{L_e^3}\begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X}^T + \mathbf{u}\mathbf{u}^T & -\left(\mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X} + \mathbf{u}\mathbf{u}^T\right) \\ -\left(\mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X} + \mathbf{u}\mathbf{u}^T\right) & \mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X}^T + \mathbf{u}\mathbf{u}^T \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

matice tuhosti začiatočného napätia

$$\mathbf{K}_\sigma^e = \frac{N_e}{L_e}\mathbf{P} = \frac{N_e}{L_e}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Matica $\mathbf{K}^e$ sa využíva pri tzv. totálnej Lagrangeovskej formulácii (kapitola 6) a riešení prútových konštrukcií pomocou MKP.

2.3 Totálna a aktualizovaná Lagrangeovská formulácia

Pri numerickej analýze nelineárnych úloh pomocou MKP sa vonkajšie zaťaženie obyčajne rozdelí na časti a úloha sa rieši vo viacerých zaťažovacích krokoch. Dôvodom je buď to, že vonkajšie zaťaženie má nelineárny priebeh, alebo situácia, kedy iteračná procedúra nie je schopná s plným zaťažením konvergovať v jednom zaťažovacom kroku. Pri Lagrangeovom popise nelineárneho deformačného pohybu telesa sa v takomto prípade využívajú dve základné formulácie na určenie jeho deformačného a napäťového stavu:

- totálna Lagrangeovská formulácia (TLF)
- aktualizovaná (updated) Lagrangeovská formulácia (ULF)

V oboch formuláciách sa pri aktuálnom zťažovacom kroku využíva vzťažná (známa) konfigurácia. Pri TLF všetky veličiny (posunutia, sily, napätia) sa vyjadrujú pomocou *začiatočnej* nemennej konfigurácie a mierami deformácie a napätia sú najčastejšie Green-Lagrangeov tenzor deformácie a druhé Piola-Kirchhoffovo napätie. Pri ULF sa v aktuálnom zaťažovacom kroku upravuje *geometria z predchádzajúceho kroku*, ktorá potom slúži ako vzťažná konfigurácia pre ďalší zaťažovací krok. Pretože takto pri ULF je vzťažná konfigurácia zdeformovaná, miery deformácie a napätia sú logaritmická alebo Almansiho deformácia (kapitola 4) a Cauchyho napätie. Obe metódy výpočtu majú svoje výhody i nevýhody a voľba formulácie závisí od typu úlohy a použitého materiálového modelu.

2.3.1 Riešenie nelineárnej prútovej sústavy pomocou totálnej Lagrangeovskej formulácie

Princíp TLF si ukážeme na príklade numerického riešenia jednoduchej geometricky nelineárnej prútovej sústavy s veľkými posunutiami a rotáciami, ale malými deformáciami. Pre potreby programovania vyjadríme najprv explicitne vektor vnútorných uzlových síl a tangenciálnu maticu všeobecného prvku rovinnej prútovej konštrukcie, ktorý sa v nezaťaženom stave nachádza v začiatočnej (referenčnej) konfigurácii určenej súradnicami uzlových bodov *i* a *j* (obr 2.1). Po zaťažení sa prút dostane do aktuálnej polohy a zložky posunutí uzlových bodov, ktoré vzniknú pri tomto premiestnení, usporiadame do vektora

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \end{bmatrix}^T \tag{2.30}$$

Ak zavedieme $X_{ji} = X_j - X_i$, $Y_{ji} = Y_j - Y_i$, $u_{ji} = u_j - u_i$, $v_{ji} = v_j - v_i$, potom pre kvadráty dĺžok nezaťaženého a zaťaženého prúta platí

$$L_e^2 = X_{ji}^2 + Y_{ji}^2$$

$$\ell_e^2 = \left(X_{ji} + u_{ji}\right)^2 + \left(Y_{ji} + v_{ji}\right)^2$$

Zo zmeny dĺžky prúta možno vyjadriť Greenovo pomerné predĺženie prúta v aktuálnej polohe

$$\varepsilon_G^e = \frac{\ell_e^2 - L_e^2}{2L_e^2} \tag{2.31}$$

Zo (2.21) dostávame vektor vnútorných uslových síl prvku

$$\mathbf{q}_e = \frac{E_e S_e \varepsilon_G^e}{L_e}\mathbf{P}(\mathbf{X}_e + \mathbf{u}_e) = \frac{E_e S_e \varepsilon_G^e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i + u_i \\ Y_i + v_i \\ X_j + u_j \\ Y_j + u_j \end{bmatrix} = S_e \sigma_G^e \begin{bmatrix} -k_x \\ -k_y \\ k_x \\ k_y \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

kde $k_X = (X_{ji} + u_{ji}) / L_e$, $k_Y = (Y_{ji} + v_{ji}) / L_e$ a vzhľadom na malé deformácie sme pre napätie prúta zaviedli $\sigma_G^e = E_e \varepsilon_G^e$.

Tangenciálnu maticu prvku a jej časti možno vyjadriť zo vzťahov (2.26) až (2.29)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_u^e + \mathbf{K}_\sigma^e = \frac{E_e S_e}{L_e^3}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix} + \frac{E_e S_e}{L_e^3}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix} + \frac{S_e \sigma_G^e}{L_e}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \qquad (2.33)$$

kde

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} X_{ji} \\ Y_{ji} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{ji} & Y_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ji}^2 & X_{ji}Y_{ji} \\ X_{ji}Y_{ji} & Y_{ji}^2 \end{bmatrix} \qquad (2.34)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X}^T + \mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 2X_{ji}u_{ji} + u_{ji}^2 & X_{ji}v_{ji} + Y_{ji}u_{ji} + u_{ji}v_{ji} \\ X_{ji}v_{ji} + Y_{ji}u_{ji} + u_{ji}v_{ji} & 2Y_{ji}v_{ji} + v_{ji}^2 \end{bmatrix} \qquad (2.35)$$

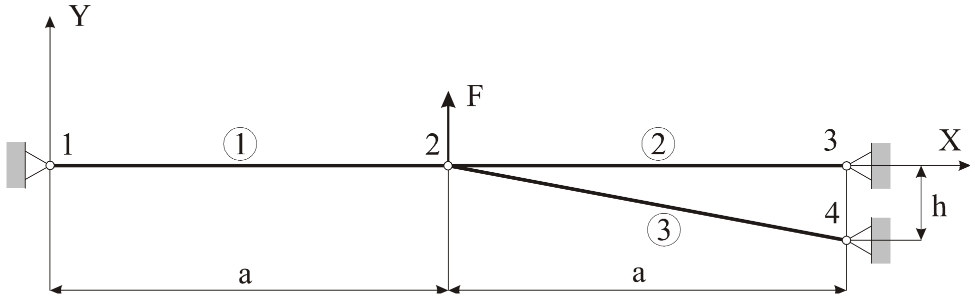
Pri TLF nie je potrebné vyčleňovať z materiálovej matice prvku maticu začiatočných posunutí a platí

$$\mathbf{K}_M^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_u^e = \frac{E_e S_e}{L_e^3}\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{B} & (-\mathbf{A}+\mathbf{B}) \\ (-\mathbf{A}+\mathbf{B}) & \mathbf{A}+\mathbf{B} \end{bmatrix} = \frac{E_e S_e}{L_e}\begin{bmatrix} k_x^2 & k_x k_y & -k_x^2 & -k_x k_y \\ k_x k_y & k_y^2 & -k_x k_y & -k_y^2 \\ -k_x^2 & -k_x k_y & k_x^2 & k_x k_y \\ -k_x k_y & -k_y^2 & k_x k_y & k_y^2 \end{bmatrix} \qquad (2.36)$$

2.3.2 Výpočet prútovej sústavy v programovom prostredí Mathematica 5

Odvodenie vektora vnútorných uzlových síl a tangenciálnej matice elementu už umožňuje vytvorenie nelineárneho programu MKP pre riešenie telies tvorených z takýchto prvkov. Vo zvolenom programovacom prostredí je to už len otázka algoritmizácie a programovania. V [2] sme prvok zaradili do fortranovského programu NELMKP, tu ho využijeme na tvorbu jednoduchého programu v programovacom prostredí bežne prístupného systému *Mathematica 5*. Základ programu, aj príklad preberáme z [2], ale program sme upravili pre prácu s viacerými zaťažujúcimi krokmi kvôli demonštrácii totálnej Lagrangeovskej formulácie.

Pre prútovú sústavu na obr. 2.2 treba určiť posunutie pôsobiska sily F a veľkosť síl v prútoch, keď je dané a = 1000 mm, h = 50 mm. Materiál a prierezy prútov sú rovnaké s hodnotami E = 200000 MPa, S = 100 mm^2 . Úlohu treba riešiť a výsledky vypísať v jednom behu pre hodnoty sily F = 2000, 3000 a 4000 N. V programe treba použiť totálnu Lagrangeovskú formuláciu.



Obr. 2.2

Program na riešenie úlohy v Mathematice 5 a vypočítané výsledky

```
(* PODPROGRAMY/FUNKCIE PROGRAMU *)

(*Vektor vnútorných uzlových síl telesa/konštrukcie*)
 VektorVnutUzlSíl[a_,h_,c_,d_,E0_,S0_,u_,v_,print_]:=Module[{q},
    q=Table[0,{2},{1}];
    qe1=Vektorqe[0,0,a,0,0,0,u+c,v+d,E0,S0,print,1];
    q=AdíciaVnútUzlSíl[qe1,{0,0,1,2},q];
    qe2=Vektorqe[a,0,2a,0,u+c,v+d,0,0,E0,S0,print,2];
    q=AdíciaVnútUzlSíl[qe2,{1,2,0,0},q];
    qe3=Vektorqe[a,0,2a,-h,u+c,v+d,0,0,E0,S0,print,3];
    q=AdíciaVnútUzlSíl[qe3,{1,2,0,0},q];
    Return[q]];

(*Vektor vnútorných uzlových síl prvku*)
  Vektorqe[xi_,yi_,xj_,yj_,ui_,vi_,uj_,vj_,E0_,S0_,print_,el_]:=
    Module[{xji,yji,uji,vji,L0,L,kx,ky,qe},
    xji=xj-xi;yji=yj-yi;uji=uj-ui;vji=vj-vi;
    L=Sqrt[(xji+uji)^2+(yji+vji)^2];L0=Sqrt[xji^2+yji^2];
    eG=(L^2-L0^2)/(2*L0^2);
    sigG = E0*eG;
    If[print==1,Print["NG" el," = ", S0*sigG, " n"]];
    kx=(xji+uji)/L0;ky=(yji+vji)/L0;
    qe=S0*sigG*{{-kx},{-ky},{kx},{ky}};
    Return[qe]];

(*Príspevok prvku do vektora vnútorných uzlových síl
telesa/konštrukcie*)
    AdíciaVnútUzlSíl[pe_,kod_,p_]:=Module[{i,ii,neldof,q},q=p;
    neldof=Dimensions[kod][[1]];
    For[i=1,i≤neldof,i++,ii=kod[[i]];
      If[ii>0,q[[ii,1]]+=pe[[i,1]]]];
    Return[q]];

(*Tangenciálna matica telesa/konštrukcie*)
```

```
TangMatTelesa[a_,h_,c_,d_,E0_,S0_,u_,v_]:=
Module[{Ke1,Ke2,Ke3,K},K=Table[0,{2},{2}];
Ke1=TangMatPrvku[0,0,a,0,0,0,u+c,v+d,E0,S0];
K=AdíciaMatícPrvku[Ke1,{0,0,1,2},K];
Ke2=TangMatPrvku[a,0,2a,0,u+c,v+d,0,0,E0,S0];
K=AdíciaMatícPrvku[Ke2,{1,2,0,0},K];
Ke3=TangMatPrvku[a,0,2a,-h,u+c,v+d,0,0,E0,S0];
K=AdíciaMatícPrvku[Ke3,{1,2,0,0},K];
Return[K]];

(*Tangenciálna matica prvku*)

TangMatPrvku[xi_,yi_,xj_,yj_,ui_,vi_,uj_,vj_,E0_,S0_]:=
Module[{xji,yji,uji,vji,L0,L,kx,ky},
xji=xj-xi;yji=yj-yi;uji=uj-ui;vji=vj-vi;
L=Sqrt[(xji+uji)^2+(yji+vji)^2];L0=Sqrt[xji^2+yji^2];
eG=(L^2-L0^2)/(2*L0^2);
sigG= E0*eG;
kx=(xji+uji)/L0;ky=(yji+vji)/L0;
konst=E0*S0/L0^3;
KeMat=((E0*S0)/L0)*{{kx*kx, kx*ky, -(kx*kx), -(kx*ky)},
                    {kx*ky, ky*ky, -(ky*kx), -(ky*ky)},
                    {-(kx*kx), -(ky*kx), kx*kx, ky*kx},
                    {-(kx*ky), -(ky*ky), ky*kx, ky*ky}};
KeGeo=((S0*sigG)/L0)*{{1,0,-1,0},
                     {0,1,0,-1},
                     {-1,0,1,0},
                     {0,-1,0,1}};
KeTang=KeMat+KeGeo;
Return[KeTang];];

(*Príspevok prvku do tangenciálnej matice telesa/konštrukcie*)

AdíciaMatícPrvku[KeTang_,kod_,Km_]:=
Module[{i,j,ii,jj,NVE,K},K=Km;
NVE=Length[kod];
For[i=1,i≤NVE,i++,ii=kod[[i]];
  For[j=i,j≤NVE,j++,jj=kod[[j]];
  If[ii>0&&jj>0,K[[jj,ii]]=K[[ii,jj]]+=KeTang[[i,j]]]]];
Return[K]];
```

```
(*Iteračné riešenie sústavy nelineárnych rovníc Newton-
Raphsonovou metódou*)
    NewtonRaphson[u0_,tol_,max_]:=Module[{norma=1,i=0},
    ux={u0[[1]],u0[[2]]};
    Ktang[{u_,v_}]=K;
      While[And[i<max,norma>tol],
        u1=ux-(Inverse[Ktang[ux]]).R[ux];
        norma=Sqrt[(u1-ux).(u1-ux)];
        ux=u1;
        i=i+1;]
    Print["  Počet iterácií = ",i-1];
    Print["  Výsledný vektor nerovnovážnych síl R",i-1," =
",R[ux]];
    Print["  Prírastok posunutí U",i-1," = ",ux]; ];
```

```
(* VLASTNÝ NUMERICKÝ VÝPOČET *)
    F=0; a=1000; h=50; E0=200000; S=100;
    ΔF[1]=2000;
    ΔF[2]=1000;
    ΔF[3]=1000;
    U[1]=0;
    V[1]=0;
    Print["VÝSLEDKY VYPOČTU"];
(* Cyklus s tromi zaťažujúcimi krokmi *)
    For[i=1,i<4,
     Print["krok = ",i];
     F=F+ΔF[i];
     q=VektorVnutUzlSíl[a,h,U[i],V[i],E0,S,u,v,0];
     R[{u_,v_}]={q[[1]][[1]],q[[2]][[1]]-F};
     K=TangMatTelesa[a,h,U[i],V[i],E0,S,u,v];
     Iterácia=NewtonRaphson[{0.,0.},0.001,30];
     U[i+1]=U[i]+u1[[1]];
     V[i+1]=V[i]+u1[[2]];
     Print["  Výsledné zložky posunutia voľného uzla a sily v
průtoch"];
     Print["     U =  ",U[i+1]," mm","   V =  ",V[i+1]," mm"];
     q=VektorVnutUzlSíl[a,h,U[i],V[i],E0,S,u1[[1]],u1[[2]],1];
    i++];
```

VÝSLEDKY VÝPOČTU

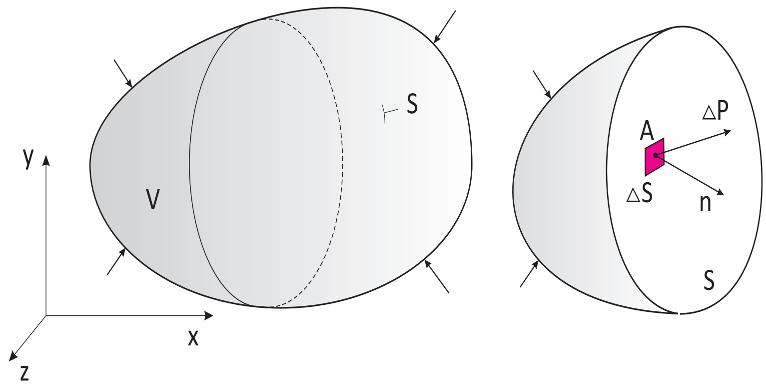
```
krok =  1
   Počet iterácií =  5
   Výsledný vektor nerovnovážnych síl R 5  =
      -6.72658x10^-6, 2.35265x10^-6
   Prírastok posunutí U 5  =  {0.542913,25.9424}
   Výsledné zložky posunutia voľného uzla a sily v prútoch
      U =   0.542913  mm    V =   25.9424  mm
      NG1  =  17591.3  N
      NG2  =  -4125.22  N
      NG3  =  21762.8  N
 krok =  2
   Počet iterácií =  3
   Výsledný vektor nerovnovážnych síl R 3  =
       2.54659x10^-10, 1.5109x10^-10
   Prírastok posunutí U 3  =  {0.164869,6.27864}
   Výsledné zložky posunutia voľného uzla a sily v prútoch
      U =   0.707782  mm    V =   32.2211  mm
      NG1  =  24542.6  N
      NG2  =  -3768.66  N
      NG3  =  28381.4  N
 krok =  3
   Počet iterácií =  3
   Výsledný vektor nerovnovážnych síl R 3  =
       3.79077x10^-9, -2.06683x10^-10
   Prírastok posunutí U 3  =  {0.141086,5.01706}
   Výsledné zložky posunutia voľného uzla a sily v prútoch
      U =   0.848868  mm    V =   37.2381  mm
      NG1  =  30851.3  N
      NG2  =  -3103.38  N   NG3  =  34049.6  N
```

Bližšie informácie o programe i príklade možno nájsť v [2]. Tu uvádzame len niekoľko základných poznámok. Predovšetkým si treba všimnúť výkonnú časť programu s názvom VLASTNÝ NUMERICKÝ VÝPOČET. Všetko predtým sú funkcie programu, ktoré sú volané so zadanými hodnotami z tejto časti. Po zadaní vstupných hodnôt sa rozbehne cyklus troch zaťažovacích krokov. V prvom cykle so silou F = 2000 N sa vytvoria vzťahy pre globálny vektor vnútorných uzlových síl $\mathbf{q}$ a globálnu maticu tuhosti $\mathbf{K}$ s neznámymi zložkami posunutiami voľného uzla u a v. Zavolaním funkcie *NewtonRaphson* so začiatočnými nulovými hodnotami u a v sa rozbehne Newton-Raphsonova iterácia a vypočítajú sa a vypíšu *prírastky* u a v pre prvé zaťaženie F = 2000 N. Zavolaním funkcie pre výpočet $\mathbf{q}$ s týmito hodnotami sa vypočítajú a vypíšu sily v prútoch pre prvé zaťaženie. Potom sa cyklus opakuje s novou hodnotou sily F, ale vo vektore $\mathbf{q}$, vektore nerovnovážnych uzlových síl $\mathbf{R}$ a matici $\mathbf{K}$ sa už zohľadnia vypočítané hodnoty posunutí. Začiatočná konfigurácia prútovej sústavy (určovaná z hodnôt a a h), ako vidieť z volania funkcií $\mathbf{q}$ a $\mathbf{K}$, sa pri TLF nemení. Vzhľadom na typ úlohy a malú mieru nelinearity, možno výsledok pre silu F = 4000 N dosiahnúť aj v jednom kroku a výsledok je rovnaký ako v [2], čo zároveň aj potvrdzuje správnu programovú aplikáciu TLF.

3 Napätie. Diferenciálne rovnice rovnováhy. Princíp virtuálnych posunutí

3.1 Napätie

Uvažujme v kartézskom súradnicovom systéme priestorové deformovateľné teleso a zaťažme ho statickou sústavou vonkajších síl. Sústava zaťažujúcich síl je v rovnováhe, obsahuje i reakčné sily v miestach upevnenia telesa. Účinkom týchto síl sa teleso zdeformuje a jeho východzia objemová a plošná konfigurácia V_0, S_0 sa zmení na aktuálnu konfiguráciu V, S (obr. 3.1).



Obr. 3.1 *Aktuálna (zdeformovaná) konfigurácia telesa*

Keď je teleso v rovnováhe, potom musí byť v rovnováhe aj každá jeho časť. Ak teleso rozrežeme *mysleným* rezom na dve časti, tak je zrejmé, že pokiaľ tieto časti majú zostať naďalej v rovnováhe, musia na seba pôsobiť v myslenom reze *vnútornými* silami, ktoré ich rovnováhu zabezpečujú. Zo šiestich statických podmienok rovnováhy napísaných pre odrezanú časť vieme síce v myslenom reze určiť výslednice vnútorných síl (čo v elementárnej náuke o pružnosti a pevnosti pomáha pri riešení tzv. základných prípadov namáhania telies jednoduchých tvarov), vo všeobecnom prípade však nevieme, ako sú vnútorné sily rozdelené po uvažovanom reze a navyše treba vytvoriť aj mierku na posudzovanie miery namáhania telesa v jeho všeobecnom bode.

Ak v myslenom reze vyčleníme okolo bodu A veľmi malú plošku ΔS, situácia sa zjednoduší. Na malej ploške možno vnútorné sily spriemerovať a nahradiť silovou výslednicou $\Delta\mathbf{P}$ (na veľmi malej ploške je momentový účinok vnútorných síl zanedbateľný) a za mieru namáhania telesa v tomto mieste sa potom volí pomer $\Delta\mathbf{P}/\Delta S$, ktorý sa pri limitnom zmenšení plochy ΔS nazýva *napätie*

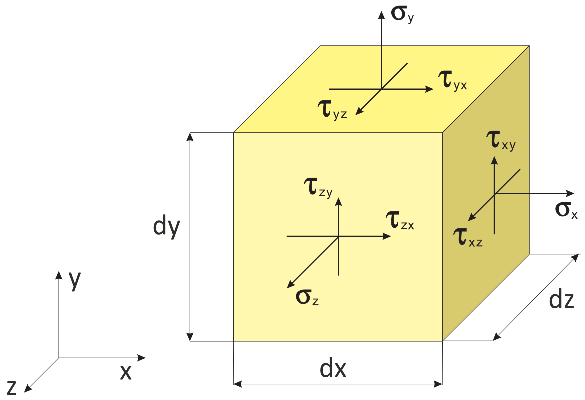
$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{P}}{dS} \tag{3.1}$$

Napätie vyjadrené tvare (3.1) je silový vektor vzťahovaný na jednotku plochy, ktorý však je ešte aj funkciou smeru normály rezovej plochy (jej ortogonálneho jednotkového vektora $\mathbf{n}$), pretože cez bod A možno preložiť nekonečne veľa rezových rovín.

3.2 Transformácia napätia na pravouhlé roviny diferenciálneho elementu

Predpokladajme špeciány prípad, keď rezové roviny v bode A sú rovnobežné so súradnicovými rovinami. V takom prípade možno vektory napätia na troch elementárnych ploškách $dS_x = dydz$, $dS_y = dxdz$ a $dS_z = dxdy$ (obr. 3.2) rozložiť do zložiek

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{n}=\mathbf{e}_1) &= \sigma_x \mathbf{e}_1 + \tau_{xy}\mathbf{e}_2 + \tau_{xz}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{p}(\mathbf{n}=\mathbf{e}_2) &= \tau_{yx} \mathbf{e}_1 + \sigma_{y}\mathbf{e}_2 + \tau_{yz}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{p}(\mathbf{n}=\mathbf{e}_3) &= \tau_{zx} \mathbf{e}_1 + \tau_{zy}\mathbf{e}_2 + \sigma_{z}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{3.2}$$



Obr. 3.2

kde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sú jednotkové vektory v smere súradnicových osí a deväť hodnôt σ_x, τ_{xy}, ..., σ_z sú zložky vektorov napätia na diferenciálnych ploškách bodu telesa, ako je to znázornené na obrázku. Napäťové zložky σ_x, σ_y, σ_z sa nazývajú *normálové napätia*, zložky τ_{xy} τ_{yx} τ_{xz} τ_{zx} τ_{yz} τ_{zy} sú *šmykové napätia*. Napätie má vlastnosti tenzora druhého rádu a zapisuje sa ako matica 3x3 s rôznym značením a indexovaním jej členov

$$\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Dá sa dokázať, že je to symetrický tenzor

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} \end{aligned} \tag{3.4}$$

a preto sa v aplikačnej mechanike, i v MKP, pracuje len so šiestimi zložkami napätia, často zapisovaných do stĺpcovej matice - (pseudo)vektora

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T \tag{3.5}$$

3.3 Vyjadrenie všeobecného napätia v jeho rovine pomocou zložiek

Cauchyho veta o napätí hovorí, že pomocou napätí v troch na sebe nezávislých rovinách idúcich cez bod *A*, možno jednoznačne vyjadriť napätie v ľubovoľnej rezovej rovine idúcej cez tento bod. Vyjadrime jednotkový normálový vektor takejto všeobecnej rezovej roviny v tvare

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_1 + n_y \mathbf{e}_2 + n_z \mathbf{e}_3 \tag{3.6}$$

kde n_x, n_y, n_z sú smerové kosínusy vektora $\mathbf{n}$ v danom súradnicovom systéme. Potom napätie v rezovej rovine bude súčtom priemetov vektorov napätia z troch rovín elementu do smeru vektora $\mathbf{n}$

$$\mathbf{p} = n_x \mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_1) + n_y \mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_2) + n_z \mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3)$$

čo s využitím (3.2) dáva

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = & \left(\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z\right)\mathbf{e}_1 \\ & + \left(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z\right)\mathbf{e}_2 \\ & + \left(\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z\right)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{3.7}$$

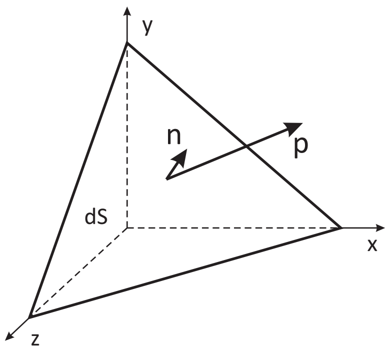
a v stručnom skalárnom indexovom zápise

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \tag{3.8}$$

Je to napätie, ktoré vyjadruje účinok odstránenej časti elementu (odstránených zložiek tenzora napätia) na rovinu *dS* (obr. 3.3). Často sa využíva pri písaní silových okrajových podmienok (pre plošný tlak alebo ťah) na povrchu telesa - pozri napr. (3.15).

3.4 Analýza napätia v bode telesa

Pri analýze napätosti v bode telesa (z rovníc rovnováhy odrezanej časti elementu na obr. 3.3)



Obr. 3.3

sa využíva vzťah (3.8) v ktorom sa zohľadňuje symetria tenzora napätia a platí

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \tag{3.9}$$

alebo v názornejšom maticovom tvare už len so šiestimi nezávislými zložkami napätia

$$[\sigma]\{\mathbf{n}\}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_x\\ p_y\\ p_z\end{Bmatrix}=\{\mathbf{p}\} \tag{3.10}$$

Nakláňaním rezovej roviny (zmenou smerových kosínusov n_x, n_y, n_z) môžeme pri zadanom vektore napätia $\{\mathbf{p}\}$ skúmať zmeny zložiek napätia a vyjadrovať ich hodnoty pri špeciálnych typoch napätosti.

3.5 Diferenciálne rovnice rovnováhy

V mechanike kontinua pri tzv. *úlohe okrajových hodnôt* poznáme hodnoty (funkcie) posunutí a zaťažení na okraji telesa a hľadáme funkcie posunutí, deformácií a napätí vo vnútri telesa. Pri analytickom riešení úlohy sa často vychádza z (parciálnych) diferenciálnych rovníc úlohy (hľadané funkcie sú vyjadrené vo forme gradientov funkcií), ktoré treba riešiť pri zadaných okrajových, príp. i začiatočných podmienkach. V staticky zaťaženom telese, ktoré je v rovnovážnom stave, gradienty napätia sa pri prechode z bodu $A(x,y,z)$ do bodu $A'(x+dx,y+dy,z+dz)$ nemôžu meniť nezávisle, ale musia spĺňať diferenciálne podmienky rovnováhy. Tieto podmienky zaručia, že aj diferenciálna časť telesa bude v silovej rovnováhe.

Z týchto úvah vyplýva, že ak na telese v rovnováhe vyčleníme časť s objemom V s *celkovou* povrchovou plochou S, potom integrácia napätia **p** (3.7) resp. (3.8) po ploche S, čiže výslednica všetkých povrchových síl, sa musí rovnať nule

$$\int_S \mathbf{p}\,dS=\int_S \sigma_{ji}n_j\,dS=\int_S \sigma_{ji}\,dS_j=0$$

pretože aj táto časť musí byť v rovnováhe.

V telese však môžu pôsobiť aj objemové sily $\{\mathbf{b}\}=b_i(x,y,z)$, t.j. sily na jednotku objemu, ako vlastná tiaž, odstredivá sila, magnetické sily, ktoré musíme tiež zahrnúť do podmienok rovnováhy

$$\int_S \sigma_{ji}n_j\,dS+\int_V b_i\,dV=0$$

Pomocou Gaussovej vety o divergencii[1] aplikovanej v tomto prípade na trojrozmerný priestor a tenzorovú veličinu σ_{ji} môžeme plošný integrál v uvedenom vzťahu transformovať na objemový s výsledkom

$$\int_V\left(\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+b_i\right)dV=0$$

[1] Podľa Gaussovej vety platí $\int_S X\mathbf{n}\,dS=\int_V \nabla X\,dV$, kde X je skalárna, vektorová, alebo tenzorová veličina

a pretože tento vzťah platí pre ľubovoľný objem telesa, musí byť integrand rovný nule a dostávame skalárne *diferenciálne rovnice (podmienky) rovnováhy telesa*

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

Pri zohľadnení symetrie tenzora napätia možno túto rovnicu prepísať na

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \qquad (3.11)$$

a rovnice potom môžeme používať len so šiestimi nezávislými zložkami napätia

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Týmto diferenciálnym rovniciam musí pri daných okrajových podmienkach vyhovieť každé pole mechanického napätia $\sigma_{ij}(x,y,z)$ na spojitom objeme telesa, pokiaľ má spĺňať podmienky statickej rovnováhy.

Na záver treba pripomenúť, že napätie, s ktorým sme sa zaoberali v tejto časti, je tzv. *Cauchyho (skutočné) napätie*, pretože sme ho definovali na zdeformovanom (skutočnom, aktuálnom) tvare (objeme) telesa a pôsobilo na ploške udanej a vytvorenej jeho aktuálnymi súradnicami *xyz*; je to práve tá miera napätia, ktorú potrebujeme poznať pre hodnovernú tuhostnú a pevnostnú kontrolu zaťaženého telesa. Pri jeho hľadaní z diferenciálnych rovníc alebo z integrálnych variačných vzťahov sa nevyhneme potrebe integrovať premenné po neznámom zdeformovanom objeme telesa. S tým sú spojené, žiaľ, pri *nelineárnych* úlohách (veľké posunutia, veľké rotácie, veľké deformácie, nelineárne vlastnosti materiálu a i.), ako uvidíme neskôr, značné nepríjemnosti.

Pri *lineárnych* úlohách predpokladáme, že vplyv rozdielnej polohy, tvaru a objemu aktuálnej konfigurácie oproti začiatočnej (vzťažnej, východzej) konfigurácii telesa je zanedbateľný a úlohu riešime na známej začiatočnej konfigurácii. Napätie, ktoré určíme na tejto konfigurácii, považujeme za Cauchyho napätie.

3.6 Princíp virtuálnych posunutí

Princíp virtuálnych posunutí (deformačná verzia princípu virtuálnej práce [1]) patrí k základným východiskám pre deformačnú formuláciu metódy konečných prvkov. Je to jedna z foriem integrálneho (energetického) vyjadrenia podmienok rovnováhy deformovateľného telesa.

Princíp virtuálnych posunutí odvodíme z diferenciálnych podmienok telesa (3.11), ktoré kvôli zjednodušeniu zápisu medzivýsledkov zapíšeme v najjednoduchšej forme

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{3.13}$$

Nech na ploche S_u telesa sú zadané deformačné (posuvové) okrajové podmienky $\overline{u}_i$ a na ploche S_p silové podmienky (zaťaženie) vo forme plošného ťahu so zložkami $\overline{p}_i$ (sústredené sily neuvažujeme, možno ich zahrúť priamo do výsledku). Potom pre teleso platia diferenciálne podmienky rovnováhy (3.13) so základnými (Dirichletovými) okrajovými podmienkami

$$u_i = \overline{u}_i \qquad \text{na } S_u \tag{3.14}$$

a prirodzenými (Neumanovými) okrajovými podmienkami

$$\sigma_{ij} n_j = \overline{p}_i \qquad \text{na } S_p \tag{3.15}$$

kde plocha telesa $S = S_u \cup S_p$, $S_u \cap S_p = 0$, a n_j sú zložky jednotkového vektora normály plochy S_p.

Aplikujme teraz na teleso virtuálne (myslené, zvolené) spojité funkcie posunutí $\delta u_i(x,y,z)$, ktoré v mieste zadaných reálnych posunutí sú nulové

$$\delta u_i = 0 \qquad \text{na } S_u \tag{3.16}$$

Potom pre teleso podľa (3.13) dostávame

$$\left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\delta u_i = 0$$

a integrál po objeme telesa sa musí tiež rovnať nule

$$\int_S \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\delta u_i dV = 0 \tag{3.17}$$

Pretože v (3.17) môžme mimo S_u funkcie δu_i ľubovoľne meniť, tento vzťah platí vtedy a len vtedy, keď sú splnené diferenciálne podmienky rovnováhy (keď výraz v zátvorke sa rovná nule). Dostali sme takto inú formu vyjadrenia podmienok rovnováhy telesa.

Pomocou vzorca pre derivovanie súčinu $\left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)_{,j} = \sigma_{ij,j}\delta u_i + \sigma_{ij}\delta u_{i,j}$ môžeme (3.17) upraviť na

$$\int_V \left[\left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)_{,j} - \sigma_{ij}\delta u_{i,j} + b_i \delta u_i\right] dV = 0$$

kde opäť použijeme Gaussovu vetu o divergencii a transformujeme prvý člen v tomto vzťahu na plošný integrál

$$\int_V \left(-\sigma_{ij}\delta u_{i,j} + b_i \delta u_i\right) dV + \int_S \left(\sigma_{ij}\delta u_i^p\right) n_j dS = 0 \tag{3.18}$$

ktorý sa podľa (3.15) a (3.16) zmení na

$$\int_V \left(-\sigma_{ij}\delta u_{i,j} + b_i \delta u_i\right) dV + \int_S \overline{p}_i \delta u_i^p dS = 0 \tag{3.19}$$

kde δu_i^p sú zložky virtuálneho posunutia na ploche S_p.

Vzhľadom na symetriu tenzora napätia, a známy vzťah pre tenzor deformácie ε_{ij} (1.12) môžeme napísať

$$\sigma_{ij}\delta u_{i,j} = \sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right)\right] = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$$

a z (3.19)dostávame výsledný vzťah

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \int_V b_i \delta u_{i,j} dV + \int_{S_p} \overline{p}_i \delta u_i^p dS \tag{3.20}$$

V maticovom zápise

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_{S_p} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} dS \tag{3.21}$$

Integrandy v týchto vzťahoch sú skalárne hodnoty, ktoré majú rozmer práce [Nm] a zaraďujú sa takto do kategórie energetických podmienok rovnováhy. Je to matematické vyjadrenie princípu virtuálnych posunutí, ktorý hovorí, že ak na teleso v rovnováhe aplikujeme kinematicky prípustné virtuálne posunutia, tak virtuálna práca vnútorných síl sa rovná virtuálnej práci vonkajších síl, v stručnom zápise

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \tag{3.22}$$

Pod pojmom virtuálna práca sa myslí práca reálnych silových veličín (napätia, vonkajších síl) vykonaná na virtuálnych posunutiach. Napätie a vonkajšie sily sa pri tomto myslenom experimente nemenia, sú nezávislé na virtuálnych posunutiach. Všimnime si tiež, že v podmienkach rovnováhy telesa (3.20) sú už, na rozdiel od diferenciálnych podmienok rovnováhy, explicitne vyjadrené silové okrajové podmienky.

Ak je teleso rozdelené na sieť konečných prvkov, tak podmienky rovnováhy (3.20) platia aj pre konečný prvok a v MKP sa princíp virtuálnych posunutí často využíva na formuláciu lineárnych i nelineárnych konečných prvkov [1], [2].

4 Kinematika konečných (veľkých) deformácií

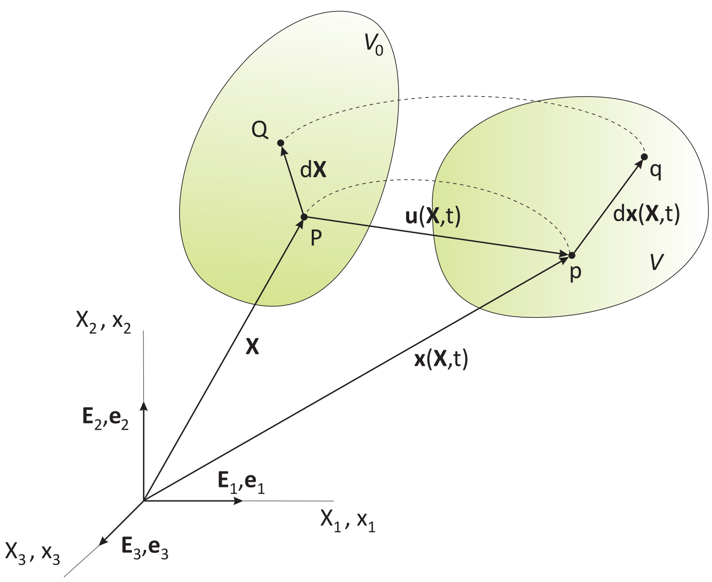
4.1 Pohyb telesa. Materiálové a priestorové súradnice

Deformovateľné teleso v mechanike kontinua predstavuje spojitú oblasť materialových bodov (materiálových častíc), ktorá v procese zaťažovania vykonáva v priestore vo všeobecnosti zložitý pohyb. Tento pohyb možno myslene rozložiť na pohyb telesa ako tuhého celku a jeho *deformáciu*, vyvolanú zmenou vzdialeností medzi bodmi telesa. Kinematika študuje a opisuje tento pohyb bez ohľadu na vonkajšie a vnútorné sily, ktoré tento pohyb vyvolávajú. Keby sme túto problematiku na tomto mieste nezúžili, museli by sme hovoriť o *oblasti kontinua* a nie o telese, o pohybe častíc *kontinua* a nie častíc telesa a museli by sme rozšíriť úvahy a vzťahy aj do oblasti fluidnej mechaniky a termomechaniky (kapitola 20, [5]).

Nazvime súhrn materiálových bodov tvoriacich model telesa v čase t jeho *konfiguráciou*. Konfigurácia bez deformácií v čase $t=0$ nech je *začiatočnou* konfiguráciou telesa. Polohu materiálových bodov v začiatočnej konfigurácii budú určovať v kartézskom súradnicovom systéme s bázovými (jednotkovými) vektormi $\mathbf{E}_I$ (obr. 4.1) tzv. *materiálové* (Lagrangeovské) súradnice

$$\mathbf{X}=X_I\mathbf{E}_I \tag{4.1}$$

V začiatočnej konfigurácii budeme materiálové body telesa označovať veľkými písmenami a ostatné veličiny indexom nula: objem V_0, plochu S_0, dĺžku ℓ_0, hustotu materiálu ρ_0.



Obr. 4.1

V procese zaťažovania sa teleso deformuje a posúva v priestore a v čase t materiálové body zaujímajú polohu udanú *priestorovými* (Eulerovskými) súradnicami

$$\mathbf{x}=x_i\mathbf{e}_i \tag{4.2}$$

kde x_i sú zložky polohového vektora bodu v tejto tzv. *aktuálnej* konfigurácii. Polohové vektory bodov v aktuálnej konfigurácii, ako vidieť zo (4.2), môžu byť vyjadrené v inej báze - udanej $\mathbf{e}_i$, budeme však uvažovať zhodnosť $\mathbf{E}_I$ a $\mathbf{e}_i$; pri niektorých veličinách však ponecháme ich rozdielne označenie, aby sme vyjadrili príslušnosť danej veličiny ku začiatočnej alebo aktuálnej konfigurácii telesa. V aktuálnej konfigurácii budeme označovať objem V, plochu S, dĺžku ℓ a hustotu ρ.

Zložité fyzikálne vzťahy medzi začiatočnou a aktuálnou konfiguráciou budeme skúmať teraz len z kinematického hľadiska, takže funkciu vyjadrujúcu polohu bodov v aktuálnej konfigurácii možno vyjadriť v tvare

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \tag{4.3}$$

Zápis pohybovej *vektorovej funkcie* $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ na pravej strane tejto rovnice je síce názorný, ale označenie je totožné s označením polohového vektora bodu, a preto sa môžme stretnúť aj s ekvivalentným zápisom pohybu telesa v tvare

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X},t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \tag{4.4}$$

kde $\phi(\mathbf{X},t)$ je funkcia popisujúca (mapujúca) tento pohyb.

Ak si zvolíme materiálové súradnice $\mathbf{X}$ a čas *t* za nezávislé premené - takto vystupujú napr. v rovniciach (4.3) a (4.4) - potom takýto popis pohybu sa nazýva *materiálový* alebo Lagrangeovský a hovoríme o Lagrangeovskej (materiálovej) formulácii. V takomto prípade ak si v začiatočnej konfigurácii vyznačíme ľubovoľný materiálový bod *P* so súradnicami $\mathbf{X}_P$ potom vo všeobecnosti nelineárna funkcia $\mathbf{x}_P(t) = \phi(\mathbf{X}_P,t)$ určuje zakrivenú pohybovú dráhu (cestu) materiálového bodu *P* (jeho polohového vektora) počas vyšetrovaného pohybu telesa. Pre určitý konkrétny nemenný čas t_n funkcia $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X},t_n)$ zase udáva deformovanú konfiguráciu telesa v tomto čase.

Pri Lagrangeovskej formulácii a riešení úlohy môžme teda sledovať pohyb a deformačnú zmenu telesa od začiatočnej konfigurácie až po aktuálnu, čo je nevyhnutné pri úlohách, ktoré sú z nejakého dôvodu (napr. materiálového) od tejto cesty závislé, nehovoriac o tom, že je pritom obyčajne potrebné poznať aj zdeformovaný tvar telesa.

Možná je aj formulácia úlohy, kedy nezávislé premenné sú $\mathbf{x}$ a t, a ktorá sa nazýva *priestorová* alebo Eulerovská formulácia. S takýmto opisom pohybu častíc kontinua a následnou formuláciou i riešením úlohy sa môžeme stretnúť hlavne vo fluidnej mechanike (časť 20.2). Nezávislým priestorovým súradniciam sa však niekedy nedá vyhnúť ani pri *nelineárnych* pevnostných úlohách, kde sa preferuje Lagrangeovská formulácia, najmä pri tvorbe konštitutívnych rovníc (vzťahov medzi deformáciou a napätím). Pravda, *jednoznačná väzba* medzi fyzikálnym vzťahom vyjadreným pomocou jedných alebo druhých súradníc vyplýva z pohybu telesa, ktorý je , samozrejme, na súradniciach nezávislý. Je teda možné transformovať každý vzťah z jedného systému súradníc do druhého - nie je to však vždy jednoduchá záležitosť.

4.2 Deformačný gradient. Natiahnutie (stretch)

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že ak si v začiatočnej (nedeformovanej) konfigurácii zvolíme všobecný bod s polohovým vektorom $\mathbf{X}$, potom jeho polohu v aktuálnej (deformovanej) konfigurácii určuje vektor $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X},t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X},t)$. Nelineárnu vektorovú funkciu ϕ možno v okolí bodu $\mathbf{x}$ rozvinúť do skráteného Taylorovho radu (linearizovať v okolí tohoto bodu) pri nemennom čase t

$$\phi(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) = \phi(\mathbf{X},t) + \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X},t)\cdot d\mathbf{X} + o\left(d\mathbf{X}^2\right) \tag{4.5}$$

kde výraz

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t) = \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X},t) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{x}(\mathbf{X},t) \tag{4.6}$$

sa nazýva *deformačný gradient*. Pretože je to gradient *vektorovej* funkcie, je to tenzor 2. rádu

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{I=1}^{3}\frac{\partial x_i(\mathbf{X},t)}{\partial X_I}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_I \tag{4.7}$$

Pri deformačnom pohybe telesa sa úsečka $d\mathbf{X}$ spájajúca dva susedné materiálové body $\mathbf{X}$ a $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$ premiestni a zmení na úsečku $d\mathbf{x}$ (obr. 4.1) pričom platí

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}+d\mathbf{X}) - \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}d\mathbf{X} \tag{4.8}$$

Deformačný gradient podľa (4.8) obsahuje v sebe dôležitú informáciu o deformácii (natiahnutí a natočení) materiálovej úsečky $d\mathbf{X}$ po jej deformačnej transformácii na $d\mathbf{x}$, čo je vlastne informácia o deformácii v okolí bodu, ktorý je v začiatočnej konfigurácii určený vektorom $\mathbf{X}$. Údaje o priestorovom posunutí (premiestnení) tohto bodu určuje *vektor posunutia* $\mathbf{u}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X}$ (obr. 4.1) a potom pre deformáciu úsečky $d\mathbf{X}$ tiež platí

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}d\mathbf{X} = \frac{\partial(\mathbf{X}+\mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}}d\mathbf{X} = (\mathbf{I}+\mathbf{D})d\mathbf{X} \tag{4.9}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotkový tenzor a $\mathbf{D}$ je *tenzor derivácií posunutia* alebo *tenzor gradientu posunutia* (displacement-derivative tensor, displacement gradient tensor).

Pre potreby algoritmizácie a prípadného programového spracovania, ale aj kvôli väčšej názornosti, je užitočné zapisovať dôležité tenzory vo forme matíc. Deformačný gradient podľa (4.7) je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

a matica tenzora derivácií posunutia podľa (4.9)

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z}\\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z}\\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z}\end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Zo (4.9) vyplýva vzťah

$$\mathbf{F}=\mathbf{I}+\mathbf{D}=\mathbf{I}+\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u} \tag{4.12}$$

ktorý je v MKP základným zdrojom určovania deformačného gradientu v integračných bodoch prvkov výpočtového modelu telesa. V iteračnom procese vieme totiž v konečných prvkoch vyjadriť aproximačné funkcie zložiek posunutí $\mathbf{u}(X,Y,Z,t)$ a z nich aj potrebné derivácie do (4.11). Z hľadiska MKP môžeme tenzory $\mathbf{D}$ a $\mathbf{F}$ v ďalšej analýze kinematiky deformácie považovať za známe veličiny.

4.3 Miery deformácie

Uvažujme v začiatočnej konfigurácii telesa čiarový element $d\mathbf{X}$ s dĺžkou dL, ktorý sa účinkom deformačného pohybu telesa natiahne (alebo skráti) na $d\mathbf{x}$ o dĺžke $d\ell$ a vo všeobecnosti sa aj natočí. Podľa (4.9) platí

$$d\mathbf{x}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}d\mathbf{X}=\mathbf{F}d\mathbf{X} \tag{4.13}$$

Po vydelení oboch strán tohto vzťahu súčinom $dLd\ell$ dostávame

$$\lambda\mathbf{n}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}\mathbf{N}=\mathbf{F}\mathbf{N} \tag{4.14}$$

kde

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{X}}{dL} \quad \text{a} \quad \mathbf{n}=\frac{d\mathbf{x}}{d\ell} \tag{4.15}$$

sú jednotkové vektory, ktoré určujú smery čiarového elementu pred a po deformácii. *Koeficient natiahnutia* (stretch ratio) alebo *pomerné natiahnutie* λ určuje pomernú dĺžkovú zmenu elementu

$$\lambda=\frac{d\ell}{dL} \tag{4.16}$$

Rovnicu (4.14) upravíme tak, že na oboch stranách urobíme skalárny súčin vektorov so sebou samým

$$(\lambda\mathbf{n})\cdot(\lambda\mathbf{n})=(\mathbf{F}\mathbf{N})\cdot(\mathbf{F}\mathbf{N})$$

a postupnou úpravou dostávame

$$
\begin{aligned}
(\lambda\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}) = \lambda^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = \lambda^2 &= (\mathbf{FN})\cdot(\mathbf{FN}) \\
&= \mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^T(\mathbf{FN}) \\
&= \mathbf{N}\cdot(\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{F})\,\mathbf{N} \\
&= \mathbf{N}\cdot\mathbf{C}\,\mathbf{N}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

kde, ako vidieť, pre tzv. *pravý Cauchy-Greenov tenzor deformácie* platí

$$
\mathbf{C}(\mathbf{X},t) = \mathbf{F}^T\mathbf{F}
\tag{4.18}
$$

Dostali sme tak jednu z použiteľných mier deformácie telesa namáhaného priestorovou napätosťou. Ak v začiatočnej (referenčnej) konfigurácii zadáme smer $\mathbf{N}$ pre čiarový element $d\mathbf{X}$, potom tenzor $\mathbf{C}$ umožňuje určiť natiahnutie λ tohto elementu po jeho deformačnej zmene na $d\mathbf{x}$ v aktuálnej konfigurácii.

Dôležitý a často využívaný tenzor deformácie dostaneme z analogickej analýzy rozdielu kvadrátov dĺžok $d\ell$ a dL

$$
\begin{aligned}
d\ell^2 - dL^2 &= (d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}) - (d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}) \\
&= (\mathbf{F}d\mathbf{X})\cdot(\mathbf{F}d\mathbf{X}) - (d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}) \\
&= d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^T(\mathbf{F}d\mathbf{X}) - (d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}) \\
&= d\mathbf{X}\cdot(\mathbf{C}d\mathbf{X}) - (d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}) \\
&= d\mathbf{X}\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{I})d\mathbf{X} \\
&= d\mathbf{X}\cdot 2\mathbf{E}d\mathbf{X}
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

kde

$$
\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}-\mathbf{I}\right)
\tag{4.20}
$$

je *Green-Lagrangeov tenzor deformácie.* Využitím inverzného vzťahu (4.9) a analogickým postupom (ale teraz vylúčením $\mathbf{X}$) by sme dostali *Almansiho (Eulerovský) tenzor deformácie*, ktorý je funkciou priestorových súradníc

$$
\mathbf{e}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{i}-\mathbf{b}^{-1}\right)
\tag{4.21}
$$

kde

$$
\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T
\tag{4.22}
$$

je *ľavý Cauchy - Greenov tenzor deformácie*.

Pretože sa zaujímame o deformáciu telesa, budeme sa v ďalšom predovšetkým venovať Lagrangeovým mieram, ktoré sú funkciou materiálových súradníc, a to hlavne Green-Lagrangeovmu tenzoru deformácie $\mathbf{E}$, ktorý sme využívali v [2]. Jeho hlavné vlastnosti možno zhrnúť takto:

- Je to symetrický tenzor a jeho nezávislé členy možno po rozpísaní podľa vzťahov (4.20) a (4.12) vyjadriť v pseudovektorovom tvare (vhodnom pre maticové operácie a programové spracovanie)

$$\{\mathbf{E}\}=\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ 2E_{xy} \\ 2E_{yz} \\ 2E_{zx} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial X} \\ \dfrac{\partial v}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial X}+\dfrac{\partial u}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial Y}+\dfrac{\partial v}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial Y}+\dfrac{\partial w}{\partial X} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial X}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial X}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial X}\right)^2\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial Y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial Y}\right)^2\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial Z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial Z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial Z}\right)^2\right) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial X}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y}\right)+\left(\dfrac{\partial v}{\partial X}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial Y}\right)+\left(\dfrac{\partial w}{\partial X}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial Y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial Y}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial Z}\right)+\left(\dfrac{\partial v}{\partial Y}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial Z}\right)+\left(\dfrac{\partial w}{\partial Y}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial Z}\right) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial X}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial Z}\right)+\left(\dfrac{\partial v}{\partial X}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial Z}\right)+\left(\dfrac{\partial w}{\partial X}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial Z}\right) \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

- Možno dokázať, že je nezávislý na čistej rotácii telesa ako tuhého celku, čo je prirodzená požiadavka na mieru deformácie. Uvažujme nedeformované teleso v začiatočnej konfigurácii, ktoré sa pohybuje ako tuhý celok. Takýto pohyb možno zložiť z rotácie okolo začiatku súradnicového systému a z čisto translačného pohybu

$$\mathbf{x}(\mathbf{X},t)=\mathbf{R}(t)\mathbf{X}+\mathbf{x}_T(t) \tag{4.24}$$

kde $\mathbf{R}$ je tenzor rotácie a $\mathbf{x}_T$ je vektor translačného pohybu. V takomto prípade ale podľa (4.7) platí $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ a k deformácii nedôjde, lebo z definície Green-Lagrangeovho tenzora deformácie (4.20)dostaneme

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{R}^T\mathbf{R}-\mathbf{I}\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{I})=\mathbf{0}$$

kde sa zohľadnilo, že $\mathbf{R}$ je ortogonálny tenzor.

- Je zovšeobecnením jednoosového Greenovho pomerného predĺženia $\varepsilon_G=\frac{1}{2}(\lambda^2-1)$, ktoré z neho dostaneme pri čistej jednoosovej deformácii. Vtedy deformačný gradient podľa (4.20) je

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} d\ell/\mathrm{dL} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a zo (4.20) dostávame

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}-\mathbf{I}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} d\ell/\mathrm{dL} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\ell/\mathrm{dL} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\lambda^2-1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Pri všeobecnej deformácii podľa (4.19) platí

$$\frac{1}{2}\left(d\ell^2 - dL^2\right) = d\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}d\mathbf{X} \tag{4.26}$$

a po vydelení s dL^2

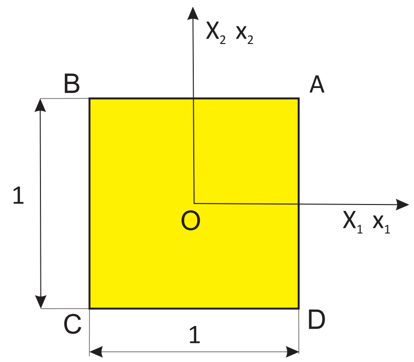
$$\frac{d\ell^2 - dL^2}{2dL^2} = \frac{d\mathbf{X}}{dL}\cdot\mathbf{E}\frac{d\mathbf{X}}{dL} \quad\rightarrow\quad \varepsilon_G = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) = \mathbf{N}\cdot\mathbf{EN} \tag{4.27}$$

kde $\mathbf{N} = d\mathbf{X}/dL$ udáva zvolený (udaný) smer elementárnej úsečky d $\mathbf{X}$ vychádzajúcej z bodu $\mathbf{X}$ začiatočnej konfigurácie telesa.

Takto pre elementárnu úsečku transformovanú do aktuálnej konfigurácie $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ môžno z $\mathbf{F}$ určiť Greenovu deformáciu a pomocou (4.14) alebo (4.15) aj jej smer $\mathbf{n}$.

Príklad 4.1 *Analýza deformácie pomocou deformačného gradientu*

Rovinná štvorcová materiálová častica s veľmi malými (teoreticky nekonečne malými) jednotkovými rozmermi umiestnená kvôli jednoduchosti v začiatku súradnicového systému podľa obrázku



Obr. 4.2

vykonala deformačný pohyb do ustálenej polohy podľa funkcie

$$\phi(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_1(X_1, X_2) \\ x_2(X_1, X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5X_1 - 1{,}2X_2 + 3 \\ 2{,}6X_1 + 2{,}0X_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Podľa týchto rovníc sa stred častice O(0; 0) posunul do polohy o(3; 1), čo môžme považovať za posunutie častice a rohový bod A(0,5; 0,5) do polohy

$$x_1^a = 1{,}5X_1^A - 1{,}2X_2^A + 3 = 1{,}5\cdot 0{,}5 - 1{,}2\cdot 0{,}5 + 3 = 3{,}15$$
$$x_2^a = 2{,}6X_1^A + 2{,}0X_2^A + 1 = 2{,}6\cdot 0{,}5 + 2{,}0\cdot 0{,}5 + 1 = 3{,}30$$

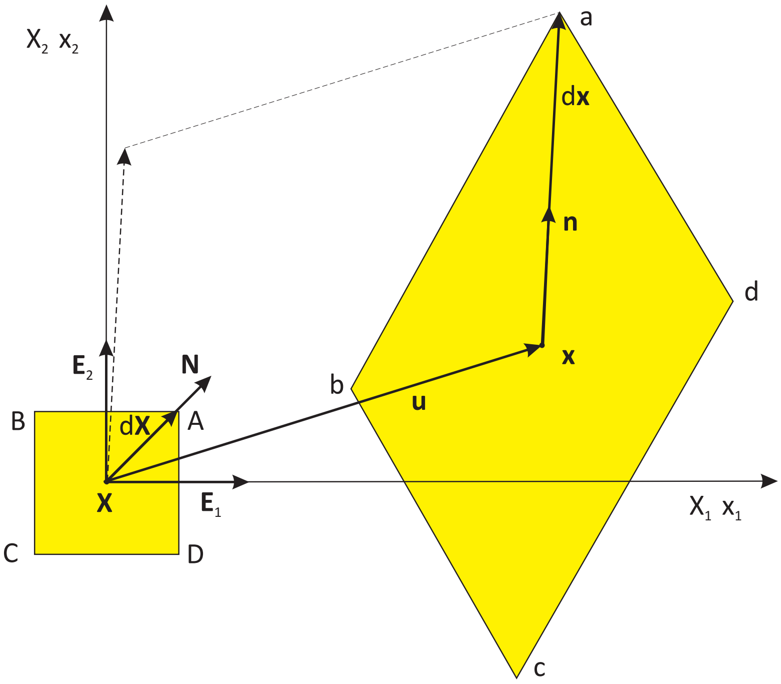
Analogicky by sme dostali aj novú polohu ostatných rohových bodov: b(1,65; 0,70), c(2,85; -1,30), d(4,35; 1,30). Do obr. 4.3 sme tieto body nakreslili v merítku a pospájali, čím sme získali predstavu o novej polohe a deformácii častice. Deformačný gradient tejto transformácie je

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,5 & -1,2\\ 2,6 & 2,0\end{bmatrix}$$

Deformačný gradient umožňuje analýzu deformácie v tesnom okolí bodu, ktorého polohu v začiatočnej konfigurácii udáva vektor $\mathbf{X}$. Uvažujme v začiatočnej konfigurácii telesa čiarový element

$$d\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0,5\\ 0,5\end{bmatrix}$$

s dĺžkou $dL=1/\sqrt{2}=0{,}7071$ znázornený v obr. 4.3.



Obr. 4.3

Podľa (4.13) pre jeho deformáciu platí

$$d\mathbf{x}=\mathbf{F}d\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1,5 & -1,2\\ 2,6 & 2,0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,5\\ 0,5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,15\\ 2,30\end{bmatrix}$$

Tento vektor je v obr. 4.3 znázornený čiarkovane; jeho reálnu polohu učuje posunutie (pozri tiež obr.4.1). Pre jeho dĺžku (absolútnu veľkosť) platí

$$d\ell^2=d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0,15 & 2,30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,15\\ 2,30\end{bmatrix}=5{,}3125 \qquad \rightarrow \qquad d\ell=2{,}3049$$

Koeficient natiahnutia je

$$\lambda=\frac{d\ell}{dL}=\frac{2{,}3049}{0{,}7071}=3{,}2596$$

Jednotkový vektor $\mathbf{n}$ udávajúci smer $d\mathbf{x}$ možno určiť podľa (4.14) alebo zo (4.15)

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{FN} = \frac{1}{3{,}2596}\begin{bmatrix} 1{,}5 & -1{,}2 \\ 2{,}6 & 2{,}0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}7071 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0651 \\ 0{,}9979 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{d\ell} = \frac{1}{2{,}3049}\begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 2{,}30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0651 \\ 0{,}9979 \end{bmatrix}$$

4.4 Polárny rozklad deformačného gradientu

Na základe Cauchyho teorémy o polárnom rozklade tenzora možno deformačný gradient dvomi spôsobmi rozložiť na súčin dvoch tenzorov

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR} \tag{4.28}$$

kde symetrické tenzory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ sú *pravý* a *ľavý tenzor natiahnutia* (názvy majú podľa polohy voči $\mathbf{R}$) a $\mathbf{R}$ je ortogonálny *tenzor rotácie* ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$). Pre pravý Cauchy-Greenov tenzor deformácie (4.18) potom platí

$$\mathbf{C}(\mathbf{X},t) = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^T\mathbf{R}^T\mathbf{RU} = \mathbf{UIU} = \mathbf{U}^2 \tag{4.29}$$

kde sa využila symetria $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$) a ortogonálnosť $\mathbf{R}$.

Green-Lagrangeov tenzor deformácie (4.20) potom je

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^2-\mathbf{I}\right) \tag{4.30}$$

Deformačný vzťah pre $d\mathbf{X}$ (4.13) je možné zapísať v tvare

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \mathbf{R}(\mathbf{U}d\mathbf{X}) = \mathbf{R}d\mathbf{X}' \tag{4.31}$$

kde pomocné zátvorky naznačujú, že deformácia $d\mathbf{X}$ sa uskutoční v dvoch krokoch: najprv sa $d\mathbf{X}$ natiahne na $d\mathbf{X}' = \mathbf{U}d\mathbf{X}$ a potom sa natočí do $d\mathbf{x} = \mathbf{R}d\mathbf{X}'$. Celkovo sa teda deformačný pohyb materiálovej častice skladá z troch separovateľných fáz: posunutia, natiahnutia a rotácie.

Problém, ktorý treba zvládnuť pri rozklade deformačného gradientu, je určenie tenzora $\mathbf{U}$, pretože $\mathbf{R}$ sa potom už vypočíta zo vzťahu (4.28)

$$\mathbf{R} = \mathbf{FU}^{-1} \tag{4.32}$$

Aby bol zaručený rozklad deformačného gradientu na čisté natiahnutie a čistú rotáciu musia byť čiarové elementy $d\mathbf{X}$ a $d\mathbf{X}'$ v (4.31) rovnobežné, z čoho vyplýva

$$d\mathbf{X}' = \mathbf{U}d\mathbf{X} = \lambda d\mathbf{X} \tag{4.33}$$

a ďalej, pretože podľa (4.15) $d\mathbf{X} = \mathbf{N}dL$

$$\mathbf{UN} = \lambda\mathbf{N} \tag{4.34}$$

Rovnica (4.34) predstavuje lineárny problém vlastných čísiel, ktorého riešením sú *hlavné natiahnutia* λ_K a s nimi zviazané *hlavné smery* $\mathbf{N}_K$ tenzora $\mathbf{U}$. Jednotkové vektory $\mathbf{N}_K$ vzhľadom na symetriu $\mathbf{U}$ tvoria ortonormálnu bázu *spektrálnej reprezentácie* (spektrálnej dekompozície) $\mathbf{U}$ a platí

$$\mathbf{U} = \sum_{K=1}^{3} \lambda_K \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \tag{4.35}$$

Tento dôležitý vzťah rozpíšeme v maticovom tvare

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \{\mathbf{N}_1\}\{\mathbf{N}_1\}^T + \lambda_2 \{\mathbf{N}_2\}\{\mathbf{N}_2\}^T + \lambda_3 \{\mathbf{N}_3\}\{\mathbf{N}_3\}^T \tag{4.36}$$

Pretože pri umocnení $\mathbf{U}$ na prirodzené číslo sa báza nemení, (4.35) je špeciálnym prípadom všeobecného vzťahu

$$\mathbf{U}^n = \sum_{K=1}^{3} \lambda_K^n \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \tag{4.37}$$

Pomocou (4.37) možno vyjadriť Cauchy-Greenov tenzor deformácie (4.29) v tvare

$$\mathbf{C}(\mathbf{X},t) = \mathbf{U}^2 = \sum_{K=1}^{3} \lambda_K^2 \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \tag{4.38}$$

a pre Green-Lagrangeov tenzor deformácie podľa (4.30) dostávame

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}\right) = \sum_{K=1}^{3} \frac{1}{2}\left(\lambda_K^2 - 1\right) \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \tag{4.39}$$

Dôležitý *tenzor logaritmickej deformácie* možno určiť zo (4.37) ako špeciálny prípad pre $n = 0$

$$\mathbf{E}_{\ell n}(\mathbf{X},t) = \ell n \mathbf{U} = \sum_{K=1}^{3} \ell n \lambda_K \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \tag{4.40}$$

Z porovnania (4.35) a (4.37) vyplýva, že (4.34) možno prepísať na

$$\mathbf{U}^2 \mathbf{N} = \lambda^2 \mathbf{N} \tag{4.41}$$

a pretože $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, hodnoty λ_K a $\mathbf{N}_K$ sa určujú štandardným postupom riešenia problému vlastných čísiel (4.41) z rovníc

$$\left(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \lambda^2 \mathbf{I}\right) \mathbf{N} = \mathbf{0} \tag{4.42}$$

a podmienky pre ich nenulové korene

$$det\left(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \lambda^2 \mathbf{I}\right) = 0 \tag{4.43}$$

Zo známymi hodnotami λ_K a $\mathbf{N}_K$ sa tenzor $\mathbf{U}$ určí pomocou (4.35) alebo (4.36).

Príklad 4.2 *Polárny rozklad deformačného gradientu rovinnej úlohy*

Treba určiť matice $\mathbf{U}$ a $\mathbf{R}$ deformačného gradientu z príkladu 1

$$\mathbf{F} = \mathbf{UR} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -1{,}2 \\ 2{,}6 & 2{,}0 \end{bmatrix}$$

Podľa (4.29) dostávame

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} 1,5 & 2,6 \\ -1,2 & 2,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 \\ 2,6 & 2,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,01 & 3,40 \\ 3,40 & 5,44 \end{bmatrix}$$

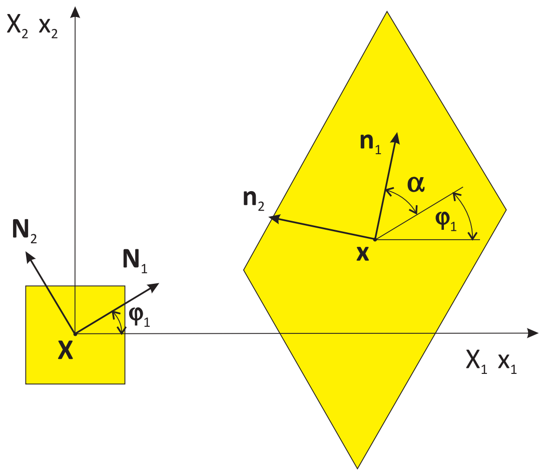
Zo (4.42) dostaneme sústavu homogénnych rovníc, ktorá má nenulové riešenie len pri podmienke, že determinant matice jej koeficientov (4.43) sa rovná nule

$$det\begin{bmatrix} 9,01-\lambda^2 & 3,40 \\ 3,40 & 5,44-\lambda^2 \end{bmatrix} = 0$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice dostaneme λ_1^2, λ_2^2 a po odmocnení hodnoty hlavných pomerných natiahnutí $\lambda_1 = 3,3264$ a $\lambda_2 = 1,8398$. Jednotkové vektory hlavných smerov určíme zo (4.42) po postupnom dosadení λ_1 a λ_2 a výpočte členov $\mathbf{N}_1$ a $\mathbf{N}_2$ z týchto rovníc

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0,8558 \\ 0,5173 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} -0,5173 \\ 0,8558 \end{bmatrix}$$

Smer prvého hlavného natiahnutia λ_1 dostaneme z vektora $\mathbf{N}_1$: $\cos\varphi_1 = 0,8558$ a $\sin\varphi_1 > 0 \;\rightarrow$ $\varphi_1 = 31,15^\circ$. Hlavné smery sú navzájom ortogonálne, a teda uhol $\varphi_2 = 121,15^\circ$ (obr. 4.4).



Obr. 4.4

Matica natiahnutia podľa (4.36) je

$$\mathbf{U} = \lambda_1\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1^T + \lambda_2\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^T = 3,3264\begin{bmatrix} 0,8558 \\ 0,5173 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,8558 & 0,5173 \end{bmatrix} + 1,8398\begin{bmatrix} -0,5173 \\ 0,8558 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,5173 & 0,8558 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2,9286 & 0,6581 \\ 0,6581 & 2,2376 \end{bmatrix}$$

a maticu rotácie dostaneme zo (4.32)

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 \\ 2,6 & 2,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,37 & -0,11 \\ -0,11 & 0,48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6775 & -0,7355 \\ 0,7355 & 0,6775 \end{bmatrix}$$

Pretože matica rotácie vektora v rovine o uhol α je

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

ľahko zistíme, že smery hlavných natiahnutí (jednotkové vektorovy $\mathbf{N}_i$) sa pri zaťažení natočia o uhol $\alpha = 47{,}35^\circ$.

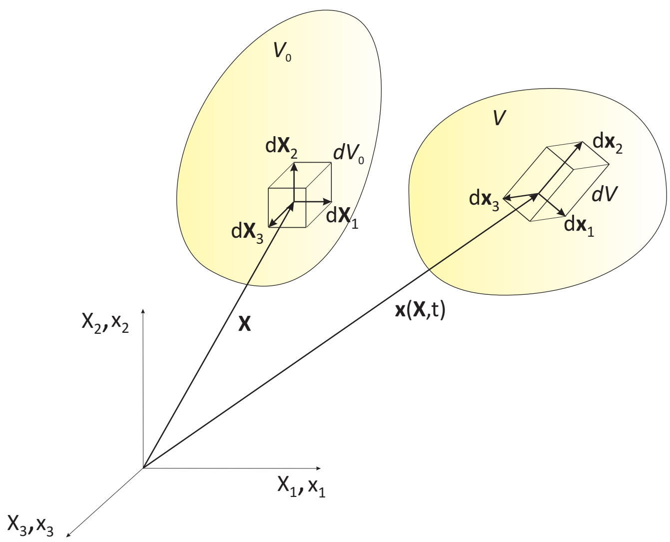
Na základe analýzy možno konštatovať, že sa častica v smere udanom uhlom $\varphi_1 = 31{,}15^\circ$ natiahne s hodnotou $\lambda_1 = 3{,}3264$, v smere kolmom o hodnotu udanú $\lambda_2 = 1{,}8398$ a potom takto zdeformovaná sa ako tuhý celok natočí o uhol $\alpha = 47{,}35^\circ$ (pozri obr.4.4).

Algoritmizáciou tohoto postupu (v MKP spojenou aj s geometrickou a časovou diskretizáciou) možno určovať tenzory (matice) deformácií (4.38) až (4.40) príp. i ďalšie, ktoré ako funkcie $\mathbf{X}$ a t definujú deformačný pohyb telesa.

4.5 Zmena objemu

Deformácia telesa vyvoláva zmenu objemu telesa a z toho vyplývajúcu zmenu hustoty materiálu. Tak, ako sa mení deformácia v každom bode telesa, tak sa mení aj objem a hustota a ich zmeny sa musia skúmať a vyjadrovať na diferenciálnom objeme materiálovej častice telesa.

Uvažujme v začiatočnej konfigurácii telesa objemový element dV_0, ktorého hrany sú rovnobežné so súradnicovými osami a sú udané vektormi $d\mathbf{X}_1 = dX_1\mathbf{E}_1$, $d\mathbf{X}_2 = dX_2\mathbf{E}_2$ a $d\mathbf{X}_3 = dX_3\mathbf{E}_3$, kde $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ a $\mathbf{E}_3$ sú jednotkové ortogonálne vektory (obr. 4.5).



Obr. 4.5

Objem tohto elementu je

$$dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3 \tag{4.45}$$

Ako vieme z predchádzajúceho, pohyb elementu možno poskladať z troch fáz: jeho posunutie do polohy $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ bez zmeny vektorov a jeho objemu, ďalej natiahnutie jeho vektorov podľa vzťahu (4.13)

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

spojené so zmenou objemu elementu a nakoniec jeho rotácia bez zmeny objemu. Zdeformovaný element bude opäť šesťsten s tromi rovnobežnými pármi stien (obr. 4.5), ktorého vektory hrán budú

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} dX_1 \tag{4.46}$$

$$d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} dX_2 \tag{4.47}$$

$$d\mathbf{x}_3 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} dX_3 \tag{4.48}$$

Z vektorovej analýzy vieme, že objem šesťstena udaného vektormi jeho hrán je skalárny trojnásobný súčin týchto vektorov, a preto zmenený objem elementu je

$$dV = d\mathbf{x}_1 \cdot \left(d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3 \right) = \frac{d\mathbf{x}}{dX_1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}}{dX_2} \times \frac{d\mathbf{x}}{dX_3} \right) dX_1 dX_2 dX_3 \tag{4.49}$$

Keď si pripomenieme deformačný gradient (4.10)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

vidíme, že vektory $\partial \mathbf{x} / \partial X_i$ v (4.49) sú vlastne stĺpce deformačného gradientu a ich trojnásobný súčin je determinant (Jacobian J) tenzoru $\mathbf{F}$. Pripomíname vzorec pre vektorový súčin vektorov

$$\left[\mathbf{a} \times \mathbf{b} \right] = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Potom pre zmenený objem elementu platí

$$dV = J dV_0; \qquad J = \det \mathbf{F} \tag{4.50}$$

Pri deformácii sa hmotnosť telesa nemení, musia sa teda zachovávať aj hmotnosti elementov

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV \tag{4.51}$$

Zákon zachovania hmotnosti (rovnica kontinuity) má potom tvar

$$\rho_0 = \rho J \tag{4.52}$$

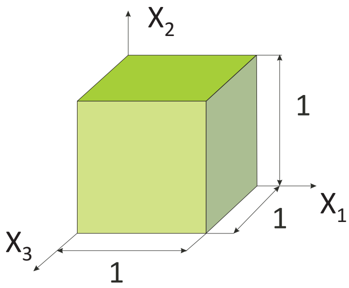
Zo (4.50) tiež vyplýva

$$J = \det \mathbf{F} > 0 \tag{4.53}$$

pretože objem zdeformovaného elementu sa nemôže rovnať nule, ani nemôže byť záporný.

Príklad 4.3 *Výpočet objemu zdeformovaného materiálového elementu*

Materiálová častica tvaru kocky s veľmi malými (teoreticky nekonečne malými) jednotkovými rozmermi (obr.4.6) je zaťažovaná v rovine X_1X_2 rovinnou deformáciou (rozmer v smere X_3 sa nemení).



Obr. 4.6

Jej deformačný gradient v aktuálnom zaťažovacom kroku je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -1{,}2 & 0 \\ 2{,}6 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Začiatočný objem elementu je jednotkový $dV = dX_1 dX_2 dX_3 = 1$ a pre jeho zdeformovaný objem podľa (4.49) zo stĺpcov $\mathbf{F}$ a vzorca pre vektorový súčin dostávame

$$dV = \frac{d\mathbf{x}}{dX_1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}}{dX_2} \times \frac{d\mathbf{x}}{dX_3} \right) dX_1 dX_2 dX_3 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 2{,}6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}0 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 = 6{,}12$$

alebo tiež podľa (4.50)

$$dV = \det \mathbf{F} dV_0 = \det \begin{bmatrix} 1{,}5 & -1{,}2 & 0 \\ 2{,}6 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = 6{,}12$$

Objem elementu po deformácii bude 6,12-krát väčší (pozri obr. 4.4).

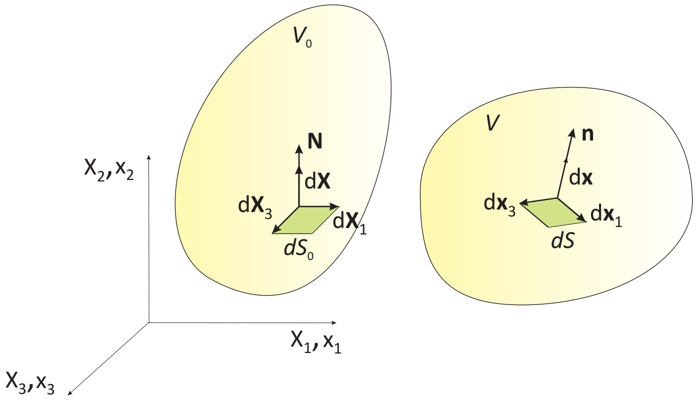
4.6 Zmena plochy

Pri transformácii plošného zaťaženia medzi začiatočnou a aktuálnou konfiguráciou treba poznať vzťah medzi vektorom plošného elementu v začiatočnej konfigurácii

$$d\mathbf{S}_0 = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_3 = \mathbf{N} dS_0 \tag{4.54}$$

a jeho hodnotou po deformácii (obr. 4.7)

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_3 = \mathbf{n} dS \tag{4.55}$$



Obr. 4.7

kde $\mathbf{N}$ a $\mathbf{n}$ sú jednotkové normálové vektory. Zvoľme čiarový element $d\mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{N}\cdot d\mathbf{X} > 0$ a vytvorme z vektorov $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_3$ a $d\mathbf{X}$ objem dV_0 a z vektorov $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_3$ a $d\mathbf{x} = Fd\mathbf{X}$ objem dV. Potom podľa (4.49) pre zdeformovaný objem takéhoto elementu platí

$$dV = d\mathbf{x}\cdot\left(d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_3\right) = d\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}dS = \left(\mathbf{F}d\mathbf{X}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

Objem zdeformovaného elementu možno vyjadriť aj zo (4.50)

$$dV = JdV_0 = Jd\mathbf{X}\cdot\left(d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_3\right) = Jd\mathbf{X}\cdot\mathbf{N}dS_0$$

Porovnaním pravých strán týchto rovníc dostávame

$$\left(\mathbf{F}d\mathbf{X}\right)\cdot\mathbf{n}dS = Jd\mathbf{X}\cdot\mathbf{N}dS_0 \tag{4.56}$$

a z toho tzv. *Nansonov vzorec*

$$\mathbf{n}dS = J\left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T\cdot\mathbf{N}dS_0 \qquad \text{alebo} \qquad d\mathbf{S} = J\left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T\cdot d\mathbf{S}_0 \tag{4.57}$$

Absolútnu veľkosť plochy v aktuálnej konfigurácii pomocou hodnôt začiatočnej konfigurácie dostaneme, keď vektory na oboch stranách prvej z týchto rovníc skalárne vynásobíme sebou samým, odmocníme a upravíme pomocou vzťahov pre pravý a ľavý Cauchy-Greenov tenzor deformácie

$$dS = \frac{J}{\sqrt{\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}\mathbf{n}}}dS_0 = J\sqrt{\mathbf{N}\cdot\mathbf{C}^{-1}\mathbf{N}}\,dS_0 \tag{4.58}$$

4.7 Miery rýchlosti deformácie

Dôležitá veličina, ktorá je jednoznačne definovaná v aktuálnej (zdeformovanej) konfigurácii je tenzor Cauchyho napätia $\boldsymbol{\sigma}$ (časť 3.5). V integračných (energetických) rovniciach rovnováhy úloh s malými deformáciami je zviazaný s tenzorom malých deformácií $\boldsymbol{\varepsilon}$ a napr. pre virtuálnu prácu vnútorných síl platí

$$\delta W_{int} = \int_{V_0} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV_0 \tag{4.59}$$

Tento vzťah je len približný, možno ho použiť len pri formulácii a riešení úloh s malými deformáciami, pretože integrácia sa vykonáva na začiatočnom (nezdeformovanom) objeme telesa (stotožňujú sa priestorové súradnice s materiálovými) a navyše tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.60}$$

obsahuje len lineárne členy derivácií funkcií zložiek vektora posunutia $\mathbf{u}(\mathbf{X},t)$ podľa materiálových súradníc.

Pripomeňme si, že tak ako každý tenzor, aj tenzor gradientu posunutia $\mathbf{D}$ (4.11) sa dá rozložiť na symetrickú a antisymetrickú časť

$$\mathbf{D} = \nabla_X \mathbf{u} = \frac{1}{2}\left[(\nabla_X \mathbf{u}) + (\nabla_X \mathbf{u})^T\right] + \frac{1}{2}\left[(\nabla_X \mathbf{u}) - (\nabla_X \mathbf{u})^T\right] \tag{4.61}$$

a tenzor malých deformácií predstavuje symetrickú časť tohto rozkladu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[(\nabla_X \mathbf{u}) + (\nabla_X \mathbf{u})^T\right] \tag{4.62}$$

Predpokladajme, že poznáme rýchlosť častice telesa ako funkciu priestorových súradníc

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}\left(\phi^{-1}(\mathbf{x},t),t\right) \tag{4.63}$$

potom *tenzor gradientu rýchlosti*

$$\boldsymbol{l} = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}} \tag{4.64}$$

môže analogicky ako gradient posunutia zohrať úlohu tvorby miery deformácie, ale vyjadrenej pomocou priestorových súradníc (využíva sa predovšetkým ako miera deformácie častice viskóznej tekutiny). Ak sú rýchlosti všetkých bodov rovnaké, gradient rýchlosti je nulový, k deformácii nedochádza; rozdielna rýchlosť susedicich častíc a z toho vyplývajúci gradient rýchlosti, vyvolá deformáciu . Symetrická časť tohto tenzoru

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left[(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T\right] = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T\right) \tag{4.65}$$

sa nazýva *tenzor rýchlosti deformácie*, nezávisí od tuhého pohybu telesa a slúži ako miera deformácie v priestorových súradniciach. Antisymetrická časť rozkladu gradientu rýchlosti

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left[(\nabla \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v})^T\right] = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^T\right) \tag{4.66}$$

sa nazýva *tenzor spinu* alebo (najmä vo fluidnej mechanike) *tenzor víru rýchlosti*, ktorý udáva rýchlosť rotácie častice nezávisle na jej deformácii.

Pre väzbu medzi aktuálnou a začiatočnou konfiguráciou telesa je potrebné vyjadriť rýchlostné miery deformácie pomocou materiálových súradníc t.j. pomocou veličín, ktoré sú funkciami materiálových súradníc. Najjednoduchšie sa to dá urobiť pomocou derivácie deformačného gradientu podľa času

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \boldsymbol{l}\mathbf{F} \tag{4.67}$$

a z toho

$$\boldsymbol{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \tag{4.68}$$

Dosadením tohto výsledku do (4.66) by sme dostali aj vzťah pre vyjadrenie tenzora rýchlosti $\mathbf{d}$ pomocou materiálových súradníc, užitočnejšie je však jeho vyjadrenie pomocou materiálových mier deformácie. Uvažujme preto elementárne vektory $d\mathbf{X}_1$, $d\mathbf{X}_2$ a ich stav v aktuálnej konfigurácii $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{X}$, $d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}d\mathbf{X}$. Potom po zohľadnení (4.18) platí

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}d\mathbf{X}_2\right) = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C}d\mathbf{X}_2 \tag{4.69}$$

Urobme deriváciu tohto vzťahu podľa času a zohľadnime pritom aj závislosť (4.20) $2\mathbf{E}=\mathbf{C}-\mathbf{I}$

$$\frac{d}{dt}\left(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2\right) = d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{C}}d\mathbf{X}_2 = 2d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{E}}d\mathbf{X}_2 \tag{4.70}$$

kde $\dot{\mathbf{E}}$ je derivácia Green-Lagrangeovho tenzora deformácie podľa času, ktorú možno vyjadriť pomocou deformačného gradientu v tvare

$$\dot{\mathbf{E}} = \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}\right) \tag{4.71}$$

Skalárny súčin s tenzorom $\dot{\mathbf{E}}$ v (4.70) sa dá vyjadriť aj pomocou priestorových elementárnych vektorov $d\mathbf{x}_1$, $d\mathbf{x}_2$ využitím inverzných vzťahov $d\mathbf{X}_1 = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}_1$ a $d\mathbf{X}_2 = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}_2$

$$\frac{d}{dt}\left(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2\right) = 2d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{E}}d\mathbf{X}_2 = 2\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}_1 \cdot \left(\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}_2\right) = 2d\mathbf{x}_1 \cdot \left(\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1}\right) = 2d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{d}\, d\mathbf{x}_2 \tag{4.72}$$

Vyjadrili sme takto náprotivok $\dot{\mathbf{E}}$ v aktuálnej konfigurácii, ktorým je tenzor rýchlosti deformácie

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} \tag{4.73}$$

Presvedčme sa o tom dosadením (4.71) do tohto vzťahu s prihliadnutím na (4.68)

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{F}^{-T}\left(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}\right)\mathbf{F}^{-1} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \dot{\mathbf{F}}\right)\mathbf{F}^{-1} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^T + \boldsymbol{l}\right)
\end{aligned}$$

Energeticky konjugovaná dvojica Cauchyho napätia $\boldsymbol{\sigma}$ a tenzora rýchlosti deformácie $\mathbf{d}$ umožňuje vyjadriť virtuálnu prácu vnútorných síl (4.59) v aktuálnej konfigurácii v tvare

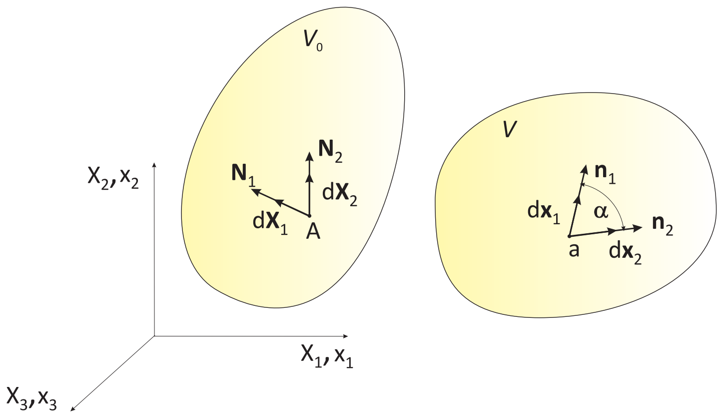
$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}\, dV \tag{4.74}$$

Pretože zdeformovaný objem telesa V nepoznáme, treba tento integrál transformovať na začiatočný objem, čo vyvolá potrebu zavedenia špeciálnych mierok napätia (kapitola 5).

4.8 Fyzikálna interpretácia tenzora rýchlosti deformácie

Podľa vektorovej algebry pre súčin elementárnych vektorov v aktuálnej konfigurácii (obr.4.8) platí $d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\ell_1 d\ell_2 \cos\alpha$. Derivácia tohto súčinu podľa času je

$$\frac{d}{dt}\left(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2\right) = \frac{d\left(d\ell_1\right)}{dt} ds_2 \cos\alpha + d\ell_1 \frac{d\left(d\ell_2\right)}{dt} \cos\alpha - \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} \tag{4.75}$$



Obr. 4.8

Keď ju dáme do rovnosti s jej hodnotou v (4.72) a výslednú rovnicu vydelíme s $d\ell_1 d\ell_2$ dostaneme

$$\frac{1}{d\ell_1}\frac{d\left(d\ell_1\right)}{dt}\cos\alpha + \frac{1}{d\ell_2}\frac{d\left(d\ell_2\right)}{dt}\cos\alpha - \sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} = 2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{d}\mathbf{n}_2 \tag{4.76}$$

kde $\mathbf{n}_i = d\mathbf{x}_i / \mathrm{d}\ell_i$ sú jednotkové vektory.

Zvoľme teraz špeciálny prípad, kedy sa jednotkové vektory stotožnia: $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$. Vtedy $ds_1 = ds_2 = ds$, $\alpha = 0$ a rovnica (4.76) sa zredukuje na

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{dn} = \frac{1}{d\ell}\frac{d\left(d\ell\right)}{dt} \tag{4.77}$$

Výsledok je vlastne definícia tzv. *skutočnej rýchlosti deformácie*, čo je rýchlosť zmeny elementárnej dĺžky podelená touto dĺžkou v aktuálnej konfigurácii. S využitím koeficientu natiahnutia $\lambda = d\ell / dL$, kde dĺžka elementu v začiatočnej konfigurácii dL nezávisí od času, dostaneme

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{dn} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} \tag{4.78}$$

Ak zvolíme jednotkový vektor v smere súradnicovej osi x_1 ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 = (1,0,0)$), potom zo (4.78) zistíme, že rýchlosť natiahnutia v tomto smere udáva diagonálny člen d_{11} tenzora **d**; analogicky pre smer x_2 a x_3 dostaneme d_{22} a d_{33}. Diagonálne členy tenzora rýchlosti deformácie teda udávajú rýchlosť *normálovej* deformácie.

Pre určenie fyzikálneho významu nediagonálnych členov tenzora rýchlosti deformácie zvoľme v (4.76) $\alpha = 90°$. Vtedy sú čiarové elemnty v čase t na seba kolmé a táto rovnica sa zmená na

$$-\frac{d\alpha}{dt} = 2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{dn}_2 \tag{4.79}$$

Zvoľme špeciálny prípad, kedy jednotkové vektory majú smer osí x_1 a x_2. Vtedy dostaneme

$$-\frac{d\alpha}{dt} = 2d_{12} \tag{4.80}$$

Je vidieť, že d_{12} je rýchlosť *šmykovej* deformácie (rýchlosť zmeny pravého uhlu medzi čiarovými elementami). Mínusové znamienko vyjadruje zmenšovanie tohto uhlu. Rovnaký význam majú aj ostatné nediagonálne členy d_{13} a d_{23} pre ďalšie dve kombinácie súradnicových osí. Pretože tenzor rýchlosti je symetrický tenzor, určili sme fyzikálny význam všetkých jeho členov. Ako vidieť, je analogický s fyzikálnym významom členov tenzora malej deformácie $\boldsymbol{\varepsilon}$.

5 Alternatívne miery napätia

Cauchyho napätie $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ je funkciou priestorových súradníc $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ a vyjadruje napätie v aktuálnej (zdeformovanej) konfigurácii telesa. Pri rozbore kinematiky veľkých deformácií telesa sme uviedli dve deformačné miery, ktoré sú súradnicovo kompatibilné s Cauchyho napätím: sú to tenzor gradientu rýchlosti

$$\boldsymbol{l} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}} \tag{5.1}$$

a symetrická časť tohto tenzoru, tzv. tenzor rýchlosti deformácie

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T\right) \tag{5.2}$$

V súčine s Cauchyho napätím dávajú vnútornú deformačnú energiu jednotkového objemu za časovú jednotku a sú vhodné pre tvorbu energetických podmienok rovnováhy telesa v aktuálnej konfigurácii. O takejto dvojici hovoríme, že je energeticky konjugovaná (spojená, zviazaná). Ak si za mieru deformácie zvolíme tenzor gradientu rýchlosti, potom vnútorná virtuálna energia telesa v čase *t* je

$$\delta W_{int} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{l} \, dV \tag{5.3}$$

kde V je zdeformovaný objem telesa. Pretože tento objem nepoznáme, treba integrál (a potom i kompletnú podmienku rovnováhy) vyjadriť pre známy začiatočný objem V_0 a integrant transformovať na funkciu materiálových súradníc. Potrebné vzťahy na tento postup sme pripravili v kapitole 3 odkiaľ preberáme

$$dV = (\det \mathbf{F})\, dV_0 = J\, dV_0 \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{l} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \tag{5.5}$$

kde J je Jacobián deformačného gradientu $\mathbf{F}$. Pomocou týchto vzťahov možno (5.3) prepísať na

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} J\boldsymbol{\sigma} : \left(\delta \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right) dV_0 = \int_{V_0} tr\left(J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\delta\dot{\mathbf{F}}\right) dV_0 = \int_{V_0} \left(J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\right) : \delta\dot{\mathbf{F}}\, dV_0 \tag{5.6}$$

kde sa uplatnili vhodné vzťahy z ponuky tenzorových operácií

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} : \mathbf{B} = tr\left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\right) = tr\left(\mathbf{B}\mathbf{A}^T\right) = tr\left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\right) = tr\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^T\right) \\ &tr(\mathbf{ABC}) = tr(\mathbf{CAB}) = tr(\mathbf{BCA}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Výsledok v (5.6) možno zapísať v tvare

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \mathrm{P} : \delta\dot{\mathbf{F}}\, dV_0 \tag{5.8}$$

kde tenzor

$$\mathrm{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \tag{5.9}$$

sa nazýva *prvé Piola-Kirchhoffovo napätie*, ktoré, ako vidieť zo (5.8) je energeticky zviazané s rýchlosťou deformačného gradientu $\dot{\mathbf{F}}$. Alternatívnym uplatnením pravidiel (5.7) by sme v (5.6) dostali transponovanú hodnotu P, tzv. *nominálne napätie*

$$\mathrm{N} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{P}^{T} \tag{5.10}$$

Je užitočné na tomto mieste si pripomenúť fyzikálny význam Cauchyho napätia a porovnať ho s fyzikálnym významom prvého Piola-Kirchhoffovho napätia. Cauchyho vektor napätia $\mathbf{p}$ vyjadruje podiel elementárnej sily $d\mathbf{P}$ a elementárnej plošky dS v aktuálnej konfigurácii a platí (kapitola 3)

$$d\mathbf{P} = \mathbf{p}dS = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}dS = \boldsymbol{\sigma}d\mathbf{S} \tag{5.11}$$

Vyjadrime teraz pomocou tohto vzťahu elementárnu silu v aktuálnej konfigurácii $d\mathbf{P}$ tak, že vektor plošky v (5.11) transformujeme pomocou Nansonovho vzorca (4.57)

$$d\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{S}_0 \tag{5.12}$$

do začiatočnej konfigurácie

$$d\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{S}_0 = \mathrm{P}d\mathbf{S}_0 \tag{5.13}$$

Zo (5.13) vyplýva, že prvé Piola-Kirchhoffovo napätie, tak ako jeho deformačný partner $\dot{\mathbf{F}}$, je tzv. "dvojbodový" tenzor (je to podiel elementárnej sily v *aktuálnej* konfigurácii na plošku v *začiatočnej* konfigurácii), navyše nesymetrický, a preto je známejšia a viac sa využíva jeho symetrická alternatíva *druhé Piola-Kirchoffovo napätie*. Toto napätie vyplynie zo zviazania Cauchyho napätia so symetrickým tenzorom rýchlosti deformácie $\mathbf{d}$ v rovnici (5.3)

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}\, dV \tag{5.14}$$

Pri transformácii tohto integrálu na začiatočný objem opäť platí $dV = JdV_0$ a podľa (4.73)

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T}\delta\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} \tag{5.15}$$

takže

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} J\boldsymbol{\sigma} : \left(\mathbf{F}^{-T}\delta\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1}\right) dV_0 \tag{5.16}$$

S využitím z (5.7) $\mathbf{A}:\mathbf{B} = tr\left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\right)$ a s platnosťou $tr(\mathbf{ABCD}) = tr(\mathbf{CDAB})$ možno (5.16) upraviť na

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} tr\left(\mathbf{F}^{-1}J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\delta\dot{\mathbf{E}}\right) dV_0 = \int_{V_0} \mathrm{S} : \delta\dot{\mathbf{E}}\, dV_0 \tag{5.17}$$

kde

$$\mathrm{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \tag{5.18}$$

je symetrický tenzor *druhého Piola-Kirchhoffovho napätia*, ktorý, ako vidieť z (5.17) je energeticky združený s rýchlosťou Green-Lagrangeovho tenzora deformácie $\dot{\mathbf{E}}$, resp. s variáciou alebo virtuálnou zmenou $\delta\mathbf{E}$.

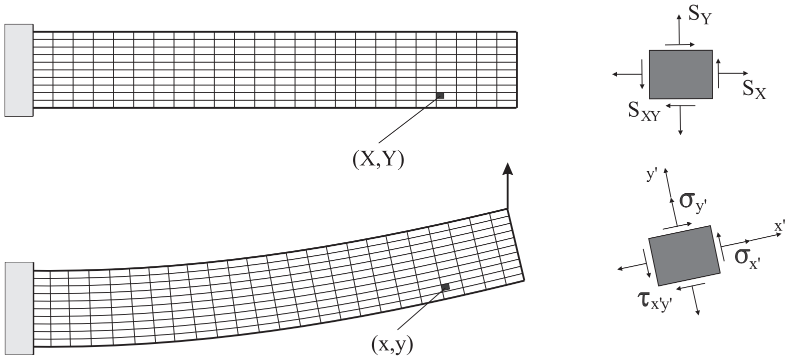
Za svoju pomerne značnú popularitu vďačí druhé Piola-Kirchhoffovo napätie jednej svojej vlastnosti, ktorú teraz stručne ozrejmíme. Pri úlohách s veľkými posunutiami a veľkými rotáciami, ale malými deformáciami, platí

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{R}\,; \qquad \text{a tiež} \qquad J = \rho_0 / \rho \approx 1 \tag{5.19}$$

kde $\mathbf{R}$ je ortogonálny tenzor rotácie ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$). Potom sa (5.18) zjednoduší na

$$\mathrm{S} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R} \tag{5.20}$$

z čoho vyplýva, že zložky tenzorov S a $\boldsymbol{\sigma}$ sú v takomto prípade rovnaké, ale zložky Cauchyho napätia sú oproti materiálovým osiam X, Y, Z natočené o uhly vyplývajúce z $\mathbf{R}$. Tento vzťah medzi zložkami S a $\boldsymbol{\sigma}$ pri rovinnej úlohe MKP ilustruje obr. 5.1



Obr. 5.1

Pri formulácii niektorých úloh možno využiť tenzor *Kirchhoffovho napätia* $\boldsymbol{\tau}$, ktorý dostaneme z (5.14) po jednoduchom prechode na integrál po začiatočnom objeme pomocou vzťahu $dV = JdV_0$

$$\delta W_{\mathrm{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d}\, dV = \int_{V_0} J\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d}\, dV = \int_{V_0} \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{d}\, dV_0 \tag{5.21}$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že Kirchhoffovo napätie

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \tag{5.22}$$

je energeticky zviazané s tenzorom rýchlosti deformácie v integrali cez *začiatočný* objem. Je to ale veličina vyjadrovaná v priestorových súradniciach.

Uveďme ešte pre úplnosť inverzné vzťahy alternatívnych mier napätia

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathrm{P}\mathbf{F}^T\,; \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathrm{S}\mathbf{F}^T\,; \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\tau} \tag{5.23}$$

Poznamenávame, že Cauchyho napätie je najlepšia miera skutočného napätia v deformovanom telese. Ostatné miery treba chápať ako prostriedok využívaný na formuláciu a riešenie nelineárnych úloh s následnou transformáciou na Cauchyho napätie.

6 Totálna Lagrangeovská formulácia

Riešenie okrajových a začiatočných úloh poddajného telesa pomocou MKP vychádza z princípu virtuálnych prác, resp. jeho alternatív, ako je napr. princíp virtuálnych posunutí. Tento princíp sme v predchádzajúcich častiach aplikovali na *aktuálnu* konfiguráciu telesa, pričom sme vychádzali z diferenciálnych (lokálnych, bodových) rovníc rovnováhy

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{6.1}$$

kde σ_{ij} sú zložky tenzora Cauchyho napätia b_i sú zložky vektora objemových síl vztiahnutých na jednotku objemu. Pretože nás zaujíma riešenie *stacionárnej* úlohy, do (6.1) sme nezahrnuli zotrvačné sily. Ak na body telesa (s výnimkou bodov kde sú predpísané reálne posunutia) aplikujeme spojité virtuálne posunutia $\delta u_i(x,y,z)$ a takto upravené rovnice (6.1) zitegrujeme po aktuálnom objeme telesa *V* dostaneme

$$\int_V \left(\sigma_{ji,j} + b_i\right)\delta u_i dV = 0 \tag{6.2}$$

Postupom uvedenom v časti 3.6 dostaneme zo (6.2) výsledný tvar globálnej podmienky rovnováhy telesa (v tenzorovom zápise)

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \int_V \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV - \int_{S_p} \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u}\, dS \tag{6.3}$$

kde **b** a **p** sú vektory objemového a plošného zaťaženia a $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ predstavuje virtuálnu zmenu tenzora analogického s tenzorom malých deformácií, ktorý sa pri odvádzaní (6.3) zaviedol v tvare

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\delta\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\right) + \delta\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\delta\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right] \tag{6.4}$$

Všetky veličiny v uvedených vzťahoch sú funkciami *priestorových* súradníc a integrály treba vyjadriť na neznámom zdeformovanom objeme a zdeformovanej ploche. Podmienka rovnováhy (6.3) sa využíva pri *Eulerovskej formulácii* alebo pri takzvanej *aktualizovanej (updated)* Lagrangeovskej formulácii úlohy.

Pre úplnosť uveďme, že pokiaľ by sme na teleso aplikovali viruálnu zmenu rýchlosti $\delta v_i(x,y,z)$, rovnakým postupom by sme dostali rovnicu rovnováhy (princíp virtuálnych výkonov) v tvare

$$\delta W = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}\, dV - \int_V \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{v}\, dV - \int_{S_p} \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{v}\, dS \tag{6.5}$$

kde $\delta\mathbf{d}$ je virtuálna zmena tenzoru rýchlosti deformácie (časť 4.7)

$$\delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\delta l + \delta l^T\right) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\right) + \delta\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\delta\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right] \tag{6.6}$$

Zaoberajme sa teraz vyjadrením globálnej (integrálnej) podmienky rovnováhy staticky zaťažovaného telesa pomocou *materiálových* súradníc. Dopredu prezradíme, že sa využíva pri tzv. *totálnej Lagrangeovskej formulácii* úlohy, o ktorej budeme hovoriť v súvislosti s touto podmienkou. Pri virtuálnej zmene *posunutia* $\mathbf{u}$ virtuálna práca vnútorných síl na začiatočnej konfigurácii telesa je (kapitola 5)

$$\delta W_{\mathrm{int}} = \int_{V_0} \mathrm{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 \tag{6.7}$$

kde S je tenzor druhého Piola-Kirchhoffovho napätia, $\mathbf{E}$ je tenzor Green-Lagrangeovej deformácie a V_0 je začiatočný (nemenný) známy objem telesa. Pokiaľ je vonkajšie zaťaženie konzervatívne (nezávislé od deformácie telesa) virtuálna práca vonkajších síl je

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_0} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS \tag{6.8}$$

V prípade že vonkajšie sily sú závislé od deformácie, treba ich definovať na aktuálnej konfigurácii a transformovať na začiatočnú podľa transformačných vzťahov pre *dV* a *dS* (časti 4.5 a 4.6).

V totálnej Lagrangeovej formulácii sa teda využíva princíp virtuálnych posunutí v tvare

$$\delta W = \delta W_{\mathrm{int}} - \delta W_{ext} = \int_{V_0} \mathrm{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_0} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS \tag{6.9}$$

a deformačný pohyb materiálových bodov telesa je určovaný poľom posunutí $\mathbf{u}(\mathbf{X},t)$, kde pri stacionárnych úlohách čas t je len formálnou mierou iteračného procesu riešenia úlohy a vektor $\mathbf{X}$ obsahuje známe súradnice bodov nemennej začiatočnej konfigurácie. Aktuálna konfigurácia (poloha bodov po deformácii) sa určuje zo vzťahu

$$\mathbf{x}(\mathbf{X},t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X},t) \tag{6.10}$$

Prvým krokom úpravy (6.9) pre využitie v deformačnom variante MKP je vyjadrenie $\delta\mathbf{E}$ a S pomocou $\mathbf{u}$ a $\delta\mathbf{u}$, čo nakoniec povedie k sústave rovníc, kde primárnymi neznámymi budú zložky posunutia $\mathbf{u}$. O Green-Lagrangeovom tenzore deformácie $\mathbf{E}$ z časti 4.3 vieme, že platí

$$2\mathbf{E} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I} = (\mathbf{I} + \mathbf{D})^T (\mathbf{I} + \mathbf{D}) - \mathbf{I} \tag{6.11}$$

a z toho

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T\right) + \frac{1}{2}\mathbf{D}^T\mathbf{D} \tag{6.12}$$

pričom

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial X} & \dfrac{\partial u}{\partial Y} & \dfrac{\partial u}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial X} & \dfrac{\partial v}{\partial Y} & \dfrac{\partial v}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial X} & \dfrac{\partial w}{\partial Y} & \dfrac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

Virtuálna zmena $\delta\mathbf{E}$, v ktorej $\mathbf{E}$ je funkciou $\mathbf{u}$, sa musí urobiť s ohľadom na to, že $\mathbf{u}$, ako vidieť z (6.10), je zviazané s deformačným pohybom bodu telesa. Zo (6.12) dostávame

$$\delta\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\delta\mathbf{D}+\delta\mathbf{D}^T\right)+\frac{1}{2}\mathbf{D}^T\delta\mathbf{D}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{D}^T\mathbf{D} \qquad (6.14)$$

pretože $\mathbf{F}=\mathbf{I}+\mathbf{D}$, platí tiež

$$\delta\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\delta\mathbf{D}+\delta\mathbf{D}^T\mathbf{F}\right) \qquad (6.15)$$

kde podľa (6.13)

$$\delta\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\frac{\partial(\delta u_1)}{\partial X_1} & \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial X_2} & \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial X_3}\\ \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial X_1} & \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial X_2} & \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial X_3}\\ \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial X_1} & \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial X_2} & \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial X_3}\end{bmatrix} \qquad (6.16)$$

V (6.14) sme uvažovali veľmi malé virtuálne zmeny $\delta\mathbf{u}$ a zanedbali sme nelineárny člen $\frac{1}{2}\delta\mathbf{D}^T\delta\mathbf{D}$; výsledok je vlastne *smerová derivácia* (directional derivative) $\mathbf{E}$ v smere $\mathbf{u}$, ktorú možno využiť v procese iteračného riešenia úlohy pomocou Newton-Raphsonovej metódy (pozri dole poznámku).

Ak je teleso v rovnováhe, potom aj každá jeho časť musí byť v rovnováhe. Po rozdelení telesa na konečné prvky, potom uvedené vzťahy platia aj pre všeobecný e-ty konečný prvok. Jeho *tangenciálnu maticu tuhosti* možno určiť [2] z diferenciálu vnútornej virtuálnej energie (6.7)

$$d\left(\delta W_{\text{int}}\right)_e=\int_{V_0}\left[dS:\delta\mathbf{E}dV_0+S:d\left(\delta\mathbf{E}\right)\right]dV_e \qquad (6.17)$$

kde z (6.14) dostávame

$$d\left(\delta\mathbf{E}\right)=\tfrac{1}{2}\left(d\mathbf{D}^T\delta\mathbf{D}+\delta\mathbf{D}^Td\mathbf{D}\right) \qquad (6.18)$$

A na záver ešte uplatnime v (6.17) konštitutívnu rovnicu (vzťah medzi deformáciou a napätím) v tvare

$$dS=\mathbb{D}:d\mathbf{E} \qquad \rightarrow \qquad dS_{ij}=D_{ijkl}dE_{kl} \qquad (6.19)$$

kde $\mathbb{D}$ je materiálový tenzor 4. rádu a dostaneme

$$d\left(\delta W_{\text{int}}\right)_e=\int_{V_0}\left[\delta\mathbf{E}:\mathbb{D}:d\mathbf{E}+S:\delta\mathbf{D}^Td\mathbf{D}\right]dV_e \qquad (6.20)$$

Pomocou uvedených vzťahov sme v [2] riešili rovinnú napätosť telesa z izotropného lineárne elastického materiálu s uvažovaním veľkých rotácií a posunutí. Explicitné vzťahy pre izoparametické 8 a 9 uzlové prvky sme algoritmicky spracovali a zabudovali do fortranovského programu NELMKP, ktorý je v práci uvedený v zdrojovom tvare.

Poznámka

Smerová derivácia nelineárnej funkcie (nelineárneho funkcionálu, tenzora a pod.) poskytuje linearizovaný prírastok takejto funkcie v smere premennej, v našom prípade v smere vektora virtuálneho posunutia $\delta\mathbf{u}$.

Ak využijeme vzťahy z časti 3

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t) = \nabla\phi(\mathbf{X},t); \qquad \mathbf{D} = \nabla\mathbf{u}(\mathbf{X},t); \qquad \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right)$$

potom smerová derivácia $\mathbf{F}$ v smere $\mathbf{u}$ je

$$D\mathbf{F}(\phi)[\delta\mathbf{u}] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big[\nabla\big(\phi + \varepsilon(\delta\mathbf{u})\big)\Big]_{e=0} = \nabla(\delta\mathbf{u}) = \delta\mathbf{D}$$

Smerová derivácia Green-Lagrangeovho tenzora deformácie v smere $\mathbf{u}$ potom je

$$D\mathbf{E}[\delta\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T D\mathbf{F}[\delta\mathbf{u}] + D\mathbf{F}^T[\delta\mathbf{u}]\mathbf{F}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\delta\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}^T\mathbf{F}\right)$$

čo súhlasí so (6.15).

7 Lagrangeovská formulácia geometricky nelineárneho prvku rovinnej napätosti

Zjednodušenie všeobecnej priestorovej napätosti na rovinnú napätosť sa využíva pri telese, ktoré má rovinnú plochu symetrie, tzv. stredovú rovinu, pričom všetky zaťaženia telesa pôsobia len v tejto rovine. Za týchto predpokladov, ak stredovú rovinu telesa umiestnime do roviny *X,Y*, bude mať vektor posunutia len dve zložky

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

a zredukujú sa aj vektory deformácie a napätia. V prípade izotropného lineárne elastického materiálu a použití mierok $\mathbf{S}$ a $\mathbf{E}$ fyzikálne rovnice sú

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_X \\ S_Y \\ S_{XY} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ \gamma_Z \end{bmatrix} = \mathbf{DE} \tag{7.2}$$

Na rozdiel od napätia v smere osi *Z*, deformácia v tomto smere nie je nulová (vyvoláva ju priečna kontrakcia pri nenulovom Poissonovom čísle materiálu), dá sa však určiť z ostatných zložiek

$$E_Z = -\frac{\mu}{1-\mu}(E_X + E_Y)$$

Budeme predpokladať, že teleso má taký tvar a je tak zaťažené, že v ňom vznikajú len *malé deformácie, ale veľké rotácie a posunutia.*

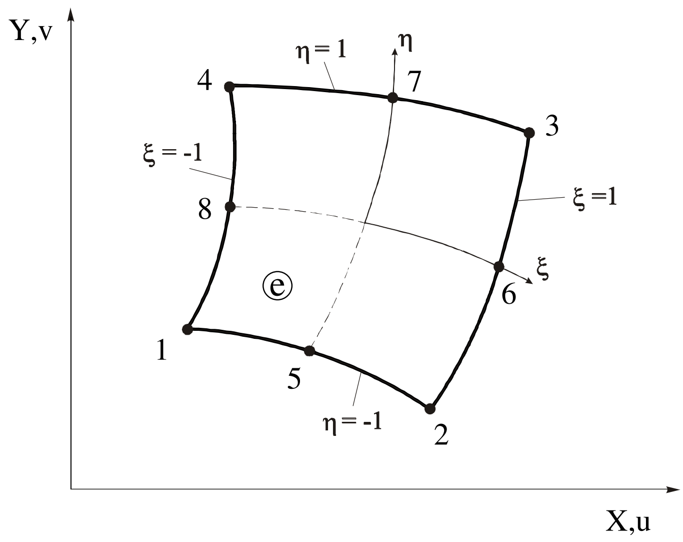
Pri tvorbe matíc konečného prvku rovinnej napätosti sa v podstate postupuje tak, ako pri tvorbe matíc prútového a nosníkového prvku. Pri určovaní vektora vnútorných uzlových síl prvku $\mathbf{q}^e$, budeme opäť vychádzať z princípu rovnosti virtuálnej práce vnútorných a vonkajších síl prvku (časť 3.6)

$$\int_{V_e} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} dV_0 - dW_{vonk} = 0 \tag{7.3}$$

kde do argumentu integrálu po objeme prvku musíme vyjadriť virtuálnu zmenu vektora $\mathbf{E}$ pri virtuálnej zmene posunutia všeobecného bodu prvku $\delta\mathbf{u} = [\delta u \quad \delta v]^T$.

Vhodný prvok na riešenie rovinnej napätosti je osemuzlový izoparametrický prvok (obr. 7.1), ktorého interpolačné (tvarové) funkcie definované prirodzenými súradnicami ξ a η sú (napr. [1])

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) & N_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) & N_7 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{7.4}$$



Obrázok 7.1 Rovinný osemuzlový izoparametrický prvok s lokálnym číslovaním uzlov

Interpolačné funkcie umožňujú vyjadriť zložky posunutia bodu prvku určeného prirodzenými súradnicami ξ, η pomocou posunutí uzlových bodov

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \cdots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ \vdots \\ v_8^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\xi,\eta)\mathbf{u}^e \qquad (7.5)$$

Reálnu polohu bodu na prvku nájdeme pomocou tých istých interpolačných funkcií a známych (zadaných) súradníc uzlových bodov prvku

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X(\xi,\eta) \\ Y(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \cdots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^e \\ Y_1^e \\ X_2^e \\ \vdots \\ Y_8^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\xi,\eta)\,\mathbf{X}^e \qquad (7.6)$$

Problémy s derivovaním a integrovaním funkcií typu $f(\xi,\eta)$ podľa premenných *X,Y*, sa prekonávajú rovnakými postupmi ako pri lineárnych úlohách. Ak pre takúto funkciu, napr. ľubovoľnú interpolačnú funkciu N_i, použijeme pravidlo derivovania funkcie viacerých premenných, môžeme napísať

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

Pretože výsledok pre η je analogický, v maticovom tvare dostávame

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_e \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

kde $\mathbf{J}_e$ je Jakobián tejto transformácie, ktorého členy sa zo (7.6) dajú ľahko vyjadriť. Výsledné vzťahy pre derivácie N_i podľa globálnych súradníc dostaneme invertovaním tohto vzťahu (7.7)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_e^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \eta} & -\frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Podľa vzoru (7.7) vyjadríme zo (7.5) derivácie zložiek posunutia a usporiadame ich do vektora

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial X} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial X} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial X} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ \vdots \\ v_8^e \end{bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{u}^e \tag{7.9}$$

Virtuálna zmena posunutí uzlových bodov $\delta \mathbf{u}^e$ vyvolá virtuálnu zmenu vektora $\boldsymbol{\theta}$

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta u}{\partial X} & \frac{\partial \delta u}{\partial Y} & \frac{\partial \delta v}{\partial X} & \frac{\partial \delta v}{\partial Y} \end{bmatrix}^T = \mathbf{G}\delta\mathbf{u}^e \tag{7.10}$$

Pomocou uvedených vzťahov a (4.23) vieme už teraz, zo známych posunutí uzlových bodov prvku $\mathbf{u}^e$ a súradníc týchto bodov v začiatočnej konfigurácii $\mathbf{X}^e$, vyjadriť zložky Green-Lagrangeovho vektora deformácie vo všeobecnom bode prvku

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & 0 & \frac{\partial v}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_L + \frac{1}{2}\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \tag{7.11}$$

Virtuálnu zmenu tejto deformácie (vyvolanú virtuálnymi zmenami zložiek posunutia δu a δv) možno vyjadriť v tvare

$$\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}_L + \frac{1}{2}\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \delta\mathbf{E}_L + \mathbf{A}\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}\delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}\delta\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{H} + \mathbf{A})\delta\boldsymbol{\theta} \tag{7.12}$$

kde sa uplatnila rovnosť $\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$ a zaviedla pomocná matica

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

Dosadením za $\delta\boldsymbol{\theta}$ zo (7.10) sa virtuálna zmena deformácie (7.12) môže upraviť na konečný tvar

$$\delta\mathbf{E}=\left(\mathbf{H}+\mathbf{A}\right)\mathbf{G}\delta\mathbf{u}^e=\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}^e)\delta\mathbf{u}^e \tag{7.13}$$

Odvodili sme tak transformačnú maticu deformácie

$$\mathbf{B}_{NL}=\left(\mathbf{H}+\mathbf{A}\right)\mathbf{G} \tag{7.14}$$

ktorá z prírastku posunutí uzlových bodov umožňuje vypočítať prírastok deformácie vo všeobecnom bode prvku. Je základom pre výpočet vektora vnútorných uzlových síl prvku a výpočet materiálovej matice tuhosti prvku i matice geometrickej tuhosti. Je to tangenciálna matica, a teda pri konečných prírastkoch posunutí $\Delta\mathbf{u}^e$ dostávame len linearizovanú aproximáciu deformácie $\Delta\mathbf{E}$. To platí potom aj pre všetky matice prvku obsahujúce $\mathbf{B}_{NL}$ a následne aj pre globálne matice úlohy a iterácia rovnovážnych rovníc je pri úlohe s veľkými rotáciami a posunutiami nevyhnutná.

Pri lineárnej úlohe z (7.12) a (7.13) dostaneme

$$\delta\mathbf{E}=\delta\mathbf{E}_L=\mathbf{HG}\delta\mathbf{u}^e=\mathbf{B}_L\delta\mathbf{u}^e \tag{7.15}$$

kde

$$\mathbf{B}_L=\mathbf{HG}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial X}&0&\frac{\partial N_2}{\partial X}&0&\cdots&\frac{\partial N_8}{\partial X}&0\\0&\frac{\partial N_1}{\partial Y}&0&\frac{\partial N_2}{\partial Y}&\cdots&0&\frac{\partial N_8}{\partial Y}\\\frac{\partial N_1}{\partial Y}&\frac{\partial N_1}{\partial X}&\frac{\partial N_2}{\partial Y}&\frac{\partial N_2}{\partial X}&\cdots&\frac{\partial N_8}{\partial Y}&\frac{\partial N_8}{\partial X}\end{bmatrix} \tag{7.16}$$

je transformačná matica deformácie známa z riešenia lineárnej úlohy rovinnej napätosti.

Dosadením (7.13) do podmienky rovnováhy prvku (7.3) dostávame

$$\delta\mathbf{u}_e^T\int_{V_e}\mathbf{B}_{NL}^T\mathbf{S}dV_0-\delta\mathbf{u}_e^T\mathbf{f}_e=0 \qquad\rightarrow\qquad \int_{V_e}\mathbf{B}_{NL}^T\mathbf{S}dV_0-\mathbf{f}_e=0 \tag{7.17}$$

kde $\mathbf{f}_e$ je vektor vonkajších uzlových síl prvku. Pre vektor vnútorných uzlových síl prvku teda platí

$$\mathbf{q}_e=\int_{V_e}\mathbf{B}_{NL}^T\mathbf{S}dV_0=\int_{V_e}\mathbf{G}^T\left[\mathbf{H}+\mathbf{A}\right]^T\mathbf{S}dV_0 \tag{7.18}$$

Tangenciálnu maticu tuhosti prvku dostaneme z virtuálnej zmeny vektora vnútorných uzlových síl

$$\delta\mathbf{q}_e=\int_{V_e}\left(\mathbf{B}_{NL}^T\delta\mathbf{S}+\delta\mathbf{B}_{NL}^T\mathbf{S}\right)dV_0 \tag{7.19}$$

Z prvého člena tohto vzťahu dostaneme materiálovú maticu prvku

$$\int_{V_e} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{E} dV_0 = \int_{V_e} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u}^e dV_0 = \mathbf{K}_M^e \delta \mathbf{u}^e \qquad (7.20)$$

Pretože $\delta \mathbf{H} = \mathbf{0}$ a $\delta \mathbf{G} = \mathbf{0}$, zo (7.14) dostávame

$$\delta \mathbf{B}_{NL}^T = \mathbf{G}^T \delta \mathbf{A}^T$$

a druhý integrál v (7.19) určuje geometrickú maticu tuhosti prvku

$$\int_{V_e} \delta \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{S} dV_0 = \int_{V_e} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{A}^T \mathbf{S} dV_0 = \int_{V_e} \mathbf{G}^T \widehat{\mathbf{S}} \delta \boldsymbol{\theta} dV_0 = \int_{V_e} \mathbf{G}^T \widehat{\mathbf{S}} \mathbf{G} dV_0 \delta \mathbf{u}^e = \mathbf{K}_G \delta \mathbf{u}^e \qquad (7.21)$$

kde sa využila rovnosť $\delta \mathbf{A}^T \{\mathbf{S}\} = \widehat{\mathbf{S}} \delta \boldsymbol{\theta}$ s pomocnou maticou

$$\widehat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_X & S_{XY} & 0 & 0 \\ S_{XY} & S_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_X & S_{XY} \\ 0 & 0 & S_{XY} & S_Y \end{bmatrix}$$

Výsledná tangenciálna matica prvku je

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{K}_M^e + \mathbf{K}_G^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL}^T dV_0 + \int_{V_e} \mathbf{G}^T \widehat{\mathbf{S}} \mathbf{G} dV_0 \qquad (7.22)$$

Určenie vektora vnútorných uzlových síl a tangenciálnej matice tuhosti prvku umožňuje jeho využitie v nelineárnom programe MKP na riešenie úloh rovinnej napätosti so zohľadnením veľkých rotácií a posunutí telesa (pozri v programe NELMKP [2] prvky ELMT03 a ELMT04).

Integrály po objeme prvku sa pri použití izoparametrického prvku vykonávajú, tak ako pri lineárnych úlohách, numericky. Napr. výsledný vzťah pre algoritmické a programové spracovanie výpočtu materiálovej matice tuhosti prvku z (7.22) s konštantnou hrúbkou t dostaneme týmito krokmi

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_M^e &= \int_{V_e} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} dV = t \iint_{S_e} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} dX dY = t \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} \det \mathbf{J}_e d\xi d\eta \approx \\ &\approx t \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} w_i w_j \left[\mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{NL} \det \mathbf{J}_e \right]_{\xi_i, \eta_j} \end{aligned} \qquad (7.23)$$

kde n je počet integračných bodov v jednom smere a w_i, w_j sú váhové násobky pre súradnice integračných bodov ξ_i, η_j podľa tabuľky 7.1.

Tabuľka 7. 1

Počet integračných bodov n v jednom smere	Ich poloha ξ_i	Násobky w_i
1	$\xi_1 = 0$	$w_1 = 2$
2	$\xi_{1,2} = \mp 1/\sqrt{3}$,	$w_1 = w_2 = 1$
3	$\xi_{1,3} = \mp\sqrt{0,6}$, $\xi_2 = 0$	$w_1 = w_2 = 5/9$, $w_2 = 8/9$

Algoritmické a programové spracovania matíc prvku rovinnej napätosti je uvedené vo fortranovskom programe NELMK [2]. Kvôli jednoduchšiemu generovaniu uzlových a prvkových údajov je v ňom zabudovaný aj deväťuzlový Lagrangeov prvok s tvarovými funkciami

$$N_1 = \frac{1}{4}\,\xi(1-\xi)(1-\eta)\,\eta$$

$$N_2 = -\frac{1}{4}\,\xi(1+\xi)(1-\eta)\,\eta$$

$$N_3 = \frac{1}{4}\,\xi(1+\xi)(1+\eta)\,\eta$$

$$N_4 = -\frac{1}{4}\xi(1-\xi)(1+\eta)\,\eta$$

$$N_5 = -\frac{1}{2}(1-\eta)\left(1-\xi^2\right)\eta$$

$$N_6 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)\left(1-\eta^2\right)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1+\eta)\left(1-\xi^2\right)\eta$$

$$N_8 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)\left(1-\eta^2\right)$$

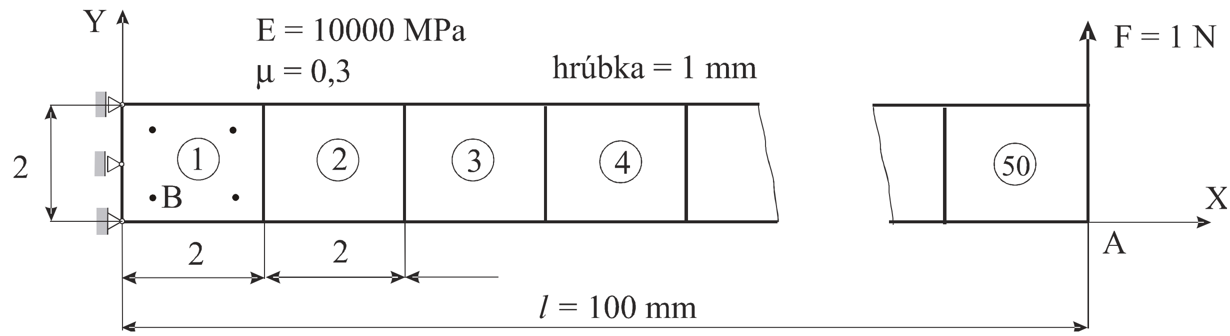
$$N_9 = \left(1-\eta^2\right)\left(1-\xi^2\right)$$

Číslovanie uzlov je podľa obr. 7.1, pričom deviaty uzol leží v strede prvku (pre $\xi = 0$ a $\eta = 0$, je $N_9 = 1$). Prvok vyžaduje 3 x 3 integračných bodov pri výpočte matice tuhosti.

Pomocou programu NELMKP sme vypočítali nasledujúci príklad:

Príklad 7.1

Pre nosník na obrázku s vyznačeným delením na 8-uzlové prvky treba určiť pomocou programu NELMKP zložky priehybu nosníka v uzlovom bode A a zložky napätia v integračnom bode B. Výsledky porovnajte s riešením pomocou programu ANSYS.



Obr. 7.2

Analytické lineárne riešenie

Priehyb koncového bodu nosníka (maximálny priehyb)

$$v_{max} = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{1\cdot 100^3}{3\cdot 10^4\,\frac{1}{12}1\cdot 2^3} = 50\ \text{mm}$$

Napätie v integračnom bode B

$$\sigma_{XB} = \frac{M_B}{I_Z} Y_B = \frac{1 \cdot 100}{\frac{1}{12} 1 \cdot 2^3} \frac{1}{\sqrt{3}} = 86{,}60 \text{ MPa}$$

Riešenie úlohy s programom NELMKP

Vzhľadom na to, že ide o úlohu s malými deformáciami, dostatočne presné výsledky by malo dať aj riešenie s Green-Lagrangeovými zložkami deformácie a zložkami druhého Piola-Kirchhoffovho napätia, s ktorými program pri tomto type prvku (ELMT03) pracuje. Osemuzlové prvky sme zvolili vzhľadom na to, že umožňujú jednoduché porovnanie výsledkov s výsledkami určenými pomocou ANSYSu, ktorý nepoužíva 9-uzlové prvky.

Vstupné hodnoty:

```
Rovinna napatost
253,50,1,2,2,8,1
KOOR
4,5,1,0
249,0,99,0
5,5,1,2
250,0,99,2
1,5,0,0
251,0,100,0
2,5,0,1
252,0,100,1
3,5,0,2
253,0,100,2

ELEM
1,1,1,6,8,3,4,7,5,2,5
50,1,246,251,253,248,249,252,250,247,
MATE
    1    3
1.e4,0.3,1.,2,2,1,
KRAJ
1,0,1,1
2,0,1,0
3,0,1,0

SILY
253,0,0.,1.

END
```

Výsledky:

```
Rovinna napatost
     CELKOVY POCET UZLOVYCH BODOV   =   253
     POCET ELEMENTOV                =    50
     POCET MATERIALOVYCH SKUPIN     =     1
     ROZMER SURADNICOVEHO PRIESTORU =     2
     POCET STUPNOV VOLNOSTI UZLA    =     2
     POCET UZLOV ELEMENTU(MAXIMALNY)=     8
     POCET PRIPADOV ZATAZENIA       =     1

     UZL. SURADNICE
      UZOL      1 SURAD      2 SURAD
         1        .0000        .0000
         2        .0000       1.0000
```

3	.0000	2.0000
4	1.0000	.0000
5	1.0000	2.0000
6	2.0000	.0000
7	2.0000	1.0000
8	2.0000	2.0000
9	3.0000	.0000
10	3.0000	2.0000
11	4.0000	.0000
....	....	....
....	....	....
243	96.0000	2.0000
244	97.0000	.0000
245	97.0000	2.0000
246	98.0000	.0000
247	98.0000	1.0000
248	98.0000	2.0000
249	99.0000	.0000
250	99.0000	2.0000
251	100.0000	.0000
252	100.0000	1.0000
253	100.0000	2.0000

ELEMENTY

ELEMENT	MATERIAL	1 UZOL	2 UZOL	3 UZOL	4 UZOL	5 UZOL	6 UZOL	7 UZOL	8 UZOL
1	1	1	6	8	3	4	7	5	2
2	1	6	11	13	8	9	12	10	7
3	1	11	16	18	13	14	17	15	12
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
48	1	236	241	243	238	239	242	240	237
49	1	241	246	248	243	244	247	245	242
50	1	246	251	253	248	249	252	250	247

MATER. SKUPINA 1 PRE ELEMENT TYPU 3

ROVINNA NAP. LINEARNE ELAST.PRVOK

MODUL PRUZNOSTI .10000E+05
POISSONOVO CISLO .30000
HRUBKA .10000E+01
G.BODY= 2
NAP.BODY= 2

OKRAJOVE PODMIENKY UZLOV

UZOL	1 O.P.	2 O.P.
1	1	1
2	1	0
3	1	0

UZL. ZATAZENIA

UZOL	1 ZATAZ	2 ZATAZ
1	.0000	.0000
2	.0000	.0000
3	.0000	.0000
....	....	....
....	....	....
251	.0000	.0000
252	.0000	.0000
253	.0000	1.0000

VYSLEDKY VYPOCTU

LINEARNE

UZLOVE POSUNUTIA IZAT. 0

UZOL	1 SURAD	2 SURAD	1 POSUN	2 POSUN
1	.0000	.0000	.0000E+00	.0000E+00
2	.0000	1.0000	.0000E+00	-.2066E-02
3	.0000	2.0000	.0000E+00	.2809E-03
......				
......				
251	100.0000	.0000	.7498E+00	.5001E+02
252	100.0000	1.0000	.4243E-04	.5001E+02
253	100.0000	2.0000	-.7502E+00	.5001E+02

NAPATIA A DEFORMACIE V INT.BODOCH

ELEMENT	MATERIAL	1-SURAD	2-SURAD	11-NAPAT.	22-NAPAT.	12-NAPAT.
1	1	.4226	.4226	.8624E+02	.9478E+00	.8451E+00
1	1	.4226	1.5774	-.8624E+02	.2158E+00	.1549E+00
1	1	1.5774	.4226	.8524E+02	-.1274E+00	.3908E+00
1	1	1.5774	1.5774	-.8524E+02	-.1274E+00	.6092E+00
2	1	2.4226	.4226	.8450E+02	-.3497E-01	.5207E+00
2	1	2.4226	1.5774	-.8450E+02	.1612E+00	.4793E+00
......						
......						
49	1	97.5774	.4226	.2098E+01	.2675E+00	.2816E+00
49	1	97.5774	1.5774	-.2098E+01	.7131E-01	.7184E+00
50	1	98.4226	.4226	.1366E+01	-.5494E+00	.7318E+00
50	1	98.4226	1.5774	-.1366E+01	-.5494E+00	.2682E+00
50	1	99.5774	.4226	.3660E+00	.4773E+00	.4379E+00
50	1	99.5774	1.5774	-.3660E+00	.1209E+01	.5621E+00

NELINEARNE

UZLOVE POSUNUTIA IZAT. 0

UZOL	1 SURAD	2 SURAD	1 POSUN	2 POSUN
1	.0000	.0000	.0000E+00	.0000E+00
2	.0000	1.0000	.0000E+00	-.1858E-02
3	.0000	2.0000	.0000E+00	.1927E-03
......				
......				
251	100.0000	.0000	-.1004E+02	.4102E+02
252	100.0000	1.0000	-.1063E+02	.4083E+02
253	100.0000	2.0000	-.1122E+02	.4063E+02

NAPATIA A DEFORMACIE V INT.BODOCH

ELEMENT	MATERIAL	1-SURAD	2-SURAD	11-NAPAT.	22-NAPAT.	12-NAPAT.
1	1	.4226	.4226	.7595E+02	.3576E+00	.8349E+00
1	1	.4226	1.5774	-.7711E+02	-.3712E+00	.1528E+00
1	1	1.5774	.4226	.7497E+02	-.6940E+00	.3875E+00
1	1	1.5774	1.5774	-.7609E+02	-.6922E+00	.6152E+00
2	1	2.4226	.4226	.7425E+02	-.5993E+00	.5142E+00
2	1	2.4226	1.5774	-.7534E+02	-.4028E+00	.4837E+00
......						
......						
49	1	97.5774	.4226	.1475E+01	.1427E+00	.3626E+00
49	1	97.5774	1.5774	-.8846E+00	-.1541E-01	.4440E+00
50	1	98.4226	.4226	.8851E+00	-.1540E+00	.5061E+00
50	1	98.4226	1.5774	-.2940E+00	-.1540E+00	.3004E+00

50	1	99.5774	.4226	.7875E-01	.2057E+00	.1592E+00
50	1	99.5774	1.5774	.5124E+00	.7960E+00	.6472E+00

Riešenie úlohy s programom ANSYS:

1. Názov úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname... /FILNAM = ROVNAP;

2. Typ použitého prvku
Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Solid, Quad 8 node 82, OK, Close;

3. Materiálové vlastnosti
Preprocessor>Material Props>Material Models... Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX = 10000, PRXY = 0.3, OK, Material, Exit;

4. Stredová plocha nosníka
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions... X1 = 0, X2 = 100, Y1 = 0, Y2 = 2, OK;

5. Sieť prvkov
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool..., Size Controls:Lines, Set ↑, P: Dlhšie strany obdĺžnika, OK, Ndiv = 50, Apply ↑, P: Kratšie strany obdĺžnika, OK, Ndiv = 1, OK, Mesh, Pick All, Close;

6. Upevnenie modelu nosníka
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Lines↑ P: Ľavá strana obdĺžnika, OK, UX, VALUE = 0, OK;

Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Keypoints ↑ P: Ľavý spodný bod obdĺžnika, OK, UY, VALUE = 0, OK;

7. Zadanie sily
Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Keypoints ↑ P: Pravý horný bod obdĺžnika, OK, FY, VALUE = 1, OK;

8. Zložky napätia určené v integračných bodoch sa budú kopírovať (nie extrapolovať) do uzlov
Solution>Load Step Opts>Output Ctrls>Integration Pt... No-copy them, OK;

9. Lineárny výpočet
Solution> Solve> Current LS..., OK;

10. Vypísanie zložiek posunutia bodu A a napätia v integračnom bode B
General Postproc> Query Results>Subgrid Solu... DOF Solution, Translation UX, OK↑, P: Pravý spodný bod obdĺžnika, → UX = 0.75 mm, Cancel;
General Postproc> Query Results>Subgrid Solu... DOF Solution, Translation UY, OK↑, P: Pravý spodný bod obdĺžnika, → UY = 50.01 mm, OK;
General Postproc> Query Results>Subgrid Solu... Stress, SX, OK↑, P: Ľavý spodný bod obdĺžnika, → SX = 86.24 MPa, Cancel;
General Postproc> Query Results>Subgrid Solu... Stress, SY, OK↑, P: Ľavý spodný bod obdĺžnika, → SY= 0.95 MPa, Cancel;

General Postproc> Query Results>Subgrid Solu... Stress, SXY, OK↑, P: Ľavý spodný bod obdĺžnika, ⟶ SXY= 0.85 MPa, Cancel;

11. Zapnutie geometrických nelinearít

Solution>Analysis Type>Sol'n Controls... Analysis Options: Large Displacement Static, Time at end of loadstep: 1, Number of substeps: 2, Max. no. of substeps: 4, Min no. of substeps: 1, OK;

12. Nelineárny výpočet

Solution> Solve> Current LS... OK;

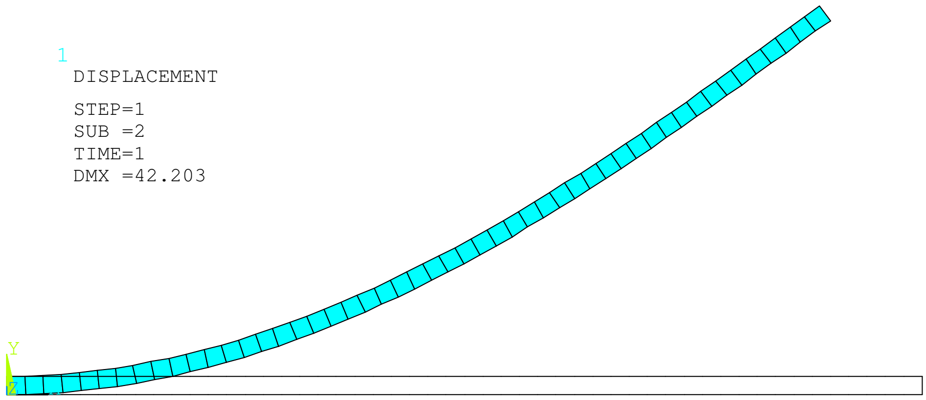
13. Výpis zložiek posunutia bodu A

General Postproc> Query Results>Subgrid Solu... DOF Solution, Translation UX, OK↑, P: Pravý spodný bod obdĺžnika, ⟶ UX = -10.01 mm, Cancel;

General Postproc> Query Results>Subgrid Solu... DOF Solution, Translation UY, OK↑, P: Pravý spodný bod obdĺžnika, ⟶ UY = 41.00 mm, OK;

14. Znázornenie deformácie nosníka

General Postproc> Plot Results>Deformed Shape... Def.+undef. edge, OK;



15. Zložky napätia v bode B

Utility Menu>Select>Entities... Nodes, By Num/Pick, OK↑, P: Ľavý dolný bod obdĺžnika, OK;

General Postproc>List Results>Nodal Solu..., Stress, X-Component of stress, OK, Close;

```
THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN ROTATED GLOBAL COORDINATES,
WHICH INCLUDE RIGID BODY ROTATION EFFECTS

  NODE     SX          SY          SZ          SXY         SYZ         SXZ
     1   77.165     0.35424     0.0000      0.84175      0.0000      0.0000
```

16. Ukončenie práce

Utility Menu>Select>Select Everythings;

Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK*;*

Poznámky k príkladu:

1) Na porovnanie výsledkov je navhodnejšia tabuľka:

Typ riešenia	Spôsob výpočtu	X-ové posunutie bodu A [mm]	Y-ové posunutie bodu A [mm]	σ_X bodu B [MPa]	σ_Y bodu B [MPa]	τ_{XY} bodu B [MPa]
Lineárne	Analyticky	0,00	50,00	86,60	0,00	0,00
	NELMKP	0,75	50,01	86,24	0,95	0,85
	ANSYS	0,75	50,01	86,24	0,95	0,85
Nelineárne	NELMKP	-10,04	41.02	75,95	0,36	0,83
	ANSYS	-10,01	41,00	77,16	0,35	0,84

Program ANSYS pri nelineárnom výpočte zohľadňuje aj veľké deformácie; využíva pri tom logaritmickú mierku deformácie. Ako však vidieť z porovnania, použitie Green-Lagrageovej mierky dáva dostatočne presné výsledky aj pri pomerne veľkých rotáciách a posunutiach.

Programy NELMKP a ANSYS zohľadňujú obdĺžnikový tvar nosníka, a preto pri lineárnom riešení dávajú X-ové posunutie bodu A rovné 0,75 mm. V stredovom uzle koncovej hrany modelu (t. j. na neutrálnej osi) určili oba programy pri lineárnom riešení X-ové posunutie rovné 0,00 mm.

2) Program NELMKP počíta a vypisuje napätia v integračných bodoch, program ANSYS tieto hodnoty extrapoluje do uzlov. Pre potreby porovnania napätí sme v programe ANSYS uplatnili príkaz, aby sa napätia neextrapolovali do uzlov, ale len prekopírovali (pozri 8. krok v opise interaktívnych príkazov).

8 Určenie matíc prvku priamo z diferenciálnych rovníc úlohy

8.1 Princíp Galerkinovej metódy

Analýza väčšiny úloh v technickej fyzike a v mechanike kontinua vedie na diferenciálne rovnice, ktoré treba riešiť pri určitých okrajových, prípadne i začiatočných podmienkach. Exaktné riešenie týchto rovníc pre zložitejšie tvarované telesá a oblasti nie je známe a musia sa riešiť približnými metódami, medzi ktoré patrí aj MKP. Vysvetlime si teraz na jednoduchej jednorozmernej lineárnej úlohe prechod od diferenciálnej rovnice k jej formulácii v MKP.

Uvažujme diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right)+cu-f=0 \qquad pre \quad 0<x<L \tag{8.1}$$

kde $a=a(x)$, $c=c(x)$, $f=f(x)$ sú vstupné dáta (t.j. známe funkcie) úlohy a $u=u(x)$ je funkcia, ktorú treba určiť. Vstupné dáta závisia od geometrie, materiálu a "zaťaženia" tejto jednorozmernej úlohy. S touto rovnicou sa môžeme stretnúť vo viacerých oblastiach [6] a treba ju riešiť pri príslušných okrajových podmienkach.

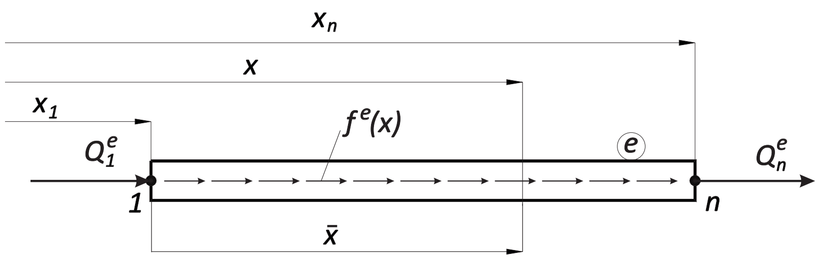
Pri použití MKP sa teleso, resp. oblasť, rozdelí na konečné prvky a na všeobecnom e-tom prvku (obr. 8.1) s *n* zvolenými uzlovými bodmi sa hľadá *aproximácia* funkcie $u(x)$ v tvare [1]

$$u^e(x)=N_1^e(x)u_1^e+N_2^e(x)u_2^e+\ldots+N_n^e(x)u_n^e=\sum_{j=1}^{n}N_j^e(x)u_j^e \tag{8.2}$$

kde N_i sú známe interpolačné (tvarové) funkcie prvku a u_i sú hodnoty hľadanej funkcie v tzv. uzlových bodoch (body 1 a *n* sú krajné body prvku, ostané sú vhodne zvolené vo vnútri prvku).

Ak toto približné riešenie dosadíme do (8.1), rovnica vo všeobecnosti nebude splnená, ľavá strana sa bude rovnať nenulovej hodnote, ktorá sa nazýva *zvyšok* (*rezíduum*)

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du^e(x)}{dx}\right)+cu^e(x)-f^e(x)=r^e(x,u_1^e,u_2^e,\ldots,u_n^e)\neq 0 \tag{8.3}$$



Obr. 8.1

Jeden zo spôsobov, ako možno vyžadovať nulový zvyšok *r* na prvku, je jeho zvážené integrálne spriemerovanie pomocou *n* váhových lineárne nezávislých funkcií w_i

$$\int_{x_1}^{x_n} w_i^e(x) r^e(x, u_1^e, u_2^e, \ldots, u_n^e) dx = 0 \qquad i = 1 \quad \text{až} \quad n \tag{8.4}$$

čím dostaneme n algebraických rovníc na určenie hodnôt u_i. Ak za váhové funkcie $w_i^e(x)$ zoberieme tvarové funkcie $N_i^e(x)$ - v takomto prípade hovoríme o MKP založenej na Galerkinovej metóde.

8.2 Slabá forma diferenciálnej rovnice

Ak do i-tej rovnice systému (8.4) dosadíme zvyšok (8.3) dostaneme

$$\int_{x_1}^{x_2} w_i^e(x) \left[-\frac{d}{dx}\left(a \frac{du^e}{dx} \right) + cu^e - f^e \right] dx = 0 \tag{8.5}$$

Aplikovaním pravidla o integrovaní per partes v tejto rovnici na jej prvý člen možno výhodne znížiť stupeň derivácie aproximačnej funkcie $u^e(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(a \frac{dw_i^e}{dx}\frac{du^e}{dx} + cw_i^e u^e - w_i^e f^e \right) dx - \left[w_i^e a \frac{du^e}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{8.6}$$

čím sa znížia (zoslabia) aj nároky na jej spojitosť . Rovnica (8.6) sa preto nazýva aj *slabý tvar* diferenciálnej rovnice (8.1) na elemente. V rovnici, ako vidieť, sa automaticky objavili aj prirodzené (silové, zdrojové, Neumanove) okrajové podmienky

$$\left[w_i^e a \frac{du^e}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} = w_i^e(x_1) Q_1^e + w_i^e(x_n) Q_n^e \tag{8.7}$$

kde koeficient váhovej funkcie $a\dfrac{du^e}{dx} \equiv Q$ sa nazýva *sekundárna premenná* (dá sa odvodiť z primárnej premennej *u*), ktorej kladný zmysel sa volí podľa kladného zmyslu súradnicovej osi (obr. 8.1), čo zmenilo znamienko člena s Q_1^e v (8.7). Napr. pri pevnostnej úlohe je to sústredená osová sila, pri vedení tepla tepelný tok (sústredený tepelný zdroj) atď. Výsledný tvar rovnice (8.6) s uvažovaním aj vnútorných uzlov (na ktorých tiež môžu byť "sily" Q) teda je

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(a \frac{dw_i^e}{dx}\frac{du^e}{dx} + cw_i^e u^e \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} w_i^e(x_i) f^e(x) + \sum_{j=1}^{n} w_j^e(x_i) Q_j^e \tag{8.8}$$

8.3 Určenie matíc prvku

Predpokladajme, že doména diferenciálnej rovnice (8.1) je rozdelená na *pevnostné* konečné prvky s rovnakým počtom *n* uzlových bodov a pre e-ty element máme určiť maticu tuhosti $\mathbf{K}^e$, vektor uzlových síl $\mathbf{q}^e$ a vektor vonkajších uzlových síl od spojitého zaťaženia prvku $\mathbf{f}^e$ do základnej rovnice rovnováhy prvku [1]

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{q}^e + \mathbf{f}^e \tag{8.9}$$

Postup je už teraz jednoduchý. Do (8.8) dosadíme aproximačnú funkciu $u^e(x)$ (8.2) postupne s váhovými funkciami

$$w_1^e = N_1^e\,,\ w_2^e = N_2^e\,,\ \dots\,,\ w_i^e = N_i^e\,,\ \dots\,,\ w_n^e = N_n^e$$

čím dostaneme n algebrických rovníc pre určenie n neznámych hodnôt hľadanej funkcie v uzlových bodoch

$$\mathbf{u}^e = \{u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_j \quad \cdots \quad u_n\}^T \tag{8.10}$$

Všeobecná i-ta rovnica tejto sústavy má potom podľa (8.8) a (8.2) tvar

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2}\left[a\frac{dN_i^e}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n}u_j^e\frac{dN_j^e}{dx}\right)+cN_i^e\left(\sum_{j=1}^{n}u_j^eN_j^e\right)\right]dx &= \sum_{j=1}^{n}N_j^e(x_i)Q_j^e+\int_{x_1}^{x_2}N_i^e(x_i)f^e(x)dx\\
\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(a\frac{dN_i^e}{dx}\frac{dN_j^e}{dx}+cN_i^eN_j^e\right)dx\right]u_j^e &= Q_i^e+f_i^e\\
\sum_{j=1}^{n}K_{ij}^eu_j^e &= Q_i^e+f_i^e
\end{aligned} \tag{8.11}$$

pre i = 1, 2, ... , n a kde ij-ty člen matice tuhosti prvku je

$$K_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_2}\left(a\frac{dN_i^e}{dx}\frac{dN_j^e}{dx}+cN_i^eN_j^e\right)dx \tag{8.12}$$

i - ty člen vektora vokajších prvkových síl od spojitého zaťaženia

$$f_i^e(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_i^e dx \tag{8.13}$$

a pretože interpolačná funkcia sa vo svojom uzlovom bode rovná jednej a v ostatných je nulová v (8.11) platí

$$\sum_{j=1}^{n}N_j^e(x_i)Q_j^e = Q_i^e(x_i^e) \tag{8.14}$$

Podrobnosti o interpolačných funkciách jednorozmerného prvku $N_i^e(x_i)$ možno nájsť v bežných príručkách MKP a tiež v [1]. V lokálnom súradnicovom systéme prvku s $\overline{x}$ (obr. 8.1) pre lineárny dvojuzlový prvok (n = 2) sú

$$N_1(\overline{x}) = 1-\frac{\overline{x}}{\ell_e} \qquad N_2(\overline{x}) = \frac{\overline{x}}{\ell_e} \tag{8.15}$$

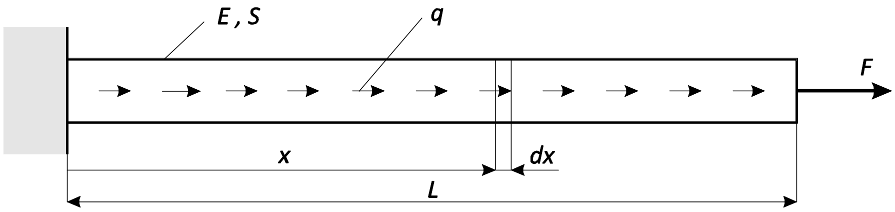
a pre kvadratický trojuzlový (n = 3)

$$N_1(\overline{x}) = \left(1-\frac{2\overline{x}}{\ell_e}\right)\left(1-\frac{\overline{x}}{\ell_e}\right) \qquad N_2(\overline{x}) = \frac{4\overline{x}}{\ell_e}\left(1-\frac{\overline{x}}{\ell_e}\right) \qquad N_3(\overline{x}) = -\frac{\overline{x}}{\ell_e}\left(1-\frac{2\overline{x}}{\ell_e}\right) \tag{8.16}$$

Matice prvku určené v lokálnom súradnicovom systéme v prípade *jednorozmernej* úlohy *platia aj pre globálny systém* so súradnicou x, pretože pri posúvaní prvku sa matice takéhoto prvku nemenia [1].

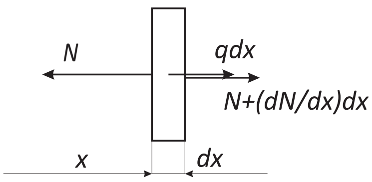
8.4 Príklad na ilustráciu postupu

K diferenciálnej rovnici (alebo rovniciam) sa vo všeobecnosti dopracujeme tak, že napíšeme rovnice rovnováhy (alebo bilančné rovnice) pre diferenciálny element vybraný myslenými rezmi z výpočtového modelu telesa (alebo oblasti). Kvôli názornosti výkladu si rovnicu (8.1) skonkretizujeme na príklade pre jednorozmerný prút znázornený na obr. 8.2.



Obr. 8.2

Prút je zaťažený na ťah sústredenou silou F a spojitým konštantným objemovým zaťažením q (v jednotkách sila/dĺžka). Prierez je S a modul pružnosti materiálu prúta E. Z prúta myslenými rezmi vyrežeme diferenciálny element o dĺžke dx s vyznačením pôsobiacich síl (obr. 8.3).



Obr. 8.3

Zo silovej rovnováhy elementu dostávame

$$\frac{dN}{dx}+q=0 \tag{8.17}$$

Do rovnice rovnováhy zahrnieme koštitutívnu rovnicu

$$N=ES\varepsilon \tag{8.18}$$

a vzťah medzi pomernou deformáciou ε a posunutím

$$\varepsilon=\frac{du}{dx} \tag{8.19}$$

Dostaneme tak podmienku rovnováhy prvku v deformačnom tvare

$$\frac{d}{dx}(ES\frac{du}{dx})+q=0 \tag{8.20}$$

čo je vlastne špeciálny prípad rovnice (8.1) s c = 0, a = ES a f = q.

Rovnica (8.20) platí pre prút na obr 8.1 so základnou (geometrickou) okrajovou podmienkou

$$u(x=0)=0 \tag{8.21}$$

ako aj prirodzenou (silovou) okrajovou podmienkou

$$ES\frac{du}{dx}\bigg|_{x=L}=F \qquad (8.22)$$

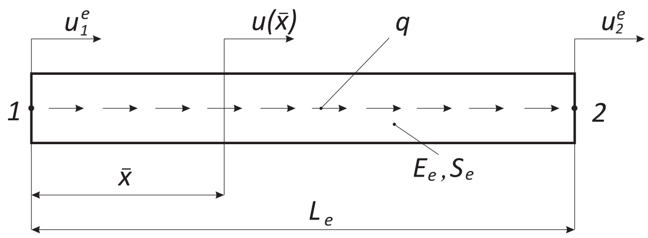
a predstavuje *silnú formuláciu* diferenciálnej rovnice rovnováhy prúta.

Exaktné riešenie diferenciálnej rovnice je v tomto prípade jednoduché. Dvojnásobným integrovaním rovnice a vyjadrením integračných konštánt z okrajových podmienok dostaneme

$$u(x)=\frac{1}{ES}\left(Fx+\frac{qx^2}{2}\right) \qquad (8.23)$$

Nájdime teraz riešenie úlohy na obr. 8.2 pomocou uvedenej formulácie MKP s jediným *dvojuzlovým* (n = 2) prvkom znázornenom na obr. 8.4. Podľa (8.2) a (8.15) hľadáme teda dvojčlennú (lineárnu) aproximáciu funkcie posunutia prúta

$$u^e(x)=N_1^e(x)u_1^e+N_2^e(x)u_2^e \qquad (8.24)$$



Obr. 8.4

Dve rovnice platné pre posunutia uzlových bodov u_1^e a u_2^e v maticovom zápise podľa (8.11) až (8.14) sú

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix} \qquad (8.25)$$

a po vyjadrení známych členov týchto matíc pomocou tvarových funkcií a príslušných rovníc sú

$$\frac{E_eS_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1^e \\ F \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} \dfrac{qL}{2} \\ \dfrac{qL}{2} \end{Bmatrix} \qquad (8.26)$$

Pretože teleso na obr. 8.2 sme sa rozhodli aproximovať len jedným prvkom, rovnice (8.26) platia aj pre celé teleso s globálnou súradnicou x a globálnymi údajmi o telese. (Inak treba vytvárať globálne matice súčtom rozšírených matíc prvkov [1].) Musíme ešte do nich zahrnúť geometrickú okrajovú podmienku

$$u_1^e=0 \qquad (8.27)$$

a dostávame

$$u_2^e=\frac{1}{ES}\left(FL+\frac{qL^2}{2}\right) \qquad (8.28)$$

Podľa (8.24) a (8.15) aproximačná (lineárna) funkcia posunutia prúta je

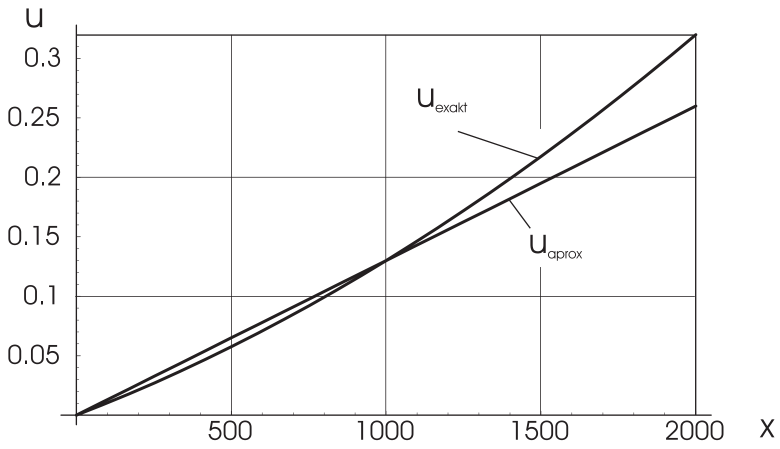
$$u(x) = \frac{1}{ES}(F + \frac{qL}{2})x \tag{8.29}$$

Z vynechanej rovnice v (8.26) možno už teraz so známou hodnotou u_2^e určiť reakciu v upevnenom uzle a zo známych vzťahov elementárnej pružnosti aj ostatné odvodené premenné ako priebeh osovej sily, pomernej deformácie a napätia.

Porovnanie exaktnej a aproximačnej funkcie posunutia prúta pre číselné hodnoty

$$E = 200000\ Nmm^{-2}, S = 100\ mm^2, L = 2000\ mm, q = 0{,}6\ Nmm^{-1}, F = 2000\ N$$

uvádzame na obr. 8.5.



Obr. 8.5

Uvedený postup určenia matíc prvku úlohy definovanej diferenciálnou rovnicou, resp. sústavou (parciálnych) diferenciálnych rovníc, je všeobecný a možno ho analogicky využiť pri dvoj a trojrozmerných úlohách [6]. Bez zmeny ho možno použiť aj pri nelineárnych úlohách s tým, že sústava rovníc pre uzlové posunutia je v takomto prípade nelineárna a na jej riešenie treba použiť iteračnú (Newton-Raphsonovu) metódu.

Poznanie matíc všeobecného prvku úlohy má v MKP prvoradý význam, pretože ďalší postup riešenia je už rutinná záležitosť ako po algoritmickej, tak i po programátorskej stránke [1], [2].

8.5 Nelineárna diferenciálna rovnica

Diferenciálna rovnica (8.1), pre úplnosť doplnená teraz aj o člen s prvou deriváciu hľadanej funkcie, sa skomplikuje, ak udané funkcie $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ a $h(x)$ sú závislé aj od primárnej neznámej $u(x)$. Rovnica sa stane nelineárnou a má tvar

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x,u)\frac{du}{dx}\right) + b(x,u)\frac{du}{dx} + c(x,u)u - f(x) = 0 \qquad pre \quad 0 < x < L \tag{8.30}$$

s možnosťami pre voľbu dvoch okrajových podmienok

$$\pm a\frac{du}{dx} + h(x,u)(u - u_\infty) = Q \qquad \text{a tiež} \qquad u = u_0 \tag{8.31}$$

kde u_∞ a u_0 sú známe parametre. Znamienko plus platí pre prípad, kedy vonkajšia normála k ploche má smer pozitívnej osi *x* a znamienko mínus platí pre opačný smer.

8.5.1 Určenie matíc prvku

Ako sme už uviedli, pri MKP sa teleso (oblasť) rozdelí na určitý počet konečných prvkov a na všeobecnom *e*-tom prvku (obr. 8.1) s *n* uzlami sa hľadá *aproximácia* funkcie $u(x)$ v tvare

$$u^e(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e + \ldots + N_n^e(x)u_n^e = \sum_{j=1}^{n} N_j^e(x)u_j^e \tag{8.32}$$

kde N_i sú známe interpolačné (tvarové) funkcie prvku a u_i sú hodnoty funkcie (8.32) v uzlových bodoch (body 1 a *n* sú krajné body prvku, ostané sú vhodne zvolené vo vnútri prvku).

Pre určenie *n* neznámyxh koeficientov u_1^e až u_n^e možno rovnakým postupom ako v predchádzajúcej časti dostať *n* algebrických rovníc (ktoré už teraz, vzhľadom na charakter funkcií *a*, *b*, a *c* v (8.30), sú nelineárne)

$$[\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)]\{\mathbf{u}^e\} = \{\mathbf{q}^e\} + \{\mathbf{f}^e\} \tag{8.33}$$

kde $\mathbf{K}^e$ je prvková matica sústavy, $\mathbf{u}^e$ je vektor (stĺpcová matica) hodnôt u_1^e až u_n^e prvku, $\mathbf{q}^e$ je vektor uzlových "síl" prvku a $\mathbf{f}^e$ je vektor uzlových "síl" od spojitého "zaťaženia" prvku.

Všeobecná *i*-ta rovnica sústavy (8.33) má tvar

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^e u_j^e = Q_i^e + f_i^e \tag{8.34}$$

kde

$$K_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_2} \left(a(x,u)\frac{dN_i^e}{dx}\frac{dN_j^e}{dx} + b(x,u)N_i^e\frac{dN_j^e}{dx} + c(x,u)N_i^e N_j^e \right) dx + h_1 N_i^e(x_1)N_j^e(x_1) + h_n N_i^e(x_n)N_j^e(x_n) \tag{8.35}$$

a

$$f_i^x(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_i^e dx + h_1 u_\infty^1 N_i^e(x_1) + h_n u_\infty^n N_i^e(x_n) \tag{8.36}$$

Okrajové podmienky (pre okrajové uzly okrajových prvkov) sa určujú podľa (8.31). Členy s h_1 a h_n sa uplatňujú len na *okrajových* uzloch. Ak $b = 0$, potom je matica $\mathbf{K}^e$ symetrická, v opačnom prípade je nesymetrická.

Globálne matice modelu úlohy s viacerými prvkami sa v MKP vytvárajú usporiadanou sumáciou prvkových matíc. Pri nelineárnej úlohe dostaneme potom globálnu sústavu nelineárnych algebrických rovníc v tvare

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \tag{8.37}$$

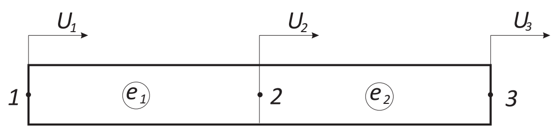
kde $\mathbf{K}$ je globálna matica sústavy, $\mathbf{U}$ je globálny vektor uzlových neznámych a

$$\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{Q}\} + \{\mathbf{f}\} \tag{8.38}$$

je globálny vektor pravej strany sústavy. Hodnoty $\mathbf{U}$ sa zo sústavy rovníc (8.37) určujú iteračne, najčastejšie Newton-Raphsonovou metódou, pre ktorú je potrebné určiť tangenciálnu maticu sústavy $\mathbf{K}_T$ [2].

Pri zostavovaní globálnych matíc sa postupuje rovnako ako pri pevnostných úlohách [1], [2]. Využívajú sa kódové čísla prvkov na programovú realizáciu súčtu tzv. *rozšírených* matíc prvkov (v ďalšom ich označíme horným pruhom). Sú to matice, ktoré sa pomocou riadkov a stĺpcov s nulami rozšíria na rovnaký rozmer ako majú globálne matice, pričom ich nenulové členy sú členy lokálnych matíc umiestnené v rozšírenej matici tak, aby pri sčítaní správne prispievali do globálnej matice.

Ukážme si tento postup na jednorozmernej úlohe s jednou neznámou v uzle. Nech sa oblasť (teleso) skladá len z dvoch *dvojuzlových* prvkov (obr. 8.6)



Obr. 8.6

takže matice $\bar{\mathbf{K}}^e$ a matica $\mathbf{K}$ sú stupňa tri. Globálnu maticu sústavy dostaneme ako súčet rozšírených matíc prvkov (členy lokálnych matíc vyznačíme len symbolicky)

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}^{(1)} + \bar{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet + * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Analogicky dostaneme aj globálne stĺpcové matice na pravej strane sústavy, napr.

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}^{(1)} + \bar{\mathbf{Q}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet + * \\ * \end{bmatrix}$$

8.6 Jednorozmerný nelineárny prenos tepla vedením a prúdením

Najednoduchšie typy nelineárnej rovnice (8.30), vhodné na ilustračné príklady jej riešenia pomocou MKP, možno nájsť pri analýze úloh ustáleného vedenia tepla v jednorozmernom modele telesa. Zaujímavý je aj prenos tepla kombináciou vedenia a konvekcie (prenosu tepla prúdením okolitého média). V týchto prípadoch je primárnou neznámou *prevyšujúca* teplota

$$u \equiv T = T(x) - T_\infty \tag{8.39}$$

kde T_∞ je teplota média alebo (pri čistom vedení) vzťažná teplota. Termálne vlastnosti väčšiny materiálov sú od teploty (prípadne aj jej gradientu) závislé, čo nie vždy možno zanedbať a vedie to na nelineárnu úlohu. Model telesa pri takejto úlohe delíme na *termálne* konečné prvky, pretože ich materiálové charakteristiky sú termálne (nie tuhostné, ako pri pevnostnej úlohe) a primárnou neznámou je prevyšujúca teplota (a nie posunutie, ako pri pevnostnej úlohe).

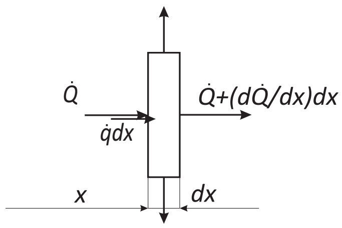
Diferenciálnu rovnicu pre konkrétnu úlohu dostaneme z tepelnej bilančnej rovnováhy diferenciálneho elementu. Typickým prípadom je prút konštantného prierezu *S*, ktorého dĺžka *L* výraznejšie prevláda nad priečnymi rozmermi. Nech je takýto prút obtekaný médiom o teplote T_∞ a nech v jeho objeme vzniká teplo (napríklad chemickou reakciou) konštantnou rýchlosťou $\dot{q}$ udanou na jednotku dĺžky. Potom možno uvažovať zmenu teploty len v smere osi *x* a riešiť úlohu ako jednorozmernú. Materiál prúta má vodivosť $\lambda(T)$ a známy je aj teplotne závislý súčiniteľ prestupu tepla medzi prútom a chladiacim médiom $h(T)$. Poznáme tiež perimeter (obvod plochy *S*).

Z prúta vo vzdialenosti *x* a *x*+*dx* myslenými rezmi vyrežeme diferenciálny element (obr. 8.8) s dĺžkou *dx*. Rýchlosť tepelného toku (množstvo tepla Q za jednotku času) vo vzdialenosti *x* označíme $\dot{Q} = dQ/dt$ a budeme predpokladať, že touto rýchlosťou teplo do elementu vchádza. Rýchlosť, ktorou teplo vo vzdialenosti *x*+*dx* z elementu vychádza je $\dot{Q} + (d\dot{Q}/dx)dx$ (je to linearizácia funkcie $\dot{Q}$ v jej okolí pomocou dvojčlenného Taylorovho radu). Na ploche *pdx* sa odvádza konvekciou z elementu teplo rýchlosťou $pdxh(T)(T - T_\infty)$ a nech sa ešte v objeme elementu tvorí teplo rýchlosťou $\dot{q}$ udanej na jednotku dĺžky. Tepelná bilančná rovnica potom je

$$\dot{Q}dt - (\dot{Q} + \frac{d\dot{Q}}{dx}dx)dt + \dot{q}dxdt - ph(T)Tdxdt = 0 \tag{8.40}$$

z ktorej dostávame

$$-\frac{d\dot{Q}}{dx} + \dot{q} - ph(T)T = 0 \tag{8.41}$$



Obr. 8.8

Keď uplatníme vzťah medzi rýchlosťou tepelného toku $\dot{Q}$ a teplotným gradientom (Fourierov zákon)

$$\dot{Q} = -\lambda(T)S\frac{dT}{dx} \tag{8.42}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu platnú pre priebeh prevyšujúcej teploty v prúte

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(T)S\frac{dT}{dx}\right) + \dot{q} - ph(T)T = 0 \tag{8.43}$$

Ak ju zapíšeme v základnom tvare podľa (8.30)

$$-\frac{d}{dx}\left(\lambda(T)S\frac{dT}{dx}\right) + ph(T)T - \dot{q} = 0 \tag{8.44}$$

potom vidieť, že je špeciálnym prípadom rovnice (8.30) s $a = \lambda(T)S$, $b = 0$, $c = ph(T)$, $f = \dot{q}$.

Pre konkrétnu úlohu sa dve okrajové podmienky volia podľa (8.31). Pre úplnosť poznamenávame, že člen s funkciou *b*, t.j. s dT/dx, by sa v v rovnici objavil len vtedy, keby sa prút pohyboval v smere osi *x* určitou rýchlosťou.

Uvádzame ešte rozmery a údaje o niektorých veličinách, s ktorými sme sa stretli v tejto časti:

$\dot{Q}$ [W] - rýchlosť tepelného toku (rýchlosť vedenia tepla)
λ [$Wm^{-1}K^{-1}$] - koeficient vedenie tepla
h - [$Wm^{-2}K^{-1}$] - koeficient prestupu tepla
p - [m] - perimeter (obvod plochy)

Hodnota koeficientu vedenia tepla pre oceľ je 50, hliník 200, meď 390 [$Wm^{-1}K^{-1}$],

Hodnota koeficientu prestupu tepla silne závisí od média a charakteristiky jeho prúdenia:
vzduch *h* = 10 až 100 [$Wm^{-2}K^{-1}$], voda *h* = 500 až 10000 [$Wm^{-2}K^{-1}$]

8.7 Príklad na nelineárne vedenie tepla

8.7.1 Zadanie a exaktné riešenie

Budeme riešiť nelineárny prípad jednorozmerného vedenia tepla špeciálne zvolený tak, aby mal, pre účely porovnania, aj riešenie v uzatvorenom tvare. Rozmery veličín kvôli jednoduchosti nebudeme písať, pre menej obvyklé sme ich uviedli v predchádzajúcej časti.

Nech jednorozmerné vedenie tepla v prúte o dĺžke *L* = 1 je udané diferenciálnou rovnicou (8.44) bez prúdenia ($h(x,u)=0$) a s jednoduchou funkciou $\lambda(T)S=T$

$$-\frac{d}{dx}\left(T\frac{dT}{dx}\right)+1=0 \qquad 0<x<1 \tag{8.45}$$

Okrajové podmienky nech sú

$$\dot{Q}\Big|_{x=0}=-T\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0}=0 \qquad \text{a} \qquad T\Big|_{x=L}=\sqrt{2} \tag{8.46}$$

Na ľavej strane je teda prút izolovaný (implicitne aj na bočných stenách) a na pravej strane je predpísaná prevyšujúca teplota $T(L)=\sqrt{2}$. Z prúta sa po dĺžke spojite odoberá teplo rýchlosťou $\dot{q}=-1$. Treba určiť funkciu $T\equiv T(x)$ a rýchlosť, ktorou vchádza teplo do prúta na pravej čelnej ploche, t.j. $\dot{Q}(x=1)$. Exaktné riešenie úlohy je

$$T(x)=\sqrt{1+x^2} \tag{8.47}$$

o čom sa možno presvedčiť dosadením do (8.45).

8.7.2 Zostavenie aproximačných rovníc MKP

Pri riešení úlohy pomocou MKP rozdelíme prút na určitý počet prvkov a prvou úlohou je určenie matice koeficientov (v tomto prípade matice vedenie tepla) všeobecného *e*-teho prvku. Zvolíme lineárny prvok s tvarovými funkciami (8.15) a dĺžkou ℓ_e . Členy matice prvku určíme z (8.35), kde $a=T(x)$, *b* = 0, *c* = 0 a aproximačná funkcia teploty na prvku podľa (8.2) je

$$T^e(x) = N_1^e(x)T_1^e + N_2^e(x)T_2^e \tag{8.48}$$

T_1^e a T_2^e sú teploty v uzlových bodoch prvku. Dostaneme

$$\mathbf{K}^e = \frac{T_1^e + T_2^e}{2\ell_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.49}$$

Zo (8.36) určíme ekvivalentnú náhradu spojitého "zaťaženia" $\dot{q}$ uzlovými hodnotami

$$\mathbf{f}^e = \dot{q}\ell_e \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{8.50}$$

Bilančné rovnice prvku (8.33) sú nelineárne

$$\frac{T_1^e + T_2^e}{2\ell_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_1^e \\ \dot{Q}_2^e \end{bmatrix} + \dot{q}\ell_e \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{8.51}$$

a táto nelineárnosť sa prenesie aj do globálnych bilančných rovníc modelu telesa. Tieto rovnice dostaneme sčítaním rozšírených matíc prvkov, pričom zavedieme globálne číslovanie uzlových hodnôt. Zvolíme len dva rovnako dlhé prvky a podľa horeuvedenej schémy sčítavania dostaneme

$$\frac{1}{2\ell_e}\begin{bmatrix} T_1 + T_2 & -T_1 - T_2 & 0 \\ -T_1 - T_2 & T_1 + 2T_2 + T_3 & -T_2 - T_3 \\ 0 & -T_2 - T_3 & T_2 + T_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1^{(1)} \\ \dot{Q}_2^{(1)} + \dot{Q}_1^{(2)} \\ \dot{Q}_2^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{8.52}$$

Máme tri rovnice s tromi neznámymi T_1, T_2 a $Q_2^{(2)}$; komplikácia ale spočíva v tom, že rovnice sú nelineárne (neznáme sa nachádzajú aj v matici koeficientov) a úloha sa musí riešiť iteračne. Na pravej strane sú všetky hodnoty okrem $Q_2^{(2)}$ známe: $Q_1^{(1)}$ = 0 (je to okrajová podmienka), $Q_2^{(1)} + Q_1^{(2)}$ = 0 (sú rovnako veľké opačného zmyslu), všetky členy f_i sú rovnaké a rovné $0{,}5\dot{q}\ell_e$ = - 0,25 (pretože $\dot{q} = -1$ a $\ell_e = 0{,}5$). Na ľavej strane poznáme $T_3 = \sqrt{2}$ (je to okrajová podmienka a $2\ell_e = 1$. Prvé dve rovnice po dosadení týchto hodnôt môžeme zapísať takto

$$\begin{aligned} R_1 &= (T_1 + T_2)T_1 - (T_1 + T_2)T_2 + 0{,}25 = 0 \\ R_2 &= -(T_1 + T_2)T_1 + (T_1 + 2T_2 + \sqrt{2})T_2 - (T_2 + \sqrt{2})\sqrt{2} + 0{,}5 = 0 \end{aligned} \tag{8.53}$$

Z týchto rovníc určíme pomocou Newton-Raphsonovej metódy T_1 a T_2 a potom z vynechanej rovnice $Q_2^{(2)}$.

8.8 Princíp Newton-Raphsonovej metódy a výpočet príkladu

Newton-Raphsonovou metódou sme sa obšírne zaoberali v [2], takže tu uvádzame len princíp, potrebný na pochopenie spôsobu riešenia nelineárnej sústavy rovníc (8.53) touto metódou. Riešenie sústavy vychádza zo zvolených začiatočných hodnôt hľadaných prvkových hodnôt, ktoré musia zohľadniť okrajové podmienky. V našom prípade zvolíme napr.

$$\mathbf{T}_0 = \begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \qquad (8.54)$$

Keď tieto hodnoty dosadíme do (8.53) rovnice nebudú splnené a vznikne vektor "nerovnovážnych" zvyškov

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\mathbf{T}_0) \qquad (8.55)$$

Linearizovaním tohto systému dostávame

$$\mathbf{r}_L(\mathbf{T}) = \mathbf{r}(\mathbf{T}_0) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{T}_0)}{\partial \mathbf{T}}(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0)$$

Prvú aproximáciu $\mathbf{T}_1$ hľadáme tak, aby $\mathbf{r}_L(\mathbf{T}_1) = \mathbf{0}$. Potom platí

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0)(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_0) = -\mathbf{r}(\mathbf{T}_0) \qquad (8.56)$$

Po zvolení začiatočných (východzích) hodnôt posunutí $\mathbf{T}_0$ predstavuje (8.56) lineárny systém rovníc s neznámym vektorom $\Delta\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_0$. Ak matica tohoto systému je regulárna potom jeho riešenie je

$$\Delta\mathbf{T}_0 = -\left[\mathbf{K}_T(\mathbf{T}_0)\right]^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{T}_0)$$

s tzv. tangenciálnou maticou tuhosti telesa (Jacobiho maticou)

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \partial R_1/\partial T_1 & \partial R_1/\partial T_2 \\ \partial R_2/\partial T_1 & \partial R_2/\partial T_2 \end{bmatrix} \qquad (8.57)$$

Hľadaná aproximácia potom je $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_0 + \Delta\mathbf{T}_0$. Opakovaním tohoto postupu dostaneme vzťah pre postupnosť aproximácií

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i - \left[\mathbf{K}_T(\mathbf{T}_i)\right]^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{T}_i) \qquad \text{i = 0, 1, 2, ..., } i_{\max} \qquad (8.58)$$

Ak táto postupnosť konverguje, tak sa výpočet ukončuje podmienkou pre $\|\mathbf{T}_{i+1} - \mathbf{T}_i\|$ alebo $\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|$.

Tento proces možno jednoducho realizovať v programe *Mathematica 5* (pozri obr. 8.9). Vypočítané uzlové teploty príkladu sú

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ 1{,}118 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \qquad (8.59)$$

a aproximačné funkcie teploty na prvkoch podľa (8.48) a (8.15)

$$T^{(1)}(\bar{x}) = (1 - 2\bar{x}) + 2{,}236\bar{x} \qquad 0 < \bar{x} < 0{,}5 \qquad (8.60)$$

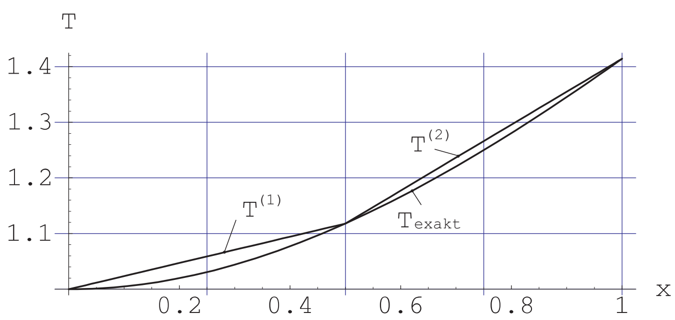
$$T^{(2)}(\bar{x}) = 1{,}118(1 - 2\bar{x}) + 2\sqrt{2\bar{x}} \qquad 0 < \bar{x} < 0{,}5 \qquad (8.61)$$

Z vynechanej rovnice v (8.52) dostaneme očakávaný výsledok $\dot{Q}_2^{(2)} = 1$.

Porovnanie exaktného a numerického riešenia je na obr. 8.10. Presnejšia aproximáciu možno dosiahnúť pomocou väčšieho počtu prvkov alebo použitím kvadratických interpolačných funkcií (8.16).

```
(*Vektor nerovnovážnych zvyškov:*)
R1[{T1_, T2_}] = (T1 + T2)*T1 - (T1 + T2)*T2 + 0.25;
R2[{T1_, T2_}] = -(T1 + T2)*T1 + (T1 + 2.*T2 +
            Sqrt[2])*T2 - (T2 + Sqrt[2])*Sqrt[2] + 0.5;
R⃗[{T1_, T2_}] = {R1[{T1, T2}], R2[{T1, T2}]};
(*Newton-Raphsonova iteračná procedúra:*)
NewtonRaphson[T0_, tol_, max_] :=
  Module[{norma = 1, i = 0},
   T0⃗ = T0;
   Print["T⃗0 = ", T0⃗];
   KT[{T1_, T2_}] = Transpose[{∂T1 R⃗[{T1, T2}], ∂T2 R⃗[{T1, T2}]}];
   Print["Ktang = " MatrixForm[KT[{T1_, T2_}]]];
   While[And[i < max, norma > tol],
    T1⃗ = T0⃗ - (Inverse[KT[T0⃗]]).R⃗[T0⃗];
    Print["T⃗"i+1, " = ", T1⃗];
    norma = Sqrt[(T1⃗ - T0⃗).(T1⃗ - T0⃗)];
    If[norma < tol, Print["r⃗"i+1, " = ", MatrixForm[R⃗[T1⃗]]]];
    T0⃗ = T1⃗;
    i = i + 1;]];
Print["VÝSLEDKY"];
(*Odštartovanie iterácie so začiatočnými hodnotami:*)
NewtonRaphson[{0.5, 0.5}, 10^-2, 10];

VÝSLEDKY

T⃗0 = {0.5, 0.5}

Ktang = ( 2 T1_   -2 T2_ )
        ( -2 T1_  4. T2_ )

T⃗1 = {1.25, 1.5}

T⃗2 = {1.025, 1.16667}

T⃗3 = {1.0003, 1.11905}

T⃗4 = {1., 1.11803}

r⃗4 = ( -9.33594×10^-7 )
     (  1.96011×10^-6 )
```

Obr. 8.9



Obr. 8.10

Tangenciálnu maticu vedenia tepla modelu možno určiť dvomi spôsobmi. Jednak ako Jacobiho maticu (8.57) sústavy (8.53), ktorá pre náš príklad je

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \partial R_1 / \partial T_1 & \partial R_1 / \partial T_2 \\ \partial R_2 / \partial T_1 & \partial R_2 / \partial T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2T_1 & -2T_2 \\ -2T & 4T_2 \end{bmatrix} \tag{8.62}$$

ako ju určil aj program (obr. 8.9). Všimnime si, že je nesymetrická.

Druhá možnosť, často využívaná v programoch MKP (napr. aj v programe NELMKP v [2] pre pevnostné prvky), je taká, že sa najprv odvodí tangenciálna matica pre všeobecný *e*-ty prvok a podľa tohto predpisu sa v cykle cez všetky prvky vytvárajú tangenciálne matice prvkov modelu; z tých sa súčasne usporiadanou adíciou vytvára globálna tangenciálna matica.

Pre *ij*-ty člen tangenciálnej matice vedenie tepla prvku platí

$$ {}^{T}\mathbf{K}_{ij}^{e} = \frac{\partial R_i^e}{\partial T_j^e} = \frac{\partial}{\partial T_j^e}\left(\sum_{m=1}^{n} \mathbf{K}_{im}^{e} T_m^e - F_i^e \right) = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{K}_{im}^{e}}{\partial T_j^e} + \mathbf{K}_{im}^{e} \frac{\partial T_m^e}{\partial T_j^e} \right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{K}_{im}^{e}}{\partial T_j^e} T_m^e + \mathbf{K}_{ij}^{e} \tag{8.63}$$

a tangenciálna matica dvojuzlového prvku je

$$ {}^{T}\mathbf{K}_{ij}^{e} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{K}_{11}^{e}}{\partial T_1^e} T_1^e + \dfrac{\partial \mathbf{K}_{12}^{e}}{\partial T_1^e} T_2^e & \dfrac{\partial \mathbf{K}_{11}^{e}}{\partial T_2^e} T_1^e + \dfrac{\partial \mathbf{K}_{12}^{e}}{\partial T_2^e} T_2^e \\ \dfrac{\partial \mathbf{K}_{21}^{e}}{\partial T_1^e} T_1^e + \dfrac{\partial \mathbf{K}_{22}^{e}}{\partial T_1^e} T_2^e & \dfrac{\partial \mathbf{K}_{21}^{e}}{\partial T_2^e} T_1^e + \dfrac{\partial \mathbf{K}_{22}^{e}}{\partial T_2^e} T_2^e \end{bmatrix} = \frac{T_2^e - T_1^e}{2\ell_e} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{T_1^e + T_2^e}{2\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.64}$$

Súčtom rozšírených tangenciálnych matíc oboch prvkov nášho príkladu ($2\ell_e = 1$) a zavedením globálneho číslovania prvkových teplôt dostaneme opäť maticu (8.62).

9 Doskové konečné prvky

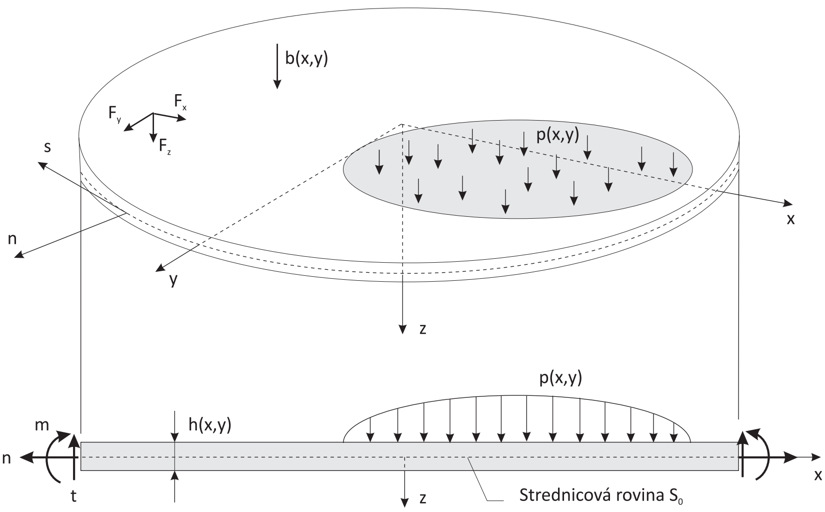
9.1 1. Základné pojmy

Tenkou doskou (obr. 9.1) nazývame ploché trojrozmerné teleso (konštrukčný prvok) s rovinnou strednicovou plochou (body hornej a spodnej plochy dosky sú od tejto roviny rovnako vzdialené). Priečny rozmer dosky (hrúbka) je výrazne menší ako ostatné rozmery (menší ako desatina jej šírky v najužšom mieste, ale nie tak extrémne malý, že doska stráca ohybovú tuhosť). Doska je špeciálny prípad tzv. škrupiny, ktorá je charakterizovaná rovnako ako doska, ale strednicovú plochu má zakrivenú. Ak je doska namáhaná len v jej rovine, ide o membránové namáhanie dosky (steny) klasickou rovinnou napätosťou ([1], [2]). Pri zaťažení len v priečnom smere ide o namáhanie dosky na ohyb a krútenie. Vo všeobecnosti je doska namáhaná kombináciou oboch týchto zaťažení.

Väčšina využívaných matematických modelov (matematických teórií) riešiacich doskový pevnostný problém vznikla ešte pred počítačovou érou. Sú to hlavne:

- Kirchhoffov model vhodný pre lineárne tenké dosky s malým priehybom. Zanedbáva energiu šmykových napätí a predpokladá nezávislosť ohybového a membránového zaťaženia
- Reisner-Mindlinov model umožňujúci riešenie malého priehybu lineárnych tenkých a mierne hrubých dosiek s približným zohľadnením energie šmykových napätí
- Von Kármánov model pre geometricky nelineárne tenké dosky s väzbou stenového a ohybového napätia, čo je dôležité pre analýzu napäťového spevňovania [2] a stabilitné analýzy
- Exaktné modely využívajúce trojrozmernú teóriu pružnosti

V MKP sa pomocou doskových konečných prvkov modeluje len strednicová rovina dosky, ktorá je pri totálnej Green-Lagrangeovskej formulácii aj referenčnou rovinou. Doskové prvky sú teda z geometrického hľadiska dvojrozmerné; zmenou ich hrúbky možno modelovať dosku s meniacou sa hrúbkou, v prípade potreby možno meniť lineárne aj hrúbku samotného prvku.

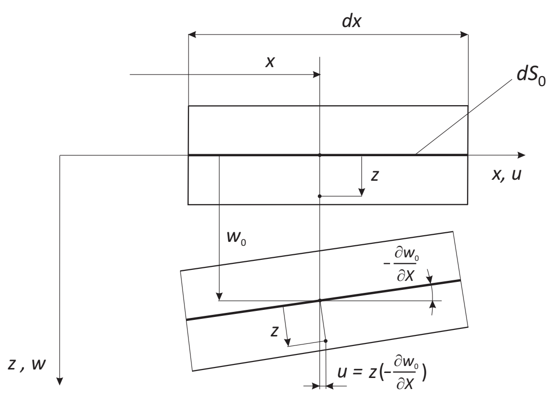


Obr. 9.1

9.2 Kinematické rovnice Kirchhoffovho a von Kármánovho modelu dosky

Oba modely vychádzajú z Kirchhoffových predpokladov, že kolmice na nezaťaženú strednicovú rovinu dosky (priečne normály) zostanú rovné aj po zaťažení a rotujú tak, aby si zachovali normálový smer aj na zdeformovanú strednicovú plochu (priehybovú plochu). Predpokladá sa tiež, že body dosky na spoločnej normále nemenia svoje vzájomné vzdialenosti (deformácia hrúbky dosky sa zanedbáva, $\varepsilon_z = 0$). Potom pole posunutí bodov dosky možno vyjadriť pomocou funkcií zložiek posunutí bodov *strednicovej roviny* u_0, v_0 a w_0 (takto vyjadrený ohybový príspevok k posunutiu v smere osi x je znázornený na obr. 9.2)

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{9.1}$$



Obr. 9.2

S touto aproximáciou funkcií posunutí možno zložky Green-Lagrangeovho tenzora deformácie dosky výrazne zjednodušiť. Pripomeňme si nezávislé zložky tohto tenzora (materiálové súradnice sú kvôli jednoduchosti označené malými písmenami - nepotrebujeme ich odlíšenie od priestorových)

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\ E_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\ E_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\ 2E_{xy} &= \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\ 2E_{yz} &= \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \\ 2E_{xz} &= \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \tag{9.2}$$

Pri geometricky i fyzikálne lineárnej Kirchoffovej doske sú gradienty funkcií zložiek posunutí malé čísla a všetky kvadratické členy v (9.2) možno zanedbať. S využitím (9.1) dostávame

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \qquad \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \qquad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \qquad (9.3)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

V prípade, že na doske vzniknú väčšie priehyby a väčšie rotácie priečnych normál (zhruba do 15°), potom nasledujúce kvadratické členy sú ešte stále malé, ale nie zanedbateľné

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (9.4)$$

Zohľadnením týchto členov dostaneme tzv. von Kármánove pomerné deformácie geometricky nelineárnej dosky

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \qquad (9.5)$$

pričom ostatné zložky sú rovné nule ako v (9.3).

9.3 Teória Kirchhoffovej dosky zaťaženej len v priečnom smere

Ak na dosku pôsobí len zaťaženie v priečnom smere a body dosky sa môžu voľne pohybovať v smere *x* a *y*, potom pomerné deformácie Kirchhoffovho modelu podľa (9.3) sú

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \qquad (9.6)$$

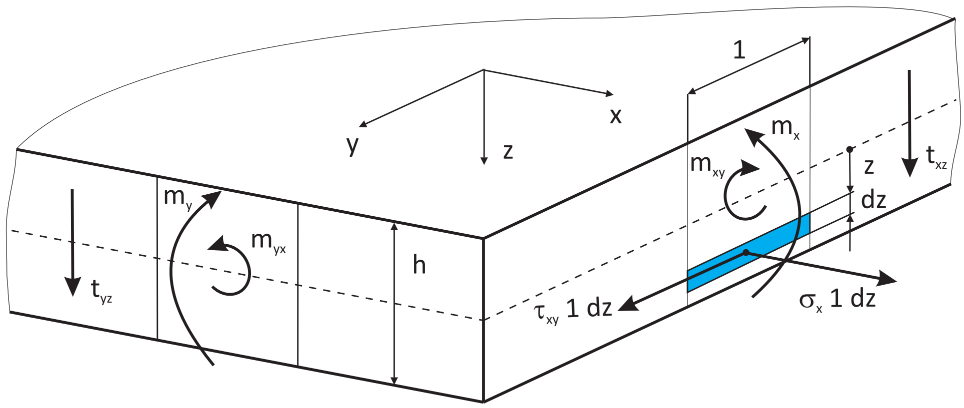
Pre určitú hodnotu premennej z ($-h/2 \le z \le h/2$) sú to deformačné zložky rovinnej napätosti (teraz ale s $\varepsilon_z = 0$), ktoré, ako vidieť z (9.6), sa lineárne menia po hrúbke dosky. Z fyzikálnych (konštitutívnych) rovníc platných pre rovinnú napätosť a izotropný materiál dostávame napätia v doske

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \qquad (9.7)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1-\mu^2}(1-\mu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

kde E je modul pružnosti ťahu/tlaku, μ Poisonovo číslo a G modul pružnosti v šmyku materiálu. Priehybová plocha je aj neutrálnou plochou napätí, na nej sú napätia nulové a menia znamienko. Extrémne hodnoty napätí sa, analogicky ako pri ohýbanom nosníku, nachádzajú na spodnom a hornom povrchu dosky.



Obr. 9.3

Výslednice vnútorných síl sa určujú integráciou napätí po priečnom reze s jednotkovou šírkou (obr.9. 3) a preto sa často označujú malými písmenami

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \cdot 1 \cdot dz) z = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_y \cdot 1 \cdot dz) z = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)$$

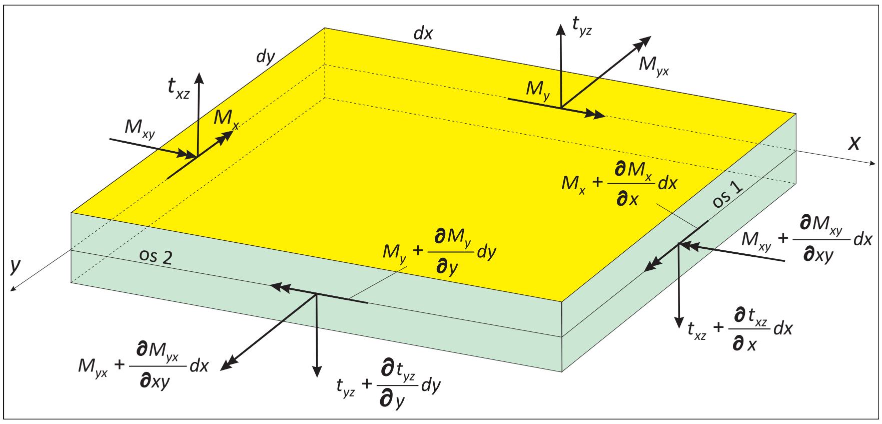
$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy} \cdot 1 \cdot dz) z = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \qquad (9.8)$$

$$t_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \cdot 1 \cdot dz = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$t_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \cdot 1 \cdot dz = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

kde sme v posledných dvoch rovniciach využili výsledky dvoch momentových rovníc rovnováhy diferenciálneho elementu dosky k osiam 1 a 2 (obr. 9.4):

$$t_{xz}=\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$
$$t_{yz}=\frac{\partial m_y}{\partial y}+\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \qquad (9.9)$$



Obr. 9.4

Koeficient D, ktorý v (9.8) vyjadruje tuhosť dosky, je

$$D=\frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \qquad (9.10)$$

Silová podmienka rovnováhy tohto elementu zaťaženého tlakom p dáva

$$pdxdy+(t_{xz}+dt_{xz})dy-t_{xz}dy+(t_{yz}+dt_{yz})dx-t_{yz}dx=0$$

Po vykrátení členov a vydelení rovnice súčinom $dxdy$ sa zjednoduší na

$$p+\frac{\partial t_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial y}=0 \qquad (9.11)$$

Dosadením priečnych síl z (9.8) a úpravou dostaneme biharmonickú diferenciálnu rovnicu dosky

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p}{D} \qquad \rightarrow \qquad \Delta\Delta w=\frac{p}{D} \qquad (9.12)$$

kde Δ je Laplaceov diferenciálny operátor. Využitím (9.8) až (9.11) ju možno vyjadriť aj pomocou výsledníc vnútorných síl

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}=p \qquad (9.13)$$

Pri Kirchhoffovej doske, ako vyplýva z kinematických rovníc, sa však energia *priečnych* šmykových deformácií zanedbáva, z čoho vyplýva, že pri tomto modeli sa predpokladá $\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$. Z praktického hľadiska to znamená, že tieto napätia musia by výrazne menšie ako napätia (9.7). Ak to nie je splnené, treba použiť model (konečný prvok) zohľadňujúci vplyv priečnych síl dosky na energiu napätosti (napr. Mindlin-Reissnerov model).

Z rozboru napätosti Kirchhoffovej dosky vyplýva, že najviac namáhané miesta dosky treba hľadať na hornej alebo spodnej ploche dosky, kde absolútne hodnoty ohybových normálových napätí σ_x, σ_y i šmykové napätie od krútenia τ_{xy} majú extrémne hodnoty vzhľadom na ich priebeh po hrúbke dosky. Kritické miesto pre posúdenie pevnosti dosky je potom miesto, kde redukované napätie určené podľa vhodnej pevnostnej hypotézy (von Misesovo, intenzita napätia) dosahuje maximálnu hodnotu.

Nielen primárna neznáma - funkcia priehybu $w_0(x,y)$ strednicovej roviny dosky, ale aj parciálne derivácie tejto funkcie majú jasný fyzikálny význam, dôležitý pri vyhodnocovaní výsledkov i pri predpisovaní deformačných okrajových podmienok. Funkcia $\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}$ vzhľadom na malé rotácie normál dosky sa považuje priamo za uhol natočenia normály v danom bode v rovine *xz* (t.j. okolo osi rovnobežnej so súradnicovou osou *y*). Analogicky $\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}$ je uhol natočenia v rovine *yz.* Na *zakrivenom* obvode strednicovej roviny treba vyjadrovať natočenia okolo dotyčnice a okolo normály - $\partial w_0 / \partial n$ a $\partial w_0 / \partial s$. Silovými partnermi natočení sú ohybové momenty a krútiaci moment na jednotku dĺžky m_x, m_y, m_n a m_s, ktoré v prípade zadaných deformačných okrajových podmienok predstavujú neznáme reakčné momenty v príslušných miestach. Rovnako ako pri iných pevnostných úlohách, možno zadávať aj silové a zmiešané okrajové podmienky.

Doska je vo všeobecnosti zaťažená objemovými silami (vlastná tiaž, odstredivá sila), plošným tlakom, čiarovými i sústredenými silami, teplotným zaťažením a reakčnými silami a momentami.

9.4 Určenie matíc prvku Kirchhoffovej dosky zaťaženej len v priečnom smere

Matice konečného prvku Kirchhoffovej dosky namáhanej len v priečnom smere určíme pomocou princípu virtuálnych posunutí (časť 3.6)

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{ext} \tag{9.14}$$

Na prvku budeme uvažovať len konštatný plošný tlak *p*, takže pre virtuálnu prácu vonkajších síl platí

$$\delta W_{ext}^e = \int_{S_0^e} p \delta w_0 dS \tag{9.15}$$

Konštitutívny vzťah (9.7) zapíšeme v maticovom tvare

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_o = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_o \tag{9.16}$$

Po aplikácii virtuálneho posunutia $\delta w_0(x,y)$ na strednicovú plochu zaťaženého prvku virtuálna práca vnútorných síl bude

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_{S_0^e} \left(\delta \boldsymbol{\varepsilon}_o\right)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_o dS \tag{9.17}$$

kde vektor virtuálnej deformácie dosky od priečneho zaťaženia je

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_o = \left\{ -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right\}^T \tag{9.18}$$

Na prvku zvolíme aproximáciu funkcie $w_0(x,y)$ pomocou vhodných tvarových funkcií prvku $N(x,y)$ a n hodnôt zovšeobecnených posunutí uzlových bodov prvku u_j^e

$$w_0(x,y) = \sum_{j=1}^{n} u_j^e N_j(x,y) \tag{9.19}$$

Ak do (9.14) dosadíme (9.15) až (9.19) a za virtuálne posunutie postupne zvolíme funkciu (9.19) s jednotkovými hodnotami zovšeobecnených posunutí (ostatné rovné nule)

$$(\delta w_0)_j = N_j \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{9.20}$$

dostaneme sústavu n uzlových rovníc rovnováhy prvku

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \tag{9.21}$$

V (9.21) $\mathbf{K}^e$ je matica tuhosti prvku, $\mathbf{u}^e$ je stĺpcová matica (vektor) zovšeobecnených posunutí prvku a $\mathbf{f}^e$ je vektor uzlových zaťažení prvku od tlaku p. Pre všeobecný koeficient matice tuhosti K_{ij} sme dostali

$$K_{ij} = \int_{S_0^e} \left[D_{11} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + D_{12} \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right) + 4 D_{33} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right] dxdy \tag{9.22}$$

kde D_{ij} sú členy materiálovej matice $\mathbf{D}$ z (9.16).

Koeficient vektora $\mathbf{f}^e$ na i-tom riadku je

$$f_i = \int_{S_0^e} p N_i dxdy \tag{9.23}$$

Aproximačný polynóm priehybu strednicovej plochy prvku (9.19) možno zapísať aj v maticovom tvare

$$w_0(x,y) = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \tag{9.24}$$

kde

$$\mathbf{N} = \left[N_1(x,y) \quad N_2 \quad \cdots \quad N_{n-1} \quad N_n \right] \tag{9.25}$$

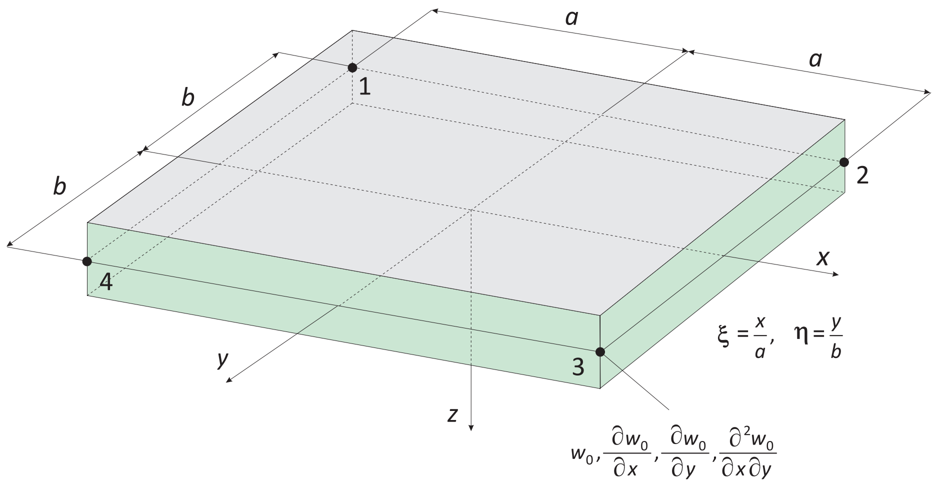
je matica (v tomto prípade riadková) interpolačných funkcií prvku a

$$\mathbf{u}^e = \left[(w_0)_1 \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_1 \quad (w_0)_2 \quad \cdots \quad \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_{NUE} \right]^T \tag{9.26}$$

je vektor zovšeobecnených uzlových posunutí prvku s *NUE* uzlami a so štyrmi uvedenými stupňami voľnosti uzla.

9.5 Pravouhlý štvoruzlový prvok Kirchhoffovej dosky

Z množstva konečných doskových prvkov, ponúkaných literatúrou MKP (viď napr. [7]), sme pre zoznámenie sa s interpolačnými funkciami a pre demonštráciu numerického spracovania vybrali štvoruzlový pravouhlý prvok (obr. 9.5) so 16 stupňami voľnosti.



Obr. 9.5

Výpočtový model dosky s týmto prvkom je presný aj pri hrubom delení, pravda, prvok má obmedzené praktické využitie, pretože je vhodný len na riešenie obdĺžnikových a štvorcových dosiek. Patrí do kategórie tzv. *konformných* prvkov, pri ktorých je kontinuita sklonu normály k strednicovej ploche $\partial w_0 / \partial n$ zachovaná vo všetkých bodoch prvku (problémy so zachovaním tejto podmienky vznikajú v rohových bodoch všeobecných štvoruholníkových a trojuholníkových prvkov). Interpolačné funkcie prvku sú [8]

$$N_1 = \tfrac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta-1)^2(-\eta-2)$$
$$N_2 = -\tfrac{1}{16}a(\xi-1)^2(\xi+1)(\eta-1)^2(-\eta-2)$$
$$N_3 = -\tfrac{1}{16}b(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta-1)^2(\eta+1)$$
$$N_4 = \tfrac{1}{16}ab(\xi-1)^2(1+\xi)(\eta-1)^2(\eta+1)$$

$$N_5 = \tfrac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta-1)^2(-\eta-2)$$
$$N_6 = \tfrac{1}{16}a(\xi+1)^2(-\xi+1)(\eta-1)^2(-\eta-2)$$
$$N_7 = -\tfrac{1}{16}b(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta-1)^2(\eta+1)$$
$$N_8 = -\tfrac{1}{16}ab(\xi+1)^2(1-\xi)(\eta-1)^2(\eta+1)$$

$$N_9 = \tfrac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta+1)^2(\eta-2) \qquad (9.27)$$
$$N_{10} = \tfrac{1}{16}a(\xi+1)^2(-\xi+1)(\eta+1)^2(\eta-2)$$

$$N_{11} = \tfrac{1}{16}\, b(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta+1)^2(-\eta+1)$$
$$N_{12} = \tfrac{1}{16}\, ab(\xi+1)^2(1-\xi)(\eta+1)^2(1-\eta)$$

$$N_{13} = \tfrac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta+1)^2(\eta-2)$$
$$N_{14} = -\tfrac{1}{16}\, a(\xi-1)^2(\xi+1)(\eta+1)^2(\eta-2)$$
$$N_{15} = \tfrac{1}{16}\, b(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta+1)^2(-\eta+1)$$
$$N_{16} = -\tfrac{1}{16}\, ab(\xi-1)^2(1+\xi)(\eta+1)^2(1-\eta)$$

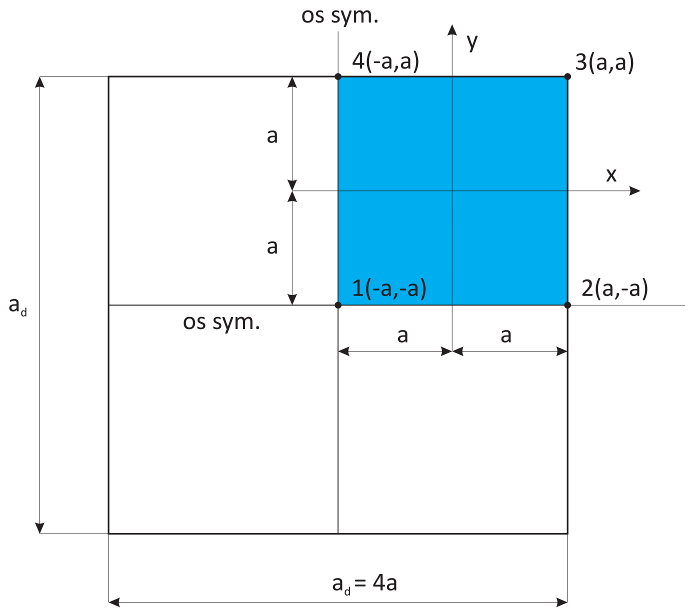
kde

$$\xi = x/a \quad \text{a} \quad \eta = y/b$$

sú prirodzené súradnice prvku [1]. Ako vidieť, vzhľadom na pravouhlý tvar prvku je v tomto prípade vzťah medzi prirodzenými súradnicami a súradnicami *x*, *y* jednoduchý, čo uľahčuje deriváciu interpolačných funkcií v (9.22) podľa *x a* y. Konformnosť prvku sa dosiahla zaradením zmiešanej derivácie do uzlových stupňov voľnosti prvku.

9.6 Príklad - štvorcová voľne podopretá doska zaťažená konštantným tlakom

Pomocou uvedeného prvku určíme maximálny priehyb a znázorníme priehybovú plochu štvorcovej dosky (obr. 9.6) so stranou a_d = 2 m zaťaženej normálovým tlakom p = 1000 N/m^2, ktorá je voľne podopretá po obvode. Hrúbka dosky je 0,01 m a materiálové konštanty sú E = 10^{11} N/m^2 , μ = 0,25.



Obr. 9.6

Príklad možno vyriešiť pomerne s malou námahou, pretože prvok dáva veľmi presné výsledky už pri delení dosky na 2x2 prvky. Navyše doska má dve osi symetrie, takže stačí použiť len jeden prvok (obr. 9.6) s predpísanými podmienkami symetrie. Odpadne teda nutnosť vytvárania globálnych matíc dosky (matice prvku budú zároveň aj matice dosky). Ďalšie zjednodušenie dosiahneme použitím programu *Mathematica 5*, pri ktorom nie je potrebné editovať explicitné vzťahy derivácií a integrálov interpolačných funkcií (program si ich vie sám vypočítať). Z vypočítaných nenulových hodnôt zovšeobecnených uzlových posunutí možno tiež veľmi jednoducho graficky znázorniť priehybovú plochu symetrickej štvrtiny dosky zobrazením grafu funkcie $w_0(x,y)$ podľa vzťahu (9.19) pomocou funkcie Plot3D.

Výpočtový program je uvedený na obr. 9.7. V programe sa zaviedli okrajové podmienky, ktoré vyplývajú z podopretia dosky

$$(w_0)_2 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_2 = (w_0)_3 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_3 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_3 = \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_3 = (w_0)_4 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_4 = 0$$

a ktoré vyplývajú z jej symetrie

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_1 = 0$$

Po zavedení týchto podmienok sa sústava rovníc (9.21) zredukovala na päť globálnych rovníc

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \tag{9.28}$$

kde vektor neznámych je

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} (w_0)_1 & \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_2 & \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_2 & \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_4 & \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_4 \end{bmatrix}^T \tag{9.29}$$

Program vypočítal maximálny priehyb dosky

$$w_{0\max} = (w_0)_1 = 0{,}0070\,\mathrm{m}$$

a s vypočítanými nenulovými numerickými hodnotami (9.29) vykreslil priehybovú plochu symetrickej štvrtiny dosky podľa (9.24) s veľkým zväčšením priehybu (obr. 9.8).

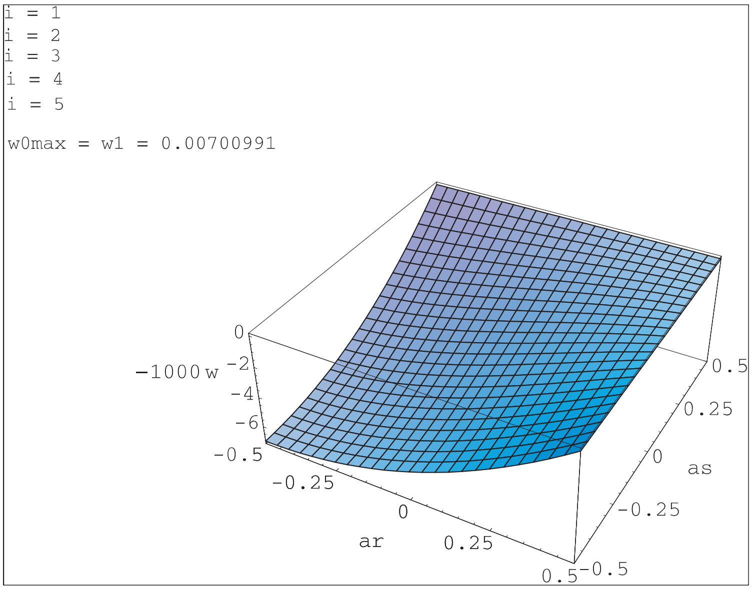
Kontrola výsledku je možná z analytického riešenia takejto dosky prevzatého z [Lit1]

$$w_{0\max} = 0{,}045698 \frac{p a_d^4}{E h^3} = \frac{1000 \cdot 2^4}{10^{11} \cdot 0{,}01^3} = 0.00731\,\mathrm{m}$$

Pre zaujímavosť uvádzame výsledky z programu ANSYS so škrupinovým štvoruzlovým prvkom SHELL63. Pri delení dosky na 2x2 prvky $w_{0\max} = 0{,}00578\,\mathrm{m}$ a pri delení 10x10 prvkov $w_{0\max} = 0{,}00724\,\mathrm{m}$.

```
(* ŠTVORCOVÁ DOSKA *)
Off[General::spell]
(* Vstupné údaje *)
EE=10.^11; mi=0.25; h=0.01;p=1000.;
a=0.5;b=0.5;
(* Členy materiálovej matice D *)
D11=EE*h^3/(12*(1-mi^2)); D22=D11;
D12=D11*mi; D33=EE*h^3/(24*(1+mi));
(* Potrebné interpolačné funkcie prvku *)
r=x/a;s=y/b;
N1=1/16*(r-1)^2*(-r-2)(s-1)^2*(-s-2);
N6=a/16*(r+1)^2*(-r+1)(s-1)^2*(-s-2);
N8=-a*b/16*(r+1)^2*(1-r)(s-1)^2*(s+1);
N15=b/16*(r-1)^2*(-r-2)(s+1)^2*(-s+1);
N16=-a*b/16*(r-1)^2*(1+r)(s+1)^2*(1-s);
Ni={N1,N6,N8,N15,N16};
(* Príprava a vynulovanie vektorov a matíc *)
Nix=Table[0,{5}];
Niy=Table[0,{5}];
Nixy=Table[0,{5}];
f=Table[0,{5}];
KK=Table[0,{5},{5}];
(* Výpočet derivácií interpolačných funkcií *)
For[i=1,i<6,
Nix[[i]]=D[Ni[[i]],{x,2}];
Niy[[i]]=D[Ni[[i]],{y,2}];
Nixy[[i]]=D[Ni[[i]],x,y];
i++];
(* Výpočet matice tuhosti a vektora zaťaženia prvku *)
For[i=1,i<6,
For[j=1,j<6,
KK[[i,j]]=KK[[i,j]]+Integrate[D11*Nix[[i]]*Nix[[j]]+D22*Niy[[i]]*Niy[[j]]+
          D12*(Nix[[i]]*Niy[[j]]+Niy[[i]]*Nix[[j]])+
          4*D33*Nixy[[i]]*Nixy[[j]],{x,-a,a},{y,-b,b}];
j++];
f[[i]]=Integrate[p*Ni[[i]],{x,-a,a},{y,-b,b}];
Print["i = ",i];
i++];
(* Inverzia matice tuhosti *)
KKinv=Inverse[KK];
(* Riešenie sústavy rovníc-výpočet nenulových zovšeobecnených posunutí uzlových bodov *)
u=KKinv.f;
(* Výpis priehybu stredu dosky *)
Print["w0max = w1 = ", u[[1]]];
(* Vykreslenie priehybovej plochy symetrickej štvrtiny dosky *)
Off[General::spell]
w1=u[[1]];
wx2=u[[2]];
wxy2=u[[3]];
wy4=u[[4]];
wxy4=u[[5]];
w[x_,y_]=(N1*w1+N6*wx2+N8*wxy2+N15*wy4+N16*wxy4);
Plot3D[w[x,y]*(-1000),{x,-a,a},{y,-b,b},AxesLabel->{ar,as,-w*1000},ViewPoint→{1.3,-2.4,2.}];
```

Obr. 9.7



Obr. 9.8

9.7 Nelineárny prvok von Kármánovej dosky

Pri tomto prvku budeme uvažovať von Kármánove pomerné deformácie geometricky nelineárnej dosky (9.5)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\varepsilon}_o \tag{9.30}$$

skladajúce sa z membránových deformácií

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{9.31}$$

a z deformácií od priečneho zaťaženia (ktorými sme sa zaoberali v predchádzajúcej časti)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{9.32}$$

Vo výslednom deformačnom stave dosky dochádza pri takejto doske k väzbe lineárnych členov klasickej rovinnej napätosti a lineárnych členov klasickej Kirchhoffovej dosky (t.j. lineárnej dosko/steny) s kvadratickými člennmi gradientov funkcie priehybu dosky $w_0(x,y)$, čo v konečnom dôsledku vedie na nelineárnu maticu tuhosti prvku.

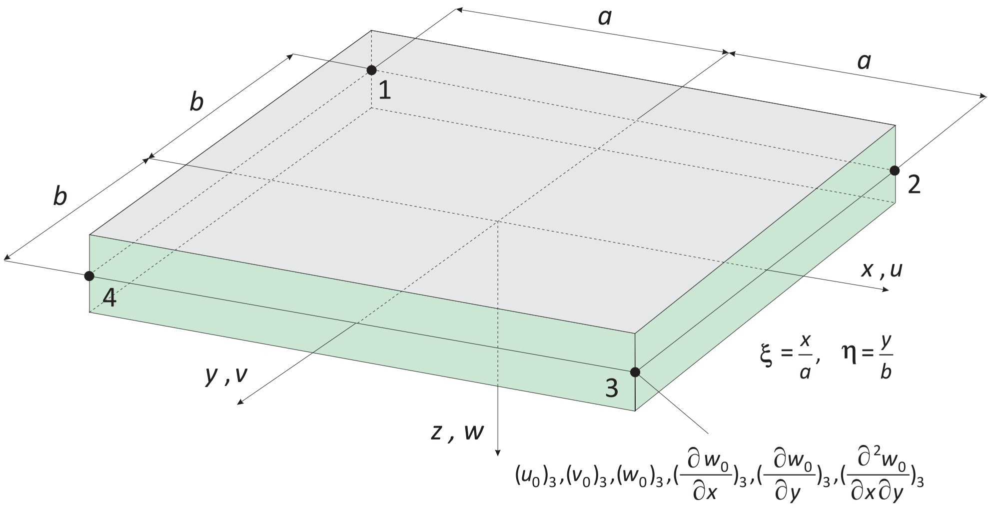
Uvažujme opäť pravouhlý štvoruzlový konečný prvok, ako v predchádzaj časti, avšak teraz už so šiestimi stupňami voľnosti uzla (obr. 9), pretože v rovniciach rovnováhy prvku musíme zohľadňovať aj membránové posuvy uzlov $(u_0)_i$ a $(v_0)_i$.

Prvok bude mať 24 stupňov voľnosti vyjadrených uzlovými hodnotami v usporiadaní vhodnom pre kompaktný zápis matíc prvku

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \end{Bmatrix} = \{u1, u2, u3, u4, v1, v2, v3, v4, w1, w2, w3, \cdots, w16\}^T \tag{9.33}$$

s geometrickým významom podľa obr. 9.9, t.j. $u1 = (u_0)_1$, $u2 = (u_0)_2$ atď.; $v1 = (v_0)_1$, $v2 = (v_0)_2$ atď.;

$w1 = (w_0)_1$, $w2 = (\frac{\partial w_0}{\partial x})_1$, $w3 = (\frac{\partial w_0}{\partial y})_1$, $w4 = (\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y})_1$, $w5 = (w_0)_2$ atď.



Obr. 9.9

Priehyb strednicovej plochy dosky budeme opäť aproximovať funkciou $w_0(x,y)$ udanou v (9.24) s nezmenenými interpolačnými funkciami (9.27).

Aproximačné funkcie membránových zložiek posunutia bodov strednicovej plochy prvku nech sú

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= n_1 u1 + n_2 u2 + n_3 u3 + n_4 u4 \\ v_0(x,y) &= n_1 v1 + n_2 v2 + n_3 v3 + n_4 v4 \end{aligned} \tag{9.34}$$

s bilineárnymi interpolačnými funkciami

$$\begin{aligned} n_1(x,y) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ n_2(x,y) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ n_3(x,y) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ n_4(x,y) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ \xi = x/a&; \quad \eta = y/b \end{aligned} \tag{9.35}$$

Fyzikálne vzťahy membránovej deformácie sú

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{bmatrix} \tag{9.36}$$

a virtuálna práca vnútorných membránových síl

$$\delta W_{\text{int}}^m = \int_{V_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m dV = \int_{-h/2}^{h/2} (\int_{S_0^e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m dxdy) dz = \int_{S_0^e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m dxdy \tag{9.37}$$

kde

$$\mathbf{A} = h\mathbf{D}_m = \frac{hE}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11 & A12 & 0 \\ A12 & A22 & 0 \\ 0 & 0 & A33 \end{bmatrix} \tag{9.38}$$

Celková virtuálna práca vnútorných síl prvku je

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{int}}^m + \delta W_{\text{int}}^o = \int_{S_0^e} \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)^T \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m dxdy + \int_{S_0^e} \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}_o\right)^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_o dS \tag{9.39}$$

Silové zložky membránového zaťaženia sú

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} \tag{9.40}$$

a s prihliadnutím na (9.16) dostávame

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{S_0^e} \left\{ \delta\varepsilon_x^m \quad \delta\varepsilon_y^m \quad \delta\gamma_{xy}^m \right\} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} dxdy + \int_{S_0^e} \left\{ \delta\varepsilon_x^o \quad \delta\varepsilon_y^o \quad \delta\gamma_{xy}^o \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} dxdy \tag{9.41}$$

Podľa (9.31) a (9.32) pre virtuálne zmeny deformácií platí

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x^m \\ \delta\varepsilon_y^m \\ \delta\gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\delta u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\delta v_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\delta u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_o = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x^o \\ \delta\varepsilon_y^o \\ \delta\gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} \tag{9.42}$$

Na prvku budeme uvažovať len konštatný plošný tlak p (membránové zaťaženie budeme kvôli jednoduchosti predpokladať len v uzloch globálneho modelu dosky), takže pre virtuálnu prácu vonkajších síl platí

$$\delta W_{ext}^e = \int_{S_0^e} p\delta w_0 dS \tag{9.43}$$

Ak do (9.41) dosadíme aproximácie (9.34) a (9.24) a za virtuálne posunutie postupne vystriedame tieto funkcie a ich membránové a ohybové väzby s jednotkovými virtuálnymi hodnotami zovšeobecnených uzlových posunutí (ostatné rovné nule), dostaneme sústavu *24* nelineárnych uzlových rovníc rovnováhy prvku

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)\mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \tag{9.44}$$

kde $\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)$ je matica tuhosti prvku, $\mathbf{u}^e$ je stĺpcová matica (vektor) zovšeobecnených posunutí prvku a $\mathbf{f}^e$ je vektor uzlových zaťažení prvku od tlaku *p*.

Pre potreby explicitného vyjadrenia členov matice tuhosti a vektora uzlových zaťažení prvku je výhodné zapísať (9.44) v tvare

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{Bmatrix} \tag{9.45}$$

kde pre členy submatíc platí

$$\left[K_{ij}^{11}\right]_{4x4} = \int_{S_0^e} \left(A_{11} \frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + A_{33} \frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{12}\right]_{4x4} = \int_{S_0^e} \left(A_{12} \frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x} \right) dxdy; \qquad \left[K_{ij}^{21}\right]_{4x4} = K_{ji}^{12}$$

$$\left[K_{ij}^{13}\right]_{4x16} = \frac{1}{2}\int_{S_0^e} \left[\frac{\partial n_i}{\partial x} \left(A_{11} \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + 2A_{33} \frac{\partial n_i}{\partial y} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \right] dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{22}\right]_{4x4} = \int_{S_0^e} \left(A_{33} \frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{23}\right]_{4x16} = \frac{1}{2}\int_{S_0^e} \left[\frac{\partial n_i}{\partial y} \left(A_{12} \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + 2A_{33} \frac{\partial n_i}{\partial x} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \right] dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{31}\right]_{16x4} = \int_{S_0^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(A_{11} \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y} + A_{12} \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x} \right) \right] dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{32}\right]_{16x4} = \int_{S_0^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(A_{12} \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) \right] dxdy$$

$$\begin{aligned}
\left[K_{ij}^{33}\right]_{16x16} = & \int_{S_0^e} \left[D_{11} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + D_{12} \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right) + 4D_{33} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right] dxdy + \\
& + \frac{1}{2}\int_{S_0^e} \left\{ \left[A_{11} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + A_{12} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \left[A_{12} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right. \\
& \left. + 2A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \right\} dxdy
\end{aligned} \tag{9.46}$$

Pre subvektory zaťaženia prvku platí

$$\left\{\mathbf{f}^1\right\}_{4x1}=\mathbf{0}\,;\qquad \left\{\mathbf{f}^2\right\}_{4x1}=\mathbf{0}\,;\qquad \mathrm{f}_i^3=\int_{S_0^e} pN_i dxdy\,,\quad i=1,2,\cdots,16 \tag{9.47}$$

Ukážme si na príkladoch, ako možno dospieť ku vzťahom (9.46). Ak na prvok aplikujeme virtuálne posunutie

$$\delta u_0(x,y)=n_1(x,y)\,\delta u1\big|_{\delta u1=1} \tag{9.48}$$

z (9.41) dostaneme pre j = 1, 2, 3, 4 prvý riadok matice $\mathbf{K}^{11}$ (a analogickým vystriedaním $u1$ s $u2$, $u3$ a $u4$, celú submaticu $\mathbf{K}^{11}$)

$$\int_{S_0^e}\left\{\frac{\partial n_1}{\partial x}\quad 0\quad \frac{\partial n_1}{\partial y}\quad 0\quad 0\quad 0\right\}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial n_j}{\partial x}uj\\ 0\\ \frac{\partial n_j}{\partial y}uj\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}dxdy=uj\int_{S_0^e}\left(A_{11}\frac{\partial n_1}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{33}\frac{\partial n_1}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)dxdy=ujK_{1j}^{11}$$

Rovnakým spôsobom sa tvorí aj o niečo komplikovanejší príspevok od virtuálneho posunutia $\delta w_0(x,y)=N_1(x,y)\,\delta wj\big|_{\delta wj=1}$

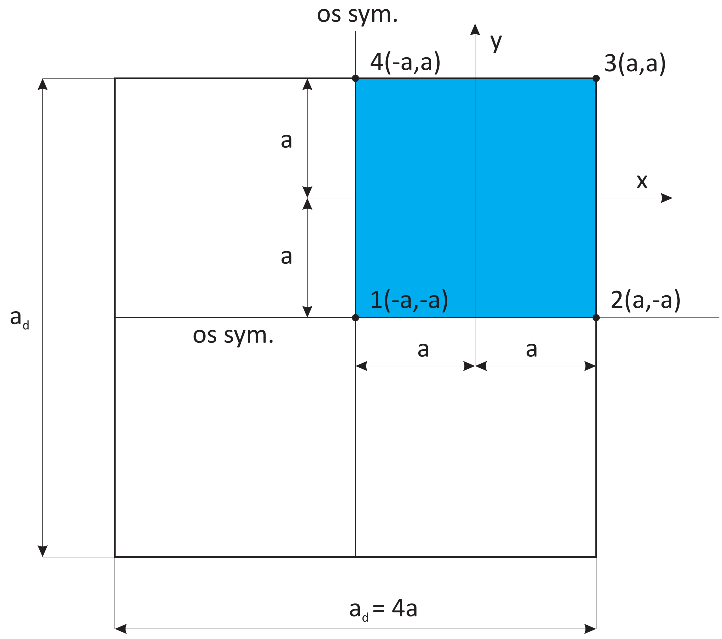
$$\int_{S_0^e}\left\{\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}wj\quad \frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}wj\quad \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}wj+\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}wj\right\}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{Bmatrix}dxdy+\int_{S_0^e}\left\{-\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}\quad -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}\quad -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\partial y}\right\}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}wj\\ -\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2}wj\\ -2\frac{\partial^2 N_j}{\partial x\partial y}wj\end{Bmatrix}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}wj\int_{S_0^e}\left\{\left[A_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\left[A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{22}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+2A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right\}dxdy$$

$$+wj\int_{S_0^e}\left[D_{11}\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2}+D_{12}\left(\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}\right)+2D_{33}\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x\partial y}\right]dxdy=wjK_{1j}^{33}$$

9.8 Príklad - Štvorcová na obvode tuho votknutá nelineárna doska zaťažená tlakom

Pomocou nelineárneho prvku von Kármánovej dosky určíme maximálny priehyb a znázorníme priehybovú plochu štvorcovej dosky (obr. 9.10) so stranou a_d = 2 m zaťaženej normálovým tlakom p = 1000 N/m^2, ktorá je voľne podopretá po obvode. Hrúbka dosky je 0,01 m a materiálové konštanty sú E = 10^{11} N/m^2 , μ = 0,25.



Obr. 9.10

Pri výpočte použijeme postup, ktorý sme opísali pri riešení príkladu lineárnej dosky. Vzhľadom na tuhé votknutie sa počet neznámych uzlových posunutí po zavedení okrajových podmienok zredukuje na jedinú neznámu $(w_0)_1$, čo je zároveň aj maximálny priehyb v strede dosky. Sústava rovníc pre určenie uzlových posunutí sa takto zmenila na jedinú nelineárnu rovnicu

$$(104838 + 7{,}37467 \cdot 10^8 w1^2)w1 = 250 \tag{9.49}$$

ktorej nelineárny tuhostný člen i náhradnú uzlovú silu F od spojitého tlaku pre jediný stupeň voľnosti dosky určil program (*Mathematika 5*) uvedený na obr. 9.11. V tomto obrázku sme znázornili aj priehybovú plochu symetrickej štvrtiny dosky od jednotkového priehybu $w1$.

Nelineárnu rovnicu (9.49) sme riešili Newton-Raphsonovou metódou [2] v jednoduchom programe (*Mathematika 5*) na obr. 9.12 pre viacej prípadov zaťažovacieho tlaku. Pre p = 1000 Pa program vypočítal maximálny priehyb dosky

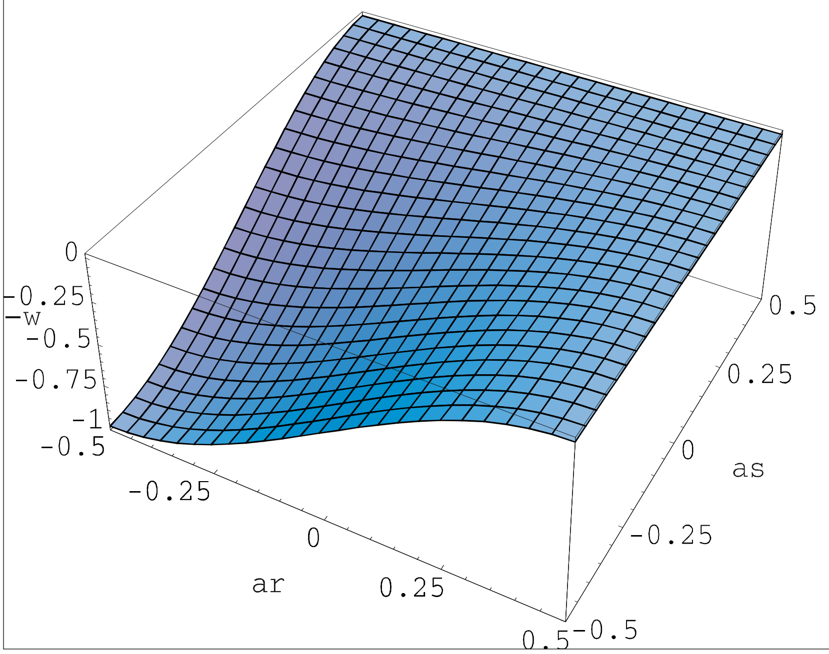
$$w_{0\max} = (w_0)_1 = 0{,}0022995\,\text{m}$$

Na obr. 9.13 sme graficky znázornili nelineárny priebeh maximálneho priehybu dosky v závislosti na zaťažovacom tlaku pomocou vypočítaných diskrétnych hodnôt.

```
(* VOTKNUTÁ NELINEÁRNA DOSKA *)
Off[General::spell];
EE=10.^11; mi=0.25; h=0.01;p=1000.;
a=0.5;b=0.5;
D11=EE*h^3/(12*(1-mi^2)); D22=D11;
D12=D11*mi; D33=EE*h^3/(24*(1+mi));
Q11=EE/(1-mi^2);Q22=Q11;
Q12=Q11*mi;Q33=EE/2/(1+mi);
A11=Q11*h;A12=Q12*h;A22=A11;A33=Q33*h;
r=x/a;s=y/b;
N1=1/16*(r-1)^2*(-r-2)(s-1)^2*(-s-2);
Nix=D[N1,{x,2}];Niy=D[N1,{y,2}];Nixy=D[N1,x,y];
Nx=D[N1,x];Ny=D[N1,y];
w0=N1*w1;dwx=D[w0,x];dwy=D[w0,y];
f=Integrate[p*N1,{x,-a,a},{y,-b,b}];
pom1=Integrate[D11*Nix*Nix+D22*Niy*Niy+D12*(Nix*Niy+Niy*Nix)+
          4*D33*Nixy*Nixy,{x,-a,a},{y,-b,b}];
pom2=0.5*Integrate[(A11*dwx^2+A12*dwy^2)*Nx*Nx+(A12*dwx^2+A22*dwy^2)*Ny*Ny
          +2*A33*dwx*dwy*(Nx*Ny+Ny*Nx),{x,-a,a},{y,-b,b}];
KK=pom1+pom2;
Print["KK = ",KK];
Print["f = ",f];
w[x_,y_]=N1*1.0;
Plot3D[-w[x,y],{x,-a,a},{y,-b,b},AxesLabel->{ar,as,-w}
,ViewPoint→{1.3,-2.4,2.}];
```

KK = $104838. + 7.37467\times10^{8}\,w1^{2}$

f = 250.

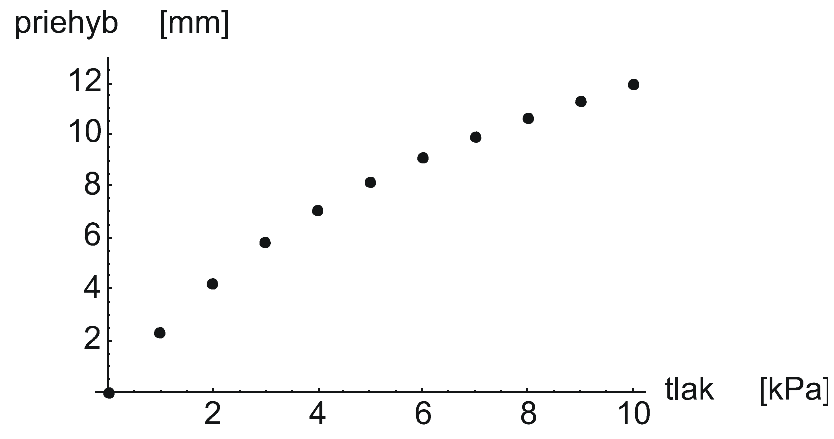


Obr. 9.11

```
NewtonRaphson[F_, uzac_, imax_, Rdov_] := Module[{},
 R[u_] = 104838 * u + 7.3747 * 10 ^ 8 * u ^ 3 - F;
 i = 0; u0 = uzac; u1 = u0;
 While[i < imax && Rdov < Abs[R[u1]], u0 = u1; u1 = u0 - R[u0] / R '[u0];
 i = i + 1;];];
F = 0;
For[k = 1, k < 11,
 F = F + 250;
 p = 4 * F;
 NewtonRaphson[F, 0, 20, 1];
 Print[" p = ", p, " Pa", "    u = ", PaddedForm[u1 * 1000, {6, 4}], " mm"];
 k++];

                              p = 1000 Pa   u =   2.2995 mm
                              p = 2000 Pa   u =   4.2350 mm
                              p = 3000 Pa   u =   5.7903 mm
                              p = 4000 Pa   u =   7.0615 mm
                              p = 5000 Pa   u =   8.1356 mm
                              p = 6000 Pa   u =   9.0670 mm
                              p = 7000 Pa   u =   9.8892 mm
                              p = 8000 Pa   u =  10.6293 mm
                              p = 9000 Pa   u =  11.3032 mm
                              p = 10000 Pa   u =  11.9233 mm
```

Obr. 9.12

```
ListPlot[{{0, 0}, {1, 2.2995}, {2, 4.235}, {3, 5.7903}, {4, 7.0615}, {5, 8.1356},
        {6, 9.067}, {7, 9.8892}, {8, 10.629}, {9, 11.3032}, {10, 11.9233}},
        PlotStyle → PointSize[0.02], AxesLabel → {"tlak [kPa]",
        "priehyb [mm]"}, PlotRange → {-0.2, 13}];
```



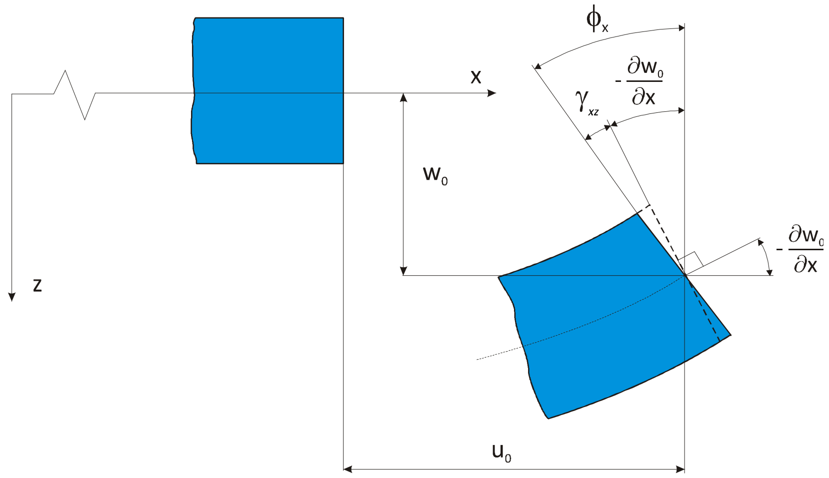
Obr. 9.13

9.9 Koncept Mindlin - Reissnerovej dosky

V tejto formulácii sa do vnútornej energie zaťaženej dosky zahŕňa aj energia vyvolaná priečnymi šmykovými deformáciami (skosmi γ_{xz} a γ_{yz}), ktorá sa pri klasických teóriách (Kirchhoff, von Kármán) zanedbáva. Vyžaduje si to potreba riešenia hrubších dosiek, ktoré vzhľadom na ich väčšiu ohybovú tuhosť (narastá s treťou mocninou hrúbky) sú navrhované na prenos väčšieho priečneho zaťaženia. Výpočet tejto energie sa zjednodušuje tak, že sa v priečnych rezoch predpokladá konštantný skos (a teda aj konštantné priečne šmykové napätie) po celej hrúbke dosky. Potom sa natočenie priečneho rezu zaťaženej dosky v rovine *xz* (a analogicky aj v rovine *xy*) účinkom skosu γ_{xz} zmení tak, ako je to znázornené na obr. 9.14 a pre funkcie posunutí bodov dosky na rozdiel od (9.1) sa zavádzajú vzťahy

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_x(x,y) \\
v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_y(x,y) \\
w(x,y,z) &= w_0(x,y)
\end{aligned}
\qquad (9.50)
$$

s neznámymi, a na funkcii priehybu strednicovej plochy dosky $w_0(x,y)$ nezávislými, funkciami $\phi_x(x,y)$ a $\phi_y(x,y)$. V tomto modeli mierne hrubej dosky sa potom objavuje päť neznámych polí zovšeobecnených posunutí $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$, kde ϕ_x a ϕ_y sú uhly udávajúce rotácie priečnych normál okolo osi *y* a *x* (obr. 9.14).



Obr. 9.14

Zviazanosť rotácie normál priehybovej plochy s uhlami dotyčníc k priehybovej ploche (s parciálnymi deriváciami funkcie priehybu w_0) sa takto vo vzťahoch (9.50) zrušila. To je spolu so zohľadnením priečnych deformácií základná charakteristika modelu Mindlin-Reissnerovej dosky a základné odlíšenie od klasickej teórie dosky. Dôsledkom takejto formulácie funkcií membránových posunutí je to, že napriek zohľadneniu šmykových deformácií a väčších možností využitia modelu je tvorba a programová implementácia konečných prvkov Mindlin-Reissnerovej dosky jednoduchšia ako v prípade horeuvedených klasických modelov (pre prvok dosky stačí tzv. C_0 kontinuita - zovšeobecnené uzlové posunutia prvku neobsahujú derivácie funkcií posunutia). V deformáciách, tj. v parciálnych deriváciách funkcií (9.50), sa už neobjavia druhé derivácie funkcie priehybu $w_0(x,y)$ a nároky na spojitosť aproximačných funkcií sa znížia. Je potom pochopiteľné, že skoro všetky komerčné programy založené na MKP, vrátane ANSYSu, využívajú takto formulované lineárne i nelineárne doskové konečné prvky.

9.10 Nelineárny prvok Mindlin-Reissnerovej dosky

Budeme postupovať rovnako ako pri nelineárnom prvku von Kármánovej dosky, ale s uvažovaním zmenených funkcií posunutí (9.50). Zložky deformácie všeobecného bodu dosky sa podľa (9.30)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\varepsilon}_o$$

skladajú z deformácií od membránového zaťaženia (9.31), ktoré zostávajú bez zmeny

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{9.51}$$

ale významne sa zmení a zjednoduší deformačný príspevok od priečneho ohybového a krútiaceho zaťaženia (9.32)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{9.52}$$

Pribudnú teraz ešte aj deformácie (skosy) od priečnych síl (pozri obr. 14)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \tag{9.53}$$

Ako sme uviedli v úvode tejto časti, predpokladajú sa konštantné skosy po hrúbke dosky a teda aj konštantné hodnoty šmykových napätí τ_{xz} a τ_{yz} (po výške obdĺžnikového rezu je ich skutočný priebeh parabolický). Ich silové výslednice (priečne sily na rezoch s jednotkovou šírkou) potom sú

$$t_{xz} = k_s(h\cdot 1)\tau_{xz} = k_s hG\gamma_{xz} \qquad t_{yz} = k_s hG\gamma_{yz} \tag{9.54}$$

Opravný koeficient tohto zjednodušenia k_s , je známy z elementárnej pružnosti (výpočet energie šmykového napätia v ohýbanom nosníku; pre obdĺžnik k_s = 5/6). Virtuálna práca priečnych šmykových vnútorných síl na konečnom prvku potom v maticovom zápise je

$$\delta W_{\text{int}}^{\gamma} = \int_{S_0^e} \left(\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma}\right)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma} dxdy = \int_{S_0^e} \left\{ \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \phi_x \quad \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \delta \phi_y \right\} \begin{bmatrix} k_s Gh & 0 \\ 0 & k_s Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} dxdy \quad (9.55)$$

Celková virtuálna práca vnútorných síl nelineárneho konečného prvku Mindlin-Reissnerovej dosky je

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{int}}^{m} + \delta W_{\text{int}}^{o} + \delta W_{\text{int}}^{\gamma} \quad (9.56)$$

kde pre tretí člen platí (9.55) a prvé dva členy sú

$$\delta W_{\text{int}}^{m} = \int_{S_0^e} \left\{ \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \quad \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right\} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} dxdy \quad (9.57)$$

$$\delta W_{\text{int}}^{o} = \int_{S_0^e} \left\{ \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} dxdy \quad (9.58)$$

Vzťah (9.56) obsahuje päť virtuálnych posunutí $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta\phi_x, \delta\phi_y$, ktoré zohrávajú dôležitú úlohu pri tvorbe matice tuhosti prvku. Explicitné vyjadrenie členov matice tuhosti je jednoduchšie, keď sa po dosadení (9.55), (9.57), (9.58) do (9.56) a roznásobení, rozčlení virtuálna práca vnútorných síl na sumu piatich integrálov, do ktorých sa zahrnú len členy, ktoré obsahujú príslušné virtuálne posunutie. Potom platí

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{int}}^{\delta u0} + \delta W_{\text{int}}^{\delta v0} + \delta W_{\text{int}}^{\delta w0} + \delta W_{\text{int}}^{\delta \phi x} + \delta W_{\text{int}}^{\delta \phi y} \quad (9.59)$$

kde

$$\delta W_{\text{int}}^{\delta u0} = \int_{S_0^e} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \left\{ A_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right] + A_{12} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} + A_{33} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \right) dxdy \quad (9.60)$$

$$\delta W_{\text{int}}^{\delta v0} = \int_{S_0^e} \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \left\{ A_{12} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right] + A_{22} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} + A_{33} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \right) dxdy \quad (9.61)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^{\delta w0} = \int_{S_0^e} \Bigg\{ & \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} \left\{ A_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right] + A_{12} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} + k_s Gh \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right] + A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \Bigg] \\ & + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \left[\frac{\partial w_0}{\partial y} \left\{ A_{12} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right] + A_{22} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} + k_s Gh \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \right] + A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \Bigg] \Bigg\} dxdy \end{aligned} \quad (9.62)$$

$$\delta W_{\text{int}}^{\delta \phi x} = \int_{S_0^e} \left\{ \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \left[D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} D_{33} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right] + \delta \phi_x k_s Gh \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right\} dxdy \quad (9.63)$$

$$\delta W_{\text{int}}^{\delta\phi y} = \int_{S_0^e} \left\{ \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} \left[D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} D_{33} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right] + \delta\phi_y k_s G h \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \right\} dxdy \qquad (9.64)$$

Aproximačné funkcie posunutia $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ sa na prvku v MKP určujú interpoláciou uzlových hodnôt pomocou interpolačných funkcií prvku, ktoré zapíšeme v tvare

$$u_0(x,y) = \sum_{j=1}^{m} u_j n_j(x,y) \qquad v_0(x,y) = \sum_{j=1}^{m} v_j n_j(x,y) \qquad (9.65)$$

$$w_0(x,y) = \sum_{j=1}^{n} w_j N_j(x,y) \qquad (9.66)$$

$$\phi_x(x,y) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varphi_j(x,y) \qquad \phi_y(x,y) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \varphi_j(x,y) \qquad (9.67)$$

Uzlové hodnoty týchto funkcií usporiadame do vektora

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \\ \boldsymbol{\phi}_x^e \\ \boldsymbol{\phi}_y^e \end{Bmatrix} = \{u1, u2, \ldots, u\text{m}, v1, v2, \ldots, v\text{m}, w1, w2, \ldots, w\text{n}, \alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha\text{p}, \beta 1, \beta 2, \ldots, \beta\text{p}\}^T \qquad (9.68)$$

Ak do (9.59) dosadíme aproximácie (9.65) až (9.67) a za virtuálne posunutie postupne vystriedame tieto funkcie a ich membránové, ohybové a šmykové väzby s jednotkovými virtuálnymi hodnotami zovšeobecnených uzlových posunutí (9.68) dostaneme sústavu nelineárnych uzlových rovníc rovnováhy prvku

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)\mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \qquad (9.69)$$

kde $\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)$ je matica tuhosti prvku, $\mathbf{u}^e$ je stĺpcová matica (vektor) zovšeobecnených posunutí prvku a $\mathbf{f}^e$ je vektor uzlových zaťažení prvku. V blokovej forme má táto sústava rovníc rovnováhy prvku tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} & \mathbf{K}^{34} & \mathbf{K}^{35} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{43} & \mathbf{K}^{44} & \mathbf{K}^{45} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{53} & \mathbf{K}^{54} & \mathbf{K}^{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \\ \boldsymbol{\phi}_x^e \\ \boldsymbol{\phi}_y^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \end{Bmatrix} \qquad (9.70)$$

Integrálne vzťahy pre členy jednotlivých submatíc v piatich riadkoch matice tuhosti prvku v (9.70) možno vyjadriť pomocou piatich častí celkovej virtuálnej práce vnútorných síl (9.60) až (9.64) a dostávame

$$K_{ij}^{11}=\int_{S_0^e}\left(A_{11}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)dxdy$$

$$K_{ij}^{12}=\int_{S_0^e}\left(A_{12}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y}+A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x}\right)dxdy;$$

$$K_{ij}^{13}=\frac{1}{2}\int_{S_0^e}\left[\frac{\partial n_i}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+2A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{22}=\int_{S_0^e}\left(A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)dxdy$$

$$K_{ij}^{23}=\frac{1}{2}\int_{S_0^e}\left[\frac{\partial n_i}{\partial y}\left(A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+2A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial x}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{31}=\int_{S_0^e}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y}+A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x}\right)\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{32}=\int_{S_0^e}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y}+A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x}\right)+\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$K_{ij}^{33}=\int_{S_0^e}\left(k_sGh\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+k_sGh\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy+\frac{1}{2}\int_{S_0^e}\left\{\left[A_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\left[A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{22}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+2A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right\}dxdy$$

$$K_{ij}^{34}=\int_{S_0^e}k_sGh\frac{\partial N_i}{\partial x}\varphi_j dxdy$$

$$K_{ij}^{35}=\int_{S_0^e}k_sGh\frac{\partial N_i}{\partial y}\varphi_j dxdy$$

$$K_{ij}^{44}=\int_{S_0^e}\left(D_{11}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}+D_{33}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}+k_sGh\varphi_i\varphi_j\right)dxdy \tag{9.71}$$

$$K_{ij}^{45}=\int_{S_0^e}\left(D_{12}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}+D_{33}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right)dxdy$$

$$K_{ij}^{55}=\int_{S_0^e}\left(D_{33}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}+D_{22}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}+k_sGh\varphi_i\varphi_j\right)dxdy$$

$$K_{ij}^{21}=K_{ji}^{12}\qquad K_{ij}^{43}=K_{ji}^{34}\qquad K_{ij}^{53}=K_{ji}^{35}\qquad K_{ij}^{54}=K_{ji}^{45}$$

Ako sme už uviedli, doska je vo všeobecnosti zaťažená objemovými silami (vlastná tiaž, odstredivá sila), plošným tlakom, čiarovými i sústredenými silami, teplotným zaťažením a reakčnými silami a momentami od okrajových podmienok pre zovšeobecnené posunutia. Sústredené sily a momenty sa zadávajú priamo do uzlov globálneho modelu dosky, spojité zaťaženia prvkov ale treba transformovať do uzlov a ich sumárny účinok v *e*-tom prvku predstavuje v (9.69) vektor vonkajších uzlových zaťažení prvku $\mathbf{f}^e$. Príspevky spojitých zaťažení prvku do vektora $\mathbf{f}^e$ sa určujú z virtuálnej práce vonkajších síl. Napr. vonkajšie uzlové sily prvku od plošného tlaku *p* dostaneme opäť z (9.43)

$$\delta W_{ext}^e=\int_{S_0^e}p\,\delta w_0 dS$$

Z podstaty MKP pri riešení pevnostných úloh vyplýva, že vo všeobecnosti výpočtový model je o niečo tuhší ako reálne teleso (reálna konštrukcia). Pri niektorých typoch prvkov, a najmä pri hrubšej prvkovej sieti, sa však zaznamenal omnoho výraznejší nereálny nárast tuhosti modelu účinkom nežiadúceho blokovania (lockingu) deformácií. Jeho prejavom je tiež spomalenie konvergencie a i prípadná numerická nestabilita riešenia úlohy. Medzi prvky silne citlivé na tento fenomén patria aj prvky Mindlin-Reissnerovej dosky, najmä ak sa využívajú interpolačné funkcie nižšieho stupňa (lineárne a kvadratické) pri hrubom delení modelu. V tomto prípade je nositeľom tohto javu nereálne vysoká tuhosť vyvolaná priečnymi šmykovými deformáciami (transverse shear locking) a to pri štíhlych (relatívne tenkých) doskách. Ak napr. vyvoláme priehyb dosky čistým ohybom (okrajovými momentami) vzťah (9.53) nevie zabezpečiť nulové priečne šmykové deformácie, pribudne nereálna tuhosť, ktorá zmenší priehyb dosky. Analogický problém vzniká aj pri tenkých doskách s malými priečnymi silami. Korekcia tuhosti modelov takýchto dosiek sa robí najčastejšie selektívnou numerickou integráciou pri výpočte členov matice tuhosti prvkov. Plná integrácia sa robí pri ich výpočte z lineárnej tuhosti a redukovaná pri určovaní členov od priečnej šmykovej a nelineárnej tuhosti. Existuje množstvo ďalších postupov a v odbornej literatúre možno nájsť viacero návrhov tzv. *locking free* doskových prvkov. Aby sme v doleuvedenom ilustračnom príklade nedostali nereálne výsledky eliminovali sme približne vplyv tohto fenoménu pomocou jednoduchej opravy koeficientu k_s podľa vzťahu [9]

$$\frac{1}{k_s^e} = 1 + 0{,}2\frac{S_0^e}{25h^2} \tag{9.72}$$

9.11 Príklad - Pravouhlý štvoruzlový nelineárny prvok Mindlin-Reissnerovej dosky

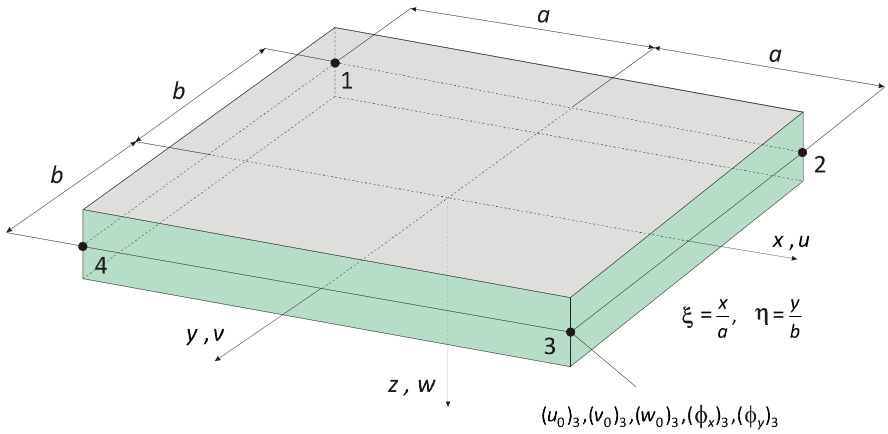
Uvažujme opäť pravouhlý štvoruzlový konečný prvok, ako v predchádzich častiach, avšak teraz so stupňami voľnosti uzla Mindlin-Reissnerovej dosky. Takýto prvok, s bilineárnymi interpolačnými funkciami (9.35) pre všetky aproximačné funkcie posunutí, má v uzloch po štyri a celkovo dvadsať stupňov voľnosti (obr. 9.15)

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \{u1,u2,u3,u4,v1,v2,v3,v4,w1,w2,w3,w4,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}^T \tag{9.73}$$

Pravda, v prípade potreby možno voliť aj interpolačné funkcie vyššieho stupňa pre jednotlivé vektory zovšeobecnených posunutí. V našom príklade, aby sme mohli bez väčšej zmeny použiť program z predchádzajúceho príkladu a tiež kvôli väčšej presnosti nášho hrubého delenia, zvolíme aproximačnú funkciu priehybu strednicovej plochy dosky s interpolačnými funkciami (9.27)

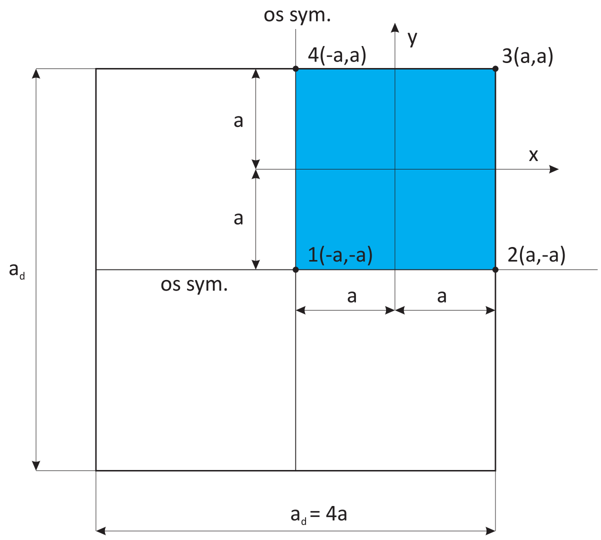
$$w_0(x,y) = \sum_{j=1}^{16} w_j N_j(x,y) \tag{9.74}$$

čím sa počet stupňov voľnosti prvku zvyšuje na tridsať dva.



Obr. 9.15

Pomocou nelineárneho prvku Mindlin-Reissnerovej dosky určíme maximálny priehyb a znázorníme priehybovú plochu štvorcovej dosky (obr. 9.16) so stranou a_d = 2 m zaťaženej normálovým tlakom p = 100000 N/m^2, ktorá je tuho votknutá po obvode. Hrúbka dosky je 0,08 m a materiálové konštanty sú E = 10^8 N/m^2 , μ = 0,25.



Obr. 9.16

Pri výpočte použijeme postup, ktorý sme opísali pri riešení príkladu lineárnej dosky. Vzhľadom na tuhé votknutie sa počet neznámych uzlových posunutí po zavedení okrajových podmienok zredukuje na jedinú neznámu $(w_0)_1$, čo je zároveň aj maximálny priehyb v strede dosky. Sústava rovníc pre určenie uzlových posunutí sa takto zmenila na jedinú nelineárnu rovnicu

$$(1{,}26781\cdot 10^6 + 5{,}89974\cdot 10^6 w1^2)w1 = 250 \qquad (9.75)$$

ktorej nelineárny tuhostný člen i náhradnú uzlovú silu F od spojitého tlaku pre jediný stupeň voľnosti dosky určil program (*Mathematika 5*) uvedený na obr. 9.17. V tomto obrázku sme znázornili aj priehybovú plochu symetrickej štvrtiny dosky od vypočítaného priehybu $w1$ s programom na obr. 9.18.

Nelineárnu rovnicu (9.49) sme riešili Newton-Raphsonovou metódou [2] v jednoduchom programe (*Mathematika 5*) na obr. 9.18 pre viacej prípadov zaťažovacieho tlaku. Pre p = 100000 Pa program vypočítal maximálny priehyb dosky

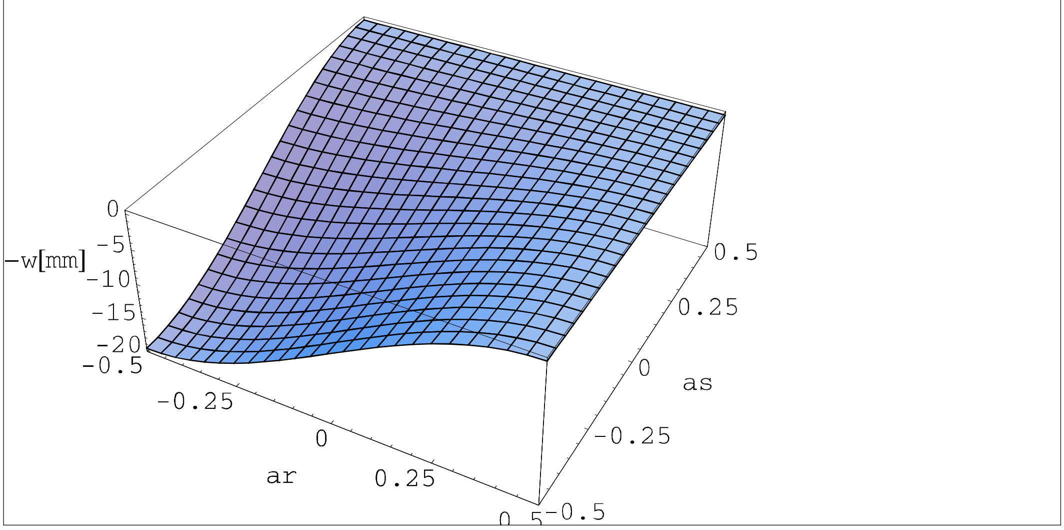
$$w_{0\max} = (w_0)_1 = 0{,}019684\,\mathrm{m} = 19{,}684\,\mathrm{mm}$$

Na obr. 9.19 sme graficky znázornili nelineárny priebeh maximálneho priehybu dosky v závislosti na zaťažovacom tlaku pomocou vypočítaných diskrétnych hodnôt.

```
(* VOTKNUTÁ NELINEÁRNA MINDLIN-REISSNEROVA DOSKA *)
Off[General::spell];
EE=10.^8; mi=0.25; h=0.08;p=100000.;
a=0.5;b=0.5;
D11=EE*h^3/(12*(1-mi^2)); D22=D11;
D12=D11*mi; D33=EE*h^3/(24*(1+mi));
Q11=EE/(1-mi^2);Q22=Q11;
Q12=Q11*mi;Q33=EE/2/(1+mi);
A11=Q11*h;A12=Q12*h;A22=A11;A33=Q33*h;
ks=1/(1+0.2*4*a*b/25/h^2);
r=x/a;s=y/b;
N1=1/16*(r-1)^2*(-r-2)(s-1)^2*(-s-2);
Nix=D[N1,{x,2}];Niy=D[N1,{y,2}];Nixy=D[N1,x,y];
Nx=D[N1,x];Ny=D[N1,y];
w0=N1*w1;dwx=D[w0,x];dwy=D[w0,y];
f=Integrate[p*N1,{x,-a,a},{y,-b,b}];
pom1=Integrate[ks*Q33*h*Nx*Nx+ks*Q33*h*Ny*Ny,{x,-a,a},{y,-b,b}];
pom2=0.5*Integrate[(A11*dwx^2+A12*dwy^2)*Nx*Nx+(A12*dwx^2+A22*dwy^2)*Ny*Ny
    +2*A33*dwx*dwy*(Nx*Ny+Ny*Nx),{x,-a,a},{y,-b,b}];
KK=pom1+pom2;
Print["KK = ",KK];
Print["f = ",f];
w[x_,y_]=N1*19.684;
Plot3D[-w[x,y],{x,-a,a},{y,-b,b},AxesLabel->{ar,as,-w[mm]}
,ViewPoint→{1.3,-2.4,2.}];
```

$KK = 1.26781\times10^{6} + 5.89974\times10^{6}\,w1^{2}$

f = 25000.

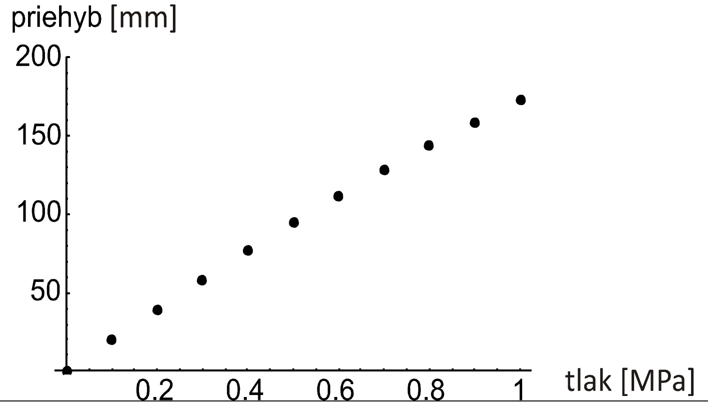


Obr. 9.17

```
NewtonRaphson[F_, uzac_, imax_, Rdov_] := Module[{},
 R[u_] = 1267810 * u + 5.89974 * 10 ^ 6 * u ^ 3 - F;
 i = 0; u0 = uzac; u1 = u0;
 While[i < imax && Rdov < Abs[R[u1]], u0 = u1; u1 = u0 - R[u0]/R '[u0];
  i = i + 1;];];
F = 0;
For[k = 1, k < 11,
 F = F + 25000;
 p = 4 * F;
 NewtonRaphson[F, 0, 20, 10];
 Print[" p = ", p, " Pa", "   u = ", PaddedForm[u1 * 1000, {6, 4}], " mm"];
 k++];

p = 100000 Pa   u =  19.6836 mm
p = 200000 Pa   u =  39.1587 mm
p = 300000 Pa   u =  58.2386 mm
p = 400000 Pa   u =  76.7751 mm
p = 500000 Pa   u =  94.6494 mm
p = 600000 Pa   u =  111.8100 mm
p = 700000 Pa   u =  128.2230 mm
p = 800000 Pa   u =  143.8890 mm
p = 900000 Pa   u =  158.8270 mm
p = 1000000 Pa   u =  173.0690 mm
```

Obr. 9.18

```
ListPlot[{{0, 0}, {.1, 19.6836}, {.2, 39.1587}, {.3, 58.2386}, {.4, 76.7751}, {.5, 94.6494},
    {.6, 111.81}, {.7, 128.223}, {.8, 143.889}, {.9, 158.827}, {1., 173.069}},
    PlotStyle → PointSize[0.02], AxesLabel → {"tlak [MPa]",
    "priehyb [mm]"}, PlotRange → {-0.2, 200}];
```



Obr. 9.19

10 Konštitutívne rovnice hyperelastického materiálu

Geometrické rovnice a diferenciálne rovnice rovnováhy platia pre ľubovoľný materiál, ktorý má vlastnosti spojitého kontinua. Boli odvodené nezávisle od seba a neobsahujú žiadne materiálové charakteristiky. Napätie ako miera namáhania telesa je však závislá od deformácie a že túto závislosť ovplyvňuje aj druh materiálu, nás presviedča experimentálna prax. Konštitutívne (fyzikálne, materiálové) rovnice slúžia na stanovenie tejto závislosti (konštituujú túto závislosť). Nie sú vo všeobecnosti odvodené od nejakých fyzikálnych princípov (aj keď musia spĺňať určité pravidlá - napr. musia byť objektívne, t.j. nezávislé od tuhého pohybu telesa v danom súradnicovom systéme); vyjadrujú v podstate len vlastnosti matematického modelu uvažovaného materiálu tak, aby vyhoveli experimentálnym údajom.

Existuje veľké množstvo materiálových modelov a s nimi spojených konštitutívnych rovníc, ktoré sa snažia simulovať rozličné reálne materiály pre rôzne typy stacionárneho i nestacionárneho namáhania. Mnoho materiálov vykazuje po určitú hranicu veľkosti zaťaženia lineárnu elastickú závislosť medzi deformáciou a napätím, ktorú možno vyjadriť vo forme zovšeobecnenia jednoosého Hookeovho zákona

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{10.1}$$

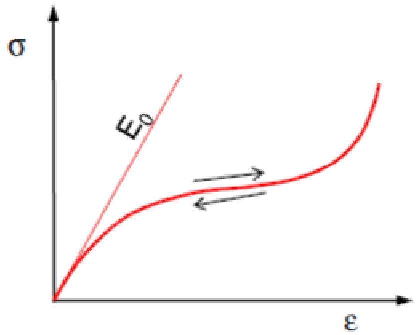
kde redukciou členov materiálového tenzora c_{ijkl} možno vyjadriť všetky základné typy pružného lineárneho materiálu. Pod pružným materiálom sa rozumie taký materiál, ktorého deformácia vymizne, keď naň prestanú pôsobiť vonkajšie sily. Napätie v zaťaženom telese s takto definovaným materiálom možno vyjadriť aj zo vzťahu

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}\right) \tag{10.2}$$

kde W je merná energia napätosti (deformačná energia akumulovaná v jednotke objemu), nazývaná tiež elastický potenciál alebo elastická potenciálová funkcia. Napr. pre jednoosý ťah izotropného materiálu dostávame

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{1}{2}\sigma\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{1}{2}E\varepsilon\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 E\right) = E\varepsilon$$

V technickej praxi sa často využívajú aj *nelineárne* elastické materiály, ktoré sú pružné vo veľkom rozsahu deformácie, pričom ale závislosť napätia od deformácie je nelineárna (napr. technická guma, penové materiály, elastomérové kompozity, rôzne plasty, biomateriály). Vzhľadom na ich relatívne malú tuhosť a spôsob technického využitia sú úlohy s takýmto materiálom skoro vždy ešte aj geometricky nelineárne. Pokiaľ napätosť zaťaženého telesa z takéhoto materiálu nezávisí od zaťažovacej cesty, ale len od výsledného deformačného stavu, možno napätosť určovať z funkcie mernej energie napätosti W a hovoríme o *hyperelastickom* materiáli (obr. 10.1). Mnohé hyperelastické materiály majú vysokú hodnotu objemového modulu a často sa potom pri teoretickom spracovaní ich modelov považujú za *nestlačiteľné* (s nekonečne veľkou hodnotou objemového modulu, t.j. zmena hydrostatického tlaku nevyvolá žiadnu zmenu objemu takéhoto materiálu), prípadne *takmer nestlačiteľné* (tým sa myslí materiálový model, pri ktorom sa s ohľadom na numerické spracovanie pripúšťa malá hodnota stlačiteľnosti).



Obr.10.1 Jednoosá charakteristika nelineárneho elastického materiálu

Základným krokom tvorby hyperelastického materiálového modelu je návrh skalárneho potenciálu W , ktorý je funkciou vhodnej miery deformácie (časť 4.3), najčastejšie deformačného gradientu **F**, pravého, resp. ľavého Cauchy- Greenovho tenzora deformácie $\mathbf{C}$, resp. ***b***, prípadne hlavných natiahnutí $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ určených spektrálnou dekompozíciou **U**, resp. **V**.

Pre deformačný gradient a jeho Jacobián platí

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \qquad J = \det(\mathbf{F}) \tag{10.3}$$

Pravý a ľavý Cauchy-Greenov tenzor deformácie sú

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \tag{10.4}$$

Ak uvažujeme hyperelastický materiál, tak potom miera napätia materiálovej častice $\mathbf{X}$ zaťaženého telesa závisí len od aktuálneho deformačného gradientu $\mathbf{F}$ tejto častice. Pretože energeticky konjugovaným partnerom $\mathbf{F}$ je prvé Piola-Kirchhoffovo napätie $\boldsymbol{P}$ platí

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \tag{10.5}$$

Ak sa nám za pomoci experimentu podarilo pre daný materiál vyjadriť elastický potenciál W potom analogicky s (10.2) možno napísať

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \frac{\partial W(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}} \tag{10.6}$$

Potenciál W i závislosť napäťových mier na tejto funkcii možno modifikovať podľa vzťahov, ktoré sme uviedli v kapitolách 4 a 5. Napr. z požiadavky objektívnosti konštitutívnych vzťahov vyplýva, že W je na $\mathbf{F}$ závislé len cez jeho zložku natiahnutia $\mathbf{U}$ a nezávislé na zložke rotácie $\mathbf{R}$, a pretože pre pravý Cauchy-Greenov tenzor deformácie platí $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, možno napísať

$$W(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = W(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \tag{10.7}$$

Pre prírastok Green Lagrangeovho tenzora deformácie $\dot{\mathbf{E}}$, ktorý je energeticky združený s druhým Piola-Kirchhoffovým tenzorom napätia $\mathbf{S}$, platí $\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}$, dostávame analogicky s (10.6) tiež

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}\mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}; \qquad \mathbf{S}\left(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}\right) = 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \tag{10.8}$$

Ak má hyperelastický materiál *izotropné* vlastnosti, potom vzťah medzi jeho potenciálom a **C** je nezávislý od materiálových osí a musí byť funkciou invariantov tenzora **C**

$$W\left(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}\right) = W\left(I_C, II_C, III_C, \mathbf{X}\right) \tag{10.9}$$

kde

$$\begin{aligned} &I_C = tr\mathbf{C} = \mathbf{C} : \mathbf{I} \\ &II_C = tr\left(\mathbf{CC}\right) = \mathbf{C} : \mathbf{C} \qquad \left(\textit{klasická forma tohto tenzora je } II_C^* = \frac{1}{2}\left[\left(tr\mathbf{C}\right)^2 - tr\mathbf{C}^2\right]\right) \\ &III_C = \det\mathbf{C} = J^2; \qquad J = \det\mathbf{F} \end{aligned} \tag{10.10}$$

a pre druhé Piola-Kirchhoffovo napätie podľa (10.8) možno napísať

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2\frac{\partial W}{\partial I_C}\frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} + 2\frac{\partial W}{\partial II_C}\frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} + 2\frac{\partial W}{\partial III_C}\frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} = 2\frac{\partial W}{\partial I_C}\mathbf{I} + 4\frac{\partial W}{\partial II_C}\mathbf{C} + 2J^2\frac{\partial W}{\partial III_C}\mathbf{C}^{-1} \tag{10.11}$$

kde sa uplatnili derivácie invariantov podľa zložiek tenzora **C** [10]

$$\frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \qquad \frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} = 2\mathbf{C} \qquad \frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} = J^2\mathbf{C}^{-1} \tag{10.12}$$

Invarianty **C** a **b** sú identické

$$\begin{aligned} &I_b = tr\mathbf{b} = tr(\mathbf{FF}^T) = tr(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) = tr\mathbf{C} = I_C \\ &II_b = tr(\mathbf{bb}) = tr(\mathbf{FF}^T\mathbf{FF}^T) = tr(\mathbf{F}^T\mathbf{FF}^T\mathbf{F}) = tr(\mathbf{CC}) = II_C \\ &III_b = \det\mathbf{b} = \det(\mathbf{FF}^T) = \det(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) = \det\mathbf{C} = III_C \end{aligned}$$

z čoho tiež vyplýva, že derivácie W podľa invariantov **C** v (10.11) sú tiež deriváciami W podľa invariantov **b**.

Cauchyho napätie možno určiť z druhého Piola-Kirchhoffovho napätia pomocou transformačného vzťahu (kapitola 5)

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{FSF}^T \tag{10.13}$$

Keď do tohto vzťahu dosadíme (10.11) dostaneme

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\frac{\partial W}{\partial I_C}\mathbf{b} + 4J^{-1}\frac{\partial W}{\partial II_C}\mathbf{b}^2 + 2J\frac{\partial W}{\partial III_C}\mathbf{I} \tag{10.14}$$

Uvedené rovnice platia pre všeobecný izotropný hyperelastický materiálový model. Ich využitie si ukážeme na relatívne jednoduchom modeli tzv. *stlačiteľného Neo-Hookeovského materiálu*. Názov dostal podľa toho, že zápis jeho charakteristík (Eulerovského tenzoru deformácie) je analogický so zápisom charakteristík klasického lineárneho izotropného Hookeovského materiálu. Stlačiteľný Neo-Hookeovský model je definovaný potenciálovou funkciou (existuje však aj viacero alternatívnych zápisov, najmä pri použiti II_C^* v (10.10))

$$W = \frac{\mathrm{M}}{2}(I_C - 3) - G\ln J + \frac{\Lambda}{2}(\ln J)^2 \qquad (10.15)$$

kde M a Λ sú materiálové konštanty. Všimnime si, že funkcia okrem základného predpokladu objektívnosti (je funkciou invariantov I_C a $\sqrt{III_C} = J$) spĺňa aj ďalší nevyhnutný predpoklad, že pri nulovej deformácii je elastická potenciálna energia W nulová ($\mathbf{C} = \mathbf{I}$, $I_C = 3$, $\det\mathbf{F} = 1$, $\ln J = 0$).

Druhý Piola-Kirchhoffov tenzor deformácie teraz už môžeme vyjadriť z rovnice (10.11)

$$\mathbf{S} = \mathrm{M}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \Lambda(\ln J)\mathbf{C}^{-1} \qquad (10.16)$$

a Cauchyho napätie z (10.14) pomocou zložiek ľavého Cauchy-Greenovho tenzora **b**

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathrm{M}}{J}(\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\Lambda}{J}(\ln J)\mathbf{I} \qquad (10.17)$$

Ak budeme napr. uvažovať jednoosý ťah bez priečnej deformácie, potom

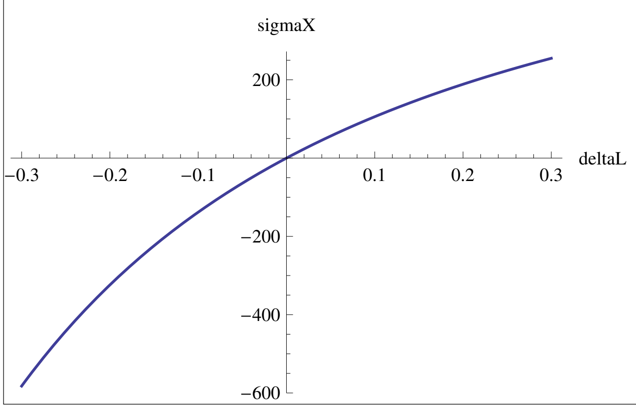
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad J = \det\mathbf{F} = \lambda; \qquad \lambda = \frac{\ell}{L} = 1 + \frac{\Delta L}{L}$$

a z (10.17) dostávame

$$\sigma_x = \frac{\mathrm{M}}{\lambda}(\lambda^2 - 1) + \frac{\Lambda}{\lambda}\ln\lambda$$

Pre prút s jednotkovou dĺžkou, s M = 100 Pa a Λ = 1000 Pa, sme priebeh σ_x graficky znázornili na obr. 10.1 pre najčastejšie využívaný rozsah deformácie tohto materiálového modelu. Spôsob identifikácie reálneho materiálu s týmto modelom (i ďalšími hyperelastickými materiálovými modelmi) možno nájsť v manuáloch komerčných programov MKP.

```
Mi = 100.;
La = 1000.;
L = 1.;
lambda = 1. + dL / L;
sigma = Mi (lambda ^2 - 1.) / lambda + La * Log[lambda] / lambda;
Plot[sigma, {dL, -0.3, 0.3},
 PlotStyle → {Thickness[0.005]}, AxesLabel → {deltaL, sigmaX}]
```



Obr. 10.1

Iný jednoduchý prípad je zaťaženie všestranným (hydrostatickým) tlakom, kedy

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix};\qquad \mathbf{b}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix};\qquad J=\det\mathbf{F}=\lambda^3;\qquad \lambda=\frac{\ell}{L}=1+\frac{\Delta L}{L}$$

Vtedy podľa (10.17) dostávame

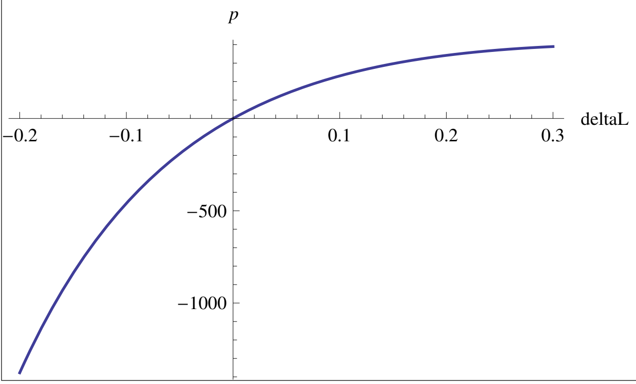
$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{\lambda^3}\left[\mathrm{M}\left(\lambda^2-1\right)+\Lambda\ln\lambda^3\right]\mathbf{I}$$

čo predstavuje zaťaženie

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=p=\frac{1}{\lambda^3}\left[\mathrm{M}\left(\lambda^2-1\right)+\Lambda\ln\lambda^3\right]$$

Závislosť tlaku/ťahu p na naťiahnutí λ je znázornená na obr. 10.2 (všestranný ťah je len ilustračná záležitosť)

```
Mi = 100.;
La = 1000.;
L = 1.;
lambda = 1. + dL / L;
pp = (Mi (lambda ^ 2 - 1.) + La * Log[lambda ^ 3]) / lambda ^ 3;
Plot[pp, {dL, -0.2, 0.3}, PlotStyle → {Thickness[0.005]}, AxesLabel → {deltaL, p}]
```



Obr. 10.2

Pri práci s *nestlačiteľnými* alebo *takmer nestlačiteľnými* materiálovými modelmi je potrebné oddeliť *objemovú* časť deformácie (ktorá mení len objem materiálovej častice) od *distorznej* (*tvarovej*, *deviátorovej*, ktorá mení len tvar častice, bez zmeny objemu). Pretože determinant deformačného gradientu udáva objemovú zmenu dv/dV, pre distorznú časť deformačného gradientu $\widehat{\boldsymbol{F}}$ potom musí platiť

$$\det\widehat{\mathbf{F}}=1 \tag{10.18}$$

Ak zvolíme

$$\widehat{\mathbf{F}}=J^{-1/3}\mathbf{F}\qquad\rightarrow\qquad\mathbf{F}=J^{1/3}\widehat{\mathbf{F}} \tag{10.19}$$

potom je táto podmienka splnená

$$\det \widehat{\mathbf{F}} = \det (J^{-1/3}\mathbf{F})$$
$$= (J^{-1/3})^3 \det \mathbf{F}$$
$$= J^{-1} J = 1$$

Platnosť vzťahu medzi $\mathbf{F}$ a $\widehat{\mathbf{F}}$ ilustruje číselný príklad na obr. 10.3.

```
F = {{1.5, -1.2, 0},
     {2.6, 2.0, 0},
     {0, 0, 1}};
Print["F = ", F // MatrixForm]
J = Det[F];
Print["J = detF = ", J]
pom = Det[J^(-1 / 3) * F];
Print["detF′ = det[J^(-1/3)*F] = ", pom]


F = ( 1.5  -1.2  0 )
    ( 2.6   2.   0 )
    ( 0     0    1 )

J = detF = 6.12

detF′ = det[J^(-1/3)*F] = 1.
```

Obr. 10.3

Analogicky možno rozložiť aj ďalšie tenzorové miery deformácie. Napr. pre distorznú zložku pravého Cauchy-Greenovho tenzora deformácie a jeho prvý invariant platí

$$\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{F}}^T \widehat{\mathbf{F}} = (\det \mathbf{C})^{-1/3} \mathbf{C} = J^{-2/3} \mathbf{C} \qquad \widehat{I}_C = \widehat{I}_b = tr\widehat{\mathbf{C}} = J^{-2/3} tr\mathbf{C} \tag{10.20}$$

Pri *nestlačiteľnom Neo-Hookeovskom modeli* sa elastický potenciál (10.15) zjednoduší na

$$\widehat{W} = \frac{\mathrm{M}}{2}(tr\widehat{\mathbf{C}} - 3) \tag{10.21}$$

pravda, z úplnej nestlačiteľnosti materiálu vyplývajú aj niektoré výpočtové nepríjemnosti. Pri úplne nestlačiteľnom materiáli hydrostatický tlak ($p = \sigma_{kk}/3$) ľubovoľnej hodnoty nespôsobí zmenu tvaru telesa, takže napätie nie je možné jednoznačne určiť z jeho deformácie. Z konštitutívnych rovníc možno určiť len deviatorické napätie $\sigma' = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$. Tlak p, ktorý sa objaví v konštitutívnych rovniciach, je nutné určovať ako ďalšiu primárnu neznámu úlohy z podmienok rovnováhy a okrajových podmienok. Pre nestlačiteľný Neo-Hookeovský materiál rovnica (10.17) sa zmení na

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p\mathbf{I} = \mathrm{M} J^{-5/3}(\mathbf{b} - \tfrac{1}{3} I_b \mathbf{I}) + p\mathbf{I} \tag{10.22}$$

kde opäť paltí $I_b = I_C = tr\mathbf{C}$.

V MKP sa problém s neznámou p často rieši pomocou tzv. *takmer nestlačiteľných* materiálových modelov. Postupuje sa tak, že k distorznej zložke potenciálu sa na umožnenie malej objemovej deformácie pridáva objemová energetická zložka $U(J)$ na vytvorenie totálneho potenciálu v tvare

$$W(\mathbf{C}) = \widehat{W}(\mathbf{C}) + U(J) = \frac{\mathrm{M}}{2}(tr\widehat{\mathbf{C}} - 3) + \frac{1}{2}\mathrm{K}(J-1)^2 \tag{10.23}$$

kde sme zaviedli jednoduchý príklad takejto zložky

$$U(J) = \frac{1}{2}\mathrm{K}(J-1)^2 \qquad p = \frac{dU}{dJ} = \mathrm{K}(J-1) \tag{10.24}$$

Pri nestlačiteľných materiáloch sa K volí ako veľký násobok M (10^3 až $10^4\mathrm{M}$). S touto materiálovou konštantou sa možno stretnúť aj pri stlačiteľných hyperelastických materiálových modeloch, keď sa uvažuje energetický potenciál v tvare (10.23). Vtedy K predstavuje objemový modul materiálu (pozri napr. Neo-Hookeovský model v teoretickom manuáli ANSYSu). Pri takejto voľbe U, potom Cauchyho napätie pre Neo-Hookeovský materiálový model podľa (10.22) je

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{M}J^{-5/3}(\mathbf{b} - \tfrac{1}{3}I_b\mathbf{I}) + \mathrm{K}(J-1)\mathbf{I} \tag{10.25}$$

Konštitutívne rovnice izotropného hyperelastického materiálu sa často vyjadrujú aj pomocou hlavných natiahnutí $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a hlavných smerov $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i = \mathbf{I} \tag{10.26}$$

Je to výhodné najmä vzhľadom na experimentálne určovanie materiálových konštánt modelu. Spektrálna reprezentácia pravého Cauchy - Greenovho tenzora deformácie a jeho inverzie pomocou týchto veličín je (kapitola 4)

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \tag{10.27}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{-2} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \tag{10.28}$$

Pretože $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sú vlastné čísla tenzora $\mathbf{C}$, jeho invarianty možno vyjadriť tiež v tvare

$$\begin{aligned} I_1 &= I_C = I_b = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= II_C^* = II_b^* = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \\ I_3 &= III_C = III_b = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{aligned} \tag{10.29}$$

a využívať ich pri vyjadrovaní funkcií elastického potenciálu W rovnako ako (10.10). Z podmienky (10.19) pre distorzné hlavné natiahnutia vyplýva

$$\widehat{\lambda}_i = J^{-1/3}\lambda_i \tag{10.30}$$

a pre nestlačiteľný materiál tiež platí

$$I_3 = \det\mathbf{C} = \det\mathbf{b} = 1 \tag{10.31}$$

takže distorzná (nestlačiteľná) časť elastického potenciálu obsahuje len dva distorzné invarianty

$$\widehat{I}_1 = J^{-2/3} I_1 \qquad \widehat{I}_2 = J^{-4/3} I_2 \tag{10.32}$$

Elastický potenciál často využívaného Mooney-Rivlinovho materiálového modelu v takmer nestlačiteľnej formulácii možno potom zapísať v tvare

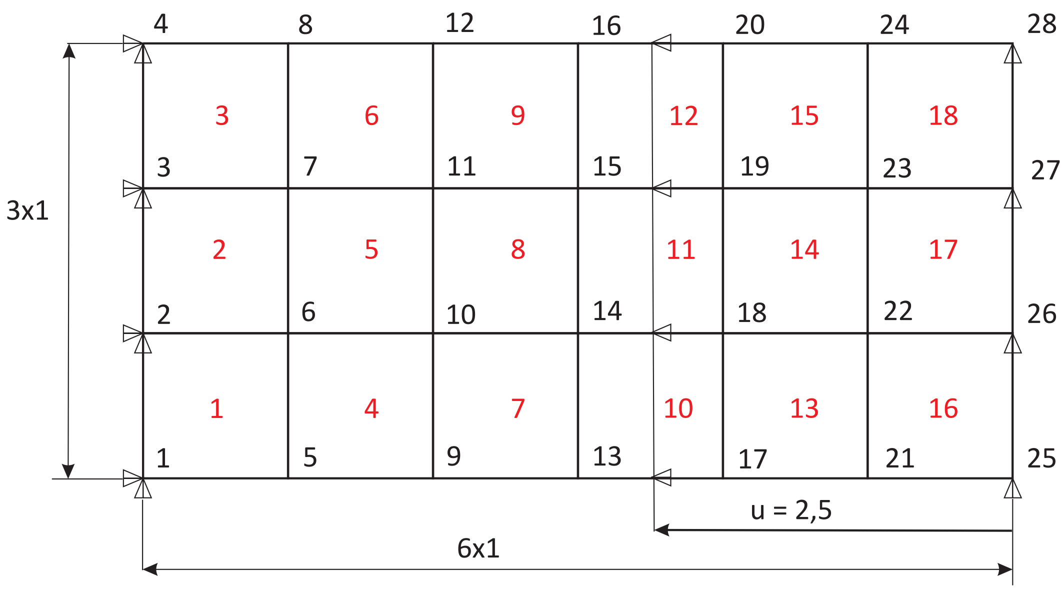
$$W = \sum_{p,q \geq 0}^{N} C_{pq} (\widehat{I}_1 - 3)^p (\widehat{I}_2 - 3)^q + \sum_{m=1}^{M} D_m (J-1)^{2m} \tag{10.33}$$

kde C_{pq} a D_m sú materiálové konštanty. Konštanty C_{pq} vyjadrujú distorzné (šmykové) vlastnosti modelu a D_m udávajú stlačiteľnosť t.j. objemovú zmenu tohto materiálového modelu. Ak konštanty D_m sa rovnajú nule, ide o úplne nestlačiteľný materiál.

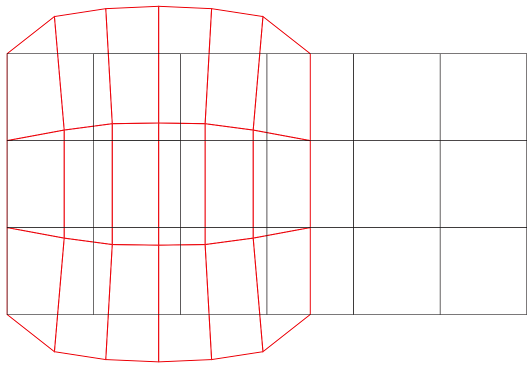
V odbornej literatúre týkajúcej sa hyperelasticity a v manuáloch komerčných programov MKP možno nájsť množstvo hyperelastických materiálových modelov vychádzajúcich z rôzne definovaných elastických potenciálov tvorených z invariantov mier deformácie analogickým postupom, ako sme tu naznačili. Pre záujemcov o programové spracovanie úloh s hyperelastickou deformáciou možno odporučiť voľne stiahnuteľný fortranovský program FLagSHyP (**F**inite element **La**r**g**e **S**train **Hy**perelasto-plastic **P**rogram) opísaný v práci [10].

Príklad 10.1

Pomocou programu FLagSHyP sme riešili ilustračný príklad rovinnej napätosti telesa obdĺžnikového tvaru s rozmermi 6 x 3 a hrúbkou 0,1, ktorého sieť štvoruzlových prvkov je znázornená na obr. 10.4. Teleso je na ľavej hrane pevne votknuté a pravá hrana sa posunie o hodnotu 2,5 podľa obrázku, pričom sa zabraňuje jej priečnej deformácii a strate stability telesa. Materiál telesa je nestlačiteľný Neo-Hookeov (10.21) s konštantou $\mathrm{M}=100$. Vstupné údaje sú uvedené v prílohe. Do programu sme vložili podprogram, ktorý z číselných výsledkov vytvoril postscriptovský súbor na zobrazenie zdeformovanej siete prvkov s výsledkom na obr. 10.5.



Obr.10.4



Obr. 10.5

Ten istý príklad sme riešili aj pomocou programu ANSYS s touto postupnosťou príkazov v interaktívnom móde:

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = GUMA, OK;

2. Typ prvkov a ich hrúbka
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add..., Hyperelastic 4 node 182, OK, Options…, K3 = Plane strs w/thk, OK, Close;
Main Menu>Preprocessor>Real Constants>Add, Edit, Delete, Add..., OK, THK = 0.1, OK

3. Materiálové údaje
Preprocessor>Material Props>Material Model Number 1, Structural, Nonlinear, Hyperelastic, Neo-Hookean, mu = 100, d = 0, OK, Material, Exit;

4. Vytvorenie bodov strednicovej plochy modelu (číslovanie je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By 2 Corners↑: Width = 6, Height = 3, OK;

5. Vytvorenie prvkov
Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Global>Size: Size = 1, OK;
Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Maped>3 or 4 sided: Pick All;

6. Upevnenie modelu a predpísanie posunutia pravej hrany modelu
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Lines: ↑ľavú hranu, OK, Vyznačiť All DOF, Apply,↑ľavú hranu, Vyznačiť UY, Apply, Vyznačiť UX, VALUE = -2.5, OK;

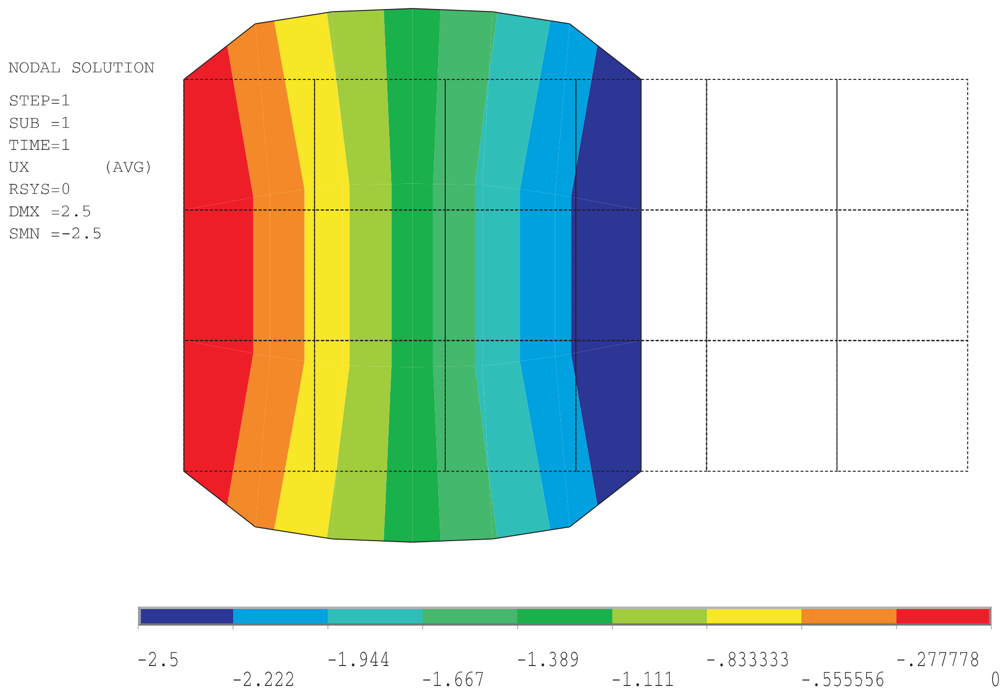
7. Zapnutie veľkých deformácií
Solution>Analysis Type>Sol'n Controls: Analysis Options = Large Displacement Static, Time at end of loadstep = 1,OK;

8. Príkaz na vykonanie výpočtu

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

9. Vykreslenie zdeformovanej siete

Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu: DOF Solution, X-Component of dispacement, Deformed shape with undeformed model, OK;



10. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

*Ansys Toolbar>Quit>*Save Geom+Loads, OK;

Príloha - Vstupné údaje príkladu do programu FLagSHyP:

Priklad Guma	18
quad4	1 1 1 5 6 2
28	2 1 2 6 7 3
1 3 0. 0.	3 1 3 7 8 4
2 3 0. 1.	4 1 5 9 10 6
3 3 0. 2.	5 1 6 10 11 7
4 3 0. 3.	6 1 7 11 12 8
5 0 1. 0.	7 1 9 13 14 10
6 0 1. 1.	8 1 10 14 15 11
7 0 1. 2.	9 1 11 15 16 12
8 0 1. 3.	10 1 13 17 18 14
9 0 2. 0.	11 1 18 19 15 14
10 0 2. 1.	12 1 15 19 20 16
11 0 2. 2.	13 1 17 21 22 18
12 0 2. 3.	14 1 18 22 23 19
13 0 3. 0.	15 1 19 23 24 20
14 0 3. 1.	16 1 21 25 26 22

15 0 3. 2.
16 0 3. 3.
17 0 4. 0.
18 0 4. 1.
19 0 4. 2.
20 0 4. 3.
21 0 5. 0.
22 0 5. 1.
23 0 5. 2.
24 0 5. 3.
25 3 6. 0.
26 3 6. 1.
27 3 6. 2.
28 3 6. 3. (pokrač. hore)

17 1 22 26 27 23
18 1 23 27 28 24
1
1 6
1. 100. 0.1
0 4 0 0 0
25 1 -2.5
26 1 -2.5
27 1 -2.5
28 1 -2.5
10 1. 0.1 30 1.e-6
0. 0. 5

11 Pružne-plastické úlohy s malými deformáciami

11.1 Jednoosový pružne-plastický materiálový model

Výpočty v teórii plasticity vychádzajú z experimentálne získaných mechanických charakteristík materiálu. Pri *kovových* materiáloch sa často využíva ťahová skúška normalizovanej tyče, z ktorej možno získať závislosť jednoosového napätia

$$\sigma = F/S_0$$

od pomerného predĺženia (jednoosovej deformácie)

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Pretože uvažujeme len oblasť malých deformácií možno v uvedených vzťahoch využívať začiatočné hodnoty dĺžky i plochy a inžiniersku mierku deformácie. Pri numerických aplikáciách sa bežne predpokladá, že medza úmernosti (linearity), medza pružnosti a začiatočná medza sklzu materiálu σ_K sú totožné (obr. 11.1). Zaťažovanie takého prúta v úseku *OK* je pružné a lineárne, platí Hookeov zákon

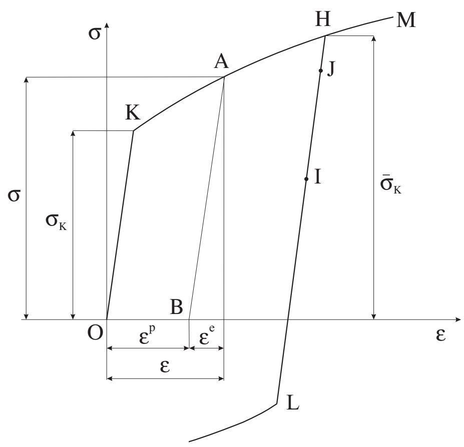
$$d\sigma = E\, d\varepsilon \tag{11.1}$$

s konštantným modulom pružnosti *E*. Ak prút zaťažíme tak, že napätie prekročí medzu sklzu materiálu, závislosť σ - ε sa stáva nelineárnou a hovoríme o *pružne-plastickom* zaťažovaní. V úseku *KM* možno závislosť prírastku napätia od prírastku deformácie opäť vyjadriť analogickým vzťahom s (11.1)

$$d\sigma = E_T(\varepsilon^p)\, d\varepsilon \tag{11.2}$$

tu už ale $E_T(\varepsilon^p)$ je premenná veličina, vyjadrená tangensom dotyčnice ku krivke *KM* v danom mieste, s názvom jednoosový pružne-plastický *tangenciálny modul* materiálu; je funkciou plastickej časti deformácie ε^p a zavádza sa takto predpoklad, že celkovú deformáciu možno rozdeliť na elastickú a plastickú časť, pričom platí

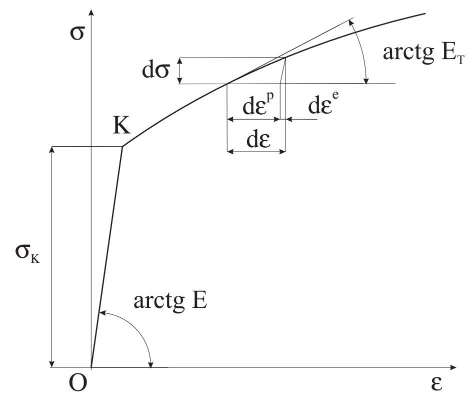
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{11.3}$$



Obr. 11.1 *Zidealizovaný jednoosový ťah kovového materiálu*

Ak prút napr. v bode *A* odľahčíme, zostane v ňom trvalá deformácia ε^p. Pri odľahčení pružná deformácia vymizne lineárne (v závislosti od modulu pružnosti *E*), a preto odľahčovacia úsečka *AB* je rovnobežná s lineárnym zaťažovacím úsekom *OK*. Pri odľahčení prúta z bodu *H* do bodu *I* a opätovnom ťahovom zaťažení sa zistilo, že nelineárna závislosť sa objaví až od bodu *J*, t. j. po plastickej deformácii došlo k zvýšeniu medze sklzu materiálu (porovnajte bod *J* s bodom *K*). Existuje teda rozdiel medzi *začiatočnou medzou sklzu materiálu* σ_K a *aktuálnou medzou sklzu* $\bar{\sigma}_K$. Pri numerickej simulácii sa obyčajne rozdiel medzi bodom *J* a *H* zanedbáva a za $\bar{\sigma}_K$ sa považuje hodnota na krivke *KM*. Ak by sme po odľahčení z bodu *H* pokračovali zaťažením na tlak, zaznamenáme medzu sklzu v bode *L*. Pri materiáloch, ktoré v absolútnej hodnote majú rovnakú *začiatočnú* medzu sklzu v ťahu i tlaku, sa táto rovnosť porušuje. Tento dôsledok predchádzajúcej plastickej deformácie materiálu sa nazýva *Bauschingerov efekt.* Idealizovaná krivka materiálu na obr. 11.1 platí pre materiál vo východzom (plasticky ešte nedeformovanom) stave, pri opakovanom, napr. cyklickom zaťažovaní za aktuálnu medzu sklzu sa musia zohľadňovať aj ďalšie vlastnosti materiálu.

Uvažujme teraz veľmi malý prírastok deformácie v nelineárnej časti krivky σ - ε (obr. 11.2). Dostávame



Obr. 11.2 *Matematický model jednoosového materiálu so spevnením*

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \tag{11.4}$$

Pre pružnú časť deformácie platí Hookeov zákon

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} \tag{11.5}$$

a pre plastický prírastok sa analogicky zavádza

$$d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{H} \tag{11.6}$$

kde

$$H(\varepsilon^p) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \tag{11.7}$$

sa nazýva *plastický (spevňovací) modul* materiálu. Je to tangens uhla dotyčnice v diagrame σ - ε^p, v elastickej oblasti je nekonečne veľký s dôsledkom $d\varepsilon^p = 0$.

Celkový prírastok deformácie v oblasti pružne-plastického zaťažovania prúta môžeme teda vyjadriť aj v tvare

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \left(\frac{d\sigma}{E} + \frac{1}{H}\right) d\sigma$$

Ďalej podľa obr. 10.2 a vzťahov (11.2), (11.5), (11.6) platí

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e + d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{\frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{H}} = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{H}} \tag{11.8}$$

a z toho

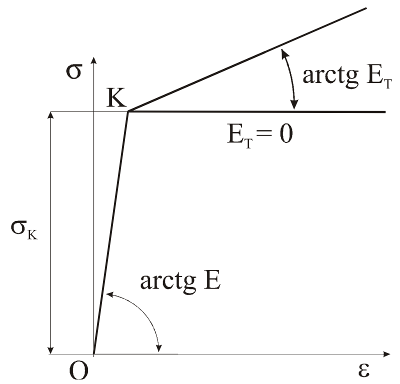
$$H = \frac{EE_T}{E - E_T} \tag{11.9}$$

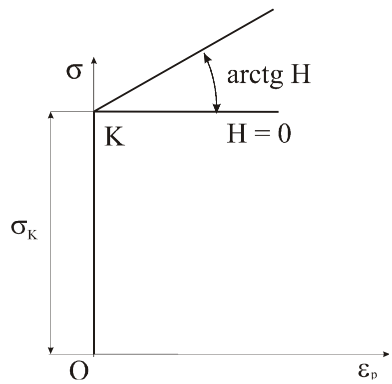
Niektoré dôležité aspekty opísaného modelu možno zhrnúť takto:

- Existuje *elastická oblasť*, t.j. určitý rozsah napätia, v ktorej sa materiál správa ako čisto lineárne elastický, bez vzniku plastickej deformácie. Hranicou tejto oblasti je medza sklzu.
- Ak napätie dosiahne medzu sklzu a zaťaženie ďalej narastá vzniká tzv. *plastické tečenie materiálu* spojené so vznikom trvalej plastickej deformácie.
- So vznikom plastickej deformácie je spojená aj zmena veľkosti medze sklzu. Tento jav sa nazýva *spevňovanie materiálu*.

S uvedenými vlastnosťami kovových materiálov sa v určitej viac alebo menej modifikovanej forme môžme stretnúť aj pri iných materiáloch, ako je napr. betón, kameň, pôda (rôzne druhy zemín) a niekoľko ďalších. Hovoríme, pravda, len o fenomenologických vlastnostiach, pretože mikroskopický mechanizmis, ktorý ich vyvoláva, môže byť úplne rozdielny. Takisto sú rozdielne aj experimentálne postupy pri zisťovaní a overovaní vlastností týchto materiálov.

Jednoosové charakteristiky materiálu tvoria základ aj pre zadávanie vlastností materiálu pri riešení pružne-plastických úloh všeobecných telies namáhaných viacosovou napätosťou. Často sa aj takto charakterizované vlastnosti materiálu v teórii platicity i v programoch MKP ďalej zjednodušujú. Napr. sa predpokladá ideálne pružne-plastický materiál ($E_T = 0$), alebo sa skutočná závislosť σ - ε aproximuje bilineárnou čiarou (obr. 11.3).





Obr. 11.3 *Bilineárne spevňovanie a ideálne plastický materiál*

I keď takéto aproximácie vyzerajú na prvý pohľad z hľadiska presnosti riešenia dosť nedôveryhodne, ich využívanie, napr. pri bežnej oceli, je veľmi časté a pri mnohých praktických úlohách oprávnené. Treba si totiž uvedomiť, že pokiaľ riešime bežnú pružne-plastickú úlohu, plastické tečenie materálu sa objavuje len v miestach lokálnej koncentrácie napätia. Body so špičkami napätia sa splastizujú a odovzdávajú prípadný ďalší prírastok zaťaženia susedným elasticky zaťaženým “tuhým” častiam a teda, aj keď sa zavedie ideálne plastický materiál, plastické deformácie sú malé a bilineárne spevnenie v okolí medze sklzu môže celkom dobre vystihovať realitu. Pochopiteľne v prípade kombinácie geometrickej a fyzikálnej nelinearity, pri analýze telies vyrobených zo špeciálnych materiálov alebo pri visko-plastických úlohách máme k dispozícii aj presnejšie materiálové modely (pozrite napr. ponuku materiálových modelov v programe ANSYS).

11.2 Funkcia plasticity a kritérium plasticity

Uvažujme teleso zaťažené jednoosovým napätím σ, pričom materiál telesa má aktuálnu medzu sklzu $\bar{\sigma}_K$ v ťahu a tlaku rovnakú. Potom pre *elastickú oblasť* zaťažovania častice (materiálového bodu) telesa platí

$$f = |\sigma| - \bar{\sigma}_K < 0 \qquad \rightarrow \qquad |\sigma| < \bar{\sigma}_K \tag{11.10}$$

Takto zavedená funkcia f sa nazýva *funkcia plasticity*. Ak absolútna hodnota napätia σ dosiahne hodnotu $\bar{\sigma}_K$, a teda funkcia f nulovú hodnotu, zaťaženie materiálovej častice dosiahlo hranicu plastickej oblasti. O tom, čo sa s časticou odohrá pri ďalšej zmene napätia, rozhoduje tzv. *kritérium (podmienka) plasticity,* ktoré možno zapísať v tvare

$$\text{Ak} \quad f\left(\sigma,\bar{\sigma}_K\right) = |\sigma| - \bar{\sigma}_K = 0 \quad \text{a} \qquad \begin{array}{ll} \dot{\varepsilon}^p \neq 0 & \rightarrow \ \text{ide o plastické zaťažovanie} \\ \dot{\varepsilon}^p = 0 & \rightarrow \ \text{ide o elastické odľahčenie} \end{array} \tag{11.11}$$

kde $\dot{\varepsilon}^p$ je rýchlosť jednoosovej plastickej deformácie

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^p(\mathbf{X},t) \qquad \rightarrow \qquad d\varepsilon^p = \dot{\varepsilon}^p dt \tag{11.12}$$

a $\mathbf{X}$ je polohový vektor častice v začiatočnej (nedeformovanej) konfigurácii.

V súvislosti s kritériom plasticity (11.11) poznamenávame, že napätie σ nemôže dosiahnúť väčšiu hodnotu ako je aktuálna medza sklzu $\bar{\sigma}_K$ a všetky prípustné hodnoty napätia musia spĺňať podmienku

$$f\left(\sigma,\bar{\sigma}_K\right) \leq 0 \tag{11.13}$$

11.3 Zákon plastického tečenia. Podmienky plastického zaťaženia a elastického odľahčenia. Spevňovanie materiálu

Pre jednoosovú deformáciu *zákon plastického tečenia* materiálu možno formálne zapísať v tvare

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}\, sign(\sigma) \tag{11.14}$$

kde (zatiaľ neznámy) skalár $\dot{\lambda} \geq 0$ sa nazýva *plastický násobok* a funkcia *sign* je rovná +1, ak je $\sigma \geq 0$ a -1, ak je $\sigma < 0$. Kladné (ťahové) napätie takto vyvolá kladnú jednoosovú deformáciu (natiahnutie) a záporné (tlakové) napätie zápornú deformáciu (stlačenie). Plastický násobok spĺňa tzv. *podmienku komplementarity*

$$\dot{\lambda} f = 0 \tag{11.15}$$

ktorá spolu s podmienkou plasticity (11.11) a zákonom plastického tečenia (11.14) zaručuje, že v elastickej oblasti je rýchlosť plastickej deformácie nulová

$$f < 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon}^p = 0 \tag{11.16}$$

a že plastické tečenie môže vzniknúť len vtedy, keď sa absolútna hodnota napätia stotožní s aktuálnou medzou sklzu

$$|\sigma| = \bar{\sigma}_K \quad \rightarrow \quad f = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} \geq 0 \tag{11.17}$$

Z uvedených vzťahov možno stanoviť aj tzv. *zaťažovacie/odľahčovacie podmienky* pružne-plastického modelu

$$f \leq 0, \qquad \dot{\lambda} \geq 0, \qquad \dot{\lambda} f = 0 \tag{11.18}$$

Z prvej vyplýva, že napätie musí ležať na alebo pod hranicou medze sklzu, druhá zabezpečuje, že plastický násobok nemôže byť záporný a z poslednej vyplýva, že pri plastickom zaťažovaní je napätie rovné medzi sklzu, pričom $\dot{\lambda} > 0$ a tiež, že $\dot{\lambda} = 0$ pri elastickom odľahčení.

Ako sme už uviedli, experimentálne merania potvrdzujú, že plastické tečenie materiálu je spojené so zmenou aktuálnej medze sklzu $\bar{\sigma}_K$. Tento jav je označovaný ako *spevňovanie* a pri jednoosom modeli sa tzv. *zákon plastického spevňovania* zohľadňuje jednoducho funkciou

$$\bar{\sigma}_K = \bar{\sigma}_K(\bar{\varepsilon}^p) \tag{11.19}$$

kde

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| dt \tag{11.20}$$

sa nazýva *akumulovaná plastická deformácia*, do hodnoty ktorej, ako vidieť, prispieva rovnako prírastok ťahovej i tlakovej plastickej deformácie. Z definícií $\bar{\varepsilon}_p$ a λ vyplýva

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = |\dot{\varepsilon}^p| = \dot{\lambda} \tag{11.21}$$

11.4 Podmienka konzistencie. Určenie plastického násobku.

Pri plastickom tečení materiálu, kedy absolútna hodnota napätia sa stále rovná aktuálnej medzi sklzu ($\sigma = \bar{\sigma}_K$), je podľa (11.11) funkcia plasticity konštantná ($f = 0$), z čoho vyplýva tzv. *podmienka konzistencie*

$$\dot{f} = 0 \qquad \rightarrow \qquad df = \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \tag{11.22}$$

a podľa (11.11) a (11.6) tiež dostávame

$$\dot{f} = sign(\sigma)\dot{\sigma} - H(\overline{\varepsilon}^p)\dot{\varepsilon}^p = 0 \tag{11.23}$$

Plastický násobok možno teraz zo vzťahov (11.23), (11.21) a z Hookeovho zákona (v rýchlostnom tvare)

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P) \tag{11.24}$$

vyjadriť pomocou materiálových parametrov a rýchlosti (resp. prírastku) celkovej deformácie

$$\dot{\lambda} = \frac{E}{H+E} sign(\sigma)\dot{\varepsilon} = \frac{E}{H+E}|\dot{\varepsilon}| \tag{11.25}$$

11.5 Všeobecný pružne-plastický konštitutívny model

Opísaný jednoosový model ťažného kovového materiálu obsahuje všetky základné charakteristiky všeobecného pružne-plastického materiálového modelu vhodného pre trojrozmernú deformačnú a napäťovú analýzu telesa z poddajného materiálu. Pravda, rovnice a vzťahy platné pre takýto model sú komplikovanejšie, pretože jednoosovú deformáciu a jednoosové napätie musíme nahradiť tenzormi všeobecnej priestorovej deformácie a napätosti. Analogicky s jednoosovým modelom sa predpokladá, že tenzor celkovej deformácie $\boldsymbol{\varepsilon}$ možno rozložiť na elastickú a plastickú časť

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{11.26}$$

a pretože pri pružne-plastickom zaťažovaní je vzťah medzi zaťažením (napätím) a celkovou deformáciou nelineárny, a závisí aj od zaťažovacej histórie (na rozdiel od nelinearity hyperelastického materiálu), stretávame sa s uvedenými tenzormi hlavne v diferenciálnom (pri numerickom riešení diferenčnom) prírastkovom tvare

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \qquad \rightarrow \qquad d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{11.27}$$

Tieto hodnoty sa vyjadrujú pre aktuálny stav určovaný pseudočasom t (uvažujeme kvázi statickú úlohu), ktorý je formálnou mierou zaťažovacieho procesu. Celkové hodnoty deformácií sa v priebehu zaťažovacieho procesu určujú sčítávaním (integrovaním) meniacich sa prírastkov. Napätie sa vyjadruje na východzej (nedeformovanej) konfigurácii a vzhľadom na predpoklad malých deformácii ho možno považovať za Cauchyho napätie. Pretože uvažujeme materiál, ktorého pružné vlastnosti sú lineárne a izotropné, pre tenzor napätia platí zovšeobecnený Hookeov zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^e + K\varepsilon_v^e \boldsymbol{I} \tag{11.28}$$

kde je uvedený aj jeho, v teórii plasticity často a výhodne využívaný, rozklad na deviatorickú a objemovú časť. V (11.28) $\mathbf{D}^e$ je štandardný izotropný tenzor pružného materiálu, G je modul pružnosti v šmyku, K je objemový modul materiálu, $\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$ je deviatorická časť tenzora pružnej deformácie, $\varepsilon_V^e = tr\left|\boldsymbol{\varepsilon}^e\right|$ je objemová pružná deformácia a $\boldsymbol{I}$ je jednotkový tenzor druhého rádu.

11.6 Kritérium plasticity, plastický potenciál, zákon plastického tečenia a zákon spevňovania

Jednoosová napätosť, ktorou sme sa zoberali v predchádzajúcej časti, je plne charakterizovaná veľkosťou a zmyslom (hlavného) napätia σ. Ak absolútna hodnota tohoto napätia dosiahne veľkosť aktuálnej medze sklzu materiálu $\bar{\sigma}_k$, hovoríme o splnení kritéria (podmienky) plasticity (plastického tečenia) takto zaťaženej častice (bodu) telesa. Podľa (11.11) sa dá jednoducho vyjadriť v tvare

$$f\left(\sigma, \bar{\sigma}_K\right) = 0 \tag{11.29}$$

Tento tvar kritéria plasticity možno formálne zovšeobecniť aj pre viacrozmernú napätosť

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}\right) = 0 \tag{11.30}$$

kde ale skalárna funkcia plasticity je teraz funkciou tenzora napätia $\boldsymbol{\sigma}$ a prípadne jednej, dvoch alebo aj celej sady funkcií $\mathbf{a}$, riadiacich spevňovanie materiálu.

Pri formulácii viacrozmerných plastických modelov je výhodné definovať zákon plastického tečenia, a podľa možnosti aj zákon spevňovania materiálu, pomocou vhodného *plastického potenciálu*

$$g = g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \tag{11.31}$$

Pre mnohé materiály (najmä kovové) možno ako plastický potenciál využiť funkciu plasticity ako najjednoduchší prípad plastického potenciálu

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \tag{11.32}$$

a v ďalšom sa budeme zaoberať len takýmito modelmi; nazývajú sa *asociatívne* (plastický potenciál je stotožnený s funkciou plasticity, ktorá sa v takomto prípade často nazýva aj *funkciou plastického zaťažovania*). Z plastického potenciálu sa vyjadruje *zákon plastického tečenia* v tvare

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\mathbf{f} \tag{11.33}$$

kde deväť členov tenzora

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{11.34}$$

(vzhľadom na jeho fyzikálny význam často nazývaného *vektorom tečenia*) dostaneme postupným derivovaním plastického potenciálu podľa zložiek napätia. Ako vidieť z (11.33), všetky členy tenzora rýchlosti plastickej deformácie sú úmerné plastickému násobku, ktorý je nenulový len v prípade, keď došlo k plastickému tečeniu. Plastický násobok $\dot{\lambda}$ a funkcia plasticity (11.30) opäť určujú podmienky plastického zaťažovania resp. odľahčovania, ktoré majú nezmenený tvar i význam podľa (11.18).

Problém spevňovania materiálu možno všeobecne vyjadriť pomocou jednej, dvoch alebo aj celej sady *vnútorných prememných* $\boldsymbol{\alpha}$, pre ktoré platí *zákon spevňovania*

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda}\mathbf{h} \tag{11.35}$$

kde pre

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{a}) = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \tag{11.36}$$

tzv. *zobecnený modul spevňovania*, treba určiť aj závislosť $\mathbf{a}$ na vnútorných premenných $\boldsymbol{\alpha}$, ktoré riadia vlastný spevňovací proces počas plastického tečenia materiálu.

11.7 Všeobecná termodynamická formulácia spevňovacích funkcií

Ak predpokladáme izotermický deformačný proces bez výmeny tepla možno *Helmholzovu voľnú energiu* na jednotku hmotnosti

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{\alpha})$$

považovať za funkciu celkovej deformácie, plastickej deformácie a sady vnútorných premenných $\boldsymbol{\alpha}$ charakterizujúcich spevňovanie materiálu. Túto energiu možno rozdeliť na elastickú časť ψ^e od elastickej deformácie a časť ψ^p spotrebovanú na plastickú deformáciu a spevnenie materiálu

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}) \tag{11.37}$$

Pre takto definovanú voľnú energiu má Clausius-Duhemova nerovnosť tvar [1]

$$(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{a} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \tag{11.38}$$

kde

$$\mathbf{a} = \rho\frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \tag{11.39}$$

je tzv. *spevňovacia termodynamická sila*, ρ je hustota materiálu a znak $*$ symbolizuje príslušný súčin medzi jednotlivými pármi $\mathbf{a}$ a $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$. Rovnosť v (11.38) platí len pre reverzibilý (elastický) proces, z čoho vyplýva

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{11.40}$$

a zvyšné dva členy tvoria tzv. *funkciu plastickej disipácie*

$$\gamma^p = \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{a} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{11.41}$$

11.8 Určenie plastického násobku a pružne-plastického tangenciálneho modulu

Pri plastickom tečení materiálu $\dot{\lambda} \neq 0$ platí podmienka konzistencie (11.22)

$$\dot{f} = 0 \tag{11.42}$$

Derivovaním funkcie plasticity (11.30) podľa času dostávame

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} * \dot{\mathbf{a}} = 0 \tag{11.43}$$

Využitím vzťahov pre rýchlosť zmeny napätia $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{D}^e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{D}^e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{D}^e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{f}) \tag{11.44}$$

a rýchlosti spevňovacej termodynamickej sily

$$\dot{\mathbf{a}} = \rho\frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \rho\frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \dot{\lambda}\mathbf{h} \tag{11.45}$$

sa vzťah (11.43) zmení na

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) + \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} * \rho\frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \mathbf{h} = 0 \tag{11.46}$$

a z neho plastický násobok je

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \mathbf{f} - (\partial f / \partial \mathbf{A}) * \rho(\partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2) * \mathbf{h}} \tag{11.47}$$

Dosadením tohto výsledku do (11.44) a menšou úpravou dostaneme rýchlosť zmeny napätia (alebo po vynásobení s *dt* diferenciálny prírastok $d\boldsymbol{\sigma}$) v závislosti od rýchlosti celkovej deformácie

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{11.48}$$

kde pre tzv. *pružne-plastický tangenciálny materiálový* modul platí

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{D}^e : \mathbf{f}) \otimes (\mathbf{D}^e : \mathbf{f})}{\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \mathbf{f} - (\partial f / \partial \mathbf{A}) * \rho(\partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2) * \mathbf{h}} \tag{11.49}$$

Podstata použitej úpravy spočívala v tom, že pre symetrický tenzor $\mathbf{D}^e$ platí

$$\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^e : \mathbf{f} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{11.50}$$

Z uvedeného vyplýva, že pre formuláciu konkrétneho pružne-plastického materiálového modelu treba vykonať tieto základné práce

- určiť, alebo si zvoliť, vhodné kritérium (podmienku) plasticity (11.30) a vnútorné premenné riadiace spevňovanie materiálu
- definovať plastický potenciál; v prípade asociovaného modelu (11.32) sa využije funkcia plasticity obsiahnutá v podmienke plasticity
- určiť vektor tečenia (11.34) a určiť, alebo si zvoliť, zákon spevňovania (11.35)
- určiť tangenciálny materiálový model (11.49) pre možnosť určovania prírastku napätia z prírastku celkovej deformácie vyvolanej prírastkami zaťaženia (11.48)

- pre potreby numerického riešenia vyriešiť problém dostatočne presnej integrácie diferenciálneho vzťahu (11.48) vzhľadom na konečné prírastky deformácie $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$

11.9 Napäťové invarianty

Napätie vo všeobecnom bode zaťaženého telesa možno rozložiť na tzv. *stredné* (*hydrostatické*) normálové napätie $\sigma_m \boldsymbol{I}$ a deviatorické napätie $\mathbf{s}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \sigma_m \boldsymbol{I} + \mathbf{s} \quad \textit{alebo} \quad \sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij} \tag{11.51}$$

kde

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \tag{11.52}$$

a

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \frac{1}{3}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) \end{bmatrix} \tag{11.53}$$

Tento rozklad sa pomerne často využíva, pretože plastické tečenie niektorých dôležitých materiálov nezávisí od hydrostatického napätia a pri formulácii materiálového modelu sa pracuje s deviatorickým napätím.

V Cauchyho pravidle pre vyjadrovanie napätia v ľubovoľnej rezovej rovine diferenciálneho šesťstenu (kapitola 3) požadujme, aby v rovine určenej vektorom vonkajšej normály $\mathbf{n}$ pôsobilo *len normálové* napätie σ. Potom platí

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{11.54}$$

čo je štandardný problém vlastných čísiel: Pre danú maticu $[\boldsymbol{\sigma}]$ treba nájsť (vlastné) čísla σ a (vlastné) vektory $\mathbf{n}$, pre ktoré rovnice (11.54) platia. Je to vlastne sústava homogénnych rovníc

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\boldsymbol{I})\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{11.55}$$

ktorá má nenulové riešenie len vtedy, keď determinant matice jej koeficientov sa rovná nule

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\boldsymbol{I}) = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \tag{11.56}$$

Vyjadrením determinantu dostaneme pre určenie σ kubickú rovnicu

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{11.57}$$

kde

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \tag{11.58}$$
$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

Riešením tejto rovnice dostaneme tri korene $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, tzv. *hlavné napätia*, ktoré pre danú napätosť v bode telesa (daný tenzor napätia) majú jednoznačné hodnoty. Sú to napäťové *invarianty*, nezávislé na zmene súradnicového systému. Je zrejmé, že aj koeficienty I_i rovnice (11.57) sú invarianty, lebo pri ľubovoľnej orientácii súradnicového systému musíme z rovnice dostať tie isté hlavné napätia. Nazývajú sa *hlavné invarianty tenzora napätia*. Možno ich prehľadne zapísať aj pomocou hlavných napätí

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{11.59}$$

Dosadením hlavných napätí do (11.54) možno určiť vlastné vektory, tzv. *hlavné smery* napätia a potvrdiť si vedomosti zo základov pružnosti, že hlavné napätia pôsobia v troch navzájom kolmých rovinách.

Z dôvodov, ktoré sme uviedli, sú dôležité aj invarianty deviatorického napätia. Rovnakým postupom a z formálne rovnakých vzťahov ako pri napätí $\boldsymbol{\sigma}$ dostaneme pre $\mathbf{s}$ *charakteristickú rovnicu* analogickú s (11.57)

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \tag{11.60}$$

kde, podľa dohody zaručujúcej kladnú hodnotu J_2, sa zmenilo znamienko pri J_2, čo treba zohľadniť pri prepisovaní vzorcov pre J_2 z (11.58) a (11.59). Pretože sa pri zmene súradnicového systému stredné napätie nemení, hlavné smery napätia sú totožné s hlavnými smermi deviatorického napätia a platí

$$s_i = \sigma_i - \sigma_m \tag{11.61}$$

Pre *hlavné invarianty deviatorického napätia* platia analogické vzťahy s (11.58) a (11.59). Pre najdôležitejší hlavný invariant deviatorického napätia (J_2) sme pripojili aj niektoré ďalšie často používané formy jeho zápisu

$$\begin{aligned} J_1 &= s_1 + s_2 + s_3 = s_{11} + s_{22} + s_{33} 0 \\ J_2 &= -(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = \tfrac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} = \tfrac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \\ &= \tfrac{1}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11}) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ J_3 &= s_1 s_2 s_3 \end{aligned} \tag{11.62}$$

Napäťové invarianty zohrávajú dôležitú úlohu pri tvorbe podmienok plasticity a formulácii plastických potenciálov.

12 Von Misesov materiálový model s izotropným spevňovaním

12.1 Kritérium plasticity

Podľa hypotézy von Misesa začiatok plastickej deformácie signalizuje situácia, kedy druhý (kvadratický) invariant deviátora napätia J_2 dosiahne kritickú hodnotu alebo, inak povedané, keď jeho odmocnina dosiahne hodnotu kritického napätia K

$$\sqrt{J_2} = K \tag{12.1}$$

Potom kritérium plasticity bude mať tvar

$$f(\boldsymbol{\sigma}, K) = \sqrt{J_2} - K = 0 \tag{12.2}$$

Aby kritérium platilo aj pre jednoosovú napätosť musí byť splnená podmienka (11.11)

$$|\sigma| - \bar{\sigma}_K = 0 \qquad \rightarrow \qquad |\sigma| = \bar{\sigma}_K \tag{12.3}$$

a pretože pri jednoosovej napätosti je $J_2 = \frac{1}{3}\sigma^2$ a teda $\sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}_k$, podľa (12.2) pre K platí

$$K = \frac{\bar{\sigma}_K}{\sqrt{3}}$$

čo je vlastne medza sklzu materiálu v šmyku podľa tejto podmienky. S použitím všeobecného vzťahu pre J_2 (11.62)

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}}$$

dostávame potom podľa (12.2) von Misesovu podmienku plasticity v tvare

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}_K) = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}} - \bar{\sigma}_K = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_K = 0 \tag{12.4}$$

Člen s odmocninou v tomto vzťahu sa nazýva *von Misesovo ekvivalentné napätie* $\bar{\sigma}$. Jeho názov hovorí, že viaczložkové napätie $\boldsymbol{\sigma}$, ktorého deviátor je $\mathbf{s}$, možno podľa von Misesovej hypotézy ekvivalentne nahradiť jednoosovým napätím $\bar{\sigma}$ a takto jeho účinok porovnávať s jednoosovými charakteristikami materiálu. Možno sa stretnúť aj s názvom *redukované*, resp. *porovnávacie* von Misesovo napätie. Aktuálna medza sklzu v (12.4) vystupuje ako skalárna vnútorná premenná riadiaca proces spevňovania materiálu. Po vyjadrení ekvivalentného von Misesovho napätia pomocou zložiek napätia dostávame

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}} &= \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{23}^2 + 3\sigma_{31}^2} \\ &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2} \end{aligned} \tag{12.5}$$

alebo, pomocou hlavných napätí

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \tag{12.6}$$

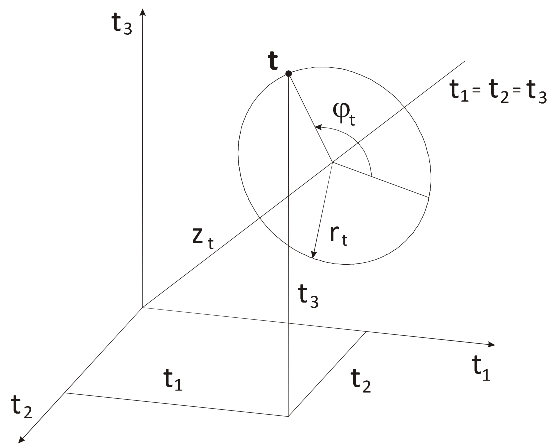
Fyzikálne sa von Misesova podmienka plasticity vysvetľuje dvomi spôsobmi. Hencky (v r. 1924) ukázal, že tú istú podmienku dostaneme z porovnania energie šmykových zložiek napätia (energie spôsobujúcej len zmenu tvaru) priestorovej a jednoosovej napätosti. Nádaj (v r. 1937) zaviedol tzv. oktaedrické napätia (napätia pôsobiace na stenách pravidelného elementárneho osemstena – oktaédra, ktorého steny sú rovnako sklonené vzhľadom na smery hlavných napätí) a nakoľko pre šmykové oktaedrické napätie platí

$$\tau_{okt} = \sqrt{\tfrac{2}{3} J_2}$$

interpretoval von Misesovu podmienku tak, že plastická deformácia začína vtedy, keď šmykové oktaedrické napätie dosiahne kritickú hodnotu.

Von Misesova podmienka vystihuje experimentálne zistený jav, že plastická deformácia kovov skoro vôbec nie je závislá od hydrostatického (všestranného) tlaku. Pretože všestranný tlak $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ nevyvolá žiadne šmykové napätia (nevyvolá zmenu pravých uhlov elementu), z Henckyho zistenia vyplýva, že neovplyvní ani von Misesovu podmienku plasticity. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že pri zmene normálových zložiek napätia o rovnakú hodnotu, sa J_2 nezmení. Pravda táto vlastnosť tohoto invariantu, a teda i von Misesovej podmienky, je už menej vítaná pri všestrannom ťahu. Možnosť výskytu „čistého" všestranného priestorového ťahu je však v praxi málo pravdepodobná.

Pre grafické znázornenie von Misesovej podmienky plasticity je výhodný systém cylindrických súradníc (r, φ, z). Tieto súradnice *symetrického* tenzora $\mathbf{t}$ možno zaviesť v trojrozmernom priestore jeho hlavných hodnôt t_1, t_2, t_3. V tomto priestore sa cylindrické súradnice definujú takto (obr. 12.1): Osou z systému je priamka odklonená o rovnaký uhol od pravouhlých osí, t_1, t_2, t_3, to znamená, že pre tieto body platí $t_1 = t_2 = t_3$. Na tejto osi meriame vzdialenosť z_t. V rovine kolmej k osi z meriame polomer r_t ako aj uhol φ_t od roviny prechádzajúcej cez os z a súradnicovú os t_1.



Obr. 12.1 *Cylindrické súradnice tenzora* $\mathbf{t}$

Cylindrické súradnice tenzora $\mathbf{t}$ v priestore jeho hlavných hodnôt sú jeho invarianty a ich hodnoty sú [11]

$$z_t = \sqrt{1/3}\left(t_1 + t_2 + t_3\right)$$

$$r_t = \sqrt{2/3}\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_1 t_2 - t_2 t_3 - t_3 t_1} \tag{12.7}$$
$$\varphi_t = \arcsin\frac{t_1 - t_2}{\sqrt{2}\, r_t}$$

Podmienku spĺňa v priestore hlavných napätí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ množina napäťových bodov ležiacich na kvadratickej ploche. Pri ich znázornení je výhodný uvedený valcový súradnicový systém. Z porovnania vzťahu (12.6) a (12.7) vyplýva, že von Misesovu podmienku spĺňajú len body, ktoré ležia na *plášti valca* s polomerom

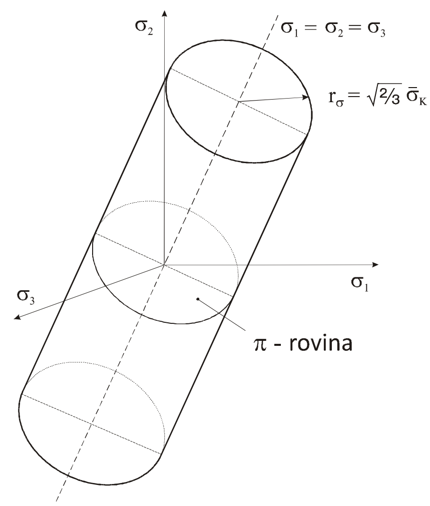
$$r_\sigma = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\bar{\sigma}_K \tag{12.8}$$

Os valca je totožná alebo rovnobežná (pri kinematickom spevňovaní) s osou cylindrického systému, odklonenej o rovnaký uhol od pravouhlých súradnicových osí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (nazývaná tiež hydrostatickou osou, alebo priestorovou diagonálou - obr. 12.2), na ktorej $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Rovina kolmá na os valca prechádzajúca cez začiatok súradnicového systému sa nazýva π -rovina.

Všetky stavy napätia vo vnútri valca sú pružné stavy. Body na plášti predstavujú kritické stavy - na hranici pružnej a plastickej deformácie; každá ďalšia zmena napätosti, ktorá by smerovala von z valca, vyvolá plastické deformácie. Nekonečná dĺžka valca je dôsledkom nezávislosti von Misesovho kritéria na všestrannom tlaku a ťahu: Bod takejto napätosti sa nachádza vždy na osi valca a nemôže dosiahnuť kritickú hodnotu.

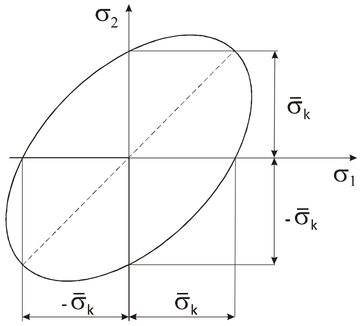
Pre rovinnú napätosť ($\sigma_3 = 0$) z (12.6) dostávame

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \bar{\sigma}_K^2$$



Obr. 12.2 *Grafické zobrazenie von Misesovej podmienky plasticity*

Obrazom tejto podmienky je v súradnicovom systéme σ_1, σ_2 elipsa (obr. 12.3), ktorej hlavná os je natočená o 45° od osi σ_1. Je to rez rovinou $\sigma_3 = 0$ cez valcový plášť na obr. 12.2.



Obr. 12.3 *Von Misesovo kritérium plasticity pri rovinnej napätosti*

Niekedy je výhodné pracovať s podmienkou plasticity v súradnicovom systéme hlavných deviatorických napätí s_1, s_2, s_3. Pre hlavné deviatorické napätia platí

$$s_i = \sigma_i - \sigma_m \, ; \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

a ľahko sa možno pomocou (12.6) a (12.4) presvedčiť, že von Misesova podmienka vyjadrená pomocou týchto hodnôt má tvar

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_3 s_1} = \bar{\sigma}_K \tag{12.9}$$

Keď porovnáme tento vzťah so (12.7), vidíme, že napätia spĺňajúce von Misesovu podmienku majú v súradnicovom systéme s_1, s_2, s_3 takisto polomer

$$r_s = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \bar{\sigma}_K$$

ale všetky ležia *na kružnici* v *deviatorickej rovine* (tzv. π *-rovine*, obr. 12.2), pretože podľa (12.7) vzdialenosť

$$z_s = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(s_1 + s_2 + s_3\right) \tag{12.10}$$

pre všetky stavy napätia je rovná nule, pretože $s_1 + s_2 + s_3 = 0$.

Von Misesovo kritérium plasticity (spolu s ďalšími klasickými podmienkami: Tresca, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb - pozri napr. [2]) sa vyznačuje vlastnosťou izotropie, t.j. vyhovuje podmienke

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^T) \tag{12.11}$$

kde $\mathbf{R}$ je tenzor rotácie. Podmienka sa teda nemení pri rotácii napätosti (rotácii súradnicového systému) a vyhovuje pre izotropné (hlavne kovové) materiály.

12.2 Zákon plastického tečenia

Určenie podmienky pre začiatok plastickej deformácie materiálu je len prvý krok riešenia pružne-plastickej úlohy. Je potrebné odpovedať na ďalšie zásadné otázky: Ak v bode telesa všeobecná napätosť dosiahne podmienku plasticity a naďalej narastá, aké veľké budú a aký budú mať smer zložky prírastku tenzora plastickej deformácie $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt$? Pretože v bode skončila lineárna závislosť medzi zložkami deformácie a napätia, ako teraz určíme prírastky zložiek napätia?

Na prvú otázku odpovedá *zákon plastického tečenia* materiálu a na druhú *konštitutívne (fyzikálne) rovnice*, čo sú vlastne prírastkové vzťahy medzi zložkami celkovej deformácie a zložkami napätia v uvažovanom bode pre príslušný materiálový model. Konštitutívne rovnice musia dostatočne presne zohľadňovať fyzikálne vlastnosti materiálu: Jeho vlastnosti v pružnom a pružne-plastickom stave, jeho spevňovanie, vývoj a prípadnú zmenu podmienky plasticity a i.

Zákon plastického tečenia je v podstate zovšeobecnenie tohto zákona pre jednoosové zaťažovanie (časť 11.3) a vyjadruje prírastok plastickej deformácie v situácii, kedy napätosť v bode telesa splnila kritérium plasticity a zaťaženie ďalej narastá. Experimentálne merania potvrdzujú, že pre kovové materiály má vektor diferenciálneho prírastku plastickej deformácie *smer normály k ploche plasticity* (pravidlo normality) určenej gradientom jej funkcie. Potom platí

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\mathbf{f} \tag{12.12}$$

Ak v tomto vzťahu využijeme von Misesovu podmienku plasticity (12.4) ako funkciu plasticity dostaneme zákon plastického tečenia v tvare (o platnosti výsledného tvaru sa možno presvedčiť rozpísaním (12.4) až po zložky $\boldsymbol{\sigma}$ a precvičením si derivovania zloženej funkcie podľa jednotlivých zložiek napätia)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\mathbf{f} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \dot{\lambda}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{s}:\mathbf{s}}} = \dot{\lambda}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\tfrac{2}{3}}\bar{\sigma}_k} = \dot{\lambda}\frac{3}{2\bar{\sigma}_k}\mathbf{s} \tag{12.13}$$

Je to vlastne v pseudorýchlostnom tvare tenzorový zápis Prandtl-Reussových rovníc

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{s_z} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}} = d\lambda_0 \tag{12.14}$$

V tejto súvislosti upozorňujeme na to, že ak v (12.13) uplatníme modifikovaný ale ekvivalentný tvar von Misesovej podmienky plasticity (12.4), napr.

$$f_0 = \tfrac{3}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s} - \bar{\sigma}_k^2 = 0 \tag{12.15}$$

dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_0\mathbf{s} \tag{12.16}$$

Zatiaľ neznáma hodnota skaláru $\dot{\lambda}_0$ v tomto prípade "absorbovala" konštantu $3/(2\bar{\sigma}_k)$. Po určení týchto konštánt úmernosti, bude samozrejme v oboch prípadoch vzťah medzi zložkami napätia a zložkami plastickej deformácie rovnaký.

12.3 Spevňovanie materiálu

O tom, že sa kovový materiál spevňuje, ak ho podrobíme plastickej deformácii, nás presviedča prax a potvrdzujú to experimenty, napr. ťahová skúška materiálu. Ťahovou skúškou, pri ktorej sa vzorka materiálu zaťažuje za medzu sklzu, možno určiť začiatočnú medzu sklzu materiálu σ_k, a jednoosový tangenciálny modul $E_T(\varepsilon^p)$ ako základné jednoosové charakteristiky, potrebné pre výpočtovú aproximáciu (simuláciu) spevňovania pri všeobecnom zaťažovaní.

Pri niektorých úlohách sa využíva aj *model ideálne plastického materiálu* bez spevnenia s konštantnou medzou sklzu σ_k v podmienke plasticity. Tento predpoklad je tiež známy z výpočtov na medzný stav a uplatňuje sa aj v tzv. koeficientoch bezpečnosti pri jednoduchých pevnostných výpočtoch podľa technických noriem. V takomto prípade sa plastické moduly E_T a H (časť11.1) rovnajú nule a konštantná medza sklzu má za následok nemennú plochu plasticity pri akýchkoľvek deformačných procesoch. Pokiaľ napätie dosiahne medzu sklzu a ďalej narastá, neobmedzenej deformácii zabraňuje len tuhosť okolitého materiálu alebo tuhosť okolitých častí konštrukcie.

Jednoduchú formu simulácie spevňovania materiálu účinkom plastickej deformácie predstavuje tzv. *izotropné spevňovanie*, pri ktorom sa materiál spevňuje vo všetkých napäťových smeroch rovnako. V takomto prípade sa vo von Misesovej podmienke plasticity uvažuje premenlivá medza sklzu $\overline{\sigma}_k$. Jej hodnota monotónne narastá v závislosti od miery plastickej deformácie v danom bode telesa, ktorou najčastejšie býva ekvivalentná plastická deformácia $\overline{\varepsilon}^p$ alebo disipovaná práca plastickej deformácie A^p. Tieto miery umožňujú tiež určitým približným spôsobom vniesť do výpočtu všeobecnej viacosovej napätosti jednoosové spevňovacie vlastnosti materiálu určené klasickými normovými skúškami.

Ekvivalentná plastická deformácie má analogickú funkciu ako evivalentné napätie - redukuje viacosový deformačný stav určený tenzorom plastickej deformácie na jednoosový podľa vzťahu

$$\overline{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\overline{\varepsilon}}^p dt \tag{12.17}$$

kde

$$\dot{\overline{\varepsilon}}^p = \sqrt{\tfrac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \tag{12.18}$$

Je to opäť invariantná skalárna veličina, pričom násobok $2/3$ zaručuje, že $\overline{\varepsilon}^p = \varepsilon_{11}^p$, čiže platnosť (12.17) aj pre jednoosovú deformáciu. Izotropné spevňovanie von Misesovho materiálového modelu dostaneme, keď medza sklzu v (12.4) bude funkciou ekvivalentnej plastickej deformácie

$$f(\boldsymbol{\sigma},\overline{\sigma}_k) = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s}} - \overline{\sigma}_k(\overline{\varepsilon}^p) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{s}:\mathbf{s} = \tfrac{2}{3}\overline{\sigma}_k^2 \tag{12.19}$$

Ak funkcia $\overline{\sigma}_K(\overline{\varepsilon}^p)$ je lineárna, hovoríme o modeli s *lineárnym izotropným spevňovaním*. Spevňovacia funkcia vtedy má tvar

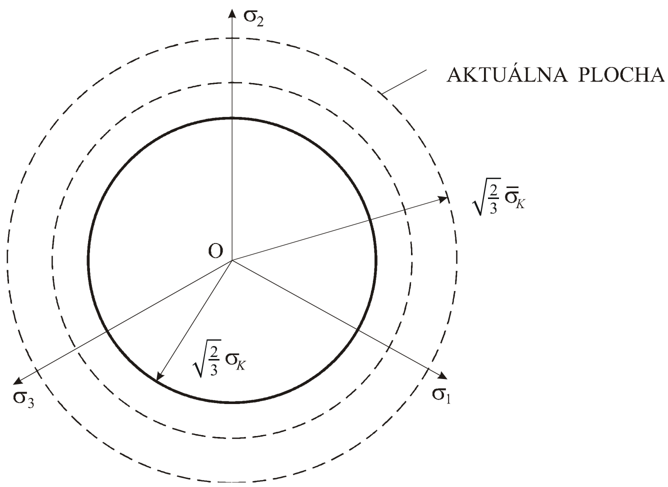
$$\overline{\sigma}_K(\overline{\varepsilon}^p) = \sigma_K + H\overline{\varepsilon}^p \tag{12.20}$$

s konštantým plastickým modulom H a konštatntnou začiatočnou medzou sklzu nedeformovaného materiálu.

V prípade von Misesovej podmienky plasticity (von Misesovej funkcie plastického zaťažovania) vzťah (12.19) s meniacou sa medzou sklzu $\overline{\sigma}_K$ zobrazuje v súradnicovom systéme hlavných napätí jednoparametrickú množinu súosových valcov (obr. 12.4) s polomermi

$$r(\overline{\sigma}_K) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\overline{\sigma}_K = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\sigma_K + H\overline{\varepsilon}_p\right)$$

Izotropné spevňovanie možno hodnoverne využiť len pri tzv. *proporcionálnom zaťažovaní* (všetky zložky napätia narastajú proporcionálne). Pri inom zaťažovaní - neproporcionálnom alebo cyklickom - je použitie tohoto modelu nevhodné a vzhľadom na nereálny (obrátený) Bauschingerov efekt môže viesť k neprípustným chybám.



Obr. 12.4 *Zmena plochy plasticity pri izotropnom sevňovaní*

Dosadením (12.13) do (12.18) a s využitím von Misesovej podmienky plasticity v tvare (12.19) zistíme, že platí

$$\dot{\lambda} = \dot{\overline{\varepsilon}}^p \tag{12.21}$$

Pre niektoré (nekovové) materiály je výhodnejšie použiť model, kde spevňovanie materiálu je riadené akumulovanou prácou vnútorných plastických síl (*work hardening)*

$$A_p = \int dA_p = \int \underline{\sigma}^T d\varepsilon_p = \int d\lambda \underline{\sigma}^T \mathbf{f} d\varepsilon_p$$

Podmienka plasticity potom je

$$f = \overline{\sigma} - \overline{\sigma}_K\left(A_p\right) = 0$$

Tento postup *pre von Misesovu podmienku plasticity* dáva rovnaké výsledky ako uvedená formulácia modelu s deformačným spevňovaním (*strain hardening*).

12.4 Prírastkové diferenciálne konštitutívne rovnice a pružne-plastický materiálový modul

V kapitole 11 sme uviedli prírastkové diferenciálne konštitutívne rovnice materiálového modelu (vzťahy medzi deformáciou a napätím) vo *všeobecnom* tvare

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{12.22}$$

kde

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^{e} - \frac{(\mathbf{D}^{e} : \mathbf{f}) \otimes (\mathbf{D}^{e} : \mathbf{f})}{\mathbf{f} : \mathbf{D}^{e} : \mathbf{f} - (\partial f / \partial \mathbf{a}) * \rho(\partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2) * \mathbf{h}} \tag{12.23}$$

je *diferenciálny* pružne-plastický (tangenciálny) materiálový modul. Rovnice (12.22) umožňujú pri pružne-plastickom zaťažovaní z diferenciálneho prírastku celkovej deformácie vypočítať diferenciálny prírastok napätia. Skonkretizujme teraz modul $\mathbf{D}^{ep}$ pre von Misesov materiálový model s lineárnym izotropným deformačným spevňovaním.

Zo vzťahov termodynamickej formulácie spevňovania (kapitola 11) zistíme:

Máme len jednu vnútornú premennú

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\bar{\varepsilon}^p\}$$

jedinú termodynamickú silu

$$\mathbf{a} = \left\{ \rho \frac{\partial \psi^p}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right\} = \bar{\sigma}_k\left(\bar{\varepsilon}^p\right)$$

a pre zobecnený spevňovací modul dostávame

$$\mathbf{h} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_k} = 1$$

Takže platí

$$\rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} = \rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \bar{\varepsilon}^{p^2}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_k}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = H$$

a materiálový modul (12.23) je

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^{e} - \frac{(\mathbf{D}^{e} : \mathbf{f}) \otimes (\mathbf{D}^{e} : \mathbf{f})}{\mathbf{f} : \mathbf{D}^{e} : \mathbf{f} + H} \tag{12.24}$$

Tento zápis sa dá ďalej zjednodušiť, keď vyjdeme z tenzorového vyjadrenia elastického materiálového modulu rozdeleného na deviatorickú a objemovú časť

$$\mathbf{D}^{e} = 2G\,\mathbb{P}_{\mathrm{d}} + K\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \tag{12.25}$$

kde

$$\mathbb{P}_{\mathrm{d}} = \mathbb{I} - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}$$

je deviatorický projekčný tenzor 4. rádu (transformuje tenzor druhého rádu na jeho deviatorickú časť), $\mathbb{I}$ a $\boldsymbol{I}$ sú tenzory identity štvrtého a druhého rádu, G je modul pružnosti v šmyku a K je objemový modul materiálu. Pretože $\mathbf{f}$ je deviatorický tenzor, dostávame

$$\mathbf{D}^{e} : \mathbf{f} = 2G\mathbf{f} \tag{12.26}$$

podľa toho

$$(\mathbf{D}^{e} : \mathbf{f}) \otimes (\mathbf{D}^{e} : \mathbf{f}) = 4G^2 \mathbf{f} \otimes \mathbf{f} = 4G^2 \frac{3}{2\bar{\sigma}_k}\mathbf{s} \otimes \frac{3}{2\bar{\sigma}_k}\mathbf{s} = \frac{3G^2}{\bar{\sigma}_k^2}\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \tag{12.27}$$

a s využitím (12.13)

$$\mathbf{f}:\mathbf{D}^e:\mathbf{f}=2G\,\mathbf{f}:\mathbf{f}=2G\frac{3}{2\bar{\sigma}_k}\mathbf{s}:\mathbf{s}\frac{3}{2\bar{\sigma}_k}=2G\frac{3}{2\bar{\sigma}_k}\frac{2}{3}\bar{\sigma}_k^2\frac{3}{2\bar{\sigma}_k}=3G \tag{12.28}$$

Po dosadení (12.27) a (12.28) do (12.24) sa pružne-plastický modul zjednoduší na

$$\mathbf{D}^{ep}=\mathbf{D}^e-\frac{9G^2}{\bar{\sigma}_k^2(3G+H)}\mathbf{s}\otimes\mathbf{s} \tag{12.29}$$

Sústava konštitutívnych rovníc (12.22) s pružne-plastickým materiálovým modelom (12.29) môže byť v niektorých špeciálnych prípadoch východiskom pre numerické určovanie prírastku napätia v integračných bodoch siete konečných prvkov výpočtového modelu telesa pomocou explicitných metód. Pri implicitných (iteračných) metódach integrácie týchto rovníc, a najmä pri veľkých zaťažovacích krokoch (s veľkým $\Delta\lambda$), ich použitie vedie k dramatickému poklesu konvergencie globálnej iteračnej procedúry, a preto sa nahradzujú rovnicami s tzv. *konzistentným pružne-plastickým materiálovým modulom* (myslí sa tým konzistencia s príslušnou integračnou procedúrou, pozri napr. časť 14.9).

Poznámka

Podrobný opis von Misesovho materiálového modelu s *kinematickým spevňovaním*, ako aj odvodenie pružne-plastického materiálového modulu v maticovom zápise pre tento prípad spevňovania, možno nájsť v [2].

13 Numerická integrácia konštitutívnych rovníc

13.1 Prírastkové riešenie pružne-plastickej úlohy

Vo všeobecnosti sú konštitutívne rovnice pružne-plastického materiálového modelu (v našom prípade je to von Misesov materiálový model s izotropným spevňovaním) závislé aj od zaťažovacej cesty (zaťažovacej histórie) príslušnej materiálovej častice (materiálového bodu). To znamená, že ak chceme dostať realistický výsledok riešenia pružne-plastickej úlohy pre výpočtový model telesa, musíme ho zaťažovať ku konečnej hodnote prírastkovým spôsobom a sledovať pružne-plastickú historiu každého bodu (v realite MKP každého integračného bodu všetkých prvkov výpočtového modelu telesa). Formálnou mierou zaťažovania je pseudočas t diskrétne narastajúci v intervale $< 0,\ t_{\max} >$ o hodnotu Δt, ktorá nemusí byť konštantná v celom intervale. Prívlastok *pseudo* vyplýva z toho, že uvažujeme stacionárnu (od času nezávislú) pružne-plastickú úlohu. Je to však vhodná miera prírastkov aj z toho dôvodu, že umožňuje potom prirodzeným spôsobom prechod na nestacionárne úlohy a bežne sa využíva aj v programoch MKP. Je zrejmé, že algoritmus, ktorý vyjadrí riešenie v čase $t+\Delta t \equiv t_{n+1}$ pomocou hodnôt včase $t \equiv t_n$, bude schopný riešiť úlohu v celom uvažovacom zaťažovacom intervale a dospeje k výsledku pre plnú hodnotu zaťaženia.

Po štandardnej geometrickej (prvkovej) diskretizácii (pozri napr.[1]) formulácia úlohy znie potom takto: Treba nájsť *globálny vektor posunutí uzlových bodov* $\mathbf{u}_{n+1}$ v čase t_{n+1} tak, aby bola splnená prírastková (maticová) rovnica rovnováhy

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{q}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{0} \tag{13.1}$$

kde je $\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1})$ je globálny vektor reziduálnych (nerovnovážnych) síl, $\mathbf{q}(\mathbf{u}_{n+1})$ globálny vektor vnútorných uzlových síl a $\mathbf{f}_{n+1}^{ext}$ globálny vektor vonkajších uzlových síl v čase t_{n+1} . Pre vektor vonkajších síl v (13.1) sa vo výpočtových programoch MKP obyčajne zavádza

$$\mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \Lambda_{n+1}\mathbf{f}^{ext} \tag{13.2}$$

kde Λ_{n+1} je násobok vonkajších zaťažení diskrétne sa meniaci v intervale <0, 1> a $\mathbf{f}^{ext}$ je konečná hodnota globálneho vektora vonkajších uzlových síl. Takéto zaťažovanie sa nazýva *proporcionále* alebo tiež *radiálne* (evolučná cesta tenzora napätia zobrazená v súradnicovom systéme hlavných napätí je *rovná* úsečka - radiála).

Globálne vektory v (13.1) sa vytvorili usporiadanou sumáciou prvkových vektorov (pozri napr. [1])

$$\mathbf{q}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1})\right) dV \tag{13.3}$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dV + \int_{S_1^e} \mathbf{N}^T \mathbf{p}_{n+1} dS \tag{13.4}$$

V týchto rovniciach je väčšina veličín známa zo základov lineárnej MKP [1]: $\mathbf{N}$ a $\mathbf{B}$ sú transformačné matice posunutí a deformácií všeobecného e-tého prvku (sú lineárne, pretože uvažujeme malé posunutia a malé deformácie), **b** a **p** sú vektory vonkajších uzlových síl prvku od objemového a plošného zaťaženia. Na rozdiel od lineárnej úlohy je však vo výpočte vnútorných uzlových síl elementu (13.3) namiesto napätia $\boldsymbol{\sigma}$ *prírastková* konštitutívna funkcia $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, ktorá je funkciou deformácie $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ v čase t_{n+1} a vnútorných premených $\boldsymbol{\alpha}_n$ včase *t*. Je to vlastne algoritmický zápis numerickej procedúry, ktorej výsledkom je (aproximatívna) hodnota napätia

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_n) \qquad (13.5)$$

potrebná do (13.3) na výpočet vektora vnútorných uzlových síl prvku v čase t_{n+1}.

K formálnemu vzťahu (13.5) sa patrí povedať niekoľko poznámok: Ak v bode telesa pri zaťažovacom kroku dochádza k plastickému tečeniu vzťah medzi napätím, deformáciou a vnútornými premennými je nelineárny a určenie napätia na konci zaťažovacieho kroku podľa (13.5) predstavuje *interný* (na materiálovej úrovni konečného prvku) numerický prírastkový integračný proces, ktorý treba odlišovať od globálneho prírastkového riešenia úlohy. Konštitutívny vzťah obsiahnutý v $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ je v danom prírastkovom kroku závislý len od $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, pretože druhý argument $\boldsymbol{\alpha}_n$ sa berie ako známa konštanta z času *t*. Proces výpočtu $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ je aproximačný, chyby vnesené na tejto úrovni sa už nedajú opraviť globálnou rovnovážnou iteráciou a to je dôvod, prečo sa algoritmom integrácie konštitutívnych rovníc i analýze chýb tohto procesu venuje v teórii MKP toľko pozornosti. Nelinarita konštitutívnych rovníc cez vnútorné uzlové sily prvku (13.3) vchádza do globálnej formulácie úlohy a spôsobuje, že globálne rovnice rovnováhy (13.1) sú nelineárne, nie sú automaticky splnené ako pri lineárnej úlohe, a treba ich riešiť iteračne (najčastejšie Newton-Raphsonovou metódou).

13.2 Numerická integrácia metódou elastický prediktor-plastický korektor

Na numerickú integráciu nelineárnych funkcií $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\alpha}$ v inervale (t, t_{n+1}) možno využiť množstvo metód (pozri napr. [12], [13], [2]). V programoch MKP sa najčastejšie využíva metóda *elastický prediktor-plastický korektor*. Princíp tejto metódy možno zhrnúť do dvoch postupných a na seba nadväzujúcich algoritmických krokov:

a) Testovací elastický krok (elastický prediktor)

Najprv sa predpokladá, že v kroku $<\mathrm{t}_n, \mathrm{t}_{n+1}>$ prírastok celkovej deformácie $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ v uvažovanom bode je elastický ($\Delta\lambda = 0$). Potom z prírastku celkovej deformácie a známych hodnôt z predchádzajúceho zaťažovacieho kroku možno určiť skúšobné hodnoty (vnútorné premenné $\boldsymbol{\alpha}$, určujúce spevňovanie materiálu, sa pri elastickej deformácii nemenia)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ test} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} &= \rho \left.\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n^e}\right|_{n+1}^{test} \\
\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{test} &= \boldsymbol{\alpha}_n \\
\mathbf{a}_{n+1}^{test} &= \rho \left.\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right|_{n+1}^{test}
\end{aligned} \qquad (13.6)$$

kde význam niektorých veličín sme uviedli v kapitole 12 . Nasleduje kontrola testovacieho elastického stavu pomocou podmienky plasticity. Ak platí

$$f^{test} \equiv f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test}, \mathbf{a}_{n+1}^{test}) \leq 0 \tag{13.7}$$

znamená to, že skúšobné napätie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test}$ vyšetrovaného bodu leží v elastickej oblasti, alebo sa práve nachádza na ploche plasticity a môže byť akceptované ako výsledné napätie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Platí to aj pre ostatné veličiny v (13.6). V opačnom prípade má napätie plasticky neprípustnú hodnotu a musí sa opraviť (ako aj ďalšie testovacie hodnoty) pomocou algoritmu plastického korektora.

b) *Plastický korektor (algoritmus návratu na plochu plasticity)*

Pre bod, ktorý nespĺňa podmienku (13.7), t.j. pre ktorý $f^{test} > 0$, je potrebné vykonať numerickú integráciu všetkých potrebných nelineárnych funkcií v intervale $< \mathrm{t}_n, \mathrm{t}_{n+1} >$. V algoritme plastického korektora sa často využíva *plne implicitná spätná Eulerova metóda* (známa zo základov numerického riešenia nelineárnych rovníc) v našom prípade s rovnicami

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,test} - \Delta\lambda \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}) \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1} &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{test} + \Delta\lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}) \end{aligned} \tag{13.8}$$

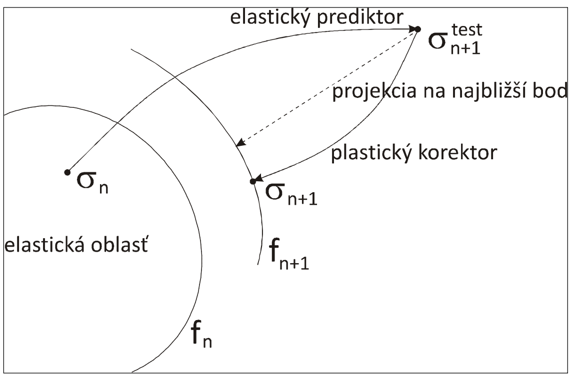
a s podmienkou, že napätie sa musí nachádzať na spevňovaním zmenenej ploche plasticity (obr.13.1)

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}) = 0 \tag{13.9}$$

Ak elastické vlastnosti materiálu sú lineárne, možno prvú rovnicu v (13.8) ekvivalentne nahradiť rovnicou s napäťovými členmi - takto upravený algoritmus sa nazýva *metódou projekcie na najbližší bod* (obr.1)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda \mathbf{D}^{e} : \mathbf{f}_{n+1} \tag{13.10}$$

Ako sme už uviedli, existuje množstvo ďalších metód a postupov určovania napätia $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ i keď mnohé z nich sú v podstate len určitou modifikáciou alebo rozšírením uvedenej metódy.



Obr.13.1 *Grafická schéma metód elastický predictor-plastický korektor a projekcie na najbižší bod*

13.3 Numerická integrácia nelineárnych rovníc von Misesovho materiáloého modelu

Uvedený algoritmus numerického riešenia nelineárnych "pružne-plastických" rovníc v integračnom bode konečného prvku skonkretizujeme teraz pre von Misesov materiálový model. Hľadáme riešenie pre všeobecný zaťažovací krok z času t_n do času t_{n+1}, v ktorom nám štandardná procedúra MKP z prírastku zaťaženia $\Delta\mathbf{f}^{ext} = \mathbf{f}^{ext}_{n+1} - \mathbf{f}^{ext}_n$ dodá pre integračný bod prírastok celkovej deformácie $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ a všetky známe stavové veličiny učené pre čas t_n. Potom skúšobné hodnoty elastickej deformácie, akumulovanej hodnoty ekvivalentnej plastickej deformácie a napätia sú

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{e\,test}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^e_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,test}_{n+1} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_n \\ \boldsymbol{\sigma}^{test}_{n+1} &= \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^{e\,test}_{n+1} \end{aligned} \qquad (13.11)$$

Napätie $\boldsymbol{\sigma}^{test}_{n+1}$ možno ekvivalentne vyjadriť aj pomocou jeho deviátora a stredného napätia (kapitola 11)

$$\mathbf{s}^{test}_{n+1} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,test}_{d\,n+1}, \qquad \sigma^{test}_{m\,n+1} = K\varepsilon^{e\,test}_{v\,n+1} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma}^{test}_{n+1} = \mathbf{s}^{test}_{n+1} + \sigma^{test}_{m\,n+1}\boldsymbol{I} \qquad (13.12)$$

kde G je modul pružnosti v šmyku, K je objemový modul materiálu, $\boldsymbol{\varepsilon}^e_d$ je deviatorická časť tenzora pružnej deformácie, $\varepsilon^e_v = tr\left|\boldsymbol{\varepsilon}^e\right|$ je objemová pružná deformácia. Za skúšobnú hodnotu medze sklzu sa jednoducho zoberie jej hodnota na konci predchádzajúceho kroku

$$\bar{\sigma}^{test}_{k\,n+1} = \bar{\sigma}_k(\bar{\varepsilon}^p_n) = \bar{\sigma}_{k\,n} \qquad (13.13)$$

Nasleduje kontrola či skúšobná elastická napätosť leží vo vnútri alebo práve na hranici pružnej oblasti skúšobnej plochy plasticity

$$f(\sigma^{test}_{n+1}, \bar{\sigma}_{k\,n}) \le 0 \qquad (13.14)$$

Ak je táto podmienka splnená, potom zaťažovací krok v tomto bode vyvolal len pružné deformácie a skúšobné hodnoty predstavujú výsledné hodnoty pre čas t_{n+1}

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{test}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}^{test}_{n+1} \\ \bar{\varepsilon}^p_{n+1} &= \bar{\varepsilon}^{p\,test}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^p_n \\ \bar{\sigma}_{k\,n+1} &= \bar{\sigma}^{test}_{k\,n+1} = \bar{\sigma}_{k\,n} \end{aligned} \qquad (13.15)$$

Ak podmienka (13.14) nie je splnená, potom v zaťažovacom kroku v integračnom bode prvku dochádza k pružne-plastickej deformácii a výsledné hodnoty $\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^e_{n+1}$ a $\Delta\lambda$ pre čas t_{n+1} treba určiť z nelineárnych rovníc plastického korektora (13.8)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,test} - \Delta\lambda\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}$$
$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p} = \bar{\varepsilon}_{n}^{p} + \Delta\lambda \tag{13.16}$$

kde

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e}) = 2G\,dev[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e}] \tag{13.17}$$

a pri zaručení podmienky plasticity (kapitola 12)

$$\bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_k(\varepsilon_{n+1}^{p}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}} - \bar{\sigma}_k(\varepsilon_{n+1}^{p}) = 0 \tag{13.18}$$

Po vyriešení tejto sústavy rovníc sa tenzor plastickej deformácie upravuje už so známymi hodnotami $\Delta\lambda$ a $\mathbf{s}_{n+1}$ podľa vzťahu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n}^{p} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n}^{p} + \Delta\lambda\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \tag{13.19}$$

a pre napätie platí

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \sigma_{m\,n+1}\boldsymbol{I} \tag{13.20}$$

Systém nelineárnych rovníc (13.16) možno pre von Misesov materiálový model výrazne zjednodušiť. Pri nelineárnom spevňovaní možno ho zredukovať na jedinú nelineárnu rovnicu s jedinou neznámou $\Delta\lambda$ a pri lineárnom spevňovaní možno hľadané hodnoty v čase t_{n+1} dokonca určiť priamo z hodnôt skúšobného elastického kroku. Ako sme už uviedli, von Misesov vektor plastického tečenia

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \tag{13.21}$$

je čisto deviatorický, objemová zložka $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ sa v (13.20) pri algoritme nemení

$$\sigma_{m\,n+1} = \sigma_{m\,n+1}^{test} \tag{13.22}$$

a treba určiť len deviátor napätia, pre ktorý podľa Eulerovej metódy analogicky s (13.10) plati

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda\mathbf{D}^{e} : \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda 2G\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda 2G\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \tag{13.23}$$

a po úprave

$$\left(1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\Delta\lambda 2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}\right)\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test}$$

Pretože výraz v zátvorke je skalár, obe deviatorické napätia sú kolineárne

$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{test}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{test}\|}$$

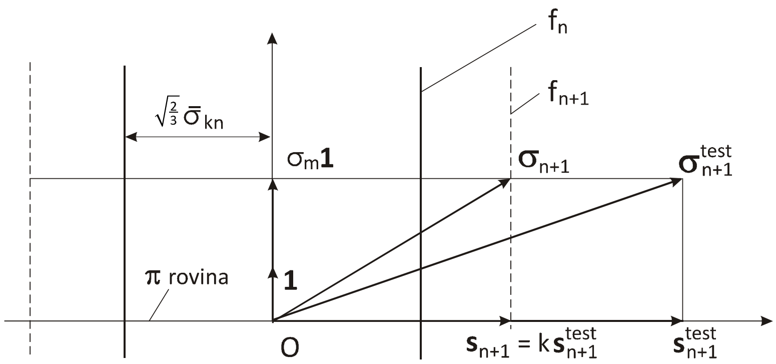
a keď to využijeme v (13.23) dostaneme jednoduchý vzťah pre výpočet deviátora napätia v čase t_{n+1}

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \sqrt{\tfrac{3}{2}} \frac{2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \Delta\lambda\right) \mathbf{s}_{n+1}^{test} = \left(1 - \frac{3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{test}} \Delta\lambda\right) \mathbf{s}_{n+1}^{test} = k\mathbf{s}_{n+1}^{test} \qquad (13.24)$$

kde

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{test} = \sqrt{\tfrac{3}{2} \mathbf{s}_{n+1}^{test} : \mathbf{s}_{n+1}^{test}}$$

Z (13.24) vyplýva, že deviatorické napätie $\mathbf{s}_{n+1}$ dostaneme na zmenenú kružnicu plasticity (v deviatorickej π- rovine) jednoduchým vynásobením napätia $\mathbf{s}_{n+1}^{test}$ známym číslom k < 0. Hovoríme potom o *radiálnom* návrate napäťového bodu na novú plochu plasticity (obr. 13.2).



Obr. 13.2 *Grafické znázornenie radiálneho návratu skúšobného napätia na von Misesovu plochu plasticity*

Zostáva už len určiť rovnicu pre jedinú neznámu $\Delta\lambda$ z von Misesovej podmienky plasticity (13.18), do ktorej keď dosadíme (13.24) a $(13.16)_1$ dostaneme

$$\bar{f}(\Delta\lambda) = \bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda - \bar{\sigma}_{k\,n+1}(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda) = 0 \qquad (13.25)$$

Rovnica je pri nelineárnom spevňovaní nelineárna a $\Delta\lambda$ sa z nej určuje Newton-Raphsonovou metódou. So známym plastickým násobkom potom už možno $\mathbf{s}_{n+1}$ určiť z (13.24) a ďalšie hľadané hodnoty pre čas t_{n+1} z rovníc

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1} + \sigma_{m\,n+1}^{test} \boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= [\mathbf{D}^e]^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{2G} + \frac{\varepsilon_{v\,n+1}^{e\,test}}{3} \boldsymbol{I} \\
\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\lambda \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda \sqrt{\tfrac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}
\end{aligned} \qquad (13.26)$$

Pri lineárnom izotropnom spevňovaní, t.j. pri bilineárnej aproximácii jednoosovej krivky materiálu (kapitola 11) platí (kapitola 12)

$$\bar{\sigma}_k^n = \sigma_k + H\bar{\varepsilon}_n^p \qquad (13.27)$$

kde σ_K je začiatočná medza sklzu nedeformovaného materiálu a H je konštantný spevňovací modul. V takomto prípade sa rovnica (13.25) sa zmení na

$$\overline{f}(\Delta\lambda) = \overline{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda - \left[\sigma_k + H(\overline{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda)\right] = 0 \tag{13.28}$$

z ktorej dostaneme plastický násobok priamo bez potreby Newton-Raphsonovej iterácie

$$\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{test}}{3G+H} = \frac{\overline{\sigma}_{n+1}^{test} - \overline{\sigma}_k^n}{3G+H} = \frac{\overline{\sigma}_{n+1}^{test} - (\sigma_k + H\varepsilon_n^p)}{3G+H} \tag{13.29}$$

Príklad 13.1

Pre všeobecný nezaťažený bod telesa je dané: E = 200000 MPa, E_t = 2000 MPa, σ_k = 200 MPa, μ = 0. Metódou radiálneho návratu treba určiť výslednú napätosť, keď v prvom zaťažovacom kroku vzrastie jeho deformácia o hlavné zložky ε_1 = 0,002, ε_2 = 0,001, ε_3 = - 0,002. Uvažuje sa von Misesov materiálový model s lineárnym izotropným spevňovaním.

Riešenie

Úlohu budeme riešiť v maticovom zápise. Pretože v bode pôsobia len tri hlavné zložky deformácie a napätia, zredukujeme vektory napätia a deformácie na tento rozmer a maticu elastických materiálových konštánt na

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu \\ \mu & 1-\mu & \mu \\ \mu & \mu & 1-\mu \end{bmatrix}$$

Skúšobné napätie potom je

$$\overline{\sigma}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^e\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = 20000\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}002 \\ 0{,}001 \\ -0.002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \text{ MPa} \\ 200 \text{ MPa} \\ -400 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

s ekvivalentným napätím

$$\overline{\sigma}_{n+1}^{test} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)} = 721{,}11 \text{ MPa}$$

a hodnotou zaťažovacej funkcie v tomto napäťovom bode

$$f_{n+1}^{test} = \overline{\sigma}_{n+1}^{test} - \sigma_k = 521{,}11 \text{ MPa} > 0$$

z čoho vyplýva, že bod sa dostal za plochu plasticity a napätie treba určiť radiálnym návratom na zmenenú plochu plasticity.

Stredné (hydrostatické) napätie skúšobného napätia je

$$\sigma_m^{test} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = 66{,}67 \text{ MPa}$$

a deviatorické napätie

$$\mathbf{s}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m \\ \sigma_2 - \sigma_m \\ \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333{,}33 \text{ MPa} \\ 133{,}33 \text{ MPa} \\ -466{,}67 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

Plastický násobok (v prvom kroku je totožný s ekvivalentnou plastickou deformáciou) podľa (13.29) je

$$\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{test}}{3G+H} = \frac{f_{n+1}^{test}}{3\dfrac{E}{2(1+\mu)} + \dfrac{EE_t}{E-E_t}} = 0{,}0017254$$

Hodnoty zložiek deviatorického napätia podľa (13.24)

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \frac{3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{test}}\Delta\lambda\right)\mathbf{s}_{n+1}^{test} = 0{,}28219\,\mathbf{s}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} 94{,}06 \text{ MPa} \\ 37{,}62 \text{ MPa} \\ \text{-}131{,}69 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

umožňujú už určiť výslednú napätosť

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{1n+1} \\ \sigma_{2n+1} \\ \sigma_{3n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} + \sigma_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160{,}73 \text{ MPa} \\ 1\text{o}4{,}29 \text{ MPa} \\ -65{,}02 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

Nová hodnota (následnej) medze sklzu teraz je

$$\bar{\sigma}_{kn+1} = \sigma_k + H\bar{\varepsilon}_p = \sigma_k + H\Delta\lambda = 203{,}49 \text{ MPa}$$

Nová hodnota ekvivalentného von Misesovho napätia

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)}\Big|_{n+1} = 203{,}49 \text{ MPa}$$

Kontrola hodnoty zaťažovacej funkcie (kontrola návratu napätia na zmenenú plochu plasticity)

$$f_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_{kn+1} = 203{,}49 - 203{,}49 = 0$$

Príklad 13.2

Príklad 13.1 riešte pomocou programu ANSYS

Riešenie

Úlohu vyriešime pomocou jediného priestorového pružne-plastického konečného prvku tvaru kocky s jednotkovými stranami. Hlavné pomerné deformácie zadáme ako posunutia v smere hrán prvku s rovnakými hodnotami ako sú tieto deformácie. Na jednotkových dĺžkach prvku tak vyvoláme udané deformácie a dostaneme hľadanú napätosť.

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = Priklad 13-2, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Solid Brick 20 node, 186, OK, Close;

3. Materiálové údaje

Lineárne:

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2e5, PRXY = 0.0, OK;

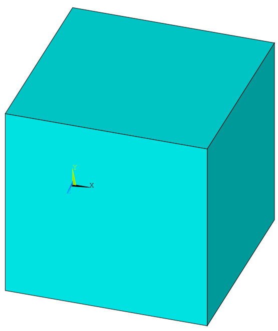
Nelineárne:

Nonlinear, Inelastic, Rate Independent, Isotropic Hardening Plasticity, Mises Plasticity, Bilinear, Yield Stress = 200, Tang Mod = 2000, OK, Material, Exit;

4. Vytvorenie jednotkovej kocky

Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Block>By Dimensions..., X2 = 1, Y2 = 1, Z2 = 1, OK;

Kliknite ikonu priestorového pohľadu na kocku (*Oblique View*)



5. Vytvorenie prvkov

Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Global, Set, SIZE = 1, OK, Shape = HEX, Mesh, Pick All;

6. Upevnenie modelu a zadanie posunutí

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Areas,

↑(Kliknite:) Ľavú stenu elementu, OK, Lab2 = UX, Apply,

↑ Spodnú stenu elementu, OK, Lab2 = UY, Apply,

↑ Zadnú stenu elementu, OK, Lab2 = UZ, Apply,

↑ Pravú stenu elementu, OK, Lab2 = UX, Value = 0.002, Apply,

↑ Hornú stenu elementu, OK, Lab2 = UY, Value = 0.001, Apply,

↑ Prednú stenu elementu, OK, Lab2 = UZ, Value = - 0.002, OK;

7. Riadiace údaje nelineárneho riešenia a výpočet

*Main Menu>Solution>Analysis Type>Sol'n Controls...*Time at end of loadstep = 1, Number of subst. = 1, OK;

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

8. Výpis zložiek napätia prvkov

Main Menu>General Postproc>List Results> Nodal Solution..., Stress, 1st Principal stress, OK;

```
PRINT S    NODAL SOLUTION PER NODE

  NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL   1

    NODE    S1          S2          S3           SINT         SEQV
       1   160.73      104.29     -65.019       225.75       203.49
       2   160.73      104.29     -65.019       225.75       203.49
       4   160.73      104.29     -65.019       225.75       203.49
       6   160.73      104.29     -65.019       225.75       203.49
       9   160.73      104.29     -65.019       225.75       203.49
      10   160.73      104.29     -65.019       225.75       203.49
      12   160.73      104.29     -65.019       225.75       203.49
      14   160.73      104.29     -65.019       225.75       203.49
```

9. Výpis stredného normálového napätia (HPRE) a ekvivalentnej plastickej deformácie (EPEQ)
Main Menu>General Postproc>List Results> Element Solution..., Stress, Plastic equivalent stress, OK;

```
 PRINT NL   ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT

  ELEMENT=       1        SOLID186
    NODE    SEPL        SRAT         HPRE         EPEQ         CREQ         PLWK
       2   0.0000      1.0000       66.667     0.17254E-02  0.0000      0.34809
       6   0.0000      1.0000       66.667     0.17254E-02  0.0000      0.34809
       4   0.0000      1.0000       66.667     0.17254E-02  0.0000      0.34809
       1   0.0000      1.0000       66.667     0.17254E-02  0.0000      0.34809
       9   0.0000      1.0000       66.667     0.17254E-02  0.0000      0.34809
      10   0.0000      1.0000       66.667     0.17254E-02  0.0000      0.34809
      12   0.0000      1.0000       66.667     0.17254E-02  0.0000      0.34809
      14   0.0000      1.0000       66.667     0.17254E-02  0.0000      0.34809
```

10. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy
Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Vypočítané výsledky súhlasia s analytickým riešením (Príklad 13.1).

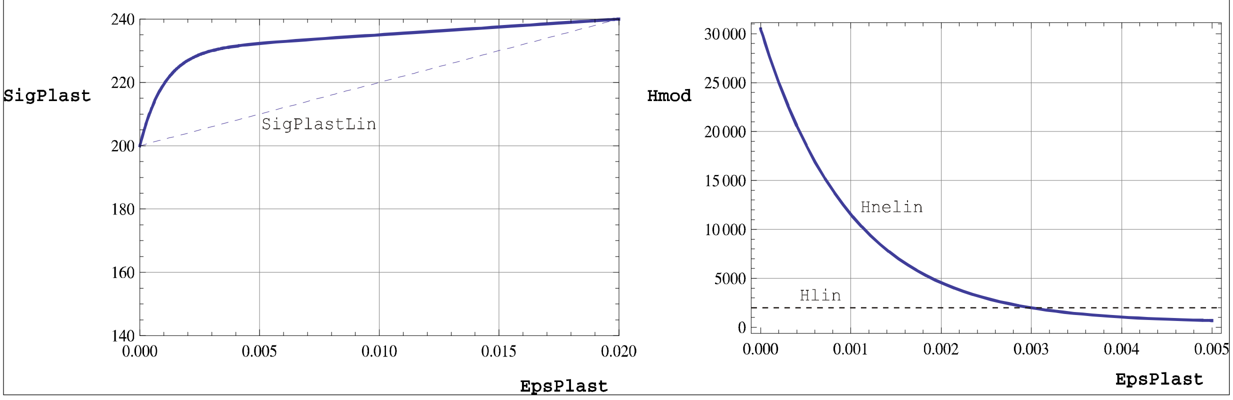
Elegantná metóda radiálneho návratu platí len pre von Misesovu zaťažovaciu funkciu a spolu s ostatnými univerziálnymi metódami pre úlohy, kde všetky normálové zložky napätia sú voľné *premenné*, t.j. pre všeobecnú priestorovú napätosť, rovinnú deformáciu a rotačne symetrickú úlohu. Dôležitý prípad pružne-plastickej úlohy pre *rovinnú napätosť*, kedy jedna z troch normálových zložiek napätia sa rovná nule, treba riešiť pomocou špeciálnej procedúry vytvorenej pre tento stav napätosti.

Nelineárne spevňovanie predstavuje v uvedenej procedúre len pomerne malú komplikáciu, pretože určenie $\Delta\lambda$ z nelineárnej rovnice (13.25) pomocou Newton-Raphsonovej metódy je jednoduché. Ukazeme si to na riešení úlohy s materiálom, ktorého spevňovaciu krivku možno aproximovať pomocou Voceho vzťahu (pozri napr. manuál ANSYSu)

$$\overline{\sigma}_k = \sigma_k + a\varepsilon^p + b(1 - e^{-c\varepsilon^p}) \qquad (13.30)$$

kde a, b, c sú materiálové konštanty a σ_k je začiatočná medza sklzu materiálu. Ak zvolíme $\sigma_k = 200$ MPa, a = 500 MPa, b = 30 MPa a c = 1000, potom jednoosová nelineárna spevňovacia krivka materiálu a nelineárny jednoosový materialový modul majú tvar znázornený v obr. 13.3. Do grafov sme zakreslili aj lineárny priebeh $\overline{\sigma}_k = H\overline{\varepsilon}^p$ s konštantnou hodnotou $H = 2020{,}2$ MPa, čo zodpovedá hodnotám $E = 200000$ MPa a $E_T = 2000$ MPa z príkladov 1 a 2 a môže to byť považované za lineárnu aproximáciu spevňovacej krivky. Tieto príklady totiž teraz zopakujeme s nelineárnymi hodnotami z obr. 13.3 a budeme môcť porovnať rozdiel vo výslednej napätosti.

```
Sigk = 200; Emod = 200 000; Hlin = 2020.2;
SigPlast = 200 + 500 * EpsPlast + 30 * (1 - Exp[-1000 * EpsPlast]);
SigLin = Sigk + Hlin * EpsPlast;
Hmod = D[SigPlast, EpsPlast];
g1 = Plot[SigPlast, {EpsPlast, 0, 0.02}, PlotRange → {{0, .02}, {140, 240}},
   PlotStyle → {Thickness[0.006]}];
g2 = Plot[SigLin, {EpsPlast, 0, 0.02},
   PlotStyle → {Dashed}];
Show[{g1, g2}, Frame -> True, GridLines -> Automatic]
Plot[Hmod, {EpsPlast, 0, 0.005}, Frame -> True,
 GridLines -> Automatic, PlotStyle → {Thickness[0.006]}]
```



Obr.13.3 *Nelineárna spevňovacia krivka, nelineárny plastický modul a ich lineárne aproximácie*

Príklad 13.3

Pre všeobecný nezaťažený bod telesa je dané: E = 200000 MPa, σ_k = 200 MPa, μ = 0. Metódou elastický prediktor-plastický korektor treba určiť výslednú napätosť, keď v prvom zaťažovacom kroku vzrastie jeho deformácia o hlavné zložky ε_1 = 0,002, ε_2 = 0,001, ε_3 = -0,002. Uvažuje sa von Misesov materiálový model s nelineárnym izotropným spevňovaním. Po dosiahnutí začiatočnej medze sklzu σ_k sa medza sklzu v závislosti od ekvivalentnej plastickej deformácie $\overline{\varepsilon}^p$ spevňuje podľa vzťahu (obr. 13.3)

$$\overline{\sigma}_k = 200 + 500\overline{\varepsilon}^p + 30(1 - e^{-1000\overline{\varepsilon}^p})$$

Riešenie

Úlohu budeme riešiť v maticovom zápise. Pretože v bode pôsobia len tri hlavné zložky deformácie a napätia, zredukujeme vektory napätia a deformácie na tento rozmer a maticu elastických materiálových konštánt na

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu \\ \mu & 1-\mu & \mu \\ \mu & \mu & 1-\mu \end{bmatrix}$$

Skúšobné napätie potom je

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^e \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = 20000\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}002 \\ 0{,}001 \\ -0.002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \text{ MPa} \\ 200 \text{ MPa} \\ -400 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

s ekvivalentným napätím

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{test} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)} = 721{,}11 \text{ MPa}$$

a hodnotou zaťažovacej funkcie v tomto napäťovom bode

$$f_{n+1}^{test} = \bar{\sigma}_{n+1}^{test} - \sigma_k = 521{,}11 \text{ MPa} > 0$$

z čoho vyplýva, že bod sa dostal za plochu plasticity a napätie treba určiť návratom na zmenenú plochu plasticity pomocou plastického korektora.

Stredné napätie skúšobného napätia je

$$\sigma_m^{test} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = 66{,}67 \text{ MPa}$$

a deviatorické skúšobné napätie

$$\mathbf{s}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m \\ \sigma_2 - \sigma_m \\ \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333{,}33 \text{ MPa} \\ 133{,}33 \text{ MPa} \\ -466{,}67 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

Plastický násobok (v prvom kroku je totožný s ekvivalentnou plastickou deformáciou $\Delta\lambda = \bar{\varepsilon}^p$) určíme z nelineárnej rovnice (13.25) pomocou Newton-Raphsonovej metódy (metódu a nižšie uvedený použitý program sme vysvetlili v [2])

Program vypočítal $\Delta\lambda$ = 0,0016534 a z toho $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda = 0 + \Delta\lambda = \Delta\lambda$ = 0,0016534 a ďalší postup je už opäť rovnaký ako v Príklade 13.1. Zložky deviatorického napätia sú

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \frac{3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{test}}\Delta\lambda\right)\mathbf{s}_{n+1}^{test} = 0{,}312144\,\mathbf{s}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} 104{,}05 \text{ MPa} \\ 41{,}62 \text{ MPa} \\ \text{-}145{,}67 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

a umožňujú už určiť výslednú napätosť

Výpočtový program (*Mathematika 5*)

```
NR[SigEkvTest_, LambdaZac_, imax_, TolDov_] :=
 Module[{},
  R[Lambda_] = -300 000 * Lambda - 200 - 500 * Lambda - 30 (1 - Exp[-1000 * Lambda]) + SigEkvTest;
  i = 0;
  Lambda0 = LambdaZac;
  Print[" Lambda0 = ", Lambda0, ", R0 = ", R[Lambda0]];
  Lambda1 = Lambda0;
  While[i < imax && TolDov < Abs[R[Lambda1]],
   Lambda0 = Lambda1;
   Lambda1 = Lambda0 - R[Lambda0] / R'[Lambda0];
   i = i + 1;
   Print[" i = ", i, ",   Lambda(i) = ", PaddedForm[Lambda1, {7, 7}],
        ", R(i) = ", PaddedForm [R[Lambda1], {4, 2}]];
  ];]

NR[721.11, 0, 7, 0.000001];

          Lambda0 = 0, R0 = 521.11
          i = 1,   Lambda(i) =  0.0015767, R(i) =  23.50
          i = 2,   Lambda(i) =  0.0016534, R(i) =   0.02
          i = 3,   Lambda(i) =  0.0016534, R(i) =   9.64 × 10^-9
```

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{1n+1} \\ \sigma_{2n+1} \\ \sigma_{3n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} + \sigma_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170{,}71\ \text{MPa} \\ 108{,}28\ \text{MPa} \\ -79{,}00\ \text{MPa} \end{bmatrix}$$

Nová hodnota (následnej) medze sklzu teraz je

$$\bar{\sigma}_{k\,n+1} = 200 + 500\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p} + 30(1 - e^{-1000\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p}}) = 225{,}08\ \text{MPa}$$

Nová hodnota ekvivalentného von Misesovho napätia

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)}\Big|_{n+1} = 225{,}08\ \text{MPa}$$

Kontrola hodnoty zaťažovacej funkcie (kontrola návratu napätia na zmenenú plochu plasticity)

$$f_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_{k\,n+1} = 225{,}08 - 225{,}08 = 0$$

Príklad 13.4

Predchádzajúci príklad riešte pomocou programu ANSYS

Riešenie

Úlohu vyriešime pomocou jediného priestorového pružne-plastického konečného prvku tvaru kocky s jednotkovými stranami. Hlavné pomerné deformácie zadáme ako posunutia v smere hrán prvku s rovnakými hodnotami ako sú tieto deformácie. Na jednotkových dĺžkach prvku tak vyvoláme udané deformácie a dostaneme hľadanú napätosť.

Úloha sa v interaktívnom móde programu zadáva a počíta rovnakým postupom ako v Príklade 13.2, treba však zadať nelineárnu spevňovaciu krivku. Jediná zmena je takto v príkazoch pod č. 3, ktoré treba zadať takto:

3. Materiálové údaje

Lineárne:

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, *Linear, Elastic, Isotropic,* EX = 2e5, PRXY = 0.0, *Nelineárne:*

Nonlinear, Inelastic, Rate Independent, *Isotropic Hardening Plasticity, Mises Plasticity*, *Nonlinear*, Sig0 = 200, R0 = 500, Rinf = 30, b = 1000, OK, Material, Exit;

V krokoch 8 a 9 dostaneme výsledky, ktoré súhlasia s analytickým riešením (Príklad 13.3).

8. Výpis zložiek napätia prvkov

Main Menu>General Postproc>List Results> Nodal Solution..., Stress, 1st Principal stress, OK;

```
 NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL   1

   NODE     S1          S2          S3           SINT         SEQV
      1   170.71      108.28     -78.997       249.71       225.08
      2   170.71      108.28     -78.997       249.71       225.08
      4   170.71      108.28     -78.997       249.71       225.08
      6   170.71      108.28     -78.997       249.71       225.08
      9   170.71      108.28     -78.997       249.71       225.08
     10   170.71      108.28     -78.997       249.71       225.08
     12   170.71      108.28     -78.997       249.71       225.08
     14   170.71      108.28     -78.997       249.71       225.08
```

9. Výpis stredného normálového napätia (HPRE) a ekvivalentnej plastickej deformácie (EPEQ)

Main Menu>General Postproc>List Results> Element Solution..., Stress, Plastic equivalent stress, OK;

```
PRINT NL   ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT

 ELEMENT=       1         SOLID186
   NODE     SEPL        SRAT        HPRE        EPEQ         CREQ         PLWK
      2   0.0000      1.0000      66.667     0.16534E-02  0.0000      0.35142
      6   0.0000      1.0000      66.667     0.16534E-02  0.0000      0.35142
      4   0.0000      1.0000      66.667     0.16534E-02  0.0000      0.35142
      1   0.0000      1.0000      66.667     0.16534E-02  0.0000      0.35142
      9   0.0000      1.0000      66.667     0.16534E-02  0.0000      0.35142
     10   0.0000      1.0000      66.667     0.16534E-02  0.0000      0.35142
     12   0.0000      1.0000      66.667     0.16534E-02  0.0000      0.35142
     14   0.0000      1.0000      66.667     0.16534E-02  0.0000      0.35142
```

V programoch MKP sa na analýzu pružne-plastických úloh s nelineárnou spevňovacou krivkou materiálu často používa aj multilineárna aproximácia tejto krivky (pozri napr. manuál programu ANSYS, HYPLAS a i.). V takomto prípade je na výpočet $\Delta\lambda$ tiež potrebná Newton-

Raphsonova iterácia, pretože zaťažovací krok môže byť dostatočne veľký na to, aby v sebe zahrňoval prechod cez viaceré multilineárne úseky spevňovacej čiary so skokovou zmenou plastického modulu *H*.

14 Pružne-plastická úloha rovinnej napätosti

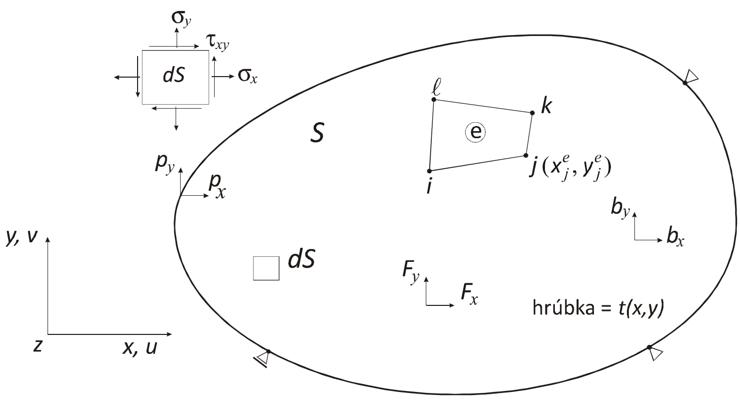
V kapitole 11 sme uviedli základné postupy riešenia pružne-plastickej úlohy platné pre všeobecnú trojrozmernú napätosť, rovinnú deformáciu a rotačne symetrickú úlohu. Sú to úlohy pri ktorých všetky tri normálové zložky napätia sú voľné premenné. Pri rovinnej napätosti (pozri napr. [1]) však zložka kolmá na stredovú rovinu telesa je rovná nule (pričom ale zložka deviátora napätia v tomto smere nie je nulová) a uvedené vzťahy a postupy nie je možné použiť bez určitej modifikácie. Vzhľadom na častý výskyt tejto úlohy v praxi sa jej budeme venovať v tejto kapitole.

14.1 Rovinná napätosť pri elastickom zaťažovaní

Uvažujme zaťažené teleso v rovnovážnom stave, ktorého rovina (*x*,*y*) je rovinou symetrie (stredovou plochou *S*) (obr. 14.1). Všetky vonkajšie zaťaženia (vrátane reakcií) nech sú symetricky rozdelené po relatívne malej hrúbke telesa *t*(*x*,*y*); ich výslednice teda pôsobia v rovine *S* a spojité zaťaženia $\mathbf{p}(x,y)$ a $\mathbf{b}(x,y)$ sú na premennej *z* nezávislé. Za týchto predpokladov stačí pre riešenie pevnostnej úlohy telesa uvažovať len funkcie posunutia stredovej plochy telesa

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \tag{14.1}$$

pretože všetky deformačné i napäťové veličiny telesa možno z týchto funkcií vypočítať.



Obr. 14.1 *Stredová plocha telesa a rovinný konečný prvok*

Vo vektore zložiek napätia sú nenulové len zložky, ktoré ležia v rovine (*x*,*y*), a preto hovoríme, že teleso (stena, membrána) je zaťažená rovinnou napätosťou

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \tag{14.2}$$

Vo vektore pomernej deformácie uvažujeme len tri zložky (materiál reaguje na rovinnú napätosť priečnou deformáciou ε_z, tú ale možno určiť z deformácií v stredovej rovine)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^T \tag{14.3}$$

Teraz už možno využiť postup podrobne uvedený v [1] pre všeobecné priestorové teleso, keď sa zavedú zjednodušenia platné pre rovinnú napätosť

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{14.4}$$

Pomerné deformácie v rovine (*x*,*y*) potom sú

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.5}$$

Z fyzikálnych rovníc dostávame

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right), \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_x + \sigma_y\right), \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{14.6}$$

a z podmienky $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \tag{14.7}$$

Invertovaním rovníc (14.6) dostaneme vzťahy pre výpočet napätí zo zložiek deformácie

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right); \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y\right); \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{14.8}$$

Pomernú deformáciu v smere osi z je teraz už možné vyjadriť pomocou pretvorení v rovine (*x*,*y*), keď zo (14.8) dosadíme do (14.7)

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{1-\mu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) \tag{14.9}$$

V maticovom tvare možno teda fyzikálne (konštitutívne) vzťahy zapísať v tvare

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} \tag{14.10}$$

kde matica materiálových konštánt je

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \tag{14.11}$$

14.2 Von Misesov pružne-plastický model rovinnej napätosti

Pri riešení pružne-plastickej úlohy pre teleso zaťažené rovinnou napätosťou možno opäť uvažovať len tie deformačné a napäťové zložky, ktoré ležia v stredovej rovine, pretože ε_z sa aj v tomto prípade dá vyjadriť pomocou týchto zložiek. Využíva sa na to vzťah (14.9), kde sa pri vyjadrení ε_z^p uplatňuje nestlačiteľnosť materiálu pri plastickom tečení ($\mu = 0{,}5$)

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p = -\left[\frac{E}{1-\mu}\left(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e\right) + \varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p\right] \tag{14.12}$$

Von Misesovo ekvivalentné napätie (kapitola 12) $\bar{\sigma}$ potrebné do podmienky plasticity

$$f = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_k(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \tag{14.13}$$

teraz je

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \tag{14.14}$$

a vektor plastického tečenia

$$\mathbf{f} = \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} = \frac{1}{2\bar{\sigma}}\begin{Bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_x - \sigma_y \\ 6\tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{14.15}$$

14.3 Určenie napätia metódou elastický prediktor/projekcia na najbližší bod

Skúšobné napätie sa určí z redukovaných rovníc

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \tau_{nxy} \end{bmatrix} + \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D}^e\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{14.16}$$

a všeobecné rovnice *spätnej projekcie na najbližší bod* spevnenej plochy plasticity (kapitola 13) potom sú

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda\mathbf{D}^e\mathbf{f}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{bmatrix} - \Delta\lambda\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}\frac{1}{2\bar{\sigma}}\begin{Bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_x - \sigma_y \\ 6\tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{14.17}$$

Ich rozpísaním a úpravou dostávame

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{\sigma_{0x} + \sigma_{0y}}{1 + K\Delta\bar{\lambda}} \\ \sigma_x - \sigma_y &= \frac{\sigma_{0x} - \sigma_{0y}}{1 + 3G\Delta\bar{\lambda}} \\ \tau_{xy} &= \frac{\tau_{0xy}}{1 + 3G\Delta\bar{\lambda}} \end{aligned} \tag{14.18}$$

kde

$$K = \frac{E}{2(1-\mu)}, \qquad \Delta\bar{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}}$$

Neznámy skalárny násobok $\Delta\bar{\lambda}$ musí mať takú hodnotu, aby bola splnená podmienka konzistencie

$$f_{n+1}\left(\Delta\bar{\lambda}\right) = \bar{\sigma}_{n+1}\left(\Delta\bar{\lambda}\right) - \bar{\sigma}_k\left(\Delta\bar{\lambda}\right) = 0 \tag{14.19}$$

kde

$$\bar{\sigma}_k\left(\Delta\bar{\lambda}\right) = \sigma_k + H\bar{\varepsilon}_p = \sigma_k + H\Delta\lambda = \sigma_k + H\bar{\sigma}_{n+1}\Delta\bar{\lambda} \tag{14.20}$$

Vyjadrenie vzťahov na iteračné určenie $\Delta\bar{\lambda}$ je jednoduchšie pri použití kvadrátu tejto podmienky

$$q\left(\Delta\bar{\lambda}\right)=f_{n+1}^{2}\left(\Delta\bar{\lambda}\right)=\bar{\sigma}_{n+1}^{2}\left(\Delta\bar{\lambda}\right)-\bar{\sigma}_{k}^{2}\left(\Delta\bar{\lambda}\right)=0 \qquad (14.21)$$

Umocnením a úpravou ekvivalentného napätia (14.14) dostávame

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{2}=\frac{1}{4}\left[\left(\sigma_x+\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+12\tau_{xy}^2\right] \qquad (14.22)$$

a po dosadení z (14.18)

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{2}=\frac{\left(\sigma_{0x}+\sigma_{0y}\right)^2}{4\left(1+K\Delta\bar{\lambda}\right)^2}+\frac{3\left(\sigma_{0x}-\sigma_{0y}\right)^2+12\tau_{0xy}^2}{4\left(1+3G\Delta\bar{\lambda}\right)^2} \qquad (14.23)$$

Pomocná funkcia q (14.21) potom je

$$q\left(\Delta\bar{\lambda}\right)=\frac{\left(\sigma_{0x}+\sigma_{0y}\right)^2}{4\left(1+K\Delta\bar{\lambda}\right)^2}+\frac{3\left(\sigma_{0x}-\sigma_{0y}\right)^2+12\tau_{0xy}^2}{4\left(1+3G\Delta\bar{\lambda}\right)^2}-\bar{\sigma}_{k}^{2}\left(\Delta\bar{\lambda}\right)=0 \qquad (14.24)$$

Z nelineárnej rovnice (14.24), čo je vlastne upravená podmienka konzistencie, sa skalárna hodnota $\Delta\bar{\lambda}$ vyjadrí pomocou N-R iterácie (pozri kapitolu 2 v [2]). Po rozklade funkcie q v okolí $\Delta\bar{\lambda}$ do skráteného Taylorovho radu, pre iteračný vzťah platí

$$\Delta\bar{\lambda}_{k+1}=\Delta\bar{\lambda}_{k}-\frac{q\left(\Delta\bar{\lambda}_k\right)}{q'\left(\Delta\bar{\lambda}_k\right)} \qquad (14.25)$$

kde sme q' označili deriváciu funkcie q podľa $\Delta\bar{\lambda}$, pre ktorú podľa (14.24) a (14.20) dostávame

$$q'\left(\Delta\bar{\lambda}\right)=\frac{\partial q}{\partial\Delta\bar{\lambda}}=2\bar{\sigma}_{n+1}\frac{\partial\bar{\sigma}_{n+1}}{\partial\Delta\bar{\lambda}}-2\bar{\sigma}_{k}\frac{\partial\bar{\sigma}_{k}}{\partial\Delta\bar{\lambda}}=2\bar{\sigma}_{n+1}\frac{\partial\bar{\sigma}_{n+1}}{\partial\Delta\bar{\lambda}}-2H\left(\sigma_k+H\bar{\sigma}_{n+1}\Delta\bar{\lambda}\right)\left(\bar{\sigma}_{n+1}+\Delta\bar{\lambda}\frac{\partial\bar{\sigma}_{n+1}}{\partial\Delta\bar{\lambda}}\right) \qquad (14.26)$$

Zo (14.23) po odmocnení a derivovaní podľa $\Delta\bar{\lambda}$ získame posledný potrebný výraz pre iteračnú procedúru

$$\frac{\partial q}{\partial\Delta\bar{\lambda}}=-\frac{1}{\bar{\sigma}_{n+1}}\left(\frac{K\left(\sigma_{0x}+\sigma_{0y}\right)^2}{4\left(1+K\Delta\bar{\lambda}\right)^3}+\frac{3G\left[\left(\sigma_{0x}+\sigma_{0y}\right)^2+12\tau_{0xy}^2\right]}{4\left(1+3G\Delta\bar{\lambda}\right)^3}\right) \qquad (14.27)$$

Výpočet $\Delta\bar{\lambda}$ a výsledného napätia $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ si vysvetlíme na príklade (číselné výsledky vypočítal pomocný program uvedený na obr. 2).

Príklad 14.1

Teleso zaťažované rovinnou napätosťou je vyrobené z oceľového materiálu, ktorého vlastnosti pri pružne-plastickom zaťažovaní aproximuje von Misesova zaťažovacia funkcia a lineárne spevňovanie. Pre vyšetrovanú materiálovú časticu telesa, ktorej predchádzajúci stav je bez napätia, treba z explicitných vzťahov metódy *elastický predictor/projekcia na najbližší bod* určiť výsledné hodnoty zložiek napätia $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, keď ju zdeformujeme pomernými deformáciami

$\varepsilon_x = 0{,}002$ a $\varepsilon_y = -0{,}001$ a $\gamma_{xy} = 0{,}002$. Dané je E = 200000 MPa, σ_k = 200 MPa, $E_t = 100000$ MPa, μ = 0,3. Požadovaná presnosť nech je $f_{n+1} = \overline{\sigma}_{n+1} - \overline{\sigma}_k < 0{,}001$ MPa.

Riešenie

Skúšobné napätie podľa (14.16) je

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 373{,}6 \\ -87{,}9 \\ 153{,}8 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Kontrola podmienky plasticity

$$\overline{\sigma}_0 = \sqrt{\sigma_{0x}{}^2 + \sigma_{0y}{}^2 - \sigma_{0x}\sigma_{0y} + 3\tau_{0xy}^2} = \sqrt{373{,}6^2 + (-87{,}9)^2 - 373{,}6(-87{,}9) + 3 \cdot 153{,}8^2} =$$
$$= 501{,}1 \text{ MPa} > \sigma_k = 200 \text{ MPa}$$

Pretože ekvivalentné napätie je väčšie ako medza sklzu materiálu, vo vyšetrovanom bode dôjde k nelineárnej pružne-plastickej deformácii. Výsledné napätie v takomto prípade treba určiť z uvedených vzťahov spätnej integrácie platných pre rovinnú napätosť.

Začiatočné hodnoty pre výpočet napätia pri pružne-plastickom zaťažovaní sú $\Delta\overline{\lambda}_0 = 0$ a $\overline{\sigma}_{k0} = \sigma_k = 200$. Potom podľa (14.23) až (14.27) iteračný výpočet vykonal program (vzťahy neobsahujú matice, a preto sme zvolili program *Mathematica 5*) uvedený na obr. 14.2 a výsledky sú:

Zložky výsledného napätia vo vyšetrovanom bode telesa:

$$\sigma_x = 266{,}0 \text{ MPa}$$
$$\sigma_y = -\,45{,}8 \text{ MPa}$$
$$\tau_{xy} = 103{,}9 \text{ MPa}$$

Výsledná (spevnená) medza sklzu materiálu:

$$\overline{\sigma}_{kn+1} = 342{,}7 \text{ MPa}$$

Výsledná ekvivalentná plastická deformácia:

$$\overline{\varepsilon}_p = 7{,}135\ 10^{-4}$$

Príklad 14.2

Riešte predchádzajúci príklad pomocou programu ANSYS.

Riešenie

Materiálovú časticu telesa môžeme nahradiť jediným konečným prvkom rovinnej napätosti s jednotkovou hrúbkou, ktorý bude mať udané materiálové vlastnosti. Problém so zadaním skosu γ_{xy} obídeme tak, že hrany prvku umiestnime do smeru hlavných pomerných pretvorení ε_1 a ε_2 (v týchto rezoch je γ nulové) a ich veľkosť vypočítame zo vzťahu

$$\varepsilon_{1,2}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right)^2+\left(\gamma_{xy}\right)^2}=\frac{0{,}002-0{,}001}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(0{,}002+0{,}001\right)^2+\left(0{,}002\right)^2}=$$
$$=0{,}0005\pm0{,}0018027\quad\rightarrow\quad\varepsilon_1=0{,}0023027;\quad\varepsilon_2=-0{,}0013027$$

a pre smer ε_1 platí

$$tg2\varphi=\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}=\frac{0{,}002}{0{,}002+0{,}001}=\frac{2}{3}\quad\rightarrow\quad\varphi=16{,}845°$$

Teraz už možno úlohu úlohu v prostredí programu ANSYS realizovať týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = RovNapatost1, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add..., Solid Quad 8 node 183, OK, Close;

3. Materiálové údaje
Lineárne
Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2E5, PRXY = 0.3, OK,
Nelineárne
Nonlinear, Inelastic, Rate Independent, Isotropic Hardening Plasticity, Mises Plasticity, Bilinear, Yield Strss = 200, Tang Mod = 1E5, OK, Material, Exit;

4. Vytvorenie bodov natočenej plochy prvku (číslovanie je automatické)
Utility Menu>Work Plane>Offset WP by Increments..., Degrees = 16.845, 0, 0, OK;
Utility Menu>Work Plane>Local Coordinate Systems>Create Local CS>At WP Origin..., OK;
Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS: X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1, Y = 0, Apply,
X = 1, Y = 1, Apply,
X = 0, Y = 1, OK;

5. Vytvorenie plochy prvku
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>Trough KPs: ↑KP1,↑KP2,↑KP3,↑KP4, OK;

6. Vytvorenie prvku
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Lines, Set: Pick All, NDIV = 1, OK;
(Preprocessor>Meshing>Mesh Tool): Mesh, Pick All, Close;

7. Upevnenie prvku v smere jeho hrán (v smere hlavných predĺžení) a zadanie ε_1 a ε_2
Preprocessor>Modeling>Move/Modify>Rotate Node CS>To Active CS ↑, Pick All;
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes ↑
P: 1, 8, 6, OK, UX, Value = 0, Apply,
P: 1, 3, 2, OK, UY, Value = 0, Apply,
P: 2, 5, 4, OK, UX, Value = 0.0023027, Apply,
P: 6, 7, 4, OK, UY, Value = - 0.0013027, OK;

```
(* Backward-Euler, Rovinna napätosť-explicitne *)
Off[General::spell,General::spell1]

(* Vstupne hodnoty *)
EE=200000; mi=0.3; Sigk0=200; G=EE/(2+2*mi); Et=100000; H=EE*Et/(EE-Et);

(* Štartovací bod *)
sxn=0;
syn=0;
sxyn=0;

(* Prírastok deformácie *)
EpsX=0.002;
EpsY=-0.001;
EpsXY=0.002;

(* Skušobné elastické napätie *)
K=EE/2/(1-mi);
K1=EE/(1-mi^2);
sx0=sxn+K1*(EpsX+mi*EpsY);
sy0=syn+K1*(EpsY+mi*EpsX);
sxy0=sxyn+K1/2*(1-mi)*EpsXY;
(* Východzie hodnoty iterácie *)
La=0;
Sigk=Sigk0;
Sekv=0;
c1=(sx0+sy0)^2;
c2=3*(sx0-sy0)^2+12*sxy0^2;

(* Iteračná oprava *)
While [Abs[Sigk-Sekv]>0.001,
Sekv2=0.25*(c1/(1+K*La)^2+c2/(1+3*La*G)^2);
q=Sekv2-Sigk^2;
Sekv=Sqrt[Sekv2];
dSekv=-0.25/(Sekv)*(K*c1/(1+K*La)^3+3*G*c2/(1+3*G*La)^3);
(*dSekv=-1/(Sekv)*(K*c1/(1+K*La)^3+3*G*c2/(1+3*G*La)^3);*)
dq=2*Sekv*dSekv-2*(Sigk0+H*Sekv*La)*(H*Sekv+La*H*dSekv);
La=La-q/dq;
Sigk=Sigk0+H*La*Sekv];

(* Vyčíslenie napätia *)
A1=1+0.5*La*EE/(1-mi);
A2=1+3*La*G;
sps=(sx0+sy0)/A1;
sms=(sx0-sy0)/A2;
SXdef=(sps+sms)/2;
SYdef=(sps-sms)/2;
SXYdef=sxy0/A2;

(* Hodnota novej medze sklzu *)
SigkDef=Sigk;

(* Hodnota ekvivalentnej plastickej deformácie *)
EplastPruh=La*Sekv;

Print["Výsledky"/TableForm[{{"SX =", SXdef,"MPa"},
                 {"SY =", SYdef,"MPa"},
                 {"SXY =", SXYdef,"MPa"},
                 {"SigK =", SigkDef,"MPa"},
                 {"EpsPlast =", EplastPruh}
                 }]]
```

Výsledky

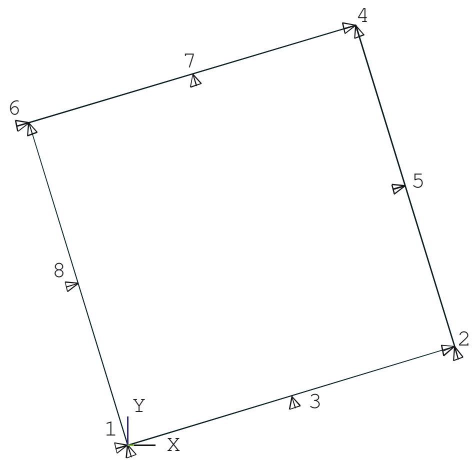
SX =	265.985	MPa
SY =	-45.7687	MPa
SXY =	103.918	MPa
SigK =	342.7	MPa
EpsPlast =	0.000713502	

Obr. 14.2 *Program na určenie výsledného napätia rovinnej napätosti pomocou spätnej integrácie* (*Mathematika 5*)

8. Riadiace údaje nelineárneho riešenia a výpočet

Main Menu>Solution>Analysis Type>Sol'n Controls...,Time at end of loadstep = 1, Number of substeps = 1, OK;

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;



9. Výpis zložiek napätia prvku

Main Menu>General Postproc>List Results> Nodal Solution..., Stress, X-Component of stress, OK;

```
PRINT S    NODAL SOLUTION PER NODE

 THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES
```

NODE	SX	SY	SZ	SXY	SYZ	SXZ
1	265.99	-45.766	0.0000	103.92	0.0000	0.0000
2	265.99	-45.766	0.0000	103.92	0.0000	0.0000
4	265.99	-45.766	0.0000	103.92	0.0000	0.0000
6	265.99	-45.766	0.0000	103.92	0.0000	0.0000

10. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

*Ansys Toolbar>Quit>*Save Geom+Loads, OK;

Dostali sme rovnaké výsledky ako z analytických vzťahov v predchádzajúcom príklade, čo potvrdzuje ich správnosť.

14.4 Maticová formulácia pružne-plastických rovníc rovinnej napätosti

Uvedené analytické určenie napätosti pri pružne-plastickom zaťažovacom kroku je síce elegantné a jednoduché, pokiaľ nás však zaujíma tvorba programu MKP pre riešenie pružne-plastických úloh rovinnej napätosti, je potrebné vytvoriť základné vzťahy a uložiť potrebné hodnoty pre ďalší zaťažovací krok v maticovom tvare. V takom prípade sa stavové veličiny sa zapisujú do sĺpcových matíc (vektorov)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varepsilon}=\left[\varepsilon_x,\varepsilon_y,2\varepsilon_{xy}\right]^T,\quad \boldsymbol{\varepsilon}^e=\left[\varepsilon_x^e,\varepsilon_y^e,2\varepsilon_x^e\right]^T,\quad \boldsymbol{\varepsilon}^p=\left[\varepsilon_x^p,\varepsilon_y^p,2\varepsilon_x^p\right]^T\\ &\boldsymbol{\sigma}=\left[\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\right]^T,\quad \mathbf{s}=\left[s_x,s_y,s_{xy}\right]^T\end{aligned} \tag{14.28}$$

kde sa v deformačných veličinách uvažujú tenzorové zložky šmykových skosov ($2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$) a pre zložky deviatorického napätia pri $\sigma_z = 0$ platí

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} \tag{14.29}$$

kde

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{14.30}$$

Von Misesovo ekvivalentné napätie (14.14) sa teraz dá zapísať v tvare

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s}^T\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}} \tag{14.31}$$

Podmienka plasticity (14.13) potom je

$$f = \sqrt{\tfrac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\sigma}_k(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \tag{14.32}$$

a jej výhodnejší kvadratický tvar

$$f_2 = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} - \tfrac{1}{3}\bar{\sigma}_k^2(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \tag{14.33}$$

Vektor prírastku plastickej deformácie najjednoduchšie dostaneme využitím maticového vzorca pre derivovanie skalárnej kvadratickej formy

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda\frac{\partial f_2}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \Delta\lambda\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\Delta\lambda\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{P}^T + \mathbf{P}) = \Delta\lambda\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{P}^T = \Delta\lambda\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} \tag{14.34}$$

kde, ako vidieť, pre vektor plasticity v tomto prípade sme dostali

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} \tag{14.35}$$

Pre prírastok ekvivalentnej plastickej deformácie máme

$$\Delta\bar{\varepsilon}^p = \Delta\lambda\sqrt{\tfrac{2}{3}\mathbf{s}^T\boldsymbol{\sigma}} = \Delta\lambda\sqrt{\tfrac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}} \tag{14.36}$$

V prírastkovom kroku z času t_n do času t_{n+1} potom pre hodnoty elastického prediktora platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,test} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} &= \mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,test} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\,test} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \end{aligned} \tag{14.37}$$

kde $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ je pre zaťažovací krok známy lineárne určený prírastok deformácie z prírastku vonkajšieho zaťaženia. Pomocou týchto hodnôt sa kontroluje podmienka plasticity (14.33). Vypočíta sa

$$f_2^{test} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test})^T\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} - \tfrac{1}{3}\bar{\sigma}_k^2(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{test}) \tag{14.38}$$

Ak je $f_2^{test} \le 0$, testovacie hodnoty sú platné pre tento (elastický) zaťažovací krok, v opačnom prípade treba tieto hodnoty opraviť plastickým korektorom t.j. použiť vzťahy, ktoré testovaciu napätosť vrátia na (zmenenú) čiaru plasticity.

14.5 Rovnice návratu napäťového bodu na čiaru plasticity (plastický korektor)

Prvá rovnica, ktorú musí hľadané napätie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ v prípade pružne-plastického kroku spĺňať, je podmienka konzistencie v čase t_{n+1} (14.33)

$$f_2 = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \tfrac{1}{3}\overline{\sigma}_k^2(\overline{\varepsilon}_{n+1}) = 0 \tag{14.39}$$

Ekvivalentná plastická deformácia sa v zaťažujúcom kroku zmení o prírastok (14.36) na

$$\overline{\varepsilon}_{n+1}^p = \overline{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda\sqrt{\tfrac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \tag{14.40}$$

a poslednou v tejto sústave nelineárnych rovníc je implicitný vzťah spätnej Eulerovej metódy (kapitola 13) pre výpočet elastickej deformácie

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etest} - \Delta\lambda \mathbf{f}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etest} - \Delta\lambda \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{14.41}$$

Po vhodnej úprave možno sústavu nelineárnych rovníc (14.39) až (14.41) previesť na jedinú nelineárnu rovnicu s jedinou neznámou $\Delta\lambda$. Vyjdeme z elastických konštitutívnych rovníc

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etest} - \Delta\lambda \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \Delta\lambda \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \tag{14.42}$$

Dosadením a úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P})\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P})^{-1}\mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (\mathbf{D}^{e-1} + \Delta\lambda \mathbf{P})^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)
\end{aligned} \tag{14.43}$$

Po určení $\Delta\lambda$ bude podľa (14.43) možné určovať napätie zo vzťahu

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \tag{14.44}$$

alebo, pretože $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$, podľa

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{D}^{e-1}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} \tag{14.45}$$

kde

$$\hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}^{e-1} + \Delta\lambda \mathbf{P})^{-1} \tag{14.46}$$

14.6 Určenie plastického násobku z podmienky konzistencie

Vo vzťahoch pre výpočet napätia z predchádzajúceho odstavca vystupuje už len jedna neznáma, plastický násobok $\Delta\lambda$. Jeho veľkosť musí byť taká, aby bola splnená podmienka konzistencie (14.39). Priame dosadenie maticového vzťahu pre $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ do tejto podmienky vedie na nepríjemnú maticovú formu nelineárnej rovnice, a preto sa využíva a do programov MKP implementuje jej jednoduchší explicitný tvar, ktorého odvodenie si teraz ukážeme.

Pri izotropnom elastickom materiáli, čo je náš prípad, majú matice $\mathbf{D}^e$ a $\mathbf{P}$ rovnaké vlastné vektory a pomocou ich ortogonálnej transformácie možno ich v podmienke konzistencie previesť na diagonálne a z toho dostať explicitný tvar rovnice na výpočet $\Delta\lambda$. Transformačné vzťahy sú

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}_P\mathbf{Q}^T; \quad \mathbf{D}^e = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}_D\mathbf{Q}^T; \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \tag{14.47}$$

kde

$$\boldsymbol{\Lambda}_P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Lambda}_D = \begin{bmatrix} E/(1\text{-}\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}; \tag{14.48}$$

a $\mathbf{D}^e$ udáva rovnica (14.11).

Teraz zo (14.43) dostávame

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\mathbf{I} + \Delta\lambda\mathbf{D}^e\mathbf{P})^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} \tag{14.49}$$

kde

$$\boldsymbol{\Gamma} = \left(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda}_D\boldsymbol{\Lambda}_P\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(1 + \dfrac{\Delta\lambda E}{3(1-\mu)}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + 2\Delta\lambda G\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + 2\Delta\lambda G\right)^{-1} \end{bmatrix} \tag{14.50}$$

Dosadením (14.49) do podmienky konzistencie (14.39) dostaneme jej zjednodušený explicitný tvar

$$\tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test}\right)^T \mathbf{Q}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} - \tfrac{1}{3}\overline{\sigma}_k^2(\overline{\varepsilon}_{n+1}^p) = \tfrac{1}{2}\phi^2 - \tfrac{1}{3}S^2 = 0 \tag{14.51}$$

kde po vynásobení matíc je

$$\phi^2 = \frac{A}{\left(1 + a\Delta\lambda\right)^2} + \frac{B}{\left(1 + b\Delta\lambda\right)^2} + \frac{C}{\left(1 + b\Delta\lambda\right)^2} \tag{14.52}$$

s hodnotami

$$A = \tfrac{1}{6}\left(\sigma_x^{test} + \sigma_y^{test}\right)^2; \quad B = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x^{test} - \sigma_y^{test}\right)^2; \quad C = 2\left(\tau_{xy}^{test}\right)^2$$
$$a = \tfrac{1}{3}\Delta\lambda E / \left(1 - \mu\right); \quad b = 2G$$

Pre medzu sklzu na konci zaťažujúceho kroku platí

$$\bar{\sigma}_k^2(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = S^2 = \sigma_k + H\left(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda\sqrt{\tfrac{2}{3}}\phi\right) \tag{14.53}$$

Z nelineárnej rovnice (14.51) treba teraz ešte vypočítať plastický násobok $\Delta\lambda$.

14.7 Výpočet plastického násobku pomocou Newton-Raphsonovej metódy

Hľadáme takú hodnotu plastického násobku $\Delta\lambda$, pri ktorom je rovnica (14.51) splnená s dostatočnou presnosťou. Inak povedané pri Newton-Raphsonovej metóde (pozri napr. [2]) sa hodnota $\Delta\lambda$ postupne mení tak, aby funkcia

$$q(\Delta\lambda) = \tfrac{1}{2}\phi^2 - \tfrac{1}{3}S^2 \tag{14.54}$$

konvergovala k nule. Klasický zápis iteračného vzorca pre rovnicu s jednou neznámou je jednoduchý

$$\Delta\lambda^{k+1} = \Delta\lambda^k - \frac{q\left(\Delta\lambda^k\right)}{q'\left(\Delta\lambda^k\right)} \tag{14.55}$$

kde v našom prípade

$$q'\left(\Delta\lambda^k\right) = \frac{\partial q}{\partial\Delta\lambda} = \phi\frac{\partial\phi}{\partial\Delta\lambda} - \frac{2}{3}S\frac{\partial S}{\partial\Delta\lambda} \tag{14.56}$$

Potrebné parciálne derivácie do q' sa dajú určiť z (14.52) a (14.53)

$$\frac{\partial\phi}{\partial\Delta\lambda} = -\frac{1}{2\phi}\left(\frac{2Aa}{(1+a\Delta\lambda)^3} + \frac{2Bb}{(1+b\Delta\lambda)^3} + \frac{2Cb}{(1+b\Delta\lambda)^3}\right) \tag{14.57}$$

$$\frac{\partial S}{\partial\Delta\lambda} = H\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\phi + \Delta\lambda\frac{\partial\phi}{\partial\Delta\lambda}\right) \tag{14.58}$$

14.8 Spracovanie maticových vzťahov v jazyku FORTRAN

V programoch MKP sa uvedené vzťahy vyskytujú vo forme podprogramu, ktorý sa volá v cykle pre každý integračný bod prvkov výpočtového modelu telesa. Záverom uvedieme v tejto časti aj ukážku takéhoto spracovania a aby to nebolo celkom suchopárne vo forme spustiteľného ilustračného programu. Program, samozrejme, vzhľadom na jeho neúplnosť, nie je určený na výpočty a treba si tiež uvedomiť, že pri nelineárnej úlohe, napätia v integračných bodoch prvkov ovplyvňuje aj globálna iterácia rovnovážnych rovníc.

Fortranovská ukážka je založená na vzťahoch uvedených v predchádzajúcich odstavcoch a spolu s komentármi by mala byť zrozumiteľná pre záujemcu, ktorý ovláda základy programovacieho jazyka FORTRAN. V ukážke je pre porovnanie naprogramovaný výpočet príkladu, ktorý sa vyššie riešil pomocou iných programov.

```
      PROGRAM NAVRAT
C**************************************************
C     Navrat napatoveho bodu na plochu plasticity *
C**************************************************
```

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION
     1    STRES(3) ,SVECT(3), EPS(3),
     2    A(3,3),B(3,3),P(3,3),D(3,3)
      DATA R0   ,R1   ,R2   ,R3   ,R4   ,R6
     1    /0.D0 ,1.D0 ,2.D0 ,3.D0 ,4.D0 ,6.D0 /
      DATA ALLOW / 0.00001D0 /
 100  FORMAT(/' Prekrocil sa maximalny pocet iteracii'/)
 200  FORMAT(' Medza sklzu =',F10.2)
 300  FORMAT(' Napatia SX, SY, SXY =',3F10.2)
      ROOT3 = SQRT(R3)
      DLAMBDA = R0
      I = 0
      EPEKV = 0.0D0
      E = 2.0D5
      POIS = 0.3D0
      F = E/(R3*(R1-POIS))
      G = E/(R2*(R1+POIS))
      CALL MATICA(D) !Vypocet matice materialovych konstant De
      EPS(1) = 2.0D-3 !Zadane zlozky prirastku deformacie
      EPS(2) = -1.0D-3
      EPS(3) = 2.0D-3
      STRES(1) = D(1,1)*EPS(1)+D(1,2)*EPS(2) !Zlozky testovacieho napatia
      STRES(2) = D(2,1)*EPS(1)+D(2,2)*EPS(2)
      STRES(3) = D(3,3)*EPS(3)
      H = 2.0D5  !Plasticky modul bilinearneho spevnovania
      SIGK0 = 2.0D2 !Zaciatocna medza sklzu
      A1 = (STRES(1)+STRES(2))*(STRES(1)+STRES(2))
      A2 = (STRES(1)-STRES(2))*(STRES(1)-STRES(2))
      A3 = R2*STRES(3)*STRES(3)
      DLAMBDA = R0
      EPSTN = EPEKV
      SQ2D3 = SQRT(R2/R3)
      I = 0
  210 I = I+1 !Cyklus iteracneho vypoctu DeltaLambda N-R metodou
      D1 = R1+DLAMBDA*F
      D2 = R1+R2*DLAMBDA*G
      FI = A1/(R6*D1*D1)+A2/(R2*D2*D2)+A3/(D2*D2)
      FI = SQRT(FI)
      DFI = -R2*A1*F/(R6*D1*D1*D1)-R4*A2*G/(R2*D2*D2*D2)
     1      -R4*A3*G/(D2*D2*D2)
      DFI = DFI/(R2*FI)
      EPEKV = EPSTN+DLAMBDA*FI*SQRT(R2/R3)
      SIGK = SIGK0+H*EPEKV
      DSIGK = H*SQ2D3*(FI+DLAMBDA*DFI)
      GFCIA = FI*FI/R2-SIGK*SIGK/R3
      DGFCIE = FI*DFI-R2*SIGK*DSIGK/R3
      DLAMBDA = DLAMBDA-GFCIA/DGFCIE
      IF(GFCIA.GT.ALLOW) GOTO 210
      IF(I.GT.50)write(*,100)
C
      P(1,1) = R2/R3  !P matica
      P(1,2) = -R1/R3
      P(1,3) = R0
      P(2,1) = -R1/R3
      P(2,2) = R2/R3
      P(2,3) = R0
      P(3,1) = R0
      P(3,2) = R0
      P(3,3) = R2
      CALL INVERT(D,A) !Vypocet potrebnych invertovanych matic
```

```
      DO 220 I = 1,3
      DO 220 J = 1,3
      D(I,J) = A(I,J)+DLAMBDA*P(I,J)
  220 CONTINUE
      CALL  INVERT(D,B)
      DO 230 I = 1,3
      DO 230 J = 1,3
      D(I,J) = R0
      DO 230 K = 1,3
      D(I,J) = D(I,J)+B(I,K)*A(K,J)
  230 CONTINUE
      DO 240 I = 1,3  !Vypocet napatia
      SVECT(I) = R0
      DO 240 J = 1,3
      SVECT(I) = SVECT(I)+D(I,J)*STRES(J)
  240 CONTINUE
      DO 250 I = 1,3
      STRES(I) = SVECT(I)
  250 CONTINUE
      STRES(4) = R0
C     Vypis vysledkov na obrazovku monitora
 write(*,300)stres(1),stres(2),stres(3)
 write(*,200)SIGK
 STOP
      END

      SUBROUTINE MATICA(D)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

      DIMENSION  D(3,3)
      DATA R0,R1,R2/0.0D0,1.0D0,2.0D0/
      E = 2.0D5
      POIS = 0.3D0
      DO 10 ISTRE=1,3
      DO 10 JSTRE=1,3
   10 D(ISTRE,JSTRE)=R0
      CONST=E/(R1-POIS*POIS)
      D(1,1)=CONST
      D(2,2)=CONST
      D(1,2)=CONST*POIS
      D(2,1)=CONST*POIS
      D(3,3)=(R1-POIS)*CONST/R2
      RETURN
      END

      SUBROUTINE INVERT(A,B)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(3,3),B(3,3)
      A11 = A(1,1)
      A12 = A(1,2)
      A13 = A(1,3)
      A21 = A(2,1)
      A22 = A(2,2)
      A23 = A(2,3)
      A31 = A(3,1)
      A32 = A(3,2)
      A33 = A(3,3)
      T1  = A22*A33 - A32*A23
      T2  = A23*A31 - A21*A33
      T3  = A21*A32 - A22*A31
      DETER = A11*T1 + A12*T2 + A13*T3
```

```
IF(DETER.EQ.0.0) stop
DENOM = 1./DETER
B(1,1) = T1*DENOM
B(2,1) = T2*DENOM
B(3,1) = T3*DENOM
B(1,2) = (-A12*A33 + A32*A13)*DENOM
B(2,2) = ( A11*A33 - A31*A13)*DENOM
B(3,2) = (-A11*A32 + A12*A31)*DENOM
B(1,3) = ( A12*A23 - A13*A22)*DENOM
B(2,3) = (-A11*A23 + A21*A13)*DENOM
B(3,3) = ( A11*A22 - A21*A12)*DENOM
RETURN
END
```

Výsledky

```
Napatia SX, SY, SXY =     265.99     -45.77     103.92
Medza sklzu =     342.67
Stop - Program terminated.

Press any key to continue
```

14.9 Konzistentný tangenciálny materiálový modul

Globálna tangenciálna matica tuhosti výpočtového modelu MKP sa tvorí formou usporiadanej sumácie tangenciálnych matíc tuhosti prvkov [1]

$$\mathbf{K}_T^e = \int_{S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \tag{14.59}$$

pričom pri materiálovo nelineárnej úlohe je matica $\mathbf{D}$ tzv. *konzistentný* tangenciálny materiálový modul prvku. Pojem konzistentný vyjadruje požiadavku, aby jeho hodnota v každom iteračnom kroku bola konzistentná s integračnou procedúrou, ktorej výsledkom je vzťah pre výpočet napätia $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Definícia tangeciálneho materiálového modulu je

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etest}} \tag{14.60}$$

Rovnosť derivácií v (14.60) vyplýva z toho, že platí

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etest} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \tag{14.61}$$

Konzistentná linearizácia lokálnych materiálových matíc prvkov vytvorí globalnú tangenciálnu maticu tuhosti v takej forme, ktorá zaručí kvadratickú konvergenciu globálnej Newton-Raphsonovej iterácie úlohy v zaťažovacom kroku.

Pri odvodení matice $\mathbf{D}$ vyjdeme z diferenciácie vzťahu pre napätie (14.42)

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d\mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} - d\Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{14.62}$$

a po podobnej úprave ako v (14.43) dostávame

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\mathbf{D}}(d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} - d\Delta\lambda \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \tag{14.63}$$

kde pre $\hat{\mathbf{D}}$ platí (14.46). Zostáva ešte vyjadriť v (14.63) $d\Delta\lambda$ z podmienky konzistencie.

Diferencovanie podmienky konzistencie (14.39) dáva (pozn.: $d(\mathbf{x}^T\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$)

$$df_2 = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \tfrac{2}{3}\bar{\sigma}_k H d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = 0 \tag{14.64}$$

Zo (14.40) dostávame

$$d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = d\Delta\lambda a + \frac{2}{3}\frac{\Delta\lambda}{a}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{14.65}$$

kde

$$a = (\tfrac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_{n+1})^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}\bar{\sigma}_k$$

Dosadíme (14.65) do (14.64)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \tfrac{2}{3}\bar{\sigma}_k H(d\Delta\lambda a + \frac{2}{3}\frac{\Delta\lambda}{a}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = 0 \tag{14.66}$$

a po dosadení za a sa rovnica zjednoduší na

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{4}{9}\frac{H\bar{\sigma}_k^2}{b} d\Delta\lambda = 0 \tag{14.67}$$

kde

$$b = 1 - \tfrac{2}{3}H\Delta\lambda$$

Teraz dosadíme (14.63) do (14.67)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P}\hat{\mathbf{D}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} - d\Delta\lambda\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{4}{9}\frac{H\bar{\sigma}_k^2}{b} d\Delta\lambda = 0 \tag{14.68}$$

a z toho hľadaný diferenciál je

$$d\Delta\lambda = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P}\hat{\mathbf{D}}}{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{4}{9}\frac{H\bar{\sigma}_k^2}{b}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} \tag{14.69}$$

Využitie tohto vzťahu v (14.63) dáva výsledný vzťah pre prírastok napätia

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} \tag{14.70}$$

s konzistentným tangenciálnym modulom

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} - \frac{\hat{\mathbf{D}}\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P}\hat{\mathbf{D}}}{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{4}{9}\frac{H\bar{\sigma}_k^2}{b}} = \hat{\mathbf{D}} - \frac{\hat{\mathbf{D}}\mathbf{s}_{n+1}\mathbf{s}_{n+1}^T \hat{\mathbf{D}}}{\mathbf{s}_{n+1}^T \hat{\mathbf{D}}\mathbf{s}_{n+1} + \frac{4}{9}\frac{H\bar{\sigma}_k^2}{b}} \tag{14.71}$$

Pokiaľ teda v programe MKP na výpočet pružne-plastickej úlohy telesa zaťaženého rovinnou napätosťou využijeme prírastkový výpočet napätia podľa (14.42) až (14.45), na zaručenie kvadratickej konvergencie Newton-Raphsonovej metódy pri riešení globálnej sústavy nelineárnych rovníc rovnováhy uzlových bodov je potrebné pri výpočte tangenciálnych matíc prvkov používať materiálový modul (14.71). Použitie klasického tangenciálneho materiálového modulu (12.29) (elastoplastic continuum tangent operator)

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^{e} - \frac{9G^2}{\bar{\sigma}_k^2(3G+H)}\mathbf{s}\otimes\mathbf{s} \tag{14.72}$$

vedie k rapídnemu poklesu konvergencie a v súčasnosti sa v komerčných programoch MKP už ani nepoužíva.

14.10 Určenie konzistentného materiálového modelu v jazyku FORTRAN

Podľa vzťahov predchádzajúcej časti sme spracovali program MATMODUL2D na určenie konzistentného tangenciálneho materiálového modulu rovinnej napätosti s lineárnym izotropným spevňovaním v jazyku FORTRAN. V reálnom programe MKP vystupuje táto časť ako podprogram volaný pre každý integračný bod z podprogramu, ktorý počíta tangenciálnu maticu tuhosti prvku. Vstupné premenné do takéhoto podprogramu prichádzajú ako parametre volacieho príkazu, my sme ich zadali priamo v časti *vstupné hodnoty.* (Prevzali sme ich z príkladu 18.1 v [2].)

```
      PROGRAM MATMODUL2D
C*****************************************************
C     KONZISTENTNY MATERIALOVY MODUL VON MISES 2D   *
C*****************************************************
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION
     1    D(3,3),A(3,3),P(3,3),AVECT(3),BVECT(3),
     3    STRES(3),B(3,3)
      DATA R0      ,R1      ,R2      ,R3      ,R4      ,R9
     1    /0.0D0   ,1.0D0   ,2.0D0   ,3.0D0   ,4.0D0   ,9.0D0/

C Vstupne hodnoty
      E=2.0D5
      H=2.0D5
      POIS=R0
      DLAMBDA=6.6851D-4
      STRES(1)=385.3D0
      STRES(2)=197.9D0
      STRES(3)=R0
      SIGEF=333.7D0
      SIGK=333.7D0
C
      BETA  = R1-H*DLAMBDA/(R3*SIGEF)
      DO 10 I=1,3
      DO 10 J=1,3
   10 D(I,J)=R0
C Vypocet elastickej matice De
      CONST=E/(R1-POIS*POIS)
      D(1,1)=CONST
      D(2,2)=CONST
      D(1,2)=CONST*POIS
      D(2,1)=CONST*POIS
      D(3,3)=(R1-POIS)*CONST/R2
      D(4,4)=R1
C Vycislenie P-matice
      P(1,1) = R2/R3
      P(1,2) = -R1/R3
      P(1,3) = R0
      P(2,1) = -R1/R3
```

```
      P(2,2) = R2/R3
      P(2,3) = R0
      P(3,1) = R0
      P(3,2) = R0
      P(3,3) = R2
C Vypocet rozsirenej D-matice
      CALL INVERT(D,A)
      DO 120 I=1,3
      DO 120 J=1,3
      B(I,J) = A(I,J)+DLAMBDA*P(I,J)
  120 CONTINUE
      CALL INVERT(B,A)
C Vypocet konzistentnej tangencialnej matice
      DO 140 I=1,3
      AVECT(I) = R0
      DO 140 J=1,3
      AVECT(I) = AVECT(I)+P(I,J)*STRES(J)
  140 CONTINUE
      DO 150 I=1,3
      BVECT(I) = R0
      DO 150 J=1,3
      BVECT(I) = BVECT(I)+A(I,J)*AVECT(J)
  150 CONTINUE
      RMENOV = R0
      DO 160 I=1,3
  160 RMENOV = RMENOV+AVECT(I)*BVECT(I)
      BETA = R1-R2*H*DLAMBDA/R3
      H2 = R4*H*SIGK*SIGK/(R9*BETA)
      RMENOV = RMENOV+H2
      DO 170 I=1,3
      DO 170 J=1,3
      B(I,J) = BVECT(I)*BVECT(J)
  170 CONTINUE
      DO 180 I=1,3
      DO 180 J=1,3
      D(I,J) = A(I,J)-B(I,J)/RMENOV
  180 CONTINUE
      WRITE(*,11)
      WRITE(*,12)D
   11 FORMAT( ' D = ')
   12 FORMAT(3f15.3)
      STOP
      END
```

Program vypísal tieto členy konzistentného tangenciálneho modulu:

```
D =
     99868.323      50710.778           .000
     50710.778      27969.175           .000
          .000           .000        742.379
Stop - Program terminated.
```

V tabuľke 14.1 sme uviedli výsledky iteračnej procedúry testovacieho programu, ktorý ilustruje efektívnosť použitia tangenciálneho materiálového modulu konzistentného s integračnou procedúrou (tretí stĺpec). *Fnorma* predstavuje normu zvyškových (nerovnovážnych) uzlových síl výpočtového modelu a *ite* je číslo iteračného kroku. Prvé dva stĺpce v tabulke udávajú tieto hodnoty pri použití elastického materiálového modulu a klasického modulu spojitej integrácie. Pri iteračnej procedúre sa vyžadovalo, aby *Fnorma* klesla pod hodnotu 0,001.

Tabuľka 14.1

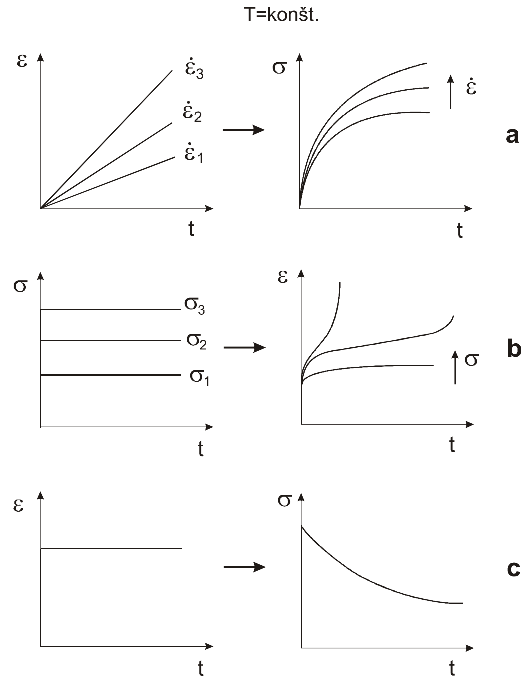
Elastický materiálový modul D_e	Modul spojitej integrácie D^{ep}	Konzistentný modul D_{konz}
ite = 1 Fnorma = 81.9361 ite = 2 Fnorma = 45.0528 ite = 3 Fnorma = 24.1507 ite = 4 Fnorma = 12.7373 ite = 5 Fnorma = 6.64959 ite = 6 Fnorma = 3.44982 ite = 7 Fnorma = 1.78315 ite = 8 Fnorma = .919702 ite = 9 Fnorma = .473786 ite =10 Fnorma = .243908 ite =11 Fnorma = .125520 ite =12 Fnorma = .645826E-01 ite =13 Fnorma = .332255E-01 ite =14 Fnorma = .170925E-01 ite =15 Fnorma = .879277E-02 ITERACIA CISLO = 15 PREKROCIL SA LIMITNY POCET ITERACII	ite = 1 Fnorma = 81.9361 ite = 2 Fnorma = 18.1286 ite = 3 Fnorma = 6.25226 ite = 4 Fnorma = 1.70708 ite = 5 Fnorma = .430342 ite = 6 Fnorma = .104781 ite = 7 Fnorma = .250916E-01 ite = 8 Fnorma = .595902E-02 ite = 9 Fnorma = .140928E-02 ite =10 Fnorma = .332571E-03	ite = 1 Fnorma = 81.9361 ite = 2 Fnorma = 4.06090 ite = 3 Fnorma = .142896E-02 ite = 4 Fnorma = .113480E-06

15 Viskoelasticita

Pružne-plastické konštitutívne teórie, s ktorými sme sa zoberali v kapitolách 11 až 14, patria do kategórie tzv. časovo nezávislých teórií. Umožňujú tvoriť časovo nezávislé materiálové modely pre pružne-plastické úlohy pri ktorých ozva materiálu je nezávislá od časovej zmeny zaťažujúcich síl a od časového intervalu, v ktorom sa aplikuje zaťaženie. Tzv. pseudočas sa v nich využíva len na sledovanie histórie a stavu (nelineárneho) zaťažovacieho procesu, bez vlastného fyzikálneho významu.

Pri úlohách kde *deformácia* materiálu je významne ovplyvnená časovým priebehom a dĺžkou časového intervalu zaťaženia (a často aj teplotou), sa využívajú tzv. *viskoelastické* alebo *viskoplastické* konštitutívne vzťahy (viskoplasticite sa budeme venovať neskôr) a z nich odvodené materiálové modely. Uplatňujú sa pri kovoch, dreve, polyméroch, skle, betóne, zeminách, živej tkáni, asfaltových zmesiach a ďalších hustých amorfných materiáloch na hranici medzi pevnou látkou a tekutinou. Tieto materiály sa vyznačujú kombináciou vlastností pružného, resp. pružne-plastického telesa a viskóznej tekutiny. Základné vlastnosti takéhoto materiálu možno dobre ilustrovať aj na experimentálnych výsledkoch jednoosového zaťaženia kovovej vzorky (uzávery však platia aj pre iný typ viskoelastického materiálu) zaťažovanej *pri vyššej konštantnej teplote* v určitom časovom intervale (obr.15.1).

Obr.15.1a ukazuje rozdielne tvary ťahového diagramu materiálu pri rozdielnych rýchlostiach deformácie. Vo všeobecnosti modul pružnosti je málo závislý od rýchlosti deformácie, ale medza sklzu, ako aj spevňovacia krivka, sú na rýchlosť deformácie a teplotu citlivé. Pri vyššej teplote dokonca medza sklzu úplne vymizne.

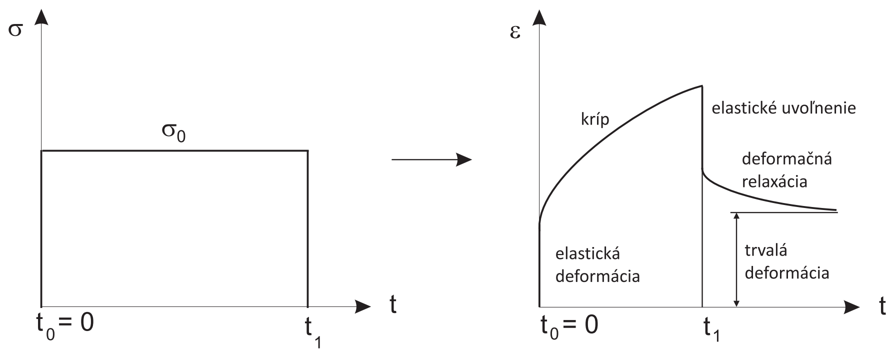


Obr. 15.1 *Dôsledky časovo závislej deformácie kovového materiálu pri vyššej konštantnej teplote: a - závislosť napätia od rýchlosti deformácie, b - krípová deformácia (tečenie materiálu) pri konštantnom napätí, c - relaxácia napätia pri konštantnej deformácii*

Na obr.15.1b vidieť ďalší dôsledok časovej závislosti zaťaženého materiálu, tzv. *tečenie alebo kríp* (creep).Pri konštantnom zaťažení na rôznej úrovni dochádza v dostatočne dlhom časovom intervale k nelineárnemu rozvoju nevratných deformácií. Rýchlosť krípovej deformácie sa zrýchľuje pri vyšších hodnotách zaťaženia a v celkovom časovom itervale sa mení: Prvý časový interval týchto kriviek je charakterizovaný veľkou rýchlosťou deformácie a nazýva sa *primárny kríp*, druhý interval má kvázi konštantnú rýchlosť deformácie, je to oblasť *sekundárneho krípu*. Pri vysokých zaťaženiach alebo pri dlhodobom zaťažovaní môže krípová deformácia dospieť do *terciálneho štádia* so zrýchľujúcou sa deformáciou, ktorá môže dosieť až do krípového lomu.

Tretí dôsledok časovej závislosti materiálu je *napäťová relaxácia*, ktorej typický priebeh znázorňuje obr. 15.1c. Pri relaxačnom teste sa vzorka rýchle natiahne na predpísanú konštantnú jednoosovú deformáciu a v tomto stave sa ponechá dlhší časový interval. Viskózne vlastnosti materiálu vedú pri tom k plynulému poklesu hodnoty napätia v sledovanom časovom intervale. Možnosť výpočtárskej analýzy napäťovej relaxácie sa využíva napr. pri návrhu predpätých strojných častí.

Typická reakcia viskoelastického materiálu na dostatočne dlho trvajúce zaťaženie s nasledujúcim úplným odľahčením je znázornená na obr. 15.2. Po krípovom tečení materiál na odľahčenie reaguje viac alebo menej výrazným pružným uvoľnením deformácie a jej následnou viskóznou relaxáciou; po jej doznení zostávajú v materiáli trvalé deformácie.



Obr.15.2 *Zaťaženie a odľahčenie viskoelastického materiálu*

Teória viskoelasticity sa vyvinula práve na matematickú simuláciu uvedených časovo závislých vlastností a charakteristík materiálu, ktoré za určitých zaťažovacích a teplotných podmienok viac alebo menej vykazujú okrem pružných vlastností aj vlastnosti tečenia s určitým stupňom viskozity. S viskozitou sa predovšetkým stretávame v mechanike tekutín, kde pre šmykové napätie τ viskóznej tekutiny platí Newtonov zákon viskozity

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{dv}{dy} \tag{15.1}$$

z ktorého vyplýva, že napätie v newtonovskej tekutine je pri konštantnej teplote lineárne úmerné rýchlosti šmykovej deformácie γ, resp. gradientu rýchlosti v smere kolmom na prúdenie tekutiny, pričom konštantou úmernosti je koeficient dynamickej viskozity tekutiny μ.

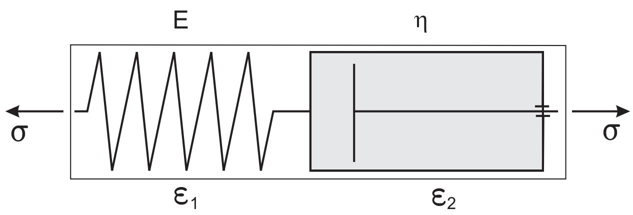
V teórii viskoelasticity sa tento vzťah zovšeobecňuje aj na normálové napätie σ ťahaného viskózneho prúta

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta\dot{\varepsilon} \tag{15.2}$$

kde η je koeficient viskozity materiálu a $\dot{\varepsilon}$ je rýchlosť normálovej deformácie. Viskózne vlastnosti prúta si potom môžeme predstaviť vo forme tlmiča naplneného viskóznou tekutinou, v ktorom napätie je úmerné rýchlosti deformácie podľa (15.2). Kombináciou lineárnych pružných a lineárnych viskóznych vlastností materiálu možno tvoriť *lineárne viskoelastické materiálové modely*, t.j. modely, pri ktorých platí lineárny vzťah medzi napätím a deformáciou pre ľubovoľný daný čas, pričom, pravda, závislosť týchto veličín *od času* môže byť nelineárna.

15.1 Jednorozmerné viskoelastické modely

a) *Maxwellov materiálový model* pozostáva z pružného člena s modulom pružnosti E a viskózneho člena s viskozitou η, ktoré sú zapojené do série (obr. 15.3). Celková pomerná deformácia sa pri takomto zapojení



Obr. 15.3 *Maxwellov materiálový model*

rovná súčtu deformácií pružného a viskózneho člena, pričom napätie oboch členov je rovnaké. Pre model potom platia tieto rovnice

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma}{\eta}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Diferencovaním poslednej rovnice a dosadením za $\dot{\varepsilon}_1$ a $\dot{\varepsilon}_2$ dostávame konštitutívny vzťah pre tento model

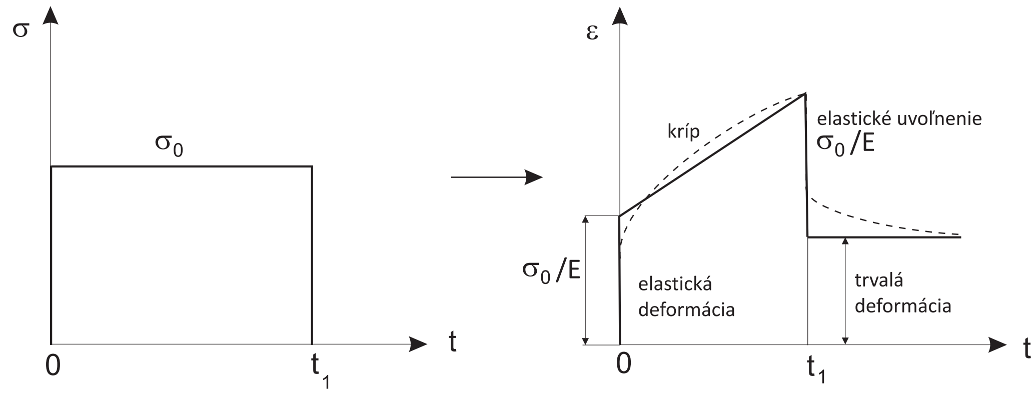
$$\sigma + \frac{\eta}{E}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon} \tag{15.3}$$

Pri skokovom zaťažení konštantným napätím σ_0 v čase t = 0 len pružný člen reaguje okamžite , takže $\varepsilon(0) = \sigma_0 / E$ a pretože $\dot{\sigma} = 0$ riešenie diferenciálnej rovnice (15.3) je

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + C = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E} = \left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{E}\right)\sigma_0 = D(t)\sigma_0 \tag{15.4}$$

kde $D(t)$ sa nazýva *modul krípovej poddajnosti*. Deformácia Maxwellovho modelu teda pri zaťažení konštantným napätím (čo je skúška materiálu na kríp) zo začiatočnej hodnoty σ_0 / E

lineárne neobmedzene narastá, po ukončení zaťaženia poklesne o pružnú hodnotu a v závislosti od dĺžky časového intervalu zostáva v materiáli trvalá deformácia, pričom model vôbec nesimuluje nelineárnu *deformačnú* relaxáciu. Voľbou konštánt η a E možno takto len veľmi hrubým spôsobom aproximovať vlastnosti reálneho materiálu pri krípovom zaťažení (obr. 15.4).



Obr.15.4 Ozva Maxwellovho modelu na skokové zmeny zaťažovacieho napätia σ_0

Maxwellov model však je schopný dobre simulovať *napäťovú* relaxáciu materiálu pri zaťažení konštantnou deformáciou (obr.15.1c). Ak model zaťažíme konštantnou na čase nezávislou deformáciou $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, v oboch členoch vznikne rovnaké napätie, takže platí

$$E\varepsilon_1 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

Úpravou a riešením tejto diferenciálnej rovnice dostaneme

$$E(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

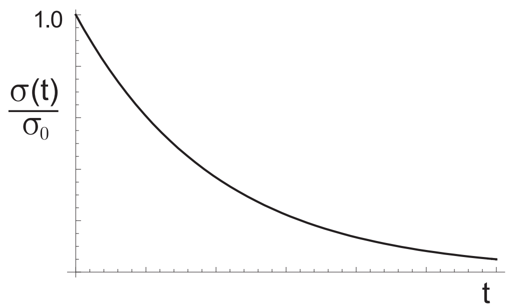
$$\frac{E}{\eta} dt = \frac{d\varepsilon_2}{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}$$

$$\frac{E}{\eta} t = -\ell n(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) + C$$

Zo začiatočnej podmienky $t = 0 \rightarrow \varepsilon_2 = 0$ dostaneme $C = \ell n \varepsilon_0$ a pretože $\sigma = E(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)$ pre napäťovú relaxáciu Maxwellovho modelu dostávame

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 e^{-t/t_R} = \sigma_0 e^{-t/t_R}, \quad t_R = \frac{\eta}{E} \qquad (15.5)$$

Typický priebeh relaxácie napätia je znázornený na obr. 15.5. Parameter t_R sa nazýva relaxačný čas, je mierou rýchlosti relaxácie napätia, čím je menší, tým je relaxácia napätia rýchlejšia. Zo vzťahu (15.5) vidieť, že je to čas, za ktorý napätie klesne na hodnotu σ_0 / e.



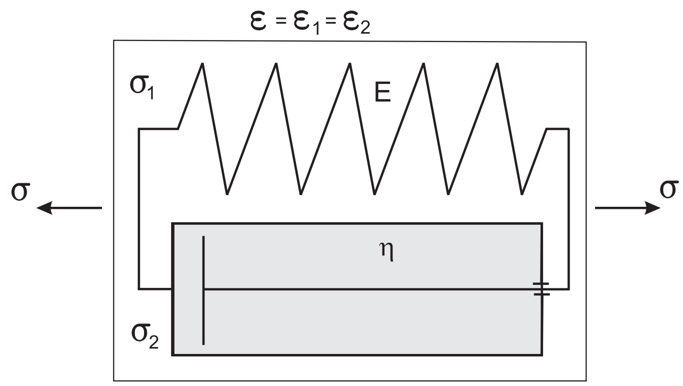
Obr.15.5 *Maxwellov model - relaxácia napätia pri konštantnej deformácii*

Pre porovnanie s Hookeovým zákonom možno rovnicu (15.5) zapísať v tvare

$$\sigma(t) = Ee^{-t/t_R}\varepsilon_0 = E(t)\varepsilon_0 \tag{15.6}$$

kde $E(t)$ sa nazýva *relaxačný modul* materiálu, ktorý, tak isto ako model krípovej poddajnosti v (15.4), je pri viskoelastickom materiáli závislý od času a pri zložitejších modeloch zohráva dôležitú úlohu pri napasovaní jednoosej krivky modelu na experimentálne zistenú krivku reálneho materiálu.

b) *Kelvinov (Voigtov) materiálový model* pozostáva z pružného člena s modulom pružnosti E a viskózneho člena s viskozitou η, ktoré sú zapojené paralelne (obr. 15.6), takže platí



Obr. 15.6 *Kelvinov (Voigtov) materiálový model*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_2}{\eta}, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

Po vylúčení σ_1 a σ_2 z týchto rovníc konštitutívny vzťah je

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \tag{15.7}$$

Separáciou premenných dostaneme

$$\frac{E}{\eta}dt = \frac{d\varepsilon}{(\sigma_0/E) - \varepsilon}$$

a po integrácii

$$\frac{E}{\eta}t = -\ell n[(\sigma_0/E) - \varepsilon] + C$$

Zo začiatočnej podmienky $t = 0 \;\; \rightarrow \;\; \varepsilon = 0$ dostaneme $C = \ell n(\sigma_0 / E)$, takže pre časovú zmenu deformácie (kríp materiálu) platí

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 - e^{-t/t_R}) = \varepsilon_0(1 - e^{-t/t_R}), \quad t_R = \frac{\eta}{E} \qquad (15.8)$$

Rovnica (15.8) ako aj obr. 15.7 potvrdzujú fyzikálnu úvahu, že pri skokovom zaťažení modelu konštantným napätím σ_0 v čase t = 0, pružný člen sa nemôže okamžite deformovať, pretože mu v tom bráni viskózny člen, takže krípová krivka štartuje z hodnoty $\varepsilon = 0$ s rýchlosťou (smernicou dotyčnice) $\dot{\varepsilon}(t = 0) = \sigma_0 / \eta$. Parameter t_R sa v tomto prípade nazýva *retardačný* (spomaľovací) čas materiálu; čím je vyšší, tým je krípová deformácia pomalejšia.

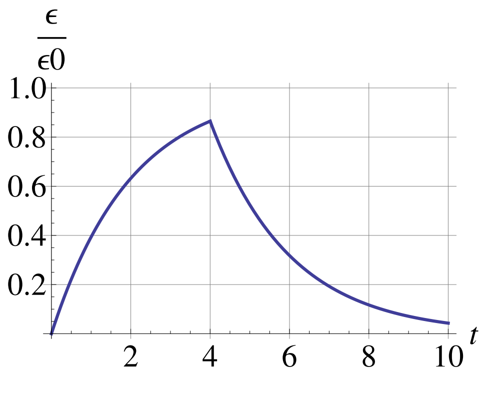
Ak model v čase $t = t_1$ odľahčíme, konštitutívna rovnica (15.7) s nulovým napätím sa zmení na $0 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ a jej riešenie je

$$\varepsilon(t) = Ce^{-(E/\eta)t} \qquad (15.9)$$

Deformácia v čase t_1 podľa (15.8) je $\varepsilon(t_1) = (\sigma_0 / E)(1 - e^{-(E/\eta)/t_1})$ a keď ju využijeme v (15.9) ako začiatočnú podmienku, pre časový interval odľahčenia modelu dostaneme vzťah

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(e^{\frac{E}{\eta}t_1} - 1)e^{-\frac{E}{\eta}t} = \varepsilon_0(e^{t_1/t_R} - 1)e^{-t/t_R} \qquad t \geq t_1, \quad t_R = \frac{\eta}{E} \qquad (15.10)$$

Graficky je typický priebeh krípového zaťaženie a nelineárneho odľahčenie (deformačnej regenerácie) podľa vzťahov (15.8) a (15.10) znázornený na obr. 15.7 s hodnotami $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E = 1$, $t_R = 2$, $t_1 = 4$.



Obr. 15.7 *Ukážka priebehu krípového tečenia a nelineárneho uvoľnenia pri Kelvinovom (Voigtovom) modeli*

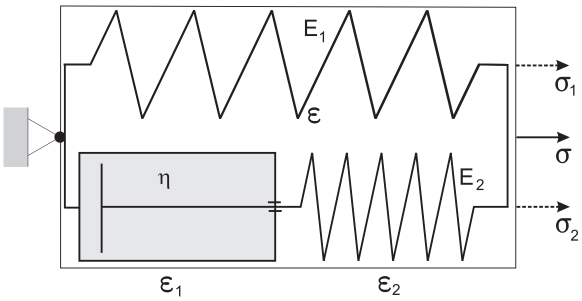
Nedostatkom Kelvinovho (Voigtovho) modelu je však to, že nie je schopný simulovať nelineárnu napäťovú relaxáciu viskózneho materiálu. Ak do konštitutívneho vzťahu (15.7) dosadíme konštantnú deformáciu ε_0, dostaneme konštantné napätie $\sigma = E\varepsilon_0$ a k žiadnej časovo závislej napäťovej relaxácii nedochádza.

c) Maxwellov model paralelne spojený s pružným členom

Maxwellov a Kelvin-Voigtov model sú najjednoduchšie modely viskoelastického materiálu. Kombináciou pružného a viskózneho člena možno tvoriť ďalšie modely, ktoré lepšie vystihujú napäťovo-deformačné vlastnosti reálneho materiálu pri jednoosovom zaťažovaní. Jednoduchou ukážkou je model znázornený na obr. 15.8, kde je Maxwellov model paralelne spojený s pružným členom.

Z fyzikálnych úvah vyplývajú pre model (so značením veličín podľa obr. 15.8) tieto východzie vzťahy

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_1 = E_1 \varepsilon, \quad \sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon}_1 = E_2 \varepsilon_2 \tag{15.11}$$



Obr. 15.8 *Maxwellov model paralelne spojený s pružným členom*

Derivovaním $(15.11)_1$ podľa času a využitím $(15.11)_4$ dostávame

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma_2}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} \tag{15.12}$$

Pomocou $(15.11)_2$ a $(15.11)_3$ vylúčime z (15.12) σ_2

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - E_1 \varepsilon}{\eta} + \frac{1}{E_2}\left(\dot{\sigma} - E_1 \dot{\varepsilon}\right) \tag{15.13}$$

a po usporiadaní členov dostávame hľadanú konštitutívnu rovnicu modelu

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2}\dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \eta \frac{E_1 + E_2}{E_2}\dot{\varepsilon} \tag{15.14}$$

Ak do (15.13) dosadíme $E_1 = 0$, čím vyradíme horný pružný člen v obr. 8, dostaneme konštitutívnu rovnicu Maxwellovho modelu (15.3), alebo ak bude dolný pružný člen dokonale tuhý ($E_2 = \infty$), dostaneme vzťah platný pre Kelvin/Voigtov model (15.7).

Pre krípový test so zaťažením σ_0 zo (15.14) dostávame

$$\sigma_0 = E_1 \varepsilon(t) + K \frac{d\varepsilon}{dt}, \qquad K = \eta \frac{E_1 + E_2}{E_2}$$

a riešenie tejto diferenciálnej rovnice po využití fyzikálne zrejmej začiatočnej podmienky $\varepsilon(0) = \sigma_0 / (E_1 + E_2)$ je

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1}\left(1 - \frac{E_2}{E_1(E_1+E_2)} e^{-\frac{E_1}{K}t}\right) \tag{15.15}$$

Ak model v čase $t = t_1$ odľahčíme, konštitutívna rovnica (15.14) s nulovým napätím sa zmení na $0 = E_1\varepsilon + K\dot{\varepsilon}$ a jej riešenie je

$$\varepsilon(t) = Ce^{-(E_1/K)t} \tag{15.16}$$

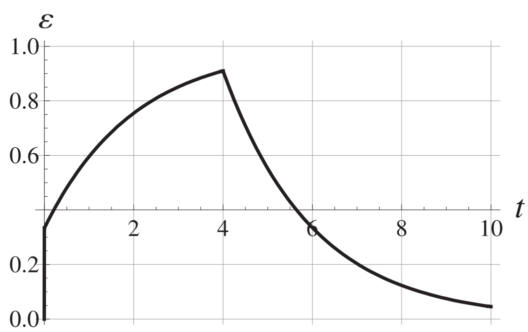
Deformácia v čase t_1 podľa (15.15) je

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_0}{E_1}\left(1 - \frac{E_2}{E_1(E_1+E_2)} e^{-\frac{E_1}{K}t_1}\right)$$

a keď ju využijeme v (15.16) ako začiatočnú podmienku, pre časový interval odľahčenia modelu dostaneme vzťah

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1}\left[e^{(E_1/K)t_1} - \frac{E_2}{E_1(E_1+E_2)}\right]e^{-(E_1/K)t} \qquad t \geq t_1, \quad K = \eta\frac{E_1+E_2}{E_2} \tag{15.17}$$

Graficky je typický priebeh krípového zaťaženia a nelineárneho odľahčenia (deformačnej regenerácie) podľa vzťahov (15.15) a (15.17) znázornený na obr. 15.9 s hodnotami $\sigma_0 = 1$, $E_1 = 1$, $E_2 = 2$, $E_1/K = 1/2$, $t_1 = 4$.



Obr. 15.9 *Ukážka priebehu krípového tečenia a nelineárneho uvoľnenia trojčlenného modelu*

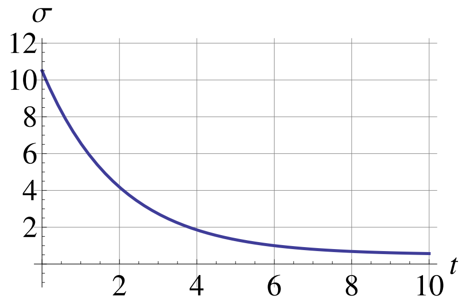
Z obr. 15.9 vidieť, že model pri zaťažení konštantným napätím σ_0 nadobudne okamžitú deformáciu $\varepsilon_0 = \sigma_0 / (E_1 + E_2)$, ktorá v závislosti od času a parametrov modelu potom nelineárne narastá. Pri odľahčení ($t_1 = 4, \sigma_0 = 0$) zaznamenáme nelineárny pokles deformácie. Tieto žiadúce vlastnosti model prevzal v podstate od Kelvin-Voigtovho modelu. Schopnosť napäťovej relaxácie zase prevzal od Maxwellovho modelu. Ak model zaťažíme konštantnou deformáciou ε_0, konštitutívna rovnica (15.14) sa zmení na

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2}\dot{\sigma} = E_1 \varepsilon_0$$

Jej riešenie so začiatočnou podmienkou $\sigma(0) = \varepsilon_0 (E_1 + E_2)$ je

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 (E_1 + E_2 e^{-\frac{E_2 t}{\eta}}) \tag{15.18}$$

Tento vzťah pre hodnoty $E_1 = 5$, $E_2 = 20$, $\eta = 50$ a $\varepsilon_0 = 0{,}1$ dáva priebeh napätia znázornený na obr. 15.10.

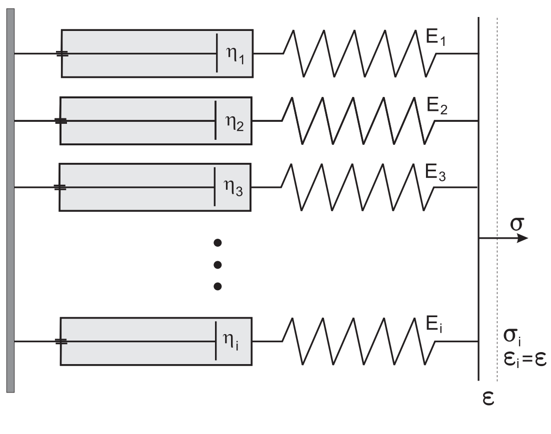


Obr. 15.10 *Ilustračný obrázok relaxácie napätia modelu*

Kombináciou viacerých Maxwellových alebo Kelvin-Voigtových modelov možno tvoriť modely, ktoré sú schopné dostatočne presne simulovať aj zložité experimentálne určené jednoosé vlastnosti reálneho viskoelastického materiálu. Pridaním každého ďalšieho člena sa zvyšujú simulačné možnosti modelu, ale zároveň sa aj zvyšuje rád jeho diferenciálnej konštitutívnej rovnice a množstvo koeficientov, ktoré treba určiť pri identifikácii modelu s experimentálne získanými výsledkami krípového a relaxačného testu materiálu. Všeobecná konštitutívna rovnica modelu zloženého z ľubovoľného počtu členov má tvar

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} + \cdots = b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + \cdots \tag{15.19}$$

Významnú úlohu vo výpočtových postupoch MKP zohráva teória *zovšeobecneného Maxwelovho modelu* v zapojení, kedy jeho členy sú pospájané paralelne (obr. 15.11), ktorý preto budeme analyzovať trochu podrobnejšie.



Obr. 15.11 *Zovšeobecnený Maxwellov model s paralelným spojením členov*

Konštitutívna rovnica jednočlenného Maxwellovho modelu zapísaná podľa (15.3) je $a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} = b_1\dot{\varepsilon}$, dvojčlenného s paralelným spojením členov $a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon}$ atď. Po určení koeficientov dvojčlenného modelu (napr. z podobných fyzikálnych úvah ako pre model na obr. 15.8) a zovšeobecnením tohto postupu možno dostať vzťah pre určenie konštitutívnej rovnice *zovšeobecného Maxwellovho modelu* v tvare

$$\begin{aligned}&\left[\left(D/E_1+1/\eta_1\right)\left(D/E_2+1/\eta_2\right)\left(D/E_3+1/\eta_3\right)\cdots\right]\sigma \\ &=\left[D\left(D/E_2+1/\eta_2\right)\left(D/E_3+1/\eta_3\right)\cdots+D\left(D/E_1+1/\eta_1\right)\left(D/E_3+1/\eta_3\right)\cdots+\cdots\right]\varepsilon\end{aligned} \tag{15.20}$$

kde D reprezentuje prikaz na deriváciu premennej, ktorá s ním príde do súčinu, podľa času ($D\bullet = d\bullet/dt = \dot{\bullet}$). Pre dvojčlenný model podľa (15.20) dostaneme

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon} \tag{15.21}$$

kde $a_1 = \dfrac{E_1\eta_2 + E_2\eta_1}{E_1E_2}$, $a_2 = \dfrac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}$, $b_1 = \eta_1 + \eta_2$, $b_2 = \dfrac{E_1+E_2}{E_1E_2}\eta_1\eta_2$.

Ak pre teno model zadáme konštantnú deformáciu, rovnica (15.21) sa zmení na lineárnu homogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = 0 \tag{15.22}$$

Jej charakteristická rovnica je $a_2r^2 + a_1r + 1 = 0$, ktorá má dva reálne korene $\eta_1/E_1 = t_1$ a $\eta_2/E_2 = t_2$ a všeobecné riešenie (15.22) teda je

$$\sigma(t) = C_1e^{-t/t_1} + C_2e^{-t/t_2} \tag{15.23}$$

Po využití začiatočných podmienok $\sigma(0) = \varepsilon_0(E_1+E_2)$ a $\dot{\sigma}(0^+) = -(E_1^2/\eta_1 + E_2^2/\eta_2)\varepsilon_0$ sa (15.23) zmení na výsledný tvar

$$\sigma(t) = \varepsilon_0(E_1e^{-t/t_1} + E_2e^{-t/t_2}) \tag{15.24}$$

Poznamenávame, že podmienka pre $\sigma(0)$ je zrejmá z fyzikálnej úvahy a podmienka pre $\dot{\sigma}(0)$ vyplynie z rovnice, ktorú dostaneme, keď konštitutívnu rovnicu (15.21) zintegrujeme v čase $t=0$ v časových hraniciach od $-\Delta\tau$ po $+\Delta\tau$, ktoré sa v limite blížia k nule. Dostaneme tak pre určenie začiatočnej rýchlosti relaxácie napätia rovnicu

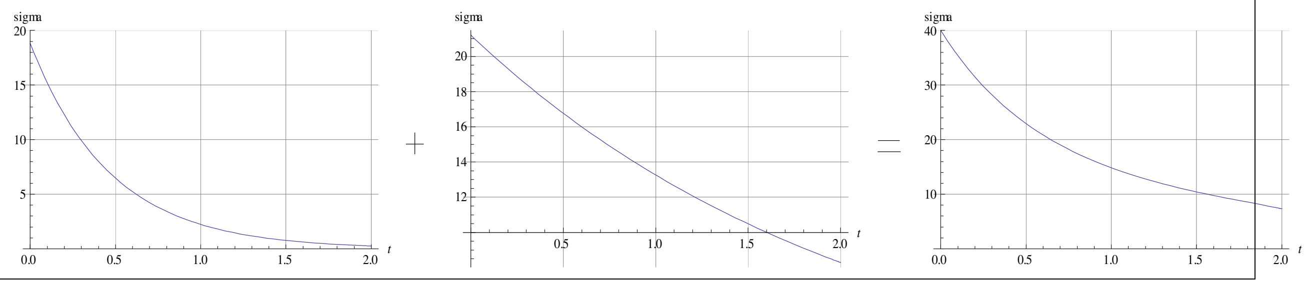
$$\frac{E_1\eta_2 + E_2\eta_1}{E_1E_2}\left(E_1+E_2\right)\varepsilon_0 + \frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}\dot{\sigma}(0^+) = \left(\eta_1+\eta_2\right)\varepsilon_0 \quad\rightarrow\quad \dot{\sigma}(0^+) = -(E_1^2/\eta_1 + E_2^2/\eta_2)\varepsilon_0$$

Pre model s hodnotami $a_1 = 2.5$ a $a_2 = 1$, sme urobili ilustračný test relaxácie napätia z hodnoty $\sigma(0) = 40$ (ktorú v čase nula dosiahneme náhlou konštantnou deformáciou $\varepsilon_0 = 1$) so začiatočnou rýchlosťou poklesu napätia $\dot{\sigma}(0) = -50$. Diferenciálna rovnica (15.21) má teraz tvar $\sigma + 2.5\dot{\sigma} + \ddot{\sigma} = 0$ a jej riešenie s uvedenými začiatočnými podmienkami je (obr. 15.12)

$$\sigma(t) = 18{,}8\,e^{-2{,}13t} + 21{,}2\,e^{-0{,}47t} = C_1e^{-t/t_1} + C_2e^{-t/t_2} \tag{15.25}$$

s grafickým priebehom na obr. 15.12 (*Mathematika 5*). Obrázok je vykreslený tak, aby ukázal superpozíciu výsledného priebehu napätia z oboch členov funkcie (15.25).

```
DSolve[{sigma''[t]+2.6*sigma'[t]+sigma[t]==0,sigma[0]=40,sigma'[0]=-50}, sigma[t],t]//Simplify
sol1 = NDSolve[{sigma''[t]+2.5sigma'[t]+sigma[t]==0,sigma[0]=40, sigma'[0]=-50}, sigma, {t, 0, 1}]
g1=Plot[Evaluate[sigma[t]/.sol1],{t,0,2},PlotRange -> {0,40}, GridLines -> Automatic,AxesLabel -> {t,sigma}];
g2=Plot[18.7961E^(-2.13066t),{t,0,2}, GridLines -> Automatic,PlotRange -> {0,20},AxesLabel -> {t,sigma}];
g3=Plot[21.2039E^(-0.469338t),{t,0,2}, AxesLabel -> {t,sigma},GridLines -> Automatic];
GraphicsGrid[{{g2,g3,g1}}]

{{sigma[t]->18.7961 E^(-2.13066 t)+21.2039 E^(-0.469338 t)}}
```



Obr. 15.12 *Napäťová relaxácia dvojčlenného zovšeobecneného Maxwellovho modelu*

Záujemca môže zopakovať uvedený postup aj pre odvodenie $\varepsilon(t)$ pre prípad krípového tečenia s konštantným napätím σ_0 a zistí, že viacčlenný zovšeobecnený Maxwellov model, na rozdiel od jednočlenného, je už schopný v takomto prípade simulovať nelineárny priebeh deformácie.

Keď vzťah (15.24) zovšeobecníme pre *n* členov

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} E_i e^{-t/t_i}, \qquad t_i = \frac{\eta_i}{E_i} \tag{15.26}$$

vidíme, že výsledné napätie predstavuje superpozíciu napätí jednotlivých členov, ktoré majú rozdielne, od času závislé, viskoelastické vlastnosti. Po doplnení modelu o sériovo pripojený pružný člena s konštantnou tuhosťou E_0 už časový priebeh napätia nebude konvergovať k nule, ale k hodnote $\sigma_0 = E_0\varepsilon_0$

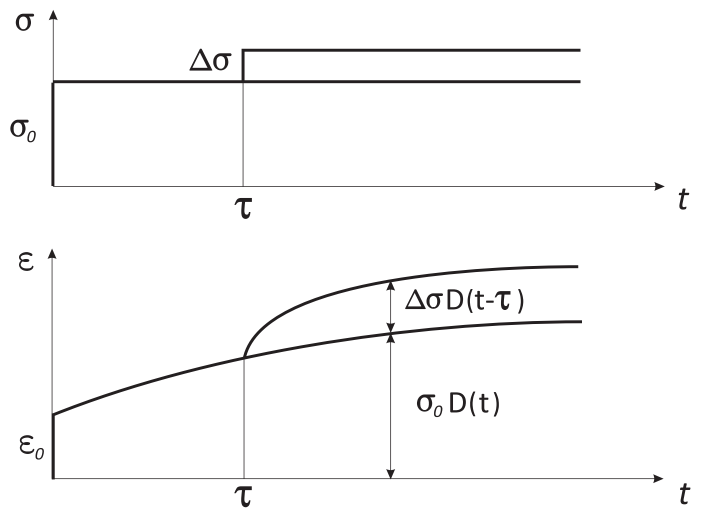
$$\sigma(t) = \left(E_0 + \sum_{i=1}^{n} E_i e^{-t/t_i} \right) \varepsilon_0 = E(t)\varepsilon_0, \qquad t_i = \frac{\eta_i}{E_i} \tag{15.27}$$

kde $E(t)$ je relaxačný modul. Poznamenávame však, že pri zaťažení časovo premenlivou deformáciou je relaxačný modul funkciou aj deformácie, t.j. $E \equiv E(\varepsilon, t)$.

15.2 Jednorozmerný model zaťažený časovo premenlivým zaťažením

Uvažujme lineárny jednorozmený viskoelastický model zaťažený časovo premenlivým napätím $\sigma(t)$ a určme vzťah pre výpočet jednorozmernej deformácie $\varepsilon(t)$, keď poznáme modul krípovej poddajnosti $D(t)$. Z predchádzajúcich rozborov vieme, že od zaťaženia konštantným napätím σ_0 dostaneme priebeh deformácie $\varepsilon(t)=D(t)\sigma_0$ - pozri napr. (15.4). Pretože materiál je lineárny a platí zákon superpozície môžeme k tejto deformácii pripočítať deformáciu od malého prírastku napätia $\Delta\sigma$, ktoré začne pôsobiť v čase τ. Pre výslednú deformáciu potom platí (obr. 15.13)

$$\varepsilon(t)=\sigma_0 D(t)+\Delta\sigma D(t-\tau)$$



Obr. 15.13 *Superpozícia prírastkov deformácie pri zmene napätia*

Sumáciu prírastkov deformácie možno zovšeobecniť pre nekonečne veľký počet nekonečne malých prírastkov napätia $d\sigma_i$ a dostaneme vzťah pre určenie krípového tečenia

$$\varepsilon(t)=\sigma_0 D(t)+\sum_{i=1}^{\infty} d\sigma_i D(t-\tau_i)=\sigma_0 D(t)+\int_0^t D(t-\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{15.28}$$

Výsledný integrál sa nazýva Boltzmannov, ale možno sa stretnúť aj s inými názvami: hereditárny, klesajúcej pamäti, Duhamelov. Analogicky možno dospieť aj ku vzťahu pre relaxáciu napätia v ktorom krípovú poddajnosť D nahradí relaxačný modul E

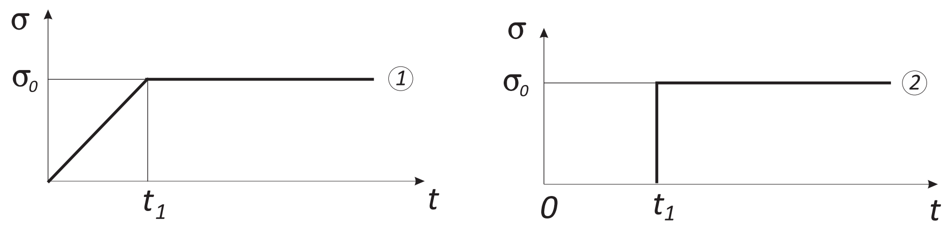
$$\sigma(t)=\varepsilon_0 E(t)+\int_0^t E(t-\tau)\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{15.29}$$

Vzťahy (15.28) a (15.29) sú konštitutívne rovnice viskoelastického materiálu vo všeobecnom tvare, platia, samozrejme, aj pre jednoduché mechanické modely, pre reálny materiál však musíme do nich určiť moduly D a E na základe experimentálnych testov. Napr. podľa (15.29) napäťová ozva na náhle zaťaženie materiálu deformáciou ε_0 je $\varepsilon_0 E(t)$, z čoho vyplýva návod na experimentálne určovanie $E(t)$ na základe priebehu nameraného napätia. Analogicky podľa

(15.28) možno určiť $D(t)$ meraním časového priebehu deformácie vyvolanej náhlym napäťovým zaťažením σ_0.

Príklad 15.1

Vyšetrite pomocou Boltzmannovho integrálu priebeh deformácie Maxwellovho modelu pri dvoch zaťaženiach s rovnakým maximálnym napätím σ_0, ale rozdielnym časovým priebehom podľa obr. 15.14. Konštitutívna rovnica Maxwellovho modelu je podľa (15.3) $\sigma + \eta\dot{\sigma} / E = \eta\dot{\varepsilon}$ a modul krípovej poddajnosti podľa (15.4) $D(t) = t / \eta + 1 / E$.



Obr. 15.14

Riešenie

1. zaťaženie

1. časový úsek $0 < t \leq t_1$: $\sigma(0) = 0$, $\sigma(t) = \sigma_0 t / t_1$, $d\sigma(\tau) / d\tau = \sigma_0 / t_1$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \int_0^t D(t-\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau = 0 + \frac{\sigma_0}{t_1}\int_0^t\left(\frac{t-\tau}{\eta} + \frac{1}{E}\right)d\tau = \frac{\sigma_0}{t_1}\left(\frac{t^2}{2\eta} + \frac{t}{E}\right)$$

2. časový úsek: $t \geq t_1$: $\sigma(t) = \sigma_0$, $d\sigma(\tau) / d\tau = 0$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \int_0^{t_1} D(t-\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau + \int_{t_1}^t D(t-\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau = \int_{t_1}^t D(t-\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau = \frac{\sigma_0}{t_1}\left(\frac{t - t_1/2}{\eta} + \frac{1}{E}\right)$$

2. zaťaženie: $t \geq t_1$

Použijeme vzťah (15.4) a pre začiatok zaťaženia čas posunutý o t_1

$$\varepsilon(t) = D(t - t_1)\sigma_0(t_1) = \sigma_0\left(\frac{t - t_1}{\eta} + \frac{1}{E}\right)$$

čo dáva menšie hodnoty ako prvé zaťaženie v tom istom časovom úseku.

Uvedený príklad ilustruje dve vlastnosti Bolzmannovej integrálnej superpozície, ktoré obidve súhlastia s experimentálnymi skúsenosťami: Po prvé, materiálový model má "pamäť"; pamätá si predchádzajúcu zaťažovaciu históriu, na rozdielne zaťažovacie histórie reaguje rozdielne. Po druhé, reaguje na rýchlosť zaťažovania; deformácia je väčšia pri postupne rastúcom zaťažení na konečnú hodnotu, ako pri náhlom zaťažení na túto hodnotu.

15.3 Viacrozmerná viskoelasticita

Riešenie rovinných a priestorových viskoelastických úloh s malými deformáciami a izotropnými vlastnosťami materiálu je v podstate založené na zovšeobecnení poznatkov a postupov použitých pri jednorozmerných úlohách. Tuhostné vlastnosti materiálu (a potom aj tenzor napätia) sa s ohľadom na výhodnejšie vyjadrenie a jednoduchšie numerické riešenie priestorovej nestacionárnej nelineárnej úlohy rozdeľujú na objemové a deviatorické (analogický postup sa využíval pri pružne-plastickej úlohe). Deviatorické (šmykové) deformačné vlastnosti materiálu charakterizuje modul pružnosti v šmyku G a objemovú stlačiteľnosť objemový modul K. Vzťahy medzi materiálovými charakteristikami sú známe zo základov pružnosti

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \qquad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

kde E je modul pružnosti v ťahu a μ je Pissonovo číslo materiálu. Materiálové vlastnosti mnohých viskoelastických materiálov pri zaťažení nie sú stále, menia sa s časom; pri určitej konštantnej teplote sú to klesajúce funkcie vyjadrované obyčajne vo forme Pronyho radov tak, ako sme sa s tým už stretli pri zovšeobecnenom Maxwellovom modeli

$$G(t) = G_0^{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{-\frac{t}{t_i^G}} \tag{15.30}$$

$$K(t) = K_0^{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{-\frac{t}{t_i^K}} \tag{15.31}$$

kde G_i a K_i sú rozdielne moduly jednotlivých Maxwellových členov, pričom $t_i^G = \eta_i / G_i$ a $t_i^K = \eta_i / K_i$ sú ich relaxačné časy. Pri členoch G_0 a K_0 sa často môžme stretnúť s indexom ∞, ktorý naznačuje, že ide o hodnotu, ku ktorej rad konverguje pri veľmi dlhom (teoreticky nekonečnom) čase.

Funkcie (15.30) a (15.31) je výhodné, kvôli ich ľahšej modifikácii, upraviť zavedením relatívnych členov

$$\alpha_0^G = G_0^{\infty} / G_0, \qquad \alpha_i^G = G_i / G_0$$
$$\alpha_0^K = K_0^{\infty} / K_0, \qquad \alpha_i^K = K_i / K_0$$

kde

$$G_0 = G_0^{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i, \qquad K_0 = K_0^{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i$$

Funkcie (15.30) a (15.31) majú potom tvar

$$G(t) = G_0 \left[\alpha_0^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{-\frac{t}{t_i^G}} \right] \tag{15.32}$$

$$K(t)=K_0\left[\alpha_0^K+\sum_{i=1}^{n_K}\alpha_i^K e^{-\frac{t}{t_i^K}}\right] \tag{15.33}$$

Konštitutívnu rovnicu pre priestorovú napätosť teraz už možno napísať vo forme zovšeobecnenia Boltzmannovho integrálu s rozdelením napätia na deviatorickú a objemovú časť

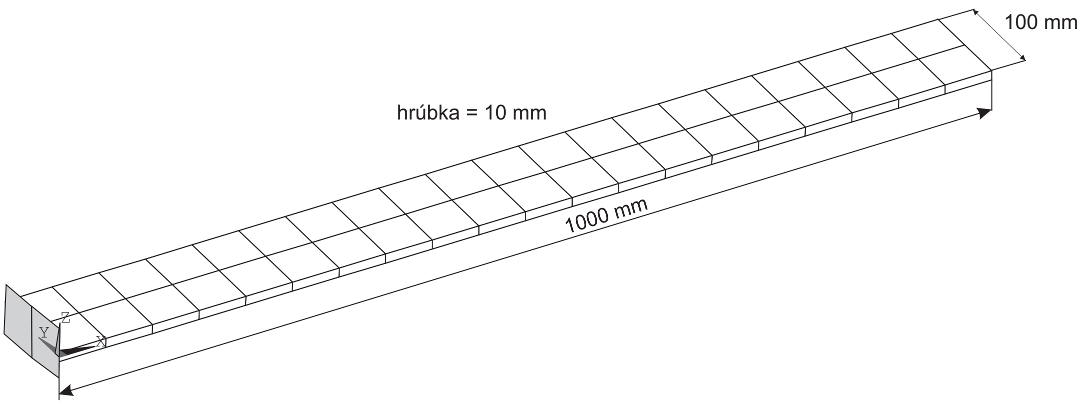
$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\int_0^t 2G(t-\tau)\frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau}d\tau+\mathbf{I}\int_0^t K(t-\tau)\frac{d\varepsilon_V(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{15.34}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor Cauchyho napätia, $\mathbf{e}$ je deviatorická časť tenzora deformácie, ε_V je objomová časť deformácie a $\mathbf{I}$ je jednotkový tenzor. V programoch MKP sa zložky napätia (15.34) v integračných bodoch vyčísľujú v časových krokoch pomocou numerickej integrácie (pozri napr. teoretický manuál programu ANSYS).

Príklad 15.2

Pre podlhovastú obdĺžnikovú dosku, ktorej výpočtový model a rozmery sú znázornené na obrázku, určte pomocou programu ANSYS časový priebeh maximálneho ohybového napätia, keď ju na kratšej strane votkneme a na náprotivnej strane naplocho prehneme o 30 mm. Poissonovo číslo materiálu $\mu=0{,}3$ a objemový modul K nie sú časovo závislé. Vyhodnotením experimentálneho testu materiálu sa zistili hodnoty časového priebehu modulu pevnosti v šmyku s približnou aproximáciou podľa (15.30), kde platí

$$G_1=7300\,\text{MPa} \quad \mathrm{t}_1=100\,\text{s}$$
$$G_2=4900\,\text{MPa} \quad \mathrm{t}_2=2000\,\text{s}$$
$$G_3=480\,\text{MPa} \quad \mathrm{t}_3=2\cdot10^4\,\text{s}$$
$$G_0^\infty=0$$



Riešenie

Pre program ANSYS treba hodnoty Pronyho radu pre šmykový modul prepočítať podľa horeuvedených vzťahov na relatívne hodnoty. Začiatočný modul pružnosti v šmyku (hodnota pri t = 0) je

$$G_0 = G_0^{\infty} + \sum_{i=1}^{3} G_i = 12680 \text{ MPa}$$

a relatívne násobky sú

$$\alpha_i = G_i / G_0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 0{,}61985 \\ \alpha_2 &= 0{,}38446 \\ \alpha_3 &= 0{,}03766 \end{aligned}$$

Začiatočný modul pružnosti v ťahu je

$$E_0 = 2G_0(1+\mu) = 32968 \text{ MPa}$$

a objemový modul

$$K = \frac{E_0}{3(1-2\mu)} = 27473 \text{ MPa}$$

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = OhybViskoDosky, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Shell Elastic 4node 181, OK, Close;

3. Hrúbka dosky
Main Menu>Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... ,OK, TK(I)=10, OK, Close;

4. Materiálové údaje
Lineárne
Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 32968, PRXY = 0.3, OK,
Nelineárne
Nonlinear, Viscoelastic, Prony, Shear Response... a1=0.61985, t1=100, Add Row,
a2=0.38446, t2=2000, Add Row,
a3=0.03766, t3=2E4, OK,
Volumetric Response...
a1=27473, t1=0, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie bodov plochy prvkov (číslovanie bodov je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS: X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 100, Apply,
X = 0, Y = 100, OK;

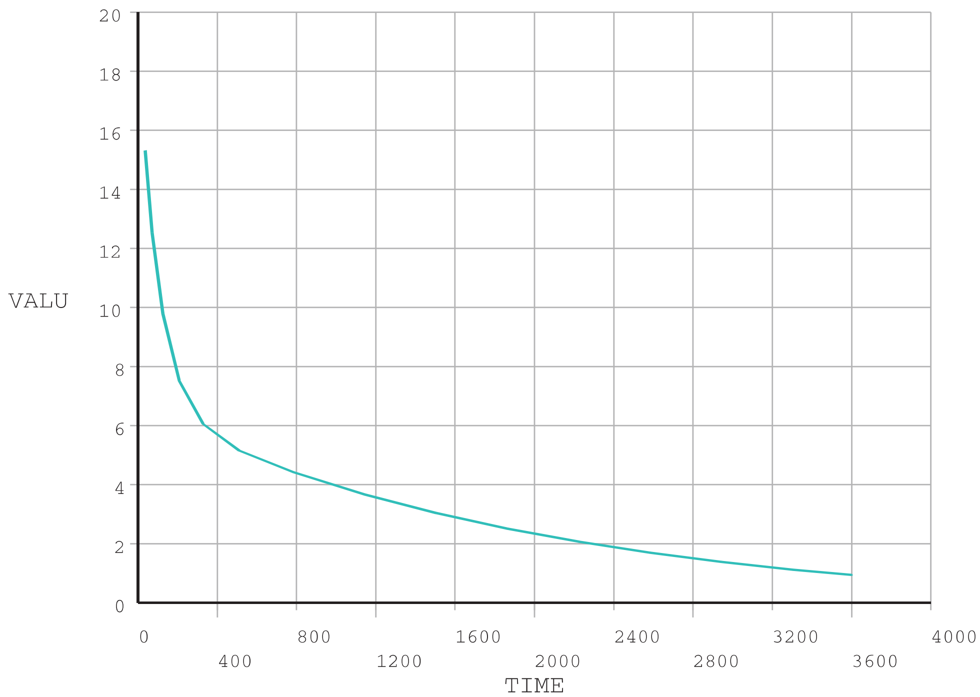
6. Vytvorenie plochy prvkov
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>Trough KPs: ↑KP1,↑KP2,↑KP3,↑KP4, OK;

7. Vytvorenie prvkov
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Areas, Set: Pick All, SIZE = 50, OK;
(Preprocessor>Meshing>Mesh Tool): Mesh, Pick All, Close;

8. Upevnenie a zaťaženie modelu
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes ↑,
P: Tri uzly na ľavej strane obdĺžnika, OK, All DOF, Value = 0, Apply,
P: Tri uzly na pravej strane obdĺžnika, OK, UZ, Value = -30, OK;

9. Riadiace príkazy nelineárneho riešenia a výpočet
Solution>
P:Unabridged Menu
Load Step Opts>Time/Frequenc>Time and Substps..., TIME=3600, NSUBST=100, KBC=Stepped,OK;
Load Step Opts>Output Ctrls>DB/Results File..., FREQ=Every Substep, OK;
Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

10. Vykreslenie relaxácie maximálneho ohybového napätia (v krajnom bode votknutého prierezu)
Utility Menu>Plot>Elements
TimeHist Pospro>Kliknite prvú ikonku zľava (Add Data) >Nodal Solution>Stress>X-Component of stress,OK, Piknite uzol vo votknutí, OK, Piknite tretiu ikonku zľava (Graph Data)



11. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy
Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Dosku, vzhľadom na jej tvar, možno považovať za nosník a začiatočné maximálne napätie (v čase t = 0) možno približne skontrolovať pomocou vzorcov platných pre ohyb nosníka. Sila, ktorá vyvolá priehyb 30 mm potom je

$$F=\frac{3EI}{\ell^3}w_{\max}=\frac{3\cdot 32968\cdot 1000\cdot 10^3}{12\cdot 1000^3}30=24{,}73\ \mathrm{N}$$

a pre maximálne ohybové napätie platí

$$\sigma_{o\max}=\frac{M_{o\max}}{W_o}=\frac{F\ell}{\frac{1}{6}bh^2}=\frac{6\cdot 24{,}73\cdot 1000}{10\cdot 100^2}=14{,}84\ \mathrm{MPa}$$

15.4 Vplyv teploty

Vlastnosti mnohých viskoelastických materiálov, napr. polymérov, sú silno závislé od teploty a teória ich materiálových modelov a konštitutívnych rovníc nemôže túto veličinu obísť. Aj v tomto prípade základné postupy treba hľadať najprv pri jednorozmerných modeloch. Ak budeme napr. uvažovať konštitutívnu rovnicu Maxwelovho modelu (15.3) s teplotne závislou viskozitou $\eta(T)$, dostaneme diferenciálnu rovnicu s dvomi nezávislými premennými - časom *t* a teplotou *T*

$$\sigma+\frac{\eta(T)}{E}\frac{d\sigma}{dt}=\eta(T)\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{15.35}$$

Ak do nej zavedieme teplotu ako funkciu času $T=T(t)$, vznikne lineárna diferenciálna rovnica s nekonštantnými koeficientami. Zjednodušme tento problém najprv tak, že budeme uvažovať konštatnú teplotu $T=T_i$. Pri danej teplote T_i potom pre krípovú podajnosť a relaxčný modul Maxwellovho modelu podľa (15.4) a (15.5) platí

$$D(t,T_i)=\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta_i} \tag{15.36}$$

$$E(t,T_i)=Ee^{-t/t_R(T_i)},\qquad t_R(T_i)=\frac{\eta(T_i)}{E} \tag{15.37}$$

a model má takto pre každú teplotu T_i inú krípovú a relaxačnú funkciu.

Nahraďme teraz čas *t* premennou

$$\xi=A\frac{t}{\eta(T)}\quad\rightarrow\quad\frac{d\xi}{dt}=\frac{A}{\eta(T)} \tag{15.38}$$

kde *A* je konštanta. Táto substitúcia transformuje konštitutívnu rovnicu Maxwellovho modelu (15.35) na diferenciálnu rovnicu s jedinou nezávislou premennou ξ

$$\sigma(\xi)+\frac{A}{E}\frac{d\sigma}{d\xi}=A\frac{d\varepsilon}{d\xi} \tag{15.39}$$

a krípová poddajnosť a relaxačný modul sa zjednodušia na

$$D(\xi) = \frac{1}{E} + \frac{\xi}{A} \tag{15.40}$$

$$E(\xi) = Ee^{-\xi/t_R(T_i)}, \qquad t_R = \frac{A}{E} \tag{15.41}$$

Grafické obrazy týchto funkcií predstavujú tzv. *hlavné krivky* (master curves), z ktorých možno spätnou transformáciou dostať krivky funkcií (15.36) a (15.37) pre všetky rozdielne teploty T_i a naopak, všetky tieto krivky v systéme s premennou ξ spätne skolabujú (premiestnia sa) do hlavných kriviek.

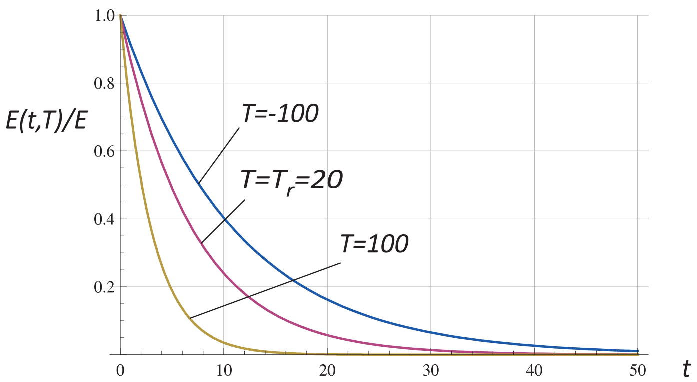
Zvoľme ako príklad lineárnu zmenu viskozity v závislosti od teploty podľa vzťahu

$$\eta(T_i) = \eta_0\left[1 - A\left(\frac{T_i}{T_r} - 1\right)\right]$$

kde T_r je referenčná teplota (je to teplota, pri ktorej sa viskozita rovná zadanej konštantnej hodnote η_0) a A = 0,2 a zvolíme pomer $\eta_0 / E = 5$. Potom vzťah (15.41) vyjadrený pomocou *t* možno vyjadriť ako

$$E(t)/E = e^{-\frac{tE}{t_R\eta(T_i)}} = e^{-\frac{0{,}2t}{1{,}2-0{,}2(T_i/T_r)}}$$

Na obr.15.15 sme graficky znázornili časový priebeh týchto funkcií pre teploty 100, 20 a -100 °C. Sú to všetko exponenciálne funkcie s podobným tvarom a ak za referenčnú hodnotu zvolíme 20 °C, potom pri vyššej teplote

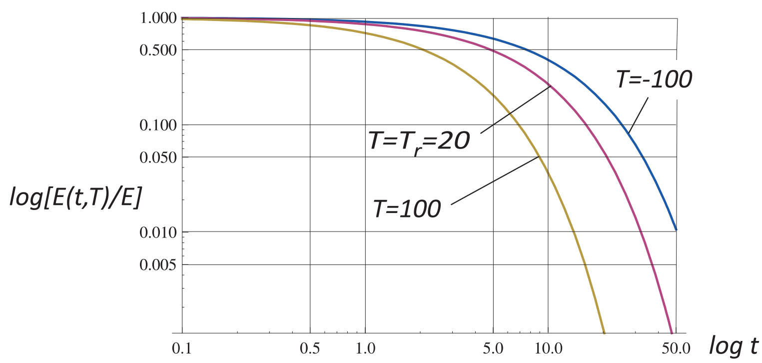


Obr.15.15 *Priebeh relaxačného modulu pri rozdielnych teplotách*

sa relaxačné časy zmenšujú a pri nižšej naopak. Ak tieto krivky znázorníme v logaritmickom súradnicovom systéme (obr. 15.16), krivky sú len posunuté voči sebe o určitú hodnotu. Tento fakt možno napr. pre časovo závislý modul pružnosti v šmyku vyjadriť takto

$$\log\left[G(t,T)\right] = f\left\{\log(t) + \log\left[A(T,T_{ref})\right]\right\}$$

kde *f* označuje funkciu hlavnej krivky a $\log\left[A(T,T_{ref})\right]$ je je funkcia horizontálneho posunu v čase *t* z teploty T_{ref} do teploty *T*. Z uvedeného vyplýva, že pre viskoelastické materiály, u ktorých experimenty potvrdzujú takúto podobnosť materiálových kriviek (sú to tzv. *termoreologicky jednoduché materiály*), je možné pomocou hlavných kriviek určovať teplotné zmeny materiálových hodnôt z tzv. *posuvných funkcií* (shift functions) $A(T,T_{ref})$.



Obr.15.16 *Priebeh relaxačného modulu pri rozdielnych teplotách v logaritmických súradniciach*

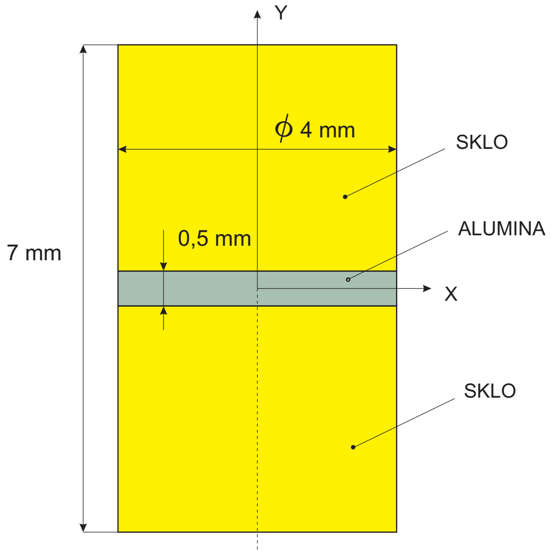
Hlavná krivka reálneho materiálu sa tvorí pomocou viacerých experimentálnych testov pri rôznych teplotách a posúvaním týchto kriviek na *referenčnú teplotu* T_{ref} sa zároveň určia aj hodnoty posuvnej funkcie $A(T_i,T_{ref})$. Interpoláciou týchto hodnôt možno zostaviť funkciu $A(T,T_{ref})$. Napr pre polyméry možno namerané hodnoty posuvných fukcií dobre aproximovať tzv. WLF (Williams-Landel-Ferry) funkciou

$$\log A(T,T_{ref}) = \frac{C_1(T-T_{ref})}{C_2+T-T_{ref}}$$

kde C_1 a C_2 sú materiálové konštanty. Okrem tejto funkcie sa využíva aj Tool-Narayanaswamyho funkcia alebo, najmä pre roztavené sklo, Tool-Narayanaswamyho funkcia s fiktívnou teplotou (pozri napr. teoretický manuál programu ANSYS).

Príklad 15.3

Rotačne symetrický sklenený izolátor plátovaný z oboch strán ku krúžku z ALUMINA (Al_2O_3) s rozmermi na obrázku sa ochladzuje rýchlosťou 3 °C/min. z teploty 618 °C na teplotu 460 °C, kde sa izotermicky pozdrží 4 hodiny. Potom sa rýchlosťou 3°C/min. ďalej ochladzuje na teplotu okolia 18 °C. Určte pomocou programu ANSYS priebeh maximálnej intenzity napätia (redukovaného napätia podľa Trescovej hypotézy) v závislosti na klesajúcej teplote na hranici oboch materiálov. Vlastnosti oboch materiálov prevezmite z príkladu VM200 overovacieho manuálu programu ANSYS (pozri tiež príkazové riadky príkladu uvedené nižšie). V príklade využite Tool-Narayanaswamyho funkciu s fiktívnou teplotou.



Riešenie

Príklad sa riešil pomocou týchto príkazových riadkov programu ANSYS:

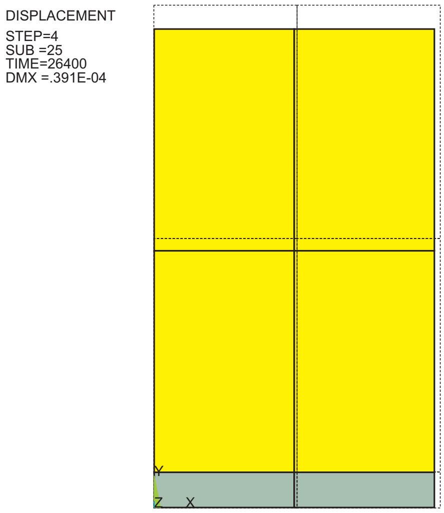
```
/PREP7
ET,1,PLANE183,,,1          ! OSOVO SYMETRICKÝ 8-UZLOVÝ PRVOK

/COM,    MATERIALOVÉ VLASTNOSTI ALUMINA
MP,EX,  1, 3.73113E5
MP,PRXY,1, 0.3
TB,PRONY,1,1,1,SHEAR
TBDATA,1,0.0,1E-7
TB,SHIFT,1,1,1,FICT
TBDATA, 1,    618,      0.0,     1.0 ! PARAMETRE SHIFT FUNKCIE
TBDATA, 4,    618,      1.0,     0.0 ! PARAM.FIKT.TEPLOTY: TFI, CFI, TAUFI
TBDATA, 7,52.6E-7, 0.119E-7, -1.0E-11 ! KOEF.TEPL.VODIVOSTI TUH.FAZY
TBDATA,12,52.6E-7, 0.119E-7, -1.0E-11 ! KOEF.TEPL.VODIVOSTI TEK.FAZY

/COM,    MATERIALOVE VLASTNOSTI SKLA
MP,EX,  2, 7.2548E4
MP,PRXY,2, 0.3
TB,PRONY,2,1,3,SHEAR       ! ŠMYKOVÉ VISKOELASTICKÉ VLASNOSTI
TBDATA,1,0.422,0.0689
TBDATA,3,0.423,0.0065
TBDATA,5,0.155,0.0001
TB,SHIFT,2,1,6,FICT        ! TN SHIFT S FIKTÍVNOU TEPLOTOU
TBDATA, 1, 618, 6.45E4, 0.53  ! PARAMETRE: FIKT.TEPLOTA, H/R, X
TBDATA, 4, 618,  0.108, 3.0   !    1.FIKT.TEPLOTA
TBDATA, 7, 618,  0.443, 0.671 !  2.FIKT.TEPLOTA
TBDATA,10, 618,  0.166, 0.247 ! 3.FIKT.TEPLOTA
TBDATA,13, 618,  0.161, 0.091 ! 4.FIKT.TEPLOTA
TBDATA,16, 618,  0.046, 0.033 ! 5.FIKT.TEPLOTA
TBDATA,19, 618,  0.076, 0.008 ! 6.FIKT.TEPLOTA
TBDATA,22, 64.7E-7, 0.02E-7,  ! KOEF.TEPL.VODIVOSTI TUH.FÁZY
TBDATA,27, 3.43E-5,          ! KOEF.TEPL.VODIVOSTI TEK.FÁZY
```

```
/COM,   TVORBA KONEČNÝCH PRVKOV
N,1,
N,3,,0.00025
FILL
N,7,0,0.0035
FILL
NGEN,5,7,1,7,1,.0005
MAT,1
E,1,15,17,3,8,16,10,2
E,15,29,31,17,22,30,24,16
MAT,2
E,3,17,19,5,10,18,12,4
E,17,31,33,19,24,32,26,18
E,5,19,21,7,12,20,14,6
E,19,33,35,21,26,34,28,20

/COM,  OKRAJ. PODMIENKY A VAZBA UZLOV V RADIÁLNOM SMERE
NSEL,S,LOC,Y
DSYM,SYMM,Y
NSEL,S,LOC,X
DSYM,SYMM,X
NSEL,ALL
D,1,ALL
CP,1,ux,15,16,17,18,19,20,21
CP,2,ux,29,30,31,32,33,34,35
FINISH

/SOLU
/COM,    NASTAVENIE ZAČIATOČNEJ TEPLOTY
TREF,618
TOFFST,273
TUNIF,618
TIME,1E-5
CNVTOL,F,,,,.001              ! MALÉ ZAČ. ZAŤAŽENIE
!  NA ZABEZPEČENIE KONVERGENCIE
SOLVE
OUTRES,ESOL,1                 ! UKLADAJ VÝSLEDKY PRE KAŽDÝ SUBKROK
NSUBST,200
TUNIF,460                     ! OCHLADZOVANIE
TIME,3160
SOLVE
TIME,(14400+3160)             ! IZOTERMICKÁ VÝDRŽ
SOLVE
TUNIF,18                      ! ĎALŠIE OCHLADZOVANIE
TIME,(14400+12000)
SOLVE
FINISH
```

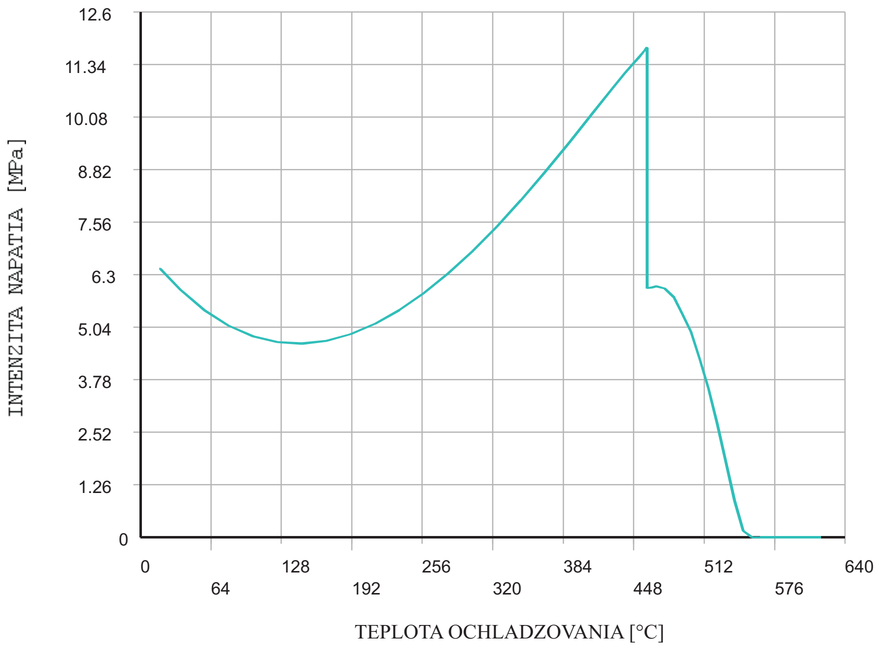
```
/POST26
ESOL,2,3,,BFE,TEMP
ESOL,3,3,3,S,INT,SINT
XVAR,2
/GRID,1
/AXLAB,X,TEPLOTA
/AXLAB,Y,INTENZITA NĀPATIA (MPa)
PLVAR,3
FINISH
```

Výsledky

Objemové zmrštenie telesa (polovice tvoriacej plochy telesa) učinkom ochladenia:



Priebeh intenzity napätia na hranici oboch materiálov v závislosti od klesajúcej teploty a výsledná hodnota zvyškového napätia (názorne vidieť prechod z tekutej fázy skla, cez skok pri tranzitnej teplote, do tuhej fázy):



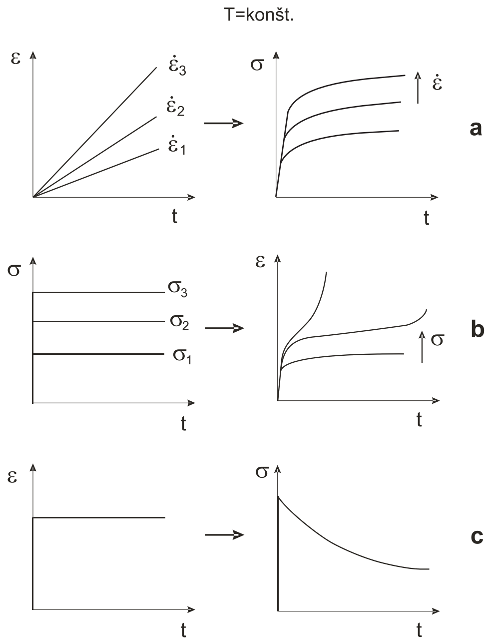
16 Viskoplasticita

Pružne-plastické konštitutívne teórie, s ktorými sme sa zoberali v kapitolách 11 až 14, patria do kategórie tzv. časovo nezávislých teórií. Umožňujú tvoriť časovo nezávislé materiálové modely pre pružne-plastické úlohy pri ktorých ozva materiálu je zanedbateľne závislá od časovej zmeny zaťažujúcich síl a od časového intervalu, v ktorom sa aplikuje zaťaženie. Tzv. pseudočas sa v nich využíva len na sledovanie histórie a stavu (nelineárneho) zaťažovacieho procesu, bez vlastného fyzikálneho významu.

Pri úlohách, kde *deformácia* materiálu je významne ovplyvnená časovým priebehom a dĺžkou časového intervalu zaťaženia, sa využívajú tzv. *viskoelastické* (pozri kapitolu 15) *a viskoplastické konštitutívne vzťahy* a z nich odvodené materiálové modely. Viaceré viskoplastické teórie sú podobné časovo nezávislej plasticite tým, že je v nich zahrnuté kritérium plasticity ako začiatok (visko)plastickej deformácie (po túto hranicu je deformácia elastická), ale s tým rozdielom, že funkcia viskoplastického tečenia *f* môže byť aj väčšia ako nula a koeficient viskoplasticity $\Delta\lambda, \dot{\lambda}$ sa určuje nie z podmienky konzistencie ale pomocou špeciálnej "viskoplastickej" rovnice, ktorá charakterizuje príslušný viskoplastický materiálový model. Úplne analogicky s časovo nezávislou plasticitou možno do viskoplasticity zaviesť aj spevňovanie medze sklzu pomocou experimentálne určenej jednoosovej krivky spevňovania materiálu. Ak medza sklzu je konštantná, hovoríme o ideálne viskoplastickom materiáli.

Základné vlastnosti viskoplastického materiálu možno rovnako ako pri viskoelasticite dobre ilustrovať na experimentálnych výsledkoch jednoosového zaťaženia kovovej vzorky zaťažovanej *pri vyššej konštantnej teplote* v určitom časovom intervale (obr. 16.1).

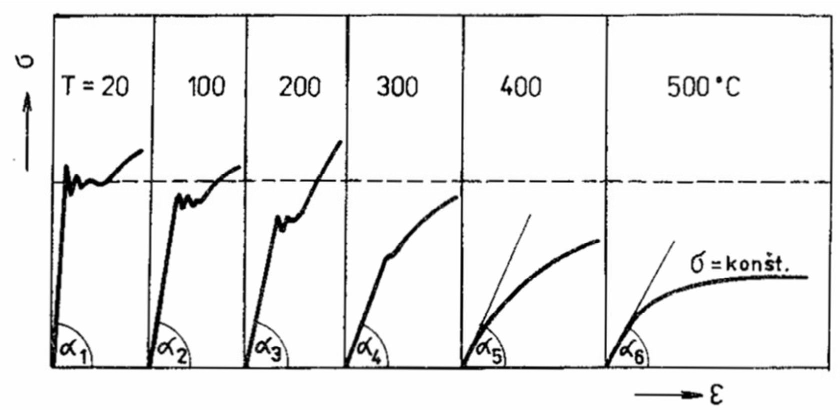
Obr. 16.1a ukazuje rozdielne tvary ťahového diagramu materiálu pri rozdielnych rýchlostiach deformácie. Vo všeobecnosti modul pružnosti je málo závislý od rýchlosti deformácie, ale medza sklzu, ako aj spevňovacia krivka, sú na rýchlosť deformácie a teplotu citlivé. Pri vyššej teplote dokonca medza sklzu úplne vymizne (obr. 16.2).



Obr. 16.1 *Dôsledky časovo závislej deformácie kovového materiálu pri vyššej konštantnej teplote: a - závislosť napätia od rýchlosti deformácie, b - krípová deformácia (tečenie materiálu) pri konštantnom napätí, c - relaxácia napätia pri konštantnej deformácii*

Na obr.16.1b vidieť ďalší dôsledok časovej závislosti zaťaženého materiálu, tzv. *tečenie alebo kríp* (creep).Pri konštantnom zaťažení na rôznej úrovni dochádza v dostatočne dlhom časovom intervale k nelineárnemu rozvoju nevratných deformácií. Rýchlosť krípovej deformácie sa zväčšuje pri vyšších hodnotách zaťaženia a v celkovom časovom itervale sa mení: Prvý časový interval týchto kriviek je charakterizovaný veľkou rýchlosťou deformácie a nazýva sa *primárny kríp*, druhý interval má kvázi konštantnú rýchlosť deformácie, je to oblasť *sekundárneho krípu*. Pri vysokých zaťaženiach alebo pri dlhodobom zaťažovaní môže krípová deformácia dospieť do *terciálneho štádia* so zrýchľujúcou sa deformáciou, ktorá môže dosieť až do krípového lomu.

Tretí dôsledok časovej závislosti materiálu je *napäťová relaxácia*, ktorej typický priebeh znázorňuje obr. 16.1c. Pri relaxačnom teste sa vzorka rýchle natiahne na predpísanú konštantnú jednoosovú deformáciu a v tomto stave sa ponechá dlhší časový interval. Viskózne vlastnosti materiálu vedú pri tom k plynulému poklesu hodnoty napätia v sledovanom časovom intervale. Možnosť výpočtárskej analýzy napäťovej relaxácie sa využíva napr. pri návrhu predpätých strojných častí.



Obr. 16.2 *Vplyv teploty na ťahový diagram nízkouhlíkovej ocele*

Analogicky s pružne-plastickou časovo nezávislou úlohou možno názorne uviesť viskoplasticitu vo forme jednorozmerného modelu, čo je výhodné aj z toho dôvodu, že modely pre viacrozmernú napätosť sa najčastejšie vytvárajú ako zovšeobecnenie jednorozmerných viskoplastických konštitutívnych rovníc. Celková deformácia sa opätovne rozkladá na elastickú a viskoplastickú časť (nepovažujeme za potrebné označovať trvalú deformáciu inak ako v predchádzajúcich častiach o časovo nezávislej plasticite, len si treba uvedomiť, že teraz je už funkciou reálneho času *t* a v tomto vzťahu to aj výnimočne explicitne zdôrazníme)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p}(t) \tag{16.1}$$

Pre jednorozmerné axiálne napätie platí Hookeov zákon s modulom pružnosti v ťahu *E*

$$\sigma = E\varepsilon^{e} \tag{16.2}$$

Analogicky s jednorozmerným časovo nezávislým pružne-plastickým modelom zavedieme funkciu visko-plastického zaťažovania

$$f(\sigma, \bar{\sigma}_k) = \sigma - \bar{\sigma}_k \tag{16.3}$$

kde $\overline{\sigma}_k$ je aktuálna medza sklzu materiálu. Pre naše účely rozboru viskoplastických vzťahov zvolíme jednorozmernú Peirce/Perićovu modifikáciu [12] známeho a široko používaného Perzynovho modelu (pozri množstvo zdrojov na internete) pri ktorom pre rýchlosť viskoplastickej deformácie platí

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p(\sigma,\overline{\sigma}_k) &= \frac{1}{\eta}\left[\left(\frac{|\sigma|}{\overline{\sigma}_k}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right] sign(\sigma) \qquad &\text{ak } f(\sigma,\overline{\sigma}_k) \geq 0 \\ \dot{\varepsilon}^p(\sigma,\overline{\sigma}_k) &= 0 &\text{ak } f(\sigma,\overline{\sigma}_k) < 0 \end{aligned} \tag{16.4}$$

kde η a m sú materiálové konštanty pri danej teplote. Pomocou konštanty η, ktorá má rozmer času, možno meniť viskozitu modelu, bezrozmerné číslo m vyjadruje citlivosť materiálu na rýchlosť deformácie.

Predpokladajme, že v (16.4) je splnená podmienka viskoplastickej deformácie, elastickou deformáciou vyvolané napätie (v ďalšom ho budeme považovať za kladné - ťahové) dosiahlo medzu sklzu, a nech ďalej celková deformácia monotónne narastá s ľubovolnou (konštantnou) *rýchlosťou deformácie* α podľa vzťahu

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} + \alpha t = \varepsilon_0 + \alpha t \tag{16.5}$$

kde, kvôli zjednodušeniu predpokladáme konštantnú medzu sklzu rovnú začiatočnej medzi sklzu σ_k (tzv. ideálne viskoplastický materiál).

Pre rýchlosť viskoplastickej deformácie podľa $(16.4)_1$ s m = 1 (aby bolo možné analytické riešenie pre ε^p a σ) a $\overline{\sigma}_k = \sigma_k$ potom dostávame

$$\dot{\varepsilon}^p(t) = \frac{d\varepsilon^p(t)}{dt} = \frac{1}{\eta}\left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_k} - 1\right] = \frac{1}{\eta}\left\{\frac{E\left[\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)\right]}{\sigma_k} - 1\right\} = \frac{1}{\eta}\left\{\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)}{\varepsilon_0} - 1\right\} = \frac{1}{\eta\varepsilon_0}\left[\alpha t - \varepsilon^p(t)\right] \tag{16.6}$$

Riešením tejto diterenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou $\varepsilon^p(0) = 0$ dostaneme veľkosť viskoplastickej deformácie v čase t

$$\varepsilon^p(t) = \alpha\left[t - \eta\varepsilon_0\left(1 - \varepsilon^{-t/(\eta\varepsilon_0)}\right)\right] \tag{16.7}$$

a po dosadení tohto výsledku spolu s (16.5) do Hookeovho zákona $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$ aj napätie ako funkciu času

$$\sigma(t) = \sigma_k\left[1 + \alpha\eta\left(1 - \varepsilon^{-t/(\eta\varepsilon_0)}\right)\right] \tag{16.8}$$

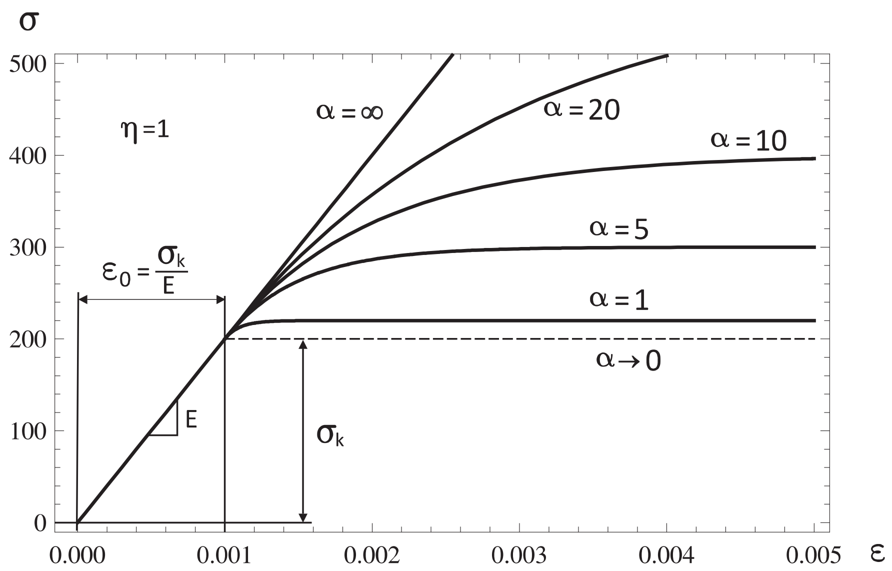
Pomocou tohto vzťahu možno simulovať klasickú jednoosovú krípovú závislosť materiálu (závislosť napätia od času pri zadanej konštantnej rýchlosti deformácie α). Pravda, z praktických dôvodov (kvôli ľahšiemu porovnávaniu s experimentálnymi meraniami) je výhodnejšie vyjadriť zmenu napätia v závislosti od deformácie ε. Transformáciu času na meniacu sa deformáciu dostaneme zo (16.5)

$$t = t(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\alpha} \tag{16.9}$$

Dosadením tohto vzťahu do (16.8) dostaneme

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_k \{1 + \alpha\eta[1 - e^{\frac{1}{\eta\alpha}(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}]\} \tag{16.10}$$

Krípové krivky určené z tohto vzťahu s hodnotami $\sigma_k = 200$ MPa, E = 200000 MPa a so súčinom materiálových konštánt $\alpha\eta$ z rozsahu od 0 po ∞ sme znázornili na obr. 16.3.



Obr. 16.3 *Krípové krivky jednorozmerného modelu*

S uvedenými zjednodušujúcimi podmienkami ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k$, m = 1) možno ľahko ukázať, že model je schopný simulovať aj napäťovú relaxáciu pri aplikovaní konštantnej deformácie ε_0. V takom prípade pre napätie modelu platí funkcia

$$\sigma = E(\varepsilon_0 - \varepsilon_p) = \sigma_0 - E\varepsilon_p \tag{16.11}$$

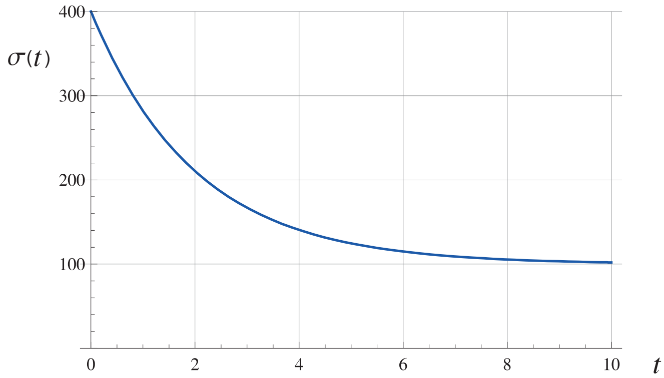
do ktorej treba určiť ε_p z diferenciálne rovnice (16.4)

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{1}{\eta}\left[\frac{\sigma_0 - E\varepsilon_p}{\sigma_k} - 1\right] \tag{16.12}$$

so začiatočnou podmienkou $\varepsilon^p(0) = 0$. Riešenie dáva funkciu relaxácie napätia v tvare

$$\sigma(t) = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_k)(1 - e^{-\frac{E}{\eta\sigma_k}t}) \tag{16.13}$$

ktorej grafická ilustrácia pre hodnoty $E = 10^5$ MPa, σ_0 = 400 MPa, σ_k = 100 MPa, η = 2000 sek, je znázornená na obr. 16.4.



Obr. 16.4

16.1 Integračný algoritmus von Misesovho viskoplastického modelu

Numerická algoritmizácia 3D viskoplastických materiálových modelov sa prirodzene opiera o postupy použité pri modeloch časovo nezávislej plasticity. Pri stručnom opise takéhoto postupu a tvorbe základných rovníc viskoplastického materiálového modelu využijeme postup uvedený v kapitole 13 pri numerickej integrácii konštitutívnych rovníc von Misesovho modelu s izotropným spevňovaním. V uvedenej kapitole možno tiež nájsť opis princípu integračnej metódy elastický prediktor/plastický korektor i fyzikálne vysvetlenie veličín, ktoré nie sú opätovne uvádzané v tejto časti.

a) Testovací elastický krok (elastický prediktor)

Najprv sa predpokladá, že v kroku $< t_n, t_{n+1} >$ prírastok celkovej deformácie $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ v uvažovanom bode je elastický ($\Delta\lambda = 0$). Potom z prírastku celkovej deformácie a známych hodnôt v čase t_n možno určiť tzv. skúšobné hodnoty

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{e\ test} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{p\ test} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\ test} &= \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} &= \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^{e\ test} \end{aligned} \tag{16.14}$$

Nasleduje kontrola testovacieho elastického stavu pomocou podmienky plasticity. Ak platí

$$f^{test} \equiv f[\boldsymbol{\sigma}^{test}, \sigma(\overline{\varepsilon}^{p\ test}] \le 0 \tag{16.15}$$

znamená to, že skúšobné napätie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test}$ vyšetrovaného bodu leží v elastickej oblasti, alebo sa práve nachádza na ploche viskoplasticity, a môže byť akceptované ako výsledné napätie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Platí to aj pre ostatné veličiny v (16.14). V opačnom prípade sa napätie musí sa opraviť (ako aj ďalšie testovacie hodnoty) pomocou algoritmu viskoplastického korektora (v našom prípade podľa zovšeobecneného Peirce/Perićovho vzťahu).

b) Viskoplastický korektor

Pre napäťový bod, ktorý nespĺňa podmienku (16.15), t.j. pre ktorý $f^{test} > 0$, je potrebné vykonať numerickú integráciu nelineárnych funkcií v intervale $< \mathrm{t}_n, \mathrm{t}_{n+1} >$. V algoritme viskoplastického korektora opäť využijeme *plne implicitnú spätnú Eulerovu metódu* a dostaneme rovnice

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{test} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e : \mathbf{f}_{n+1} \tag{16.16}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1} = \bar{\varepsilon}_n + \Delta\lambda \tag{16.17}$$

s viskoplastickým násobkom $\Delta\lambda$, pre ktorý v našom prípade platí

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta t}{\eta}\left[\left(\frac{\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\sigma_k(\varepsilon_{n+1})}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \tag{16.18}$$

a kde Δt je časový prírastok v zaťažovacom kroku a $\bar{\sigma}$ je von Misesovo ekvivalentné napätie. Ak sa podarí vyriešiť tento systém nelineárnych rovníc, potom bude možné upraviť deformácie zo vzťahov

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^p_n + \Delta\lambda \mathbf{f}_{n+1}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^e_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{test}_{n+1} - \Delta\lambda \mathbf{f}_{n+1} \tag{16.19}$$

Systém nelineárnych rovníc (16.16) a (16.17) možno pre von Misesov materiálový model analogicky ako v kapitole 13 zredukovať na jedinú nelineárnu rovnicu s jedinou neznámou $\Delta\lambda$ a pri lineárnom spevňovaní možno hľadané hodnoty v čase t_{n+1} dokonca určiť priamo z hodnôt skúšobného elastického kroku. Ako sme už uviedli, von Misesov vektor plastického tečenia

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \tag{16.20}$$

je čisto deviatorický, a preto je výhodné rozdeliť napätie na deviatorickú a objemovú časť

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \sigma_{m\,n+1}\boldsymbol{I} \tag{16.21}$$

Objemová zložka $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ sa v (16.21) pri algoritme nemení

$$\sigma_{m\,n+1} = \sigma^{test}_{m\,n+1} \tag{16.22}$$

a treba určiť len deviátor napätia, pre ktorý podľa Eulerovej metódy analogicky s (16.16) platí

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^{test}_{n+1} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e : \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{s}^{test}_{n+1} - \Delta\lambda 2G\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{s}^{test}_{n+1} - \Delta\lambda 2G\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \tag{16.23}$$

a po úprave

$$\left(1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\Delta\lambda 2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}\right)\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^{test}_{n+1}$$

Pretože výraz v zátvorke je skalár, obe deviatorické napätia sú kolineárne

$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{test}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{test}\|}$$

a keď to využijeme v (16.23) dostaneme jednoduchý vzťah pre výpočet deviátora napätia v čase t_{n+1}

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}\Delta\lambda\right)\mathbf{s}_{n+1}^{test} = \left(1 - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{test}}\Delta\lambda\right)\mathbf{s}_{n+1}^{test} = k\mathbf{s}_{n+1}^{test} \tag{16.24}$$

kde $\bar{\sigma}_{n+1}^{test}$ je elastická skúšobná hodnota von Misesovho ekvivalentného napätia. Aplikáciou (16.24) aj na definíciu von Misesovho ekvivalentného napätia dostávame jeho redukovanú hodnotu

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda \tag{16.25}$$

Výsledný vzťah pre výpočet $\Delta\lambda$ dostaneme dosadením tohto vzorca spolu so (16.17) do (16.18)

$$\Delta\lambda - \frac{\Delta t}{\eta}\left[\left(\frac{\bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda}{\sigma_k\left(\varepsilon_n^p + \Delta\lambda\right)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right] = 0 \tag{16.26}$$

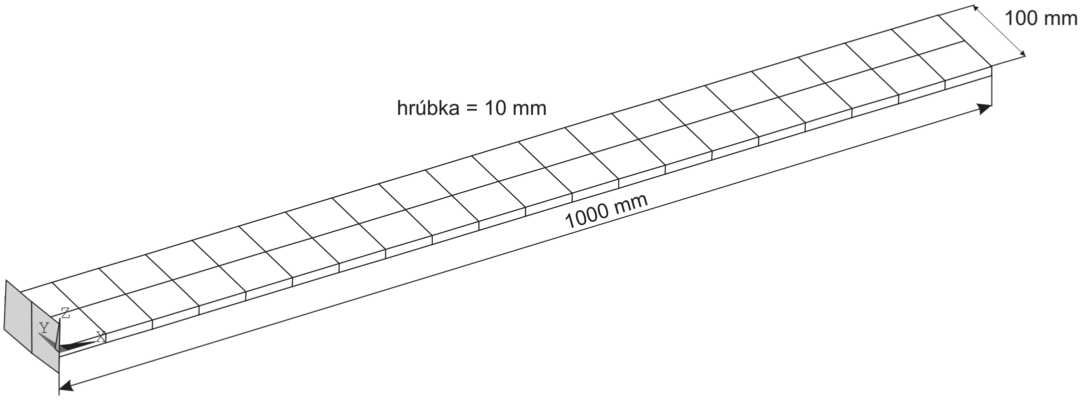
alebo po úprave

$$\left(\bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda\right)\left(\frac{\Delta t}{\eta\Delta\lambda + \Delta t}\right)^{m} - \bar{\sigma}_k\left(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda\right) = 0 \tag{16.27}$$

Viskoplastický násobok $\Delta\lambda$ možno z nelineárnej rovnice (16.27) určiť Newton-Raphsonovou metódou a potom z rovníc (16.24) a (16.21) napätie. Tak isto už možno upraviť všetky ďalšie napäťové i deformačné veličiny, ktoré potom slúžia ako východzie hodnoty pre ďalší časový krok.

Príklad 16.1

Pre podlhovastú na jednej strane votknutú obdĺžnikovú dosku, ktorej výpočtový model a rozmery sú znázornené na obrázku, určte pomocou programu ANSYS v intervale 0 až 0,5 hod. časový priebeh maximálneho ohybového napätia, časový priebeh plastickej deformácie a priebeh priehybu dosky na voľnom konci, keď ju náhle zaťažíme tlakom p = 500 Pa. Poissonovo číslo materiálu $\mu = 0{,}3$ a modul pružnosti E = 10000 MPa nie sú časovo závislé. Použite Peirce/Perićov viskoplastický model. Vyhodnotením experimentálneho testu materiálu sa zistili tieto hodnoty materiálových konštánt m = 0,8 a $\eta = 0{,}01$ hod. Medza začiatku plastickej deformácie je $\sigma_k = 6$ MPa a spevňovací modul $E_T = 2500$ MPa.



Riešenie

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = OhybViskoPlastDosky, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Shell Elastic 4node 181, OK, Close;

3. Hrúbka dosky
Main Menu>Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... OK, TK(I) = 10, OK, Close;

4. Materiálové údaje
Lineárne
Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 10000, PRXY = 0.3, OK,
Nelineárne a bilineárne spevňovanie
Nonlinear>Inelastic> Rate Dependent>Visco-Plasticity>Isotropic Hardening Plasticity>
Mises Plasticity>Bilinear, Peirce Model, m = 0.8, Gamma = 0.01, OK, Yield Stss = 6, Tang Mod = 2500, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie bodov plochy prvkov (číslovanie bodov je automatické)
Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS: X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 100, Apply,
X = 0, Y = 100, OK;

6. Vytvorenie plochy prvkov
Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>Through KPs: ↑KP1,↑KP2,↑KP3,↑KP4, OK;

7. Vytvorenie prvkov
Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Areas, Set: Pick All, SIZE = 50, OK;
(Preprocessor>Meshing>Mesh Tool): Mesh, Pick All, Close;

8. Upevnenie modelu

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes ↑,
P: Tri uzly na ľavej strane obdĺžnika, OK, All DOF, Value = 0, OK;

9. Zaťaženie tlakom *p*

Solution>Define Loads>Apply>Structural>Pressure>On Areas ↑, Pick All, Value = 0.0005, OK;

10. Riadiace príkazy nelineárneho riešenia a výpočet

Solution>

P:Unabridged Menu

Load Step Opts>Time/Frequenc>Time - Time Step..., TIME = 0.5, DELTIM = 0.005, KBC = Stepped, Minimum time step = 1E-5, Maximum time step = 0.01, OK;

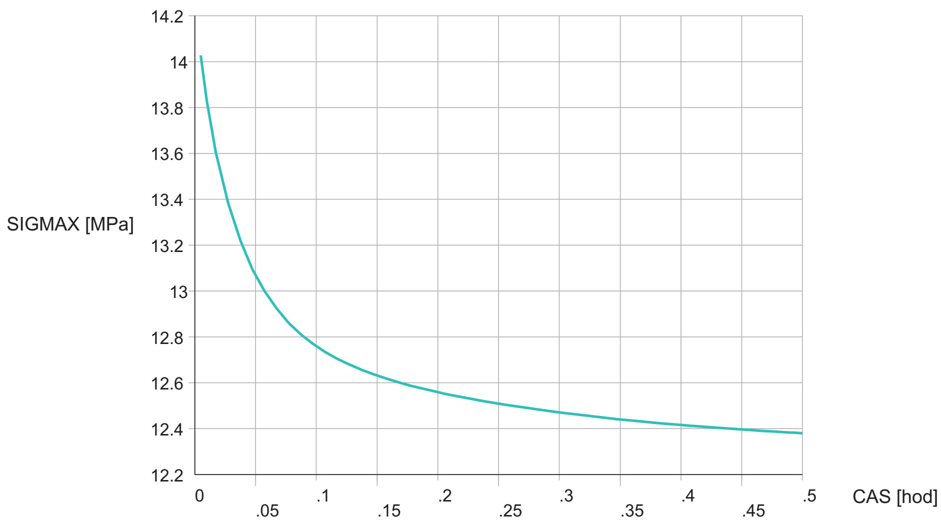
Load Step Opts>Output Ctrls>DB/Results File..., FREQ=Every Substep, OK;

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

11. Vykreslenie relaxácie ohybového napätia (v krajnom vlákne votknutého prierezu), viskoplastickej deformácie (v krajnom vlákne votknutého prierezu) a maximálneho priehybu

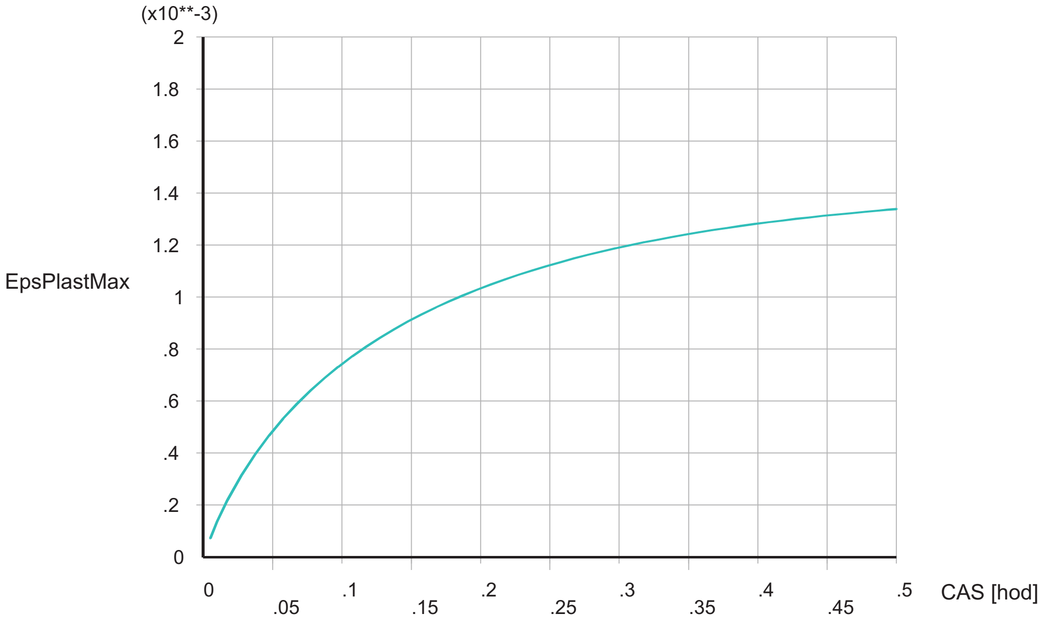
Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Pospro>Kliknite na prvú ikonku zľava (Add Data), Nodal Solution>Stress>X-Component of stress, Result is taken from the = bottom, OK, Kliknite uzol vo votknutí, OK, Piknite tretiu ikonku zľava (Graph Data),



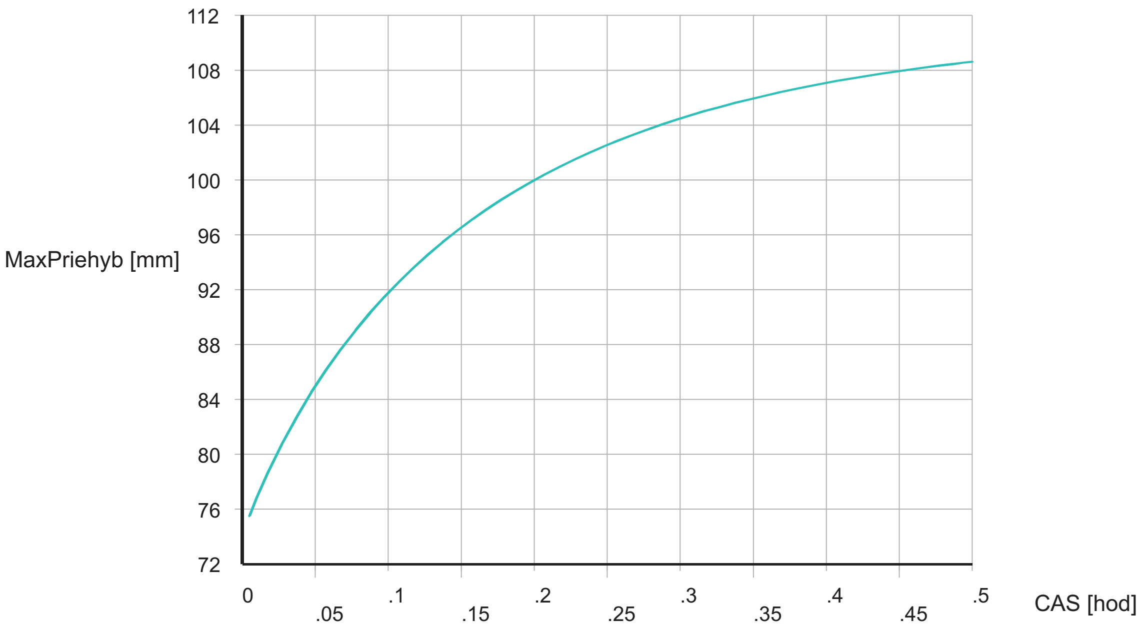
Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Pospro>Kliknite na prvú ikonku zľava (Add Data), Nodal Solution, Plastic strain, X-Component of plastic strain, Result is taken from the = bottom, OK, Kliknite uzol vo votknutí, OK, Kliknite na tretiu ikonku zľava (Graph Data),



Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Pospro>Kliknite prvú ikonku zľava (Add Data), Nodal Solution, DOF Solution, Z-Component of displacement, OK, Kliknite uzol na voľnom konci dosky, OK, Kliknite na tretiu ikonku zľava (Graph Data),



11. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

*Ansys Toolbar>Quit>*Save Geom+Loads, OK;

Dosku, vzhľadom na jej tvar, možno považovať za nosník a začiatočné maximálne napätie (v čase t = 0) a i začiatočný maximálny priehyb možno približne skontrolovať pomocou vzorcov platných pre ohyb nosníka.

Čiarové zaťaženie nosníka (na jednotku dĺžky) v našom prípade je

$$q=\frac{Q}{\ell}=\frac{pS}{\ell}=\frac{0{,}0005\cdot(1000\cdot 100)}{1000}=0{,}05\,\mathrm{N/mm}$$

Maximálne ohybové napätie nosníka vo votknutí potom je

$$\sigma_{o\max}=\frac{M_{o\max}}{W_o}=\frac{q\ell\cdot\ell/2}{\frac{1}{6}bh^2}=\frac{50\cdot 500}{\frac{1}{6}100\cdot 10^2}=15{,}00\,\mathrm{MPa}$$

a pre maximálny priehyb platí

$$w_{\max}=\frac{q\ell^4}{8EI}=\frac{q\ell^4}{8E\frac{1}{12}bh^3}=\frac{0{,}05\cdot 10^{12}}{8\cdot 10^4\frac{1}{12}100\cdot 10^3}=75\,\mathrm{mm}$$

16.2 Krípové modely bez plochy plastického tečenia

Perzynov model krípu a jeho modifikácie možno využiť pre relatívne krátke časové intervaly, najmä pre problémy krátkodobo pôsobiaceho rázového pružne-plastického namáhania, pretože pri dlhšom časovom rozpätí numerické riešenie diverguje. Pri dlhých časových intervaloch klasického krípu s vyššími teplotami sa uplatňujú viskoplastické modely bez elastickej oblasti s ohraničujúcou plochou plasticity a teda bez medze určujúcej začiatok časovo závislej plastickej deformácie. Pri takýchto modeloch takto vzniká trvalá krípová deformácia pri ľubovoľnej nenulovej hodnote napätia, čo pri vyšších teplotách je prijateľné aj pre kovové materiály (obr. 16.2). S ohľadom na predchádzajúci výklad krípovej problematiky stačí tieto modely charakterizovať jednorozmernými vzťahmi pre určovanie rýchlosti (visko)plastickej deformácie $\dot{\varepsilon}^p$.

Všeobecne známy a často využívaný je Bailey-Nortonov krípový zákon (mocninný krípový zákon)

$$\varepsilon^p = A\sigma^n t^m \tag{16.28}$$

s teplotne závislými materiálovými konštantami A, n, m, ktorého rýchlostný (prírastkový tvar je

$$\dot{\varepsilon}^p = A\sigma^n m t^{m-1} \tag{16.29}$$

Je to tzv. formulácia s časovým spevňovaním (pri nezmenených materiálových konštantách väčšie napätie zvýši rýchlosť deformácie a časový priebeh deformácie vykazuje menšie hodnoty ε^p).

Ak z (16.28) vyjadríme čas a dosadíme ho do (16.29) dostaneme formuláciu s deformačným spevňovaním (pri nezmenených materiálových konštantách väčšie napätie zvýši rýchlosť deformácie a pri tom istom čase model dospeje k menšej hodnote ε^p).

$$\dot{\varepsilon}^p = A^{1/m} m\sigma^{n/m}(\varepsilon^p)^{(m-1)/m} \tag{16.30}$$

Pri numerických metódach a obzvlášť v MKP sa viac uplatňujú formulácie s deformačným spevňovaním a poväčšine aj vykazujú lepšiu zhodu s nameranými experimentálnymi hodnotami.

Veľké množstvo krípových rovníc možno násť v tvare súčinu navzájom nezávislých funkcií napätia, teploty a času

$$\dot{\varepsilon}^p = F(\sigma, T, t) = f(\sigma)\, g(T)\, h(t) \tag{16.31}$$

kde T je absolútna teplota a funkcie f, g, h sa určujú experimentálne. Funkcia vyjadrujúca vplyv teploty má obyčajne tvar Arrheniovho zákona

$$g(T) = Ce^{-\frac{Q}{RT}} \tag{16.32}$$

kde C je konštanta, Q [J mol^{-1}] je aktivačná konštanta, obyčajne nezávislá na teplote a R = 8,31 [J mol^{-1} K^{1}] je univerzálna plynová konštanta.

Záujemca može nájsť množstvo krípových rovníc napr. v manuáli programu Ansys; sú rozdelené podľa spôsobu integrácie na explicitné a implicitné a podľa určenia na rovnice pre kríp primárny, sekundárny alebo primárny i sekundárny.

Príklad 16.2

Kovový prút o dĺžke ℓ = 1000 mm s prierezom S = 100 mm^2 zaťažíme silou F = 10000 N pri konštantnej teplote 350 °C. Materiál pri tejto teplote vykazuje jednorozmernú krípovú deformáciu s rýchlosťou

$$\dot{\varepsilon}^p = 10^{-6}\sqrt{\sigma}\, t^{-0,8}$$

kde čas je vyjadrený v hodinách a napätie v N/mm^2, t.j. v MPa. Určte pomocou programu Ansys celkové predĺženie prúta v čase t = 100 hod.

Riešenie

Vzhľadom jednoduchosť telesa a relatívne malý časový interval úlohy zvolíme explicitnú metódu integrácie. Z ponuky explicitných krípových rovníc s časovým spevňovaním programu Ansys pre našu úlohu vyhovuje rovnica

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C2} t^{C3} e^{-C4/T}$$

kde C4 = 0 (teplota sa nemení) a treba zadať C6 = 1, čím zvolíme časové spevňovanie (pozri krípové rovnice v manuáli programu).

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = Kríp ťahaného prúta, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Link 2D Spar 1, OK, Close;

3. Prierez prúta
Main Menu>Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... ,OK, AREA = 100, OK, Close;

4. Materiálové údaje

Lineárne

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 100000, PRXY = 0.3, OK,

Krípová rovnica

Nonlinear>Inelastic> Rate Dependent>Creep>Creep only>Mises Potential>Explicit, C1 = 1E-6, C2 = 0.5, C3 = -0.8, C6 = 1, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie uzlov (číslovanie bodov je automatické)

Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>In Active CS: X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 0, OK;

6. Vytvorenie prvku (prúta)

Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Trough Nodes: ↑KP1,↑KP2, OK;

7. Upevnenie prúta a zadanie sily a teploty

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes ↑, Kliknite ľavý uzol, OK, All DOF, Value = 0, OK;

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes ↑,Kliknite pravý uzol, OK, FX = 10000, OK;

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Temperature>On Nodes>Nodes ↑, Pick All, Val1 = 350, OK;

8. Riadiace príkazy nelineárneho riešenia a výpočet

Solution>

P:Unabridged Menu

Load Step Opts>Time/Frequenc>Time and Substps..., TIME = 100, NSUBST = 2000, KBC=Stepped, OK;

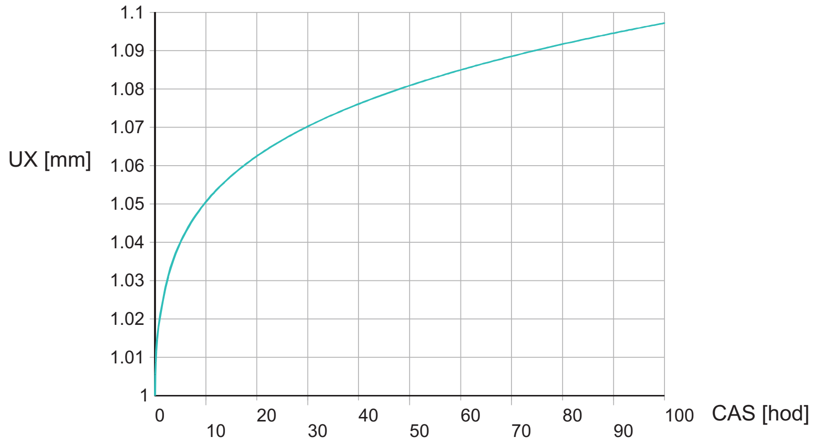
Load Step Opts>Output Ctrls>DB/Results File..., FREQ=Every Substep, OK;

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

11. Vykreslenie krípového posuvu koncového bodu prúta

Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Pospro>Kliknite prvú ikonku zľava (Add Data), Nodal Solution, DOF Solution, X-Component of displacement, OK, Kliknite uzol na voľnom konci prúta, OK, Kliknite na tretiu ikonku zľava (Graph Data),



11. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy
Ansys Toolbar>*Quit*>Save Geom+Loads, OK;

Kotrola pružného posunutia koncového bodu prúta

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{ES} = \frac{10^4 \cdot 10^3}{10^5 \cdot 10^2} = 1\,\mathrm{mm}$$

17 Prenos tepla

Prenosom tepla, s obmedzením na tuhé telesá, sme sa už čiastočne zaoberali v kapitole 8 a v [1]; v tomto doplnku sa k prenosu tepla vrátime komplexnejším pohľadom.

17.1 Tri spôsoby prenosu tepla

Pod prenosom tepla sa rozumie vedecká disciplína, ktorá sa zaoberá prenosom tepelnej energie v telesách a tekutinách (kvapalinách a plynoch) vyvolanom rozdielom teplôt. Rozoznávame tri spôsoby prenosu tepla:

a) vedením (kondukciou)

b) prúdením (konvekciou)

c) žiarením (radiáciou)

Teplo (tepelná energia) určitého množstva látky predstavuje súhrn spriemerovanej kinetickej energie jej častíc (molekúl a atomov). Pri *prenose tepla vedením* sa uskutočňuje výmena energie medzi stýkajúcimi sa časticami s rozdielnymi teplotami. Kondukcia silne závisí od vlastností média a vyskytuje sa nielen v tuhých telesách ale aj v kvapalinách a plynoch.

Molekuly kvapalín a plynov sa môžu voľne pohybovať a pri tomto pohybe z chladnejšej do teplejšej oblasti prenášajú energiu. Tento prenos tepla sprevádzaný aj medzimolekulovou kondukciou sa nazýva *prenos tepla prúdením*. Ak pohyb tekutiny vyvolávajú len rozdiely jej hustoty spôsobené rozdielnou teplotou, hovoríme o voľnej, resp. prirodzenej konvekcii. Ak je prúdenie vyvolané vonkajšou silou (pumpovanie, fúkanie a pod.) hovoríme o vynútenej konvekcii.

Všetky telesá s nenulovou absolútnou teplotou vyžarujú tepelnú energiu. *Tepelná radiácia* je jediný spôsob prenosu tepla, ktorý nevyžaduje materiálne médium, aby došlo k prenosu energie. Teplo sa vyžaruje z povrchu objektu prostredníctvom elektromagnetických vĺn. Keď tieto vlny zasiahnu povrch iného objektu, časť energie sa odrazí, časť sa pohltí a zvyšok sa šíri ďalej.

Pri reálnych problémoch prenosu tepla v technickej praxi sa obyčajne stretávame so všetkými tromi spôsobmi prenosu tepla. Často však ich podiel je kvantitatívne výrazne rozdielny a úlohu možno mnohokrát redukovať len na jeden, ktorý výrazne prevláda v celkovom prenose energie.

Špeciálnym pripadom zmeny tepelnej energie sú fázové premeny látky (var, kondenzácia, roztápanie, tuhnutie), kedy pri konštantnej teplote látka spotrebúva teplo (pri uvoľňovaní medzimolekulových väzieb) alebo vydáva teplo (pri vytváraní pevnejších medzimolekulových väzieb látky).

17.2 Základné vzťahy

Pri analýze prenosu tepla sa využívajú vzťahy, ktoré kvantifikujú množstvo energie, ktoré prejde za jednotku času cez jednotku plochy, pričom hnacou silou tejto rýchlosti energetického toku je teplotný rozdiel, resp. teplotný gradient. Pri prenose tepla vedením sa tento vzťah nazýva Fourierov zákon, ktorý pre jednorozmerné vedenie tepla má tvar

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \tag{17.1}$$

kde q [W/m^2] označuje hustotu tepelného toku v smere *x*, λ [W/mK] je súčiniteľ tepelnej vodivosti látky, T [K] je teplota a *dT/dx* je teplotný gradient v smere *x*. Hodnoty koeficientu vedenia tepla pre niektoré materiály sme uviedli v tab. 17.1.

Pri prenose tepla medzi prúdiacou tekutinou s teplotou T_{tek} a stenou tuhého telesa s teplotou T sa uplatňuje Newtonov zákon ochladzovania

$$q = h(T - T_{tek}) \tag{17.2}$$

kde *h* [W/(m^{2}K)] je koeficient prestupu tepla konvekciou (koeficient prestupovej vrstvy). Typické hodnoty tohoto koeficientu uvádzame v tab. 17.2.

Maximálne množstvo tepla za jednotku času *Q* [W], ktoré môže vyžiariť plocha S absolútne čierneho telesa s teplotou T udáva Stefan-Bolzmannov zákon

$$Q = \sigma T^4 S \tag{17.3}$$

kde σ [W/(m^{2}K^4)] je Stefan Bolzmannova konštanta (σ = 5,67 10^{-8}) a T je absolútna teplota plochy. Teplo, ktoré vyžaruje reálny povrch pri tej istej teplote je vo všeobecnosti menšie, čo sa vyjadruje bezrozmerným násobkom (emisivitou) $\varepsilon < 1$. Ak horúci objekt s plochou S_1, emisivitou ε_1 a teplotou T_1 je celý obkolesený omnoho väčšou plochou o teplote T_2 množstvo vyžiareného tepla je

$$Q = qS_1 = \varepsilon_1 \sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4) \tag{17.4}$$

Pokiaľ analyzujeme množstvo vzájomnej výmeny vyžarovaného tepla dvoch telies s plochami S_1 a S_2, vzťah (17.4) sa komplikuje a možno ho formálne vyjadriť v tvare

$$Q = f_1 f_2 \varepsilon_1 \sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4) \tag{17.5}$$

kde bezrozmerný súčiniteľ f_1 vyjadruje emisno-absorbčné vlastnosti oboch plôch a f_2 vzdialenosť a vzájomnú geometrickú orientáciu oboch vyžarujúcich plôch.

Tabuľka 17.1 *Niektoré hodnoty koeficientu tepelnej vodivosti* [14]

Materiál	λ [W/(mK)]
Kovy	
Čisté striebro	410
Čistá meď	385
Čistý hliník	200
Čisté železo	73

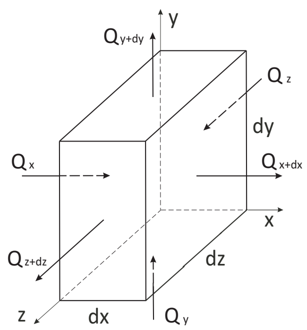
Zliatiny	
Nehrdzajúca oceľ (18% Cr, 8% Ni) Hliníková zliatina (4,5% Cr)	16 168
Nekovové materiály	
Plastická látka Drevo	0.6 0.2
Kvapaliny	
Voda	0,6
Plyny	
Suchý vzduch (pri atmosférickom tlaku)	0,025

Tabuľka 17.2 *Niektoré hodnoty koeficientu prestupu tepla konvekciou* [15]

h [W/(m^{2}K)]	
Plyny (neprúdiace) Prúdiace plyny Kvapaliny (neprúdiace) Prúdiace kvapaliny Vriace kvapaliny Kondenzujúce pary	15 15 -250 100 100 - 2000 2000 - 35000 2000 - 25000

17.3 Rovnica vedenia tepla

Základnou (primárnou) premennou, ktorú treba určiť pri úlohe vedenia tepla v tuhom telese, je *teplota*, ako funkcia polohy pri ustálenom stave $T \equiv T(x, y, z)$, resp. ako funkcia polohy a času $T \equiv T(x, y, z, t)$, pri nestacionárnom vedení tepla. Z tejto funkcie potom už možno určiť sekundárne premenné: teplotný gradient pomocou parciálnej derivácie tejto funkcie, alebo tepelný tok z Fourierovho zákona. Fukcia $T \equiv T(x, y, z, t)$ sa určuje z diferenciálnej rovnice vedenia tepla, ktorú teraz odvodíme z bilančných vzťahov (zo zákona zachovania energie) diferenciálneho elementu vyrezaného myslenými rezmi z telesa, v ktorom prebieha proces vedenia tepla (obr. 17.1).



Obr. 17.1 *Diferenciány element pre analýzu vedenia tepla v telese*

Vo všeobecnom bode telesa (x,y,z) hodnoty množstva vedeného tepla za jednotku času Q [W $\equiv$ J/s] v smere súradnicových osí rozvinieme do skráteného (dvojčlenného) Taylorovho radu a dostávame

$$\begin{aligned} Q_{x+dx} &= Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}dx \\ Q_{y+dy} &= Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}dy \\ Q_{z+dz} &= Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{17.6}$$

Budeme tiež predpokladať, že v elemente sa generuje teplo

$$Q_{gen} = \bar{Q}dxdydz \tag{17.7}$$

kde $\bar{Q}$ [W/m^3] je výdatnosť tepelného zdroja.

Veľkosť akumulovaného tepla v elemente (t.j. maximálne množstvo tepla, ktoré je schopný v sebe "uskladniť") závisí od špecifickej tepelnej kapacity materiálu *c* [J/(kgK)], jeho hmotnosti (t.j. od hustoty materiálu ρ a objemu) a rýchlosti zmeny teploty

$$Q_{akum} = c\rho dxdydz\frac{\partial T}{\partial t} \tag{17.8}$$

Tepelná bilancia elementu za jednotku času sa potom zostaví takto: Súčet privedeného tepla a generovaného tepla sa musí rovnať súčtu odvedeného tepla a akumulovaného tepla. S prihliadnutím na obr. 17.1 potom dostávame rovnicu

$$Q_x + Q_y + Q_z + \bar{Q}dxdydz = Q_{x+dx} + Q_{y+dy} + Q_{z+dz} + \rho c dxdydz\frac{\partial T}{\partial t} \tag{17.9}$$

Do tejto rovnice dosadíme vzťahy (17.6) a usporiadame členy

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y}dy - \frac{\partial Q_z}{\partial z}dz + \bar{Q}dxdydz = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}dxdydz \tag{17.10}$$

Podľa Fourierovho zákona (17.1) platí

$$\begin{aligned} Q_x &= q_x dydz = -\lambda_x dydz\frac{\partial T}{\partial x} \\ Q_y &= q_y dxdz = -\lambda_y dxdz\frac{\partial T}{\partial y} \\ Q_z &= q_z dydz = -\lambda_z dydz\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

Po dosadení týchto vzťahov do (17.10) a vydelením rovnice objemom elementu *dxdydz* dostávame diferenciálnu rovnicu nestacionárneho vedenia tepla

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right]+\bar{Q}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (17.11)$$

Ak sa materiál z hľadiska tepelnej vodivosti chová izotropne ($\lambda_x=\lambda_y=\lambda_z=\lambda$) rovnica sa zjednoduší

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\bar{Q}}{\lambda}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (17.12)$$

kde $\alpha=\lambda/(\rho c)$ sa nazýva súčiniteľ tepelnej difuzivity.

Ak sa analyzuje ustálené vedenie tepla bez vnútornej generácie tepla, rovnica sa zmení na

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \qquad (17.13)$$

a keď to bude jednorozmerná úloha, platí

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right]=0 \qquad (17.14)$$

Pretože (17.11) je diferenciálna rovnica 1. rádu vzhľadom na čas, musíme pre ňu zadať jednu *začiatočnú podmienku*

$$T(x,y,z,t=0)=T_0(x,y,z) \qquad (17.15)$$

kde funkcia T_0 udáva rozdelenie teploty na začiatku riešenia úlohy v celom objeme telesa.

Okrem toho pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu (vzhľadom na polohové premenné) musíme zadať dve *okrajové podmienky*. Dirichletova okrajová podmienka v tomto prípade je

$$T(x,y,z,t)=T_1(x,y,z,t) \qquad \text{na } S_1 \qquad (17.16)$$

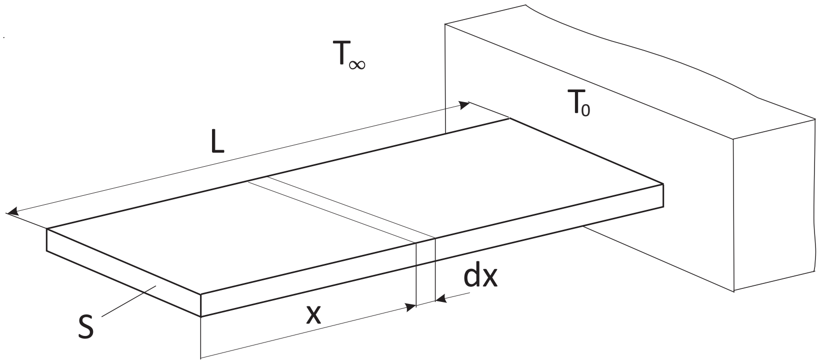
kde S_1 je časť povrchu telesa, kde sme predpísali teplotu pomocou funkcie T_1.
Cauchyho okrajová podmienka predpisuje tepelný tok $\bar{q}$ (vo W/m^2) cez plochu S_2

$$\bar{q}=\lambda_n\frac{\partial T}{\partial n}=\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha+\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}\cos\beta+\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\cos\gamma \qquad \text{na } S_2 \qquad (17.17)$$

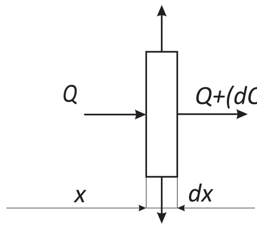
kde vystupujú smerové kosínusy vonkajšej normály k ploche. Vo všeobecnosti plochy S_1 a S_2 predstavujú súhrn viacerých plôch príslušného typu a platí $S_1\cup S_2=S$, $S_1\cap S_2=0$, kde S je celkový povrch telesa.

17.4 Príklad jednorozmerného prenosu tepla

Uvažujme prút (chladiace rebro) konštantného prierezu S na obr. 17.2, ktorého dĺžka L výraznejšie prevláda nad šírkou. V takomto prípade možno zanedbať zmenu teploty v priečnom smere a riešiť úlohu ako jednorozmernú v smere osi x. Prút je votknutý do steny s vysokou teplotou T_0, je obtekaný chladiacim médiom o teplote T_∞ a má slúžiť na odvod tepla zo steny. Začiatok pre x sme zvolili, čo do priebehu teploty trochu nenázorne, na konci prúta, pretože v takomto prípade hľadaná funkcia $T(x)$ má jednoduchší tvar, ako v prípade voľby začiatku vo votknutí. Platí to potom aj pre aproximačnú funkciu využívanú pri jednotlivých numerických metódach. Materiál prúta má vodivosť λ a známy je aj súčiniteľ prestupu tepla medzi prútom a chladiacim médiom *h*. Šírka a hrúbka prúta je potrebná len na výpočet obvodu (perimetra) prúta *p* a tvar prierezu prúta pri tejto úlohe teda nie je významný.



Obr. 17.2 *Obrázok pre analýzu tepelných a teplotných pomerov prúta (chladiaceho* rebra)



Obr. 17.3 *Tepelná bilancia diferenciálneho elementu prúta*

Z prúta vo vzdialenosti *x* a *x*+*dx* myslenými rezmi vyrežeme diferenciálny element (obr. 17.3) s dĺžkou *dx*. Množstvo tepla za jednotku času vo vzdialenosti *x* označíme *Q* a budeme predpokladať, že do elmentu vchádza (v bilančnej rovnici bude mať znamienko +). Teplo, ktoré vo vzdialenosti *x*+*dx* z elementu vychádza je $Q+(dQ/dx)\,dx$ (je to linearizácia funkcie Q v jej okolí pomocou dvojčlenného Taylorovho radu). Na ploche *pdx* ešte odchádza z elementu teplo $pdxh(T-T_\infty)$, kde T je teplota v mieste x a T_∞ je teplota okolitého média v dostatočne veľkej vzdialenosti od steny vyšetrovaného telesa. Potom bilačná rovnica je

$$Q-(Q+\frac{dQ}{dx}dx)-ph(T-T_\infty)dx=0 \tag{17.18}$$

z ktorej dostávame

$$\frac{dQ}{dx}+ph(T-T_\infty)=0 \tag{17.19}$$

Keď uplatníme vzťah medzi množstvom tepla Q a teplotným gradientom podľa Fourierovho zákona (17.1)

$$Q=-\lambda S\frac{dT}{dx} \tag{17.20}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu platnú pre priebeh teploty po dĺžke prúta

$$\lambda S\frac{d^2}{dx^2}(T-T_\infty)-ph(T-T_\infty)=0 \tag{17.21}$$

Zavedením *funkcie prevyšujúcej teploty*

$$\vartheta(x)=T(x)-T_\infty \qquad \rightarrow \qquad T(x)=T_\infty+\vartheta(x) \tag{17.22}$$

a zlúčením ostatných konštánt do μ^2 sa rovnica (17.21) zjednoduší na

$$\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2}-\mu^2\vartheta(x)=0 \qquad \text{kde} \qquad \mu^2=\frac{ph}{\lambda S} \tag{17.23}$$

s okrajovými podmienkami (zanedbávame odvod tepla konvekciou cez koncovú čelnú plochu prúta - malú v porovnaní s celkovou bočnou plochou - budeme túto plošku považovať za tepelne izolovanú)

$$\left.\frac{d\vartheta}{dx}\right|_{x=0}=0 \qquad \text{a} \qquad \left.\vartheta\right|_{x=L}=T_0-T_\infty \tag{17.24}$$

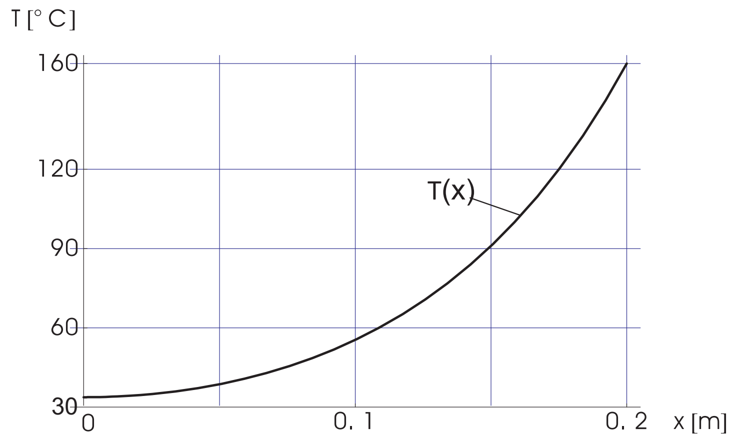
Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (17.23) je

$$\vartheta(x)=C_1e^{\mu x}+C_2e^{-\mu x} \tag{17.25}$$

ktoré sa po uplatnení okrajových podmienok (17.24), výpočte integračných konštánt a po prevode $\vartheta(x)$ na $T(x)$ podľa (17.22) zmení na

$$T(x)=T_\infty+\frac{T_0-T_\infty}{e^{\mu L}+e^{-\mu L}}\left(e^{\mu x}+e^{-\mu x}\right) \tag{17.26}$$

Toto riešenie úlohy budeme považovať za exaktné a grafický priebeh teploty $T(x)$ po dĺžke prúta sme znázornili na obr. 17.4 pre tieto konkrétne hodnoty: L = 20 cm, p = 10 cm, S = 5 cm^2, λ= 50 W/(m°C), h = 100 W/(m^2 °C), T_0 = 160 °C, T_∞ = 10 °C. Z uvedených hodnôt dostaneme podľa (17.23) $\mu^2=160$ 1/m^2.



Obr. 17.4 *Priebeh teploty po dĺžke prúta podľa exaktného riešenia (17.26)*

17.5 Numerické metódy riešenia úloh vedenia tepla

Exaktné riešenie diferenciálnej rovnice vedenia tepla v telese možno získať len pre obmedzenú triedu jednoduchých úloh. Existuje však množstvo numerických metód, ktoré možno využiť na aproximatívne riešenie úlohy, pričom voľba metódy závisí od konkrétneho charakteru a zložitosti úlohy. My sa budeme venovať predovšetkým univerzálnej metóde konečných prvkov, ale v tejto časti na horeuvedenom jednoduchom príklade jednorozmerného vedenia tepla uplatníme aj riešenie inými metódami. Poslúži to na informáciu o základných numerických metódach (dajú sa, samozrejme, využívať aj pri riešení iných úloh), umožní to ich porovnanie a rozlíšenie a získa sa tým aj pohľad na miesto a zaradenie MKP v množine numerických metód.

Pokiaľ nerozdelíme vyšetrovaný interval na viacero úsekov, musíme si pri numerickom riešení jednorozmernej úlohy zvoliť globálnu aproximatívnu funkciu, spĺňajúcu predpísané globálne okrajové podmienky. Často sa takáto funkcia volí v tvare kombinácie tzv. *testovacích* funkcií $N_i(x)$

$$T(x) \approx \tilde{T}(x) = \tilde{T}(x, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x) \tag{17.27}$$

s neznámymi koefocientami a_i, ktoré treba určiť pomocou zvolenej numerickej metódy. Testovacie funkcie musia byť spojité a diferencovateľné až po najvyšší stupeň derivácie obsiahnutej v diferenciálnej rovnici úlohy.

Pre numerické riešenie horeuvedeného jednorozmerného vedenia tepla zvolíme aproximačnú funkciu prevyšujúcej teploty s jediným neznámym koeficientom a_1 v tvare

$$\tilde{\vartheta}(x) = \tilde{T}(x) - T_\infty = a_0 + a_1 N_1(x) = (T_0 - T_\infty)\left[1 + a_1(x^2 / L^2 - 1\right]) \tag{17.28}$$

ktorá je diferencovateľná až do druhého rádu a spĺňa okrajové podmienky (17.24).

17.5.1 Ritzova metóda

Ak aproximatívny návrh riešenia (17.28) dosadíme do diferenciálnej rovnice (17.23), rovnica vo všeobecnosti nebude splnená a dostaneme nenulový zvyšok (rezíduum)

$$R(x) = \frac{d^2 \tilde{\vartheta}(x)}{dx^2} - \mu^2 \tilde{\vartheta}(x) \neq 0 \tag{17.29}$$

Pri jednoduchej Ritzovej metóde sa vyžaduje nulová integrálna hodnota zvyšku na intervale riešenia

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 \tilde{\vartheta}(x)}{dx^2} - \mu^2 \tilde{\vartheta}(x) \right) dx = 0 \tag{17.30}$$

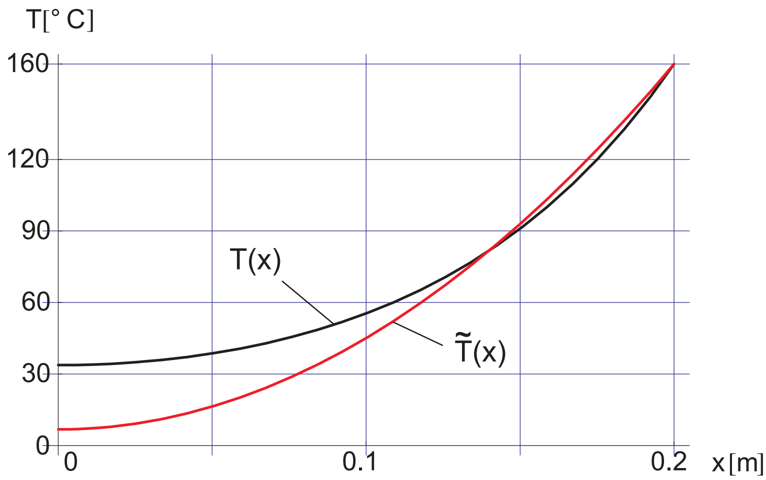
čím dostaneme rovnicu pre určenie koeficientu a_1, a tým viac-menej úspešné spresnenie aproximatívneho riešenia. Po dosadení (17.28) do tohto integrálu, po integrácii a vyčíslení s konkrétnymi hodnotami príkladu dostaneme

$$a_1 = \frac{1{,}5\mu^2 L^2}{3+\mu^2 L^2} = 1{,}0213 \tag{17.31}$$

a upravené približné riešenie (17.28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + \left(T_0 - T_\infty\right)\left[1 + 1{,}0213(x^2 / L^2 - 1)\right] \tag{17.32}$$

čo sa málo líši od parabolického priebehu x^2 / L^2, ktorý by sme dostali pri a_1 = 1. Funkciu $\tilde{T}(x)$ sme v obr. 17.4 graficky porovnali s exaktným riešením.



Obr. 17.4 *Priebeh teploty podľa exaktného riešenia (17.26) a približného riešenia Ritzovou metódou (17.32)*

17.5.2 Variačná metóda (Rayleigh-Ritzova metóda)

V mnohých prípadoch možno riešenie diferenciálnej rovnice nahradiť ekvivalentnou variačnou úlohou nájdenia funkcie, ktorá minimalizuje špeciálny integrál (funkcionál, potenciál) zviazaný s danou diferenciálnou rovnicou. Variáciu funkcionálu diferenciálnej rovnice (17.23) možno vyjadriť vo forme Euler-Lagrangeovej rovnice

$$\delta I = \int_0^L \left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \mu^2 \vartheta \right) \delta\vartheta dx = 0 \tag{17.33}$$

kde δ je symbol variácie príslušnej funkcie alebo veličiny. Integrovaním prvého člena integrantu per partes sa zníži stupeň derivácie v rovnici a dostávame

$$\left[\frac{d\vartheta}{dx} \delta\vartheta \right]_0^L - \int_0^L \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right) \frac{d(\delta\vartheta)}{dx} dx - \mu^2 \int_0^L \vartheta \delta\vartheta dx = 0 \tag{17.34}$$

Rovnicu možno upraviť na

$$\left[\frac{d\vartheta}{dx} \delta\vartheta \right]_0^L - \frac{1}{2} \delta \int_0^L \left[\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 + \mu^2 \vartheta^2 \right] dx = 0 \tag{17.35}$$

kde sa využili vzťahy z variačného počtu

$$\frac{d(\delta\vartheta)}{dx} = \delta\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right); \qquad \frac{d\vartheta}{dx}\delta\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2; \qquad \vartheta\delta\vartheta = \frac{1}{2}\delta\vartheta^2$$

Z okrajových podmienok (17.24) vyplýva, že prvý člen v rovnici (17.35) je rovný nule, takže variačná formulácia nášho príkladu je

$$\delta I = \delta\int_0^L \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 + \mu^2\vartheta^2\right]dx = 0 \tag{17.36}$$

Odmena za námahu spojenú s určením variačného integrálu

$$I = \int_0^L \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 + \mu^2\vartheta^2\right]dx \tag{17.37}$$

spočíva v tom, že ak do neho dosadíme aproximačnú funkciu v tvare podľa (17.27)

$$\tilde{\vartheta}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x) \tag{17.38}$$

a vykonáme integráciu, dostaneme funkciu s n neznámymi koeficientami a_i, ale zároveň aj n rovníc na ich určenie podľa zásad hľadania extrému funkcie viacerých premenných

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{17.39}$$

pričom so zvyšovaním počtu koeficientov aproximatívna funkcia konverguje k exaktnému riešeniu.

Využime teraz túto metódu na približné riešenie nášho príkladu pričom aproximačná funkcia (17.28) má len jeden neznámy koeficient. Dosadíme ju do variačného integrálu (17.37)

$$I = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\frac{4(T_0 - T_\infty)^2 x^2}{L^4} a_1 + \mu^2\left[T_0 - T_\infty + a_1(T_0 - T_\infty)(x^2 - 1)\right]^2\right\} dx \tag{17.40}$$

Parciálnu deriváciu tohto vzťahu podľa a_1 postavíme rovnú nule, čo poskytne rovnicu pre určenie tohto koeficientu

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \int_0^L \left\{\frac{8a_1}{L^4}x^2 + 2\mu^2\left[1 + a_1\left(\frac{x^2}{L^2} - 1\right)\right]\left(\frac{x^2}{L^2} - 1\right)\right\} dx = 0 \tag{17.41}$$

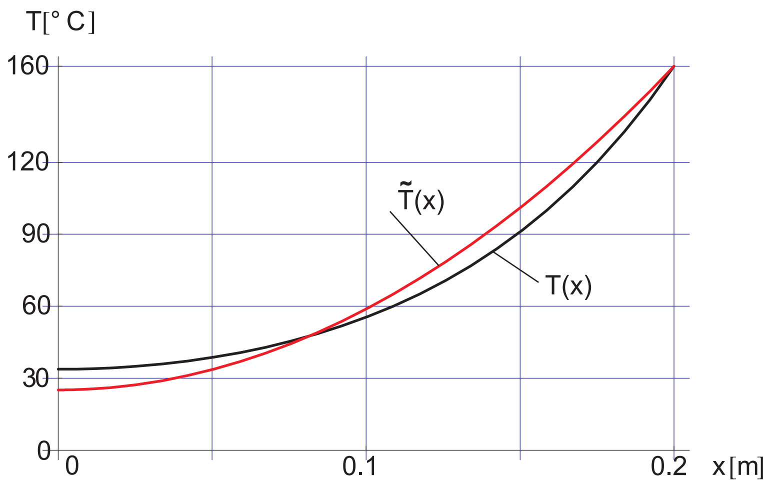
Po vyjadrení integrálu a dosadení konkrétnych hodnôt príkladu, pre koeficient a_1 platí

$$a_1 = \frac{5\mu^2 L^2}{10 + 4\mu^2 L^2} = \frac{5\cdot 160\cdot 0{,}04}{10 + 4\cdot 160\cdot 0{,}04} = 0{,}899 \tag{17.42}$$

Spresnené aproximatívne riešenie s týmto koeficientom podľa (17.28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)[1 + a_1(x^2 / L^2 - 1)] = 10 + 150[1 + 0.899(x^2 / 0.04 - 1)] \quad (17.43)$$

Funkciu $\tilde{T}(x)$ sme v obr. 17.5 graficky porovnali s exaktným riešením.



Obr. 17.5 *Priebeh teploty po dĺžke prúta podľa exaktného (17.26) a variačného (17.43) riešenia*

Variačná metóda poskytla kvalitnejšiu aproximáciu riešenia ako jednoduchá Ritzova metóda, navyše, v prípade zložitejšej úlohy, máme možnosť voliť aproximatívnu funkciu vyššieho stupňa s viacerými koeficientami. Sústavu rovníc na ich určenie potom zostavíme z podmienok minmalizácie variačného integrálu podľa (17.39).

17.5.3 Metódy vážených zvyškov

V metódach vážených zvyškov (reziduí) hľadáme konštanty vhodne zvolenej funkcie aproximatívneho riešenia diferenciálnej rovnice tak, aby zvyšok, t.j. výraz popisujúci mieru nesplnenia diferenciálnej rovnice, nadobúdal buď nulovú hodnotu vo vybraných bodoch, alebo aby bol nulový v zmysle priemerných hodnôt, alebo aby bol nejakým spôsobom minimalizovaný.

Nech problém, ktorý nie sme schopní exaktne riešiť, má všeobecný tvar

$$D(T(x)) + q(x) = 0 \quad (17.44)$$

kde D je lineárny diferenciálny operátor a q je udaná funkcia. Potom ak v tomto vzťahu uplatníme aproximačnú funkciu (17.27), rovnica nebude splnená a dostaneme nenulový zvyšok (rezíduum)

$$R(x) = D(\tilde{T}(x)) + q(x) \neq 0 \quad (17.45)$$

Cieľom metód vážených zvyškov je nútiť funkciu $R(x)$ blížiť sa k nule určitým sumačným (integrálnym) spriemerovacím spôsobom na celej (v našom prípade jednorozmernej) oblasti

$$\int_0^L R(x) w_i(x) dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad (17.46)$$

kde počet tzv. *váhových funkcií* w_i sa rovná počtu neznámych koeficientov v aproximačnej funkcii $\tilde{T}(x)$ (17.27) z jasného dôvodu - aby sme dostali potrebný počet rovníc na ich určenie.

Jednotlivé metódy, z ktorých najznámejšie teraz stručne spomenieme, sa od seba líšia voľbou váhových funkcií v (17.46)

17.5.4 Kolokačná metóda

Jednoduchá metóda kolokácií (umiestnení) rovnomerne umiestňuje tzv. kolokačné body po oblasti riešenia a vyžaduje v nich nulovú hodnotu zvyšku. Váhové funkcie sa vyberajú z triedy Diracových δ fukcií s vlastnosťami

$$\begin{aligned} \delta(x-x_i) &= 1 \qquad x = x_i \\ \delta(x-x_i) &= 0 \qquad x \neq x_i \end{aligned}$$

čo po aplikácii v (17.46) vedie na sústavu rovníc

$$R(x_i) = 0 \tag{17.47}$$

Vyriešime teraz náš príklad touto metódou. Aproximačná funkcia (17.28)

$$\tilde{\vartheta}(x) = \left(T_0 - T_\infty\right)\left[1 + a_1(x^2 / L^2 - 1)\right]$$

má len jeden neznámy koeficient, zvolíme teda len jeden kolokačný bod $x = L/2$ v strede prúta. Na určenie a_1 podľa (17.47) a (17.29) zostavíme rovnicu

$$\left[\frac{d^2\tilde{\vartheta}(x)}{dx^2} - \mu^2\tilde{\vartheta}(x)\right]_{x=L/2} = 0 \tag{17.48}$$

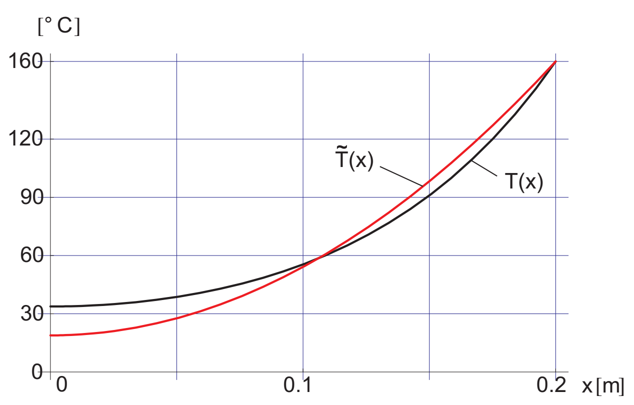
z ktorej po dosadení a jednoduchom riešení dostávame

$$a_1 = \frac{4\mu^2L^2}{8+3\mu^2L^2} = \frac{4\cdot 160\cdot 0{,}04}{8+3\cdot 160\cdot 0{,}04} = 0{,}941 \tag{17.49}$$

Spresnené aproximatívne riešenie s týmto koeficientom podľa (17.28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)[1 + a_1(x^2 / L^2 - 1)] = 10 + 150[1 + 0.941(x^2 / 0.04 - 1)] \tag{17.50}$$

Funkciu $\tilde{T}(x)$ sme v obr. 17.6 graficky porovnali s exaktným riešením.



Obr. 17.6 *Priebeh teploty po dĺžke prúta podľa exaktného (17.26) a kolokačného* (17.50) *riešenia*

17.5.5 Metóda najmenších štvorcov

Pri tejto metóde sa vychádza zo spojitej funkcie vytvorenej integrálnou sumáciou kvadrátov zvyšku na oblasti riešenia

$$S(x)=\int_0^L R^2(x)dx$$

Minimum tejto skalárnej fukcie sa hľadá tak, že sa jej derivácie podľa všetkých neznámych koeficientov aproximačnej funkcie postavia rovné nule, čím dostaneme rovnice na ich výpočet

$$\int_0^L R(x)\frac{\partial R}{\partial a_i}dx=0 \qquad i=1,2,\dots,n \tag{17.51}$$

Porovnaním so (17.46) vidieť, vidieť, že váhovými funkciami sú výrazy

$$w_i=\frac{\partial R}{\partial a_i}$$

Vyriešime teraz náš príklad touto metódou. Aproximačná funkcia (17.28)

$$\tilde{\vartheta}(x)=\left(T_0-T_\infty\right)\left[1+a_1(x^2/L^2-1)\right]$$

má len jeden neznámy koeficient a_1. Na jeho určenie podľa (17.51) a (17.29) zostavíme rovnicu, čo vedie na

$$\int_0^L\left\{\left[2a_1-\mu^2\left(L^2+a_1x^2-a_1L^2\right)\right]\left(2-\mu^2x^2+\mu^2L^2\right)\right\}dx=0$$

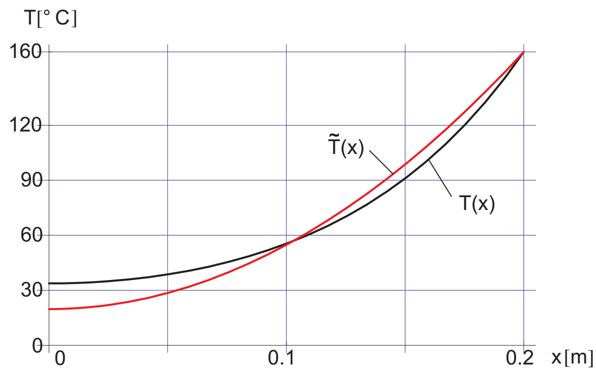
s výsledkom

$$a_1=\frac{2\mu^2L^2+\frac{2}{3}\mu^4L^4}{4+\frac{8}{3}\mu^2L^2+\frac{8}{15}\mu^4L^4}=0{,}935 \tag{17.52}$$

Spresnené aproximatívne riešenie s týmto koeficientom podľa (17.28) je

$$\tilde{T}(x)=T_\infty+\tilde{\vartheta}(x)=T_\infty+(T_0-T_\infty)[1+a_1(x^2/L^2-1)]=10+150[1+0.935(x^2/0.04-1)] \tag{17.53}$$

Funkciu $\tilde{T}(x)$ sme v obr. 17.7 graficky porovnali s exaktným riešením.



Obr. 17.7 *Priebeh teploty podľa exaktného riešenia (17.26) a riešenia metódou najmenších štvorcov* (17.53)

17.5.6 Galerkinova metóda

Galerkinovu metódu možno stručne uviesť ako špeciálny prípad metódy najmenších štvorcov, kedy ale v minimalizačnej rovnici (17.51) váhovými funkciami sú testovacie funkcie $N_i(x)$ aproximačnej funkcie (17.27). Koeficienty aproximačného riešenia sa potom podľa (17.51) určujú zo sústavy rovníc

$$\int_0^L R(x)N_i(x)dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{17.54}$$

Vyriešime teraz náš príklad touto metódou. Aproximačná funkcia (17.28)

$$\tilde{\vartheta}(x) = \left(T_0 - T_\infty\right)\left[1 + a_1(x^2 / L^2 - 1)\right]$$

má len jeden neznámy koeficient a_1. Na jeho určenie podľa (17.54) a (17.29) zostavíme rovnicu s kvadratickou váhovou funkciou

$$N_1(x) = 1 - x^2 / L^2$$

a dostávame

$$\int_0^L \left[\frac{d^2\tilde{\vartheta}(x)}{dx^2} - \mu^2\tilde{\vartheta}(x)\right]\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)dx = 0 \tag{17.55}$$

Koeficient po vyjadrení a vyčíslení je

$$a_1 = \frac{5\mu^2L^2}{10 + 4\mu^2L^2} = 0{,}899 \tag{17.56}$$

Spresnené aproximatívne riešenie s týmto koeficientom podľa (17.28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)[1 + a_1(x^2 / L^2 - 1)] = 10 + 150[1 + 0.899(x^2 / 0.04 - 1)] \tag{17.57}$$

Toto riešenie je totožné s riešením, ktoré sme dostali pri aplikácii variačnej metódy (17.43) a grafické porovnanie s exaktným riešením je také isté, ako udáva obr. 17.5. Je možné dokázať, že variačná a Galerkinova metóda dávajú rovnaký výsledok za predpokladu, že pre danú úlohu možno zostaviť klasický variačný funkcionál.

Z hľadiska metódy konečných prvkov je Galerkinova metóda zaujímavá tým, že pri jej aplikácii nie na celú oblasť (teleso) ale na individuálnu podoblasť (prvok) poskytuje nástroj na formuláciu matíc konečného prvku. V takom prípade zistíme, že funkcie N_i sú vlastne interpolačné (aproximačné, tvarové) funkcie prvku N_i^e definované na oblasti prvku [1] a koeficienty a_i sú neznáme prvkové uzlové hodnoty úlohy (teploty uzlov prvku, zovšeobecnené uzlové posunutia atď.).

17.6 Silné a slabé riešenie úlohy okrajových hodnôt

Príklad, ktorým sme sa zaoberali v predchádzajúcich častiach, môžeme považovať za jednoduchú úlohu okrajových hodnôt definovanú diferenciálnou rovnicou

$$\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2\vartheta(x) = 0 \qquad x \in [0, L] \tag{17.58}$$

a okrajovými podmienkami

$$\left.\frac{d\vartheta}{dx}\right|_{x=0} = 0 \qquad \text{a} \qquad \vartheta\big|_{x=L} = T_0 - T_\infty \tag{17.59}$$

Klasické, *"silné" riešenie* tejto úlohy je funkcia $\vartheta(x)$, pre ktorú platí

1. $\vartheta(x)$ má dve spojité derivácie na intervale [0, L]
2. $\left.\frac{d\vartheta}{dx}\right|_{x=0} = 0$, $\vartheta(L) = T_0 - T_\infty$
3. $\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2\vartheta(x) = 0$, pre každé x v intervale [0,L]

Existuje veľa funkcií, ktoré spĺňajú kritériá 1 a 2, ale len jedna funkcia (t.j. exaktné riešenie diferenciálnej rovnice), ktorá spĺňa kritérium č. 3.

Ak rovnicu (17.58) vynásobíme spojitou funkciou $v(x)$, pre ktorú tiež platia okrajové podmienky (17.59), a vyjadríme určitý integrál tohto súčinu na intervale $[0, L]$, rovnosť sa nenaruší a platí

$$\int_0^L \left(\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2\vartheta(x) \right) v(x)\,dx = 0 \tag{17.60}$$

pri nezmenených okrajových podmienkach (17.59). Definovali sme takto slabú (integrálnu) formu našej okrajovej úlohy a pre *slabé riešenie* $\vartheta(x)$ platí

1. $\vartheta(x)$ má dve spojité derivácie na intervale [0, L]
2. $\left.\frac{d\vartheta}{dx}\right|_{x=0} = 0$, $\vartheta(L) = T_0 - T_\infty$

3a. $\int_0^L \left(\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2\vartheta(x) \right) v(x) = 0$, pre každú spojitú funkciu $v(x)$ spĺňajúcu okrajové podmienky.

Rovnica (17.60) predstavuje alternatívnu, integrálnu, slabú formu diferenciálnej rovnice (17.58). Je to z hľadiska využitia na riešenie úlohy okrajových hodnôt prinajmenšom rovnocenná náhrada, pretože platí:

a) Ak existuje silné riešenie existuje aj slabé riešenie
b) Ak existujú obe riešenia, tak sú identické
c) Slabá formulácia prevádza vzťah definovaný diferenciálnou rovnicou na integrálny vzťah a požaduje jeho splnenie v určitom funkcionálnom zmysle, čím *zoslabuje* požiadavky na hladkosť hľadaného riešenia. Poskytuje možnosť riešenia širšej triedy úloh a je vhodnejšia na využitie pri približných numerických metódach

Slabú formu diferenciálnej rovnice môžeme zapísať aj v tvare

$$\int_0^L R(x)\,v(x)\,dx = 0 \tag{17.61}$$

kde $R(x)$ je reziduálna funkcia, (stretli sme sa už s ňou pri horeuvedených približných riešeniach), ktorá sa rovná nule, ak $\vartheta(x)$ je exaktné riešenie diferenciálnej rovnice úlohy.

Slabá formulácia v tvare (17.60) má nevýhodu v tom, že vyžaduje druhú deriváciu hľadanej funkcie $\vartheta(x)$ a len jednoduchú spojitosť testovacích funkcií $v(x)$. Obyčajne sa preto využíva "vyrovnanejšia" forma, ktorá integrovaním per partes podľa vzťahu

$$\int f''(x)v(x)dx = f'(x)v(x) - \int f'(x)v'(x)dx \tag{17.62}$$

zníži rád derivácie funkcie $\vartheta(x)$ v člene integrandu $f(x)$, ktorý ju obsahuje, na úkor jeho zvýšenia pre funkcie $v(x)$.

Pre náš príklad upravená slabá forma bude

$$\int_0^L R(x)v(x)dx = \int_0^L \frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2}v(x)dx - \mu^2\int_0^L \vartheta(x)\,v(x)dx = \frac{d\vartheta(x)}{dx}v(x)\bigg|_0^L - \int_0^L \frac{d\vartheta(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}dx - \mu^2\int_0^L \vartheta(x)\,v(x)dx = 0 \tag{17.63}$$

Dostávame takto ekvivalentnú náhradu slabej formy (17.60), ktorá s $v(x) = N_1(x)$ podľa (17.54) dáva to isté približné riešenie ako (17.55).

Pod vhodnejším tvarom slabej formy diferenciálnej rovnice sa myslí, ako sme už spomenuli, predovšetkým vhodnejší tvar na približné numerické riešenie, ktoré v ďalšej časti zrealizujeme pomocou MKP s využitím Galerkinovej metódy na určenie základných vzťahov (matíc) úlohy.

17.7 Riešenie jednorozmernej úlohy pomocou MKP

Metóda konečných prvkov patrí do kategórie metód, o ktorých sme hovorili v predchádzajúcich častiach. Možno ju označiť za univerzálnu metódu približného riešenia obyčajných a parciálnych diferenciálnych rovníc, s ktorými sa stretávame pri formulácii úloh začiatočných a okrajových hodnôt v jednotlivých oblastiach fyziky a mechaniky kontinua.

Charakterizuje ju predovšetkým to, že MKP globálnu oblasť úlohy mení na súhrn jednoduchých podoblastí, nazývaných konečné prvky, a že na každej podoblasti sa približné riešenie rovníc hľadá vo forme polynómov. Prvá vlastnosť (rozdelenie celku na jednoduché časti) umožňuje riešiť geometricky zložité oblasti s lokálnymi nespojitosťami a zložitými okrajovými podmienkami. Na vyššie uvedených príkladoch sme videli, že metódy vážených zvyškov i ostatné variačné metódy vedú na určitý integrál funkcie zvyšku na oblasti riešenia úlohy, ktorý pri komplikovanejšej globálnej oblasti je veľmi zložitý alebo neriešiteľný. Zavedenie konečných prvkov umožňuje vyjadriť variačný integrál ako súčet jednoduchých integrálov na týchto podoblastiach.

Polynomické funkcie na podoblasti zase prinášajú jednoduchosť do formulácie lokálnych integrálov a po jednoduchej úprave predstavujú na konečnom prvku fyzikálne názorné interpolačné (aproximačné, tvarové) funkcie, ktoré interpolujú číselné hodnoty riešenia (primárne neznáme) na určitom počte vybraných bodov (uzlov) prvku. Medzi susediacimi prvkami treba zaručiť podmienky spojitosti, aby bola zaručená spojitosť globálneho riešenia.

K výpočtovému modelu MKP, ktorý predstavuje sústava rovníc na určenie neznámych číselných parametrov , sa môžeme dopracovať viacerými postupmi, pričom sa zohľadňuje ich vhodnosť pre daný typ úlohy. Často sa využíva variačná Rayleigh-Ritzova metóda, princíp minima celkovej potenciálnej energie telesa, princip virtuálnej práce, resp. virtuálnych posunutí a metódy vážených zvyškov (pozri napr. [1],[2]). Teda MKP patrí do kategórie metód, pri ktorej sa približné polynomické riešenie jednorozmernej úlohy

$$\tilde{\vartheta}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x) \tag{17.64}$$

na každom elemente vyjadruje z integrálneho funkcionálu zviazaného s diferenciálnou rovnicou úlohy. Tiež treba spomenúť fakt, že vo všeobecnosti metóda vedie na veľký počet prvkov, uzlov a veľkú sústavu rovníc. Pracuje sa teda s veľkým počtom vzťahov a čísiel a preto nielen na globálnej úrovni, ale aj na prvku, sa využíva maticový zápis. Pretože konečné prvky konkrétnej fyzikálnej úlohy sú formálne rovnaké (líšia sa len číselnými parametrami), býva zvykom prvkové vzťahy a matice vyjadrovať na všeobecnom (*e*-tom) prvku, ktoré potom platia pre každý prvok výpočtového modelu.

Ukážme si teraz riešenie jednorozmernej úlohy vedenia tepla pomocou MKP, pričom využijme Galerkinovu metódu. Nie je to najjednoduchší postup (jednoduchšie je vychádzať zo známeho variačného integrálu, ktorý pre vedenie tepla je k dispozícii), ale má výhodu, že súvisle ukazuje postup formulácie úlohy od diferenciálnej rovnice až po výslednú sústavu rovníc pre určenie neznámych koeficientov približného riešenia.

Budeme riešiť ten istý príklad, ktorý sme v predchádzajúcich častiach riešili pomocou rôznych iných približných metód: Pre prút o dĺžke L na obr. 17.2 treba pri ustálenom prenose tepla určiť priebeh teploty

$$T(x) = T_\infty + \vartheta(x) \tag{17.65}$$

keď pre funkciou prevyšujúcej teploty $\vartheta(x)$ platí diferenciálna rovnica (17.23) so znamienkovou úpravou (kvôli príjemnejším znamienkam po použití integrovania per partes v slabej forme) a s dosadením za μ^2 podľa (17.23), aby sa nám pri Galerkinovej metóde nestrácal fyzikálny význam jednotlivých členov

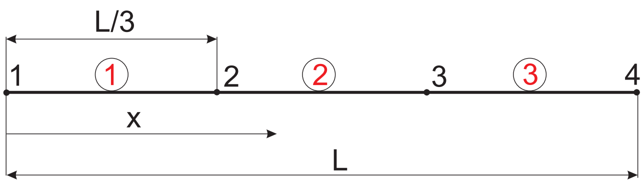
$$-\lambda S \frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} + ph\vartheta(x) = 0 \tag{17.66}$$

Okrajové podmienky, platia pre exaktné i približné riešenie

$$\left.\frac{d\vartheta(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0 \qquad \text{a} \qquad \vartheta(x)\big|_{x=L} = T_0 - T_\infty \tag{17.67}$$

Konkrétne vstupné hodnoty príkladu sú: L = 20 cm, p = 10 cm, S = 5 cm^2, λ= 120 W/(m°C), h = 96 W/(m^2 °C), T_0 = 160 °C, T_∞ = 10 °C. Z uvedených hodnôt dostaneme podľa (17.23) $\mu^2 = 160$ 1/m^2.

V ďalšom budeme približné riešenie kvôli jednoduchšiemu zápisu označovať $\vartheta(x)$; k zámene s exaktným riešením nemôže dôsť, pretože ďalej sa už budeme zaoberať len približným riešením uvedenej úlohy.



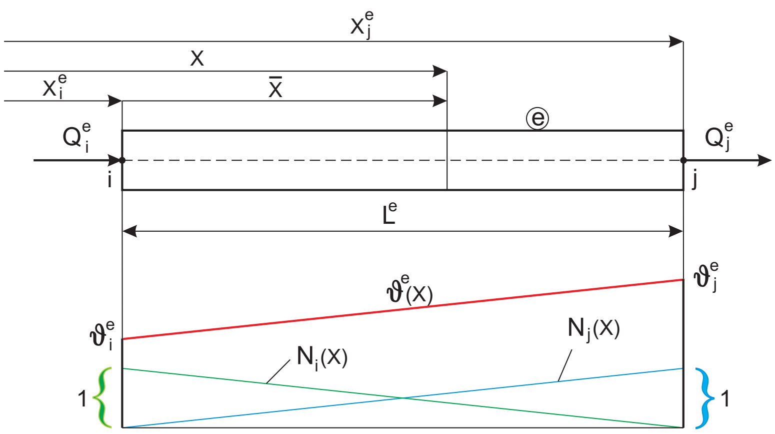
Obr. 17.8 *Rozdelenie prúta na prvky s globálnym číslovaním uzlov*

Prvým krokom riešenia je diskretizácia prúta na konečné prvky a vyznačenie uzlových bodov. Ide nám predovšetkým o metodiku a preto zvolíme hrubé delenie len na tri prvky so štyrmi koncovými uzlami (obr. 17.8). Ľubovoľný, e-ty prvok potom bude mať dva *lokálne* označené uzly a všeobecné parametre podľa obr. 17.9.

Zvoľme podľa (14.24) približné riešenie na e-tom prvku s dvomi neznámymi koeficientami v tvare

$$\vartheta^e(x) = a_1 N_i(x) + a_2 N_j(x) \tag{17.68}$$

Pri funkciách $N(x)$ v tomto vzťahu je užitočné sa zastaviť a urobiť malú analýzu. Galerkinova metóda ich používa ako váhové funkcie $w(x)$, ktoré integrálnym spôsobom vyžadujú na každom elemente nulovú hodnotu ich súčinu so zvyškom podľa (17.54) a tiež aj ako testovacie funkcie $N(x)$, ktoré po určení neznámych koeficientov a_i tvoria na každom prvku funkciu (17.68) približného riešenia. Pravda, testovacie funkcie musia byť zvolené, známe funkcie a preto si teraz ukážeme jednu z možností ich určenia.



Obr. 17.9 *Všeobecný, ľubovoľný, e-ty prvok s lokálnymi číslami uzlov a jeho interpolačné funkcie*

Predpokladajme, že v uzlových bodoch všeobecného e-teho prvku prúta na obr. 17.9 s *lokálnym* číslovaním uzlov poznáme hodnoty funkcie $\vartheta(x)$, t.j. ϑ_i^e a ϑ_j^e, a vyžadujeme jej lineárny priebeh po prvku

$$\vartheta^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{17.69}$$

Známe hodnoty v uzloch nám po dosadení poskytnú dve rovnice pre určenie koeficientov α_1 a α_2

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ \vartheta_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j \end{aligned}$$

Po vypočítaní koeficientov α a dosadení do (12.29) dostaneme

$$\vartheta^e(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}\vartheta_i^e + \frac{x - x_i}{x_j - x_i}\vartheta_j^e = N_i(x)\vartheta_i^e + N_j(x)\vartheta_j^e = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_i^e \\ \vartheta_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e \boldsymbol{\theta}^e \tag{17.70}$$

kde funkcie

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} = \frac{x_j - x}{L_e} \qquad N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_i}{L_e} \tag{17.71}$$

sú hľadané lineárne interpolačné (testovacie, bázové, aproximačné, tvarové) funkcie prvku.

Slúžia na interpoláciu (v tomto prípade lineárnu) uzlových hodnôt primárnej neznámej do celej oblasti prvku. Vo svojom uzle majú hodnotu rovnú jednej, v ostatných uzloch nulovú. Sú to vlastne iným, ale fyzikálne omnoho názornejším, spôsobom zapísané lineárne testovacie funkcie (17.68). Na obr. 17.9 je graficky znázornený spôsob ako tieto fukcie podľa vzťahu (17.70) interpolujú uzlové hodnoty na celú dĺžku prvku. (Stručný výťah z bohatej teórie interpolačných funkcií konečných prvkov možno nájsť napr. v [1]).

Derivácie funkcií (17.70) a (17.71) budeme tiež potrebovať

$$\frac{d\vartheta^e}{dx} = \frac{dN_i}{dx}\vartheta_i^e + \frac{dN_j}{dx}\vartheta_j^e \qquad \frac{dN_i}{dx} = -\frac{x}{L_e} \qquad \frac{dN_j}{dx} = \frac{x}{L_e} \tag{17.72}$$

Aplikujme teraz Galerkinovu metódu na e-ty prvok. Ak dosadíme lineárny tvar približného riešenia na tomto prvku (17.70) do diferenciálnej rovnice (17.66), rovnica nebude splnená a nenulový zvyšok je

$$R^e(x,\vartheta_i,\vartheta_j) = -\lambda S \frac{d^2\vartheta^e(x,\vartheta_i,\vartheta_j)}{dx^2} + ph\vartheta^e(x,\vartheta_i,\vartheta_j)$$

Galerkinova metóda vyžaduje, aby pre testovacie funkcie platilo

$$\int_{x_i}^{x_j} R^e(x,\vartheta_i,\vartheta_j) N_i(x)\,dx = 0 \qquad \int_{x_i}^{x_j} R^e(x,\vartheta_i,\vartheta_j) N_j(x)\,dx = 0$$

čím sme definovali dve rovnice na určenie uzlových hodnôt ϑ_i a ϑ_j. Dosadíme do nich zvyšok

$$\int_{x_i}^{x_j}\left(-\lambda S\frac{d^2\vartheta^e}{dx^2}+ph\vartheta^e\right)N_i dx=0 \qquad \int_{x_i}^{x_j}\left(-\lambda S\frac{d^2\vartheta^e}{dx^2}+ph\vartheta^e\right)N_j\, dx=0$$

Prvé členy integrantov upravíme integrovaním per partes na vhodnejší tvar

$$\int_{x_i}^{x_j}\left(-\lambda S\frac{dN_i}{dx}\frac{d\vartheta^e}{dx}+phN_i\vartheta^e\right)dx-\left[N_i\lambda S\frac{d\vartheta^e}{dx}\right]_{x_i}^{x_j}=0$$

$$\int_{x_i}^{x_j}\left(-\lambda S\frac{dN_j}{dx}\frac{d\vartheta^e}{dx}+phN_j\vartheta^e\right)dx-\left[N_j\lambda S\frac{d\vartheta^e}{dx}\right]_{x_i}^{x_j}=0$$

Členy mimo integrálu sú ľahko identifikovateľné ako Neumanove okrajové podmienky pre sekundárnu premennú, ktorá v tomto prípade predstavuje tepelný tok. V krajných bodoch intervalu nadobúdajú funkcie N_i a N_j hodnoty 1 (vo svojom uzlovom bode) alebo 0 (v inom uzlovom bode), takže dostávme

$$\left[N_i\lambda S\frac{d\vartheta^e}{dx}\right]_{x_i}^{x_j}=-\lambda S\frac{d\vartheta^e}{dx}\bigg|_{x=x_i}=Q_i \tag{17.73}$$

$$\left[N_j\lambda S\frac{d\vartheta^e}{dx}\right]_{x_i}^{x_j}=\lambda S\frac{d\vartheta^e}{dx}\bigg|_{x=x_j}=Q_j \tag{17.74}$$

Opačné znamienka signalizujú v uzle *i* vstup a v uzle *j* výstup tepla z prvku. Dosadením (17.73) a (17.74) do predchádzajúcich rovníc sa tieto upravia na

$$\int_{x_i}^{x_j}\left(-\lambda S\frac{dN_i}{dx}\frac{d\vartheta^e}{dx}+phN_i\vartheta^e\right)dx=Q_i \tag{17.75}$$

$$\int_{x_i}^{x_j}\left(-\lambda S\frac{dN_j}{dx}\frac{d\vartheta^e}{dx}+phN_j\vartheta^e\right)dx=Q_j \tag{17.76}$$

Po dosadení funkcií do integrantov týchto rovníc a integrácii dostaneme jednoduché vzťahy pre určovanie hodnôt primárnej neznámej v uzlových bodoch e-teho prvku, ktoré zapíšeme v maticovom tvare

$$\left(\frac{\lambda S}{L_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\frac{phL_e}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\vartheta_i^e\\ \vartheta_j^e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_i^e\\ Q_j^e\end{bmatrix} \tag{17.77}$$

v stručnom zápise

$$\mathbf{K}^e\boldsymbol{\vartheta}^e=\mathbf{q}^e \tag{17.78}$$

kde $\mathbf{K}^e$ je (symetrická) matica tepelnej vodivosti prvku, $\boldsymbol{\vartheta}^e$ je vektor uzlových teplôt prvku a $\mathbf{q}^e$ je vektor *vnútorných* uzlových "zaťažení" prvku (na uzle môže existovať aj *vonkajší* zdroj tepelného toku).

Poznamenávame, že vyjadrenie rovníc (17.77) je jednoduchšie pri použití lokálnej nezávislej premennej $\bar{x}$ (obr. 9). Vtedy tvarové funkcie a ich derivácie sú

$$N_i = 1 - \frac{\bar{x}}{L_e} \qquad N_j = \frac{\bar{x}}{L_e} \qquad \frac{dN_i}{d\bar{x}} = -\frac{1}{L_e} \qquad \frac{dN_j}{d\bar{x}} = \frac{1}{L_e} \tag{17.79}$$

a integrály (17.75) a (17.76) sa vyjadrujú v hraniciach 0 a L_e .

Po vyčíslení konštánt v (17.77), ktoré sú pre všetky prvky rovnaké, a sčítaní matíc dostaneme pre všeobecný prvok prúta

$$\mathbf{K}^e \boldsymbol{\vartheta}^e = \begin{bmatrix} 1{,}113 & -0{,}793 \\ -0{,}793 & 1{,}113 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_i^e \\ \vartheta_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i^e \\ Q_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{q}^e \tag{17.80}$$

Skladanie prvkových matíc do globálnej sústavy rovníc pre model prúta na obr. 17.8 uskutočníme klasickým postupom pomocou súčtu rozšírených matíc prvkov [1].

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\vartheta} = \begin{bmatrix} 1{,}113 & -0{,}793 & 0 & 0 \\ -0{,}793 & 2{,}226 & -0{,}793 & 0 \\ 0 & -0{,}793 & 2{,}226 & -0{,}793 \\ 0 & 0 & -0{,}793 & 1{,}113 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{q} \tag{17.81}$$

Z okrajových podmienok vyplýva, že Q_1 = 0 a $\vartheta_4 = T_4 - T_\infty = 160 - 10 = 150$ °C. Q_2 a Q_3 sa tiež rovnajú nule, pretože pri spojení prvkov majú vnútorné uzlové tepelné toky v stýkajúcich sa uzloch prvkov rovnakú veľkosť a opačné znamienka. Takže z prvých troch rovníc sme určili uzlové prevyšujúce teploty

$$\begin{bmatrix} 1{,}113 & -0{,}793 & 0 \\ -0{,}793 & 2{,}226 & -0{,}793 \\ 0 & -0{,}793 & 2{,}226 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}793 \cdot 150 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \vartheta_1 = 21{,}9 \\ \vartheta_2 = 30{,}7 \\ \vartheta_3 = 64{,}4 \end{array} \tag{17.82}$$

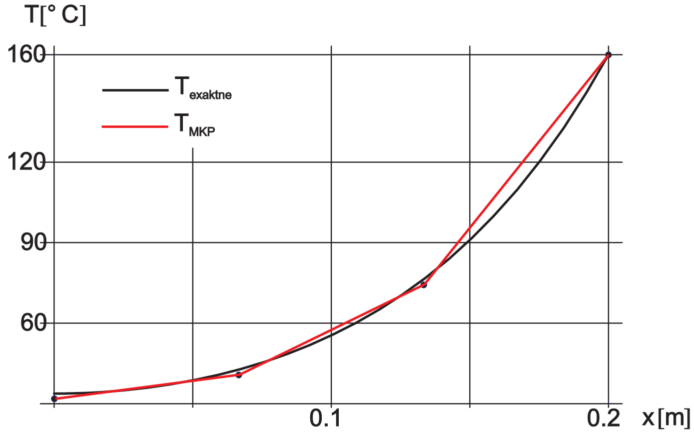
a z poslednej v (17.81), keď už poznáme $\vartheta_3 = 64{,}4$ °C, možno určiť neznámy uzlový tok Q_4 (t.j. množstvo tepla prúdiaceho zo steny do chladiaceho rebra)

$$Q_4 = 1{,}113 \cdot 150 - 0{,}793 \cdot 64{,}4 = 115{,}9 \text{ W} \tag{17.83}$$

Pre porovnanie uvedieme celkový tok tepla z exaktného riešenia diferenciálnej rovnice

$$\begin{aligned} |Q| = \lambda S \frac{d\vartheta(x)}{dx}\bigg|_{x=L} &= \lambda S \frac{d}{dx}\left[\frac{T_0 - T_\infty}{e^{\mu L} + e^{-\mu L}} \left(e^{\mu x} + e^{-\mu x} \right) \right]_{x=L} \\ &= \mu \lambda S \frac{T_0 - T_\infty}{e^{\mu L} + e^{-\mu L}} \left(e^{\mu L} + e^{-\mu L} \right) = 112{,}4\,\text{W} \end{aligned} \tag{17.84}$$

Hľadané uzlové teploty chladiaceho rebra podľa (17.65) sú vyššie o teplotu chladiaceho média T_∞ = 10 °C , takže podľa (17.82) dostávame T_1 = 31,9 °C, T_2 = 40,7 °C, T_3 = 74,4 °C a teplota T_4 = 160 °C je udaná okrajová podmienka. Lineárnu interpoláciu týchto hodnôt spolu s exaktným priebehom teploty sme graficky porovnali v obr. 17.10. Zvyšovaním počtu prvkov výsledky konvergujú k exaktným hodnotám. Napr. exaktná hodnota teploty na izolovanom konci prúta (x = 0) podľa (17.26) je 33,7 °C a uvedený postup s 10 prvkami dáva 33,6 °C.



Obr. 17.10 *Porovnanie exaktného priebehu teploty a riešenia pomocou MKP s tromi prvkami a lineárnymi interpolačnými funkciami*

17.8 Riešenie príkladu pomocou programu ANSYS

Pomocou programu ANSYS možno riešiť príklad, s ktorým sme sa zoberali v predchádzajúcich častiach, rôznymi spôsobmi. Najjednoduchšie pomocou termálneho škrupinového prvku (Shell 57) alebo pomocou objemového šesťstenového 3D prvku (Solid 70). Vymodeluje sa tvar prúta s konštantami pre vedenie tepla a na príslušné plochy sa predpíšu potrebné hodnoty pre odvod tepla konvekciou.

Pretože sa zaoberáme jednorozmernou úlohou využijeme jednorozmerné termálne konečné prvky Link 32 a Link 34. Prvok Link 32 je dvojuzlový prvok určený na jednorozmerné vedenie tepla (vedie teplo len v smere svojej osi) s lineárnymi izoparametrickými interpolačnými funkciami. Koncový bod modelu zloženého z takýchto prvkov, pokiaľ nemá predpísanú okrajovú podmienku, je implicitne tepelne izolovaný.

Na odvod alebo prívod tepla konvekciou pri známom koeficiente *h* možno využiť termálny dvojuzlový prvok Link 34, ktorý sa pripája do uzlov modelu zloženého z konduktívnych prvkov. Jeho priečna plocha udáva plochu modelu v okolí prípojného uzla, na ktorej sa uskutočňuje konvekcia. Celková suma plôch týchto prvkov sa rovná celkovej konvekčnej ploche modelu; dĺžka prvku je ľubovoľná (môže byť i nulová). Vo voľných koncových bodoch týchto prvkov sa predpíše teplota okolitého média T_∞ .

Príklad sme v Ansyse riešili v interaktívnom móde pomocou týchto príkazov:

1. Názov úlohy
   Utility Menu>File>Change Jobname, /FILENAM = TermoPrut, OK;

2. Zobrazovať príkazy len pre termálnu úlohu
   Ansys Main Menu>Preferences>Thermal, OK;

3. Potrebné typy prvkov

Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete>Add, Link, 2D conduction 32, Apply,
Add, Link, 3D convection 34, OK, Close;

4. Prierezové konštanty pre prvky. Zadáme tri skupiny: 1 - pre prvok Link 32 (jeho prierez), 2 - pre krajné prvky Link 34 (odvádzajú teplo z polovičnej povrchovej plochy kondukčného prvku Link 32), 3 - pre ostatné konvekčné prvky (odvádzajú teplo z celej povrchovej plochy kondukčného prvku)

Real Constants> Add/Edit/Delete>Add, Type 1 Link 32, OK, AREA = 0.0005, OK,
Add, Type 2 Link 34, OK, AREA = 0.2/6*0.1, OK,
Add, Type 2 Link 34, OK, AREA = 0.2/3*0.1, OK, Close;

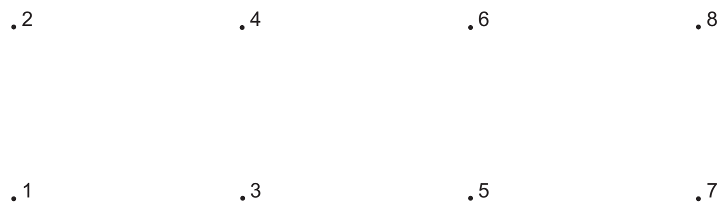
5. Materiálové konštanty. Zadáme len jednu skupinu s λ a h . V kondučných prvkoch sa uplatní len λ a v konvekčných len *h.*

Material Props>Material Models>Material Model Number 1>Thermal>Conductivity>Isotropic, KXX = 120, OK,
Convection or Film Coeff., HF = 96, OK, Material, Exit;

6. Tvorba uzlových bodov

Modeling>Create>Nodes>In Active CS, X = 0, Y = 0, Apply
X = 0, Y = 0.05, OK,

Modeling>*Copy>Nodes>Copy>Pick All,* Itime = 4, DX = 0.2/3, OK;



7. Tvorba prvkov

(Implicitne sú nastavené vlastnosti kondukčných prvkov - TYPE = 1)

Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes, Kliknúť uzly 1,3, Apply, 3,5, Apply, 5,7, OK;

Elem Attributes, TYPE = 2 Link 34, REAL = 2, OK,

Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes, Kliknúť uzly 1,2, Apply, 7,8, OK;

Elem Attributes, TYPE = 2 Link 34, REAL = 3, OK,

Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes, Kliknúť uzly 3,4, Apply, 5,6, OK;

8. Okrajové podmienky

Ansysy Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Thermal>Temperature>On Nodes, Kliknite uzol 7, OK, TEMP, Value = 160, Apply, Kliknite uzly 2,4,6,8, OK, TEMP, Value = 10, OK;

9. Výpočet ustáleného stavu vedenia tepla v prúte

Solve>Current LS, OK; (Ignorujte príp. upozornenie, že sa nenastavili časové kroky pre nestacionárne prvky.)

10. Výpis teplôt v uzloch

Ansysy Main Menu>General Postproc>List Results>Nodal solution>DOF Solution>Nodal Temperature, OK;

```
NODE       TEMP
   1   35.437
   3   44.482
   5   78.047
   7   160.00
```

10. Tepelný tok zo steny do prúta

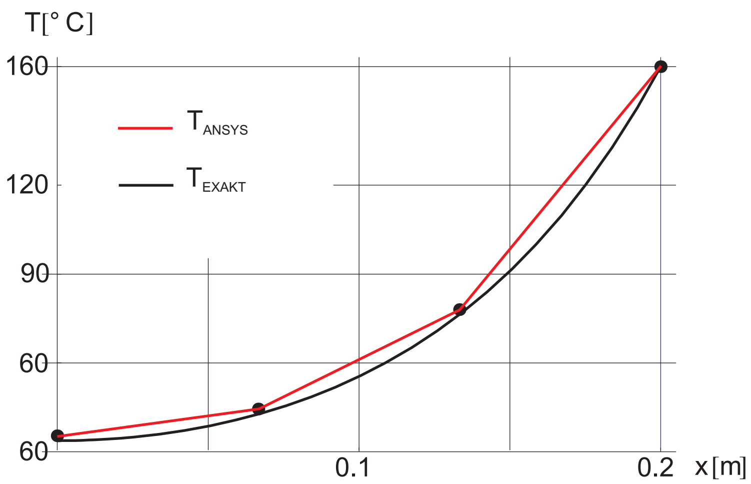
List Results>Element Solution>Heat Flow, OK;

```
ELEM =   3  HEAT
   5   73.758
   7  -73.758

ELEM =   5  HEAT
   7  -48.000
   8   48.000
```

11. Ukončenie výpočtu a uloženie databázy úlohy

Ansys Toolbar>Quit, Save Geom+Loads, OK;

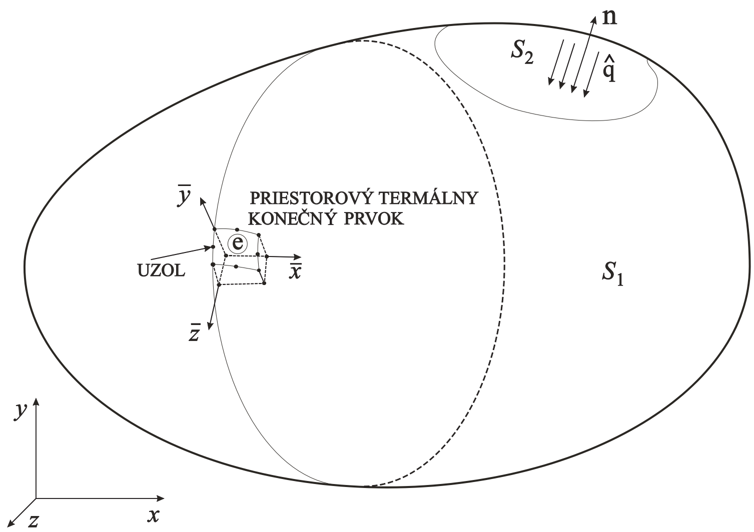
Lineárnu interpoláciu vypočítaných uzlových hodnôt teploty spolu s exaktným priebehom teploty sme graficky porovnali v obr. 17.11. Program ďalej určil veľkosť tepelného toku z uzla 7 (zo steny) do uzla 5 = 73.8 W a z uzla 7 do uzla 8 = 48 W. Celkový tok zo steny do prúta takto podľa tohto výpočtu je 73.8 + 48 = 121.8 W. Zvyšovaním počtu prvkov výsledky konvergujú k exaktným hodnotám. Napr. exaktná hodnota teploty na izolovanom konci prúta (x = 0) podľa (17.26) je 33,7 °C a uvedený výpočet s 10 kondukčnými prvkami dáva 33,9 °C.



Obr. 17.11 *Porovnanie exaktného priebehu teploty a riešenia pomocou programu ANSYS s tromi jednorozmernými prvkami a lineárnymi interpolačnými funkciami*

17.9 Priestorové teleso

Uvažujme priestorové teleso, ktoré sa nachádza v podmienkach nestacionárneho prenosu tepla (obr. 17.12). Pre funkciu teploty $T \equiv T(x,y,z,t)$ opisujúcu nestacionárne teplotné pole v čase t vo všeobecnom termálne ortotropnom telese platí diferenciálna rovnica (17.11)



Obr. 17.12 Všeobecné priestorové teleso s nestacionárnym teplotným poľom

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\bar{Q}(x,y,z,t) \tag{17.85}$$

kde je

ρ ... hustota materiálu telesa v kgm^{-3}

c ... merné teplo materiálu telesa v $Jkg^{-1}K^{-1}$

t ... čas v sekundách

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ ... súčinitele tepelnej vodivosti vo $Wm^{-1}K^{-1}$

$\bar{Q}$ ... výdatnosť tepelného zdroja v telese (prírastok tepla v jednotke objemu za jednotku času) vo Wm^{-3}

Nerovnomerné rozdelenie teploty v telese vyvolá tepelný tok q (vo Wm^{-2})

$$q(x,y,z,t)=-\left(\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{17.86}$$

ktorý po určení funkcie T možno vypočítať z uvedeného vzťahu.

Pretože (17.85) je diferenciálna rovnica 1. rádu vzhľadom na čas, musíme pre ňu zadať jednu *začiatočnú podmienku*

$$T(x,y,z,t=0)=T_0(x,y,z) \tag{17.87}$$

kde funkcia T_0 udáva rozdelenie teploty na začiatku riešenia úlohy v celom objeme telesa.

Okrem toho pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu (vzhľadom na polohové premenné) musíme zadať dve *okrajové podmienky*. Dirichletova okrajová podmienka v tomto prípade je

$$T(x,y,z,t) = T_1(x,y,z,t) \quad \text{na } S_T \tag{17.88}$$

kde S_T je časť povrchu telesa, kde sme predpísali teplotu.
Neumanova (Cauchyho) okrajová podmienka predpisuje hustotu tepelného toku $\hat{q}_n$ (vo Wm^{-2}) cez plochu S_q

$$\hat{q}_n = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z \quad \text{na } S_q \tag{17.89}$$

kde vystupujú smerové kosínusy n_x, n_y, n_z vonkajšej normály *n* k ploche S_q .

Na ploche S_k možno tiež zadať okrajovú podmienku pre tepelný tok odvádzaný, resp. privádzaný konvekciou s okrajovou podmienkou

$$\hat{q}_k = -h(T - T_\infty) \quad na\ S_k \tag{17.90}$$

kde *h* je zadaný koeficient prestupovej vrstvy vo $WK^{-1}m^{-2}$ a T_∞ je známa (zadaná) teplota tekutiny. (Analogicky možno zadať aj okrajovú podmienku pre radiáciu tepla, ktorá automaticky mení úlohu na nelineárnu.)

Vo všeobecnosti plochy S_T , S_q a S_k predstavujú súhrn viacerých plôch príslušného typu a platí $S_T \cup S_q \cup S_k = S$, $S_T \cap S_q \cap S_p = 0$, kde S je celkový povrch telesa. Z podmienok ich zadania vyplýva, že pre každý bod povrchu telesa (každý uzlový bod výpočtového modelu MKP) musí byť zadaná okrajová podmienka - buď pre teplotu alebo tepelný tok. Programy MKP na nezadané „povinné“ podmienky väčšinou reagujú takto (je užitočné si to v programe overiť)

- Nezadaná začiatočná podmienka $\Rightarrow$ vo všetkých bodoch telesa je na začiatku riešenia úlohy teplota rovná nule
- Nezadaná okrajová podmienka pre teplotu $\Rightarrow$ vo všetkých bodoch povrchu telesa platí podmienka pre tepelný tok.
- Nezadaná okrajová podmienka pre tepelný tok $\Rightarrow$ vo všetkých bodoch povrchu telesa (kde nie je zadaná okrajová podmienka pre teplotu) je tepelný tok rovný nule – teleso je teda na tejto časti plochy tepelne izolované. Z tohto vyplýva aj to, že v prípade rovinných úloh je teleso v smere kolmom na rovinu riešenia tepelne izolované.

Možno dokázať, že funkcia $T(x,y,z,t)$ spĺňajúca rovnicu (17.85) je vo variačnej formulácii ekvivalentná funkcii, ktorá minimalizuje funkcionál

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \left[\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \lambda_z \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 - 2\left(\bar{Q} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\right) T \right] dV + \int_{S_q} \hat{q}_n T dS + \frac{1}{2}\int_{S_k} h(T - T_\infty)^2 dS \tag{17.91}$$

Variačná formulácia nestacionárnej úlohy prenosu tepla pre teleso potom znie takto: Treba nájsť takú funkciu $T(x,y,z,t)$, ktorá spĺňa začiatočnú podmienku (17.87) a okrajové podmienky (17.88), (17.89) a (17.90), že pri nej integrál (17.91) nadobúda minimálnu hodnotu. Takáto funkcia exaktne vyjadruje veľkosť teplôt v čase t v bodoch (x, y, z) telesa. Funkcionál (17.91) sme v [1] využili na odvodenie základných matíc formulácie MKP pre nestacionárne vedenie tepla v priestorovom telese. V ďalšom ukážeme odvodenie týchto matíc Galerkinovou metódou.

17.9.1 Geometrická diskretizácia úlohy. Matice prvku a telesa

Podľa rovnakých zásad ako pri riešení pevnostnej úlohy [1] rozdelíme teleso na konečné prvky a vyznačíme uzlové body. Nech celkový počet prvkov je *NET* a na každom prvku nech je *NUE* uzlových bodov. Funkcia, ktorá v čase t aproximuje rozdelenie teploty po všeobecnom e-tom prvku z jeho hodnôt v uzlových bodoch, nech je

$$T^e(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{NUE} N_j^e(x,y,z)\, T_j^e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_{NUE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{Nue} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_e \mathbf{T}^e \qquad (17.92)$$

kde T_j^e sú číselné hodnoty teplôt uzlových bodov prvku v čase t (sú to primárne neznáme úlohy analogické k zložkám posunutí pri pevnostnej úlohe) a N_j^e sú interpolačné (tvarové) funkcie prvku. Geometria prvkov i interpolačné funkcie nie sú závislé od fyzikálneho typu úlohy a z geometrického hľadiska sa model telesa tvorí pomocou tých istých prvkov, aké sa používajú pri pevnostných úlohách [1].

Neznáme uzlové hodnoty teploty sa musia určiť tak, aby funkcia (17.92) vyhovovala diferenciálnej rovnici (17.85) a spĺňala okrajové podmienky úlohy. Ako sme ukázali pri jednorozmerných úlohách, metódy vážených zvyškov vyžadujú, aby sa reziduálna funkcia R na oblasti prvku blížila k nule určitým sumačným (integrálnym) váženým spôsobom

$$\int_{V_e} w(x,y,z)\, R(x,y,z)\; dV = 0 \qquad (17.93)$$

kde w je váhová funkcia. V našom prípade po dosadení (17.85) do (17.93) dostávame

$$\int_{V_e} w \left[\rho c \frac{\partial T^e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T^e}{\partial z} \right) - \bar{Q}(x,y,z,t) \right] dV = 0 \quad (17.94)$$

Výraz v hranatej zátvorke predstavuje zvyšok diferenciálnej rovnice (17.85), pretože $T^e\left(x,y,z,t\right)$ je len aproximáciou exaktného riešenia $T\left(x,y,z,t\right)$ na oblasti prvku.

Slabá formulácia v tvare (17.94) obsahuje členy s druhou deriváciou hľadanej funkcie T^e a len jednoduchú spojitosť váhovej funkcie w. Využitie zložkového tvaru divergenčného teorému pre tieto členy (pri jednorozmerných úlohách sa na tento istý účel využila integrácia per partes) poskytuje výhodnejší tvar

$$\int_{V_e} \left(\rho c w \frac{\partial T^e}{\partial t} - \lambda_x \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial T^e}{\partial x} - \lambda_y \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial T^e}{\partial y} - \lambda_z \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial T^e}{\partial z} - w\overline{Q} \right) dV$$
$$- \int_{S_q^e} w \left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} n_y + \lambda_z \frac{\partial T^e}{\partial z} n_z \right) dS = 0 \qquad (17.95)$$

v ktorom sa priamo objavila (analogicky s jednorozmernou úlohou) aj okrajová podmienka pre tepelný tok $\hat{q}_n$ (17.89) a zápis rovnice možno skrátiť na

$$\int_{V_e} \left(\rho c w \frac{\partial T^e}{\partial t} - \lambda_x \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial T^e}{\partial x} - \lambda_y \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial T^e}{\partial y} - \lambda_z \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial T^e}{\partial z} - w\overline{Q} \right) dV - \int_{S_q^e} w\widehat{q}_n \, dS = 0 \qquad (17.96)$$

Po dosadení aproximačnej funkcie (17.92) do (17.96) a okrajovej podmienky pre konvekciu dostaneme

$$\sum_{j=1}^{NUE} \left\{ \int_{V_e} \left[\rho c w \frac{\partial T^e}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial w}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) - \frac{\partial w}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T^e}{\partial z} \right) - w\overline{Q} \right] dV \right\} T_j^e$$
$$- \int_{S_q^e} w\widehat{q}_n \, dS - \int_{S_k^e} wh(T - T_\infty) \, dS = 0 \qquad (17.97)$$

Deriváciou funkcie T^e podľa času dostaneme z (17.92)

$$\frac{\partial T^e}{\partial t} = \dot{T}^e(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{NUE} N_j^e(x,y,z)\,\dot{T}_j^e \qquad (17.98)$$

kde $\dot{T}_j^e$ sú číselné hodnoty derivácie teploty podľa času v uzlových bodoch prvku ako ďalšie neznáme, vyvolané nestacionárnym členom v diferenciálnej rovnici.

Pri Galerkinovej metóde za váhovú funkciu sa postupne dosadzujú interpolačné (tvarové) funkcie prvku N_1, N_2, . . . , N_i, . . . , N_{NUE} s aproximačnou funkciou (17.92) pre T^e, čím dostaneme potrebný počet rovníc pre určenie základných vzťahov a matíc prvku. S funkciou N_i dostaneme *i*-tu rovnicu tejto sústavy (17.97) v tvare

$$\sum_{j=1}^{NUE} C_{ij}^e \dot{T}_j + \sum_{j=1}^{NUE} \left(K_{1ij}^e + K_{2ij}^e \right) T_j = \widehat{q}_{ni}^e + \widehat{q}_{ki}^e + \overline{Q}_i^e \qquad (17.99)$$

kde

$$C_{ij}^e = \int_{V_e} \rho c N_i^e N_j^e dV$$

$$K_{1ij}^e = \int_{V_e} \left(\lambda_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) dV$$

$$
\begin{aligned}
K_{2ij}^{e} &= \int_{S_k^e} h N_i^e N_j^e \, dS \\
\widehat{q}_{ni}^{e} &= \int_{S_q^e} q_n N_i^e \, dS \\
\widehat{q}_{ki}^{e} &= \int_{S_k^e} h T_\infty N_i^e \, dS \\
\overline{Q}_i &= \int_{V_e} \overline{Q} N_i^e \, dV
\end{aligned}
\tag{17.100}
$$

Ak do rovnice (17.99) dosadíme postupne všetky fukcie N_i, dostaneme NUE prvkových rovníc, ktoré zapíšeme v maticovom tvare

$$
\mathbf{C}^e \dot{\mathbf{T}} + (\mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_2^e)\mathbf{T}^e = \mathbf{f}^e \tag{17.101}
$$

kde primárne neznáme sú zapísané vo vektoroch (stĺpcových maticiach)

$$
\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_i & \dots & T_{NUE} \end{bmatrix}^T \tag{17.102}
$$

$$
\dot{\mathbf{T}}^e = \begin{bmatrix} \dot{T}_1 & \dot{T}_2 & \dots & \dot{T}_i & \dots & \dot{T}_{NUE} \end{bmatrix}^T \tag{17.103}
$$

matica tepelnej kapacity (merného tepla, tepelného tlmenia) prvku je

$$
\mathbf{C}^e = \int_{V_e} \rho_e c_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \, dV \tag{17.104}
$$

Matica

$$
\mathbf{K}_1^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \tag{17.105}
$$

obsahujúca

$$
\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix}
\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial x} \\
\frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial y} \\
\frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial z}
\end{bmatrix}; \qquad
\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix}
\lambda_x^e & 0 & 0 \\
0 & \lambda_y^e & 0 \\
0 & 0 & \lambda_z^e
\end{bmatrix}
$$

sa nazýva matica difúznej vodivosti prvku. Matica

$$
\mathbf{K}_2^e = \int_{S_{2k}^e} h \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \, dS \tag{17.106}
$$

je matica plošnej vodivosti prvku.

Vektor “zaťaženia” prvku je

$$
\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_1^e + \mathbf{f}_2^e + \mathbf{f}_3^e = \int_{V_e} \overline{Q} \mathbf{N}_e^T dV + \int_{S_q^e} \widehat{q}_n \mathbf{N}_e^T dS + \int_{S_k^e} h T_\infty \mathbf{N}_e^T dS \tag{17.107}
$$

kde jeho tri členy predstavujú vektory generácie tepla, tepelného toku a konvekcie.

Ak analogicky s pevnostnou úlohou pomocou rozšírených matíc prvkov [1] sčítame prvkové matice do globálnych matíc výpočtového modelu celého telesa, dostaneme

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \left(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2\right)\mathbf{T} = \mathbf{f}$$

alebo v najúspornejšom zápise

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{f} \tag{17.108}$$

Názvy globálnych matíc sú analogické s názvami prvkových matíc, matica $\mathbf{K}$ sa nazýva matica vodivosti telesa.

Vzťah (17.108) pri *lineárnej* úlohe predstavuje sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu s konštantnými koeficientami, ktorú program po časovej diskretizácii úlohy rieši v časových krokoch analogicky ako dynamickú úlohu [1]. Pri hľadaní ustáleného teplotného poľa, kedy prvý člen na ľavej strane je nulový, sa rieši sústava obyčajných rovníc rovnakými metódami ako pri statickej pevnostnej úlohe.

Po vypočítaní uzlových teplôt telesa (vektora $\mathbf{T}$) program v cykle cez všetky prvky telesa určí pomocou interpolačného vzťahu (17.92) aproximačné funkcie teploty v prvkoch a z nich odvodené neznáme. Výsledky potom môžme v postprocesore programu analyzovať a textovo, resp. graficky spracovávať rovnakými postupmi a prostriedkami ako pri pevnostných úlohách.

Výhodou univerzálnych programov MKP, medzi ktoré patrí aj program ANSYS, je to, že fyzikálne rôzne typy úloh sa riešia analogicky, rovnakým postupom a v podstate aj pomocou rovnakých príkazov. Pri riešení úloh prenosu tepla môžeme teda využívať všetky skúsenosti získané pri riešení pevnostných úloh.

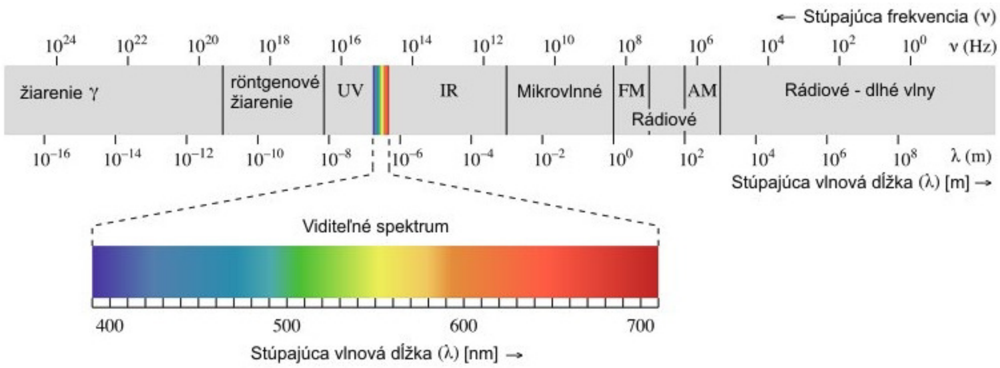
Pravda, treba rozlišovať fyzikálne rozdiely a rozumieť fyzikálnej podstate úlohy. Z formálneho hľadiska sa potom plošný tepelný tok zadáva v programe rovnako ako plošný tlak, okrajová podmienka pre teplotu sa zadáva rovnako ako okrajová podmienka pre posunutie atď. Úplne rovnako sa tiež vytvára geometrický a výpočtový model telesa, pravda, s fyzikálne rozdielnymi materiálovými konštantami a inak nazvanými prvkami; rovnaké prostriedky sa tiež využívajú na grafické i textové vyhodnotenie vypočítaných výsledkov.

Demonštrujú to dva vyriešené príklady s programom ANSYS, ktoré sú uvedené v [1] (kapitola *Prenos tepla vedením*) obsahujúce postup riešenia lineárneho stacionárneho a nestacionárneho vedenia tepla pri dvojrozmernej úlohe. Priestorové úlohy sa riešia úplne analogicky.

18 Prenos tepla radiáciou

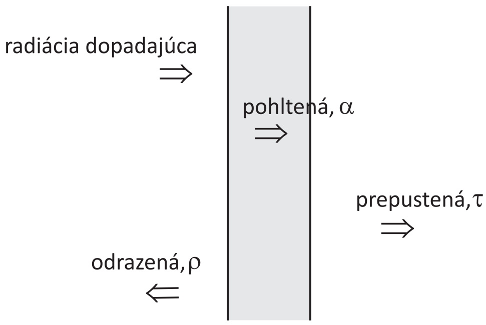
18.1 Základné pojmy

Radiáciou (žiarením) nazývame šírenie akéhokoľvek druhu elektromagnetických vĺn v priestore. Jej zdrojom je permanentná zmena elektromagnetických polí oscilujúcich elektricky nabitých častíc atómov. Elektro-magnetické vlny sa šíria rýchlosťou svetla c a navzájom sa odlišujú vlnovou dĺžkou λ a frekvenciou f, pričom platí vzťah $f = c/\lambda$. Ich frekvenčné spektrum je široké (obr. 18.1), pričom tepelné žiarenie (sálanie) spôsobujú najmä infračervené lúče s vlnovou dĺžkou $\lambda = 0{,}8.10^{-6}$ až $0{,}1.10^{-3}$ m (0,8 až 100 μm). Každé teleso, ktoré má teplotu vyššiu ako 0 °K emituje tepelné žiarenie. Keď sa jeho teplota zvýši nad teplotu tela (cca 300 °K), v určitej vzdialenosti začíname vnímať tepelné vyžarovanie ako sálanie tepla a pri vysokých teplotách (napr. vlákno žiarovky) prechádza tepelné žiarenie aj do oblasti viditeľného spektra.



Obr. 18.1

Keď tepelné žiarenie zasiahne povrch telesa, časť energie teleso absorbuje (pohltí), časť sa odrazí a časť prepustí (obr. 18.2).



Obr. 18.2 *Účinok tepelnej radiácie dopadajúcej na teleso*

Vlastnosti povrchu telesa, na ktorý dopadá tepelné žiarenie, charakterizujú tieto bezrozmerné koeficienty:

$\alpha =$ absorptivita (pohltivosť) - pomer absorbovanej tepelnej energie k celkovej dopadajúcej na teleso

$\rho =$ reflektancia (odrážavosť) - pomer odrazenej tepelnej energie k celkovej dopadajúcej na teleso

$\tau =$ transmitancia (priepustnosť) - pomer prepustenej tepelnej energie k celkovej dopadajúcej na teleso

Z energetickej bilancie vyplýva, že súčet týchto koeficientov sa musí rovnať jednej

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \tag{18.1}$$

Energia, ktorá sa odrazí, môže mať zrkadlový charakter (uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu) alebo *difúzny* (rozptýlený, šírený do všetkých smerov). Väčšina tuhých telies a kvapalín je pre tepelný tok prakticky nepriepustná ($\tau = 0$).

Uvedenú charakteristiku vlastností telesa a jeho povrchu, na ktorý dopadá tepelné žiarenie, možno zjednodušiť zavedením pojmu ideálneho tepelného žiariča - termálne *absolútne čierneho telesa*, s týmito základnými vlastnosťami:

1. Absolútne čierne teleso pohltí všetku dopadajúcu tepelnú energiu

   ($\alpha = 1, \rho = 0, \tau = 0$)

2. Hustota vyžarovanej tepelnej energie (tepelný výkon na jednotku plochy) podľa Stefan-Boltzmannovho zákona je

$$q_0 = \sigma T^4 \qquad [\mathrm{W/m^2}] \tag{18.2}$$

kde $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ je Stefan-Boltzmannova konštanta a T absolútna teplota povrchu telesa.

Absolútne čierne teleso v tepelnej rovnováhe so svojím okolím absorbuje z okolia všetko dopadajúce žiarenie (tepelné žiarenie všetkých vlnových dĺžok) a rovnaké množstvo energie do priestoru emituje. Absolútne čierne teleso si možno predstaviť (aj fyzikálne realizovať) ako duté teleso s dokonale odrážajúcimi stenami s malým otvorom. Ak do dutiny vniká usmernené žiarenie len cez tento otvor, toto po mnohonásobných odrazoch od jej stien odovzdá telesu celú svoju energiu. Ak steny majú teplotu T, žiarenie, ktoré zo zohriatych stien vychádza do priestoru nazývame žiarením absolútne čierneho telesa.

Najjednoduchší prenos radiačnej tepelnej energie si potom možno predstaviť medzi stenami dvoch dokonale čiernych telies s teplotami $T_1 > T_2$. Nech rovnako veľké vyžarujúce steny sú rovnobežné, extrémne veľké a s malou medzerou medzi nimi (aby sa žiadna časť difúzneho žiarenia nevyžarovala mimo plôch). Potom čistá hodnota energie vyžarovaná z telesa 1 do telesa 2 je

$$q_{12}^0 = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \qquad [\mathrm{W/m^2}] \tag{18.3}$$

Reálne telesá vyžarujú tepelnú energiu menej efektívne ako absolútne čierne teleso. V stave termodynamickej rovnováhy sa teplota, a teda ani vnútorná energia telesa nemení. Koľko energie pohltí, toľko musí aj vyžiariť. Preto absolútne čierne teleso, v porovnaní s reálnymi telesami, ktoré majú rovnakú teplotu, vyžaruje, ale aj pohlcuje, najviac energie. Pomer intenzít vyžarovania reálneho telesa (na všetkých vlnových dĺžkach tepelnej radiácie) a absolútne čierneho pri rovnakej teplote sa nazýva *emisivita*

$$\varepsilon = \frac{q}{q_0} \qquad [-] \tag{18.4}$$

Pre reálne telesá je emisivita väčšia ako nula a menšia ako 1. Jej hodnotu určujú vyžarovacie vlastnosti povrchu a je závislá od teploty. V tab. 1 sme uviedli orientačné hodnoty emisivity niektorých materiálov. Väčšina kovov sa vyznačuje pomerne malou tepelnou emisivitou, pokiaľ nie sú zoxidované. Nekovové materiály majú spravidla vysokú emisivitu.

Tab. 1 *Orientačné hodnoty emisivity niektorých materiálov*

Materiál	**Emisivita**
betón - drsný	0,94
drevo	0,85
hliník – leštený	0,05
hliník – zoxidovaný	0,25
liatina	0,20
ľad	0,96 – 0,98
liatina – zoxidovaná	0,60 – 0,90
oceľ – leštená	0,08
oceľ listová zoxidovaná	0,80
plast – polypropylén	0,97
pokožka – ľudská koža	0,98
sklo	0,92
sneh	0,85
voda	0,98

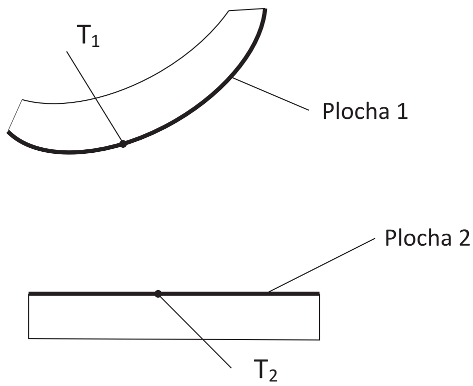
V komerčných programoch MKP sa výpočty tepelnej radiácie často obmedzujú na tzv. *šedé difúzne povrchy*. Pri takýchto povrchoch je emisivita i absorptivita nezávislá od vlnovej dĺžky žiarenia a povrchy majú difúzny charakter s polguľovým vyžarovaním rovinnej plochy s kosínusovou intenzitou. V stave termodynamickej rovnováhy na základe Kirchhoffovho zákona sa *absorptivita šedých telies rovná jeho emisivite* ($\alpha = \varepsilon$), a teda materiály, ktoré dobre vyžarujú teplo, zároveň ho aj dobre pohlcujú. Potom pre dve šedé veľké rovnobežné steny rovnicu (18.3) možno upraviť na

$$\begin{aligned} q_{12} &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 - \alpha_1(T_1, T_2)\sigma T_2^4 \\ &\cong \varepsilon_1 \sigma T_1^4 - \varepsilon_1 \sigma T_2^4 \\ &= \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \end{aligned} \tag{18.5}$$

Ak vyžarovacia plocha telesa 1 je S_1 potom jeho čistý vyžarovací výkon je

$$Q_{12} = S_1 q_{12} = S_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \tag{18.6}$$

Z praktického hľadiska nás predovšetkým zaujíma sálanie tepelnej energie medzi dvomi, príp. viacerými telesami. Uvažujme výmenu radiačnej tepelnej energie medzi dvomi šedými plochami schematicky znázornenými na obr. 18.3 a určme veľkosť tepelného toku prenášaného radiáciou do plochy 2. Plocha 1 vyžaruje



Obr. 18.3

tepelný výkon do všetkých smerov a len časť dopadne na plochu 2

$$Q_{12} = F_{12} S_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \qquad (18.7)$$

kde koeficient $F_{1\to 2}$, tzv. *konfiguračný faktor* (ktorý musíme poznať alebo vypočítať z údajov o veľkosti, tvare a polohe oboch plôch) udáva, aká časť z cekového radiačného výkonu plochy 1 dopadne na plochu 2.

Pokiaľ povrchy telies odrážajú teplo s reflektanciami ρ_1 a ρ_2, riešenie je komplikovanejšie (pozri napr. [15] alebo teoretický manuál programu ANSYS). Podľa (18.1) s $\tau = 0$ platí $\rho_1 = 1 - \varepsilon_1$, $\rho_2 = 1 - \varepsilon_2$ a dostávame

$$Q_{12} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \dfrac{1}{S_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} \qquad (18.8)$$

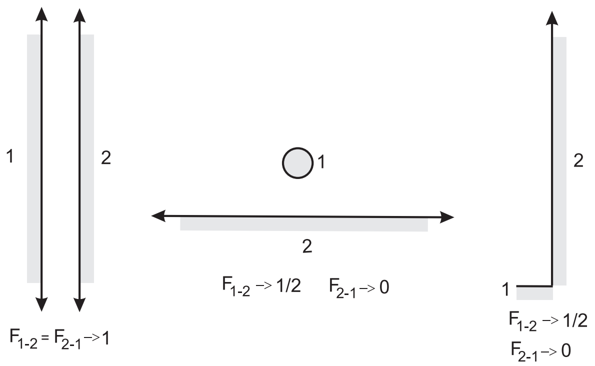
Tieto postupy a vzťahy možno zovšeobecniť pre výmenu sálavého tepla medzi plochami viacerých telies a numericky riešiť takéto silne nelineárne úlohy tepelnej radiácie spojené prípadne s ďalšími spôsobmi prenosu tepelnej energie. Zostáva ešte stručne ozrejmiť problematiku určovania faktorov F_{ij} .

18.2 Konfiguračné faktory plôch

Prenos tepla radiáciou závisí nielen od teploty telies a ich radiačných vlastností ale aj od ich vzájomnej relatívnej orientácie. Tento vplyv sa vyjadruje bezrozmerným koeficientom s názvom *konfiguračný faktor* (faktor sklonu, faktor výhľadu), ktorý možno definovať takto

$$F_{ij} = \frac{\text{energia žiarenia priamo dopadajúca na plochu } j}{\text{celková energia vyžiarená plochou } i}$$

Predpokladá sa pri tom, že plochy sú izotermálne, žiarenie je difúzne a priestor medzi vyžarujucími plochami je vákuum alebo plyn, ktorý neovplyvňuje výmenu radiačnej energie. Konfiguračný faktor je v takomto prípade čisto geometrická veličina a možno ho definovať aj ako koeficient vyjadrujúci akú časť výhľadu plochy *i* zatieňuje plocha *j*. Niektoré hodnoty tohto faktora potom možno určiť priamo z takejto definície (obr.18.4). Vyplýva z toho tiež, že ak plocha 1 je vo vnútri plne uzavretej plochy 2, potom $F_{12} = 1$.



Obr. 18.4 *Hodnoty konfiguračných faktorov zrejmé priamo z definície (dve veľké rovnobežné roviny blízko seba, guľová plocha blízko veľkej rovinnej plochy, malá plocha kolmá na veľkú*

Výpočet konfiguračných faktorov uľahčujú aj ďalšie pravidlá. Jedným z nich je *pravidlo recipricity,* ktoré vyplýva z energetickej rovnováhy oboch navzájom vyžarujúcich telies

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji} \tag{18.9}$$

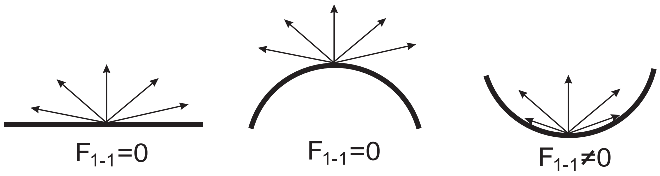
Ďalej je to *sumačné pravidlo* platiace pre energeticky uzavretý systém. Ak totiž plocha *i* v energeticky uzavretom systéme vyžaruje tepelný tok Q_i na *n* plôch, potom sa súčet tepelných tokov dopadajúcich na jednotlivé plochy systému musí rovnať tomuto toku

$$Q_{i1} + Q_{i2} + \ldots + Q_{in} = Q_i$$
$$\frac{Q_{i1}}{Q_i} + \frac{Q_{i2}}{Q_i} + \ldots + \frac{Q_{in}}{Q_i} = 1$$

a dostávame sumačné pravidlo

$$F_{i1} + F_{i2} + \ldots + F_{in} = 1 \tag{18.10}$$

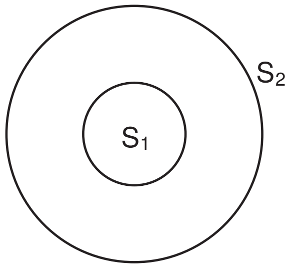
V sumačnom pravidle nenulová hodnota F_{ii} sa uplatní len v špeciálnom prípade konkávnosti plochy, ako je to znázornené na obr. 18.5



Obr. 18.5 *V špeciálnom prípade môže plocha vyžarovať aj sama na seba*

Príklad 18.1

Určte konfiguračné faktory pre dva koncentrické guľové povrchy S_1 a S_2 :



Podľa sumačného pravidla platí $F_{11} + F_{12} = 1$. Plocha 1 je vypuklá a tak dostávame

$$F_{11} = 0$$
$$F_{12} = 1$$

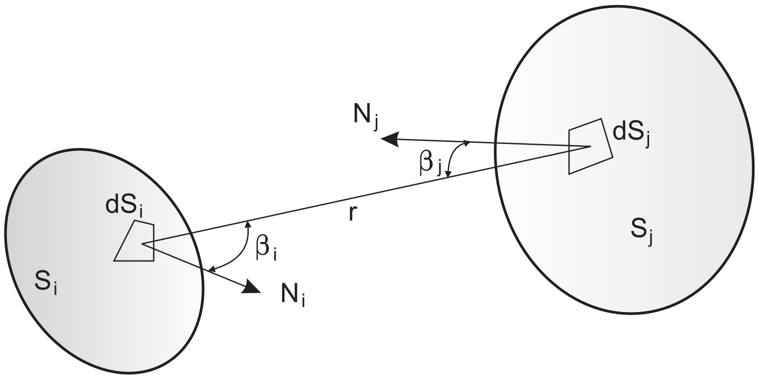
Pre plochu 2 sumačné pravidlo dáva $F_{21} + F_{22} = 1$ a platí pravidlo reciprocity $S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$, takže dostávame

$$F_{21} = S_1 / S_2$$
$$F_{22} = 1 - S_1 / S_2$$

Výpočet konfiguračných faktorov pre dve všeobecné plochy je komplikovanejší a pri využití definície a Lambertovho kosínusového zákona možno odvodiť všeobecný vzťah (pozri napr. [15])

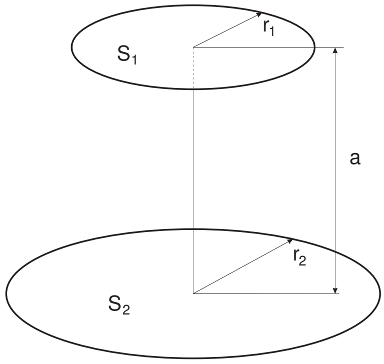
$$F_{ij} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \beta_i \cos \beta_j}{\pi s^2} dS_i dS_j \qquad [-] \qquad (18.11)$$

kde β_i a β_j sú uhly, ktoré zvierajú normály diferenciálnych elementov plôch s ich spojnicou (obr. 18.6). Aj v prípade všeobecných plôch platí pravidlo reciprocity (18.9).



Obr. 18.6 *Obrázok k výpočtu konfiguračného faktoru všeobecných plôch podľa* (18.11)

Výpočet konfiguračného faktoru podľa (18.11) vedie aj pri pomerne jednoduchých plochách na zložité plošné integrály, čo si vynútilo vznik rôznych vzorcových alebo grafických katalógov pre jednoduchšie určenie konfiguračných faktorov pri často sa vyskytujúcich kombináciách plôch. Ak v takomto katalógu potrebnú kombináciu nájdeme, potom sa konfiguračný faktor dá ľahko určiť z jednoduchého algebraického vzorca. Napr. pre dve rovnobežné koncentrické kruhové plochy vzdialené od seba o *a* (obr. 7), výpočtový vzorec je



Obr. 7

$$F_{12} = \frac{1}{2}\left\{X - \left[X^2 - 4\left(R_2 / R_1\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

kde $R = r / a$ a $X = 1 + (1 + R_2^2) / R_1^2$.

18.3 Výpočet prenosu tepla radiáciou v programe ANSYS

V programe ANSYS možno pomocou MKP približne riešiť prenos tepla viacerými metódami, ktoré sú podrobne opísané v užívateľskom a teoretickom manuáli programu. V príkladoch základných výpočtových postupov budeme využívať metódu, ktorá je v programe ANSYS nazvaná RSM (Radiosity Solver Method), resp. S2SM (Surface-to-Surface Method) v programe ANSYS FLUENT.

Pri tejto metóde sa zavádzajú všetky zjednodušujúce predpoklady, ktoré sme uvažovali v predchádzajúcich častiach tohto dodatku. Je to predovšetkým predpoklad šedých a difúznych vlastností vyžarovacích plôch a neovplyvňovanie radiácie priestorom medzi sálajúcimi plochami. (Niektoré tieto obmedzenia možno obísť v programe ANSYS FLUENT.)

Pri metóde RSM sa uzlové hodnoty hustoty radiačného toku q $[\mathrm{W/m^2}]$ zavádzajú do systému rovníc vedenia tepla [D16] vo forme vektora zaťaženia. Pre stacionárnu úlohu to vedie na sústavu globálnych nelineárnych rovníc, ktorú možno napísať v tvare

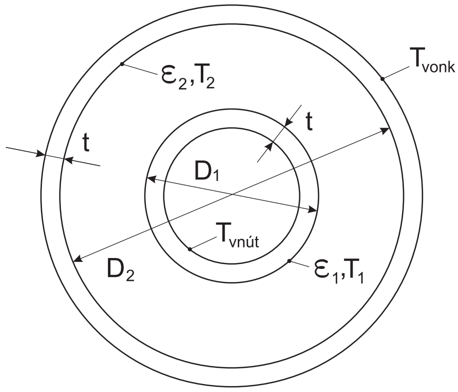
$$\mathbf{KT} = \mathbf{f} + [\mathbf{f}(\mathbf{T})]_{rad} \tag{18.12}$$

Sústava sa rieši iteračne, pričom sa v každom iteračnom kroku upravuje vektor $\mathbf{f}_{rad}$, pretože na plochách, ktoré sa zúčastňujú na výmene tepla radiáciou sa mení teplota. Iteračný proces sa ukončí, keď sa medzi telesami dosiahne energetická rovnováha v rámci určitej predpísanej tolerancie.

Pri riešení stacionárnych úloh si treba uvedomiť, že pri nich hľadáme tzv. ustálený (časovo už nemenný) teplotný a energetický stav. Predstavme si dve telesá s rozdielnymi teplotami, pri ktorých dochádza k prenosu tepla len radiáciou. Ak do teplejšieho telesa nebudeme dodávať energiu a z chladnejšieho odoberať, tak sa teploty telies vyrovnajú a tepelný tok v ustálenom stave medzi oboma telesami bude nulový. To znamená, že pri týchto úlohách sa na telesách objavujú konduktívne a konvektívne okrajové podmienky, ktoré vedú k nenulovej výmene tepla aj v ustálenom stave.

Príklad 18.2

Pre dve dlhé koncentrické rúry treba pomocou programu ANSYS určiť ustálený stav prenosu tepla radiáciou, keď sú dané tieto hodnoty: D_1 = 10 cm, D_2 = 20 cm, t = 1 cm. Na vnútornej ploche vnútornej rúry sa udržuje konštantná teplota $T_{vnút}$ = 1000 °K a na vonkajšej ploche vonkajšej rúry T_{vonk} = 600 °K. Emisivity sálajúcich povrchov rúr sú $\varepsilon_1 = 0{,}7$ a $\varepsilon_2 = 0{,}6$. Zaujímajú nás teploty sálajúcich povrchov rúr T_1 , T_2 a veľkosť hustoty tepelného toku q_{12} sálaného z teplejšieho telesa na studenšie.



Riešenie

Pretože sú rúry dlhé, zanedbáme malé množstvo tepla, ktoré vyžarujú koncové prierezy a úlohu budeme riešiť ako rovinnú. Vypočítaný tepelný tok potom platí len pre jednotku dĺžky rúr (1 m), ale vynásobením s reálnou dĺžkou ľahko dostaneme jeho celkovú hodnotu.

Úlohu sme vyriešili touto postupnosťou interaktívnych príkazov:

1. Zobrazovať len príkazy pre termálnu úlohu
Preferences >*Thermal*, OK;
2. Typ prvku
Preprocessor >*Element Type* >*Add/Edit/Delete* >*Add* >*Solid* > Triangl 6node 35, OK, Close;
3. Materiál (Vyžaduje sa formálne zadať ľubovoľnú hodnotu, ktorá sa však pri čistej radiácii nevyužije)
Material Props >*Material Models* >*Thermal* >*Conductivity* >*Isotropic*, KXX=1, OK;
4. Vytvorenie prierezov rúr
Modeling >*Create* >*Areas* >*Circle* >*Annulus*, Rad1=0.04, Rad2=0.05, Apply, Rad1=0.1, Rad2=0.11, OK;
5. Sieť prvkov
Meshing >*Size Controls* >*Smart Size* >*Basic*, LVL=1, OK;
Mesh >*Areas* >*Free*, Pick All;
6. Okrajové podmienky pre teplotu
Solution >*Define Loads* >*Apply* >*Thermal* >*Temperature* >*On Lines*, Kliknite postupne všetky 4 vnútorné čiary vnútorného prstenca, OK, VALUE=1000, Apply, Kliknite postupne všetky 4 vonkajšie čiary vonkajšieho prstenca, OK, VALUE=600, OK;
7. Okrajové podmienky pre emisivitu

Solution >Define Loads >Apply >Thermal >Radiation >On Lines, Kliknite postupne všetky 4 vonkajšie čiary vnútorného prstenca, OK, VALUE=0.7, VALUE2=1, Apply, Kliknite postupne všetky 4 vnútorné čiary vonkajšieho prstenca, OK, VALUE=0.6, VALUE2=1, OK;

8. Riadiace príkazy pre výpočet radiácie (hodnota teploty okolia VALUE sa pri našej úlohe neuplatní)

Solution >Radiation Opts >Solution Opts, STEF=5.67E-8, TOFFST=0, VALUE=1, OK;

9. Riadiace príkazy pre výpočet F_{12} (potvrdíme implicitne nastavené hodnoty)

Solution >Radiation Opts >View Factor, OK;

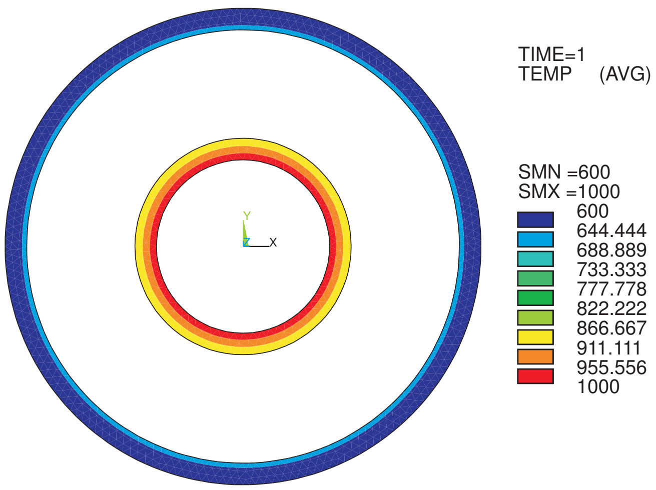
10. Riadiace príkazy pre iteráciu a výpočet

Solution >Load Step Opts >Time/Frequenc >Time-TimeStep, TIME=1, DELTIM=0.5, Minimum time step size= 0.1, Maximum time step size= 1, OK;

*Solution >Solve >*Current LS, OK;

11. Ilustrácia rozdelenia teplôt v ustálenom stave

General Postproc >Plot Results >Contour Plot >Nodal Solu >DOF Solution, Nodal Temperature, OK;



12. Určenie teplôt na plochách s prenosom tepla

General Postproc >Query Results >Subgrid Solu >DOF Solution, TEMP, OK, Kliknite uzly na sálajúcich povrchoch: $T_1 = 865{,}5$ °K, $T_2 = 657{,}2$ °K, Cancel;

13. Určenie hustoty tepelného toku na plochách s prenosom tepla

General Postproc >Query Results >Subgrid Solu >Flux&Gradient, TFSUM, OK, Kliknite uzly na sálajúcich povrchoch: q_{12} = 12052 W/m^2, q_2 = 6000 W/m^2, Cancel;

14. Ukončenie výpočtu

Utility Menu >File >Exit, Save Geom+Loads, OK;

Pomocou vypočítaných hodnôt teplôt môžeme už aj analyticky vypočítať hustotu tepelného toku podľa (18.8). Pretože vonkajšia rúra kompletne zachytáva tepelnú energiu vnútornej rúry, je zrejmé, že $F_{12} = 1$.

$$q_{12} = \frac{Q_{12}}{S_1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2 / S_1}} = \frac{5{,}67 \cdot 10^{-8}(865{,}5^4 - 657{,}2^4)}{\frac{1-0{,}7}{0{,}7} + \frac{1}{1} + \frac{1-0{,}6}{0{,}6 \cdot 2}} = 12053\ \mathrm{W/m^2}$$

Kontrola energetickej bilancie

$$q_1 S_1 = q_2 S_2$$
$$q_1 = q_2 S_2 / S_1 \qquad \rightarrow \qquad 12052 \approx 6000 \cdot 2$$

V prípade nestacionárneho prenosu tepla radiáciou [1] pribudnú do rovníc (18.12) časovo závislé členy

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{KT} = \mathbf{f} + [\mathbf{f}(\mathbf{T})]_{rad} \tag{18.13}$$

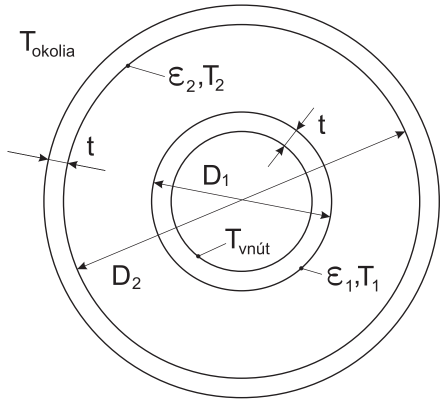
kde matica tepelnej kapacity (merného tepla, tepelného tlmenia) $\mathbf{C}$ sa vytvára usporiadanou sumáciou prvkových matíc

$$\mathbf{C}_e = \int_{V_e} \rho_e C_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV \tag{18.14}$$

takže pri tvorbe prvkov v programoch MKP je potrebné zadávať okrem tepelnej vodivosti aj hustotu ρ a merné teplo C materiálu.

Príklad 18.3

Dané sú dve dlhé koncentrické rúry s rozmermi priečnych rezov: D_1 = 10 cm, D_2 = 20 cm, t = 1 cm. Začiatočná teplota oboch rúr je 300 °K. Vnútorná plocha vnútornej rúry sa v čase $t = 0$ náhle ohreje na teplotu $T_{vnút} = 1000$ °K a udržuje sa trvale na tejto hodnote. Ohriata vnútorná rúra začne tepelnou radiáciou ohrievať vonkajšiu rúru. Určte časový priebeh teploty T_2 na vnútornom povrchu vonkajšej rúry a hodnotu tejto teploty v v čase $t =$ 1 hod. Materiálové vlastnosti oboch rúr nie sú závislé od teploty. Koeficient tepelnej vodivosti $\lambda = 50$ $\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, hustota $\rho = 7850$ $\mathrm{kgm^{-3}}$, merné teplo C = 440 $\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$. Emisivity sálajúcich povrchov rúr sú $\varepsilon_1 =$ 0,7 a $\varepsilon_2 =$ 0,6. Teplota okolia vonkajšej rúry T_{okolia} = 300 °K.

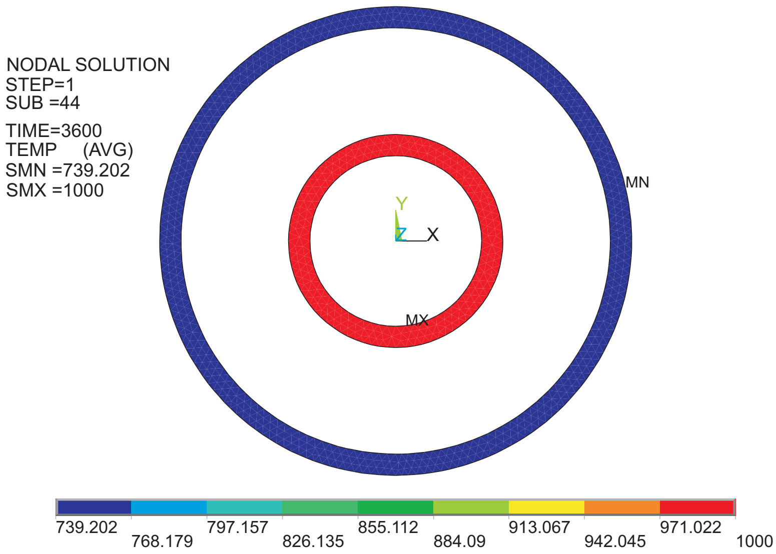


Riešenie

Pretože sú rúry dlhé, zanedbáme malé množstvo tepla, ktoré vyžarujú koncové prierezy a úlohu budeme riešiť ako rovinnú. Úlohu sme vyriešili touto postupnosťou interaktívnych príkazov:

1. Zobrazovať len príkazy pre termálnu úlohu
Preferences >Thermal, OK;
2. Typ prvku
Preprocessor >Element Type >Add/Edit/Delete >Add >Solid > Triangl 6node 35, OK, Close;
3. Materiál
Material Props >Material Models >Thermal >Conductivity >Isotropic, KXX=50, OK, Specific Heat, C=440, OK, Density, DENS=7850, Material, Exit; ;
4. Vytvorenie prierezov rúr
Modeling >Create >Areas >Circle >Annulus, Rad1=0.04, Rad2=0.05, Apply, Rad1=0.1, Rad2=0.11, OK;
5. Sieť prvkov
Meshing >Size Controls >Smart Size >Basic, LVL=1, OK;
Mesh >Areas >Free, Pick All;
6. Časovo závislá úloha
Solution >Analysis Type >New Analysis, Transient, OK, OK;
7. Začiatočné teploty rúr
Solution >Define Loads >Apply >Thermal >Temperature >Uniform Temp, TUNIF=300, OK;
8. Okrajové podmienky pre teplotu
Solution >Define Loads >Apply >Thermal >Temperature >On Lines, Kliknite postupne všetky 4 vnútorné čiary vnútorného prstenca, OK, VALUE=1000, OK;
9. Okrajové podmienky pre emisivitu
Solution >Define Loads >Apply >Thermal >Radiation >On Lines, Kliknite postupne všetky 4 vonkajšie čiary vnútorného prstenca, OK, VALUE=0.7, VALUE2=1, Apply, Kliknite postupne všetky 4 vnútorné čiary vonkajšieho prstenca, OK, VALUE=0.6, VALUE2=1, Apply, Kliknite postupne všetky 4 vonkaj3ie čiary vonkajšieho prstenca, VALUE=0.6, VALUE2=1, OK;
10. Riadiace príkazy pre výpočet radiácie *Solution >Radiation Opts >Solution Opts*, STEF=5.67E-8, TOFFST=0, VALUE=300, OK;
11. Riadiace príkazy pre výpočet F_{12} (potvrdíme implicitne nastavené hodnoty)
Solution >Radiation Opts >View Factor, OK;
12. Riadiace príkazy pre iteráciu a výpočet
Solution >Load Step Opts >Time/Frequenc >Time-TimeStep, TIME=3600, DELTIM=10, Minimum time step size= 5, Maximum time step size= 100, OK;
13. Riadiace príkazy pre zápis výsledkov
Solution >Load Step Opts >Outpu Ctrls >DB/Results File, Every substep, OK;
14. Výpočet
*Solution >Solve >*Current LS, OK;
15. Ilustrácia rozdelenia teplôt v čase 1 hodina

General Postproc >Plot Results >Contour Plot >Nodal Solu >DOF Solution, Nodal Temperature, OK;

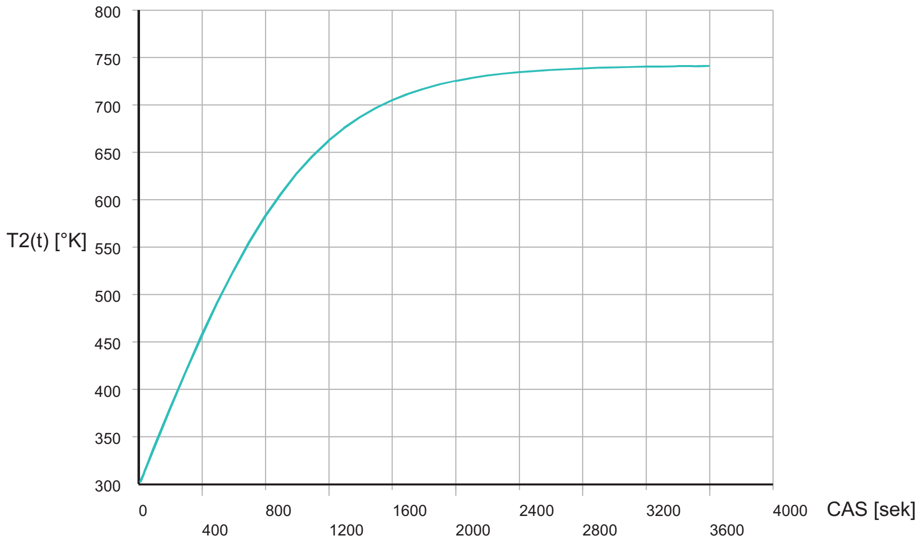


16. Určenie teplôt na plochách s prenosom tepla

General Postproc >Query Results >Subgrid Solu >DOF Solution, TEMP, OK, Kliknite uzly na sálajúcich povrchoch: $T_1 = 995{,}1$ °K, $T_2 = 741{,}3$ °K, $T_{2vonk} = 739{,}2$ °K, Cancel;

17. Časový priebeh teploty T_2

TimeHist PostPro, Kliknite ikonku *Add Data >Nodal Solution > DOF Solution*, Nodal Temperature, OK, Kliknite ľubovoľný uzol na vnútornej ploche vonkajšej rúry, OK, Kliknite ikonku *Graph Data*;



18. Ukončenie výpočtu

Utility Menu >File >Exit, Save Geom+Loads, OK;

19 Skupenské fázové premeny - topenie (tavenie) a tuhnutie

19.1 Základné pojmy

Z hľadiska termodynamiky sa fázovou premenou označuje skoková zmena makroskopických vlastností termodynamického systému (fázy) pri zmene nejakej termodynamickej premennej (napr. teploty). Najznámejšími príkladmi fázových premien, s ktorými sa stretávame v technickej i bežnej praxi, sú skupenské fázové premeny (zmeny skupenstva)

- topenie (tavenie) a tuhnutie
- vyparovanie a kondenzácia
- sublimácia (priamy prechod pevnej fázy látky do plynnej) a desublimácia

Topenie (tavenie) je fázová premena pri ktorej sa pevná látka mení na kvapalinu (je to teda zmena pevnej fázy látky na jej kvapalnú fázu). Opačná zmena sa nazýva *tuhnutie*.

Teplota topenia (tavenia) je teplota, pri ktorej látka mení skupenstvo z tuhého na kvapalné. Kryštalické resp. polykryštalické látky, ktoré sa skladajú z jedinej zložky, t.j. z jediného chemického prvku (napr. železo Fe), alebo jedinej zlúčeniny (napr. voda H_2O), majú svoju charakteristickú teplotu topenia (tavenia). Celá premena tuhej látky na kvapalnú prebehne pri tejto teplote. Kryštalické látky tvorené viacerými zložkami (napr. zliatinové ocele) alebo amorfné látky (napr. plasty, sklo) nemajú určitú teplotu topenia - mäknú a menia sa na kvapalinu v určitom intervale teploty.

Teplota tuhnutia je charakteristická teplota pri opačnom zmene skupenstva látky. Mnohé látky majú teplotu topenia a tuhnutia rovnakú.

Tab. 19.1 *Teploty topenia niektorých látok pri normálnom atmosferickom tlaku*

Látka	T_t [°C]	T_t [K]
Voda(ľad)	0	273,15
Cín	232	505
Hliník	658	931
Železo	1 536	1 805
Wolfrám	3 350	3 623
Uhlík	3 550	3 823
Oceľ	1 350 – 1 540	1 623 – 1 813
Meď	1 083	1 356
Olovo	327	600

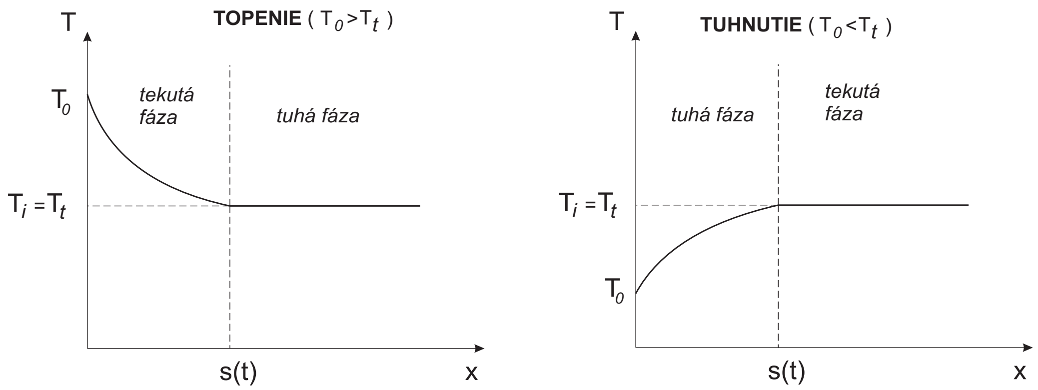
Na prechod zložky z jednej fázy do inej treba látke dodať, alebo odobrať, určité množstvo tepla, ktoré sa nazýva *skupenské teplo*. Skupenské teplo topenia L_t je množstvo tepla, ktoré musíme látke v pevnom skupenstve pri teplote topenia dodať, aby sa zmenila na kvapalinu o rovnakej teplote. Túto vlastnosť látky charakterizuje *merné skupenské teplo topenia* ℓ_t, čo je množstvo tepla potrebné na tento proces pre 1 kg látky pri normálnom tlaku 1,013 $\cdot 10^5$ Pa. Potom pre látku s hmotnosťou m platí

$$\ell_t = \frac{L_t}{m} \qquad [J/kg] \tag{19.1}$$

Napr. pre čisté železo je ℓ_t = 289 000 J/kg.

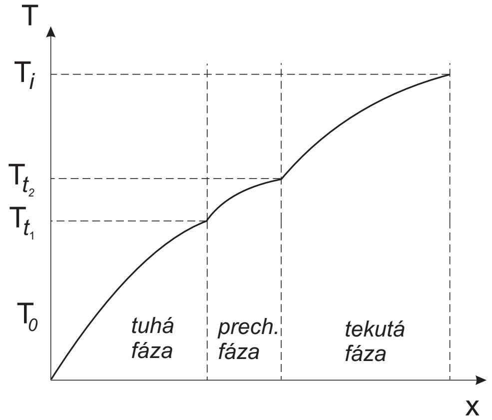
Opačnú fázovú zmenu charakterizuje *merné skupenské teplo tuhnutia*. Je to teplo, ktoré odovzdá 1 kg kvapaliny, ak sa pri teplote tuhnutia celý premení na pevnú látku s tou istou teplotou. Hodnota merného skupenského tepla tuhnutia je pre danú látku rovnaká ako hodnota merného skupenského tepla topenia.

Najjednoduchší prípad topenia (tuhnutia) je pre jednorozmernú formuláciu znázornený na obr. 19.1. Ak začiatočná teplota látky T_i pri procese topenia (alebo tuhnutia) sa rovná teplote topenia T_t, potom teplota tuhej (tekutej) fázy zostáva počas celého procesu fázovej premeny nemenná, rovná T_t. V takomto prípade treba určovať len časový priebeh zmeny teploty v tekutej (tuhej) fáze. Rieši sa teda problém jednej oblasti s jednou neznámou funkciou teploty. Rozhranie $s(t)$, oddeľujúce fázy, je pohyblivé (časovo závislé), čo je typický znak úloh so skupenskými fázovými premenami, komplikujúci riešenie úloh skupenských fázových premien.



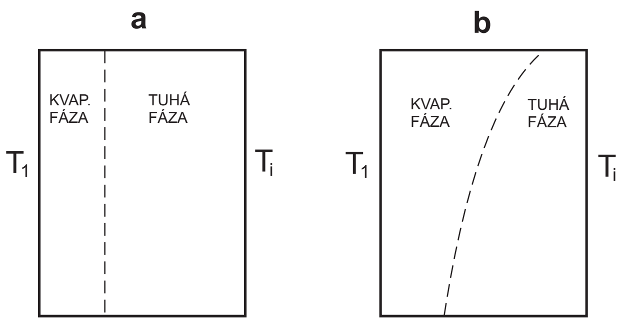
Obr. 19.1 *Topenie a tuhnutie s jedinou oblasťou časovej zmeny teploty*

Pri reálnych úlohách pre viaczložkové látky sa najčastejšie stretávame s tromi rozdielnymi oblasťami časovej zmeny teploty a dvomi pohyblivými hranicami. V takomto prípade, ako sme už uviedli, sa fázová zmena uskutočňuje nie pri konštatnej teplote, ale v určitom teplotnom intervale (T_{t_1}, T_{t_2}), čoho následkom je existencia prechodovej (zmiešanej, kašovitej) oblasti medzi tuhou a tekutou fázou (obr. 19.2).



Obr.19.2 *Jednorozmerné tuhnutie viaczložkovej látky*

V tekutej fáze a prechodovej oblasti vplýva na procesy topenia a tuhnutia aj voľné prúdenie vyvolané teplotným gradientom. Tento efekt ilustruje obr. 19.3 na príklade topenia jednozložkovej látky v pravouhlej dutine. Na ľavej stene dutiny sa udržuje teplota T_0 (vyšia ako teplota topenia) a na pravej stene je začiatočná teplota (nižšia ako teplota topenia). Keď sa pri riešení zanedbáva voľná konvencia, hranica oboch fáz sa posúva rovnobežne s ohrievanou stenou. V skutočnosti však prúdenie ohrievanej kvapaliny (pri ohrievanej stene smerom hore, a opačným smerom pri hranici oboch fáz) zrýchľuje v hornej časti pohyb rozhrania oboch fáz do tvaru naznačeného na obrázku.



Obr.19.3 *Topenie bez zohľadnenia voľného prúdenia v kvapalnej fáze (a). Topenie s voľným prúdením (b)*

19.2 Formulácia úlohy

Uvažujme jednoduchú formuláciu jednorozmernej úlohy topenia jednozložkovej látky so zanedbaním voľnej konvekcie. Rovnica nestacionárneho vedenia tepla (kapitola 17) pre kvapalnú fázu potom je

$$\lambda_{kv} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho_{kv} c_{kv} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{19.2}$$

Podobne pre pre oblasť tuhej fázy platí

$$\lambda_{tu} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho_{tu} c_{tu} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{19.3}$$

V týchto rovniciach je λ súčiniteľ vedenia tepla, ρ merná hmotnosť a c merné teplo pri konštantnom tlaku príslušnej fázy. Pre tieto diferenciálne rovnice treba predpísať začiatočné a okrajové podmienky a podmienky, ktoré platia na rozhraní oboch fáz.

Na hranici styku, označenej indexom kt, je teplota rovná teplote topenia

$$T_{kt} = T_t \tag{19.4}$$

Na tejto hranici tiež musí platiť, že tepelný tok privádzaný do tuhej fázy sa rovná odvádzanému toku tekutou fázou plus latentné teplo vznikajúce pri tomto procese

$$-\lambda_{tu} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{tu} = \rho_{tu} \ell_t \frac{ds}{dt} - \lambda_{kv} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{kv} \qquad \text{na } s \tag{19.5}$$

kde ds/dt reprezentuje rýchlosť pohybu bodov rozhrania.

Hlavným problémom analytického riešenia takýchto úloh je aplikácia podmienok pre nestacionárne (pohyblivé) rozhranie oboch fáz a sledovanie jeho pohybu. Analytické riešenia sú známe len pre niekoľko špeciálnych jednorozmerných a dvojrozmerných úloh. Pri riešení reálnych úloh topenia (tavenia) a tuhnutia sa využívajú približné numerické metódy, predovšetkým metóda konečných prvkov.

19.3 Entalpická metóda riešenia úloh topenia a tuhnutia

Metóda dostala názov podľa toho, že proces topenia a tuhnutia sleduje na základe zmien entalpie, čím sa riešenie úlohy výrazne zjednodušuje. Pre všetky oblasti úlohy platí rovnaká diferenciálna rovnica a navyše možno obísť explicitné sledovanie pohybu bodov rozhrania.

Metódu možno v jej najjednoduchšej podobe formulovať tak, že výjdeme z rovnice nestacionárneho vedenia tepla

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right] + \bar{Q} \qquad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right] \tag{19.6}$$

Ľavú stranu tejto rovnice možno pri konštantnom tlaku považovať za časovú zmenu entalpie

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right] + \bar{Q} \qquad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right] \tag{19.7}$$

Entalpiu na jednotku objemu vyjadríme v tvare (referenčnú teplotu volíme rovnú nule)

$$H = \int_0^T \rho c \, dT + \phi(T) \rho \ell_t \qquad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right] \tag{19.8}$$

kde funkcia ϕ v procese tuhnutia vyjadruje podiel kvapalnej fázy (pre čiste kvapalný stav ϕ = 1 a pre čiste tuhý stav ϕ = 0).

Sledujme najprv nárast entalpie v procese topenia jednozložkovej látky (fázová zmena prebieha pri konštantnej teplote), ktorej teplota topenia je T_t. Pri ohrievaní tuhej látky potom pre entalpiu platí

$$H_{tu}(T)=\int_0^T \rho_{tu}c_{tu}\,dT \qquad T<T_t \tag{19.9}$$

Pri teplote topenia sa entalpia zvýši o latentné teplo a pre entalpiu kvapalnej fázy bude platiť

$$H_{kv}=\int_0^{T_t} \rho_{tu}c_{tu}\,dT+\int_{T_t}^{T} \rho_{kv}c_{kv}\,dT+\rho_{kv}\ell_t \qquad T_t\le T \tag{19.10}$$

Pri viaczložkových alebo amorfných látkach prebieha fázová premena pri meniacej sa teplote v intervale od T_{t1} do T_{t2} a v takom prípade treba pomocou funkcie $\phi(T)$, zavedenej v (19.8), vystihnúť zmenu entalpie v tomto procese. Ak túto zmenu sledujeme pomocou závislosti latentného tepla od teploty, zmenia sa rovnice (19.9) a (19.10) na

$$H_{tu}(T)=\int_0^{T_{t1}} \rho_{tu}c_{tu}\,dT+\int_{T_{t1}}^{T}\left[\rho_{zm}\left(\frac{d\ell}{dT}\right)+\rho_{zm}c_{zm}\right]dT \qquad T_{t1}<T\le T_{t2} \tag{19.11}$$

$$H_{kv}(T)=\int_0^{T_{t1}} \rho_{tu}c_{tu}\,dT+\rho\ell+\int_{T_{t1}}^{T_{t2}} \rho_{zm}c_{zm}dT+\int_{T_{t2}}^{T} \rho_{kv}c_{kv}dT \qquad T\ge T_{t2} \tag{19.12}$$

kde index *zm* označuje hodnoty v prechodovej (zmiešanej) oblasti fáz.

Pre konkrétnu úlohu sa diferenciálna rovnica (19.7) spolu s rovnicami (19.11) a (19.12), ktoré udávajú vzťah medzi entalpiou a teplotou rieši štandartným postupom MKP [2], (kap. 8 a 17). Po geometrickej a časovej diskretizácii, sumácii prvkových príspevkov do globálnych matíc, zadaní začiatočných a okrajových podmienok sa rieši nestacionárna a nelineárna úloha vedenia tepla a fázovej premeny tvorená sústavou diferenciálnych rovníc

$$\mathbf{H}(T)\dot{\mathbf{T}}+\mathbf{K}(T)\mathbf{T}=\mathbf{q}(T,t) \tag{19.13}$$

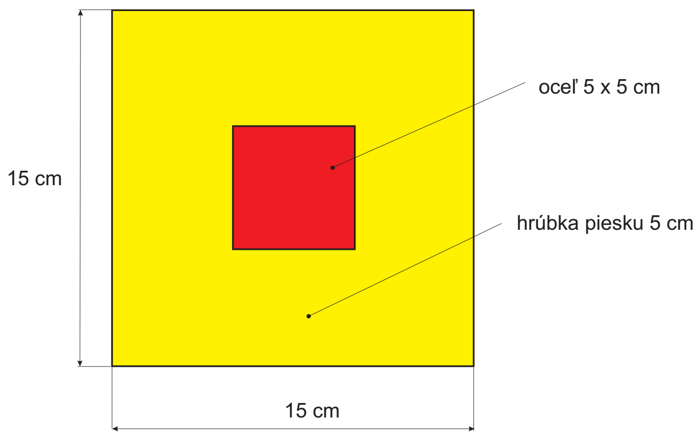
kde $\mathbf{H}$ je matica entalpie, $\mathbf{K}$ je matica vedenia tepla, $\mathbf{q}$ je vektor (stĺpcová matica) uzlových tepelných tokov. Vektory $\mathbf{T}$ a $\dot{\mathbf{T}}$ obsahujú hodnoty uzlových teplôt a uzlových rýchlostí teploty. Sústava (19.13) sa rieši pomocou Newton-Raphsonovej iteračnej procedúry pre každý časový krok v celkovom časovom intervale riešenia úlohy. Spôsob zadávania a vyhodnocovania takejto úlohy v MKP si ukážeme na riešený príkladu v programovom systéme ANSYS.

Príklad 19.1

Oceľová tyč štvorcového prierezu sa vyrába odlievaním do pieskovej formy s rozmermi priečneho rezu podľa obrázku. Budeme analyzovať tuhnutie odliatku v časovom intervale 4 hodiny so zohľadnením tepelnej konvekcie vonkajšieho povrchu formy s okolitým vzduchom pri daných materiálových vlastnostiach. Tepelnú radiáciu zanedbáme. Latentné teplo zohľadníme v zmene entalpie ocele v časovom intervale tuhnutia.

Materiálové vlastnosti piesku (volíme nezávislé od teploty)

tepelná vodivosť 0,52 W/(mK)
hustota 1500 kg/m^3
merné teplo 1170 J/(kgK)



Materiálové vlastnosti ocele

Teplota °C	Tepelná vodivosť W/(mK)	Entalpia 10^9 J/m^3
1580 (tekutý stav)	25	11,214
1510 (začiatok tuhnutia)	25	10,545
1450 (koniec tuhnutia)	32	8,247
0 (vzťažná hodnota)	30	0

Začiatočné podmienky

Teplota ocele na začiatku riešenia 1580 °C
Teplota piesku na začiatku riešenia 27 °C

Údaje pre konvekciu

Koeficient prestupu tepla 11,5 W/(m^2 K)
Teplota vzduchu 27 °C

Riešenie

Zanedbali sme zložitejšie pomery na koncoch a úlohu sme riešili ako rovinnú, čím sme približne určili situáciu vo všeobecnom priereze. Úlohu sme vyriešili touto postupnosťou interaktívnych príkazov:

1. Zobrazovať len príkazy pre termálnu úlohu
Preferences >Thermal, OK;

2. Typ prvku
Preprocessor >Element Type >Add/Edit/Delete >Add >Solid > Quad 4 node 55, OK, Close;

3. Materiál č.1 - piesok

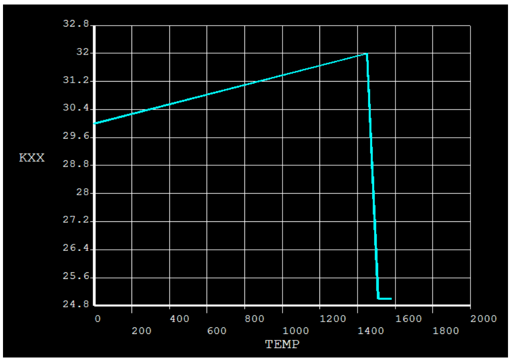
Material Props >Material Models >Material Model Number 1 >Thermal >Conductivity >Isotropic, KXX=0.52, OK, *Specific Heat,* C = 1170, OK, *Density*, DENS = 1500, OK;

4. Materiál č.2 - oceľ

Material Props >Material Models >Material >New Model..., ID = 2, OK, *Thermal >Conductivity >Isotropic*, Kliknite trikrát *Add Temperature* pre vytvorenie potrebných stĺpcov, do ktorých zadajte

T1 = 0	T2 = 1450	T3 = 1510	T4 = 1580
KXX = 30	KXX = 32	KXX = 25	KXX = 25

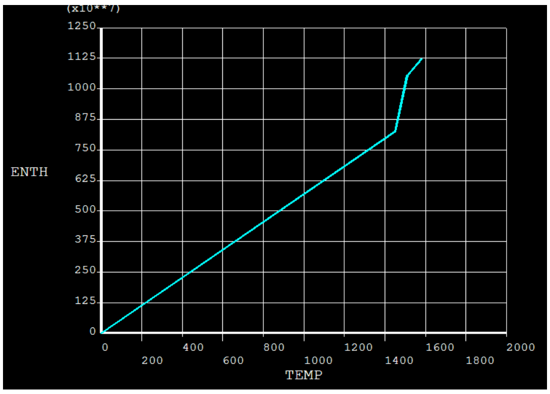
Kliknite *Graph* (Všimnite si nárast vodivosti pri tuhnutí taveniny)



Vysvieťte riadok teplôt a uložte ho pomocou *Ctrl C*, OK, *Thermal >Enthalpy*, Kliknite trikrát *Add Temperature* pre vytvorenie potrebných stĺpcov, Vysvieťte riadok teplôt a zadajte teploty pomocou *Ctrl V*, Do spodného riadku zadajte hodnoty

ENTH1 = 0 ENTH2 = 8.247 E9 ENTH3 = 10.545 E9 ENTH4 = 11.214 E9,

Kliknite *Graph* (Všimnite si zmenu sklonu priebehu entalpie vplyvom latentného tepla)
OK, Material, Exit;

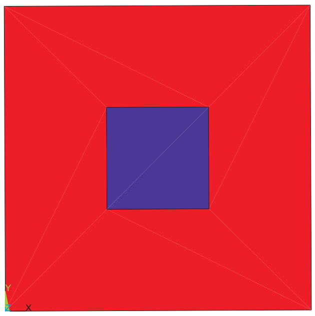


5. Vytvorenie prierezových plôch

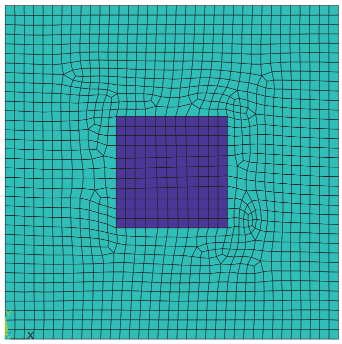
Modeling >Create >Areas >Rectangle >By Dimensions, X1 = 0, Y1 = 0, X2 = 0.15, Y2 = 0.15, Apply,

X1 = 0.05, Y1 = 0.05, X2 = 0.1, Y2 = 0.1, OK;

Modeling >Operate >Booleans >Overlap >Areas, Kliknite a potvrďte postupne obe plochy s OK;
Utility Menu >PlotCtrls >Numbering, AREA = On, /NUM = Colors only, OK;



6. Vytvorenie prvkov
Preprocessor >Meshing >Size Cntrls >SmartSize >Basic, LVL = 1 (fine), OK;
Meshing >Mesh >Areas >Free, Kliknite plochu formy (orientujte sa podľa farebného vysvietenia), OK, OK;
Meshing >Mesh Attributes >Default Attribs, MAT = 2, OK;
Meshing >Mesh >Areas >Free, Kliknite vnútorný štvorec (orientujte sa podľa farebného vysvietenia), OK, OK;
Utility Menu >PlotCtrls >Numbering, Elem/Attrib numberig = Material Numbers, OK;



6. Nestacionárna úloha
Solution >Analysis Type >New Analysis, ANTYPE = Transient, OK, OK;

7. Okrajové podmienky pre konvekciu
Solution >Define Loads >Apply >Thermal >Convection >On Lines, Kliknite postupne 4 čiary väčšieho štvorca, OK, VALI = 11.5, VAL2I = 27, OK;

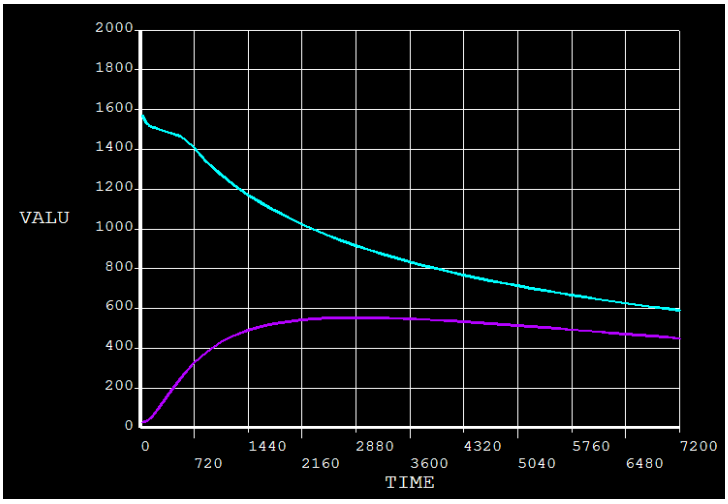
8. Začiatočné podmienky
Pre taveninu
Utility Menu >Select >Entities, Areas, OK, Kliknite vnútorný štvorec, OK, Select >*Everything Below >Selected Areas;*
Solution >Define Loads >Apply >Initial Condit'n >Define, Pick All, Lab = TEMP, VALUE = 1580, OK;
Pre formu

Utility Menu >Select >Entities, Nodes, Invert;
Solution >Define Loads >Apply >Initial Condit'n >Define, Pick All, Lab = TEMP, VALUE = 27, OK;
Utility Menu >Select >Everything;

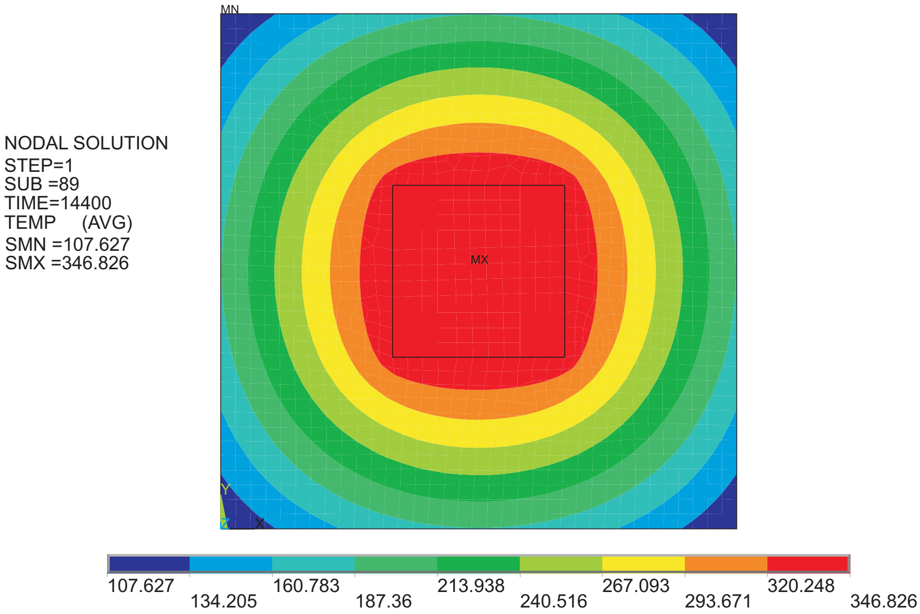
9. Riadiace parametre výpočtu
Solution >Load Step Opts >Time/Freqvenc >Time-Time Step, TIME = 14400, DELTIM = 30, Minimum time step size = 5, Maximum time step size = 200, OK;
Solution >Load Step Opts >Output Ctrls >DB/Results File, FREQ = Every Substep, OK;

10. Výpočet
Solution >Solve >Current LS, OK*;*

11. Znázornenie priebehu teploty v itervale prvých dvoch hodín vo zvolených bodoch
Utility Menu >Plot Cntrls >Style >Graphs >Modify Axes, /XRANGE = Specific range, XMIN = 0, XMAX = 7200, OK;
Utility Menu >Plot >Elements;
TimeHist Postpro >Variable Viewer, Kliknite 1. ikonku zľava (Add Data), *Nodal Solution >DOF Solution >Nodal Temperature*, OK, Kliknite ľubovoľný uzol zhruba v strede oceľovej časti, Apply, *Nodal Solution >DOF Solution >Nodal Temperature*, OK, Kliknite ľubovoľný uzol zhruba v strede hrúbky formy, OK, Vysvieťte oba riadky s údajmi o teplotách a kliknite 3. ikonku zľava (Graph Data);



12. Znázornenie rozdelenia teploty na konci štvrtej hodiny chladnutia
General Postproc >Read Results >Last Set;
General Postproc >Plot Results >Contour Plot >Nodal Solu >Nodal Solution >DOF Solution >Nodal Temperature, OK;



13. Ukončenie výpočtu
Utility Menu >File >Exit, Save Geom+Loads, OK;

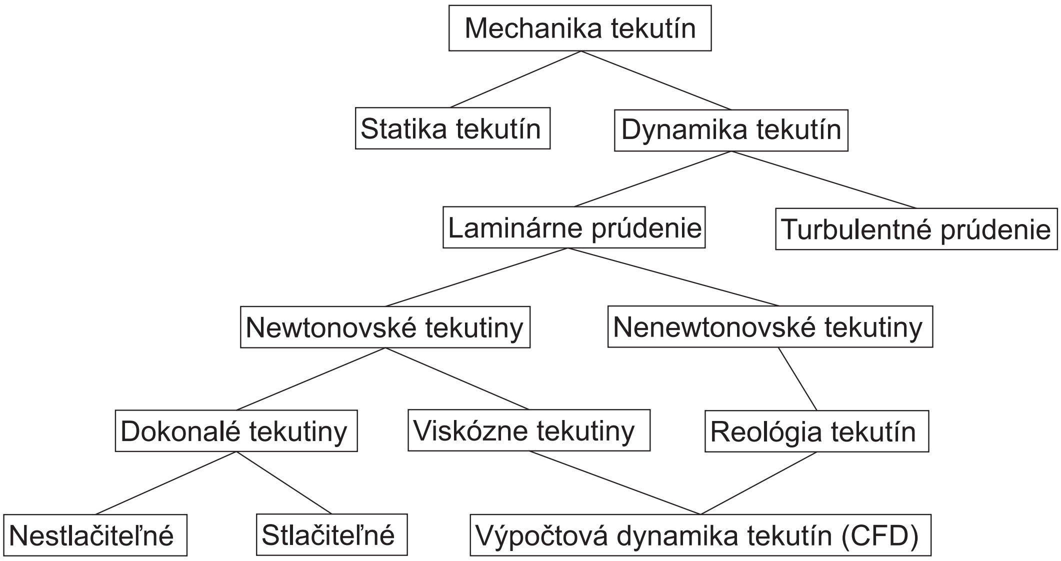
Poznámka

Pokiaľ by sme pri analýze výsledkov riešenia takejto úlohy zmenili niektoré parametre tak, že je potrebný nový výpočet, potom treba pred jeho spustením opätovne zadať začiatočné podmienky.

20 Dynamika tekutín

20.1 Základné pojmy

Dynamika tekutín (kvapalín a plynov) je rozsiahlou a z hľadiska teoretického, výpočtárskeho i experimentálneho zložitou časťou všeobecnej mechaniky tekutín (obr. 20.1). Zaoberá sa analýzou pohybu tekutín, ktorej primárnym hľadaným výsledkom sú hodnoty rýchlosti, tlaku, hustoty a teploty vo vyšetrovanej oblasti. Tekutiny sa pritom považujú za kontinuum, a teda tak, ako v mechanike telies, sa využíva diferenciálny (infinitezimálny) element (častica tekutiny), ktorému možno priradiť uvedené makroskopické vlastnosti.



Obr. 20.1 *Základná skladba mechaniky tekutín*

Tekutina sa účinkom šmykového napätia spojite a, na rozdiel od telesa, neobmedzene deformuje. Odpor tekutiny proti zmene tvaru sa nazýva *viskozitou* (vázkosťou). V prúdiacej tekutine sa viskozita snaží zoslabiť rozdiel (vzájomných) rýchlostí susedných vrstiev tekutiny, čím pripomína účinok trenia. Preto niekedy viskózne tekutiny nazývame tiež tekutiny s vnútorným trením. Mierou odporu, ktorý kladie tekutina deformácii, je dynamická viskozita μ $[\mathrm{Pa \cdot s}]$. Objavuje sa ako konštanta úmernosti v Newtonovom zákone viskozity

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{20.1}$$

kde τ je šmykové napätie, u je rýchlosť toku tekutiny a y je súradnica kolmá na smer prúdenia. Tekutiny s takouto *lineárnou* závislosťou medzi gradientom rýchlosti (rýchlosťou uhlovej deformácie častice) a šmykovým napätím, sa nazývajú *newtonovské* tekutiny. Patrí medzi ne aj vzduch a voda a množstvo ďalších plynov a kvapalín. Viskozita tekutín závisí od teploty a tlaku a pri analýzach s prenosom tepla sa táto zmena zohľadňuje pomocou vhodných aproximačných závislostí.

Hustota tekutiny ρ sa definuje limitným pomerom hmotnosti častice Δm a jej objemu ΔV

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{20.2}$$

Kvapaliny, ktorých zmena objemu aj pri vysokých hodnotách všestranného tlaku, je veľmi malá, sa vo všeobecnosti považujú za nestlačiteľné, s konštantnou hodnotou hustoty počas dynamickej analýzy. Plyny sú stlačiteľné tekutiny s premenlivou hustotou, za určitých okolností sa však možno stretnúť aj s nestlačiteľným prúdením stlačiteľnej tekutiny.

V dynamike tekutín a pri výpočtových postupoch treba rozoznávať hlavné druhy (typy) prúdenia:

- Časovo ustálené (stacionárne) a časovo premenné (nestacionárne). Charakteristika je zrejmá priamo z názvov. V prvom prípade došlo k ustáleniu prúdenia vo vyšetrovanej oblasti a rýchlosť i ďalšie vlastnosti tekutiny v každom bode analyzovanej oblasti sú nezávislé od času. V druhom prípade sú tieto veličiny časovo premenlivé
- Stlačiteľné a nestlačiteľné. Pri nestlačiteľnom prúdení je hustota častíc konštantná a divergencia rýchlosti je nulová. Pri stlačiteľnom prúdení tieto podmienky neplatia. Zohľadnenie stlačiteľnosti plynov sa stáva významným pri rýchlostiach s Machovým číslom nad 0,3 a pri analýzach s veľkými zmenami tlaku.
- Prúdenie dokonalej (ideálnej) tekutiny. V dynamike tekutín sa často analyzuje tekutina, ktorej viskozitua je tak malá, že ju možno zanedbať. Takáto neviskózna (a tepelne neovplyvňovaná) tekutina sa nazýva dokonalá (ideálna).
- Jednorozmerné, dvojrozmerné, trojrozmerné prúdenie. Vo všeobecnosti každé prúdenie je trojrozmerné. To znamená, že parametre prúdenia, rýchlosť, tlak atď. sa menia v smere všetkých troch priestorových súradníc. V niektorých prípadoch možno analýzu prúdenia zjednodušiť na dvojrozmerné, prípadne jednorozmerné. Pri jednorozmernom prúdení možno parametre prúdenia vyjadriť ako funkcie jedinej vhodne zvolenej súradnice a času. Jediná priestorová súradnica sa obyčajne volí pozdĺž priamej alebo zakrívenej osi oblasti prúdenia. (Napr. prúdenie v potrubí možno považovať za jednorozmerné, pokiaľ možno zanedbať zmeny tlaku a rýchlosti v priečnom priereze.) Pri dvojrozmernom prúdení sú všetky parametre prúdenia funkciou času a dvoch priestorových súradníc (napr. x a y).
- Osovosymetrické. Prúdenie nazývame osovosymetrické, ak pri vhodne zvolených cylindrických súradniciach (z, r, φ) je rýchlosť prúdenia nezávislá na uhle φ a obvodová zložka rýchlosti u_φ je nulová.
- Adiabatické. Prúdenie bez výmeny tepla s okolím. Príkladom je prúdenie tekutiny cez tepelne izolovaný kanál alebo potrubie.
- Laminárne (prúdnicové) a turbulentné prúdenie. Pri laminárnom prúdení sa vrstvy (laminy) tekutiny s rozdielnymi rýchlosťami posúvajú po sebe bez vzájomného miešania. Dráhami častíc sú hladké pozorovateľné čiary (prúdnice), nedochádza k premiestňovaniu

častíc naprieč prúdu tekutiny. Pri turbulentnom prúdení majú častice okrem postupnej rýchlosti aj tzv. fluktuačnú (turbulentnú) nestacionárnu zložku rýchlosti, ktorá spôsobuje chaotický pohyb častíc naprieč prúdu.

V súvislosti s laminárnym a turbulentným prúdením užitočnú informáciu môže pre určitý prípad prúdenia poskytnúť Reynoldsovo číslo označované *Re*. Je to bezrozmerné číslo vyjadrujúce približný pomer medzi zotrvačnými a viskóznymi silami s definíciou v tvare

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \tag{20.3}$$

kde u je priemerná rýchlosť prúdenia a L charakteristický rozmer pre danú situáciu. Pri veľkých hodnotách *Re* (veľká hustota, veľká rýchlosť i veľký charakteristický rozmer a malá viskozita tekutiny) prevládajú zotrvačné sily vyvolávajúce turbulentné prúdenie, pri opačných hodnotách prevládajú viskózne sily a prúdenie je laminárne. Hodnota charakteristického rozmeru je pre významné konfigurácie vyšetrovanej oblasti dohodnutá. Napr. pre prúdenie v potrubiach a uzavretých kanáloch je to hydraulický priemer.

20.2 Lagrangeov a Eulerov popis prúdenia tekutín

Lagrangeov spôsob analýzy pohybu sme pre prípad statickej úlohy telesa s veľkými deformáciami podrobne rozoberali v kapitole 4. Tento základný postup platí aj pre kinematiku tekutiny a treba ho pre lepšie pochopenie Eulerovho postupu a Eulerových vzťahov poznať, i keď sa v dynamike tekutín využíva len v špeciálnych prípadoch prúdenia a pri špeciálnych metódach riešenia úlohy.

Pri Lagrangeovom prístupe sa *trajektórie* pohybu častíc (veľmi malých objemov) tekutiny, označených v čase $t = t_0$ materiálovými (Lagrangeovými, začiatočnými, na čase nezávislými) súradnicami $\mathbf{X}$ do aktuálnej polohy $\mathbf{x}$ sledujú pomocou relačnej vektorovej funkcie $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \tag{20.4}$$

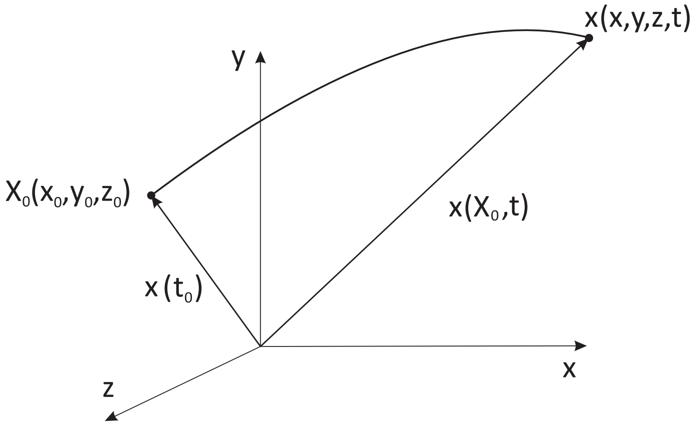
Funkcia $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ (pokiaľ sa nám ju pre určitý časový interval podarí určiť) udáva v (20.4) jednoznačný spojitý vzťah medzi začiatočnou (vzťažnou) polohou častice $\mathbf{X}$ a polohou častice $\mathbf{x}$ v čase t. Pre konkrétnu časticu $\mathbf{X}_0$, ktorá má v čase t_0 referenčné súradnice (x_0, y_0, z_0), grafický obraz funkcie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_0,t)$ predstavuje *trajektóriu* (dráhu pohybu) v časovom intervale t_0 až t (obr. 20.2).

Teória spojitého prúdenia predpokladá možnosť invertovania tohto vzťahu (Jakobián tejto transformácie musí byť nenulový) , čo možno zapísať v tvare

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x},t) \tag{20.5}$$

Funkcia $\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ udáva začiatočnú polohu častice, ktorá v čase t je v polohe $\mathbf{x}$.

Pri Lagrangeovej formulácii úlohy meniacu sa polohu častice a jej meniace sa termodynamické vlastnosti (hustotu, tlak, teplotu) priamo sledujeme ako spojité funkcie začiatočnej polohy častice a času. Derivácie týchto vlastností podľa času sa nazývajú *materiálové* derivácie, pretože patria konkrétnej materiálovej častici identifikovanej začiatočnou polohou $\mathbf{x}(t_0)$.



Obr. 20.2 *Materiálový popis pohybu častice tekutiny*

Pretože v dynamike tekutín nás obyčajne zaujíma situácia v nemenných bodoch určitej oblasti, voči Lagrangeovmu prístupu sa preferuje iný postup, nazývaný Eulerov. Pri Eulerovom popise prúdenia tekutín sa v určitej geometricky špecifikovanej oblasti hľadá priamo pole rýchlosti $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, hustoty $\rho(\mathbf{x},t)$, tlaku $p(\mathbf{x},t)$ a teploty $T(\mathbf{x},t)$, pričom (priestorové, Eulerove) súradnice $\mathbf{X}$, na rozdiel od Lagrangeovho popisu, sú v tejto oblasti fixné súradnice zadané v zvolenom súradnicovom systéme. Pri takomto popise prúdenia si treba uvedomiť, že rýchlosť i ďalšie vlastnosti tekutiny v danom nemennom bode $\mathbf{X}$, nepatria jednej konkrétnej častici, ale postupnosti častíc, ktoré prúdia cez tento bod v skúmanom časovom intervale.

20.3 Materiálová derivácia v Eulerovej formulácii

Pretože priestorové súradnice $\mathbf{X}$ sú pri Eulerovej formulácii vo vyšetrovanej oblasti fixné, nezávislé na čase, časové derivácie vlastností častíc prúdiacej tekutiny sa pri Eulerovej formulácii vyjadrujú zložitejšie. Je tiež zrejmé, že v takomto prípade deriváciou $\mathbf{X}$ podľa času nedostaneme rýchlosť, a teda rýchlosť v takomto prípade treba považovať za jednu z primárnych neznámych.

Predpokladajme, že pole rýchlostí $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ poznáme, a pretože je to pole spojitých funkcií, môžme pre zvolený konkrétny bod (pevný, časovo nemenný diferenciálny objem $dxdydz$) vypočítať vektorovú funkciu $\partial\mathbf{v}/\partial t$, ktorá však určuje len tzv. *lokálne* zrýchlenie prúdu častíc, ktorých trajektórie prechádzajú týmto bodom. Nie je to zrýchlenie konkrétnej častice, ktoré potrebujeme pri formulácii úlohy do Newtonovho pohybového zákona ($d\mathbf{F} = dm\,\mathbf{a}_L$). Ani pri Eulerovej formulácii úlohy teda nie je možné sa vyhnúť *materiálovej* derivácii rýchlosti a ďalších vlastností častice podľa času, avšak sme nútení ju vykonať v Eulerovom súradnicovom systéme. Aby sme materiálovú deriváciu odlíšili od lokálnej derivácie, označuje sa Df/Dt, kde symbolom f je formálne označená časovo závislá vlastnosť materiálovej častice tekutiny.

Pomocou vzťahu (20.4) môžeme materiálovú deriváciu *skalárnej* vlastnosti častice f s materiálovými súradnicami $\mathbf{X}$, ktorá sa v Eulerovom súradnom systéme v čase t nachádza v bode $\mathbf{X}$, vyjadriť pomocou pravidla o parciálnom derivovaní zloženej funkcie takto (indexy pri deriváciách udávajú veličinu, ktorá je pri danej derivácii konštantná)

$$\frac{Df}{Dt}=\left.\frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}}=\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}}+\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t}\left.\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)\right|_{\mathbf{X}}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_i}v_i=\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla f \qquad (20.6)$$

kde $\mathbf{v}$ je vektor rýchlosti v Eulerovom súradnicovom systéme

$$\mathbf{v}(x,y,z,t)\equiv u(x,y,z,t)\mathbf{i}+v(x,y,z,t)\mathbf{j}+w(x,y,z,t)\mathbf{k} \qquad (20.7)$$

Podľa (20.6) napr. materiálová derivácia hustoty bude

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\rho=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z} \qquad (20.8)$$

Materiálovú deriváciu vektorovej vlastnosti častice $\mathbf{f}$ v Eulerovom súradnicovom systéme dostaneme analogicky a platí

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{f} \qquad (20.9)$$

Podľa (20.9) zrýchlenie v Eulerovom systéme (materiálová derivácia rýchlosti $\mathbf{v}$) je

$$\mathbf{a}=\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \qquad (20.10)$$

so zložkami v rozpísanom tvare

$$\begin{aligned}
a_x&=\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\\
a_y&=\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\\
a_z&=\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned} \qquad (20.11)$$

20.4 Prúdnice a trajektórie

Prúdnica je čiara $s=s(x,y,z,t)$, ktorej elementárny vektor $d\mathbf{s}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}$ je v každom bode Eulerovho súradnicového systému $\mathbf{x}(x,y,z)$ rovnobežný s vektorom lokálnej rýchlosti $\mathbf{v}$ (obr. 20.3a). Potom musí platiť

$$d\mathbf{s}\mathrm{x}\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

$$(wdy-vdz)\mathbf{i}+(udz-wdx)\mathbf{j}+(vdx-udy)\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

Z tejto podmienky dostávame tri diferenciálne rovnice, ktoré definujú prúdnicu

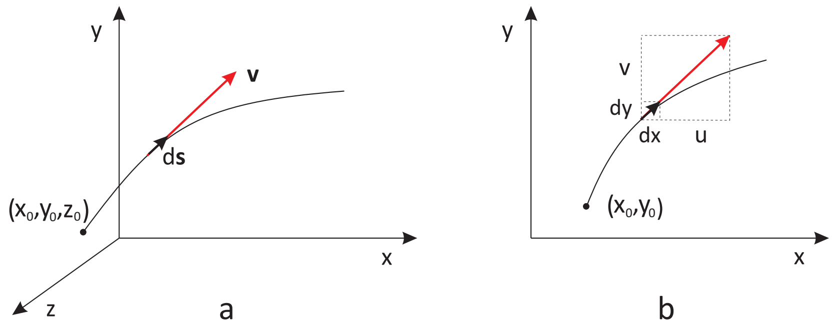
$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u} \qquad \frac{dz}{dy}=\frac{w}{v} \qquad \frac{dx}{dz}=\frac{u}{w} \qquad (20.12)$$

Pri riešení (integrovaní) tejto sústavy sa integračné konštanty určujú z podmienky, že v čase t_0 prúdnica prechádza cez bod (x_0, y_0, z_0).

Pri rovinnom prúdení (obr. 20.3b) je $dz = 0$ a $w = 0$, takže tvar prúdnice $y = f(x,t)$, možno určiť z diferenciálnej rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \tag{20.13}$$

za predpokladu, že poznáme zložky rýchlosti $u(x,y,t)$ a $v(x,y,t)$ a v čase t_0 je udaný začiatočný bod (x_0, y_0) prúdnice. Pri nestacionárnom prúdení sa tvar prúdnic vo vyšetrovanom časovom intervale mení, pri ustálenom prúdení sú to nemenné čiary totožné s dráhami (trajektóriami) častíc prúdiacej tekutiny.

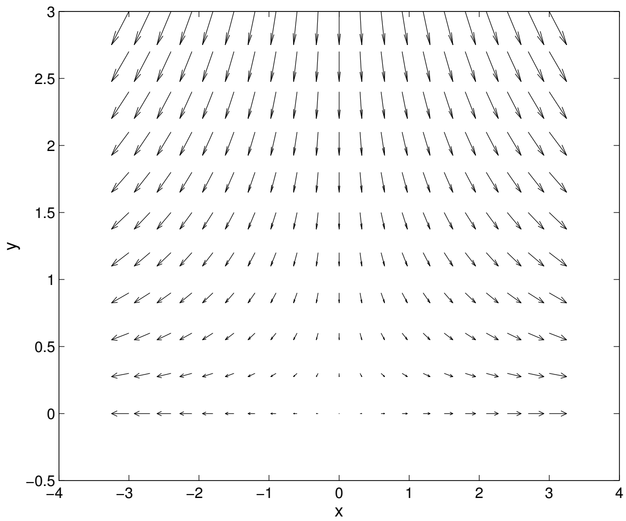


Obr. 20.3 a) *Prúdnica v priestore* b) *Prúdnica rovinného prúdenia*

Ako ilustračný príklad využitia uvedených vzťahov určíme a nakreslíme prúdnice rovinného ustáleného prúdenia so zložkami rýchlosti

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= x \qquad [m/s] \\ v(x,y,t) &= -y \qquad [m/s] \end{aligned} \tag{20.14}$$

vo zvolenej ohraničenej oblasti $x \in \langle -3,3 \rangle$ a $y \in \langle 0,3 \rangle$, (obr. 20.4).



Obr. 20.4 *Vektory rýchlosti prúdenia so zložkami* (20.14)

Diferenciálna rovnica prúdnic pre takéto pole rýchlosti podľa (20.13) je

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$$

Je to jednoduchá diferenciálna rovnica so separovanými premennými, s jednoduchým riešením

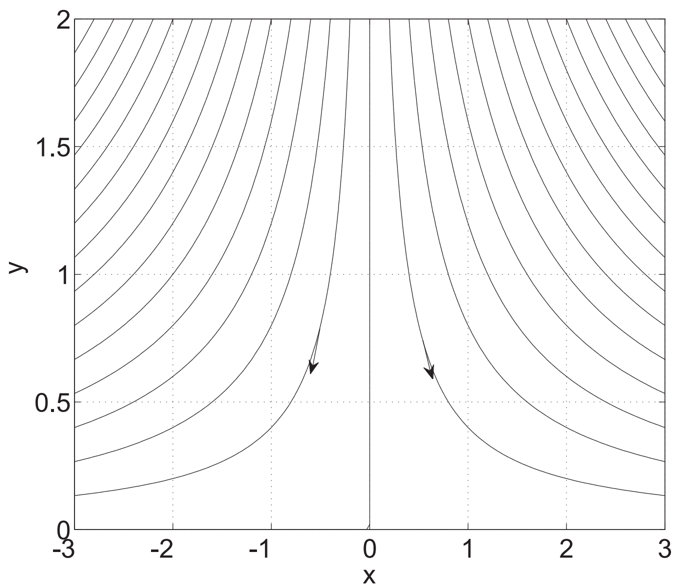
$$y=\frac{C}{x}$$

Integračnú konštantu určuje voľba konkrétneho bodu (x_0, y_0) na prúdnici, z čoho dostávame $C = x_0 y_0$ a výsledný vzťah pre čiaru prúdnice potom je

$$y=\frac{x_0 y_0}{x} \tag{20.15}$$

Voľbou rôznych bodov (x_0, y_0) dostaneme sústavu prúdnic charakterizujúcich prúdenie definované poľom (20.14). V prípade, že pole rýchlosti je nestacionárne, dostaneme rovnakým postupom obraz prúdnic len v určitom časovom okamžiku určenom hodnotou času t. Pri integrovaní diferenciálnych rovníc vystupuje potom čas t ako konštanta. V prípade priestorového prúdenia, zadaného priestorovým poľom rýchlosti, treba pre určenie prúdnic riešiť sústavu diferenciálnych rovníc (20.12) a prúdnice znázorňovať v priestorovej oblasti (kontrolnom objeme). Na takúto úlohu je výhodné použiť vhodné komerčné programové prostriedky (napr. Matlab, Mathematica a i.) , ktorých špeciálne funkcie určia a nakreslia prúdnice priamo zo zadaného poľa rýchlosti. V našom príklade môžeme prúdnice, ktoré znázorňujú zvislý prúd tekutiny narážajúci na pevnú stenu, graficky znázorniť z funkcií (20.15) pomocou jednoduchého programu (Matlab):

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3),linspace(0.,2));
z=x.*y;
contour(x,y,z,[-8:0.4:8]);
```



Obr. 20.5 *Prúdnice rýchlostného poľa* (20.14)

Medzi dôležité prvky grafického zviditeľňovania prúdenia tekutín patria aj *trajektórie*, t.j. čiary znázorňujúce trasy, ktoré jednotlivé častice prúdiacej tekutiny vykonali v určitom časovom intervale. Ako sme už uviedli, pri Lagrangeovom prístupe sa trajektórie pohybu častíc (diferenciálnych objemov), označených v čase $t = t_0$ materiálovými súradnicami $\mathbf{X}$, do aktuálnych súradníc $\mathbf{x}$ sledujú pomocou relačnej funkcie (časovo závislého polohového vektora) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Po určení $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ máme priamo k dispozícii funkciu na vykreslenie trajektórií častíc so začiatočnou polohou $\mathbf{X}$. Pre rýchlosť častice platí ($\mathbf{X}$ nezávisí od času)

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\left[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)\right]}{dt} \tag{20.16}$$

Tento vzťah možno využiť na nájdenie trajektórií častíc v Eulerovej formulácii prúdenia po určení poľa rýchlosti $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Pre dráhu častice $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ so začiatočnou polohou (x_0, y_0, z_0) v čase t_0 budeme vyžadovať , aby sa jej rýchlosť (20.16) v časovom intervale t_0 až t v každom bode rovnala známej rýchlosti $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Potom dráhu častice platí vektorová diferenciálna rovnica

$$\frac{d\left[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)\right]}{dt} = \left.\frac{d\left[\mathbf{x}(t)\right]}{dt}\right|_{\mathbf{X}} = \mathbf{v}(x, y, z, t) \tag{20.17}$$

Funkcie zložiek pohybového vektora častice $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ zo známych zložiek rýchlosti $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ potom podľa (20.17) dostaneme zo sústavy diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= u(x(t), y(t), z(t), t) \\ \frac{d}{dt}y(t) &= v(x(t), y(t), z(t), t) \\ \frac{d}{dt}z(t) &= w(x(t), y(t), z(t), t) \end{aligned} \tag{20.18}$$

so začiatočnými podmienkami $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$.

Zo (20.17) vyplýva, že v čase t je smer trajektórie tangenciálny k vektoru rýchlosti a teda i k prúdnici. V iných časoch vo všeobecnosti existencia normálovej zložky jej rýchlosti trajektóriu odkloní od prúdnice. Výnimkou je ustálené prúdenie, kedy pole rýchlosti je na čase nezávislé a prúdnice a trajektórie sú rovnaké krivky.

Ako ilustračný príklad využitia vzťahov (20.18) určíme a nakreslíme trajektóriu častice tekutiny v nestacionárnom rovinnom rýchlostnom poli

$$\mathbf{v}(x, y, t) = (2 - 3x - 2y)\mathbf{i} + (e^{-5t} - y)\mathbf{j} \tag{20.19}$$

ktorá sa v čase $t = 0$ nachádza v polohe $x_0 = 0$ a $y_0 = 2$. Sústava dvoch diferenciálnych rovníc pre náš príklad potom podľa (20.18) je

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2 - 3x(t) - 2y(t)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = e^{-5t} - y(t)$$

Sústavu s uvedenou začiatočnou podmienkou vyriešime pomocou programu (*Mathematica*)

```
DSolve[{x'[t] + 3 x[t] + 2 y[t] == 2, y'[t] + y[t] == E^(-5 t), x[0] == 0, y[0] == 2}, {x, y}, t]
```

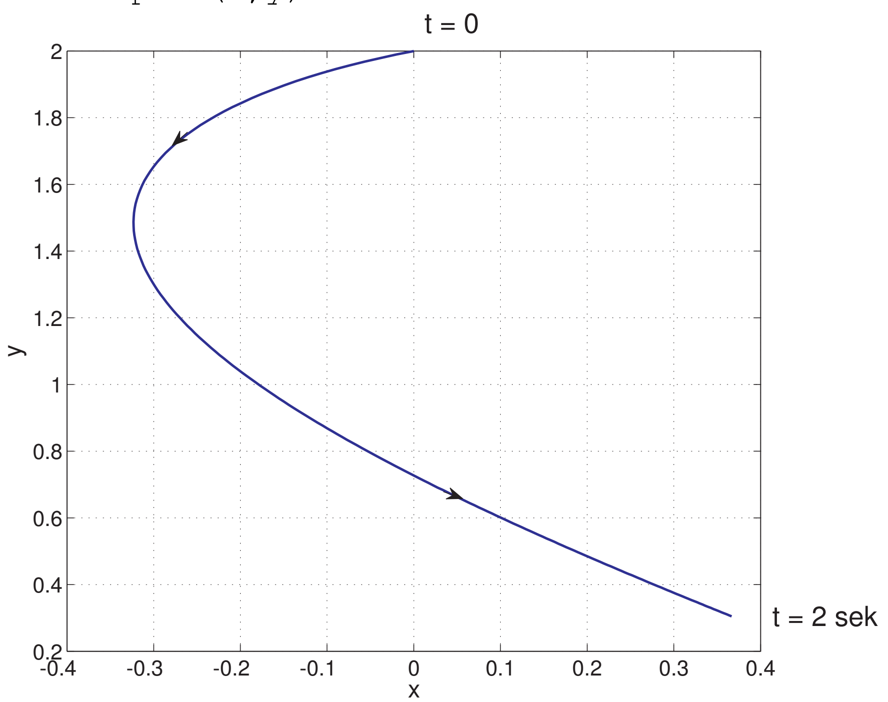
$$\left\{\left\{x \to \text{Function}\left[\{t\},\ \frac{1}{12} e^{-5t}\left(-3 + 22 e^{2t} - 27 e^{4t} + 8 e^{5t}\right)\right],\ y \to \text{Function}\left[\{t\},\ \frac{1}{4} e^{-5t}\left(-1 + 9 e^{4t}\right)\right]\right\}\right\}$$

Funkcie zložiek trajektórie častice so zvolenou začiatočnou polohou v závislosti od času teda sú

$$x(t) = \frac{11}{6}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-5t} - \frac{9}{4}e^{-t} + \frac{2}{3}$$
$$Y(t) = \frac{9}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-5t}$$

a grafické znázornenie pohybu častice v časovom intervale 0 až 2 sekundy je už potom jednoduché (*Matlab*)

```
t=0:0.01:2;
x=11/6*exp(-3*t)-1/4*exp(-5*t)-9/4*exp(-t)+2/3;
y=-1/4*exp(-5*t)+9/4*exp(-t);
plot(x,y)
```



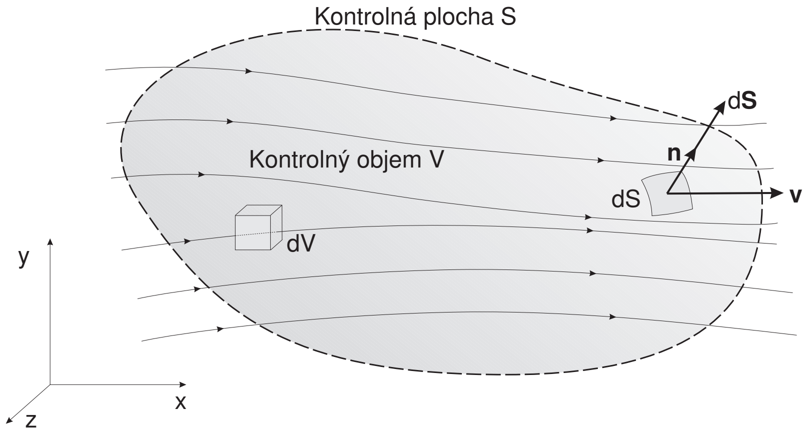
Obr. 20.6 *Trajektória častice so začiatočnou polohou (0,2) v nestacionárnom rýchlostnom poli (20.19) v časovom intervale 0 až 2 sekundy*

Vhodnou voľbou začiatočných polôh a programovým spracovaní tohoto postupu možno vytvoriť sieť trajektórií častíc v celej vyšetrovanej oblasti. Tvorba trajektórií v 3D oblasti je úplne analogická.

20.5 Zákon zachovania hmotnosti - rovnica kontinuity

Dynamika prúdu tekutiny sa riadi základnými fyzikálnymi princípmi a ich aplikácia na vyšetrovanú oblasť, tzv. kontrolný objem, je prvým krokom prípravy analytického, resp. numerického riešenia fluidnej úlohy.

Uvažujme *kontrolný objem* V uzavretý *kontrolnou plochou* S, ktorý nech má v priestore fixnú, na čase nezávislú polohu definovanú priestorovými Eulerovými súradnicami x, y, z. Kontrolný objem je otvorený, tekutina prúdi cez kontrolnú plochu a kontrolný objem (obr. 20.7).



Obr. 20.7 *Kontrolný objem*

Pre prúdiacu tekutinu cez kontrolný objem musí platiť princíp zachovania hmotnosti. To znamená, že hmotnosť vytečenej tekutiny z kontrolného objemu cez kontrolnú plochu za jednotku času (napr. v kg/s) sa musí rovnať úbytku hmotnosti tekutiny v kontrolnom objeme za tento čas. Elementárny hmotnostný tok cez plochu dS je (obr. 20.7)

$$\rho v_n dS = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \tag{20.20}$$

Pozitívna hodnota tohoto výrazu predstavuje hmotnostný *výtok*, pretože ak vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ smeruje von z plochy, vektorový súčin $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ je pozitívny (vektor $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor *vonkajšej* normály k ploche dS, totiž smeruje vždy von z kontrolnej plochy). Potom pre hmotnostný výtok na celej kontrolnej ploche platí

$$výtok = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \tag{20.21}$$

Teraz vyjadríme úbytok hmotnosti v kontrolnom objeme za jednotku času. Celková hmotnosť tekutiny vo vnútri kontrolného objemu je $\int_V \rho dV$ a jej *úbytok* za jednotku času

$$úbytok = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV \tag{20.22}$$

Z rovnosti pravých strán rovníc (20.21) a (20.22) dostávame *rovnicu kontinuity* v integrálnom tvare

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{20.23}$$

Rovnicu kontinuity v tvare diferenciálnej rovnice možno odvodiť z bilancie hmotnostného toku cez diferenciálny objem dV. Z rovnice (20.23) sa však k nej dopracujeme jednoduchšie. Pretože hranice objemového integrálu v tejto rovnici nezávisia od času, môžno ju prepísať na

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{20.24}$$

a po prevode plošného integrálu (podľa Gaussovej vety o divergencii) na objemový platí

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right] dV = 0 \tag{20.25}$$

Pretože kontrolný objem V je ľubovoľný, nulovú hodnotu integrálu v (20.25) zaručí len podmienka, že jeho integrand bude rovný nule v každom bode kontrolého objemu. Dostávame tak rovnicu kontinuity v tvare diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\mathbf{v} = 0 \tag{20.26}$$

O rovnici kontinuity, i o ďalších základných rovniciach prúdenia tekutiny, ktoré sú odvodené a platia v Eulerovom súradnicovom systéme, hovoríme, že sú v *konzervatívnom* tvare. Pre rovnice v Lagrageovej formulácii sa používa prívlastok *nekonzervatívny* tvar. Všetky tvary rovníc sú však spojené a odvoditeľné jedna z druhej, pretože vyjadrujú rovnaký fyzikálny princíp. Rozmanitosť ich foriem umožňuje optimálnu voľbu rovnice pre príslušný typ úlohy a zvolený spôsob jej riešenia.

Rovnica (20.26) sa zjednoduší pre prípad konštatnej hustoty tekutiny. Vtedy $\partial\rho/\partial t = 0$ a po vydelení s $\rho(\neq 0)$ dostávame

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{20.27}$$

Je to rovnica kontinuity nestlačiteľnej tekutiny (prúdenia s nulovou divergenciou rýchlosti).

20.6 Zákon zachovania hybnosti - pohybová rovnica

Zákon zachovania hybnosti hovorí, že hybnosť systému sa nemení, pokiaľ naň nepôsobí vonkajšia sila. Hybnosť častice tekutiny s objemom $dV = dxdydz$ (obr. 20.7, obr. 20.8) a s hmotnosťou m pohybujúcej sa rýchlosťou $\mathbf{v}$ je $m\mathbf{v}$ a časová zmena jej hybnosti je vlastne vyjadrenie Newtonovho pohybového zákona

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{20.28}$$

Je to vektorová rovnica, ktorú možno nahradiť tromi skalárnymi rovnicami. Uvažujme najprv kvôli prehľadnosti len x-ovú zložku tohto vzťahu

$$ma_x = F_x \tag{20.29}$$

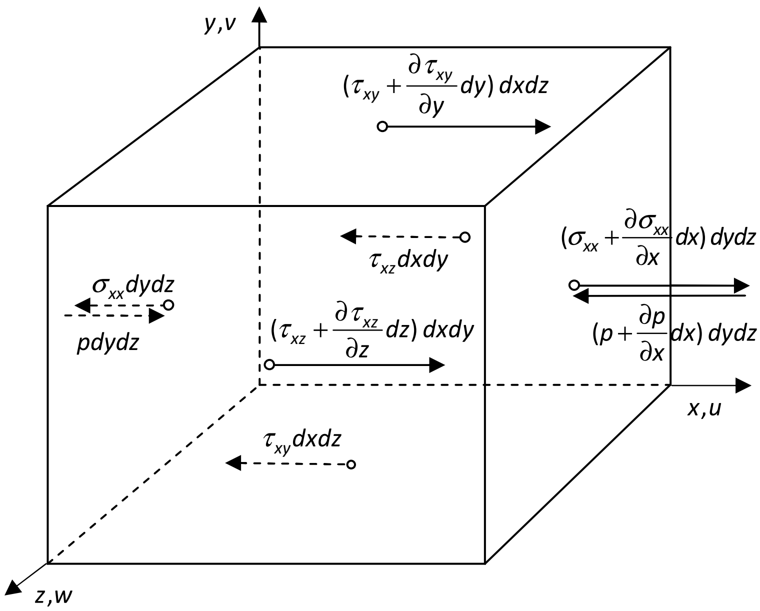
Hmotnosť častice je

$$m = \rho dxdydz \tag{20.30}$$

a jej (materiálové) zrýchlenie v x -ovom smere

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \tag{20.31}$$

Zložitejšie je vyjadrenie pravej strany rovnice (20.29), pretože na časticu pôsobia viaceré, typovo rozdielne sily.



Obr. 20.8 *x-ové zložky plošných síl pôsobiace na pohybujúcu sa časticu*

Na časticu môže pôsobiť objemová sila (napr. gravitačná sila) $\mathbf{f}$ vztiahnutá na jednotku hmotnosti [N/kg], ktorej silový účinok v smere x je

$$\rho f_x dxdydz \tag{20.32}$$

Ďalej na časticu pôsobia plošné sily a to jednak *termodynamický* tlak (t.j. stavová termodynamická premenná) p okolitej tekutiny, ako aj zložky tenzora napätia (pozri napr. D2), pretože okolité častice s rozdielnou rýchlosťou pri existencii viskozity cez zložky napätia brzdia (alebo zrýchľujú) jej pohyb. Kladné znamienko prírastku rýchlosti a teda i prírastku plošných síl sa zavádza v smere kladného prírastku príslušnej súradnice. Prírastky plošných síl v smere osi x potom možno určiť vektorovým sčítaním síl vyznačených na obr.8. Po pripočítaní objemovej sily (20.32) výsledná silová zložka je

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dxdydz + \rho f_x dxdydz \tag{20.33}$$

Po dosadení (20.30), (20.31) a (20.33) do (20.29) a vydelení oboch strán tejto rovnice objemom častice dostaneme pohybovú rovnicu častice v x-ovom smere

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x \tag{20.34}$$

a analogickým postupom aj v smere y

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y \tag{20.35}$$

a v smere z

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \tag{20.36}$$

Skalárne rovnice (20.34), (20.35) a (20.36) platia pre časticu, ktorá sa pohybuje s prúdom tekutiny je to teda *nekonzervatívna* forma týchto rovníc v Lagrangeovej formulácii. Rovnice možno previesť do *konzervatívneho* tvaru v Eulerových súradniciach transformáciou ľavých strán týchto rovníc, ktoré obsahujú materiálovú deriváciu zložiek rýchlosti spolu s funkciou hustoty častice $\rho(t)$. Jej prepis pre x-ový smer podľa (20.10) je

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla u \tag{20.37}$$

Prvý člen na pravej strane rovnice (20.37) sa podľa definície derivácie súčinu dá prepísať na

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{20.38}$$

a pre druhý člen z pravidla výpočtu divergencie súčinu skalára s vektorom dostávame

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) - u \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \tag{20.39}$$

Dosadením (20.38) a(20.39) sa rovnica (20.37) zmení na

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) \tag{20.40}$$

a pretože člen v hranatej zátvorke je podľa rovnice kontinuity (20.26) rovný nule, platí

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) \tag{20.41}$$

Výsledky pre ďalšie dva smery sú analogické a ich dosadením do (20.34), (20.35) a (20.36) dostávame najvšeobecnejší *konzervatívny* tvar pohybových rovníc tekutiny

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v\mathbf{v})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho f_y \tag{20.42}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho w\mathbf{v})=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho f_z$$

Možno ich vyjadriť aj jedinou vektorovou rovnicou

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{vv})=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{f} \tag{20.43}$$

kde

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{ij}\equiv\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \tag{20.44}$$

je tenzor napätia a $\mathbf{vv}$ je dyadický súčin vektorov rýchlosti. Rovnice platia pre newtonovské i nenewtonovské tekutiny podľa toho, aké konštitutívne vzťahy sa použijú pre určenie zložiek napätia.

Rozpísaním derivácií súčinov a zohľadnením (20.26) možno ľavú stranu rovnice (20.43) zjednodušiť a dostávame

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{f} \tag{20.45}$$

resp. s prihliadnutím na (20.10)

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{f} \tag{20.46}$$

V rozpísanom tvare rovnice (20.45) sú

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho f_y \tag{20.47}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho f_z$$

20.7 Konštitutívne vzťahy pre tekutiny newtonovského typu

Vyšetrujme najprv spôsob, ako sa rýchlosť tekutiny $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ môže meniť v okolí bodu $\mathbf{x}'$ zvoleného v rýchlostnom poli. S využitím indexového zápisu použijeme Taylorov rozvoj vektora v_i v okolí bodu x_i' a po zanedbaní nelineárnych členov dostávame

$$v_i(x_j,t)=v_i(x_j',t)+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j \tag{20.48}$$

kde $\delta x_j = (x_j - x_j')$. Po rozklade tenzora $\partial v_i / \partial x_j$ na symetrickú a antisymetrickú časť, môžeme (20.48) zapísať v tvare

$$v_i(x_j, t) = v_i(x_j', t) + \dot{\varepsilon}_{ij}\delta x_j + \dot{\omega}_{ij}\delta x_j \tag{20.49}$$

kde symetrická časť $\partial v_i / \partial x_j$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{20.50}$$

sa nazýva *tenzor rýchlosti deformácie* a antisymetrická časť

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{20.51}$$

je tenzor rýchlosti elementárnej rotácie.

Prvý člen na pravej strane rovnice (20.49) je rýchlosťou translácie, druhý rýchlosťou deformácie a posledný rýchlosťou rotácie tekutiny v okolí bodu so súradnicami x_j. Pretože na deformáciu vplýva len tenzor rýchlosti deformácie, vzťahy, ktoré zviažu tento tenzor s tenzorom napätia, budú hľadané konštitutívne vzťahy tekutiny.

Tenzor rýchlosti deformácie (20.50) je po formálnej stránke totožný s tenzorom malej deformácie telesa (kapitola 2), stačí v ňom nahradiť vektor rýchlosti vektorom posunutia. *Lineárny* Newtonov zákon viskozity (20.1) zase po nahradení viskozity modulom pružnosti a rýchlosť posunutím, je totožný s lineárnym Hookeovým zákonom pre jednoosú napätosť telesa. Táto analógia spolu s experimentálnym poznatkom, že tekutiny, z hľadiska ich vlastností sú *izotropné* látky, viedlo k odvodeniu jednoduchých lineárnych konštitutívnych vzťahov rovnakým postupom, ako sa to urobilo pre teleso z izotropného materiálu (pozri napr. [3]). Sú to rovnice

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{20.52}$$

kde ale teraz μ je dynamická viskozita tekutiny a λ sa nazýva *druhá* (objemová) viskozita (δ_{ij} je jednotkový Kroneckerov tenzor). Obe tieto charakteristiky viskozity *newtonovskej* tekutiny sú závislé od tlaku a teploty. Pri kvapalinách sa viskozita so stúpajúcou teplotou (spravidla) zmenšuje, pri plynoch je to naopak. Pri kvapalinách je pritom viskozita (približne) priamo úmerná tlaku, kým pri plynoch je μ v dosť širokom rozsahu tlakov (pri konštantnej teplote) na tlaku takmer nezávislé.

Z prvého člena na pravej strane rovnice (20.52) vidieť, že pri stlačiteľných tekutinách sa uplatní aj druhá viskozita λ (pri nestlačiteľných tekutinách je pomerná zmena objemu $\dot{\varepsilon}_{kk}$ rovná nule). Pre jej určenie sa bežne používa vzťah vyplývajúci zo Stokesovej hypotézy $\lambda + 2\mu/3 = 0$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{20.53}$$

ktorý však bol potvrdený len pre jednoatómové plyny. Na druhej strane treba poznamenať, že vplyv dilatačnej (objemovej) deformácie je pri kvázi nestlačiteľných tekutinách zanedbateľný a pri stlačiteľných sú normálové zložky napätí v porovnaní so šmykovými významné len pri špeciálnych úlohách s veľkými tlakovými gradientami (napr. pri analýze rázových tlakových vĺn).

Rozpísané zložky napätí (20.52) s využitím symetrie tenzora napätia sú

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
\sigma_{yy} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
\sigma_{zz} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned}
\tag{20.54}
$$

Po ich dosadení do (20.46) možno pohybové rovnice newtonovskej tekutiny zapísať v kompaktnom vektorovom zápise takto

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla(\lambda \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mu \cdot (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)) + \rho \mathbf{f} \tag{20.55}$$

Pohybové rovnice (v konzervatívnom tvare) pre jednoduchšie prípady prúdenia možno z rovníc (20.55) určiť jednoducho zavedením príslušných zjednodušení. Napr. pre nestlačiteľné viskózne prúdenie, kedy podľa (20.27) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, a tiež $\lambda = 0$, $\mu = \text{konšt.}$, sa (20.55) zjednoduší na

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \tag{20.56}$$

a po rozpísaní dostávame tzv. Navier – Stokesove rovnice

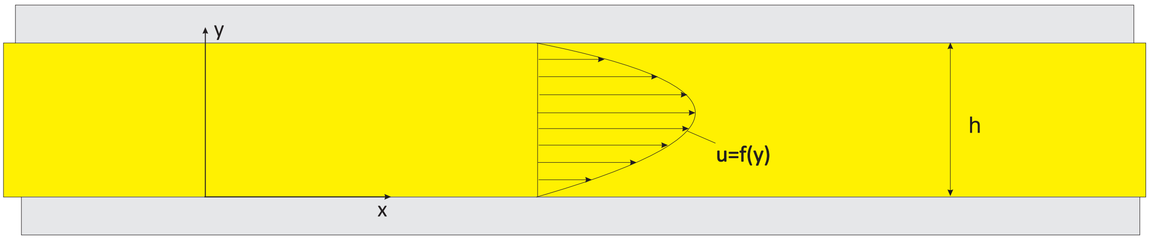
$$
\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho f_x \\
\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho f_y \\
\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho f_z
\end{aligned}
\tag{20.57}
$$

V prípade ideálnej neviskóznej tekutiny ($\mu = 0$) sa tieto rovnice zredukujú na Eulerove rovnice

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial x}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x \\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial x}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho f_y \\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_z
\end{aligned} \tag{20.58}$$

Príklad 20.1

Využitím Navier-Stokesových rovníc (20.57) určte pohybovú rovnicu ustáleného laminárneho prúdenia viskóznej newtonovskej tekutiny medzi dvomi rovnobežnými nekonečne veľkými nepohyblivými stenami (pozri obrázok). Účinok objemových síl $\mathbf{f}$ (vlastnú tiaž tekutiny) zanedbávame. Prúdenie tekutiny v smere osi x vyvoláva tlakový gradient $dp / dx = konšt$.



Riešenie

Ľavé strany rovníc (20.57) sa rovnajú nule, pretože materiálové zrýchlenie častíc $D\mathbf{v} / Dt$ pri ustálenom prúdení je nulové a pretože tiež platí $v = w = 0$, dostávame diverenciálnu rovnicu pre jedinú nenulovú zložku rýchlosti

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{a}$$

Dvojnásobným integrovaním tejto rovnice podľa y dostávame

$$\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+C_1 y+C_2=\mu u$$

a po určení integračných konštánt z okrajových podmienok ($y=0 \to u=0, y=h \to u=0$) pre zložku rýchlosti tekutiny v smere osi x platí

$$u(y)=\frac{y^2-hy}{2\mu}\frac{dp}{dx}$$

čo je rovnica paraboly s maximálnou hodnotou rýchlosti vo vzdialenosti $y = h / 2$.

20.8 Zákon zachovania energie - rovnica energie

Fyzikálny princíp, z ktorého sa vychádza pri odvodení tejto rovnice, je prvý termodynamický zákon. Podľa tohto zákona zmena energie termodynamického systému sa rovná súčtu privedeného (odvedeného) tepla do systému a práci, ktorú na ňom vykonajú vonkajšie sily. Za termodynamický systém budeme považovať malý kontrolný objem V tekutiny s kontrolnou plochou S, znázornený na obr. 20.7, ktorý ale teraz je uzatvorený a pohybuje sa s prúdom tekutiny rýchlosťou $\mathbf{v}$ (ide teda o Lagrangeov popis pohybu).

Zmena celkovej energie E kontrolného objemu za jednotku času (zmena vnútornej energie e a kinetickej energie $|\mathbf{v}|^2/2$) vztiahnutá na jednotku hmotnosti je

$$\int_V \rho \frac{DE}{Dt} dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) dV \tag{20.59}$$

Privedené teplo do objemu V podľa Fourierovho zákona a s využitím Gaussovej vety je

$$-\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_S (-\lambda \nabla T) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dV \tag{20.60}$$

kde uvažujeme izotropný materiál s koeficientom tepelnej vodivosti λ a $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k ploche.

Práca objemových síl je

$$\int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \tag{20.61}$$

a prácu plošných síl (tlak plus šmykové a normálové napätia) opäť prevedieme pomocou Gaussovej vety na objemový integrál

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (-\mathrm{p} + \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \mathrm{dS} = \int_V \nabla \cdot (-\mathrm{p}\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \mathrm{dV} \tag{20.62}$$

Podľa prvej termodynamickej vety teda pre zmenu energetickej bilancie platí

$$\int_V \rho \frac{DE}{Dt} dV = \int_V \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dV + \int_V \nabla \cdot (-\mathrm{p}\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dV + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \tag{20.63}$$

a pretože všetky integrály sú vyjadrené pre *ľubovoľný* objem, pre každý jeho bod musí platiť

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (-\mathrm{p}\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \tag{20.64}$$

čo je diferenciálna rovnice energie prúdiacej tekutiny v nekonzervatívnom tvare. Rozpísaný tvar tejto rovnice je

$$\rho\frac{DE}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}-\frac{\partial(wp)}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}\qquad(20.65)$$
$$+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z}+\rho(f_xu+f_yv+f_zw)$$

Konzervatívny tvar rovnice energie (v Eulerových súradniciach) dostaneme po úprave ľavej strany rovnice (20.65) rovnakým postupom, ako upravovali ľavú stranu nekonzervatívnej rovnice hybnosti (20.40). Stačí nahradiť veličinu u veličinou E. Dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{|v|^2}{2}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{|v|^2}{2}\mathbf{v}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}-\frac{\partial(wp)}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z}+\rho(f_xu+f_yv+f_zw)$$

(20.66)

Zložky napätia možno z tejto rovnice vylúčiť pomocou konštitutívnych rovníc (20.54). Poznamenávame, že pri niektorých fluidných úlohách (napr. so skupenskými premenami, s chemickou reakciou) sa môžeme stretnúť aj s formálne iným tvarom tejto rovnice, pri ktorom je vnútorná energia vyjadrená pomocou entalpie systému.

Poznámka k základným rovniciam prúdenia viskóznej tekutiny

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali základnými rovnicami platnými pre prúdenie viskóznych tekutín, pričom sme sa sústredili hlavne na ich diferenciálny konzervatívny tvar. Všetky základné diferenciálne rovnice možno vyjadriť aj v konzervatívnom *integrálnom* tvare, ktorý sa využiva napr. pri numerickej metóde konečných objemov. V rovniciach sa objavuje celkovo sedem neznámych: tri zložky rýchlosti u,v,w, tlak p, hustota ρ, teplota T a merná vnútorná energia *e*. Sú to všetko funkcie polohy x_i a času t. Pretože máme k dispozícii len päť rovníc, a to rovnicu kontinuity (20.26), tri Navier-Stokesove pohybové rovnice (20.42) a energetickú rovnicu (20.66), dopĺňajú sa o dve stavové rovnice. Napr. v aerodynamike sa často využíva stavová rovnica ideálneho plynu

$$p=\rho RT \qquad (20.67)$$

kde *R* je špecifická plynová konštanta. Poslednou potrebnou rovnicou býva termodynamický vzťah medzi stavovými premennými, napr. vzťah vyjadrujúci vnútornú energiu, ktorého najjednoduchší tvar pre termodynamicky a kaloricky ideálny plyn je

$$e=c_vT \qquad (20.68)$$

kde c_v je merné teplo pri konštantnom objeme.

Sústava obsahuje nelineárne parciálne diferenciálne rovnice, ktorých riešenie je možné len pomocou počítačovo orientovaných numerických metód, ktorým sa venuje vedný odbor Výpočtová dynamika tekutín (Computational Fluid Dynamics - CFD). Analytické riešenia sú známe len pre niektoré elementárne, silne idealizované úlohy. Význam poznania fyzikálneho princípu základných rovníc spočíva však v tom, že celá, a to nielen teoretická, ale i numericko-výpočtová dynamika tekutín je budovaná na týchto rovniciach a ťažko si predstaviť užívateľa softvérových nástrojov CFD, ktorý by nepoznal fyzikálnu podstatu týchto rovníc.

20.9 Začiatočné a okrajové podmienky

Riešenie sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc prúdenia je možné len po predpísaní *okrajových podmienok* vystihujúcich dostatočne presne pomery na okraji analyzovanej oblasti (na okraji kontrolného objemu). V prípade nestacionárnej úlohy je potrebné tiež predpísať začiatočné hodnoty hľadaných primárnych neznámych (zložky rýchlosti, tlak, teplota a i.) pre začiatočný čas riešenia úlohy vo forme *začiatočných podmienok*.

Všeobecne môžeme časovo nezávislé okrajové podmienky pre diferenciálne rovnice prúdenia zaradiť do kategórie Dirichletových okrajových podmienok, ktoré majú tvar

$$\phi(\mathbf{x}_{okraj}) = a$$

kde ϕ sú hodnoty niektorej hľadanej neznámej (napr. tlaku, zložky rýchlosti a i.) na okraji vyšetrovanej oblasti, udané známou konštantou (výnimočne funkciou) a. Ďalej sa možno stretnúť s Neumannovým typom okrajovej podmienky napr.

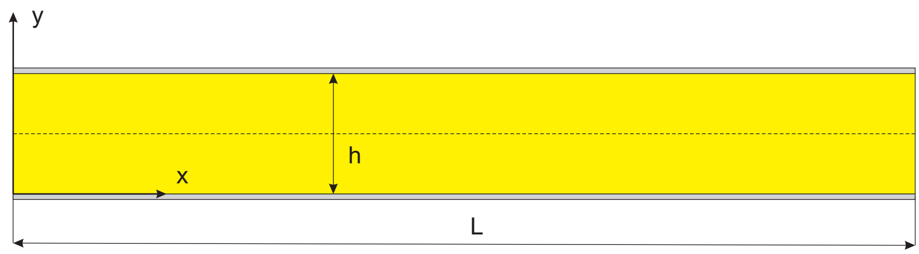
$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_{okraj})}{\partial y} = b$$

a so zmiešaným typom týchto dvoch okrajových podmienok.

Pravda, pri riešení zložitejších úloh prúdenia pomocou komerčných programov CFD sa stretneme s uvedenými okrajovými podmienkami v užívateľsky názornejšom fyzikálnom tvare. Znamená to, že sa na určitej časti okraja vyšetrovanej oblasti predpíšu napr. podmienky vtoku alebo výtoku tekutiny, a to zadaním rýchlosti (tlaku, hmotnostného toku, teploty a i.) tekutiny, ďalej možno simulovať podmienky pre vstupný a výstupný ventil, ventilátor, ohrev resp. chladenie a pod. Ďalej sa jednoducho predpisujú rýchlostné a termálne podmienky pre stenu, pre os alebo plochu symetrie, pre periodicky sa opakujúce oblasti a množstvo ďalších.

Príklad 20.2

Vo vzduchovode s pozdĺžnym rezom na obrázku určte maximálnu rýchlosť ustáleného prúdenia vzduchu analyticky a pomocou programu AnsysFlotran, keď je dané: $\rho = 1{,}2$ kg/m^3, $\mu = 2\cdot 10^{-5}$ Pa·s, $h = 8$ cm. Dĺžku kontrolného objemu L volíme 1 meter. Tlakový spád vo vzduchovode je $\Delta p / \Delta x = -0{,}01$ Pa/m.



Analytické riešenie

Úlohu možno považovať za dvojrozmernú a podľa príkladu 1 pre maximálnu rýchlosť prúdenia platí (predpokladáme laminárne prúdenie)

$$u_{\max} = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{0{,}08^2}{8\cdot 2\cdot 10^{-5}}\left(-\frac{0.01}{1}\right) = 0{,}4\,\mathrm{m/s}$$

Pre Reynoldsovo číslo dostávame

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u h}{\mu} = \frac{1{,}2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}08}{0{,}00002} = 1920$$

Z tejto hodnoty vyplýva, že podmienka pre laminárne prúdenie je splnená (prechod k turbulentnému prúdeniu nástáva pri $\mathrm{Re} \approx 2300$).

Numerické riešenie

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy
Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = Priklad 2, OK;

2. *Main Menu>Preferences,* FLOTRAN CFD, OK;

3. Zadanie typu prvku pre úlohu
Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete>Add, 2D Flotran 141, OK, Close;

4. Vytvorenie plochy pozdĺžneho rezu (vzhľadom na symetriu, uvažujeme len jej hornú polovicu)
Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensionns, X1=0, X2=1, Y1=0, Y2=0.04, OK;

5. Zadanie hustoty a vytvorenie výpočtovej siete
Meshing>Size Cntrls>Manual Size>Lines>Picked Lines, Kliknite vodorovné čiary obdĺžnika, OK, NDIV=30, Apply, Kliknite zvislé čiary, OK, NDIV=20, OK;
Mesh>Areas>Mapped>3 or 4 sided, Pick All;

6. Okrajové podmienky pre zložky rýchlosti (zohľadňujú aj symetriu oblasti)
Solution>Define Loads>Apply>Fluid/CFD>Velocity>On Lines, Kliknite spodnú vodorovnú čiaru, OK, VY=0, OK, *On Lines*, Kliknite hornú vodorovnú čiaru, OK, VX=0, VY=0, OK;

7. Okrajové podmienky pre statický tlak (zadáva sa a počíta tlak prevyšujúci referenčný atmosferický tlak 101350 Pa)

Apply>Pressure DOF>On Lines, Kliknite ľavú zvislú čiaru, OK, PRES=0.01, Apply, Kliknite pravú zvislú čiaru, OK, PRES=0, OK;

8. Zadanie cieľových hodnôt pre iteráciu (pre VY zadáme vysokú presnosť, aby sme ilustrovali konvergenciu k analytickému riešeniu)

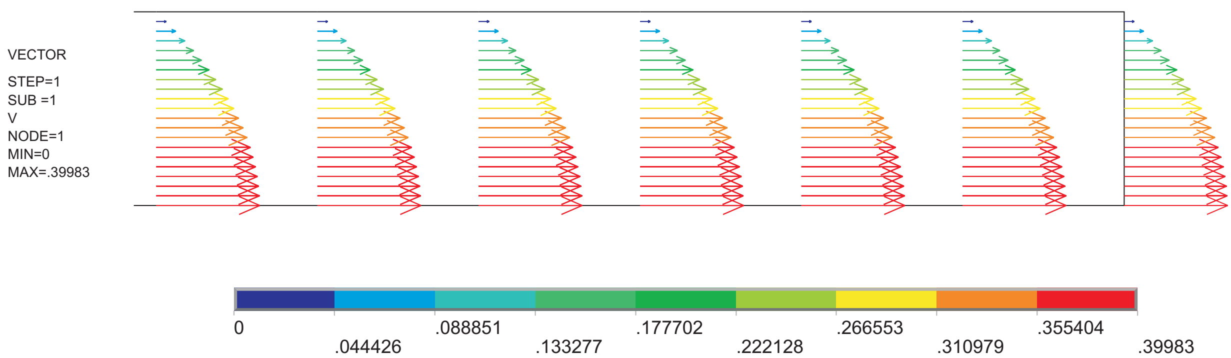
FLOTRAN Set Up>Execution Ctrls, EXEC=2000, VX=1E-6, PRES=0.01, OK;

9. Zadanie vlastností tekutiny, uloženie databázy modelu a výpočet

Fluid Properties>Density=Gas, Viscosity=Gas, OK, D0=1.2, V0=2E-5, OK;
SAVE_DB;
Run FLOTRAN;

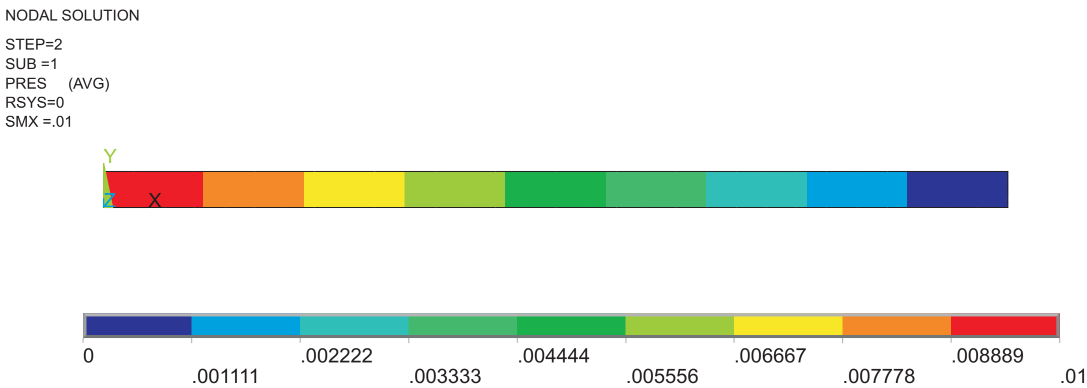
10. Vektorové znázornenie rýchlosti s výpisom maximálnej rýchlosti prúdenia vo vybranej oblasti

General Postproc>Read Results>Last Set;
Plot Results>Vector Plot>Predefined, OK, Kliknite ikonku *Zoom Model* a zväčšite vybrané miesto;



11. Znázornenie tlaku

Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu>DOF Solution, Pressure, OK;



12. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

*Ansys Toolbar>Quit>*Save Geom+Loads, OK;

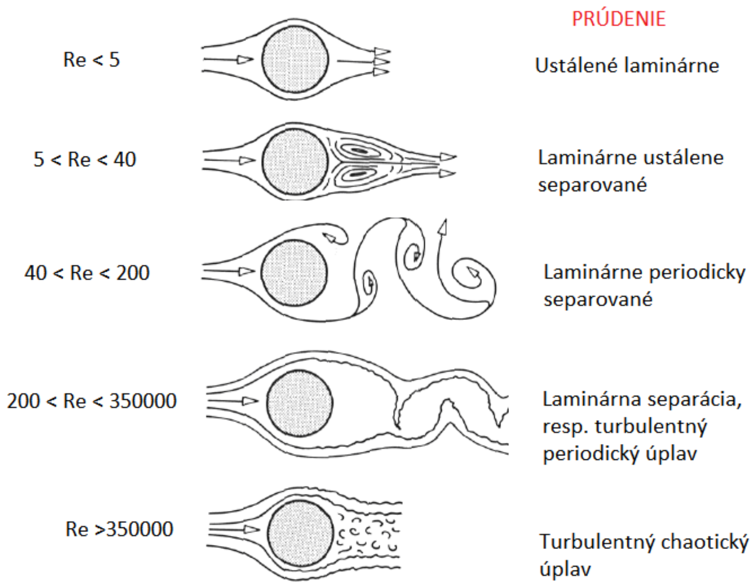
Poznámka k príkladu

Príklad má aj pri numerickom výpočte teoretický charakter, pretože zadanie *statického* tlaku na oboch stranách kontrolnej oblasti vyvolalo parabolický priebeh rýchlosti aj na vstupe do oblasti, čo pri reálnom vstupe je ťažko možné. Je to teda len určitý myslený výrez z reálnej oblasti v úseku, kde tlakový spád je konštantný.

21 Turbulencia

21.1 Turbulentné prúdenie a jeho modelovanie

Pri zvyšovaní rýchlosti prúdenia tekutiny, presnejšie povedané pri zväčšovaní Reynoldsovho čísla, laminárne prúdenie prechádza cez určitú prechodovú fázu do plne rozvinutého turbulentného prúdenia (obr. 21.1). Takmer všetky prípady prúdenia tekutín s ktorými sa stretávame v technickej praxi i v bežnom živote, patria do kategórie turbulentného prúdenia.

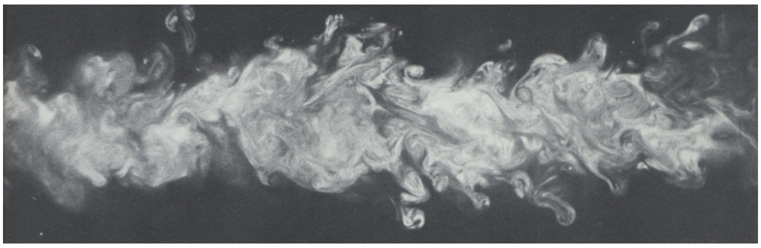


Obr. 21.1 *Zmeny prúdenia v úplave obtekaného telesa (kresba podľa experimentu)*

Pre turbulentné prúdenie je, okrem iného, charakteristické priestorové, náhodne lokalizované, nestacionárne kolísanie rýchlosti a ďalších charakteristík prúdu. Na základe rozboru Navier-Stokesových (N-S) rovníc i nákladných počítačových experimentov s ich priamym numerickým riešením sa verí, že popisujú aj turbulentné prúdenie v celej komplexnosti, jedná sa však o takú zložitú sústavu nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc s fyzikálnou zviazanosťou premenných, že analytické riešenie tejto sústavy nie je známe (bez nerealistických zjednodušení) ani pre veľmi jednoduché kontrolné objemy.

Hlavné charkteristiky turbulencie sú:

- **Nestálosť** (nepravidelnosť, náhodnosť). Experimentálne pozorovanie turbulentného prúdenia pomocou dymového zásobníka alebo zafarbením prúdu tekutiny potvrdilo, že jeho štruktúry (obrazce) sú náhodné a chaotické, bez akéhokoľvek náznaku opakovania (obr. 21.2), čo vyvolalo používanie štatistických metód a ich pojmov (priemerné hodnoty, korelácie a pod.) pri analýze turbulentného prúdenia. Z tejto charakteristiky vyplýva tiež to, že turbulentné nestacionárne fluktuácie sú vždy trojrozmerné.



Obr. 21.2 *Ukážka štruktúr turbulentného prúdu*

- **Vírivosť.** Turbulentný prúd obsahuje veľké množstvo priestorovo i časovo nestálych rotujúcich vírov rôznej veľkosti. Vo všeobecnosti sa ich rozmery menia od veľkosti porovnateľnej s rozmerom kontrolného objemu, až po rozmery, kde dominuje molekulárna difúzia. Najmenšie rozmery turbulentných štruktúr sú však vždy omnoho väčšie ako molekulárne a nenarušujú predpoklad kontinua zavedený v základných rovniciach prúdenia. Vzájomná interakcia vírov prenáša kinetickú energiu od väčších k najmenším (tzv. energetická kaskáda), kde sa účinkom viskózneho trenia premieňa na teplo.
- **Disipácia.** Pomerná strata dodávanej kinetickej energie pri turbulentnom prúdení jej premenou na teplo je niekoľkonásobne vyššia ako pri laminárnom.
- **Difúzia.** Turbulentné fluktuácie rýchlosti a vírivosť prispieva k efektívnemu transportu hybnosti, tepla a koncentrácie. Vysoká difuzivita, omnoho efektívnejšia ako čistá molekulárna difúzia, je ďalšou charakteristikou turbulentného prúdenia. Táto vlastnosť turbulencie sa výhodne využíva v rôznych technických zariadeniach a technológiách.

Z uvedeného vyplýva, že pri analýze úloh s turbulentným prúdením sa môžeme oprieť len o numerické metódy a procedúry. V princípe je možné každé turbulentné prúdenie *numericky* simulovať pomocou exaktných N-S rovníc (metóda DNS – *Direct Numerical Simulation*). Tu sa však naráža na nepríjemný problém spojený s veľmi vysokými nárokmi na geometrickú diskretizáciu vyšetrovanej oblasti a dostatočne hustú diskretizáciou časového intervalu sledovaného deja. Tieto požiadavky sú zatiaľ neprijateľné pre inžinierske analýzy turbulentného prúdenia a pre vysoké hodnoty Reynoldsovho čísla je zatiaľ takéto riešenie nerealizovateľné. K tomu ešte treba dodať, že inžiniersky záujem sa pri problémoch prúdenia sústreďuje predovšetkým na hlavné technicky využiteľné charakteristiky prúdenia bez väčšieho záujmu o presné časové fluktuácie aj tých najmenších vírov.

Výsledkom kombinácie zložitosti problému a pragmatických úvah o forme a presnosti výsledkov bol vznik a zatiaľ neustávajúca tvorba numericky zvládnuteľných a experimentami kalibrovaných *modelov* turbulentného prúdenia.

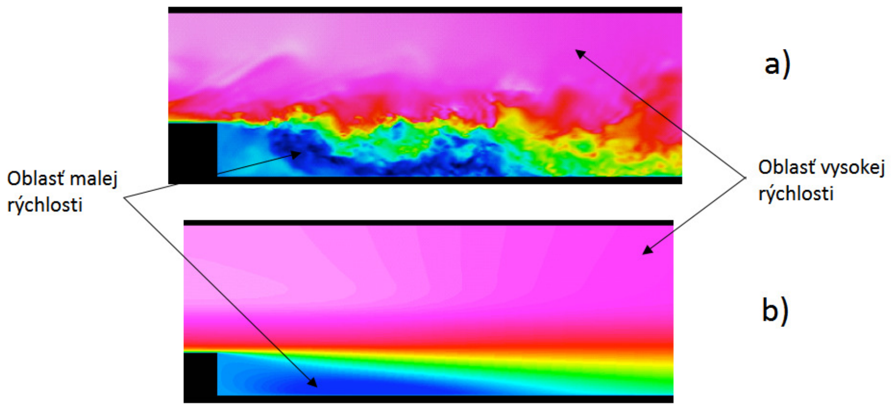
Numerické modelové riešenie problému prúdenia prostriedkami CFD (*Computational Fluid Dynamics* - Výpočtová dynamika tekutín) obyčajne pozostáva z týchto hlavných krokov: Tvorba geometrie a výpočtovej siete, voľba a nastavenie fyzikálneho výpočtového modelu a nakoniec výpočet s analýzou výsledkov. Tieto kroky sú užívateľsky relatívne jednoducho zvládnuteľné s výnimkou správnej voľby a nastavenia výpočtového modelu turbulencie a odhadu správnej hustoty výpočtovej siete. Vyplýva to jednak z toho, že zatiaľ neexistuje univerzálny model a dokonca ani najvhodnejší model pre špeciálne prípady turbulentného prúdenia (všetky modely majú určité obmedzenia) a tiež z toho, že nesprávna voľba modelu alebo jeho nastavenia a nesprávna hustota výpočtovej siete može mať veľký vplyv na presnosť výsledkov, nehovoriac o ich úplnej nedôveryhodnosti.

Pri voľbe modelu turbulentného prúdenia treba zohľadniť fyzikálne vlastnosti a špecifiká analyzovaného prúdenia, vlastné alebo sprostredkované skúsenosti s využívaním modelu v rovnakej alebo blízkej skupine úloh, potrebnú mieru presnosti výsledkov spolu s časom a hardvérom, ktorý je k dispozícii. No a v neposlednej miere poznať možnosti a obmedzenia zvoleného modelu spolu s vedomosťami o správnej voľbe jeho vstupných parametrov.

Väčšina často využívaných modelov turbulencie sa dá zahrnúť do dvoch skupín podľa základných rovníc, ktoré využívajú. Je to skupina Reynoldsovsky spriemerovaných N-S rovníc (RANS – *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) a skupina, ktorá využíva rovnice simulujúce veľké víry (LES - *Large Eddy Simulation*).

RANS rovnice popisujú turbulentné a transportné vlastnosti prúdenia pomocou *priemerných* (stredných) hodnôt, pričom takéto modelovanie sa používa (na rozdiel od LES modelov) pre turbulentné fluktuácie v celej ich rozmerovej škále. Modelové zjednodušenie vedie na výrazné zníženie nárokov na pamäťovú kapacitu i strojový čas počítača, pravda, výsledkom sú približné priemerné hodnoty prúdenia v turbulentnej oblasti (obr. 21.3). Štatisticko-priemerovací proces vnáša neznáme turbulentné korelácie (nové neznáme – Reynoldsove napätia a toky) do spriemerovaných rovníc prúdenia. Nové neznáme reprezentujú aproximáciu vplyvu reálnych turbulentných fluktuácií a ich počet s potrebnými rovnicami pre ich určenie predstavuje základnú charakteristiku konkrétneho modelu. Do tejto skupiny patria často využívané modely ako: Spalart-Allmarasov model, modely k-ε, k-ω a ich variácie a i.

LES modely obsahujú časovo závislú simuláciu, ktorá explicitne vyrieši vplyv veľkých vírov s využitím "filtrovaných" N-S rovníc a ostatné vplyvy sa riešia modelovaním turbulencie tak, ako v prvej skupine. Filtrovanie je v podstate matematická manipulácia exaktných N-S rovníc na odstránenie vírov, ktoré sú menšie ako zvolená filtrovacia mierka, ktorá pri priestorovom filtrovaní je určená najčastejšie hustotou výpočtovej siete. Výsledkom je vyššia presnosť ale (najmä pri vyšších hodnotách Reynoldsovho čísla) pri podstatne vyšších nárokoch na výpočtové prostiedky, hustotu diskretizácie i výpočtový čas oproti modelom z prvej skupiny. Často sa preto táto procedúra kombinuje s využitím tzv. *stenových funkcií* (využívajú sa aj pri predchádzajúcej skupine), čo umožňuje na veľkej časti kontrolného objemu podstatne znížiť hustotu výpočtovej siete. Podobne ako Reynoldsovo priemerovanie filtrácia generuje nové neznáme, pre ktoré sa vytvárajú modelové rovnice, aby kompletná sústava rovníc bola riešiteľná.



Obr. 21.3. *Zjednodušenie turbulentného prúdenia v mieste náhlej zmeny prierezu časovým priemerovaním. a) nestacionárna situácia, b) výsledok modelového riešenia*

21.2 RANS rovnice a Reynoldsove napätia

Na základe Reynoldsovho dekompozičného princípu možno nestacionárnu, spojite alebo diskrétne nameranú náhodne fluktujúcu veličinu rozložiť na jej priemernú (strednú) časť a na odchýlku od priemeru. Pre zložky rýchlosti v lokalite (x,y,z) a čase t možno tento rozklad zapísať v tvare

$$v_i = \overline{v}_i + v_i' \tag{21.1}$$

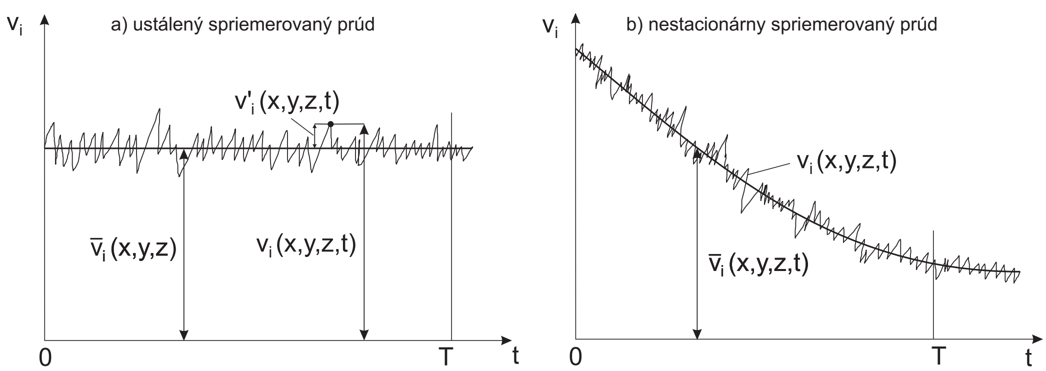
kde

$$\overline{v}_i(x,y,z,t) = \frac{1}{T}\int_0^T v_i(x,y,z,t)dt \tag{21.2}$$

je priemerná (stredná) hodnota i-tej zložky rýchlosti (obr. 21.4) a pre spriemerovanú fluktuačnú odchýlku v_i' od priemernej hodnoty platí

$$\overline{v_i'} = \frac{1}{T}\int_0^T v_i'(x,y,z,t)dt = 0 \tag{21.3}$$

Časový interval určený časom T musí byť v tomto prípade (existujú aj iné metódy priemerovania) veľký, aby výsledky priemerovania boli štatisticky ustálené.



Obr. 21.4 *Časová závislosť zložky rýchlosti a jej priemernej hodnoty* $\overline{v}_i$

Analogický rozklad možno uplatniť aj pre ďalšie (skalárne) hodnoty vystupujúce v základných rovniciach prúdenia (rovnica energie, dodatočné termodynamické vzťahy)

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \tag{21.4}$$

kde ϕ predstavuje skalárnu veličinu ako tlak, teplotu, energiu, entalpiu a i.

Dosadením priemerných hodnôt neznámych premenných do sústavy základných diferenciálnych rovníc prúdenia, s uplatnením (21.3) a využitím pravidiel matematickej manipulácie s priemernými hodnotami a ich odchýlkami, dostaneme novú *modelovú* sústavu diferenciálnych rovníc prúdenia vhodnú pre numerické spracovanie a počítačové riešenie. Napr. rovnica kontinuity a N-S pohybové rovnice sa pre newtonovskú tekutinu s $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ a nestacionárnu úlohu zmenia na

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \overline{v}_i) = 0 \tag{21.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \overline{v}_i \overline{v}_j) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\rho \overline{v_i' v_j'}\right) \tag{21.6}$$

Rovnice (21.5) a (21.6) sa nazývajú N-S rovnice s Reynoldsovým spriemerovaním, stručne RANS rovnice (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*). V rovniciach sa však objavili nové neznáme $(-\rho \overline{v_i' v_j'})$ s rozmerom napätia (tzv. Reynoldsove napätia), ktoré sa musia modelovať, inak povedané príslušný model RANS musí obsahovať dodatočné rovnice na ich určenie, aby celá sústava rovníc daného modelu bola riešiteľná.

Pre prúdenie stlačiteľných tekutín možno rovnice (21.5) a (21.6) interpretovať ako N-S rovnice s Favreovým spriemerovaním, pri ktorom rýchlosti predstavujú spriemerované hodnoty podľa hustoty a rovnice možno analogicky použiť pre modelové riešenie úloh s premenlivou hustotou.

21.3 Boussinesqova hypotéza

Tenzor Reynoldsovho napätia je symetrický, takže v RANS rovniciach sa objavilo 6 neznámych – tri normálové Reynoldsove napätia $-\left(\rho \overline{u'u'}\right)$, $-\left(\rho \overline{v'v'}\right)$, $-\rho\left(\overline{w'w'}\right)$ a tri šmykové $-\left(\rho \overline{u'v'}\right)$, $-\left(\rho \overline{u'w'}\right)$, $-\left(\rho \overline{v'w'}\right)$. Tvorba šiestich rovníc pre potrebu modelovania spriemerovaných *pohybových* rovníc sa spravidla nahradzuje jednoduchším postupom. Často sa využíva Bussinesqova hypotéza, podľa ktorej tieto zložky možno vyjadriť pomocou gradientov zložiek priemernej rýchlosti, turbulentnej kinetickej energie na jednotku hmotnosti $k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'}$ a turbulentnej (vírovej) viskozity μ_t

$$-\left(\rho \overline{v_i' v_j'}\right) = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\left(\rho k + \mu_t \frac{\partial \overline{v}_n}{\partial x_n}\right)\delta_{ij} \tag{21.7}$$

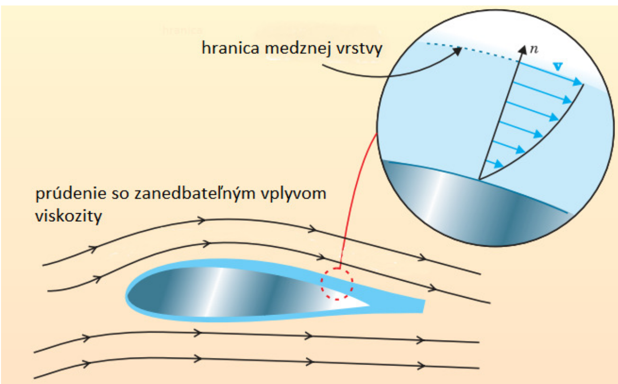
Dostávame tak potrebné rovnice pre určenie Reynoldsových napätí, v ktorých už treba modelovať pomocou vhodnej dodatočnej rovnice len jedinú neznámu, turbulentnú viskozitu μ_t. Takýto model sa často nazýva aj *jednorovnicový* model. Turbulentná viskozita má rovnaký rozmer ako dynamická viskozita, ale je to charakteristika turbulentného prúdenia a nie vlastnej tekutiny. Takto môžme relatívne jednoducho dosť hrubým spôsobom aproximovať turbulentné prúdenie ako prúdenie pseudotekutiny s lokálne sa meniacou "efektívnou" viskozitou ($\mu_{ef} = \mu + \mu_t$), ktorá aproximuje turbulenciu difúziou hybnosti a iných vlastnosti prúdiacej tekutiny.

Bez ohľadu na to, akým spôsobom sa určuje μ_t, využitie Bussinesqovej hypotézy vždy vnáša do modelovania niekoľko nezanedbateľných limitujúcich obmedzení. Mimo iného predpokladá, že víry majú vlastnosti ako molekuly, že turbulencia je izotropná a že existuje lokálna rovnováha medzi napätím a deformáciou. Napriek týmto nedostatkom je Boussinesqova aproximácia základom viacerých (v programoch CFD využívaných) modelov turbulencie.

21.4 Modelovanie prúdenia v blízkosti steny

Tenká vrstva prúdiacej tekutiny priliehajúca k stene telesa sa vyznačuje špecifickými vlastnosťami a nazýva sa *medzná vrstva.* Pretože viskózna tekutina má na stene nulovú rýchlosť (prilipne na stenu), v medznej vrstve dochádza v normálovom smere k veľkým zmenám (gradientom) rýchlosti - od nulovej hodnoty až po hodnotu blízku rýchlosti voľného (stenou neovplyvneného) prúdu. Obyčajne sa za hranicu medznej oblasti považujú body, kde lokálna rýchlosť dosahuje 95 až 99 % rýchlosti voľného, stenou neovplyvneného prúdu.

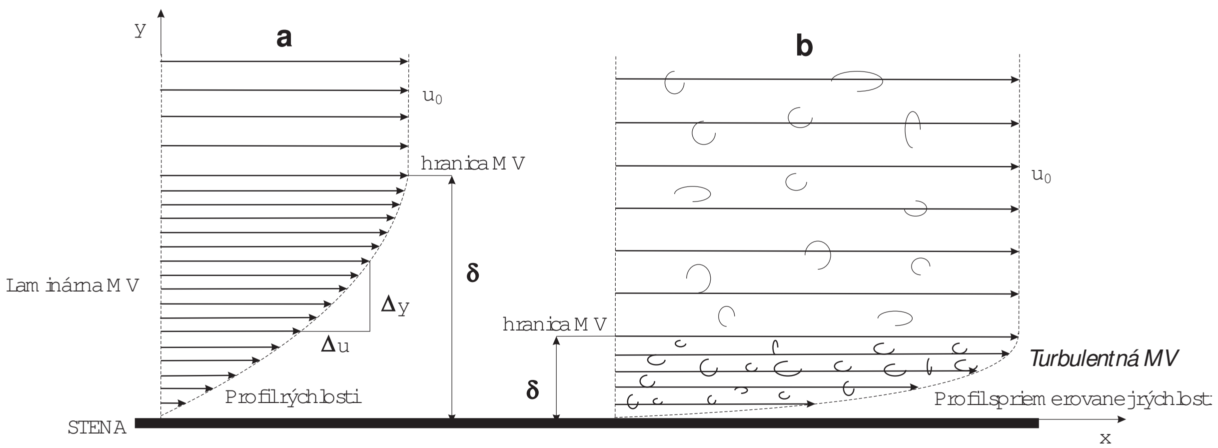
Priekopníci základov teórie medznej vrstvy (Prandtl, Blasius, Kárman a i.) v prvej polovici dvadsiateho storočia otvorili možnosti približného analytického riešenia Navier-Stokesových rovníc pre reálnu (viskóznu) tekutinu rozdelením oblasti prúdenia na medznú vrstvu s významným vplyvom viskóznych síl a okolitú oblasť s prevládajúcim účinkom zotrvačných síl a prakticky zanedbateľným vplyvom viskozity (obr. 21.5).



Obr. 21.5 *Medzná vrstva a oblasť prúdenia s malým vlyvom viskozity*

V neviskóznej oblasti pri konštantnej hustote sa použili Eulerove rovnice, pričom sa vplyv malej oblasti medznej vrstvy zanedbával. Riešil sa aj špeciálny prípad separácie prúdu (odtrhnutia medznej vrstvy od steny), kedy vplyv medznej vrstvy na mimostenovú oblasť v oblasti tzv. úplavu je významný. Pre oblasť medznej vrstvy sa vytvorili zjednodušené Navier-Stokesove rovnice (tzv. rovnice medznej vrstvy), ktoré už pre niektoré jednoduché prípady boli riešiteľné, ale hlavne umožňovali porozumieť a určovať prakticky dôležité veličiny ako odporová sila (koeficient odporu), dynamický vztlak, šmykové napätie tekutiny na stene a i.

Pravda, okolité voľné prúdenie významne ovplyvňuje charakteristiky medznej vrstvy. Vplyv majú predovšetkým tie veličiny prúdenia, ktoré rozhodujú o pomere zotrvačných a viskóznych síl (rýchlosť, hustota, viskozita a tvar steny telesa), t.j. Reynoldsovo číslo. Pri konkrétnych prípadoch prúdenia sa potom možno stretnúť s laminárnou medznou vrstvou (obr. 21.6a) alebo turbulentnou medznou vrstvou (obr. 21.6b).



Obr. 21.6 *Charakteristiky laminárnej (a) a turbulentnej (b) medznej vrstvy*

Z hľadiska užívateľa softvéru CFD je oblasť medznej vrstvy dôležitá kvôli správnej voľbe hustoty siete prvkov (MKP), resp. buniek (MKO) výpočtového modelu. Voľbou hustoty výpočtovej siete volíme hustotu integračných bodov v ktorých sa pre danú úlohu vyčísľujú hodnoty hľadaných funkcií. Pri nevhodnej (riedkej) sieti v oblasti veľkých gradientov funkcií sú vypočítané hodnoty nepresné a znehodnotia výsledky v celej oblasti (v lepšom príde zlyhá konvergencia riešenia, čo nás upozorní na problém so sieťou).

Ako je naznačené na obr. 21.6a gradienty rýchlosti ($\Delta u/\Delta y \rightarrow du/dy$) v laminárnej medznej vrstve sú mierne, hrúbka medznej vrstvy δ je relatívne veľká a dostatočné hustá sieť pri stene sa dá ľahko odhadnúť. Na základe analytického riešenia laminárneho obtekania pozdĺž tenkej dosky by sieť mala spĺňať podmienku

$$y_1 \leq \sqrt{\frac{\upsilon \ell}{u_0}} \tag{21.8}$$

kde je υ kinematická viskozita tekutiny

ℓ vzdialenosť meraná pozdĺž steny od začiatočného bodu medznej vrstvy

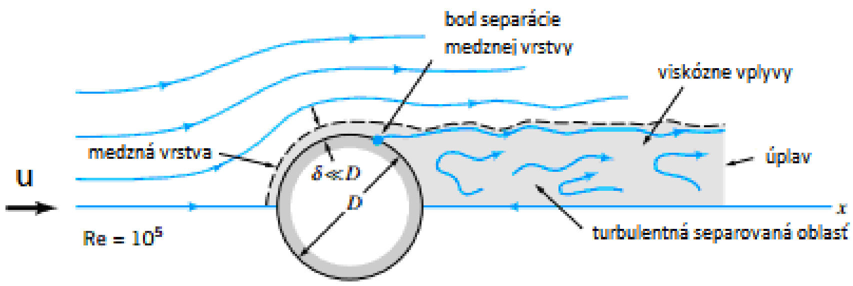
u_0 rýchlosť voľného prúdu

y_1 vzdialenosť ťažiska priliehajúcej buňky po stenu

Pri internom laminárnom prúdení v potrubiach a kanáloch má v oblasti rozvinutého prúdenia rýchlostný profil parabolický tvar a zmena rýchlostného gradientu a teda aj zmena hustoty siete po priereze sa dá určiť analyticky. Hustota siete v takomto prípade sa skôr riadi požiadavkou na kvalitu zobrazenia rýchlostného profilu a iných premenných v numerickom postprocesore programu.

Naopak pri turbulentnom prúdení je hrúbka medznej vrstvy výrazne menšia, gradienty spriemerovanej rýchlosti blízko steny sú vysoké a zvyšujú sa so zvyšovaním Reynoldsovho čísla. Charakteristika turbulentnej medznej vrstvy je komplikovanejšia a nájdenie správnej hustoty siete zložitejšie.

Základnú štruktúru a vzťahy pre turbulentnú medznú vrstvu opíšeme pre pomery plne rozvinutého ustáleného nestlačiteľného prúdenia pozdĺž hladkej širokej rovinnej steny v smere *x*. Počiatok rovinného súradnicového systému *(*x,*y)* zvolíme na stene, *y*-ová súradnica teda predstavuje normálovú vzdialenosť bodu od steny. Vzťahy, ktoré uvedieme platia v podstate aj pre prúdenie v uzatvorených kanáloch a potrubí. Pomery pri obtekaní telies sú analogické, komplikuje ich však problém odtrhnutia medznej vrstvy pri zvyšovaní Reynoldsovho čísla a s tým spojené zložitejšie pomery v úplave za telesom (obr. 21.7).



Obr. 21.7 *Odtrhnutie medznej vrstvy*

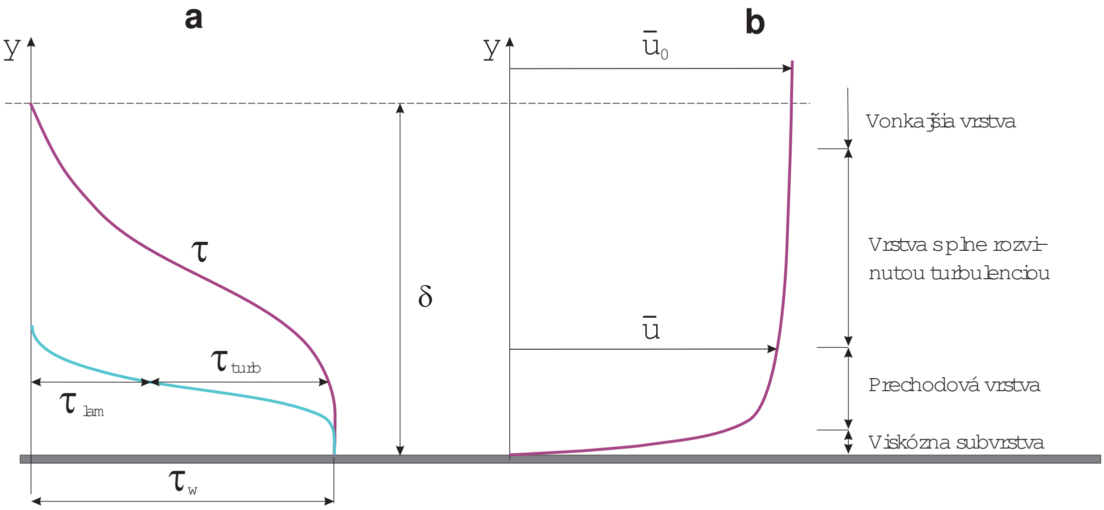
Pre šmykové napätie pri stene na základe Bussinesqovej hypotézy a analógie s laminárnym prúdením platí vzťah

$$\tau_{turb} = -\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{21.9}$$

Veľmi blízko pri stene sú turbulentné fluktuácie vzhľadom na malú rýchlosť prúdu (malé lokálne Reynoldsovo číslo) a tiež z dôvodu ich tlmenia bezprostrednou blízkosťou steny veľmi malé a v superpozičnom vzťahu

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} = (\mu + \mu_t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{21.10}$$

prevláda viskózne šmykové napätie (obr. 21.8a). Táto oblasť sa nazýva *viskózna subvrstva* (obr. 21.8b). Vo vonkajšej časti medznej vrstvy sa už naplno rozvinulo turbulentné prúdenie s klesajúcim šmykovým napätím, ktoré za hranicou medznej vrstvy vo vzdialenosti δ od steny už vo voľnom prúde s rýchlosťou $\overline{u}_0$ je zanedbateľne malé. Prechod medzi viskóznou a turbulentnou vrstvou tvorí prechodová vrstva, kde sa uplatňujú v určitom pomere viskózne i turbulentné efekty.



Obr. 21.8 *Typický priebeh šmykového napätia (a) a rýchlostného profilu (b) turbulentnej medznej vrstvy*

Pretože viskózna subvrstva je veľmi tenká a rýchlosť sa v nej mení od nulovej hodnoty až takmer na rýchlosť voľného prúdu, možno profil rýchlosti v tejto vrstve považovať za lineárny s konštantným gradientom

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\bar{u}}{y} = \text{konšt} \tag{21.11}$$

a pre tzv. *stenové šmykové napätie* vo viskóznej subvrstve potom podľa Newtonovho zákona viskozity platí

$$\tau_w = \mu\frac{\bar{u}}{y} = \rho\upsilon\frac{\bar{u}}{y} \qquad \text{alebo} \qquad \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\upsilon\bar{u}}{y} \tag{21.12}$$

Vyplýva z toho tiež, že stenové šmykové napätie τ_w je po celej hrúbke viskóznej subvrstvy konštantné (obr.21.8a).

Odmocnina z τ_w/ρ má rozmer rýchlosti a ujal sa pre ňu názov *trecia rýchlosť*

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho} \tag{21.13}$$

Po jej dosadení do (21.12) možno rýchlostný profil vo viskóznej subvrstve vyjadriť v bezrozmernej forme

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau}{\upsilon}y \tag{21.14}$$

pretože pomer υ/u_τ (tzv. viskózna dĺžka) má rozmer dĺžky. Experimenty potvrdzujú dobrú platnosť rovnice (21.14) pre hladké steny v rozmedzí $0 \le yu_\tau/\upsilon \le 5$. Potom pre približný odhad hrúbky viskóznej subvrstvy platí

$$\delta_v \approx \frac{5\upsilon}{u_\tau} \approx \frac{25\upsilon}{\overline{u}_{v\max}} \approx \frac{25\upsilon}{\overline{u}_0} \tag{21.15}$$

Hrúbka viskóznej subvrstvy je teda úmerná kinematickej viskozite tekutiny a nepriamo úmerná rýchlosti spriemerovaného voľného prúdu. Pri internom prúdení potom vysoká rýchlosť prúdenia splošťuje profil rýchlosti a pri veľmi vysokých Reynoldsových číslach sa profil prúdu blíži profilu rovnomerného prúdenia.

V analýzach mednej vrstvy sa obyčajne používa tzv. *normalizovaná bezrozmerná rýchlosť* u^+ a *normalizovaná bezrozmerná vzdialenosť od steny* y^+

$$u^+ = \frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \qquad\qquad y^+ = \frac{u_\tau}{\upsilon} y = \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\upsilon} y \tag{21.16}$$

Potom rovnicu (21.14), ktorá je vyjadrením tzv. *zákona steny* možno pre viskóznu subvrstvu zapísať jednoducho

$$u^+ = y^+ \qquad\qquad 0 \le y^+ \le 5 \tag{21.17}$$

Vo *vonkajšej vrstve* (obr. 21.7) je rýchlostný profil nezávislý od viskozity, ale závisí hrúbky mednej vrstvy a prípadne i iných parametrov voľného prúdu. Na základe rozmerovej analýzy tu platí funkčný vzťah

$$\frac{\overline{u}_0 - \overline{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{21.18}$$

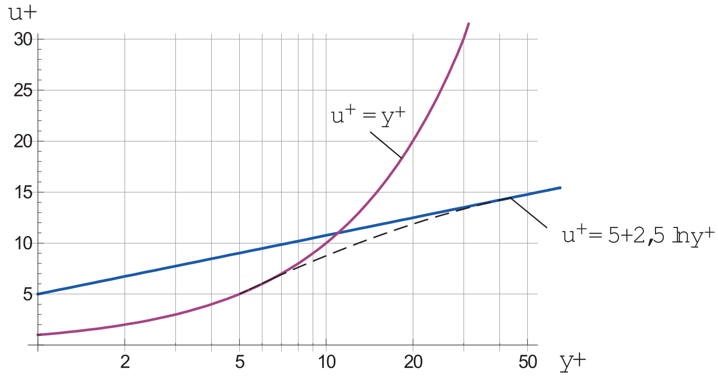
Dá sa ukázať, že pri požiadavke hladkej náväznosti rýchlostného profilu vonkajšej a viskóznej mednej vrstvy musí vo vrstve s plne rozvinutou turbulenciou platiť vzťah

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\tau y}{\upsilon} + C \tag{21.19}$$

tzv. *logaritmický* zákon steny. Aproximačné hodnoty konštánt v tomto vzťahu pre *hladkú* stenu sú $\kappa = 0{,}4$ a $C \approx 5{,}0$. Takže v stručnom zápise s normalizovanými hodnotami pre túto oblasť turbulentnej mednej vrstvy dostávame

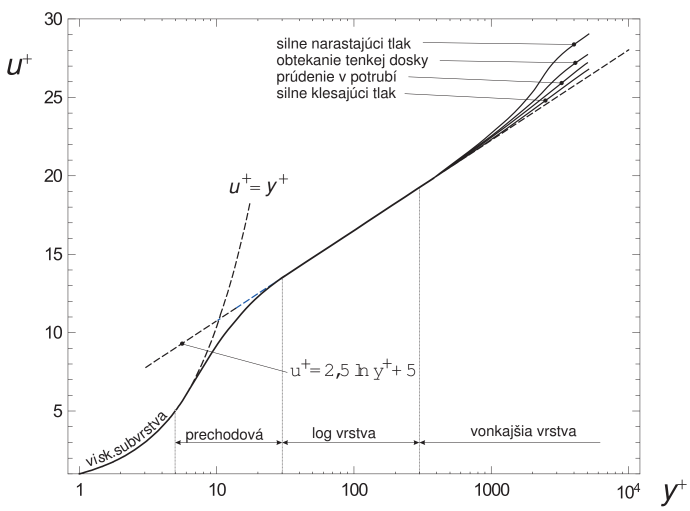
$$u^+ = 2{,}5 \ln y^+ + 5 \qquad\qquad \sim 30 \le y^+ \le \sim 300 \tag{21.20}$$

V súradnicovom systéme ($\ln y^+, u^+$) je to priamka a vzťah (21.17) pre viskóznu subvrstvu sa potom zmení na krivku (obr.21.9). Prepojenie medzi obidvomi čiarami podľa výsledkov experimentov tvorí čiarkovaná krivka udávajúca začiatok vrstvy s plne rozvinutou turbulenciou (alebo regiónu logaritmického zákona) s hodnotou y^+ = 30 až 60. Koniec platnosti logaritmického zákona je podľa experimentálnych meraní pri hodnote y^+ = 300 až 600 (obr. 21.10).



Obr. 21.9 *Nadväznosť čiar viskóznej subvrstvy* (21.17) *a vrstvy s logaritmickým vzťahom* (21.20) *cez prechodovú vrstvu*

Za hranicou platnosti logaritmického profilu normalizovanej rýchlosti sa dostávame do oblasti vonkajšej vrstvy a voľného prúdu, kde jeho tvar závisí od podmienok v tejto oblasti (obr. 21.10).



Obr. 21.10 *Experimentálno-analytická charakteristika medznej vrstvy turbulentného prúdenia*

Využitie uvedených normalizovaných charakteristík turbulentnej medznej vrstvy na správnu voľbu hustoty siete v blízkosti steny závisí od použitého modelu turbulentného prúdenia a postupov, ktoré sa v danom programe využívajú na optimálne vystihnutie pomerov v tejto oblasti.

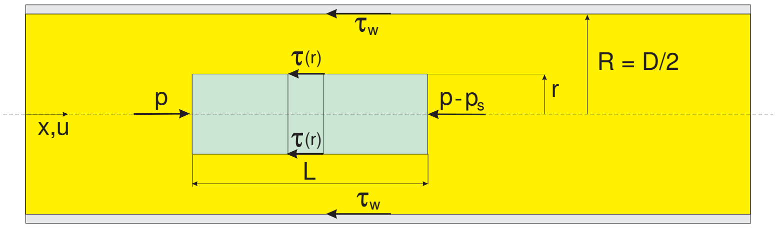
21.5 Vplyv drsnosti steny

Problematiku vplyvu drsnosti steny možno stručne ozrejmiť na príklade ustáleného plne rozvinutého *turbulentného* prúdenia tekutiny s konštantnou hustotou ρ a viskozitou μ vo vodorovnom *kruhovom potrubí* so zanedbaním tiažových síl (obr. 21.11). V potrubí na určitej dĺžke L v smere prúdenia dochádza k poklesu tlaku (tlakovej strate) $p_s > 0$ účinkom šmykového napätia $\tau(r)$ tekutiny a za určitých okolností aj účinkom drsnosti steny. Zaujíma nás, kedy a ako drsnosť steny potrubia ovplyvňuje veľkosť tlakovej straty.

Úvodom treba povedať, že pri turbulentnom prúdení nepoznáme analytický vzťah pre šmykové napätie (21.10) a preto sa tlaková strata určuje za pomoci experimentálne určeného bezrozmerného (Fanningovho) koeficientu trenia vyjadrujúceho pomer stenového šmykového napätia τ_w a dynamického tlaku *strednej hodnoty spriemerovanej rýchlosti* prúdenia tekutiny (jednoducho označenej ako u)

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2} \tag{21.21}$$

Rýchlosť u možno určiť meraním prietočného množstva tekutiny a stenové napätie možno vyjadriť tiež pomocou merateľných veličín. Pre silové pomery na vyznačenom objeme tekutiny totiž vzhľadom na ustálené prúdenie (nulové dynamické sily) platí



Obr. 21.11 *Tlakový pokles (tlaková strata) v kruhovom potrubí na dĺžke L* ($p_s > 0$)

$$p\pi r^2 - (p - p_s)\pi r^2 - 2\pi r L \tau = 0$$

Z toho dostávame lineárny priebeh šmykového napätia po priereze

$$\tau = \frac{p_s}{2\mathrm{L}} r \tag{21.22}$$

s maximálnou hodnotou na stene potrubia

$$\tau_{\max} = \tau_w = \frac{p_s}{2\mathrm{L}}\mathrm{R} = \frac{p_s \mathrm{D}}{4\mathrm{L}} \tag{21.23}$$

Z tejto rovnice a definície (21.21) dostávame vzťah pre výpočet tlakovej straty na dĺžke ΔL

$$p_s = 4c_f \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}}\left(\tfrac{1}{2}\rho u^2\right) = f \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}}\left(\tfrac{1}{2}\rho u^2\right) \tag{21.24}$$

Násobok $f = 4c_f$ sa nazýva Darcyho koeficient trenia.

Koeficienty trenia závisia od Reynoldsovho čísla a relatívnej drsnosti steny ε / D (ε je priemerná výška drsnosti) a získali sa prácnymi experimentálnymi meranimi na rúrach s umelo vytvorenou drsnosťou. Sú spracované do tabuliek, grafov alebo sa určujú z funkcionálnych vzťahov založených na nameraných hodnotách.

Populárna je Colebrookova rovnica

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/\mathrm{D}}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad \mathrm{Re} > 4000 \qquad (21.25)$$

pretože jej (na vyčíslenie f nie práve najvhodnejší) tvar je graficky spracovaný do Moodyho diagramu (obr. 21.12), z ktorého možno f odčítať pre zadanú relatívnej drsnosť a Reynoldsovo číslo. Pre priemyselné rúry, ktorých drsnosť má obyčajne iný charakter ako umelo vytvorená drsnosť, sú k dispozícii ekvivalentné drsnosti vyhovujúce pre uvedené definície koeficientov. Koeficient f sa jednoduchšie vyčísľuje z Haalandovho aproximačného vzťahu

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8\log_{10}\left[\left(\frac{\varepsilon/\mathrm{D}}{3,7}\right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re}\right] \qquad \mathrm{Re} > 4000 \qquad (21.26)$$

Rovnica (21.24) sa využíva aj na určovanie tlakovej straty pri *laminárnom* prúdení. V takomto prípade koeficient f závisí len od Reynoldsovho čísla a platí lineárny vzťah

$$f = \frac{64}{Re} \qquad (21.27)$$

Dá sa to ľahko dokázať, pretože v tomto prípade rovnica (21.10) sa zmení na klasický Newtonov zákon viskozity

$$\tau = \mu\frac{du}{dr} \qquad (21.28)$$

a strednú hodnotu rýchlosti možno určiť analyticky. Podľa rovníc (21.22) a (21.28) pre gradient rýchlosti v radiálnom smere platí

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{p_s}{\mathrm{L}}r \qquad (21.29)$$

Integráciou tohto vzťahu podľa r s uplatnením okrajovej podmienky $r = R \rightarrow u = 0$, dostaneme vzťah pre rýchlostný profil po priereze potrubia

$$u(r) = \frac{p_s}{4\mu\mathrm{L}}\left(\mathrm{R}^2 - r^2\right) = \frac{p_s}{16\mu\mathrm{L}}\left(\mathrm{D}^2 - d^2\right) \qquad (21.30)$$

so strednou hodnotou (označenej opäť ako u) rovnou polovici maximálnej rýchlosti

$$u = \frac{p_s\mathrm{D}^2}{32\mu\mathrm{L}} \qquad (21.31)$$

Dosadením tejto hodnoty a stenového napätia (21.23) do definície Fanningovho koeficientu (21.21) a po rozdelení u^2 na súčin uu dostávame

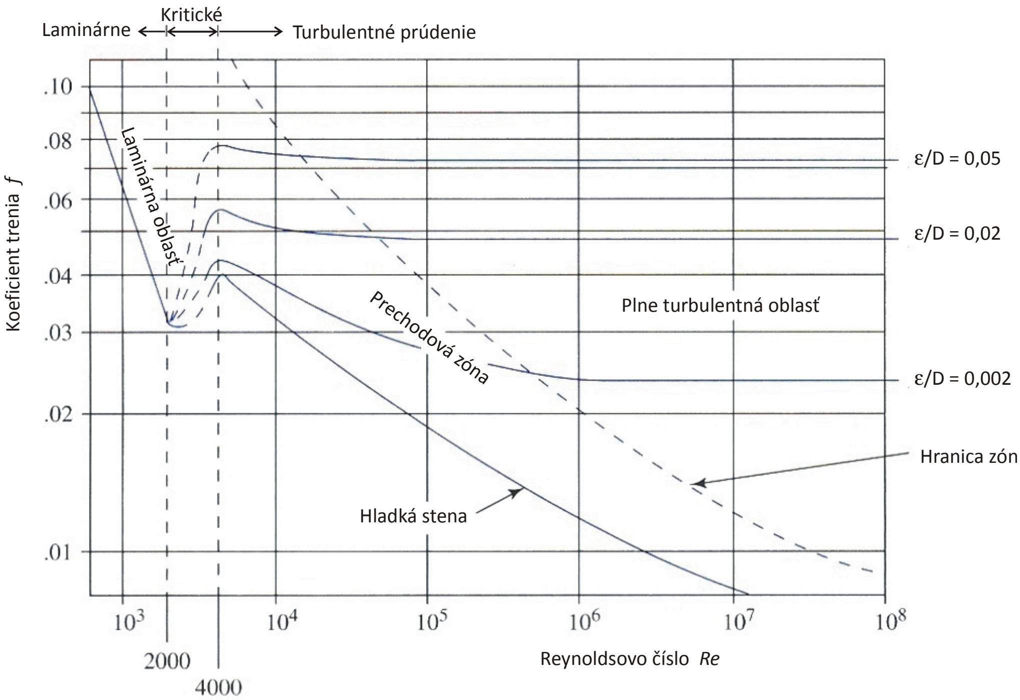
$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \frac{\frac{p_s\mathrm{D}}{4\mathrm{L}}}{\frac{1}{2}\rho u\frac{p_s\mathrm{D}^2}{32\mu\mathrm{L}}} = \frac{16}{\frac{\rho u\mathrm{D}}{\mu}} = \frac{16}{Re} \qquad Re < 2300 \qquad (21.32)$$

Pre Darcyho koeficient potom platí

$$f = 4c_f = \frac{64}{Re} \qquad Re < 2300 \qquad (21.33)$$

Informačný tvar Moodyho diagramu, už aj so zabudovaním vzťahu (21.33), je uvedený na obr. 21.12, jeho presnejšie tvary vhodné na odčítanie koeficientov trenia možno nájsť v príručkách alebo na internete.

Ako vidieť v oblasti turbulentného prúdenia najnižšie hodnoty koeficientu trenia má hladká stena; ani v tomto prípade neklesá úplne na nulu vzhľadom na prilnavosť prúdu k stene (nulová rýchlosť pri stene). Kritická prechodová oblasť medzi laminárnym a turbulentným prúdením dáva len orientačné hodnoty koeficienta, pretože prúdenie pri týchto hodnotách *Re* môže byť laminárne alebo turbulentné, prípade učinkom malých porúch v prúdení oscilovať medzi týmito dvomi stavmi, a tak sa súbežne môže meniť aj koeficient trenia. Za prechodovou zónou turbulentného prúdenia, ako vidieť, koeficient trenia pri danej drsnosti už nezávisí od Reynoldsovho čísla. Pretože označovanie koeficientov trenia nie je ustálené, treba pri diagramoch a tabuľkách dávať pozor na to, aby nedošlo k zámene Fanningovho a Darcyho koeficienta. Kontrola v diagramoch, kde je uvedená aj laminárna oblasť, je jednoduchá – pri hodnote $Re = 1000$ v prvom prípade musíme dostať 0,016 a v druhom 0,064.



Obr. 21.12 *Moodyho diagram (zjednodušená schéma)*

Modelovanie turbulencie v programe Ansys Fluent

V programovom balíku Ansys sa nachádza aj pôvodne samostatný program Fluent so širokými možnosťami numerickej simulácie úloh dynamiky tekutín. Použijeme ho na ilustráciu postupov riešenia príkladov turbulentného prúdenia tekutín s niektorými jeho modelmi turbulencie.

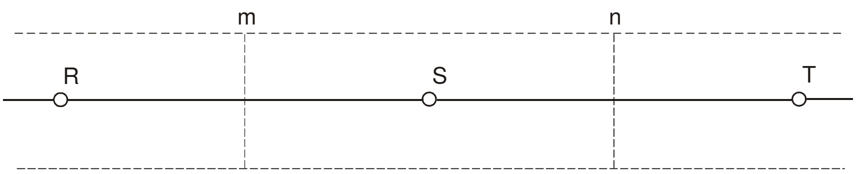
Tak ako všetky programy CFD aj program Ansys Fluent sa skladá z troch základných častí: (1) Z predprocesora využívaného na tvorbu alebo načítanie geometrie, tvorbu výpočtovej siete, definovanie začiatočných a okrajových podmienok a zadanie parametrov tekutiny a prúdenia. (2) Z riešiča, ktorý (u tohto programu metódou konečných objemov) vytvorí a iteračným spôsobom vyrieši výslednú nelineárnu sústavu rovníc úlohy a (3) z postprocesora, ktorý slúži na numerické spracovanie a grafickú vizualizáciu výsledkov.

V oblasti, ktorá nás v tejto časti zaujíma, ponúka program tieto možnosti simulácie prúdenia:

- Dvojrozmerné rovinné, osovo, resp. rotačne symetrické a trojrozmerné
- Ustálené a nestacionárne
- Nestlačiteľné alebo stlačiteľné vo všetkých rýchlostných režimoch (pomalé subsonické, transonické, supersonické a hypersonické)
- Neviskózne, laminárne, turbulentné
- Newtonovské, nenewtonovské

Metódu konečných objemov (MKO), ktorú Fluent využíva na riešenie sústavy diferenciálnych rovníc prúdenia, možno charakterizovať aj ako špeciálny (zjednodušený) prípad MKP, kedy interpolačná (aproximačná, tvarová) funkcia je na celej oblasti prvku (budeme ho nazývať bunka) rovná jednej a hodnoty premených sa potom v oblasti bunky nemenia. Pripomíname, že v MKP má interpolačná funkcia prvku jednotkovú hodnotu len v uzlových bodoch a po prvku sa, tak, ako aj primárna neznáma, lineárne, kvadraticky a pod. mení podľa kvality prvku.

Bunka v MKO obsahuje len jeden uzol (zároveň aj integračný bod) S umiestnený v geometrickom ťažisku bunky (obr. 21.13). Diskretizáciu parciálnej diferenciálnej rovnice potom možno vykonať jednoduchšie (ale menej



Obr. 21.13 *Jednorozmerný konečný objem s uzlom S*

presne) ako v MKP. Napr. pre jednorozmernú úlohu sa prvá derivácia premennej u na hraniciach m a n bunky jednoducho vyjadrí ako rozdiel hodnôt premennej v susedných uzloch vydelený ich vzdialenosťou

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_m = \frac{u_S - u_R}{x_S - x_R}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_n = \frac{u_T - u_S}{x_T - x_S}$$

Druhá derivácia tejto premennej v uzle S sa potom aproximuje ako rozdiel týchto hodnôt podelený dĺžkou bunky

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_S = \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_n - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_m}{x_n - x_m}$$

Druhou, menej príjemnou stránkou takejto jednoduchej diskretizácie je, samozrejme, nutnosť modelovania veľmi hustej siete buniek v oblastiach vysokých gradientov premenných, aby sa zaručila dostatočná presnosť výsledkov.

Ansys Fluent poskytuje užívateľovi pomerne široký výber modelov turbulentného prúdenia, ktorých väčšina je typu RANS založená na Boussinesquovej hypotéze. Spomeňme aspoň jednorovnicový Spalart-Allmarasov model a populárne dvojrovnicové k-ε a k-ω modely, kde

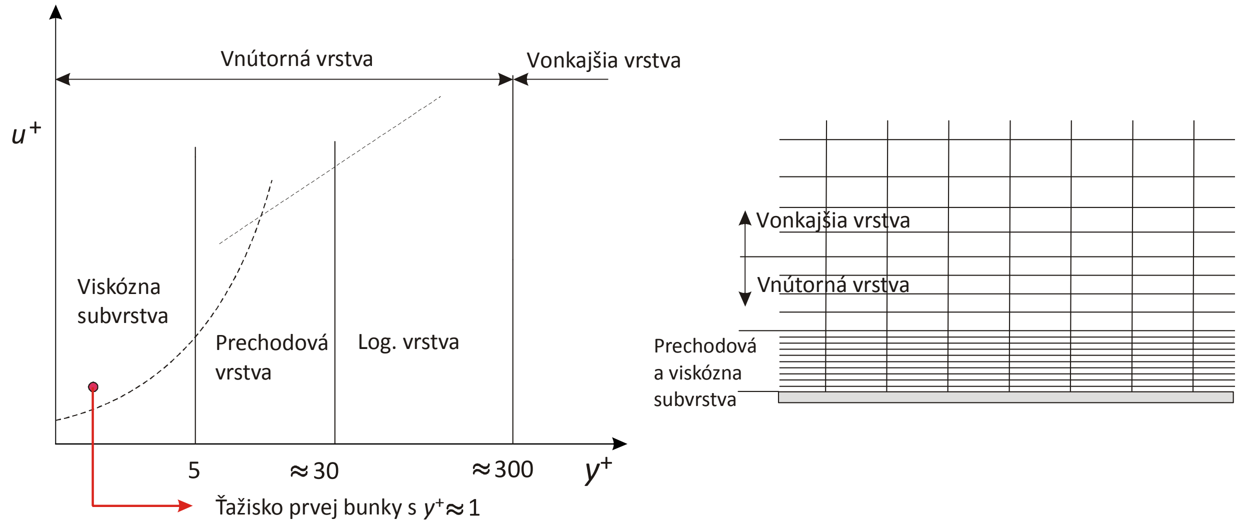
$$k = \tfrac{1}{2}(\overline{u}'^2 + \overline{v}'^2 + \overline{w}'^2) \tag{21.34}$$

je merná (vztiahnutá na jednotku hmotnosti) spriemerovaná kinetická energia, ε je rýchlosť jej disipácie a $\omega \approx \varepsilon/k$.

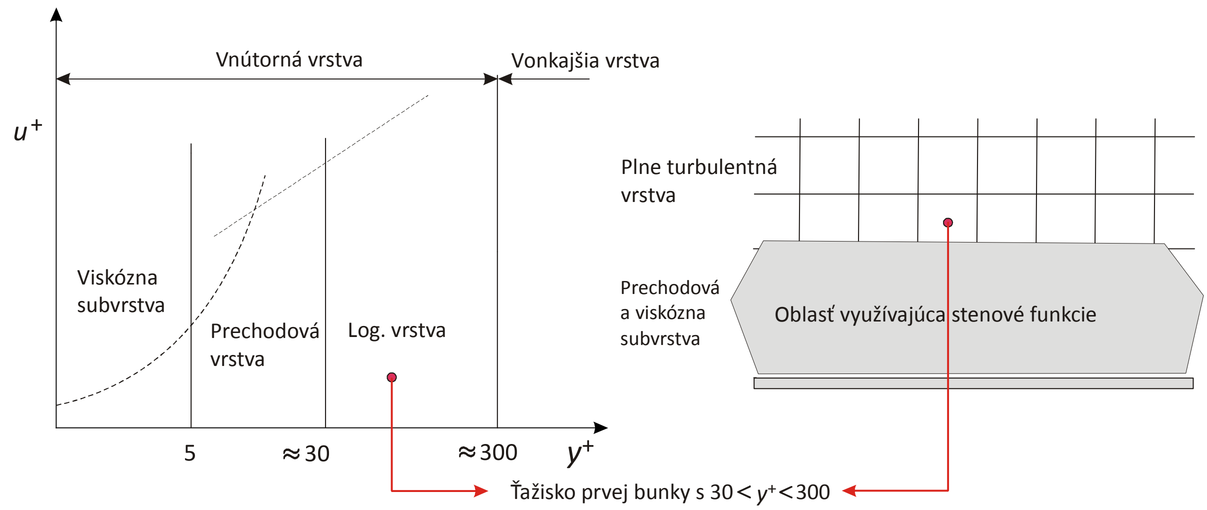
Z tejto skupiny sa čiastočne vyčleňuje model RSM (Reynolds Stress Model), pri ktorom sa za účelom spresnenia riešenia vypúšťa Boussinesquovej hypotéza a modelujú sa všetky zložky Reynoldsovho napätia a tiež rýchlosť disipácie. K spriemerovaným N-S rovniciam je pri tomto modeli potom potrebne zostavovať a riešiť päť ďalších rovníc pre 2D prúdenie, resp. sedem ďalších rovníc pre 3D prúdenie. Ďalšou skupinou sú LES (*Large Eddy Simulation*) modely s výrazne vyššími nárokmi na hardvérový výkon a spotrebu strojového času najmä pri vyšších Reynoldsových číslach a komplexnom geometrickom tvare vyšetrovanej oblasti.

Prúdenie v blízkosti steny sa modeluje dvomi spôsobmi. Prvý spôsob spočíva vo vytvorení veľmi hustej siete buniek v oblasti blízko steny, najmä v oblasti viskóznej a prechodovej medznej vrstvy (obr. 21.14), pretože v takomto prípade sa pracuje s modelom, ktorý aj túto oblasť s vysokými gradientami neznámych rieši numerickou integráciou rovníc výpočtového modelu. Ako sme vyššie naznačili MKO v takomto prípade vyžaduje v okolí steny veľmi hustú sieť s hodnotou $y^+ \approx 1$ pre normalizovanú vzdialenosť ťažiska najbližšej bunky od steny, čo pri úlohách s vysokými hodnotami *Re* vedie (viskózna medzná vrstva v takýchto prípadoch môže mať hodnoty menšie ako 1 mm - nemýliť si to s y^+) na numericky ťažko zvládnuteľný veľký systém rovníc. Často sa takéto modelovanie okolia steny nazýva aj modelovanie pre nízku (turbulentnú) hodnotu Reynoldsovho čísla (*Low-Reynolds-Number Turbulent Modelin*g). Využíva sa v prípadoch, kedy to pomerne nízka (turbulentná) hodnota *Re* (myslí sa tým *Re* vo vnútornej medznej vrstve, nie globálna hodnota *Re*) dovoľuje, alebo vtedy, keď je to nevyhnutné (separácia prúdu, laminárno-turbulentný prechod, komplikovaný prenos tepla a i.).

Druhý spôsob sa využíva v prípadoch, kedy hustota siete potrebná na dostatočne presné numerické riešenie oblastí v okolí steny by viedla na neprijateľne vysoký počet rovníc diskrétneho modelu úlohy. V takom prípade sa hľadané premenné v okolí steny určujú pomocou empiricko-analytických funkcií s názvom *stenové funkcie*. Program zabezpečí prepojenie takto získaných hodnôt v oblasti medznej vrstvy s hodnotami v susediacich diskrétnych bodoch výpočtovej siete v miestach ďalej od steny, kde už môže byť sieť buniek podstatne redšia (obr. 21.15).



Obr. 21.14 *Princíp modelovania v blízkosti steny pre nízku (turbulentnú) hodnotu Reynoldsovho čísla (Low-Reynolds-Number Turbulent Modeling)*



Obr. 21.15 *Princíp modelovania v blízkosti steny s využitím stenových funkcií*

Turbulentný model môže byť určený pre prvý alebo druhý spôsob riešenia úlohy v blízkosti steny, alebo môže byť upravený tak, že podľa zadanej kvality siete volí niektorú z týchto možností. V tejto súvislosti treba povedať, že na vývoji postupov čo najmenej citlivých na y^+ hodnoty v blízkosti stien geometricky komplikovaných oblastí sa permanentne pracuje a užívateľské možnosti sa líšia podľa aktuálnosti používanej verzie programu.

Všeobecná forma rovníc turbulentného modelu je analogická s prenosovými (transportnými) rovnicami chemicky reagujúcich zložiek prenášaných prúdom tekutiny

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = a \frac{\partial}{\partial x_j}\left[d \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] + P(\phi) - D(\phi) \qquad (21.35)$$

kde ϕ je zovšeobecnená turbulentná premenná, d je difuzivita, $\bar{v}_i$ sú zložky spriemerovanej rýchlosti a a je konštanta. Členy na ľavej strane rovnice reprezentujú konvektívny transport ϕ a prvý člen na pravej strane jej difúziu. Funkcie $P(\phi)$ a $D(\phi)$ simulujú produkciu a deštrukciu ϕ

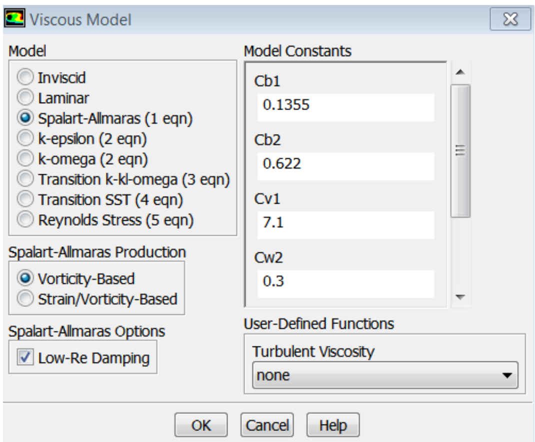
Spalart-Allmarasov model

Spalart-Allmarasov model je jednorovnicový RANS model využívajúci Boussinesqovu hypotézu (21.7) na určenie Reynoldsových napätí, v ktorej sa ignoruje člen s turbulentnou kinetickou energiou k a turbulentná kinematická viskozita $\tilde{\upsilon} = \mu_t/\rho$ sa modeluje rovnicou (použijeme označenia podľa teoretického manuálu programu Ansys)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\upsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{\upsilon}\bar{v}_i) = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\upsilon}}}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ (\mu + \rho\tilde{\upsilon})\frac{\partial \tilde{\upsilon}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2}\rho\left(\frac{\partial \tilde{\upsilon}}{\partial x_j} \right)^2 \right] + G_\upsilon - Y_\upsilon + S_{\tilde{\upsilon}} \qquad (21.36)$$

kde $\sigma_{\tilde{\upsilon}}$, C_{b2} sú konštanty, funkcia G_υ modeluje produkciu turbulentnej viskozity $\tilde{\upsilon}$ a Y_υ jej deštrukciu potrebnú na simuláciu jej tlmenia v blízkosti steny. $S_{\tilde{\upsilon}}$ je funkcia zdroja turbulentnej viskozity, ktorý v prípade potreby môže zadať užívateľ programu. Podrobný rozpis týchto funkcií a hodnoty ďalších konštát určených empirickou kalibráciou modelu možno nájsť v manuáli.

Vo východzom nastavení modelu na obr. 21.15 je produkcia turbulentnej viskozity (Spalart-Allmaras *Production*) určovaná tenzorom rýchlosti rotácie, t.j. vírivosťou (*Vorticity-Based*), pri druhej možnosti (*Strain/Vorticity-Based*) kombináciou rýchlosti deformácie a rýchlosti rotácie. Zapnuté je tlmenie turbulencie v oblastich s nízkou *lokálnou* hodnotou Reynoldsovho čísla (*Low-Re Damping)* a užívateľ nebude zadávať funkciu pre ním definovaný zdroj turbulencie (*User-Defined Functions*).



Obr. 21.15 *Okno programu Ansys Fluent s východzími charakteristikami Spalart-Allmarasovho modelu*

Spalart-Allmarasov model predpokladá riešenie viskóznej medznej vrstvy priamou integráciou, t.j. vyžaduje sa vysoká hustota siete v blízkosti steny ($y^+ \approx 1$) i keď program Ansys zabezpečuje, že model nezlyhá ani v prípade redšieho delenia, pokiaľ sa dodržia zásady tvorby výpočtovej siete pre využitie stenových funkcií s $y^+ \geq 30$. Bol vytvorený pre ekonomické riešenie úloh kozmického výskumu, nehodí sa pre úlohy s výraznejšou separáciou prúdu a pre presnejšie riešenie bežných priemyselných úloh turbulentného prúdenia je použite viacrovnicových modelov spoľahlivejšie.

21.6 Štandardný k-ε model a jeho modifikácie

Štandardný k-ε model je poloempirický dvojrovnicový model založený na modelových rovniciach prenosu turbulentnej kinetickej energie k (na jednotku hmotnosti) a jej rýchlosti disipácie ε.

Jeho prvý návrh je z roku 1972 a odvtedy prešiel mnohými vylepšeniami, nehovoriac o vzniku jeho modifikácií (k-ε RNG, k-ε realizable), ktoré odstránili jeho systémové nedostatky pri riešení niektorých špecifických úloh. To vysvetľuje kvalitu, široké využitie a popularitu týchto modelov.

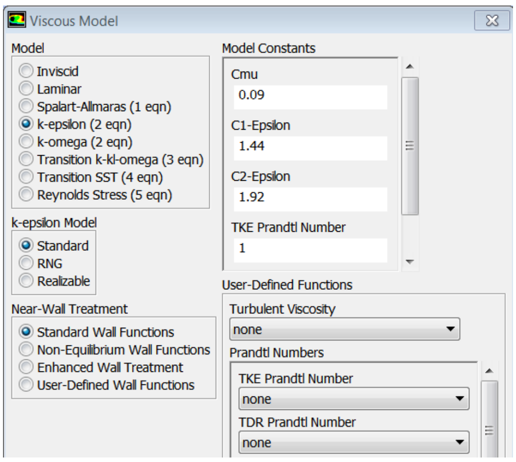
Pri odvádzaní rovníc modelu sa zavádza predpoklad, že prúdenie je plne turbulentné so zanedbateľným vplyvom molekulárnej viskozity. Štandardný k-ε model je preto určený len na riešenie plne turbulentného prúdenia.

Základom modelu sú dve diferenciálne rovnice aproximujúce (modelujúce) transport k a ε (pozri teoretický manuál programu Ansys), ktorých riešenie umožňuje určovať turbulentnú (vírovú) viskozitu μ_t ako určitú kombináciu týchto veličín zo vzťahu

$$\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon \qquad (21.37)$$

kde C_μ je konštanta (pre tento model C_μ = 0,09). Pri známej hodnote μ_t možno už potom určovať Reynodsove napätia pomocou Boussinesqovej hypotézy (21.7) a model je takto kompletný.

Model obsahuje viacero empirických konštánt určených experimentami so vzduchom a vodou tak, aby boli optimálne pre čo najširšiu škálu interného a voľného prúdenia tekutín. V zadávacej tabuľke modelu možno niektoré meniť, čo sa však neodporúča pri nedostatku skúseností s týmto modelom a s určitou tiedou častejšie riešených úloh



Na druhej strane je užitočné niečo vedieť o voľbe stenových funkcií v okne *Near-Wall Treatment.* Ako sme už uviesli štandardný *k-*ε model (ale i jeho modifikácie a tiež RSM a LES model), na rozdiel od Spalart-Allmarasovho modelu a $k-\omega$ modelov, je vytvorený na riešenie plne turbulentného prúdenia. Stenové funkcie preto slúžia na to, aby tento model (ale i ďalšie tohto typu) zvládol aj prúdenie okolo steny, kde sa objavuje aj laminárne a zmiešané prúdenie.

Program implicitne ponúka štandardné stenové funkcie (*Standard Wall Functions*). Pri tejto voľbe normalizovaná vzdialenosť každej bunky susediacej so stenou by mala spĺňať podmienku $30 < y^{+} < 300$, optimálne by mala byť čo najbližšie k hodnote 30. (Táto požiadavka platí aj pre voľbu nerovnovážnych stenových funkcií – *Non-Equilibrium Wall Functions.*) V týchto prípadoch sa oblasť okolia steny teda rieši klasicky pomocou stenových funkcií (obr. 21.15).

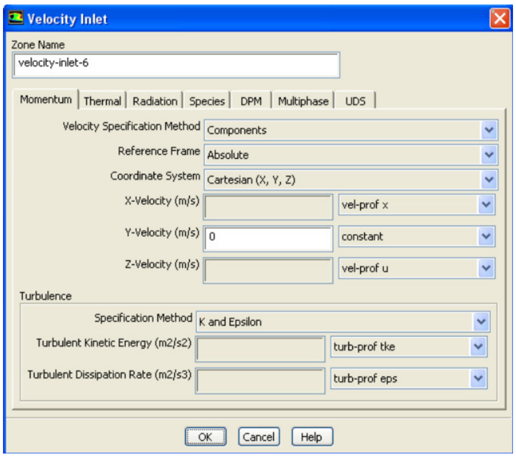
Štandardné stenové funkcie pracujú dobre pre širokú oblasť prúdení obmedzených stenou, pravda, nie sú spoľahlivé v špeciálnych prípadoch prúdenia, najmä tých, kde sa v blízkosti steny vykytujú silné tlakové gradienty porušujúce rýchlostný profil, pri separácii prúdu a jeho opätovnom spájaní a pri všetkých geometrických alebo iných zásahoch do prúdu vyvolávajúcich jeho náhlu zmenu spojenú s náhlymi zmenami tlaku. V takýchto prípadoch môže zlepšenie výsledku v okolí steny najmä šmykového stenového napätia (koeficient trenia) a prenosu tepla (Nusseltovo a Stantonovo číslo) priniesť voľba nerovnovážnych stenových funkcií.

Voľba vylepšeného riešenia okolia steny (*Enhanced Wall Treatment*) je určená na zlepšenie priameho integrálneho riešenia oblasti medznej vrstvy steny (obr. 13) za viskóznou subvrstvou pomocoou špeciálnych stenových funkcií. Táto voľba umožňujú tiež využitie *k-*ε modelov aj pri hustom delení medznej vrstvy s podmienou $y^{+} \leq 5$.

21.7 Určovanie vstupných parametrov turbulentného prúdenia

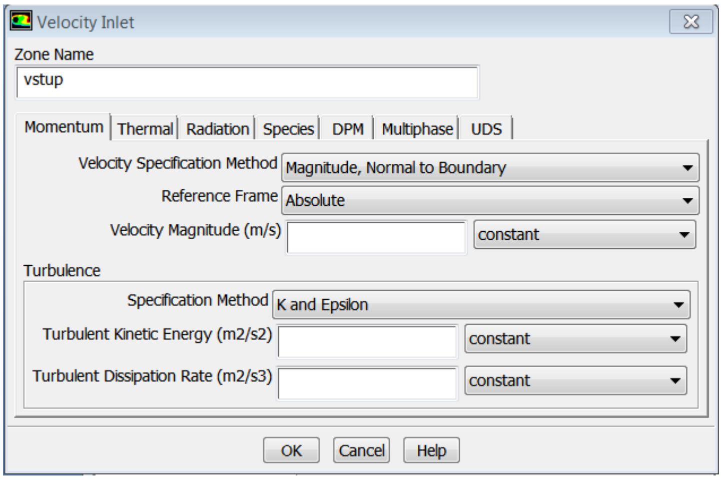
Pri riešení úloh s turbulenciou treba na hraniciach (plochách, čiarach), kde (turbulentný) prúd vstupuje do kontrolného objemu, zadať turbulentné parametre vstupujúceho prúdu. Tieto charakteristiky sa zadávajú vo forme turbulentných okrajových podmienok.

Ideálny je prípad, kedy tieto charakteristiky poznáme z experimentálnych meraní (napr. v aerodynamickom tuneli). Program umožňuje tieto numerické alebo analytické hodnoty načítať a uložiť ako súbory so zvolenými názvami a potom ich načítať ako vstupné hodnoty pre príslušnú vstupnú oblasť. Nasledujúci obrázok ukazuje načítanie takéhoto tzv. *profilu* pre *k-*ε model a vstupnú oblasť s názvom *velocity-inlet-6*



V príslušných kolonkách sú uvedené názvy súborov obsahujúce polohové súradnice a príslušné hodnoty vstupujúcich zložiek rýchlosti (*u* a w, zložka *v* je nulová) a tiež *k* a ε .

Pri mnohých úlohách sa však turbulentné okrajové podmienky zadávajú vo forme odhadnutých konštantných hodnôt. Zadávacia tabuľka pre vstupnú rýchlosť turbulentného prúdu potom vyzerá takto



a treba do nej zadať vstupnú priemernú rýchlosť u_0 a odhadnuté hodnoty k a ε. V riadku *Specification Method* možno pre jednotlivé turbulentné modely zvoliť aj iné (konštantné) charakteristiky vstupného turbulentného prúdu. Napr.:

- Intenzita turbulencie I a turbulentné dĺžkové merítko ℓ
- Intenzita turbulencie I a turbulentný viskózny koeficient μ_t / μ
- Intenzita turbulencie I a hydraulický priemer *D*
- Modifikovaná turbulentná viskozita $\overline{V}$

a pri špeciálnych turbulentných modeloch množstvo ďalších.

Manuál programu poskytuje viacero vzťahov pre odhad charakteristík vstupného turbulentného prúdu, z ktorých uvedieme len niektoré, platné pre plne rozvinuté turbulentné prúdenie v potrubí.

Pre intenzitu turbulencie približne platí

$$I = \frac{u'}{u_0} = 0{,}16\left(\mathrm{Re}\right)^{-1/8} \tag{21.38}$$

Merítko turbulentnej dĺžky pre kruhové potrubie možno odhadnúť ako

$$\ell = 0{,}07D \tag{21.39}$$

Modifikovaná turbulentná viskozita pre Spalart-Allmarasov model sa potom vypočíta zo vzťahu

$$\bar{\nu} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, u_0\, I\, \ell \tag{21.40}$$

Príklad 21.1

Uvažujte rovné kruhové potrubie s hladkou vnútornou stenou o dĺžke L s priemerom $d = 0{,}2$ m. Do potrubia sa privádza vzduch s priemernou rýchlosťou u_0 = 1 m/s a na jeho konci sa odvádza do okolia s atmosférickým tlakom. Hustota vzduchu je $\rho =$ 1,2 kg/m^3 a dynamická viskozita $\mu = 1{,}79\ 10^{-5}$ Pa$\cdot$s. Treba určiť rýchlostný profil plne rozvinutého ustáleného prúdenia vzduchu v potrubí a veľkosť trecieho koeficientu pre odhad dĺžkovej tlakovej straty.

Riešenie

Prípravné výpočty

Jedná sa o turbulentné prúdenie pretože Reynoldsovo číslo je

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u_0 d}{\mu} = \frac{1{,}2\cdot 1\cdot 0{,}2}{1{,}79\cdot 10^{-5}} = 13408 > 2300$$

Pri vstupe vzduchu do potrubia začne sa postupne prejavovať vplyv steny vytváraním medznej vrstvy a plne rozvinuté turbulentné prúdenie sa dosiahne len na určitej vzdialenosti od vstupu s názvom vstupná dĺžka L_0. Pre jej približnú hodnotu v prípade turbulentného prúdenia v kruhovom potrubí platí

$$L_0 \approx 4{,}4d\mathrm{Re}^{1/6} = 4{,}4\cdot 0{,}2\cdot 13408^{1/6} = 4{,}29 \text{ m}$$

Na dosiahlo plne rozvinutého prúdenia v riešenom potrubí, by teda mala stačiť táto dĺžka; aby ste však mohli jasne zaznamenať kvalitu ustálenosti rýchlostného profilu pri použitom modeli turbulencie, zvoľte dĺžku $L = 8$ m.

Úloha je pomerne jednoduchá a možno ju riešiť numerickým integrovaním rovníc modelu v celej oblasti vrátane medznej vrstvy (t.j. bez využitia stenových funkcií); potom ale diskretizácia oblasti v blízkosti steny musí byť dostatočne hustá. Pre bezrozmernú vzdialenosť ťažiska bunky susediacej so stenou by podľa (21.17) malo v takomto prípade platiť

$$y^+ \le 5$$

a pre skutočnú podľa (16) platí

$$y = \frac{\mu}{\rho u_\tau} y^+ = \frac{\mu}{\rho} y^+ \sqrt{\rho / \tau_w}$$

Pre určenie neznámeho stenového šmykového napätia τ_w v tomto vzťahu však treba najprv poznať trecí koeficient f. Vypočíta sa z (21.26) pre hladkú stenu ($\varepsilon = 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1{,}8\log_{10}\frac{6{,}9}{Re} = -1{,}8\log_{10}\frac{6{,}9}{13408} = 5{,}92 \qquad \rightarrow \qquad f = 0{,}029$$

Stenové šmykové napätie sa teraz už dá určiť z (21.21)

$$\tau_w = \tfrac{1}{2} c_f \rho u_0^2 = \tfrac{1}{8} f \rho u_0^2 = \tfrac{1}{8} 0{,}029 \cdot 1{,}2 \cdot 1^2 = 0{,}00435 \text{ Pa}$$

Takže pri voľbe $y^+ = 2$ pre vzdialenosť ťažiska bunky y potom platí

$$y = \frac{\mu}{\rho} y^+ \sqrt{\rho / \tau_w} = \frac{1{,}79\ 10^{-5}}{1{,}2} 2\sqrt{1{,}2 / 0{,}00435} = 0{,}00056 \text{ m}$$

Výpočtovú sieť teda treba vytvoriť tak, aby šírka bunky pri stene nebola väčšia ako 1 mm.

K tomuto postupu poznamenávame, že v postprocesore programu možno zobraziť vypočítanú hodnotu y^+, takže problém správnej hustoty siete pri stene možno riešiť (najmä pri malých úlohách) aj tak, že hustotu odhadneme a pokiaľ veľkosť y^+ nevyhovuje, zopakujeme výpočet so zmenenou hustotou.

Intenzita turbulencie na vstupe podľa (21.38) je (zadáva sa v percentách)

$$I = 0{,}16\mathrm{Re}^{-1/8} = 0{,}16 \cdot 13408^{-1/8} = 0{,}049$$

a modifikovaná turbulentná viskozita podľa (21.40) je

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} u_0 I \ell == \sqrt{\tfrac{3}{2}} u_0 \cdot I \cdot 0{,}7d = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot 1 \cdot 0{,}049 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}00084$$

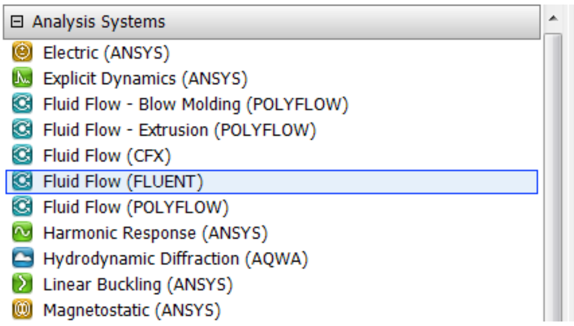
21.8 Riešenie úlohy pomocou programu *Ansys Fluent*

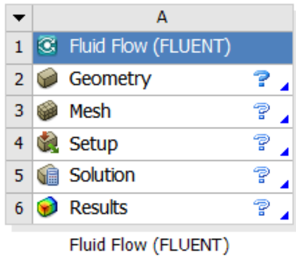
Po prípravných výpočtoch opíšeme teraz vlastné riešenie úlohy. Výpočtový model potrubia sa tvorí v predprocesore *Workbench* programu *Ansys Fluent* týmto postupom:

Na disku treba vytvoriť pracovný adresár pre ukladanie súborov úlohy (projektu) napr. s názvom *Fluent PA.*

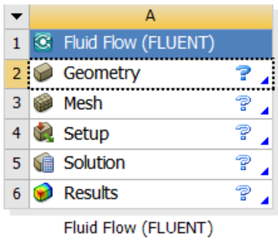
21.8.1 Geometria oblasti

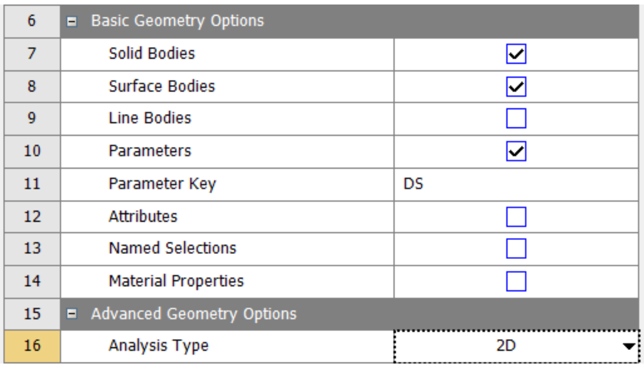
Otvorte *Workbench* a zvolte *Fluid Flow (FLUENT)* dvojitým kliknutím alebo pridržaním ľavým tlačítkom myši a prenesením napravo do naznačeného štvorca). Otvorí sa okno *Project Schematic*





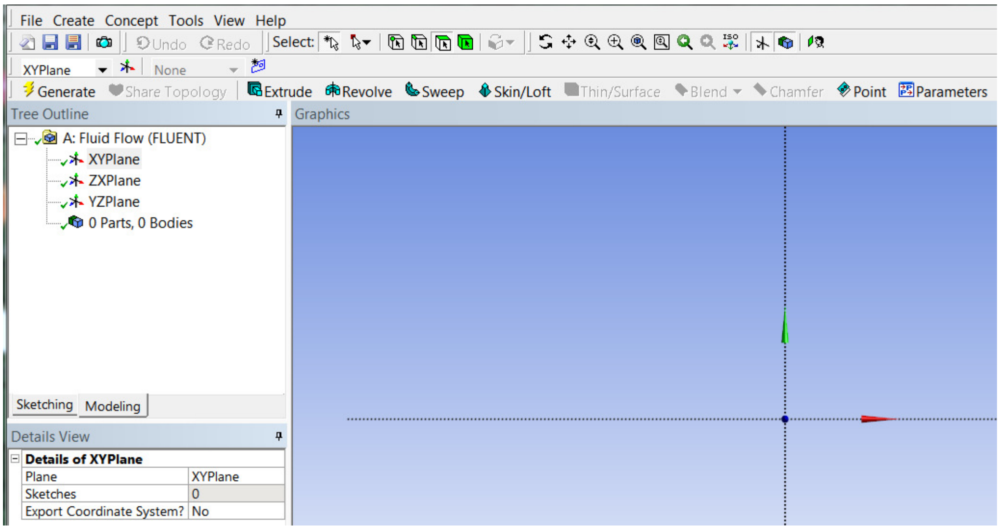
Kliknite *pravým* tlačítkom myši na *Geometry*, zvoľte *Properties*, prepnite typ úlohy na 2D



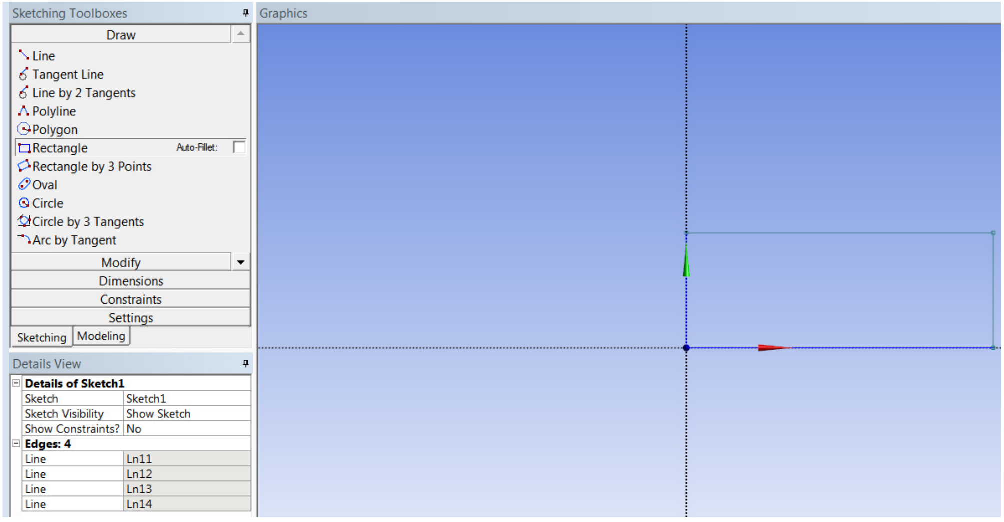


a zatvorte tabuľku.

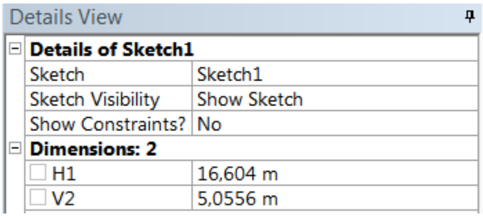
Kliknite dvakrát ľavým tlačítkom myši na *Geometry*, otvorí sa okno *Graphics* pre tvorbu geometrie a potvrďte dĺžkovú jednotku *Meter*. V *Tree Outline* zvolte rovinu *xy* (*XYPlane*) a ďalším kliknutím na os *Z* v symbole súradnicových smerov (v pravom dolnom rohu) zvoľte normálový pohľad na túto rovinu.



V *Tree Outline* zvoľte *Sketching*, potom *Rectangle.* Kliknite začiatok súradnicového systému a posunutím myši vytiahnite ľubovoľný obdĺžnik

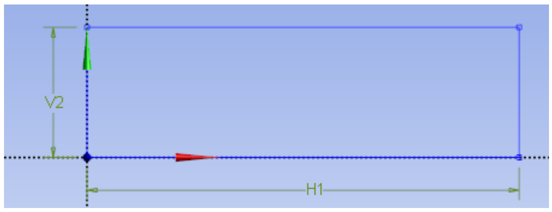


Zvoľte *Dimensions*, kliknutím a potiahnutím dlhej a potom krátkej strany obdĺžnika sa zakótujú strany obdĺžnika s ľubovoľnými rozmermi

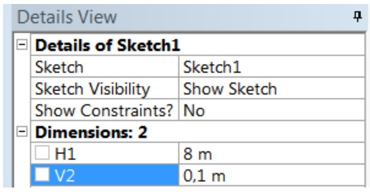


Details View

Details of Sketch1	
Sketch	Sketch1
Sketch Visibility	Show Sketch
Show Constraints?	No
Dimensions: 2	
H1	16,604 m
V2	5,0556 m

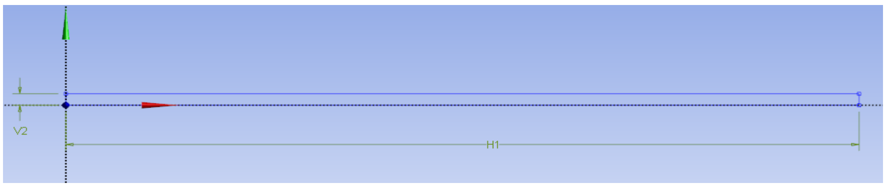


Ľubovoľné rozmery obdĺžnika v *Details View* zmeňte na rozmery polovice priemetu potrubia *H1* = 8 m, *V2* = 0,1 m prepísaním hodnôt v *Details View* a potvrdením *Enter* (podľa nastavenia programu používajte desatinnú čiarku alebo desatinnú bodku). Zväčšite obrázok pomocou .

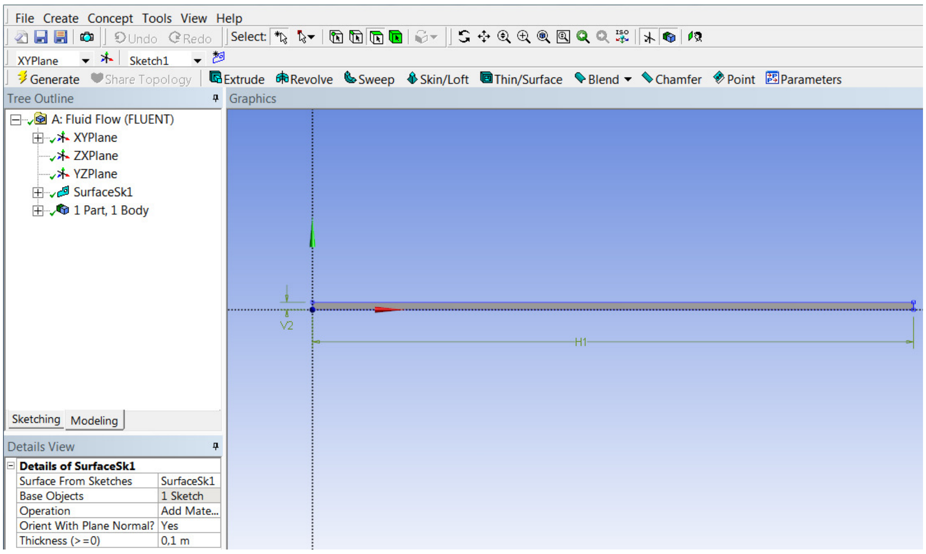


Details View

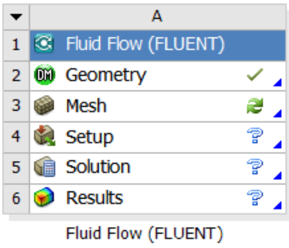
Details of Sketch1	
Sketch	Sketch1
Sketch Visibility	Show Sketch
Show Constraints?	No
Dimensions: 2	
H1	8 m
V2	0,1 m



Z čiarového obrázku urobte objekt (oblasť) voľbou *Concept*, *Surfaces from Sketches,* Kliknutím na čiaru obdĺžnika, *Apply* v *Base Objects, Thickness* = 0,1, *Enter*, *Generate*



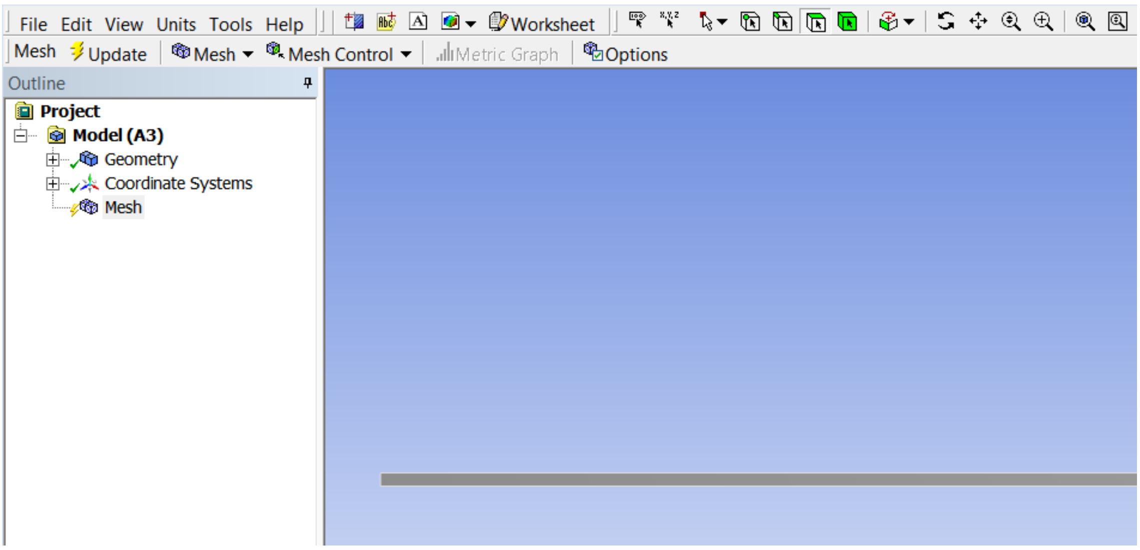
Zavrite okno *Graphics*. Stav riešenia úlohy v *Project Schematic teraz vyzerá takto*



Uložte aktuálny stav riešenia úlohy postupom *File*, *Save As*, otvorením pracovného adresára, nazvaním úlohy *Potrubie* a uložením príkazom *Save*. Vytvorí sa súbor na spúšťanie úlohy *Potrubie.wbpj* a ďalšie s úlohou súvisiace súbory.

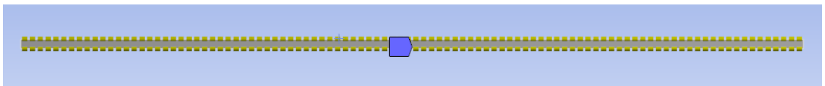
21.8.2 Tvorba siete a klasifikácia jej okrajov

Dvakrát kliknite na *Mesh* a trpezlivo počkjte kým sa otvorí okno pre tvorbu siete buniek. Zatvorte tabuľku *Meshing Options* a kliknite v *Outline* na Mesh .



Zvoľte *Mesh Control* a otvorte *Sizing*. Teraz treba zadať hustotu delenia na všetkých hranách (čiarach) oblasti. Prepnite filter na ukazovanie čiary a so stlačenou klávesou *Ctrl* kliknutím označte obe dlhšie strany obdĺžnika (musia sa pri tom sfarbiť). V *Details* okne kliknite riadok *Geometry* a povrďte označené hrany s *Apply*. Zmeňte *Behavior* na *Hard* (aby editor presne dodržal počet delení čiar) a *Type* na *Number of Divisions.* Zadajte 100 delení a potvrďte s *Enter.*

Details of "Edge Sizing" - Sizing	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	2 Edges
Definition	
Suppressed	No
Type	Number of Divisions
Number of Divisions	100
Behavior	Hard
Bias Type	No Bias



Pokiaľ by sme aj kratšie strany delili rovnomerne postupovali by sme rovnako. Budeme ich však deliť tak, aby hustota delenia stúpala smerom k stene, a preto bude postup trochu iný. Aby zhusťovanie išlo na oboch stranách v rovnakom smere, musíme každú stranu deliť zvlášť. Zvolíme 40 delení a zhustenie 1:10.

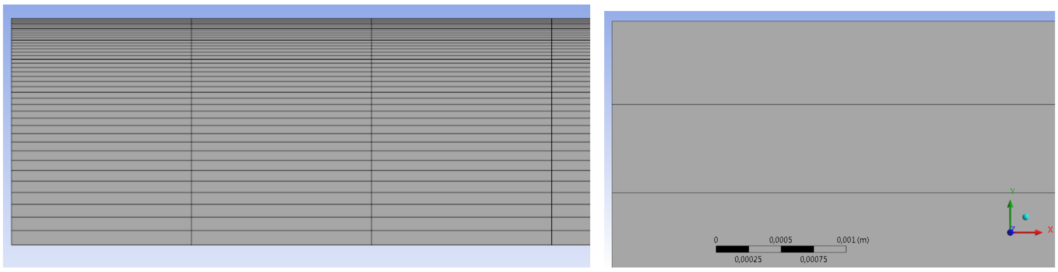
Najprv v *Mesh Control* zvoľte nové delenie *Sizing* a klikneme *pravú* kratšiu stranu obdĺžnika; v *Geometry* ju potvrďte s *Apply*. Detaily delenia zadajte podľa tohto obrázku

Details of "Edge Sizing 2" - Sizing	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Edge
Definition	
Suppressed	No
Type	Number of Divisions
Number of Divisions	40
Behavior	Hard
Bias Type	____ ___ _ _
Bias Factor	10,

Pre ľavú stranu obdĺžnika je postup rovnaký. Opäť v *Mesh Control* treba zvoliť nové delenie *Sizing* a kliknúť ľavú kratšiu stranu; v *Geometry* ju potvrdiť s *Apply*. Detaily delenia zadajte podľa tohto obrázku

Details of "Edge Sizing 3" - Sizing	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Edge
Definition	
Suppressed	No
Type	Number of Divisions
Number of Divisions	40
Behavior	Hard
Bias Type	_ _ ___ ____
Bias Factor	10,

V *Mesh Control* zvoľte metódu *Maped Face* Meshing, kliknite na obraz potrubia (plocha sa vysvieti) a v *Details of Sizig* po kliknutí v riadku *Geometry* potvrďte vybranú oblasť s *Apply*. Tým je delenie oblasti kompletne pripravené a treba už len zadať príkaz na vytvorenie siete. Otvorte v príkazovom riadku Mesh a zvoľte *Generate Mesh*. Po prebehnutí editácie zviditeľníte sieť kliknutím Mesh v *Outline* okne. Na jej zväčšenie použite *Zoom* . Pri postupnom zväčšovaní siete a porovnaní s dĺžkovým merítkom je vidieť, že šírka bunky pri stene je menšia ako 1 mm.

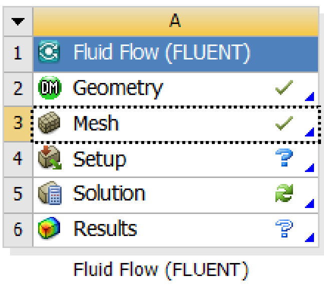


Ak sa pri tvorbe siete niektorý krok nevydaril, alebo nie ste spokojní s delením, možno každý *Sizing*, prípadne i *Mesh*, kliknúť pravým tlačítkom myši a po vymazaní vytvoriť znovu. Môžte tiež načítať uloženú geometriu a zopakovať celý postup tvorby siete.

Po vytvorení siete sa v okne *Meshing* robí aj klasifikácia všetkých okrajových čiar (pri 2D úlohe), resp. plôch (pri 3D úlohe), ako príprava pre zadávanie okrajových podmienok vo *Fluent*e. Riešime rotačne symetrickú úlohu, ktorá vznikne rotáciou vytvorených čiar a buniek okolo osi rotácie a na obdĺžniku teda treba označiť os rotácie, ďalej čiaru, z ktorej vznikne valcová stena a čiary, z ktorých sa vytvorí kruhová plocha vstupu a výstupu prúdiaceho vzduchu. Horná čiara obdĺžnika, pri ktorej je husté delenie, bude stena, dolná – je os rotácie, ľavá strana bude vstup a pravá výstup.

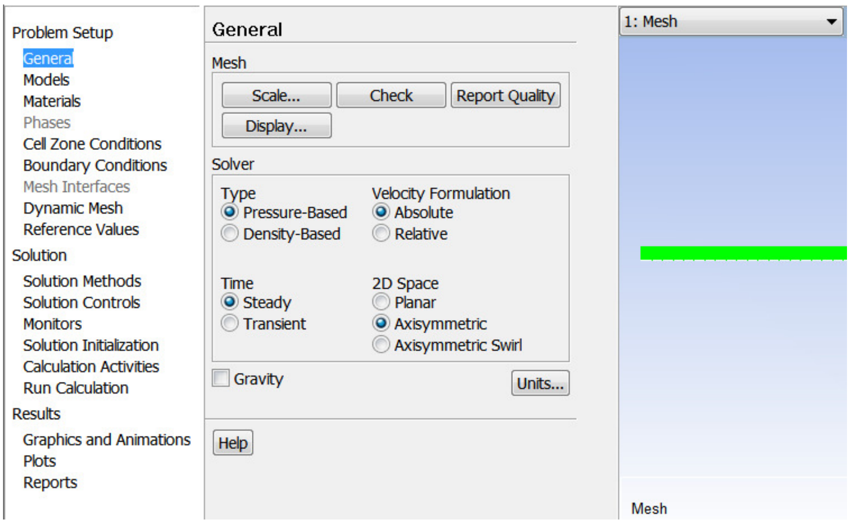
Kliknite ľavým a potom pravým tlačítkom myši ľavú stranu obdĺžnika (ukazovací filter musí byť nastavený na čiary) a v tabuľke otvorte *Create Named Selection*, názov prepíšte na *vstup* a potvrďte s OK. Rovnakým postupom nazvite pravú stranu *vystup*, hornú stranu *stena* a dolnú *os*.

Zatvorte *Meshing* Okno a v skupine príkazov *Workbench* kliknite príkaz Update Project , čím pripravíte úlohu pre program *Fluent*. Uložte úlohu príkazom *Save.* Stav riešenia by mal teraz vyzerať takto



21.8.3 Zadanie úlohy vo Fluente

Otvorte *Fluent* dvojitým kliknutím na *Setup* a úvodné okno po zvolení dvojitej presnosti čísiel (*Double Precision*) zatvorte s OK. Otvorí sa pracovné okno programu, kde v časti *2D Space* zvoľte *Axisymetric*



V okne *General* môžte spustiť kontrolu siete (*Check*); vo výpise zoznamu kontrol by sa nemali nemali obiaviť žiadne závady. Je užitočné urobiť tiež kontrolu označenia okrajov oblasti pomocou *Display*. Mali by sa tam objaviť názvy okrajových čiar *vstup*, *vystup*, *os rotacie* a *stena*.

Vo voľbách *Models* treba vysvietiť *Viscouos-Laminar* a pomocou *Edit* zvoliť turbulentný Spalart-Allmarasov model. Objaví sa okno pre zadanie jeho parametrov, ktoré sme stručne opísali vyššie pri informácii o tomto modeli; zavrite ho bez akejkoľvek zmeny.

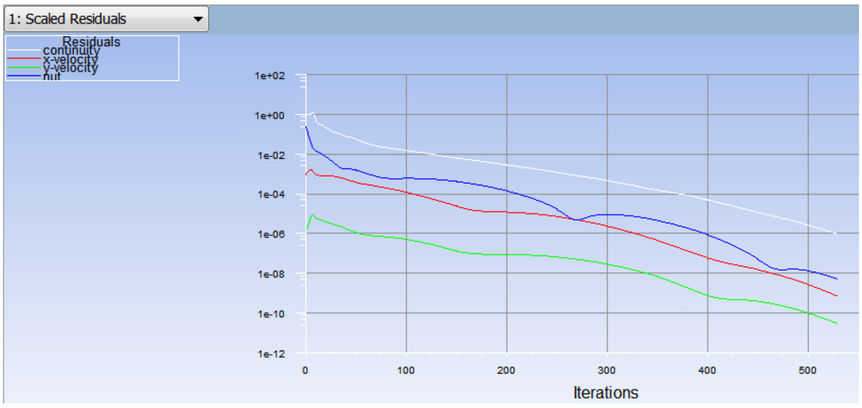
Ďalej zvoľte zadanie vlastností tekutiny (*Materials*), kde vysvieťte *air* a zvoľte *Create/Edit*. Zmeňte hustotu na 1.2 a viskozitu na μ=1.79 e^{-5}, potvrďte zmeny s *Change/Create* a zavrite okno. (Vo Fluente pravdepodobne budete musieť používať desatinnú bodku; treba si zadanie overiť opätovním otvorením.)ý

V okne *Boundary Conditions* zvoľte *os,* jej *Type* zmeňte na *axis* a cez *Edit* potvrďte. Analogicky označte *stenu* ako *wall* a *vystup* ako *pressure-outlet* s *Gauge Pressure* = 0. Pre *vstup* zvoľte *velocity inlet* a zadajte vstupnú rýchlosť (*Velocity Magnitude*) rovnú 1 m/s. Turbulentné okrajové podmienky v *Specification Method* zadajte pomocou *Modified Turbulent Viscosity* s vypočítanou hodnotou 0.00084.

V *Solution Methods* zmeňte len *Momentum* na *Second Order Upwind*.

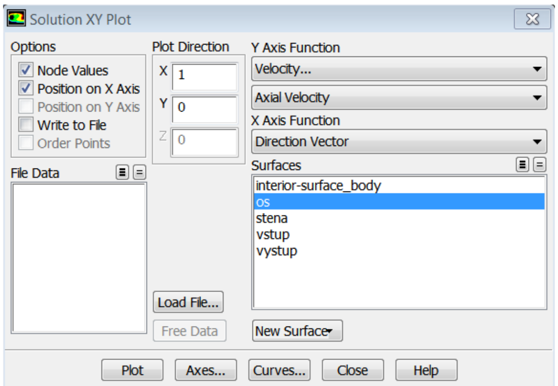
V okne *Monitors* po voľbe *Residuals – Print, Plot* všetky konvergenčné kritériá zmeňte na 0.000001 a potvrďte s *OK*.

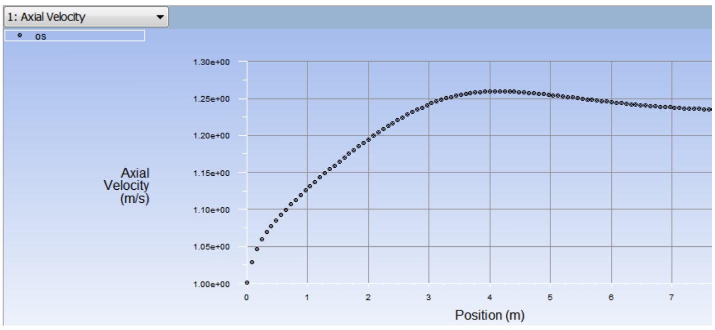
V *Solution Initialization* zadajte pre *Compute from: vstup*, 0.00084 pre *Modified Turbulent Viscosity* a kliknite na *Initialize*. Otvorte *Run Calculation* zadajte *Number of Iterations* = 1000 a odštartujte výpočet s *Calculate* (dvojitým kliknutím). Priebeh zvyškových hodnôt primárnych premenných ukáže monitor



21.8.4 Analýza výsledkov (Fluent postprocesor)

Z výsledkov overte najprv ustálenosť prúdenia (rýchlostného profilu). Zvoľte *Plots, XY Plot, Set Up...*, v *Y Axis Function* navoľte *Velocity...*, a *Axial Velocity*. V *Surfaces* vyznačte *os* a kliknite *Plot*

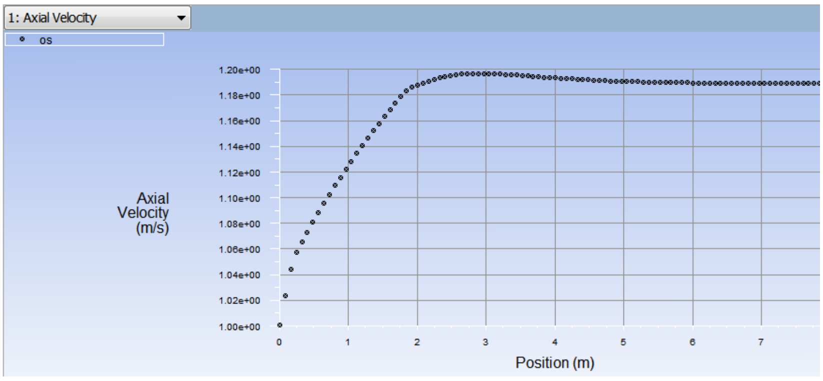




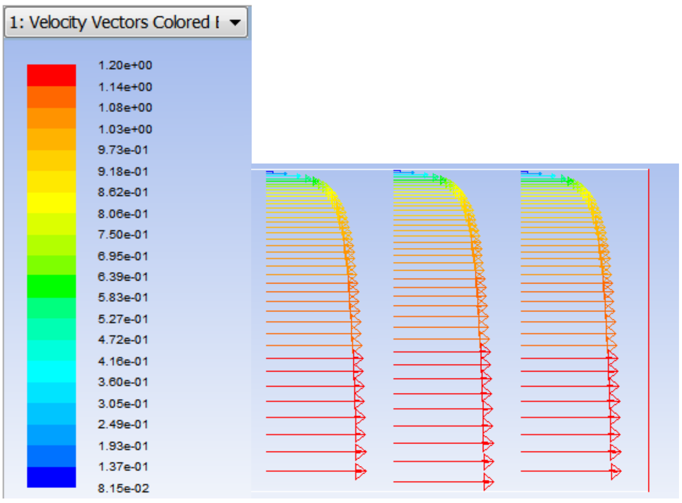
Tvar krivky aj hodnoty by ste mali dostať rovnaké. Rôzne vylepšenia obrázku si môžete vyskúšať vo voľbách *Axes...* a *Curves...* Je vidieť, že zhruba po 4 metroch už dochádza k ustáleniu charakteristík prúdenia, čo tento jednorovnicový model zvláda s určitými ťažkosťami.

Na modelovanie turbulencie v blízkosti steny pre nízku (turbulentnú) hodnotu Reynoldsovho čísla (*Low-Reynolds-Number Turbulent Modeling*) možno využiť aj dvojrovnicový štandardný *k-*ε model s voľbou *Enhanced Wall Treatment* v okrajových turbulentných podmienkach. Zvoľte *Models, Viscous, k-epsilon (2 eqn), Standard, Enhanced Wall Treatment, OK* a zavrite okno. Zmeňte okrajové podmienky voľbami *Boundary Conditions*, *vstup*, *Edit...*, *Specification Method = Intensity and Hydraulic Diameter* a zadajte *Turbulent Intensity* = 4.9, *Hydraulis Diameter* = 0.2. Teraz treba ešte znovu nastaviť začiatočné podmienky a preto zvoľte *Solution Initialization,* *Initialize* a potvrďte *Warning* (v tomto prípade je to upozornenie, že predchádzajúce voľby nie sú uložené). Nasleduje voľba *Run Calculation* a *Calculate*

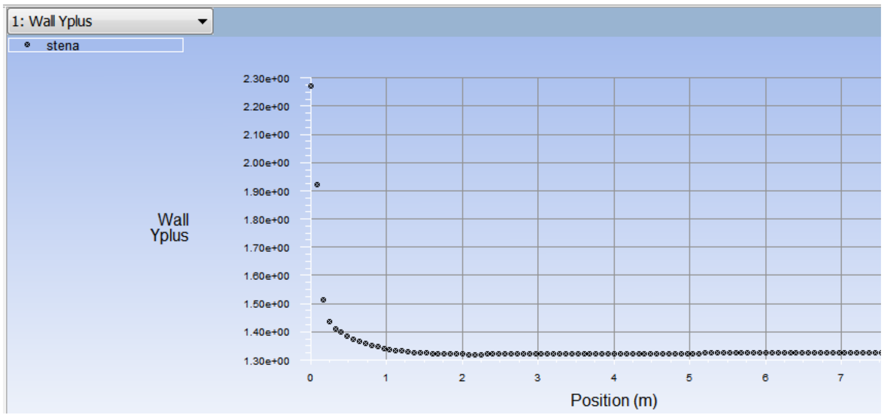
Teraz bez väčšej námahy zopakujeme už nastavené kreslenie priebehu axiálnej rýchlosti na osi rotácie po celej dĺžke potrubia príkazmi *Plots, XY-Plot, Set Up..., Plot* s presnejším výsledkom ako pri predchádzajúcom modeli



Pozrite si profil rýchlosti v časti potrubia s ustáleným prúdením. Zvoľte *Graphics and Animations, Vectors, Set up..., Vectors of Velocity, Color by Velocity..., Axial Velocity.* Ďalej v *Surfaces* vyznačte *interior surface_body* a *Display.* Miesto, ktoré vás zaujíma zväčšite pomocou  alebo stredného tlačítka myši

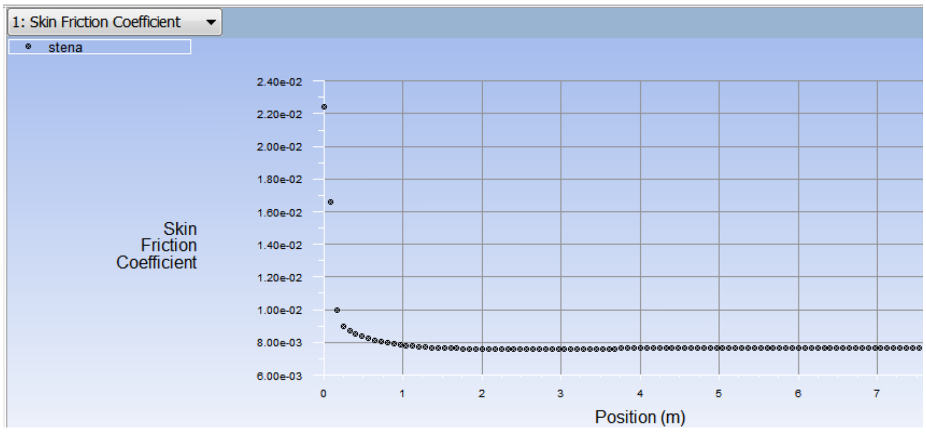


Skontrolujte ešte hodnotu normalizovanej vzdialenosti ťažiska y^+ najbližších buniek pri stene po celej dĺžke potrubia, ktorá by mala spĺňať podmienku $y^+ \leq 5$. Zvoľte *Plots, XY Plot, Set Up...*, v *Y Axis Function* vyznačte *Turbulence...*, a *Wall Yplus*. V *Surfaces* vyznačte *stena* a kliknite *Plot*



Ako vidieť, podmienka je splnená.

Analogicky možno analyzovať trecí koeficient. Zvoľte *Plots, XY Plot, Set Up...*, v *Y Axis Function* vyznačte *Wall Fluxes...*, a *Skin Friction Coefficient*. V *Surfaces* vyznačte *stena* a kliknite *Plot*



Z obrázku po odčítaní vyplýva

$$c_f = 0{,}0077 \qquad \rightarrow \qquad f = 4c_f = 0{,}0308$$

Zatvorte *Fluent* i *Project Schementic* s potvrdením, že chcete zmenený projekt uložiť. Pri budúcom pokračovaní v analýze výsledkov tejto úlohy stačí v pracovnom adresári kliknúť na súbor *Potrubie.wbpj* a po kompletnom otvorení úlohy kliknúť v *Project Schematic* na *Solution.* Otvoria sa voľby pre *Fluent* a po prípadných zmenách v nastavení a ich potvrdení v *Initialize* možno spustiť nový výpočet.

22 Prenos tepla konvekciou (prúdením)

Prenos tepelnej energie prúdením tekutiny sa nazýva *konvekcia*. Vo všeobecnosti sa tým nemyslí len prenos tepla objemovým prúdom tekutiny (advekcia), ale zároveň aj súčasný prenos tepla vedením (tepelnou difúziou) prebiehajúci v pohybujúcom sa objeme tekutiny najmä v blízkosti steny účinkom gradientov teploty.

Ak prúdenie tekutiny pri prenose tepla spôsobujú len vztlakové sily vyvolané rozdielnymi mernými hmotnosťami teplej a studenej tekutiny v gravitačnom poli, potom sa takáto konvekcia nazýva *voľná* (*prirodzená*). Ak pohyb tekutiny vyvolávajú vonkajšie sily (od čerpadla, ventilátora a pod.) potom je to konvekcia *nútená* (*umelá*). Prenos tepla spojený s varom a kondenzáciou tekutín sa tiež zaraďuje do kategórie tepelnej konvekcie.

Už priamo z názvu vyplýva, že tento typ prenosu tepla úzko súvisí s teóriou prúdenia a je pochopiteľné, že táto kapitola nadväzuje na teóriu a numerickú analýzu dynamiky tekutín. Opäť je treba rozlišovať laminárne a turbulentné prúdenie, nedá sa vyhnúť významnej úlohe medznej vrstvy a, samozrejme, do výpočtového procesu sa už teraz okrem rovnice kontinuity a pohybových rovníc zapája aj rovnica energie.

I keď nás zaujíma predovšetkým aplikácia numerických metód CFD na riešenie základných diferenciálnych rovníc prúdenia s konvektívnym prenosom tepla, je užitočné sa aspoň trochu zoznámiť so základným postupom približného riešenie jednoduchších úloh pomocou analyticko-experimentálne určených korelácií platných pre tento spôsob prenosu tepla. Je to vhodný úvod do tejto problematiky a príležitosť zopakovať si základné pojmy z tejto oblasti.

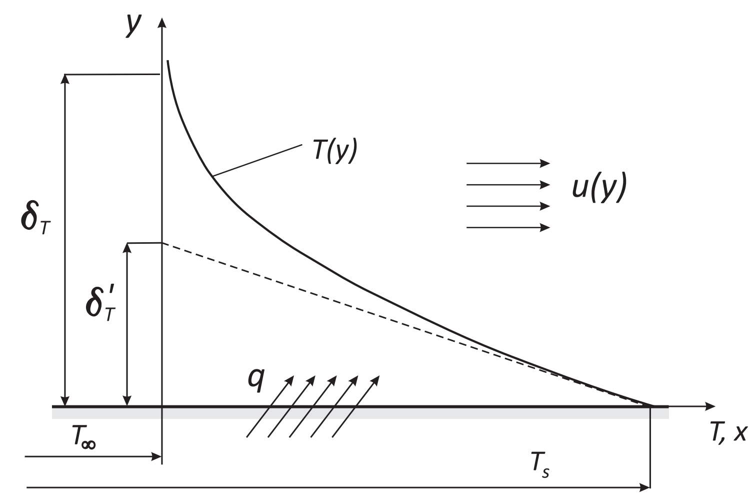
Pri konvekcii je bežné, že veľký počet nezávislých premenných sa v analyticko-experimentálnych vzťahoch redukuje pomocou bezrozmerných podobnostných čísiel. Dôležitou charakteristikou samotného prúdenia je Reynoldsovo číslo [D19], ktoré vyjadruje pomer medzi zotrvačnými a viskóznymi silami

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{uL}{\upsilon} \qquad [-] \tag{22.1}$$

kde ρ [kg] je hustota tekutiny, u [m/s] je charakteristická rýchlosť prúdenia, L [m] je charakteristický rozmer steny (resp. telesa), μ [kg/(m·s)] je dynamická viskozita tekutiny a $\upsilon = \mu/\rho$ $[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$ kinematická viskozita. Keď je s prúdením spojený aj prenos tepla konvekciou, stretneme sa z ďalšími charakteristikami, ktoré si vysvetlíme podrobnejšie.

22.1 Tepelná medzná vrstva

Uvažujme stenu, v ktorej okolí v smere x prúdi tekutina (obr. 22.1). Teplota tekutiny veľmi ďaleko od steny je T_∞ a teplota steny $T_s > T_\infty$ sa prívodom tepla do steny udržuje na konštantnej hodnote. Jedná sa teda o jednoduchý prípad ohrievania prúdiacej tekutiny; zo steny do tekutiny prúdi tepelná energia s hustotou q $[\mathrm{W/m^2}]$.



Obr. 22.1 *Tepelná medzná vrstva*

Pretože priamo pri stene je rýchlosť prúdenia tekutiny nulová, je oprávnený predpoklad, že teplota tekutiny pri stene je tu tiež T_s . Tieto rýchlostné a teplotné pomery pri stene vytvoria pri vyšších hodnotách Re tenkú *tepelnú medznú vrstvu* s vysokým teplotným spádom (teplotným gradientom) o hrúbke δ_T . Hrúbka tepelnej medznej vrstvy je *y*-ová (resp. normálová, pri zakrívenej stene) vzdialenosť pri ktorej už teplota tekutiny $T \equiv T(y)$ prakticky nie je ovplyvnená teplotou steny a platí

$$T_s - T = 0{,}99(T_s - T_\infty) \qquad (22.2)$$

Rýchlosť prúdiacej tekutiny v tepelnej medznej vrstve je malá, prevláda tu prenos tepla vedením podľa Fourierovho vzťahu a pri nulovom gradiente teploty v smere x platí

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy} \qquad (22.3)$$

kde λ [W/(mK)] je *súčiniteľ tepelnej vodivosti tekutiny*.

Funkciu $T(y)$ v (22.3) zlinearizujeme pomocou hraničných teplôt a dostaneme známy a často využívaný Newtonov zákon ochladzovania

$$q = \frac{\lambda}{\delta_T'}(T_s - T_\infty) = h(T_s - T_\infty) \qquad [W/\mathrm{m}^2] \qquad (22.4)$$

s *koeficientom prestupu tepla konvekciou* h [W/(m^{2}K)].

I keď vzťah (22.4) predstavuje silné zjednodušenie problematiky konvektívneho prestupu tepla, možno ho úspešne použiť pri mnohých praktických problémoch. Rozhodujúce je dostatočne presné určenie koeficientu prestupu tepla pri konkrétnej úlohe. Koeficient h totiž nezávisí len od vlastností tekutiny (hustota, viskozita, tepelná vodivosť, merné teplo), ale závisí aj od viacerých ďalších parametrov, ako je typ prúdenia (laminárne, turbulentné), tvarová a povrchová štruktúra steny, tlakový gradient a teplota.

22.2 Nusseltovo číslo

Priamo pri stene možno hustotu tepelného toku vyjadriť podľa (22.3) a porovnať s (22.4)

$$-\lambda \frac{d}{dy}(T - T_s)\bigg|_{y=0} = h(T_s - T_\infty) \tag{22.5}$$

Po vynásobení oboch strán rovnice charakteristickým rozmerom steny (resp. telesa) L a úprave dostávame bezrozmerný pomer

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} = \frac{\left.\dfrac{d(T - T_s)}{dy}\right|_{y=0}}{\dfrac{T_s - T_\infty}{L}} \qquad [-] \tag{22.6}$$

kde $Nu = hL/\lambda$ je *Nusseltovo číslo*, ktoré vyjadruje pomer medzi konvektívnym a konduktívnym prenosom tepla v danej lokalite za tých istých podmienok. L je charakteristická dĺžka pre daný problém. Malé hodnoty Nusseltovho čísla blízko jednotkovej hodnoty naznačujú laminárne prúdenie s malým konvektívnym odvodom tepla a významným vplyvom kondukcie. Vysoké hodnoty (100 až 1000) sa objavujú pri turbulentnom prúdení s prevládajúcim konvektívnym prestupom tepla a malým podielom kondukcie. Ak sa lokálne veličiny h a Nu pozdĺž steny menia, v takom prípade sa možno stretnúť aj s integrálne spriemerovanými hodnotami $\bar{h}$ (a $\overline{Nu}$) po príslušnej ploche S alebo príslušnej dĺžke ℓ

$$\bar{h} = \frac{1}{S}\int_{(S)} h dS \qquad \bar{h} = \frac{1}{\ell}\int_{(\ell)} h d\ell \tag{22.7}$$

22.3 Prandtlovo číslo

Tretiu bezrozmernú charakteristiku a jej fyzikálny význam pri nútenej konvekcii možno objasniť pri aplikácii energetickej rovnice na podmienky platiace v oblasti tepelnej medznej vrstvy prúdiaceho média. Táto rovnica pre ustálené nestlačiteľné 2D prúdenie tekutiny bez objemových síl má tvar

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] - \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) \tag{22.8}$$

kde c_p [J/(kgK)] je izobarické merné teplo tekutiny.

Keď sa do tejto rovnice zavedú zjednodušujúce predpoklady platné v oblasti medznej vrstvy

1. Medzná vrstva je tenká ($Re \gg 1$, rýchlosť v smere y zanedbateľná)
2. Medzná vrstva je laminárna
3. Voľná konvekcia je zanedbateľná
4. Vlastnosti tekutiny sú konštantné - nezávislé od teploty
5. Tlakové účinky sú zanedbateľné

dostaneme energetickú rovnicu pre oblasť tepelnej medznej vrstvy

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{22.9}$$

Ľavá strana tejto rovnice predstavuje zmenu vnútornej (tepelnej) energie objemovej jednotky tekutiny medznej vrstvy. Táto zmena je vyvolaná (a je v rovnováhe) so zmenou tepelnej energie vyvolanej kondukciou (prvý člen na pravej strane rovnice) a väčšinou zanedbateľnou zmenou tepelnej energie vyvolanej disipačným efektom vzájomného trenia vrstiev viskóznej tekutiny (druhý člen - uvažuje sa obyčajne len pri extrémne viskóznych tekutinách). Po podelení rovnice s ρc_p ju možno upraviť na tvar

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\upsilon}{Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\upsilon}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{22.10}$$

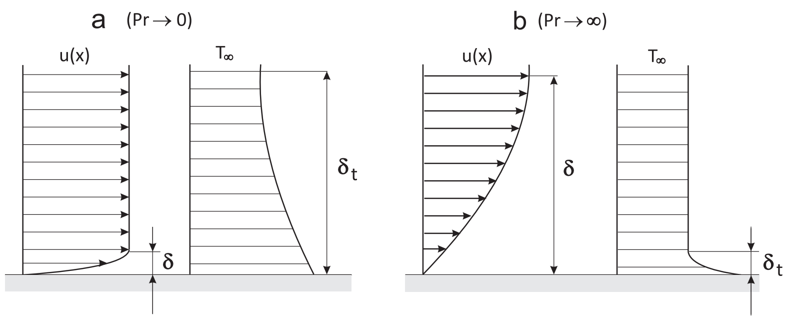
kde

$$Pr=\frac{\mu c_p}{\lambda}=\frac{\upsilon}{\alpha} \qquad [-] \tag{22.11}$$

je *Prandtlovo číslo* a $\alpha=\lambda/(\rho c_p)$ je tepelná difuzivita (súčiniteľ teplotnej vodivosti tekutiny).

Prandtlovo číslo na rozdiel od Reynoldsovho a Nusseltovho čísla nezávisí od geometrie steny alebo telesa, je to charakteristika samotnej tekutiny. Vyjadruje pomer medzi kinematickou viskozitou υ (charakterizuje difúziu hybnosti v tekutine) a súčiniteľom teplotnej vodivosti α (charakterizuje difúziu tepla v tekutine).

Fyzikálny význam Prandtlovho čísla a jeho vplyv na konvekciu možno najlepšie ilustrovať pri jeho extrémnych hodnotách. Pri veľmi malom Prandtlovom čísle (napr. ortuť) malá hodnota viskozity spôsobí rýchly útlm brzdiaceho vplyvu steny, takže hrúbka medznej dynamickej vrstvy δ je malá; a naopak vysoká termálna difuzivita zapríčiní malý gradient teploty pri stene a hrúbka termálnej medznej vrstvy δ_t je relatívne veľká (obr. 2 a). Pri veľmi vysokej hodnote Prandtlovho čísla (napr. motorový olej) vysoká viskozita rozšíri oblasť brzdiaceho účinku steny (hrúbka dynamickej medznej vrstvy δ je relatívne veľká), nízka tepelná difuzivita vyvolá pri stene vysoký gradient teploty s malou hrúbkou tepelnej medznej vrstvy δ_t (obr. 22.2 b) s dôsledkom na veľkosť h i Nusseltovo číslo.



Obr. 22.2 *Porovnanie priebehu rýchlosti a teploty v medznej vrstve pri prúdení tekutiny s veľmi malým a veľmi veľkým Prandtlovým číslom*

22.4 Prestup tepla konvekciou v kruhovom potrubí – všeobecne platné vzťahy

Existuje veľké množstvo empirických vzťahov pre určovanie koeficienta prestupu tepla h, ktoré sa zoskupujú podľa toho

- či ide o laminárne alebo turbulentné prúdenie
- či ide o interné prúdenie alebo obtekanie telesa
- aká je geometria obtekaného telesa alebo aký je prierez rúry (kanálu)
- či ide o nútenú konvenciu (so zanedbateľným vplyvom prirodzenej konvekcie) alebo ide o prirodzenú konvekciu

V tejto časti však uvedieme len niekoľko vzťahov využívaných pri približnej analýze prestupu tepla medzi prúdom tekutiny a stenou kruhového potrubia s dĺžkou L a priemerom $D=2R$. Výsledky dosiahnuté podľa týchto analýz a korelácií porovnáme s riešením pomocou programu Ansys Fluent. Táto voľba vyplýva jednak z praktického významu analýz prúdenia v kruhovom potrubí a tiež z toho, že vnútrajšok potrubia i tvar jeho vnútornej steny, vzhľadom na rotačnú symetriu, sa v programe ľahko graficky edituje, čím sa prácnosť tejto rutinnej (nefyzikálnej) činnosti znižuje na minimum.

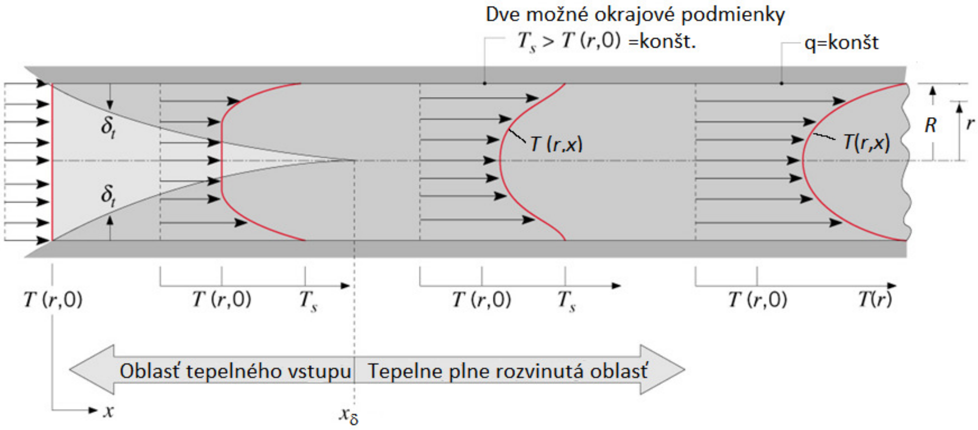
Na vstupe do potrubia budeme predpokladať prúdenie nestlačiteľnej newtonovskej tekutiny s rovnomernou vstupnou hodnotou rýchlosti u_{in} a tiež rovnomernú teplotu T_{in}. Ak teplota steny bude väčšia ako T_{in}, potom ustálený teplotný profil tekutiny v potrubí možno charakterizovať podľa obr. 22.3. Rovnomernosť teploty tekutiny na vstupe $T_{in}=T(r,0)$ účinkom narastania hrúbky tepelnej medznej vrstvy δ_t postupne v *oblasti tepelného vstupu* na vstupnej dĺžke x_δ vymizne a za touto vzdialenosťou sa ustáli tzv. *tepelne plne rozvinutá oblasť*, kde tepelná medzná vrstva zasahuje celý prierez potrubia. Teplota tekutiny $T(r,x)$ sa mení nielen v smere prúdenia ale aj v radiálnom smere; táto jej zmena závisí od termálnych okrajových podmienok, od typu prúdenia a efekte vstupnej dĺžky.

Pri prúdení v potrubí (vo všeobecnosti pri internom prúdení) nemáme k dispozícii teplotu T_∞ ako pri externom prúdení a vzťah (22.4) sa modifikuje na

$$q(x)=h(x)\left[T_s(x)-T_m(x)\right] \qquad [W/\mathrm{m}^2] \tag{22.12}$$

kde T_m je *stredná (priemerná) teplota* tekutiny v príslušnom prierezu, T_s je teplota steny a h je lokálny koeficient prestupu tepla. Na rozdiel od externého prúdenia s konštantnou teplotou T_∞ sa teplota T_m ohrievanej alebo ochladzovanej tekutiny po dĺžke potrubia mení.

- Hustota tepelného toku prenášaná do alebo z tekutiny je po dĺžke steny potrubia konštantná ($q=konšt.$, je to klasický prípad rovnomerného ohrievania alebo ochladzovania steny potrubia)
- Teplota steny je konštantná ($T_s=konšt.$, napr. pri vare alebo kondenzovaní kvapaliny na vonkajšej stene potrubia)



Obr. 22.3 *Vývoj teplotného profilu ohrievaného prúdu tekutiny v potrubí s kruhovým prirezom*

Väčšinu praktických úloh prenosu tepla pri prúdení tekutiny v potrubí podľa termálnej okrajovej podmienky pre stenu potrubia možno zaradiť do dvoch kategórií:

O tepelne plne rozvinutej oblasti (obr. 22.3) hovoríme vtedy, keď sa v potrubí ustáli *bezrozmerný* teplotný profil a platí

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_s(x)-T(x,r)}{T_s(x)-T_m(x)}\right]=0 \qquad \rightarrow \qquad \left[\frac{T_s(x)-T(x,r)}{T_s(x)-T_m(x)}\right]=konšt. \tag{22.13}$$

Potom pomocou (22.5) možno zistiť, že v tejto oblasti je koeficient prestupu tepla konvekciou h konštantný

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T_s-T}{T_s-T_m}\right)\bigg|_{r=R}=konšt.=\frac{-\dfrac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=R}}{T_s-T_m}=\frac{h}{\lambda}=konšt. \tag{22.14}$$

pričom sa zanedbáva prípadná malá zmena súčiniteľa tepelnej vodivosti tekutiny účinkom zmeny teploty ($\lambda = konšt.$). Tento poznatok možno využiť pri dlhom potrubí so zanedbaním rozdielnych pomerov na relatívne malej vstupnej dĺžke.

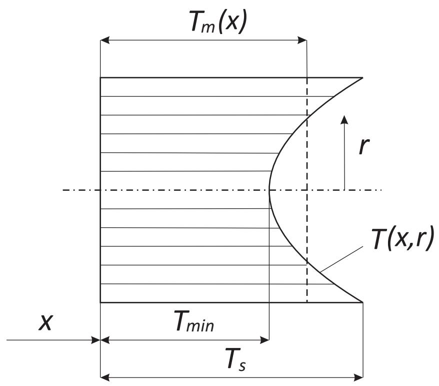
Dĺžku oblasti tepelného vstupu (termálnu vstupnú dĺžku) x_δ možno odhadnúť pomocou týchto vzťahov

$$\begin{aligned} x_\delta &\approx 0{,}053\,\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\cdot D && \text{pre laminárne prúdenie } (q=\text{konšt.})\\ x_\delta &\approx 0{,}037\,\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\cdot D && \text{pre laminárne prúdenie } (T_s=\text{konšt.})\\ x_\delta &\approx 10D && \text{pre turbulentné prúdenie} \end{aligned} \tag{22.15}$$

kde charakteristická dĺžka v Reynoldsovom čísle (22.1) je teraz vnútorný priemer potrubia a potrebné charakteristiky tekutiny by mali byť určené pre priemernú teplotu na tomto úseku.

22.4.1 Stredná (priemerná) teplota T_m

Keď sa tekutina pri prúdení v potrubí ohrieva (alebo ochladzuje), potom sa jej teplota $T(x,r)$ v ľubovoľnom priečnom reze mení od teploty T_s pri stene po minimálmu teplotu (alebo maximálnu pri chladení) v strede prierezu. Pri približnom riešení konvekcie pomocou empirických vzťahov (pri približnom výpočte h) sa táto situácia zjednodušuje tak, že sa v priereze uvažuje stredná (priemerná) hodnota teploty $T_m(x)$ (obr. 22.4). Jej veľkosť sa určuje pomocou zákona o zachovaní energie. To znamená, že tepelná energia, ktorú prúd transportuje cez prierez S za časovú jednotku pri reálnom prúdení, sa musí rovnať energii, ktorá by prešla cez prierez pri konštantnej teplote T_m. Túto podmienku pomocou obr. 4 možno pre prierez S s normálovou funkciou rýchlosti $u(r,x)$ a hmotnostným prietokom m [kg/s] vyjadriť v tvare



Obr. 4 *Stredná (priemerná) teplota* $T_m(x)$ *pri ohrievaní tekutiny*

$$\dot{E}_{tek} = mc_pT_m = \int_{\dot{m}} c_pT_m dm = \int_S \rho c_p TudS \qquad [W]$$

Pre kruhový prierez s konštantnou hustotou ρ, konštantnou hodnotou merného tepla c_p a polomerom R potom dostávame

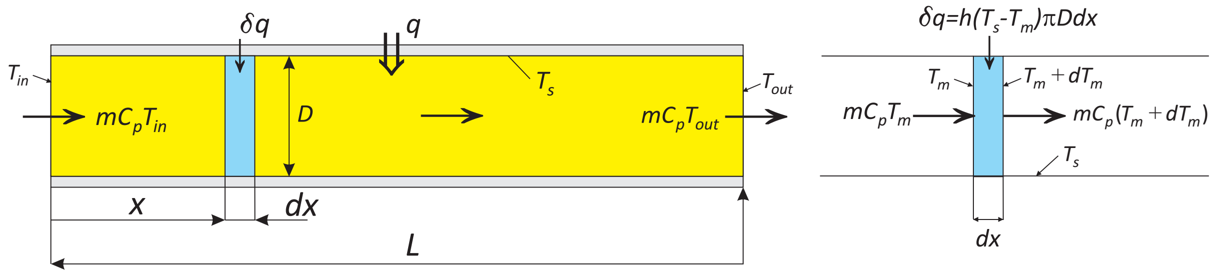
$$T_m(x) = \frac{\int_m c_pT\delta m}{mc_p} = \frac{\int_0^R c_pT\rho u 2\pi rdr}{\rho u_{in}\pi R^2 c_p} = \frac{2}{u_{in}R^2}\int_0^R T(r,x)u(r,x)rdr \qquad (22.16)$$

z čoho vidieť, že stredná teplota tekutiny v potrubí sa po dĺžke potrubia mení a na jej určenie je potrebné poznať funkcie T a u, ktoré vo všeobecnosti nie sú k dispozícii.

Ďalšie cenné informácie o teplotných pomeroch v potrubí a teplote T_m možno získať z energetickej bilancie potrubia ako celku (vo forme kontrolného objemu, obr. 22.5). Množstvo tepla $\dot{Q}$, ktoré za jednotku času prejde stenou potrubia sa musí rovnať prírastku tepelnej energie tekutiny za jednotku času

$$\dot{Q} = q\pi DL = mc_p(T_{out} - T_{in}) \qquad [W] \qquad (22.17)$$

kde $q\,[W/m^2]$ je hustota tepelného toku cez stenu potrubia a T_{in}, T_{out} sú *stredné* hodnoty teploty na vstupnom a výstupnom konci potrubia.



Obr. 22.5 *Tepelné a teplotné pomery v potrubí*

22.4.2 Konštantný tepelný tok

V prípade, že q = konšt., možno zo (22.17) vyjadriť strednú teplotu tekutiny na výstupe

$$T_{out} = T_{in} + \frac{q\pi DL}{mc_p} \tag{22.18}$$

Ak teplotnú zmenu c_p zanedbávame, sú to všetko konštanty a vidieť, že v takomto prípade stredná teplota lineárne narastá pozdĺž potrubia (obr. 22.6)

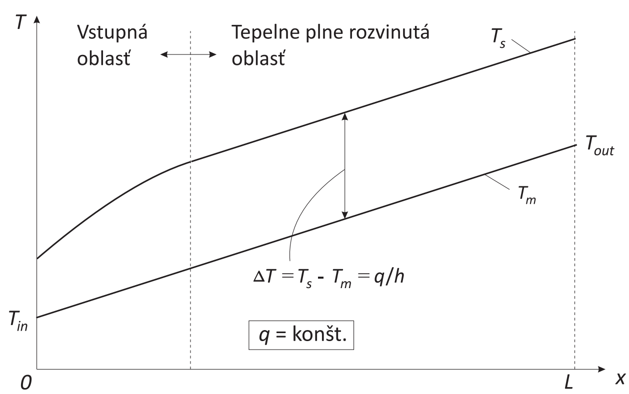
$$T_m(x) = T_{in} + \frac{q\pi Dx}{mc_p} \qquad 0 \le x \le L \tag{22.19}$$

Potom už možno vyjadriť aj teplotu steny pomocou (22.12)

$$T_s(x) = T_m(x) + \frac{q}{h(x)} \tag{22.20}$$

V *tepelne plne rozvinutej oblasti* stredná teplota narastá lineárne, a pretože podľa (22.14) je h konštantné, potom pri q = konšt., aj $T_s - T_m = konšt.$ Predpokladá sa pritom, pravda, že vlastnosti tekutiny nezávisia od teploty. Ich číselné hodnoty sa pre danú tekutinu odčítávajú z materiálovej databázy pri strednej teplote prúdu

$$T_b = \frac{T_{out} - T_{in}}{2} \tag{22.21}$$



Obr. 22.6 *Priebeh strednej teploty T_m a teploty steny T_s pri okrajovej podmienke pre stenu $q = konšt.$*

Sklon lineárneho priebehu T_m v T-x diagrame možno určiť z energetickej bilancie elementu s hrúbkou dx vyznačeného v obr. 5. Dostávame

$$mc_p dT_m = q\pi D dx \qquad \rightarrow \qquad \frac{dT_m}{dx} = \frac{q\pi D}{mc_p} = konšt. \tag{22.22}$$

Nakoľko v tepelne plne rozvinutej oblasti je bezrozmerný teplotný profil (22.13) konštantný, možno postupne napísať

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_s - T}{T_s - T_m}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{T_s - T_m}\left(\frac{\partial T_s}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_s}{\partial x} \tag{22.23}$$

a pretože $T_s - T_m$= konšt., možno výsledok v (22.23) doplniť na

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{q\pi D}{mc_p} = \frac{q\pi D}{\rho \frac{\pi D^2}{4} u_m c_p} = \frac{4q}{\rho D u_m c_p} = konšt. \tag{22.24}$$

Z (22.24) vyplýva, že v oblasti tepelne i rýchlostne plne rozvinutej oblasti pri $q = konšt.$ sa rýchlostný profil $T(r)$ pozdĺž potrubia nemení (nie je závislý od x), i keď pri stene vychádza z rozdielnych hodnôt T_s .

22.4.3 Konštantná teplota steny

V prípade, že T_s= konšt., z energetickej bilancie elementu na obr. 5 dostávame

$$mc_p dT_m = h(T_s - T_m)\pi D dx \tag{22.25}$$

Pretože T_s je konštanta, možno do (22.25) zaviesť rovnosť $dT_m = -d(T_s - T_m)$ a po úprave platí

$$\frac{d(T_s - T_m)}{T_s - T_m} = -\frac{h\pi D}{mc_p} dx \tag{22.26}$$

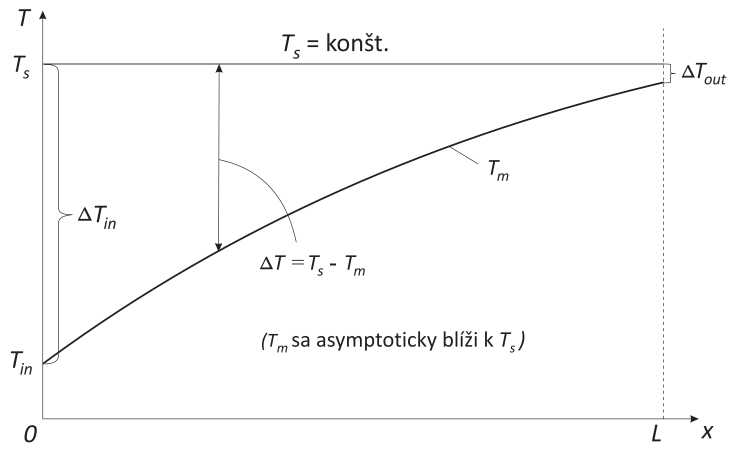
Integrovaním tejto diferenciálnej rovnice so separovanými premennými $(T_s - T_m)$ a x v hraniciach od T_{in} po T_{out} a od x = 0 po x = L dostávame

$$\ell n \frac{T_s - T_{out}}{T_s - T_{in}} = -\frac{\overline{h}\pi D L}{mc_p} \tag{22.27}$$

kde $\overline{h}$ je spriemerovaný koeficient prestupu tepla. Exponenciálny tvar tohto vzťahu dáva užitočný vzorec pre určenie priemernej teploty na výstupe

$$T_{out} = T_s - (T_s - T_{in}) e^{-\frac{\overline{h}\pi D L}{mc_p}} \tag{22.28}$$

Ako vidieť, teplotný rozdiel medzi konštantnou teplotou steny a tekutinou sa exponenciálne zmenšuje v smere prúdenia, pričom rýchlosť približovania sa T_m ku T_s závisí od exponentu NUT = $\overline{h}\pi DL/mc_p$ (obr. 22.7), ktorý



Obr. 22.7 *Priebeh strednej teploty T_m pri okrajovej podmienke $T_s = konšt.$*

v podstate vyjadruje efektívnosť prenosu tepla. Stredná teplota prúdu sa asymptoticky blíži k teplote steny a pri NUT > 5 sa výstupná teplota tekutiny prakticky rovná teplote steny. Na druhej strane takýto efektívny prenos tepla nemusí byť vždy optimálny z ekonomického alebo priestorového hľadiska, pretože vyžaduje obyčajne dlhé potrubie.

Keď z (22.27) vyjadríme mc_p dostaneme

$$mc_p = -\frac{\bar{h}\pi DL}{\ell n(T_s - T_{out})/(T_s - T_{in})}$$

a po dosadení tohto výsledku do (22.17) máme

$$\dot{Q} = \bar{h}\pi DL\Delta T_{\ell n} \qquad (22.29)$$

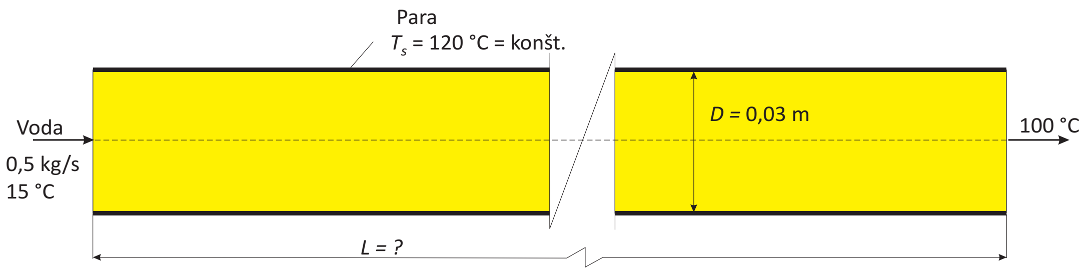
kde

$$\Delta T_{\ell n} = \frac{T_{in} - T_{out}}{\ell n\left[(T_s - T_{out})/(T_s - T_{in})\right]} = \frac{T_{in} - T_{out} + (T_s - T_s)}{\ell n\left[(T_s - T_{out})/(T_s - T_{in})\right]} = \frac{\Delta T_{out} - \Delta T_{in}}{\ell n(\Delta T_{out}/\Delta T_{in})} \qquad (22.30)$$

predstavuje pre potrubie číselnú hodnotu *stredného (priemerného) logaritmického teplotného rozdielu* medzi konštantnou teplotou steny a teplotou tekutiny s $\Delta T_{in} = T_s - T_{in}$ a $\Delta T_{out} = T_s - T_{out}$. Jeho hodnota nahradzuje v tomto prípade nepresný (najmä pri väčších rozdieloch medzi ΔT_{in} a ΔT_{out}) priemerný aritmetický teplotný rozdiel $\Delta T_{aritm} = T_s - (T_{out} + T_{in})/2$.

Príklad 22.1

Do tenkostennej medenej rúrky výmenníka tepla s vnútorným priemerom $D =$ 3 cm sa privádza za sekundu 0,5 kg vody s teplotou 15 °C. Rúrku po celej dĺžke na vonkajšom povrchu ohrieva para kondenzujúca pri teplote 120 °C (predpokladáme rovnakú teplotu aj na vnútornom povrchu rúrky). Treba určiť takú dĺžku rúrky L, aby sa voda ohriala na 100°C, keď priemerný koeficient prestupu tepla $\bar{h}$ = 900 W/(m^2 °C).



Merné teplo vody pre strednú teplotu tekutiny (100 + 15) / 2 = 57,5 °C je 4185 J/(kg °C). Podľa (22.17) množstvo tepla, ktoré prejde za jednotku času zo steny rúrky do vody je

$$\dot{Q} = mc_p(T_{out} - T_{in}) = 0{,}5 \cdot 4185(115 - 15) = 209250\,\text{W} = 209{,}25\,\text{kW}$$

Stredný logaritmický rozdiel medzi teplotou steny a strednou teplotou tekutiny je

$$\Delta T_{out} = T_s - T_{out} = 120 - 100 = 20\,°\text{C}$$

$$\Delta T_{in} = T_s - T_{in} = 120 - 15 = 105\,°\text{C}$$

$$\Delta T_{\ell n} = \frac{\Delta T_{out} - \Delta T_{in}}{\ell n(\Delta T_{out}/\Delta T_{in})} = \frac{20 - 105}{\ell n(20/105)} = 51{,}3\,°\text{C}$$

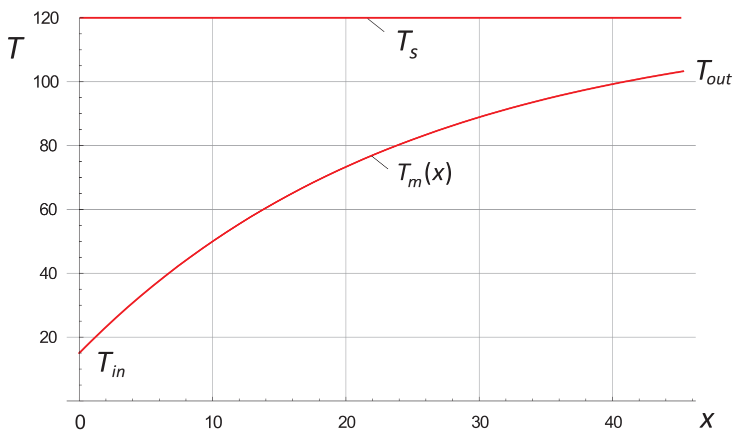
Z (22.29) potrebná dĺžka rúrky je

$$L = \frac{\dot{Q}}{\bar{h}\pi D \Delta T_{\ell n}} = \frac{209{,}25}{0{,}9 \cdot \pi \cdot 0{,}03 \cdot 51{,}3} = 48{,}09\,\text{m}$$

Poznámka k príkladu: Pre priebeh priemernej teploty tekutiny pozdĺž rúrky $T_m(x)$ platí vzťah (22.28), kde stačí nahradiť dĺžku L premennou x

$$T_m(x) = T_s - (T_s - T_{in})e^{-\frac{\bar{h}\pi D x}{mc_p}} = 120 - (120 - 15)e^{-\frac{900\pi 0{,}03x}{0{,}5 \cdot 4185}}$$

Grafický priebeh tejto funkcie po dĺžke rúrky a postupné zmenšovanie teplotného rozdielu medzi stenou a ohrievanou vodou je vidieť na tomto obrázku:



Vzhľadom na konkávnosť exponenciálnej funkcie $T_m(x)$ je stredný *aritmetický* rozdiel teploty steny a tekutiny vždy väčší ako stredný *logaritmický* rozdiel, ktorý integrálne zohľadňuje stupeň konkávnosti krivky $T_m(x)$. Aj v tomto príklade, pri relatívne plochej krivke, ak by sme pri výpočte dĺžky rúrky použili

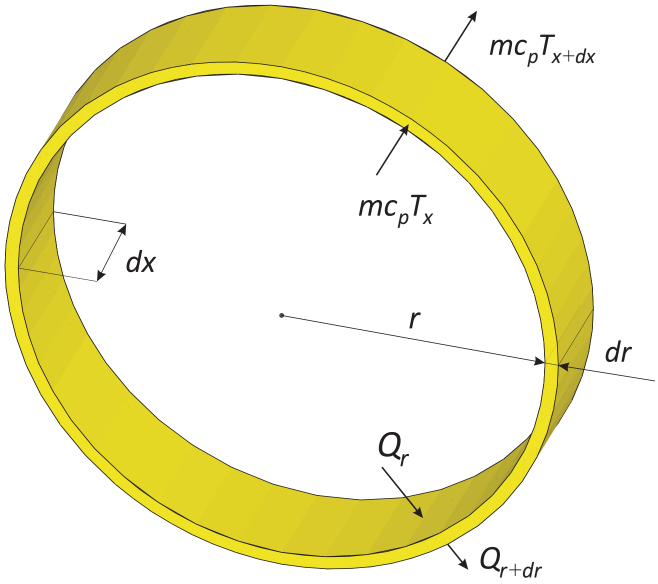
$$\Delta T_{aritm} = T_s - \frac{T_{out} + T_{in}}{2} = 120 - \frac{100+15}{2} = 62{,}5\ °C$$

dostali by sme $L = 39{,}5$ m, namiesto správnych 48,09 m.

22.5 Teplotný profil a koeficient h pri laminárnom prúdení v potrubí – analytické riešenie

Uvažujme ustálené laminárne prúdenie v kruhovom potrubí s polomerom R. Nech vlastnosti tekutiny ρ, λ a c_p sú konštantné a možno zanedbať prácu viskóznych síl i vedenie tepla v pozdĺžnom smere. Tekutina prúdi pozdĺž osi x v plne rozvinutej oblasti, takže rýchlosť prúdenia nie je závislá od x a platí $u = u(r)$. V takomto prípade možno tepelnú bilančnú rovnováhu valcového elementu tekutiny (obr. 22.8) vyjadriť v tvare

$$mc_pT_x - mc_pT_{x+dx} + Q_r - Q_{r+dr} = 0 \qquad [J/s] \tag{22.31}$$



Obr. 22.8 *Tepelné pomery na elemente potrubia*

kde hmotnostný tok za jednotku času je $m = \rho u S = \rho u(2\pi r dr)$. Dosadením do (22.31) a vydelením s $2\pi r dr dx$ dostávame

$$\rho c_p u \frac{T_{x+dx} - T_x}{dx} = -\frac{1}{2\pi r dx}\frac{Q_{r+dr} - Q_r}{dr} \tag{22.32}$$

alebo s využitím zápisu derivácie

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{2\rho c_p \pi r dx}\frac{\partial Q}{\partial r} \tag{22.33}$$

Podľa Fourierovho vzťahu pre jednorozmerné vedenie tepla je

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = S\frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda 2\pi r dx \frac{\partial T}{\partial r}\right) = -2\pi\lambda dx \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{22.34}$$

takže vzťah (22.33) po dosadení a využitím súčiniteľa $\alpha = \lambda/\rho c_p$ sa zmení na

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{22.35}$$

čo je vlastne len iná, vhodnejšia forma vyjadrenia bilančnej rovnice (22.31) s tým istým fyzikálnym dôsledkom (teplo privedné/odvedené *hmotnostným tokom* do/z elementu sa rovná teplu odvedenému/privedenému *vedením* z/do elementu v radiálnom smere).

22.5.1 Konštatný tepelný tok

Pre tento prípad podľa (22.24) platí

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{4q}{\rho D u_m c_p} = \frac{2q}{\rho R u_m c_p} = konšt. \tag{22.36}$$

Dosadením (22.36) a vzťahu pre laminárny rýchlostný profil

$$u(r) = u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 2u_m\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{22.37}$$

do (22.35) dáva diferenciálnu rovnicu platnú pre teplotný profil

$$\frac{4q}{\lambda R}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) \tag{22.38}$$

Jej všeobecné riešenie dostaneme dvojnásobným integrovaním po separácii premenných

$$T = \frac{qR}{\lambda}\left(r^2 - \frac{r^2}{4R^2}\right) + C_1 r + C_2 \tag{22.39}$$

a výslednú funkciu teploty po zavedení okrajových podmienok $\partial T/\partial r = 0$ pre $r = 0$ (z dôvodu symetrie) a $T = T_s$ pre $r = R$

$$T(r) = T_s - \frac{qR}{\lambda}\left(\frac{3}{4} - \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{4R^4}\right) \tag{22.40}$$

Teraz už možno vzťahy pre rýchlostný a teplotný profil (22.37) a (22.40) dosadiť do (22.16) a určiť strednú teplotu tekutiny. Po integrácii dostávame

$$T_m = T_s - \frac{11}{24}\frac{qR}{\lambda} \tag{22.41}$$

Keď do tohto výsledku dosadíme $q = h(T_s - T_m)$, zistíme, že koeficient prestupu tepla v tomto prípade nie je závislý ani od Reynoldsovho ani od Prandtlovho čísla a mimo oblasť tepelného vstupu platí

$$h=\frac{24}{11}\frac{\lambda}{R}=\frac{48}{11}\frac{\lambda}{D}=4{,}36\frac{\lambda}{D} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{Nu}=\frac{hD}{\lambda}=4{,}36 \tag{22.42}$$

22.5.2 Konštantná teplota steny

Pri analýze plne rozvinutého laminárneho prúdenia v kruhovom potrubí v prípade konštatnej teploty steny T_s možno použiť rovnaký postup ako v predchádzajúcom odstavci. Riešenie diferenciálnej rovnice je však zložitejšie a vyžaduje iteračný postup. Výsledok je však rovnako jednoduchý, s konštantnou hodnotou Nusseltovho čísla

$$h=3{,}66\frac{\lambda}{D} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{Nu}=\frac{hD}{\lambda}=3{,}66 \tag{22.43}$$

Koeficient tepelnej vodivosti tekutiny pre použitie v tomto vzťahu sa určuje pri strednej teplote prúdu (22.21). Poznamenávame, že pri laminárnom prúdení je vplyv drsnosti steny na výpočtové hodnoty h zanedbateľný.

22.6 Niektoré korelačné vzťahy – laminárne a turbulentné prúdenie v potrubí

Pre zložitejšie úlohy nepoznáme teoretické riešenia a spriemerovaný koeficient h alebo lokálny koeficient $\overline{h}$ sa určujú z experimentálne stanovených vzťahov. Dimenzionálna analýza ukazuje, že veľké množstvo premenných ovplyvňujúce tieto koeficienty možno zlúčiť do korelačných vzťahov platných pre bezrozmerné charakteristiky úlohy a z nich určiť koeficient h . Väčšina týchto vzťahov má "Nusseltovský tvar"

$$\mathrm{Nu}=\frac{hD}{\lambda}=\mathrm{f}\left(\frac{\rho u L}{\mu},\frac{c_p\mu}{\lambda}\right) \rightarrow \mathrm{Nu}=\frac{hD}{\lambda}=\mathrm{f}\left(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\right) \rightarrow h \tag{22.44}$$

Pokiaľ to nie je inak stanovené, číselné parametre vlastnosti tekutiny pri dosadzovaní do týchto vzťahov sa vyčíslujú pre strednú teplotu prúdu $T_b=\left(T_{out}-T_{in}\right)/2$.

Pre potrubie s dĺžkou L možno pri *laminárnom* prúdení vo vstupnej tepelnej oblasti určiť priemernú hodnotu Nusseltovho čísla pri konštantnej teplote steny zo vzťahu

$$Nu=3{,}66+\frac{0{,}065(D/L)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1+0{,}04\left[(D/L)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right]^{2/3}} \tag{22.45}$$

Ako vidieť, Nusseltovo číslo vo vstupnej oblasti potrubia je vyššie a asymptoticky klesá k hodnote 3,66 pri $L\rightarrow\infty$.

Keď je rozdiel medzi teplotou steny a tekutiny veľký, je potrebné zohľadniť teplotnú závislosť viskozity. Vhodný vzťah v takom prípade (opäť pri *laminárnom* prúdení vo vstupnej tepelnej oblasti) je

$$Nu=1{,}86\left(\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0{,}14} \tag{22.46}$$

kde sa všetky hodnoty určujú pri strednej teplote prúdu okrem teploty steny μ_s .

V technickej praxi sa však podstatne častejšie stretávame s *turbulentným* prúdením. Korelačné vzťahy sú pri takomto prúdení obyčajne obmedzené pre určitý rozsah Reynoldsovho, príp. i Prandtlovho čísla. Pri turbulentnom prúdení už nezanedbateľnú úlohu zohráva aj hladkosť, resp. drsnosť vnútornej steny potrubia. Vhodný vzťah pre určenie Nusseltovho čísla pre kruhové potrubie je

$$\mathrm{Nu} = \frac{(f/8)\mathrm{Re}\mathrm{Pr}}{1{,}07 + 12{,}7(f/8)^{0{,}5}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)} \qquad \begin{pmatrix} 0{,}5 \le \mathrm{Pr} \le 2000 \\ 10^4 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \tag{22.47}$$

kde trecí koeficient možno určiť z Moodyho diagramu alebo iteráciou z Colebrookovej rovnice (pozri [D20]). Vhodná je tiež Haalandov vzorec

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1{,}8\log_{10}\left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{1{,}11} + \frac{6{,}9}{\mathrm{Re}}\right] \qquad (\text{turbulentné prúdenie}, \mathrm{Re} > 3000) \tag{22.48}$$

pri ktorom sa vyhneme iterácii.

Príklad 22.2

V rúrke s medzikruhovým prierezom o dĺžke L = 5 m a vnútorným priemerom D = 3 cm sa ohrieva prúdiaca voda s konštantným prietokom 10 litrov za minútu. Elektrický ohrievač zabezpečuje rovnomerný ohrev rúrky po celej jej vonkajšej ploche s plošným energetickým tokom q = 73 kW/m^2 . Teplota vody na vstupe je T_{in} = 15 °C a vnútorný povrch rúrky je hladký.

Určte priebeh strednej teplotu vody $T_m(x)$ a priebeh teploty steny $T_s(x)$ a vyčíslite tieto teploty na výstupe, t.j. $T_m(L)$ a $T_s(L)$. Úlohu riešte:

a) analyticky pomocou korelačných vzťahov
b) numericky (Ansys Workbench + Fluent)

Analytické riešenie

Zo zadania vyplýva, že úloha nie je závislá od času, ide o ustálené prúdenie a ustálený prenos tepla konvekciou pri konštantnom tepelnom toku.

Najprv z materiálových tabuliek odčítame vlastnosti vody pri odhadnutej priemernej teplote prúdu $T_b = (T_{in} + T_{out})/2 \approx (15 + 65)/2 = 40$ °C °:

$$\rho = 992\,\mathrm{kg/m^3}$$
$$\lambda = 0{,}63\ \mathrm{W/(m°C)}$$
$$c_p = 4180\ \mathrm{J/(kg \cdot °C)}$$
$$\mathrm{Pr} = 4{,}12$$
$$\mu = 0{,}6228 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/(m \cdot s)}$$

Pre určenie Reynoldsovho čísla potrebujeme poznať strednú rýchlosť prúdu vody

$$v_m = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0{,}01\,\mathrm{m}^3\,/\,\mathrm{min}}{\pi \cdot 0{,}03^2/4} = 14{,}15\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{min} = 0{,}236\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$$

a dostávame

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_m D}{\mu} = \frac{992 \cdot 0{,}236 \cdot 0{,}03}{0{,}6228 \cdot 10^{-3}} = 11277$$

z čoho vyplýva, že sa jedná o turbulentné prúdenie. Pre vstupnú dĺžku potom podľa (22.15) približne platí

$$x_\delta = x_v \approx 10D = 10 \cdot 0{,}03 = 0{,}3\,\mathrm{m}$$

Je to malá hodnota oproti celkovej dĺžke potrubia, takže možno približne uvažovť plne rozvinuté prúdenie i plne rozvinutý tepelný prenos po celej dĺžke L. Zo vzťahu (22.19) už teraz možno určiť priebeh strednej teploty vody po celej dĺžke rúrky

$$T_m(x) = T_{in} + \frac{q\pi Dx}{mc_p} = T_{in} + \frac{q\pi Dx}{\rho \dot{V} c_p} = 15 + \frac{73000 \cdot \pi \cdot 0{,}03}{992 \cdot \frac{0{,}01}{60} \cdot 4180} x = 15 + 9{,}96x \qquad 0 \le x \le L \qquad \text{(a)}$$

a z toho strednú teplotu vody na výstupe

$$T_{out} = 15 + 9{,}96 \cdot 5 = 64{,}8\,°\mathrm{C} \qquad 0 \le x \le L$$

ktorá je blízka odhadnutej hodnote a nie je potrebné robiť opakovaný (iteračný) výpočet so zmenenými materiálovými vlastnosťami vody.

Ďalšie výpočty budú smerovať k určeniu teploty steny na výstupe, t.j. na konci potrubia $T_m = T_s(L)$. Pre hladké potrubie ($\varepsilon = 0$) najprv zo vzorca (22.48) určíme trecí koeficient

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1{,}8\log_{10}\left(\frac{6{,}9}{\mathrm{Re}}\right) = -1{,}8\log_{10}\left(\frac{6{,}9}{11277}\right) = 5{,}784 \qquad \rightarrow \qquad f = 0{,}03$$

a z korelačného vzťahu (22.47) Nusseltovo číslo

$$\mathrm{Nu} = \frac{(f/8)\mathrm{Re}\mathrm{Pr}}{1{,}07 + 12{,}7(f/8)^{0{,}5}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)} = \frac{(0{,}03/8) \cdot 11277 \cdot 4{,}12}{1{,}07 + 12{,}7(0{,}03/8)^{0{,}5}(4{,}12^{2/3} - 1)} = 76{,}0$$

Koeficient prestupu tepla podľa vzťahu (22.6) je

$$h = \frac{\lambda}{D}\mathrm{Nu} = \frac{0{,}631}{0{,}03} 76 = 1598{,}5\,\frac{W}{m^2 °C}$$

a možno podľa (22.20) a (a) vyjadriť lineárny priebeh teploty steny

$$T_s(x) = T_m(x) + \frac{q}{h} = 15 + \frac{q}{h} + 9{,}96x = 60{,}7 + 9{,}96x \qquad 0 \le x \le L$$

Maximálna teplota steny na konci potrubia je

$$T_s(L) = 60{,}7 + 9{,}96x = 60{,}7 + 9{,}96 \cdot 5 = 110{,}5\,°\mathrm{C}$$

Pripomíname horeuvedenú teóriu, podľa ktorej pri takomto type prenose tepla je teplotný rozdiel medzi stenou a tekutinou po celej dĺžke potrubia (s výnimkou vstupnej dĺžky) konštantný (obr. 6). V našom prípade je to

$$\Delta T_s = T_s - T_m = \frac{q}{h} = \frac{73000}{1598{,}5} = 45{,}7\,°C$$

Numerické riešenie

Úlohu podľa horeuvedeného zadania vyriešime pomocou programu *Fluent*, pričom na tvorbu výpočtového modelu použijeme predprocesor *Ansys Workbench*. Je vhodné pred výpočtom vytvoriť na disku pracový adresár pre ukladanie súborov úlohy (projektu) napr. s názvom *Prenos_tepla*.

Prípravné výpočty

Z analytického výpočtu poznáme tieto hodnoty:

$$\rho = 992\,\text{kg/m}^3$$
$$\lambda = 0{,}63\,\text{W/(m°C)}$$
$$\mu = 0{,}6228 \cdot 10^{-3}\,\text{kg/(m}\cdot\text{s)}$$
$$c_p = 4180\,\text{J/(kg}\cdot\text{°C)}$$
$$v_m = 0{,}236\,\text{m / s}$$
$$f = 0{,}03$$
$$\text{Re} = 11277$$

a podľa hodnoty Reynoldsovho čísla vieme, že sa jedná o turbulentné prúdenie.

Úloha je jednoduchá a možno ju riešiť numerickým integrovaním rovníc modelu v celej oblasti vrátane medznej vrstvy (t.j. bez využitia stenových funkcií); potom ale diskretizácia oblasti v blízkosti steny musí byť dostatočne hustá. Takto bol riešený výpočet príkladu 21.1. Teraz pre zmenu využijeme stenové funkcie, ktoré v blízkosti steny nevyžadujú tak husté delenie oblasti. Pri tejto voľbe normalizovaná vzdialenosť ťažiska každej buňky susediacej so stenou by mala spĺňať podmienku $30 < y^+ < 300$, optimále s hodnotou čo najbližšie k 30 [D20]. Zvolíme hodnotu

$$y^+ = 30$$

Pre skutočnú vzdialenosť potom platí

$$y = \frac{\mu}{\rho u_\tau} y^+ = \frac{\mu}{\rho} y^+ \sqrt{\rho / \tau_w}$$

Stenové šmykové napätie je [D20]

$$\tau_w = \tfrac{1}{2} c_f \rho u_0^2 = \tfrac{1}{8} f \rho u_0^2 = \tfrac{1}{8} 0{,}03 \cdot 992 \cdot 0{,}236^2 = 0{,}207\ \text{Pa}$$

Takže pri voľbe $y^+ = 30$ pre vzdialenosť ťažiska bunky y potom platí

$$y = \frac{\mu}{\rho} y^{+} \sqrt{\rho / \tau_w} = \frac{0{,}6228\ 10^{-3}}{992} 30 \sqrt{992 / 0{,}207} = 0{,}0013\ \text{m}$$

Výpočtovú sieť teda treba vytvoriť tak, aby šírka bunky pri stene bola rovná alebo o niečo väčšia ako 3 mm.

K tomuto postupu poznamenávame, že v postprocesore programu možno zobraziť vypočítanú hodnotu y^{+}, takže problém správnej hustoty siete pri stene možno riešiť (najmä pri menších úlohách) aj tak, že hustotu odhadneme a pokiaľ veľkosť y^{+} nevyhovuje, zopakujeme výpočet so zmenenou hustotou.

Intenzita turbulencie na vstupe je [D20]

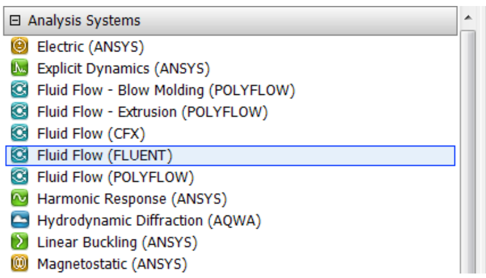
$$I = 0{,}16 \mathrm{Re}^{-1/8} = 0{,}16 \cdot 11277^{-1/8} = 0{,}05 \quad (5\%)$$

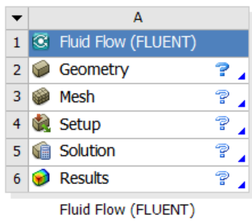
22.7 Riešenie úlohy pomocou programu *Ansys Fluent*

Po prípravných výpočtoch opíšeme teraz vlastné riešenie úlohy. Výpočtový model potrubia sa tvorí v predprocesore *Workbench* programu *Ansys Fluent* týmto postupom:

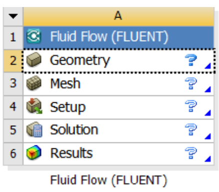
22.7.1 Geometria oblasti

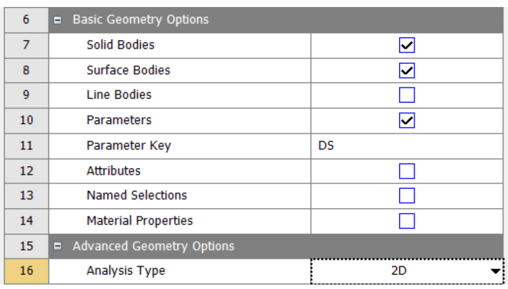
Otvorte *Workbench* a zvolte *Fluid Flow (FLUENT)* dvojitým kliknutím alebo pridržaním ľavým tlačítkom myši a prenesením napravo do naznačeného štvorca). Otvorí sa okno *Project Schematic*





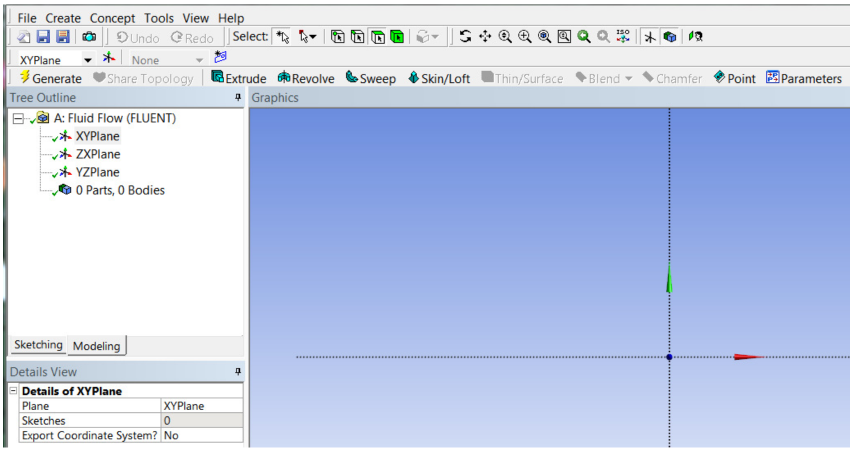
Kliknite *pravým* tlačítkom myši na *Geometry*, zvoľte *Properties*, prepnite typ úlohy na 2D



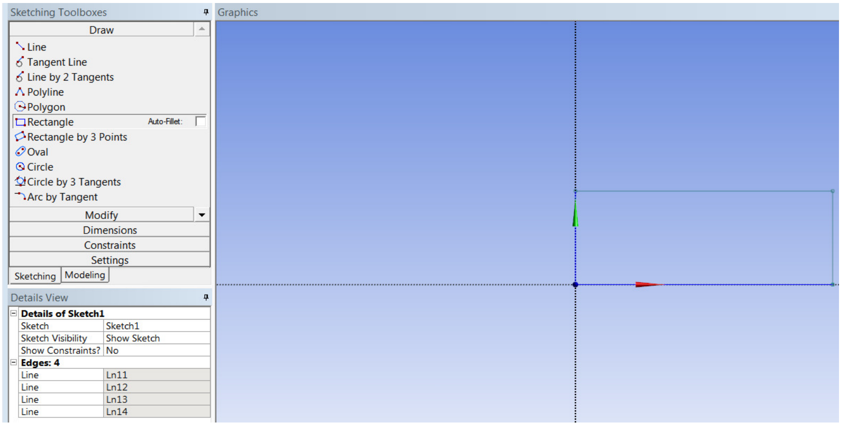


a zatvorte tabuľku.

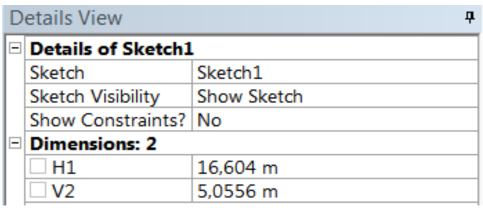
Kliknite dvakrát ľavým tlačítkom myši na *Geometry*, otvorí sa okno *Graphics* pre tvorbu geometrie a potvrďte dĺžkovú jednotku *Meter*. V *Tree Outline* zvolte rovinu *xy* (*XYPlane*) a ďalším kliknutím na os *Z* v symbole súradnicových smerov (v pravom dolnom rohu) zvoľte normálový pohľad na túto rovinu.



V *Tree Outline* zvoľte *Sketching*, potom *Rectangle.* Kliknite začiatok súradnicového systému a posunutím myši vytiahnite ľubovoľný obdĺžnik



Zvoľte *Dimensions*, kliknutím a potiahnutím dlhej a potom krátkej strany obdĺžnika sa zakótujú strany obdĺžnika s ľubovoľnými rozmermi

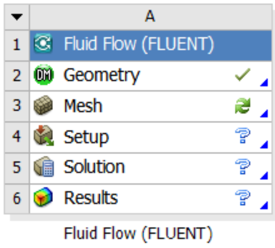

Details View

Details of Sketch1	
Sketch	Sketch1
Sketch Visibility	Show Sketch
Show Constraints?	No
Dimensions: 2	
H1	16,604 m
V2	5,0556 m

Ľubovoľné rozmery obdĺžnika v *Details View* zmeňte na rozmery polovice priemetu potrubia *H1* = 5 m, *V2* = 0,015 m prepísaním hodnôt v *Details View* a potvrdením *Enter* (podľa nastavenia programu používajte desatinnú čiarku alebo desatinnú bodku). Zväčšite obrázok pomocou .

Z čiarového obrázku urobte objekt (oblasť) voľbou *Concept*, *Surfaces from Sketches,* Kliknutím na čiaru obdĺžnika, *Apply* v *Base Objects, Enter*, *Generate.*

Zavrite okno *Graphics*. Stav riešenia úlohy v *Project Schematic teraz vyzerá takto*

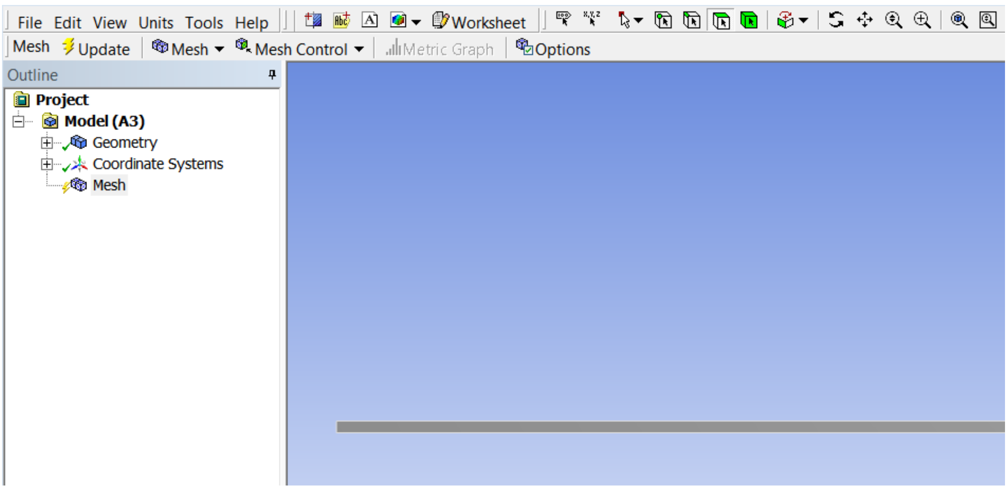


Uložte aktuálny stav riešenia úlohy postupom *File*, *Save As*, otvorením pracovného adresára, nazvaním úlohy *Prenos_tepla1* a uložením príkazom *Save*. Vytvorí sa súbor na spúšťanie úlohy *Prenos_tepla1.wbpj* a ďalšie s úlohou súvisiace súbory.

22.7.2 Tvorba siete a klasifikácia jej okrajov

Dvakrát kliknite na *Mesh* a trpezlivo počkjte kým sa otvorí okno pre tvorbu siete buniek s obrázkom tvoriacej plochy potrubia. Zatvorte tabuľku *Meshing Options* a kliknite v *Outline* na 

. Potrebnú časť obrázka zväčšujte pomocou  alebo pomocou pravého tlačítka myši.



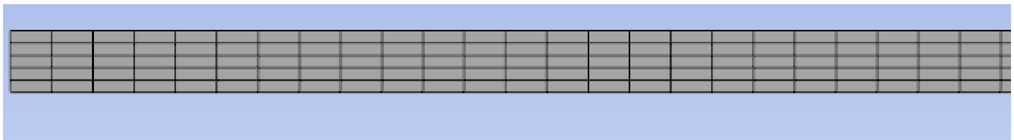
Zvoľte *Mesh Control* a otvorte *Sizing*. Teraz treba zadať hustotu delenia na všetkých hranách (čiarach) oblasti. Prepnite filter na ukazovanie čiary  a so stlačenou klávesou *Ctrl* kliknutím označte obe dlhšie strany obdĺžnika (musia sa pri tom sfarbiť). V *Details* okne kliknite riadok *Geometry* a povrďte označené hrany s *Apply*. Zmeňte *Behavior* na *Hard* (aby editor presne dodržal počet delení čiar) a *Type* na *Number of Divisions.* Zadajte 500 delení a potvrďte s *Enter.*

Kratšie strany podeľte rovnakým spôsobom. V *Mesh Control* a otvorte nové *Sizing* a zvoľte na oboch kratších stranách 5 delení, čím sa dodrží potrebná hodnota y^+ .

V *Mesh Control* zvoľte metódu *Maped Face* Meshing, kliknite na obraz potrubia (plocha sa vysvieti) a v *Details of Sizig* po kliknutí v riadku *Geometry* potvrďte vybranú oblasť s *Apply*. Tým je delenie oblasti kompletne pripravené a treba už len zadať príkaz na vytvorenie siete. Otvorte v príkazovom riadku 

a zvoľte *Generate Mesh*. Po prebehnutí editácie zviditeľníte sieť kliknutím 

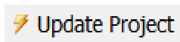
v *Outline* okne. Na jej zväčšenie použite *Zoom* . Pri postupnom zväčšovaní siete a porovnaní s dĺžkovým merítkom je vidieť, že šírka bunky pri stene je rovná 3 mm.



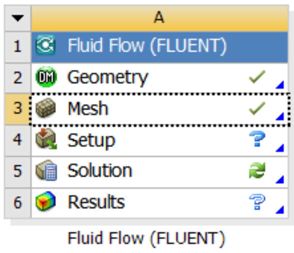
Ak sa pri tvorbe siete niektorý krok nevydaril, alebo nie ste spokojní s delením, možno každý *Sizing*, prípadne i *Mesh*, kliknúť pravým tlačítkom myši a po vymazaní vytvoriť znovu. Môžte tiež načítať uloženú geometriu a zopakovať celý postup tvorby siete.

Po vytvorení siete sa v okne *Meshing* robí aj klasifikácia všetkých okrajových čiar (pri 2D úlohe), resp. plôch (pri 3D úlohe), ako príprava pre zadávanie okrajových podmienok vo *Fluent*e. Riešime rotačne symetrickú úlohu, ktorá vznikne rotáciou vytvorených čiar a buniek okolo osi rotácie a na obdĺžniku teda treba označiť os rotácie, ďalej čiaru, z ktorej vznikne valcová stena a čiary, z ktorých sa vytvorí kruhová plocha vstupu a výstupu prúdiacej vody. Horná čiara obdĺžnika bude stena, dolná – je os rotácie, ľavá strana bude vstup a pravá výstup.

Kliknite ľavým a potom pravým tlačítkom myši ľavú stranu obdĺžnika (ukazovací filter musí byť nastavený na čiary) a v tabuľke otvorte *Create Named Selection*, názov prepíšte na *vstup* a potvrďte s OK. Rovnakým postupom nazvite pravú stranu *vystup*, hornú stranu *stena* a dolnú *os*.

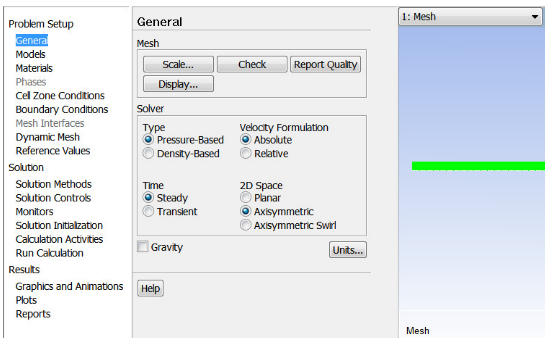
Zatvorte *Meshing* Okno a v skupine príkazov *Workbench* kliknite príkaz 

, čím pripravíte úlohu pre program *Fluent*. Uložte úlohu príkazom *Save.* Stav riešenia by mal teraz vyzerať takto



22.7.3 Zadanie úlohy vo Fluente

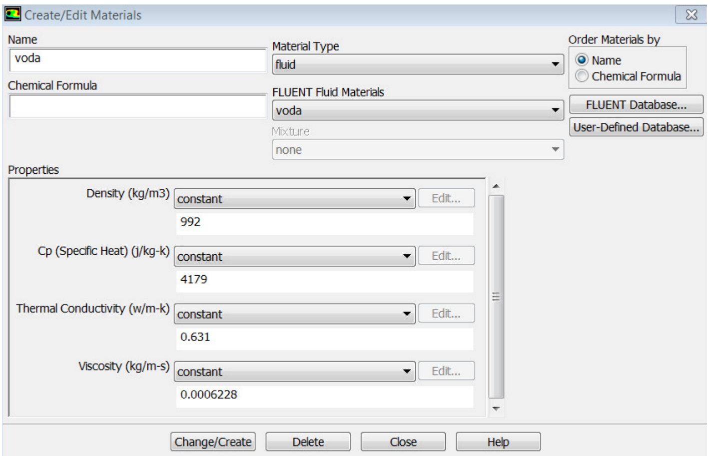
Otvorte *Fluent* dvojitým kliknutím na *Setup* a úvodné okno po zvolení dvojitej presnosti čísiel (*Double Precision*) zatvorte s OK. Otvorí sa pracovné okno programu, kde v časti *2D Space* zvoľte *Axisymetric*



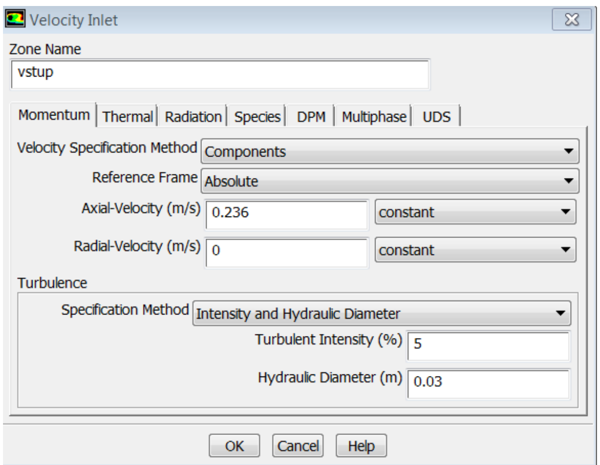
V okne *General* môžte spustiť kontrolu siete (*Check*); vo výpise zoznamu kontrol by sa nemali nemali obiaviť žiadne závady. Je užitočné urobiť tiež kontrolu označenia okrajov oblasti pomocou *Display*. Mali by sa tam objaviť názvy okrajových čiar *vstup*, *vystup*, *os* a *stena*.

Vo voľbách *Models* treba vysvietiť *Viscouos-Laminar* a pomocou *Edit* zvoliť turbulentný *k-epsilon* model. Objaví sa okno pre zadanie jeho parametrov, ktoré sme stručne opísali vyššie pri informácii o tomto modeli; presvedčte sa, či je zapnuté *Standard Wall Functions* a zavrite ho s OK bez ďalšej zmeny. Zapnite tiež *Energy* cez *Edit* a *Energy Equation* na *On*.

Ďalej zvoľte zadanie vlastností tekutiny (*Materials*), kde vysvieťte *Fluid* a zvoľte *Create/Edit*. Zmeňte *Name* na voda, *Density* na 992, C_p na 4179, *Thermal Conductivity* na 0.631 a *Viscosity* na 0.0006228, potvrďte zmeny s *Change/Create* a zavrite okno s *Close*. (Vo Fluente pravdepodobne budete musieť používať desatinnú bodku; treba si zadanie overiť opätovným otvorením.)



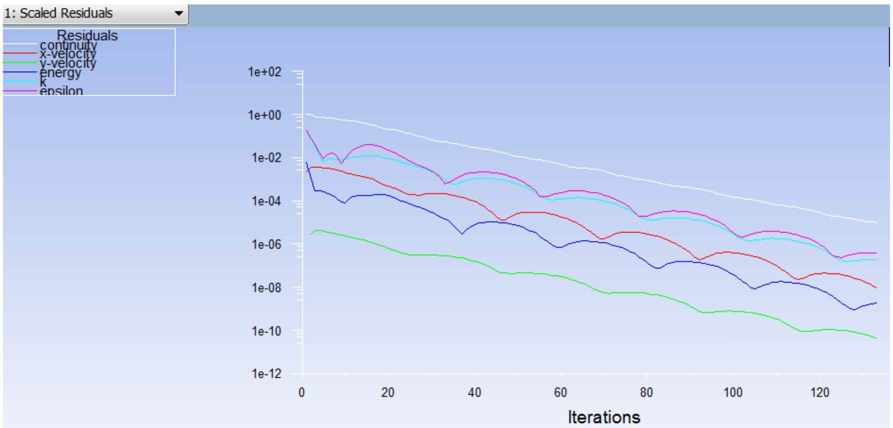
V okne *Boundary Conditions* zvoľte *os,* jej *Type* zmeňte na *axis* a potvrďte. Analogicky označte *vystup* ako *pressure-outlet* s *Gauge Pressure* = 0. Zvoľte *stenu* a ponechajte ju ako *wall*, zvoľte *Thermal* a zadajte *Heat Flux* = 73000, potvrďte s OK. Pre *vstup* zvoľte *velocity-inlet,* vo *Velocit Specification Method* zvoľte *Components* a zadajte *Axial-Velocity* = 0.236. Pre turbulentné okrajové podmienky v *Specification Method* zvoľte *Intensity and Hydraulic Diameter* s hodnotami *Turbulent Intensity* = 5, Hydraulic Diameter = 0.03. V *Thermal* zadajte *Temperature* = 15 a zatvorte okno s OK.



V *Solution Methods* zmeňte nastavenia od *Momentum* až po *Energy na Second Order Upwind*.

V okne *Monitors* po voľbe *Residuals – Print, Plot* a *Edit* konvergenčné kritériá zmeňte na 0.00001 a potvrďte s *OK*.

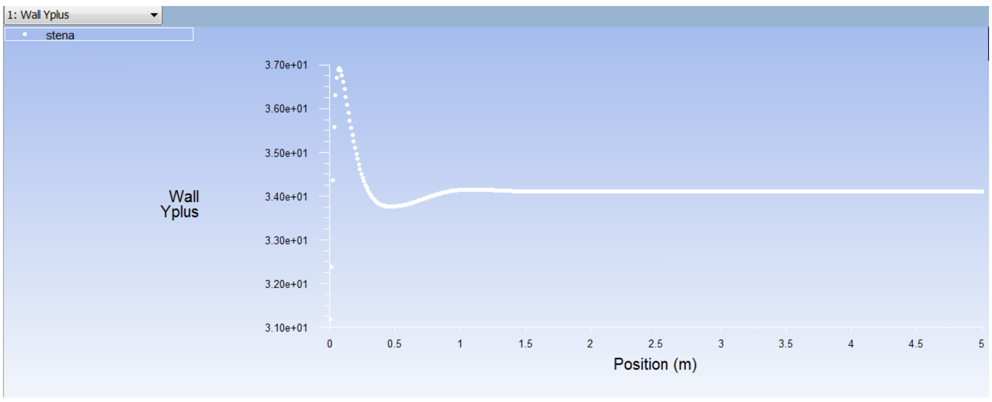
V *Solution Initialization* zadajte pre *Compute from: vstup* a kliknite na *Initialize*. Otvorte *Run Calculation* zadajte *Number of Iterations* = 500 a odštartujte výpočet s *Calculate* (dvojitým kliknutím). Priebeh zvyškových hodnôt primárnych premenných ukáže monitor



22.7.4 Analýza výsledkov (Fluent + CFD-Post)

Postprocesor *Fluentu* je schopný poskytnúť množstvo výsledkov, ktoré ilustrujú teóriu prenosu tepla v kruhovom potrubí pri konštantnom tepelnom toku alebo sa dajú porovnať s analytickým riešením a sú vo voľbách *Plots, Graphics and Animations, Reports* intuitívne spracovateľné. Niektoré možnosti sme ukázali v príklade 22.1. Týmto sôsobom skontrolujeme len priebeh normalizovanej bezrozmernej vzdialenosti ťažísk najbližších buniek od steny y^+, ktorá by vzhľadom na využitie štandartných stenových funkcií mala spĺňať podmienku $y^+ \geq 30$.

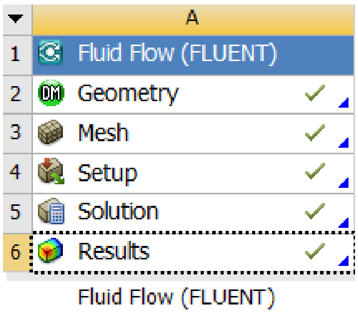
Zvoľte v *Results Plots, XY Plot, Set Up ...,* v *Y Axis Function* vyznačte *Turbulence ...,* a *Wall Yplus.* V *Surfaces* vyznačte *stena* a kliknite *Plot*



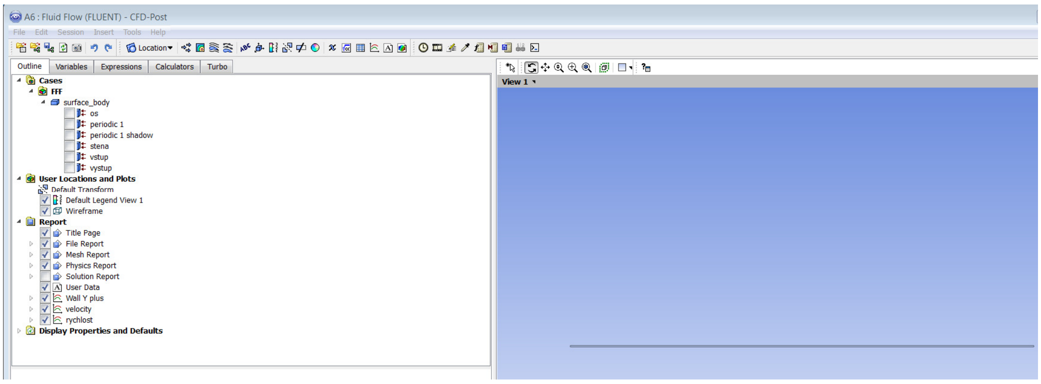
Podmienka je, ako vidieť splnená.

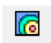
Ďalej si graficky ukážeme kontúrové zobrazenie teploty po priereze vnútrajšku potrubia. Pre zujímavosť, i keď je to trochu komplikovanejšie ako priamo vo Fluente, si to ukážeme v postprocesore *CFD-Post*, ktorý ponúka množstvo elegantných možností spracovania výsledkov pre uverejnenie v správe o výpočte alebo v prezentácii výsledkov výpočtu.

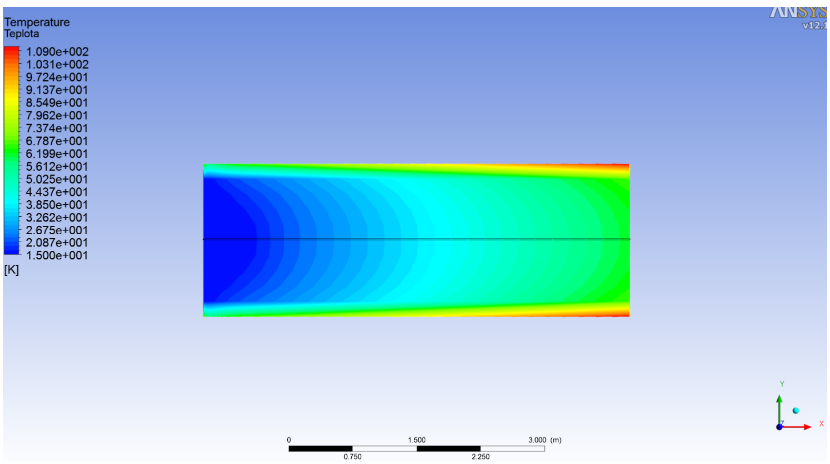
Najprv Postprocesor otvoríme dvojitým kliknutím na *Results* v *Project Schematic* okne



Otvorí sa pracovná plocha programu CFD-Post s vyšetrovanou oblasťou a načítanými aktuálnymi výsledkami výpočtu

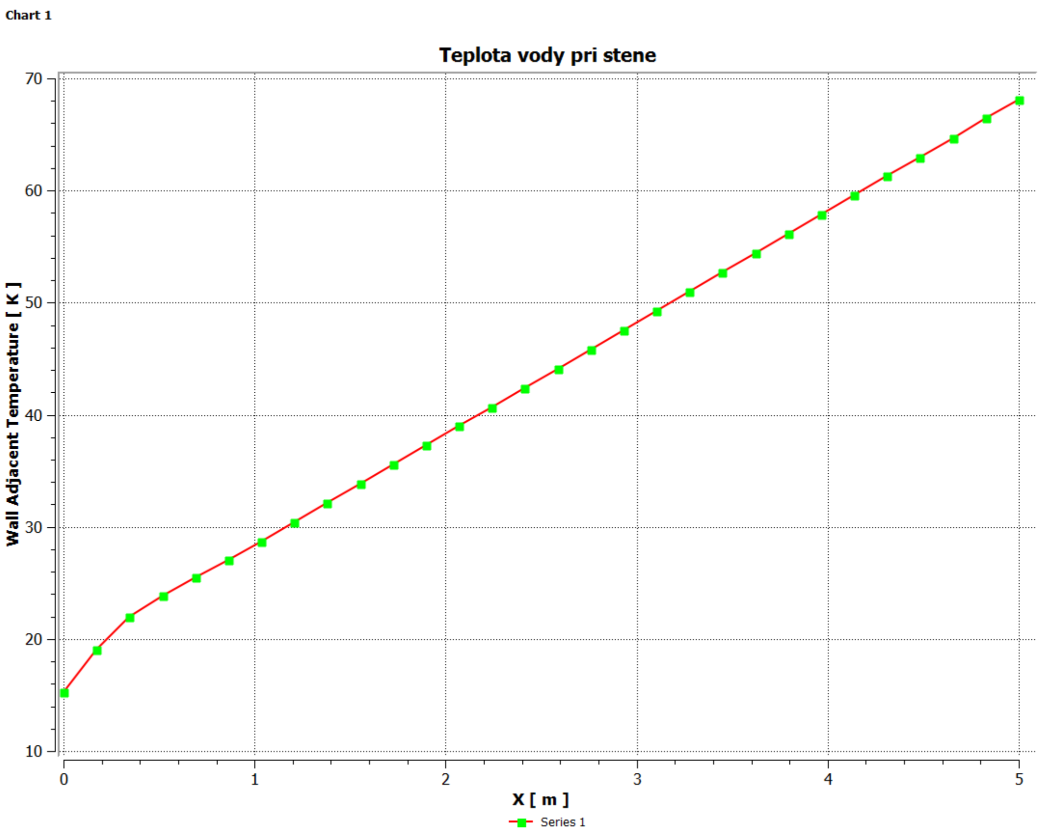


V ikonovej ponuke príkazov kliknite kontúry  , nazvite ich *Teplota* a zatvorte s *OK*. Otvorí sa *Geometry* v okne *Details of Teplota.* Zvoľte v *Locations periodic 1*, vo *Variable, Temperature* a tiež *# of Contours* = 50. Ďalej otvorte *View*, zvoľte v *Apply > Reflection Method = ZX Plane* a v *Apply Scale > Scale* = 1, 60, 1. (Potrubie sa v smere *y* 60krát zväčší). Obrázok kontúrov s legendou hodnôt sa vykreslí po kliknutí *Apply.*



Najväčšia teplota steny je na výstupe o veľkosti 109 °C.

Na záver vykreslíme graf priebehu teploty vody pozdĺž potrubia tesne pri stene. Zvolíme polohu nezávislej premennej *x* na stene potrubia vo forme úsečky: Zvoľte *Insert, Location, Line,* ponechajte názov *Line 1, OK.* V *Details of Line 1* zvoľte *Point 2* = 5, 0.015, 0 ; *Samples* = 30; Apply. Ďalej zvoľte *Insert, Chart, Name* = Chart 1, OK. V *Details of Chart 1* zadajte *Title* = Teplota vody pri stene, v *Data Series > Location = Line 1,* v *X Axis > Variable = X,* v *Y Axis> Variable = Wall Adjacent Temperature,* v *Line Display > Symbols = Rectangle, Apply*



23 Analýza zviazaných fyzikálnych polí

23.1 Úvod a základné pojmy

V predchádzajúcich častiach sme uvažovali, že analyzované teleso alebo oblasť predstavuje spojité kontinuum s určitými materiálovými vlastnosťami, pre ktoré sme pri zadaných parametroch úlohy a zvolených nezávislých premenných hľadali neznáme premenné. Napr. pri analýze mechanicky zaťaženého telesa z poddajného materiálu sme pomocou vhodnej metódy určili jeho posunutia, pretvorenia a napätia a spojité množiny týchto hodnôt sme nazývali *pole posunutí* $\mathbf{u}(x,y,z,t)$, *pole pomerných deformácií* $\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z,t)$ a *pole napätí* $\boldsymbol{\sigma}(x,y,z,t)$. Tieto polia možno zaradiť do jedinej konkrétnej fyzikálnej disciplíny – mechaniky poddajného telesa; ich vzájomná závislosť sa odohráva len v rámci tejto jedinej fyzikálnej oblasti a hovoríme o jednoduchej (nezviazanej, monofyzikálnej) úlohe.

Komplikovanejšia situácia nastane, keď takéto mechanicky zaťažené teleso budeme ohrievať. Dôjde k interakcii existujúcich polí (nazvime ich *mechanické* polia) s *poľom teploty* $\mathbf{T}(x,y,z,t)$, ktoré treba určiť pomocou postupov inej fyzikálnej disciplíny – prenosu tepla. Teplotné pole ovplyvní mechanické polia tepelnou rozťažnosťou, navyše účinkom teploty sa môžu meniť mechanické vlastnosti materiálu telesa, prípadne môže teplota ovplyvňovať okrajové podmienky. Za určitých okolností (napr. cyklické pružne-plastické nestacionárne namáhanie telesa alebo vysokofrekvenčné elastické namáhanie) môžu aj mechanické polia spätne ovplyvniť teplotné pole. V takomto prípade hovoríme o *zviazanej* analýze (zviazanej úlohe, o úlohe *zviazaných polí*, o *multifyzikálnej* úlohe).

Medzi najčastejšie prípady zviazaných úloh patria:

- fluidno-mechanická (analýza účinkov prúdenia tekutiny na konštrukčné časti)
- tepelno-mechanická (analýza účinkov tepelného poľa na teleso; hlavne tepelné stroje a zariadenia, mechanické obrábanie a tvárnenie)
- piezoelektrická (analýza interakcie deformácie telesa a elektrického poľa, napr. mikrofóny a senzory)
- elektromagneticko-mechanická (interakcia elektromagnetického a mechanického poľa; elektromagnetické zariadenia, napr. pohyb kotvy cievky elektrického spínača alebo analýza indukovaného prúdu účinkom pohybu permanentného magnetu)
- elektromagneticko-tepelná (napr. indukčné ohrievanie)
- elektrostaticko-mechanická (prevodníky, spínače, akčné členy, pohony, senzory v MEMS, t.j. v mikro-elektro-mechanických systemoch nanotechniky)
- ďalšie kombinácie uvedených úloh

Niektoré zviazané úlohy, ako napr. fluidno-mechanické analýzy charakterizujú jasne oddelené podoblasti (v tomto prípade teleso a oblasť prúdenia tekutiny) a príslušné jasne oddelené závislé premenné. V takomto prípade dochádza k väzbe oboch oblastí len na ich stýkajúcej sa hranici a hovoríme o *geometricky* (plošne) zviazaných úlohách.

Iné úlohy zase charakterizuje neoddeliteľná väzba fyzikálne rozdielnych hľadaných premenných a parametrov v spoločnej oblasti (napr. nestacionárna tepelne-mechanická zviazaná úloha s teplotne závislými materiálovými vlastnosťami). Väzba premenných je vnútorná, v každom materiálovom bode oblasti, a vyžaduje formuláciu bilančných diferenciálnych rovníc a konštitutívnych vzťahov platných pre danú úlohu. O takýchto úlohách hovoríme, že sú *objemovo* (vnútorne) alebo *materiálovo* zviazané.

V programe Ansys možno na riešenie zviazaných úloh využívať dve základné metódy:

- *priamu* metódu, ktorá využíva špeciálne prvky so všetkými potrebnými stupňami voľnosti fyzikálnych polí pre priame riešenie príslušnej zviazanej úlohy. Využíva sa najmä na riešenie niektorých objemovo alebo materiálne zviazaných úloh.
- a tzv. *sekvenčné* metódy, nazývané aj metódami *prenosu zaťažení*, ktoré v iteračných krokoch postupne striedavo riešia fyzikálne rozdielne diferenciálne rovnice úlohy a vypočítané výsledky prenášajú medzi fyzikálnymi oblasťami, až kým sa nedosiahne konvergencia úlohy (konvergencia prenášaných zaťažení). Využívajú sa na riešenie plošne i objemovo zviazaných úloh, a to hlavne tých, ktoré nevykazujú vysoký stupeň nelinearity medzi zviazanými premennými.

Ktorú z týchto metód je možné alebo výhodnejšie použiť závisí od typu riešenej úlohy. Možno uviesť niekoľko zásad:

- metóda prenosu zaťažení
  - sieť prvkov pre uvažované fyzikálne polia je, alebo musí byť, rozdielna
  - ide o väzbu prúdenia s niečim iným ako je prenos tepla
- priama metóda
  - silná väzba medzi poliami
  - nelineárna väzba
  - vyskytuje sa akustické pole
  - vyskytuje sa piezoelektrina
  - ide o úlohu s prúdením cez pórovitý materiál
  - vyskytuje sa difúzia

Pri formulácii a programovaní zviazaných úloh *priamou* metódou sa v MKP využívajú dva algoritmické postupy:

1. so *silnou* väzbou polí (maticovou, simultánnou, plnou), kde maticový zápis rovníc má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \tag{23.1}$$

Väzba (v tomto prípade dvoch) rozdielnych polí $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ je zahrnutá v mimodiagonálnych sub-maticiach $\mathbf{K}_{12}$ a $\mathbf{K}_{21}$.

2. so *slabou* väzbou polí (sekvenčnou, alebo väzbou vektorov zaťažení), kde maticový zápis rovníc v najvšeobecnejšom prípade (obojstranná väzba) má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2) \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2) \end{bmatrix} \tag{23.2}$$

Väzbu polí v tomto prípade zabezpečuje závislosť $\mathbf{K}_{11}$ a $\mathbf{F}_1$ na $\mathbf{X}_2$, ako aj $\mathbf{K}_{22}$ a $\mathbf{F}_2$ na $\mathbf{X}_1$.

Špeciálne prvky, umožňujúce riešiť zviazaný problém priamou metódou, poskytujú oproti metóde prenosu zaťažení viaceré výhody. Jedna z hlavných, samozrejme, je to, že umožňujú analýzu zviazaných polí aj v prípadoch, kedy riešenie pomocou prenosu zaťažení monofyzikálnych prvkov nie je možné. Ďalej zjednodušujú modelovanie tým, že sa výpočtový model vytvára len s jedným typom prvku, s jedinou sieťov prvkov, s jednoduchým zadávaním okrajových podmienok i jednoduchou analýzou výsledkov.

23.2 Mechanicko-tepelná väzba

Teplotné pole $\mathbf{T}(x,y,z,t)$ vyvoláva v telese teplotnú (tepelnú) rozťažnosť, t.j. teplotné deformácie a teplotné napätia, ktoré sa superponujú s poliami od mechanického zaťaženia. Navyše teplota môže ovplyvniť materiálové vlastnosti telesa a tým i jeho pevnostnú a tuhostnú spoľahlivosť.

Samostatne sme sa s termálnymi a mechanickými pevnostnými úlohami zaoberali v [1], [2] i vo viacerých kapitolách tejto práce, kde možno nájsť základné diferenciálne rovnice i základné pojmy z týchto fyzikálnych oblastí.

V tejto časti sa budeme zaoberať zviazanými (súčasnými) účinkami mechanických polí a teploty a aplikačným postupom slúžiacim na analýzu takto zaťaženého telesa. Na ilustračné príklady budeme využívať program Ansys, dá sa však povedať, že aj v ostatných komerčných programoch MKP sú postupy riešenia tejto úlohy i ďalších zviazaných úloh analogické s týmto systémom.

Pri mechanicko-tepelných úlohách sa často hovorí len o *jednosmernej* zviazanosti, pretože vo väčšine takýchto úloh nás zaujíma len účinok teplotného poľa na mechanické polia zaťaženého telesa. Účinok mechanických deformácií a napätí na teplotné pole (pri obojstrannej väzbe) je pri mnohých úlohách malý a možno ho zanedbať. Pri niektorých špeciálnych úlohách (pozri obr. 1) sa ale musí zohľadniť.

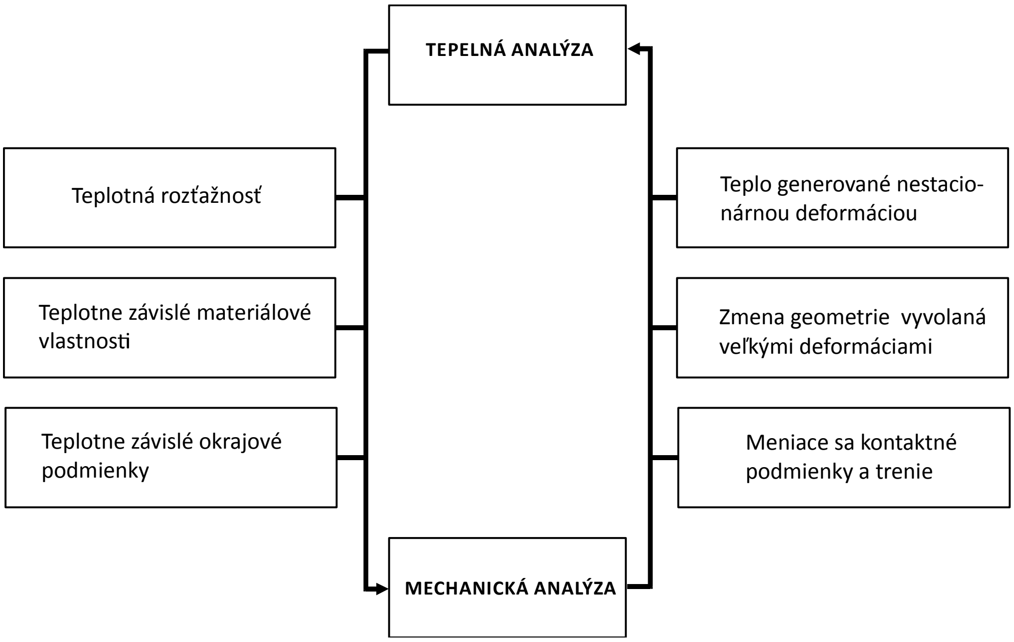
Najjednoduchšie sa riešia stacionárne lineárne úlohy v prípade, kedy zviazanie ustáleného teplotného pola a statických mechanických polí vedie na lineárnu výslednú úlohu.

Princíp postupu spočíva v tom, že sa najprv pre teleso nezávisle určí teplotné pole (vyrieši sa termálna úloha, pričom program teplotné pole uloží do výsledkového súboru). Potom sa nezávisle rieši mechanická pevnostná úloha s analogickým pevnostným prvkom na rovnakej prvkovej sieti ako termálna úloha (poloha uzlov je rovnaká) s udaným koeficientom teplotnej rozťažnosti a *s načítaným teplotným poľom* z uloženého súboru (t.j. s pridaným objemovým teplotným zaťažením). Vzhľadom na stacionárnosť a lineárnosť úlohy nie sú potrebné časové ani iterčné kroky.

Tento postup sa principiálne využíva aj v metódach prenosu zaťažení pri nestacionárnych i nelineárnych zviazaných úlohách, kedy sa ale o mnohonásobný efektívny prenos polí a kontrolu konvergencie pre príslušný časový resp. integračný krok stará zvolený typ riešiča programu.

Priame riešenie zviazanej termoelastickej úlohy (i s obojstrannou väzbou) možno numericky realizovať pomocou špeciálnych konečných prvkov, ktoré obsahujú stupne voľnosti pre obe fyzikálne prostredia.

Pokiaľ ide len o jednosmernú väzbu (čo je najčastejší prípad), kedy mechanické polia neovplyvňujú teplotné pole, priame riešenie sa málo líši od klasického postupu známeho z riešenia monofyzikálnej pevnostnej úlohy. Platí to i pre nestacionárne a nelineárne úlohy. Rozdiel spočíva len v tom, že materiálové vlastnosti, okrajové podmienky i zaťaženia musíme zadať komplexne pre pevnostnú i termálnu úlohu, čo špeciálny prvok svojími stupňami voľnosti umožňuje a vo vlastnom výpočtovom behu akceptuje.

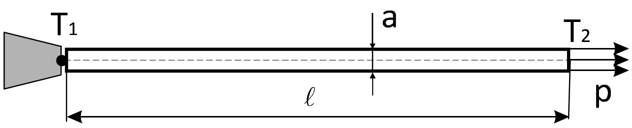


Obr.23.1 *Obostranne zviazaná mechanicko-tepelná analýza*

Prenos teplotného poľa (teplotného zaťaženia) na mechanicky zaťažené teleso si v programe AnsysMultiphysics (editácia úlohy je jednoduchšia ako v AnsysWorkbench) ukážeme na jednoduchom lineárnom príklade. Tú istú úlohu potom vyriešime pomocou špeciálneho prvku, ktorý rieši účinky zviazaných polí súčasne v jednom výpočtovom behu programu, čím celý proces aj pri takomto jednoduchom príklade citeľne zjednodušuje. (Zložitejšie úlohy, vrátane nestacionárnych a nelineárnych, sa riešia úplne rovnako, len sú spojené s väčšou časovou náročnosťou na editačnú tvorbu výpočtového modelu a odpadá tiež príjemná možnosť analytického overenia výsledkov.)

Príklad 23.1

Oceľový prút na obrázku je zaťažený ťahovým napätím $p = 100$ MPa . Prút má dĺžku $\ell = 1$ m,



štvorcový prierez so stranou $a = 10$ cm, modul pružnosti materiálu $E = 2\cdot10^5$ MPa , Poissonovo číslo $\mu = 0{,}3$ a koeficient teplotnej rozťažnosti $\alpha = 1{,}0\cdot10^{-5}\ 1/°C$. Prút je po dĺžke tepelne izolovaný s koncovými teplotami $T_1 = 180$ °C a $T_2 = 20$ °C . Tepelná vodivosť materiálu je $\lambda = 50\cdot10^3$ W/(mm°C) . Vlastnú tiaž prúta zanedbávame. Materiálové vlastnosti prúta sa pri zmene teploty nemenia. Vzťažná teplota $T_0 = 0$ °C.

Určte výsledné predĺženie prúta účinkom sily i teplototy.

Analytické riešenie

Priebeh teploty po dĺžke prúta je lineárny s priemernou teplotou

$$T = (T_1 + T_2)/2 = (180 + 20)/2 = 100\ °C$$

čo je zároveň pri vzťažnej teplote (t.j. teplote pri ktorej je teleso bez teplotných deformácií) zvolenej 0 °C aj priemerné ohriatie prúta ΔT. Potom predĺženie prúta účinkom teploty je

$$\Delta\ell_T = \alpha\Delta T\ell = 10^{-5}\cdot 100\cdot 1000 = 1 \text{ mm}$$

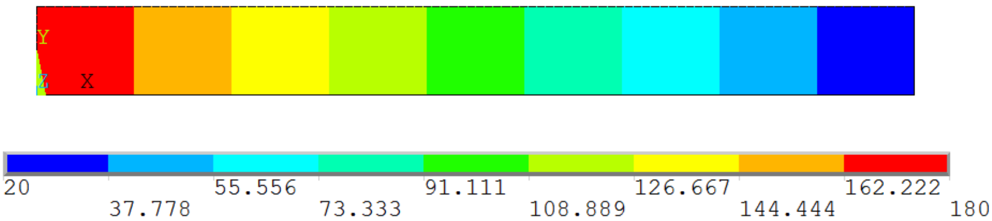
Predĺženie prúta účinkom mechanického napätia dostaneme zo vzorca z elementárnej pružnosti

$$\Delta\ell_F = \frac{F}{S}\frac{\ell}{E} = p\frac{\ell}{E} = 100\cdot\frac{1000}{2\cdot 10^5} = 0{,}5 \text{ mm}$$

Výsledné predĺženie prúta potom je $\Delta\ell = 1{,}5$ mm.

Sekvenčné riešenie pomocou programu Ansys

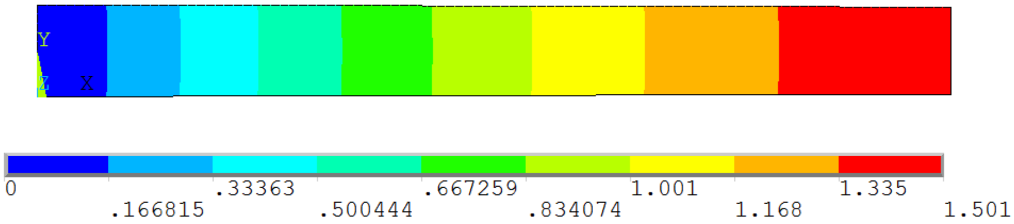
1. Zadanie termálneho prvku
   Predprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add..., Thermal Solid, 8 node 77, OK, Close;
2. Materiálové vlastnosti termálneho prvku
   Material Props, Material Models, Thermal, Conductivity, Isotropic, KXX = 50E3, OK,Material, Exit;
3. Tvorba geometrie
   Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1 = 0, X2 = 1000, Y1 = 0, Y2 = 100, OK;
4. Sieť prvkov
   Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, Size = 10, OK;
   Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;
5. Okrajové teplotné podmienky
   Solution, Define Loads, Apply, Thermal, Temperature, On Lines, Kliknite ľavú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 180, Apply, Kliknite pravú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 20, OK;
6. Výpočet rozdelenia teploty
   Solve,Current LS, OK;
7. Vykreslenie rozdelenia teploty
   General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Dof Solution, Nodal Temperature, OK;



8. Zmena prvku na mechanický (pevnostný)
   Predprocessor, Element Type, Switch Element Type, Thermal to Struc, OK; (Zavrite upozornenie, že treba zadať a skontrolovať všetky vstupné údaje a nastavenia pre fyzikálne iný typ prvku.)
9. Materiálové vlastnosti mechanického prvku
   Material Props, Material Models, Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX = 2E5, PRXY = 0.3, OK, Thermal Expansion (secant-iso), ALPX = 1E-5, OK, Material, Exit;
10. Upevnenie telesa
   Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Lines, Kliknite ľavú stranu obdĺžnika, OK, UX = 0, OK;

Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Keypoints, Kliknite ľavý spodný roh obdĺžnika, OK, UY = 0, OK;

11. Zadanie ťahového napätia
    Solution, Define Loads, Apply, Structural, Pressure, On Lines, Kliknite pravú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = -100, OK;
12. Zadanie teplotného zaťaženia (pri nezadaní názvu úlohy všetky súbory sú *file* s príslušnou koncovkou, súbor s teplotným poľom má koncovku *rth*)
    Solution, Define Loads, Apply, Temperature, From Therm Analy, Fname = file.rth, OK;
13. Výpočet úlohy
    Solve, Current LS, OK;
14. Vykreslenie predĺženia prúta od mechanického i teplotného zaťaženia
    General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, X-Component of displacement, OK;



15. Uloženie databázy úlohy (s odporúčaným premenovaním v pracovnom adresáre)
    ANSYS Toolbar, SAVE_DB;

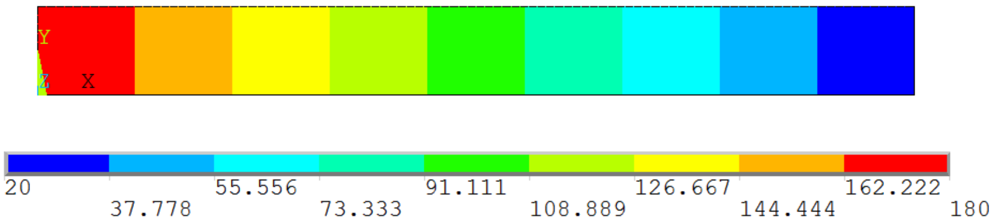
Príklad 23.2

Riešte príklad 23.1 priamou metódou pomocou termo-mechanického prvku

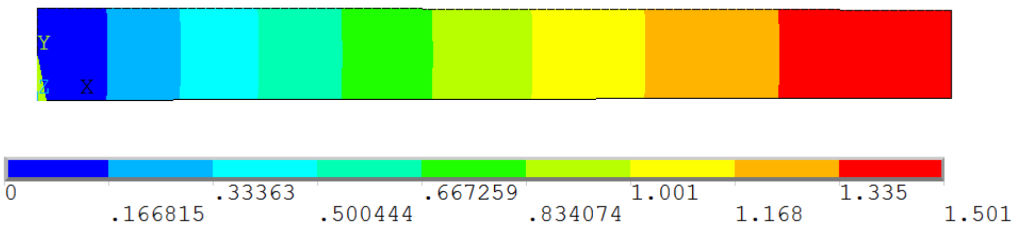
Priame riešenie pomocou programu Ansys

1. Zadanie termo-mechanického prvku
   Predprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add..., Coupled Field, Quad 8node 223, OK, Close;
2. Materiálové vlastnosti prvku
   Material Props, Material Models, Thermal, Conductivity, Isotropic, KXX = 50E3, OK, Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX = 2E5, PRXY = 0.3, OK, Thermal Expansion (secant-iso), ALPX = 1E-5, OK, Material, Exit;
3. Tvorba geometrie
   Modeling, Create,Areas, Rectangle, By Dimensions, X1 = 0, X2 = 1000, Y1 = 0, Y2 = 100, OK;
4. Sieť prvkov
   Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, Size = 10, OK;
   Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;
5. Okrajové podmienky
   Solution, Define Loads, Apply, Thermal, Temperature, On Lines, Kliknite ľavú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 180, Apply, Kliknite pravú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 20, OK;
   Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Lines, Kliknite ľavú stranu obdĺžnika, OK, UX = 0, OK;
   Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Keypoints, Kliknite ľavý spodný roh obdĺžnika, OK, UY = 0, OK;

6. Zadanie ťahového napätia
   Solution, Define Loads, Apply, Structural, Pressure, On Lines, Kliknite pravú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = -100, OK;
7. Výpočet
   Solve, Current LS, OK;
8. Vykreslenie rozdelenia teploty
   General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Dof Solution, Nodal Temperature, OK;



9. Vykreslenie predĺženia prúta od mechanického i teplotného zaťaženia
   General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, X-Component of displacement, OK;



10. Uloženie databázy úlohy (s odporúčaným premenovaním v pracovnom adresáre)
    ANSYS Toolbar, SAVE_DB;

Ako sme ukázali v predchádzajúcej časti, jednosmerné termálno-mechanické problémy sa riešia jednoducho, pričom možno využiť jednak klasické monofyzikálne prvky s prenosom tepelného zaťaženia, ako aj špeciálne prvky so priamym zviazním mechanických a teplotných polí.

Pravda, pri obojstrannej väzbe, t.j. v prípade kedy mechanické polia spätne ovplyvňujú teplotné pole, možno analýzu robiť len pomocou špeciálnych prvkov, ktoré majú v sebe takúto schopnosť zabudovanú.

23.2.1 Termoelasticita

Pri budenom čiste elastickom kmitaní telesa k bežným tlmiacich účinkom (mechanické tlmenie, odpor prostredia) prispieva aj interné (materiálové) tlmenie s relatívne veľmi malou generáciou tepla a určitou disipáciou celkovej elastickej energie (energie napätosti, deformačnej práce vnútorných síl) telesa. Pri väčšine technických úloh je toto tlmenie zanedbateľne malé, má však vplyv pri kmitaní niektorých členov (predovšetkým vysokofrekvenčných rezonátorov) MEMS systémov, kde je pre ich optimálny návrh užitočné riešiť obojstranne zviazanú termo-elastickú úlohu s analýzou tohto vplyvu.

Základné rovnice konečného prvku schopného priamo zviazať mechanické polia lineárne elasticky namáhaného telesa s poľom teploty pri nestacionárnom tepelnom a mechanickom zaťažovaní sa tvoria zviazaním diferenciálnych konštitutívnych rovníc oboch fyzikálnych úloh. Pri formulácii takýchto prvkov sa využíva diferenciálna rovnica nestacionárneho vedenia tepla (17.11) zviazaná s nestacionárnym prírastkom tepla [16] účinkom mechanických polí (druhý člen na pravej strane rovnice)

$$\boldsymbol{\Lambda}\nabla^2 T = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \boldsymbol{\alpha}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} \tag{23.1}$$

kde

$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}$ = matica tepelnej vodivosti

∇^2 = Laplaceov operátor

T = teplota

ρ = hustota materiálu

$c_v = c - \frac{T_0}{\rho}\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}$ = merná tepelná kapacita pri konštantnom objeme

c = merná tepelná kapacita (merné teplo) materiálu

T_0 = vzťažná teplote (pri ktorej je teleso bez teplotných deformácií)

$\boldsymbol{\alpha} = \left[\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, 0, 0, 0\right]^T$ = vektor koeficientov teplotnej rozťažnosti materiálu

t = čas

$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = \left[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\right]^T$ = vektor napätia

$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\right]^T$ = vektor celkovej deformácie

$\mathbf{D}$ = matica elastických materiálových vlastností telesa [1]

Pri nestacionárnom zaťažovaní je procedúra MKP schopná určiť nestacionárne hodnoty celkovej energie napätosti na elemente a sumáciou v celom telese zo vzťahu

$$A = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon}^T dV \tag{23.2}$$

Pri harmonickej analýze má tento vzťah tvar

$$A = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T dV \tag{23.3}$$

kde $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ je komplexný vektor celkovej deformácie. Reálna časť tohto vzťahu predstavuje energiu napätosti a imaginárna časť energiu disipovanú účinkom termoelastického tlmenia. Veľkosť termoelastického tlmenia v telese možno potom vyjadriť pomerom

$$\frac{1}{Q} = \frac{\sum_{n=1}^{NET} \mathrm{Im}(A)}{\sum_{n=1}^{NET} \mathrm{Re}(A)} \tag{23.4}$$

kde *NET* je celkový počet termoelastických prvkov telesa. Čím je toto číslo menšie, tým sú straty energie vplyvom termoelastického tlmenia menšie. Obrátená hodnota tohto čísla *Q* sa nazýva *faktor kvality* telesa z ohľadom na jeho termoelastické tlmenie (čím je Q väčšie, tým je kvalita napr. MEMS rezonátora vyššia).

Fyzikálnej príčine vzniku disipácie energie (vnútorného tlmenia) pri nestacionárnom elastickom zaťažovaní možno porozumieť predstavou cyklicky namáhaného tepelne izolovaného nosníka. Pri zložitejších tvaroch jeho kmitania niektoré časti budú ťahané (teplota klesne), iné stlačované (teplota vzrastie). Vzniknú časti s rozdielnou teplotou s príslušným tokom tepla. Pretože tepelný tok je nezvratný proces, dôjde k strate energie a k tlmeniu príslušného (rezonančného) tvaru kmitania nosníka (rezonátora).

Mechanizmus termoelastického tlmenia prvý teoreticky objasnil a pomocou materiálo-vých konštánt kvantifikoval C. Zener s obmedzením na kmitanie tenkých nosníkov. Pre takéto teleso odvodil analytický vzťah ([17], [18]) (vynechávame členy so zanedbateľne malým príspevkom)

$$\frac{1}{Q} = \frac{E\alpha T_0}{\rho c}\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{23.5}$$

kde E je modul pružnosti, α koeficient izotropmej teplotnej rozťažnosti, ω kruhová frekvencia kmitania nosníka a T_0 je vzťažná teplota nosníka v Kelvinoch. Pre konštantu tepelného relaxačného času platí

$$\tau = \frac{\rho c h^2}{\pi^2 \lambda} \tag{23.6}$$

kde h je výška pravouhlého prierezu nosníka a λ izotropný koeficient tepelnej vodivosti.

Aplikácia variačného princípu na pohybovú rovnicu prvku a rovnicu vedenia tepla s ich prepojením cez člen s materiálovou generáciou tepla v (23.1) vedie na maticové rovnice termo-elastického konečného prvku v tvare

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\mathbf{T}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_e^{te} & \mathbf{C}_e^{t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \dot{\mathbf{T}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e^{te} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_e^{t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{T}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{Q}_e(T,\boldsymbol{\sigma}) \end{Bmatrix} \tag{23.7}$$

kde

$\mathbf{M}_e$ = matica hmotnosti

$\mathbf{C}_e$ = matica mechanického tlmenia

$\mathbf{K}_e$ = matica tuhosti

$\mathbf{u}_e$ = vektor uzlových posunutí

$\mathbf{f}_e$ = vektor vonkajších uzlových síl

$\mathbf{C}_e^t$ = matica merného tepla (mernej tepelnej kapacity)

$\mathbf{C}_e^{te}$ = matica termoelastického tlmenia

$\mathbf{K}_e^t$ = matica tepelnej vodivosti

$\mathbf{K}_e^{te}$ = termo-elastická matica tuhosti

$\mathbf{T}_e$ = vektor uzlových teplôt

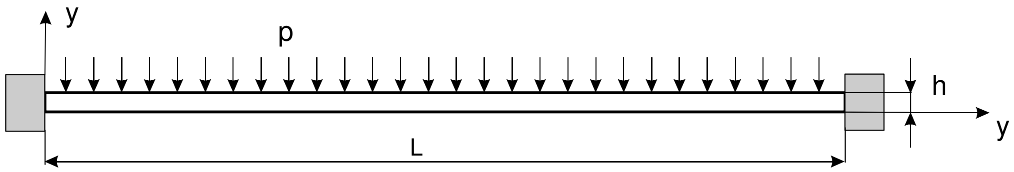
$\mathbf{Q}_e$ = vektor termo-elastických zaťažení prvku

Príklad 23.3

Tenký kremíkový obostranne votknutý nosník na obrázku harmonicky kmitá na ohyb účinkom budiaceho tlaku p = 0,1 MPa s frekvenciou f. Nosník má dĺžku 300 μm, jednotkovú šírku a výšku $h = 5$ μm. Materiálové vlastnosti nosníka sú:

Modul pružnosti E = 1,3 10^5 MPa, Poissonovo číslo μ = 0,3, hustota ρ = 2,33 10^{-15} kg/(μm)^3, tepelná vodivosť $\lambda = 9.0\ 10^7$ pW/(μmK), merné teplo $c = 6{,}99\ 10^{14}$ pJ/(kgK), koeficient teplotnej rozťažnosti $k =$ 7,8 10^{-6} 1/K.

Určte priebeh hodnoty termoelastického tlmenia 1/Q v rozmedzí frekvenčného budenia od $f = 10^5$ po 10^7 Hz.



Analytické riešenie

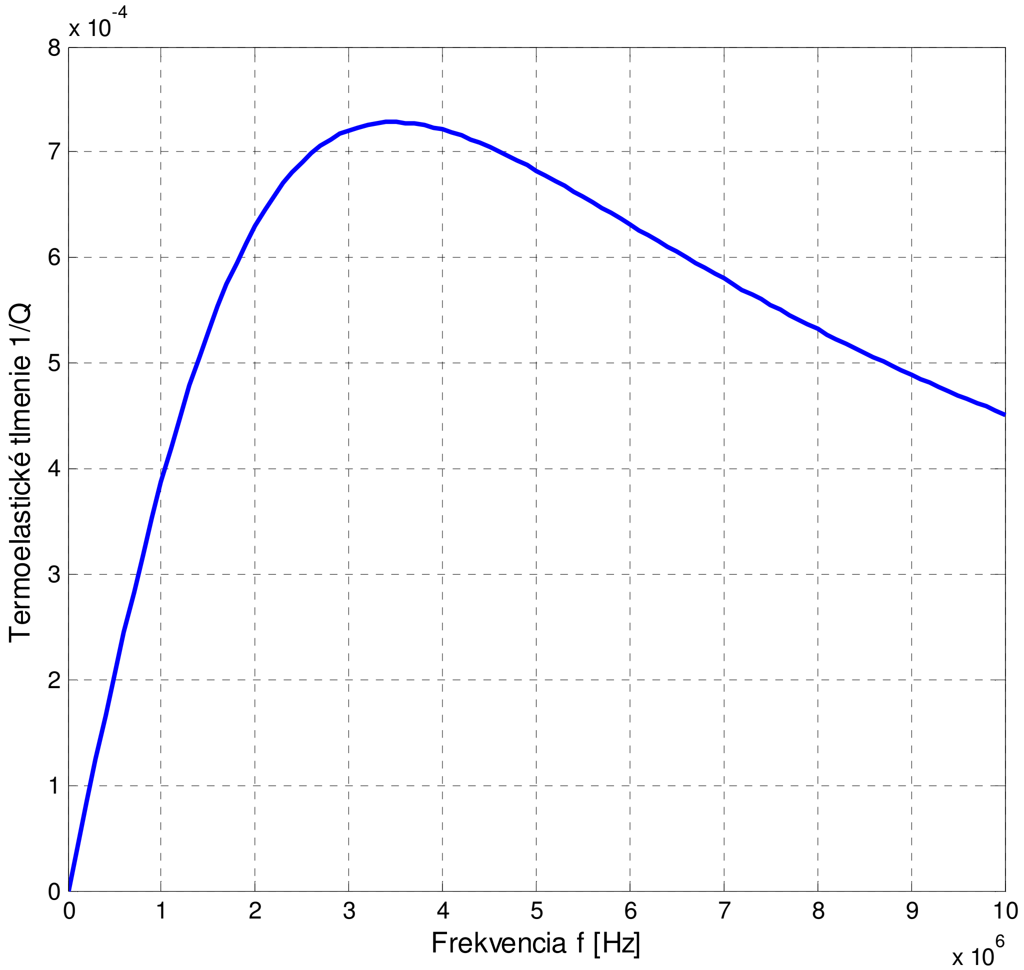
Využijeme vzťah (23.5), ktorý vyčíslime a graficky znázorníme pre celý rozsah frekvencie pomocou programu Matlab s príkazmi:

```
EE = 1.3*10^5; ro = 2.33*10^-15;  alfa = 7.8*10^-6;
cp =  6.99*10^14; kapa = 9.0*10^7; Ti = 300; h = 5;
delta = EE*alfa^2*Ti/ro/cp;
tau = ro*cp*h^2/kapa/pi^2;
x = 0:10^5:10^7;
om=2*pi*x;
y = delta*om*tau./(1 + (2*pi*x*tau).^2);
plot(x,y);
xlabel('Frekvencia f [Hz]','FontSize',10)
ylabel('Termoelastické tlmenie 1/Q','FontSize',10)
grid on
```

Pre extrém frekvencie platí

$$f_{ext} = \frac{1}{2\pi\tau} = 3{,}472\ 10^6\ \text{Hz} \tag{23.8}$$

a grafický priebeh termoelastického tlmenia je je zázornený na obr. 23.2.



Obr. 23.2 *Termoelastické tlmenie nosníka 1/Q podľa vzťahu (23.5) v rozsahu budiacej frekvencie f = 0 až 10^7 Hz*

Riešenie pomocou programu Ansys

Harmonická analýza nosníka v rozsahu budiacej frekvencie tlaku f = 0 až 10^7 Hz, s krokom 10^7 Hz (t.j. so 100 krokmi), je v programe Ansys jednoduchá. Zložitejšie je však vybratie a spracovanie potrebných hodnôt z výsledkovej databázy do vzťahu (23.4). Pretože termoelastické tlmenie 1/Q chceme vyčísliť pre každý krok, potrebujeme vytvoriť makro (pomocný podprogram v jazyku APDL – *Ansys Prametric Design Language*) , ktoré túto úlohu po prebehnutí výpočtu v cykle so 100 krokmi splní.

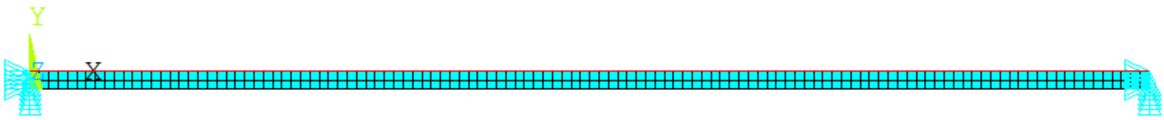
Makro sa napíše vo vhodnom editačnom programe, napr. v NOTEPADe, a pod nejakým názvom s koncovkou *mac* sa uloží do pracovného adresára Ansysu. Makro sa musí spustiť v postprocesore, lebo len tam sú vypočítané výsledky prístupné. Potrebné hodnoty a príkazy pre našu úlohu sú (význam príkazov možno nájsť v *Help*e Ansysu):

f = 100000
df = 100000
*dim,frek,table,100
*dim,q,table,100

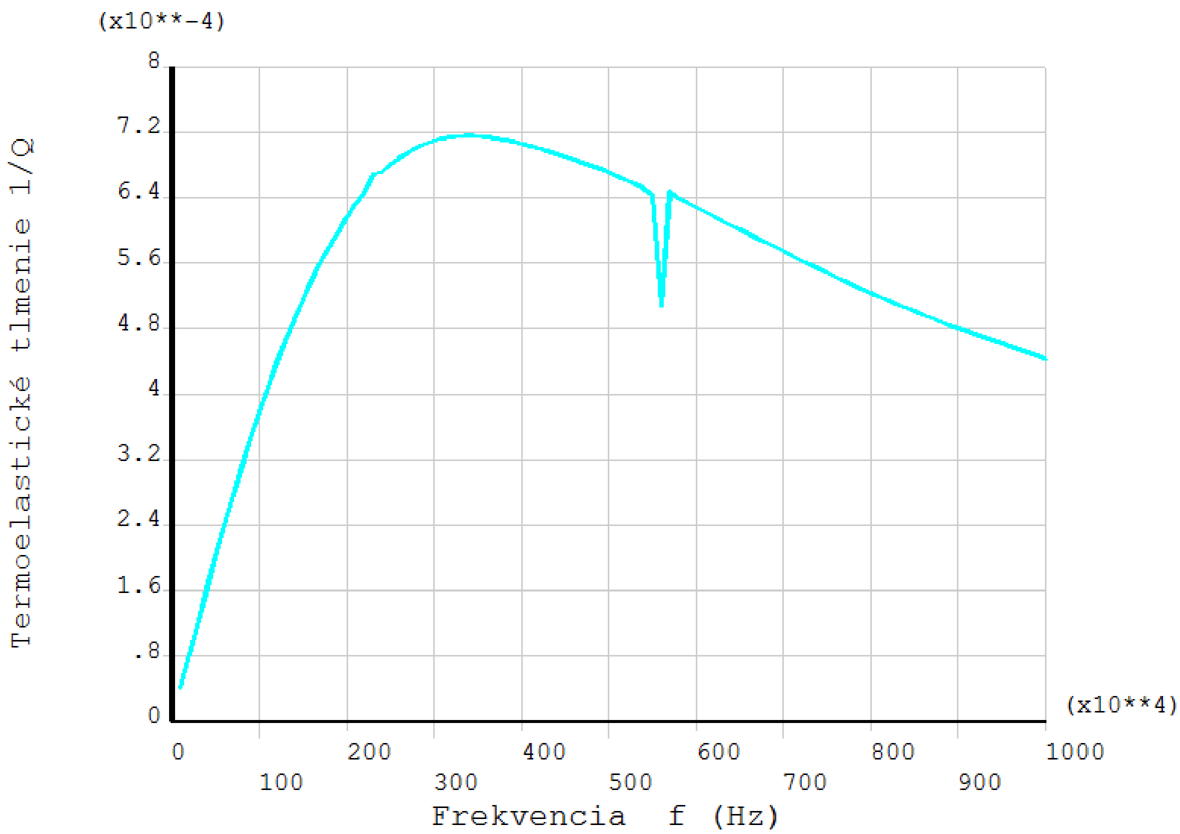
*do, i, 1, 100
set,,,,0, f
etab,wr,nmisc,4
set,,,,1, f
etab,wi,nmisc,4
ssum
*get,enr,ssum,,item,wr
*get,eni,ssum,,item,wi
qq=enr/eni
frek(i)=f
q(i)=1/qq
f=f+df
*enddo
/axlab,x,Frekvencia f (Hz)
/axlab,y,Termoelastické tlmenie 1/Q
*vplot,frek(1),q(1)

Po uložení makra s názvom *makro.mac* sme úlohu vyriešili pomocou postupnosti týchto interaktívnych príkazov:

1. Zadanie termomechanického prvku
   Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Dele,Add, Coupled Field, Quad 8node 223, OK, Close;
2. Teplota udaná v stupňoch Celsia sa prepočíta na absolútnu (TOFF = 273 °C)
   Material Props, Temperature Units, TOFF = Celsius, OK;
3. Referenčná teplota (teplota pri ktorej je teleso bez teplotnej deformácie)
   Define Loads, Settings, Reference Temp, TREF = 27, OK;
4. Materiálové vlastnosti prvku
   Material Props, Material Models, Favorites, Linear Static, Density, DENS = 2.33E-15, OK, Linear Isotropic, EX = 1.3E5, Density PRXY = 0.28, OK, Thermal Expansion (secant-iso), ALPX = 7.8E-6, OK, Thermal, Conductivity, Isotropic, KXX =90E6, OK, Specific Heat, C = 6.99E14, Material, Exit;
5. Tvorba geometrie nosníka
   Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1 = 0, X2 = 300, Y1 = 0, Y2 = 5, OK;
6. Sieť prvkov
   Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, Size = 2.5, OK;
   Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;
7. Upevnenie nosníka
   Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Lines, Kliknite ľavú a pravú stranu obdĺžnika, OK, UX = 0, Apply, Kliknite opäť ľavú a pravú stranu obdĺžnika, OK, UY = 0, OK;
8. Zaťaženie nosníka
   Define Loads, Apply, Structural, Pressure, On Lines, Kliknite hornú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 0.1, OK;



9. Typ analýzy
   Analysis Type, New Analysis, Harmonic, OK;
10. Údaje pre harmonickú analýzu
    Load Step Options, Time/Frequenc, Freq and Substeps, HARFRG, 0, 10E6, NUSURST = 100, KBC = Stepped, OK;
11. Výpočet
    Solve, Current LS, OK;
12. Ukončenie *Solution* a prechod do postprocesora
    Finish
    General Postproc
13. Spustenie makra na výpočet 1/Q a vykreslenie jeho priebehu v celom intervale frekvencií
    Utility Menu, Macro, Execute Macro, Name of macro to be executed = makro, OK;



14. Uloženie databázy úlohy (s odporúčaným premenovaním v pracovnom adresáre)
ANSYS Toolbar, SAVE_DB;

Výsledky prakticky súhlasia s analytickým riešením. Výhodov numerického riešenia je však možnosť využitia postupu aj pre iné tvary a geometriu rezonátorov alebo iných častí MEMS.

23.2.2 Termoplasticita

V novších verziách programu Ansys (od verzie 14.5 vyššie) možno vykonať aj približnú analýzu zviazanej termoplastickej úlohy pomocou prvkov PLANE223, SOLID226 a SOLID227. Myslí sa tým zvýšenie teploty telesa počas plastickej deformácie tým, že časť plastickej práce sa premení na teplo.

Vo formulácii termoplastického prvku sa zviaže diferenciálna pohybová rovnica prvku [2] s diferenciálnou rovnicou nestacionárneho vedenia tepla (17.11) cez hustotu tepelného toku $\dot{Q}^p$ od časti premenenej plastickej práce

$$\dot{Q}^p = \beta \dot{W}^p \tag{23.9}$$

kde β je Taylor-Quinneyov koeficient udávajúci aká časť plasickej práce $\dot{W}^p$ sa premieňa na teplo (je to zadávaná, vstupná hodnota pre danú úlohu) a pre časovú zmenu plastickej práce platí

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{23.10}$$

kde vektory na pravej strane rovnice sú

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{xz} \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x^p & \dot{\varepsilon}_y^p & \dot{\varepsilon}_z^p & \dot{\varepsilon}_{xy}^p & \dot{\varepsilon}_{yz}^p & \dot{\varepsilon}_{xz}^p \end{bmatrix}^T$$

Výsledná sústava rovníc nestacionárnej rovnováhy všeobecného e-teho termoplastického prvku v maticovoom zápise potom je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\mathbf{T}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_e^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \dot{\mathbf{T}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_e^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{T}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_e^p \end{Bmatrix} \tag{23.11}$$

kde

$\mathbf{M}_e$ = matica hmotnosti (prvku)
$\mathbf{C}_e$ = matica mechanického tlmenia
$\mathbf{K}_e$ = matica tuhosti
$\mathbf{u}_e$ = vektor uzlových posunutí
$\mathbf{f}_e$ = vektor vonkajších uzlových síl
$\mathbf{C}_e^t$ = matica merného tepla (mernej tepelnej kapacity)
$\mathbf{K}_e^t$ = matica tepelnej vodivosti
$\mathbf{T}_e$ = vektor uzlových teplôt
$\mathbf{Q}_e$ = vektor termálnych zaťažení prvku
$\mathbf{Q}_e^p$ = vektor tepelného zaťaženia prvku od tepla generovaného plastickou deformáciou

23.3 Väzba fluidného a mechanického poľa

S problémom interakcie prúdiacej tekutiny s viac alebo menej poddajným telesom (FSI, *Fluid-Structure Interaction*) sa v priemyselnej praxi a vedeckej analýze, ale i bežnom živote, stretávame veľmi často. Prúdenie závisí od tvaru telesa a jeho pohybu a naopak pohyb (deformácia) telesa závisí od mechanických síl prúdenia pôsobiacich na teleso. Spomeňme aspoň niekoľko typických príkladov: Kmitanie krídiel lietadla, deformácia a dynamické javy v potrubných systémoch, deformácie lopatiek turbíny, nafúknutie automobilového airbagu alebo dynamika padáka, hojdací pohyb lode, pumpovanie krvi srdečnou komorou a jej prietok cez chlopne a krvné riečište.

FSI samozrejme zohráva tiež dôležitú úlohu nielen pri riešení takýchto a analogických úloh, ale aj pri vývoji a dizajne nových moderných systémov, v ktorých uvedená fyzikálna zviazanosť je významná.

Neodmysliteľná nelineárna podstata a častá časová závislosť tejto triedy úloh komplikuje a väčšinou úplne znemožňuje využívanie analytických metód. Je preto prirodzené, že v ostatných rokoch došlo k významnému rozvoju počítačových numerických metód, ktoré sú v súčasnosti schopné efektívne riešiť širokú škálu úloh z oblasti FSI [19]

Úlohy jednosmernej zviazanosti, t.j. úlohy, kedy pohyb (deformácia) telesa v postate nemení hranicu a tvar fluidnej oblasti, sa riešia pomerne jednoducho. Nezávisle sa vyrieši fluidná úloha a jej učinky sa prenesú cez stýkajúcu sa hranicu oboch oblastí na teleso, ktoré sa potom opäť analyzuje nezávisle. Platí to aj pre nestacionárne a aj mechanicky nelineárne úlohy, kedy sa tento prenos zaťažení a riešení vykonáva postupne v jednotlivých diskrétnych časových a integračných krokoch. Pri veľkých úlohách treba prekonať problém nerovnakého nároku na hustotu siete pre fluidnú a mechanickú oblasť. Sú však k dispozícii algoritmy, ktoré sú schopné fyzikálne regulárne zviazať obe oblasti aj na hranici s nerovnakou hustotou siete, t.j. s neprekrývajúcimi sa (nestotožnenými) uzlami.

Väčšie algoritmické a programátorské ťažkosti sú spojemé s riešením obojstranne zviazaných fluidno-mechanických úloh. V takomto prípade je pohyb (deformácia) telasa taká, že nezanedbateľne mení tvar zviazanej fluidnej oblasti, čím ovplyvňí charakter a parametre prúdenia. Spätne zase zmenené prúdenie opäť zmení kofiguráciu telesa. V realite sa tento vzájomný účinok deje kontinuálne až po konečný ustálený stav alebo po konečný čas nestacionárneho procesu. Z toho teda pri numerickej metóde vyplýva potreba diskrétnej (krokovej) interpolácie s postupnou zmenou Eulerovskej siete fluidnej oblasti a s kontrolou jej kvality z hľadiska presnosti výsledkov. V programe Ansys, ako uvidíme, možno meniť sieť fluidnej oblasti v zavislosti od zmeny mechaniskej časti (*morphing*) v takomto procese v každom zaťažovacom kroku numerického riešenia.

23.3.1 Riešenie jednosmerne zviazanej úlohy pomocou fyzikálnych modelov (Physics)

V príklade 23.1 sme ukázali postup pri najjednoduchšej metóde riešenia jednosmerne *objemovo* (vnútorne) zviazaných úloh. Patrí do skupiny metód *prenosu zaťažení*. Jej princíp spočíva v tom, že sa najprv vytvorí a vyrieši fyzikálna úloha, z ktorej je potrebné preniesť zaťaženie (v uvedenom príklade to bola úloha ustáleného vedenia tepla). Potom sa vytvorí kompletný výpočtový model druhej (zviazanej) úlohy (v uvedenom príklade statická pevnostná úloha poddajného telesa) s totožnou polohou uzlových bodov modelu, na ktorú sa prenesie zaťaženie z výsledkovej databázy prvej úlohy (v uvedenom príklade objemové zaťaženie poľom uzlových teplôt) a jej riešenie dáva hľadaný výsledok zviazanej úlohy. Totožnosť uzlových bodov i celej prvkovej siete sa dosiahne jednoduchou zmenou typu elementu výpočtového modelu prvej úlohy na partnerský typ elementu druhej, zviazanej úlohy.

Pre zložitejšie úlohy (väčší počet zviazaných polí ako dve, potreba viacnásobného prenosu zaťažení pri obojstrannej väzbe alebo viacnásobnej väzbe, geometricky zviazané oblasti, významná zmena polohy a tvaru oblastí s potrebnou iteráciou prenosu zaťažení) sa uvedená metodika zovšeobecnila a zdokonalila do formy metódy prenosu zaťažení *zviazaných fyzikálnych modelov* (*Load Transfer Coupled Physics Method*).

Základné zásady použitia tejto metodiky v programe Ansys sú tieto:

- Zadajú sa typy prvkov pre všetky fyzikálne modely (príkaz *ET*)
- Vytvorí sa geometrický model úlohy (objemy, plochy) zohľadňujúci polohu, tvar a rozmery všetkých zviazaných oblastí a priradí sa im príslušný typ prvku (resp. prvkov pri objemovej väzbe) príkazmi *Mesh Attributes*
- Zadá sa vhodná hustota delenia (príkazy *Size Cntrls*) všetkých oblastí, vytvorí sa kompatibilná sieť prvkov a uzlov (príkazy *Meshing*), ktorá potom slúži na tvorbu jednotlivých fyzikálnych modelov.
- Vytvoria sa potrebné fyzikálne modely zviazanej úlohy týmto postupom:
    - príkazom *ET, číslo typu prvku, 0* sa urobia neaktívne všetky typy prvkov okrem toho, ktorý je správny pre príslušný fyzikálny model. Pre tento typ sa zadajú jeho potrebné charakteristiky (*Options*).
    - ďalej sa postupuje rovnako, ako by sme s daným prvkom riešili nezviazanú ulohu, t.j. zadajú sa materiálové vlastnosti, okrajové podmienky a zaťaženia (samozrejme zatiaľ okrem zaťaženia od zviazaných fyzikálnych modelov) a všetky ostatné potrebné údaje okrem štartu riešenia
    - Príkazmi *Physics* sa fyzikálny model pod vhodným názvom uloží na disk a vymaže z operačnej pamäti, aby nedošlo ku kolízii s ďalším fyzikálnym modelom, ktorý sa tvorí rovnakým postupom
- Načíta sa (*Physics*) fyzikálny model, ktorý je prvý v reťazci odovzdávania zviazaných zaťažení. Urobí sa aktívnym len jeho typ prvku (príkaz *ET*) a príkazom *Solve* sa vykoná výpočet s následnou kontrolou výsledkov a s prípadným opakovaním výpočtu po oprave alebo úprave parametrov fyzikálneho modelu a riadiacich parametrov výpočtu
- Vynuluje sa predchádzajúci fyzikálny model (*Physics*), načíta sa ďalší, pri ktorom sa postupuje rovnako ako v predchádzajúcom bode, až na to, že z výsledkového súboru (súborov) prechádzajúceho výpočtu (výpočtov) sa načítajú pred výpočtom aj zaťaženia zo zviazaných fyzikálnych modelov (príkaz *LDREAD*). Koncové prípony výsledkových súborov jednotlivých fyzikálnych modelov sú

  . RFL fluidná úloha

  . RTH termálna

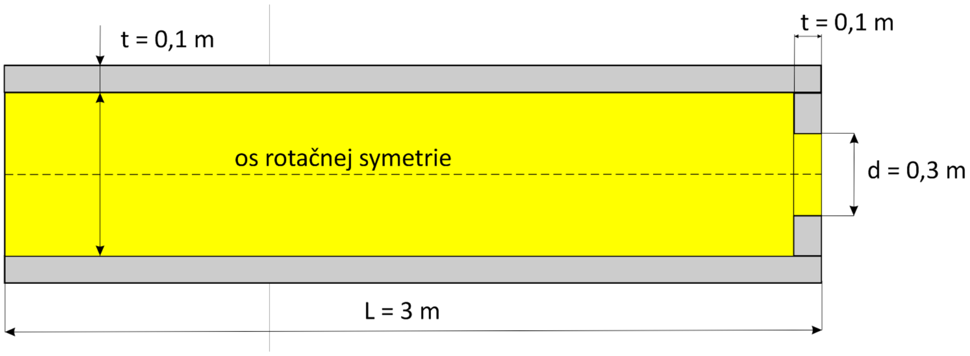
  . RMG elektromagnetická

  . RST všetky ostatné

Pri nelineárnych a nestacionárnych úlohách sa pri načítávaní zviazaného zaťaženia zohľadňuje príslušný zaťažovací, resp. časový krok.

Príklad 23.4

V časti betónovej rúry s rozmermi podľa obrázku prúdi voda s konštantnou vstupnou rýchlosťou 1 m/s. Na výstupe do atmosférického tlaku je prierez zúžený betónovým prstencom pevne spojeným s rúrou. Je potrebné zistiť veľkosť a rozdelenie tlaku prúdiacej vody na prstenec a rúru v tomto mieste a posúdiť ich namáhanie (napätosť). Zaťaženie od vlastnej tiaže prstenca a vody možno zanedbať. Hustota vody je 1000 kg/m^3 a viskozita $1{,}2\cdot10^{-3}$ $\mathrm{Pa\cdot s}$. Modul pružnosti betónu je $2{,}6\cdot10^{10}\,\mathrm{Pa}$ a Poissonovo číslo je 0,2.



Riešenie

Ide o interné ústálené prúdenie kvapaliny v tuhom potrubí, ktorého deformácia nemôže významne ovplyvniť fluidnú oblasť. Úloha je takto jednosmerne ziazaná, treba vyriešiť fluidnú úlohu a tlakové zaťaženie od prúdenia preniesť na betónové teleso. Úlohu sme v prostredí programu Ansys vyriešili pomocou opísanej metodiky fyzikálnych modelov týmito interaktívnymi príkazmi:

1. Zadanie typu použitých prvkov

Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Flotren CFD, 2D Flotran 141, Apply, Solid, Quad 4 node 182, OK, Close;

2. Vytvorenie tvoriacich plôch fluidnej oblasti a rúry kanála

Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions,

X1=0, X2=0.15,
Y1=0, Y2=4, Apply,
X1=0, X2=0.3,
Y1=0, Y2=4, Apply,
X1=0, X2=0.4,
Y1=0, Y2=4, Apply,
X1=0, X2=0.4,
Y1=3.9, Y2=4, OK;

Modeling, Operate, Booleans, Partition, Areas, Pick All;

3. Farebné označenie vytvorených plôch

PlotCtrls, Numbering, Area=ON, /NUM=Colors only, OK;

4. Zvolíme pohľad na vodorovnú polohu kanála a znázorníme vytvorené plochy

PlotCtrls, View Settings, Angle of Rotation, THETA=-90, OK;

5. Priradenie typu elementu plochám

Meshing, Mesh Attributes, Picked Areas, kliknite postupne tri plochy fluidnej oblasti (dve horné dlhé a hornú krátku), OK, TYPE= 1 Fluid 141, Apply, kliknite tri tvoriace plochy rúry kanála, OK, TYPE= 2 PLANE 182,OK;

6. Zadanie hustoty siete prvkov na čiarach plôch

Plot, Lines

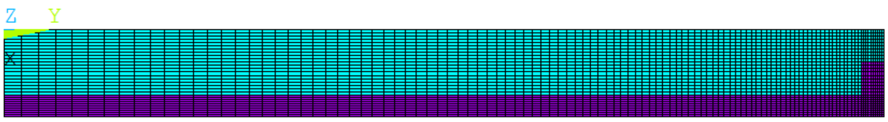
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, Picked Lines, Vyznačte postupne všetky krátke čiary na pravej i ľavej strane oblasti,OK, NDIV=10, Apply, Vyznačte postupne štyri dlhé čiary, OK, NDIV=100, SPACE=0.2, OK;

7. Vytvorenie siete prvkov

Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;

8. Nakreslenie a kontrola priradenia ich typu

PlotCtrls, Numbering, Elem/Attrib Numbering = Element type num, OK;
(Plot, Elements;)



9. Vynulovanie mechanických prvkov a vytvorenie fluidnej úlohy (Physics = fluid)

Napíšte do príkazového riadku ET,2,0 a potvrďte s ENTER;

Element Type, Add/Edit/Delete, (Type 1 Fluid 141) Options, K3 = Axisymm about Y, OK, Close;

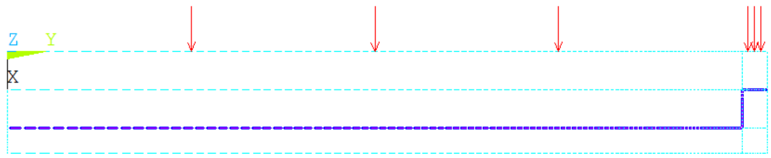
Flotran Set Up, Solution Options, TURB = Turbulent, OK;

Execution Ctrl, Global iterations = 150, OK;

Fluid properties, OK, Density = 1000, Viscosity = 0.0012, OK;

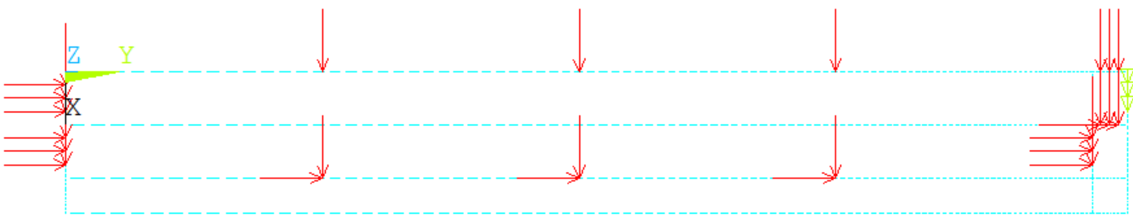
Plot, Lines;

Solution, Define, Loads, Apply, Fluid/CFD, Velocity, On Lines, Vyznačte dve horné čiary na osi rotácie, OK, VX=0, OK, On Lines, Vyznačte tri čiary zvyšného obrysu fluidnej oblasti mimo vstupu a výstupu,



OK, VX=0, VY=0, OK, On Lines, Vyznačte dve čiary vstupu, OK, VX=0, VY=1.0, OK, Pressure DOF, On Lines, Vyznačte čiaru výstupu, OK, PRES = 0, OK;

Physics, Environment, Write, Title = fluid, Fname = fluid, OK;



10. Vynulovanie fluidnej úlohy a fluidných prvkov, vytvorenie mechanickej úlohy (Physics = rura) a jej uloženie do pracovného adresára

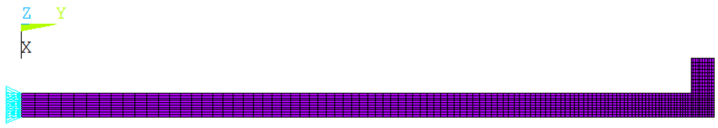
Physics, Environment, Clear, OK;

Preprocessor

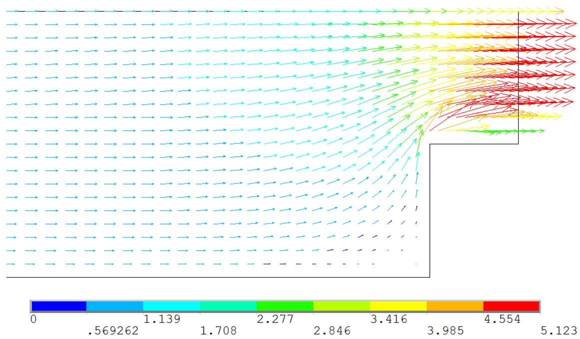
Príkazový riadok: ET, 1, 0, Enter; ET, 2, 182, Enter;

Element Type, Add/Edit/Delete, Type 2 Plane 182, Options, K3 = Axisymmetric, OK, Close;

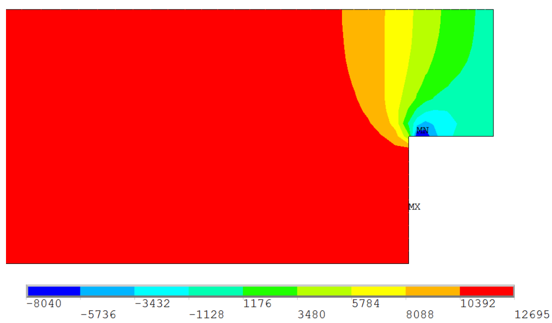
Material Props, Material Models, Favorites, Linear static, Linear isotropic, EX=2.6e10, PRXY=0.2, OK, Material, Exit;
Plot, Lines;
Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On LInes, Kliknite krátku zvislú čiaru telesa rúry na ľavej strane, OK, UY, VALUE=0, OK;
Unabridged Menu, Physics, Environment, Write, Title = rura, Fname=rura, OK;
Plot, Elements;



11. Výpočet fluidnej úlohy
Physics, Environment, Clear, OK;
Physics, Environment, Read, fluid, OK;
Plot, Elements;
Solution, Run FLOTRAN;
12. Znázornenie rýchlosti prúdenia [m/s]
General Postproc, Read Results, Last set;
Plot Results, Vector Plot, Predefined, OK, Zväčšite oblasť výstupu;

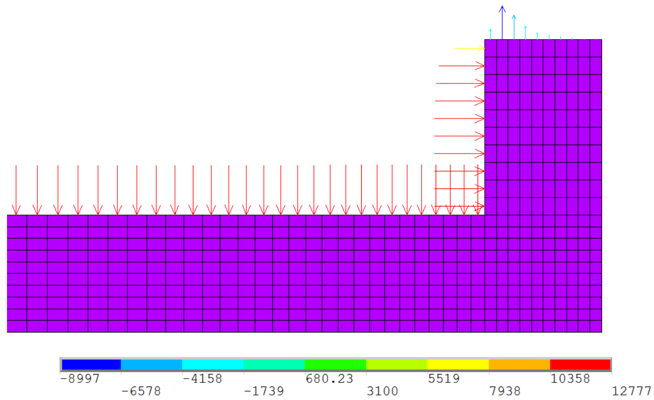


13. Znázornenie tlaku [Pa]
Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, Pressure, Scale Factor = True Scale, OK;

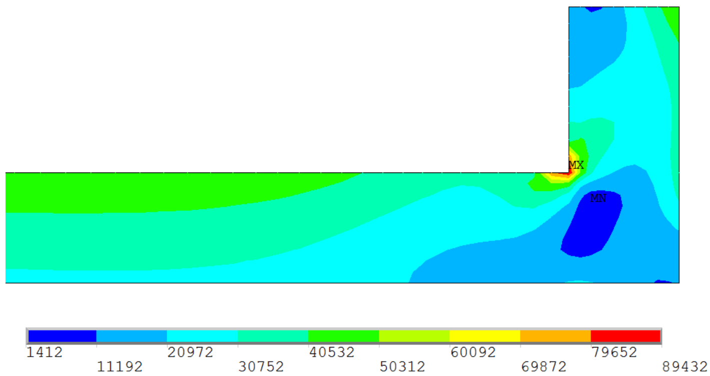


14. Načítanie mechanickej úlohy, zadanie tlaku z fluidnej úlohy a výpočet
Solution, Physics, Environment, Clear, OK;
Physics, Environment, Read, rura, OK;
Plot, Elements;
Solution, Define Loads, Apply, Pressure, From Fluid Analy, Load step = LAST, substep no.=LAST, Fname = file.rfl, OK;

PlotCtrls, Symbols, Show press and convect as, Arrows, OK;



Solve, Current LS, OK;
15. Znázornenie von Misesovho redukovaného napätia [Pa]
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Stress, von Mises stress, Scale Factor = True Scale, OK;



Poznámka k príkladu

Príklad má predovšetkým metodický účel – ukazuje postup riešenia jednosmerne zviazanej fluidno-mechanickej úlohy pomocou tvorby fyzikálnych modelov zdieľajúcich spoločnú geometrickú a sieťovú databázu. Vzhľadom na prácnosť opisu iteraktívneho postupu výpočtu sa zvolil čo najjednoduchší tvar oblastí. Na obrázku redukovaného (porovnávacieho) von Misesovho napätia vidieť, že v ostrom prechode rúry do koncového prstenca dochádza ku koncentrácii napätia i keď maximálne napätie je tam zdanlivo malé. Každý skúsenejší užívateľ MKP však vie, že táto hodnota je v tzv. singulárnom bode (nulový polomer zaoblenia vrubu) nerealistická, teoreticky nekonečne veľká, dochádzalo by k jej narastaniu pri zhusťovaní siete v tomto mieste. Takéto miesto si vyžaduje vhodné zaoblenie, ktoré sme nepoužili kvôli zjednodušeniu tvorby siete prvkov.

23.3.2 Riešenie obojsmerne zviazanej úlohy pomocou fyzikálnych modelov (Physics)

Pri niektorých zviazaných fluidno-mechanických úlohách dochádza k takej veľkej deformačnej zmene mechanického modelu (telesa) od síl prúdenia, že táto zmena významne ovplyvňuje pomery vo zviazanom fluidnom poli. V takom prípade ide o obojsmernú väzbu týchto polí, ktorá vyžaduje následnú úpravu hranice fluidnej oblasti i jej prvkovej siete a opakované iteračné vykonávanie výpočtu až po ustálenie polohy deformovaných častí.

Riešenie takejto úlohy v programe Ansys pomocou fyzikálnych modelov so spoločnou databázou je analogické s postupom uvedenom v predchádzajúcej časti s niektorými špeciálnymi zmenami a doplnkami.

Prvou je spomínaná zmena hranice a siete fluidných prvkov tak, aby sa prispôsobili nezanedbateľnej deformácii mechanického modelu (*mesh morphing*). Uskutočňuje sa pomocou príkazov *DAMORPH* (uprav sieť prvkov na vyselektovanej ploche) a *DVMORPH* (uprav sieť prvkov na vyselektovanom objeme) s možnosťou troch volieb

- *Morphing* – program posunie uzly a s nimi spojené prvky fluidného poľa tak, aby boli kompatibilné s deformovanou sieťou mechanického poľa (telesa)
- *Remeshing* – program odstráni sieť fluidného poľa a nahradí ju novou, ktorá je kompatibilná s deformovanou sieťou mechanického poľa
- *Morphing or Remeshing* - program najprv vykoná *Morphing* a ak zlyhá, pre neprípustnú degeneráciu tvaru prvkov, tak vykoná *Remeshing*

Ďalšou charakteristikou riešenia takejto úlohy je iteračný cyklus, ktorý s dostatočnou presnosťou nájde rovnovážny stav deformácie telesa účinkom fluidných síl a jemu prislúchajúce riešenie parametrov prúdenia v konečnom tvare fluidnej oblasti. Potreba takého procesu vyplýva z toho, že pri prvom kroku uvedeného cyklu pôsobia fluidné sily na nedeformované „mäkké“ teleso alebo prekážku (nereálnou) väčšou silou ako na deformovanú polohu vyvolanú účinkom týchto síl.

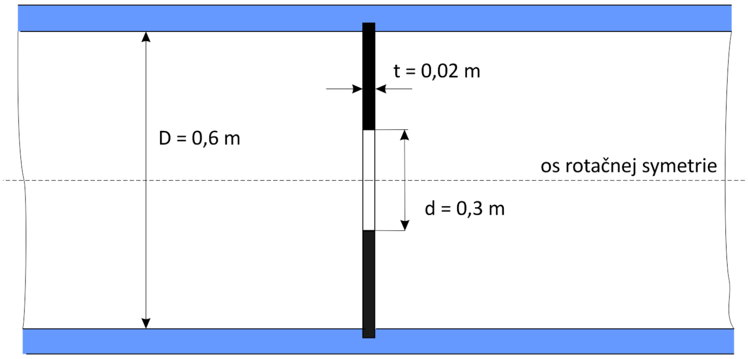
Deformácia telesa pri obojsmernej fluidno-mechanickej úlohe skoro vždý patrí do kategórie veľkých deformácií, takže aj hľadanie deformácie takéhoto telesa je nelineárna úloha. Navyše táto úloha sa z uvedených dôvodov rieši opakovane v cykle hľadania konečnej polohy telesa s ohľadom na pôsobenie fluidných síl, ktoré sa menia pri zmene deformácie telesa. Často sa potom, najmä pri veľkých úlohách, v zaťažovacích krokoch cyklu nerieši nelineárna pevnostná úloha telesa vždy od začiatku, ale sa robí reštart z predchádzajúceho kroku. Reštart potrebuje súbory *EMAT* (obsahujú prvkové matice) a *ESAV* (obsahujú uložené údaje o prvkoch nelineárnej úlohy), ktoré pri zviazanej úlohe so spoločnou databázou treba pre potreby reštartu v spomínanom cykle izolovať pomocou príkazov */ASSIGN* Itakto

- príkazmi */ASSIGN* sa zabezpečí neprepísanie súborov *EMAT* a *ESAV* pred spustením reštartu nelineárnej mechanickej úlohy
- vykoná sa reštart
- príkazmi */ASSIGN* sa zabezpečí návrat súborov *EMAT* a *ESAV* k pôvodným (databázovým) hodnotám pre ich použitie vo fluidnom fyzikálnom modeli.

Praktickú aplikáciu uvedených postupov pri obojstranne zviazanej fluidno-mechanickej úlohe si ukážeme na príklade.

Príklad 23.5

V oceľovej kruhovej rúre je votknutý gumový prstenec (s rozmermi podľa obrázku), cez ktorý preteká voda. Jej spriemerovaná rýchlosť v dostatočnej vzdialenosti pred prstencom je 0,35 m/s. Otvor prstenca má zaoblené hrany polooblúkom s polomerom 0,01 m. Dĺžka rúry pred prstencom nech je 1,5 m a za prstencom 4,5 m. Treba určiť deformáciu tejto gumennej clony a jej napätosť od tlakového účinku prúdiacej vody, ako aj základné charakteristiky prúdenia v okolí zdeformovanej clony. Hustota vody je 1000 kg/m^3 a viskozita $4{,}6 \cdot 10^{-4}\ Pa \cdot s$. Materiálové konštanty dvojparametrového Mooney-Rivlinovho hyperelastického materiálového modelu clony (pozri 10. kapitolu - Konštitutívne rovnice hyperelastického materiálu) sú: $C_{10} = 293000$, $C_{01} = 177000$, $D_1 = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$.



Riešenie

Ide o interné ústálené prúdenie kvapaliny v tuhom potrubí, ktorého deformácia nemôže významne ovplyvniť fluidnú oblasť a jeho vútorná rotačne symetrická plocha bude tvoriť len pevnú hranicu fluidnej oblasti. Úloha je však obojsmerne ziazaná, pretože relatívne mäkká rotačne symetrická gumová clona sa účinkom tlaku prúdu vody silne zdeformuje a ovplyvní takto aj pomery prúdenia oproti stavu pred jej deformáciou, ako aj tvar a hranicu fluidnej oblasti v okolí clony.

Úloha sa v podstate rieši analogicky ako predchádzajúci príklad, t.j. vytvorí sa spoločná geometrická a prvková databáza s dvomi samostatnými fyzikálnymi modelmi *fluid* a *struc*. Pravda, musíme počítať s *morphingom* prvkovej siete v okolí clony a samozrejme s iteračným cyklom, ktorý nájde dostatočne presnú konečnú deformáciu clony. Takisto treba predpokladať, že deformácia clony bude patriť do kategórie veľkých deformácií a bude treba pri jej riešení zapnúť túto voľbu v jej fyzikálnom modeli.

Pretože interaktívne zadávanie úlohy by bolo veľmi zdĺhavé a náročné na presné užívateľské zopakovanie, vyriešime ju za pomoci logicky členených makier. Význam jednotlivých príkazov v makrách možno nájsť v *Help*e Ansysu najjednoduchšie tak, že sa v príkazovom riadku vykoná príkaz *HELP, "názov príkazu"*, napr. *HELP,LESIZE* (všetko sa môže písať aj malými písmenami). Po spustení každého makra, ktoré je treba spúšťať postupne v poradí, ako ich uvádzame (v jednom behu programu), možno vstúpiť do riešenia úlohy interaktívne a pozrieť si, resp. skontrolovať medzivýsledky. Ako sme už uviedli v predchádzajúcej časti, makro sa vytvorí vo vhodnom editore (napr. *Notepad*) a pod určitým názvom s koncovou príponou *.mac* sa uloží v pracovnom adresári.

Prvé makro sme nazvali *siet.mac*, pretože slúži na vytvorenie siete prvkov pre oba fyzikálne modely:

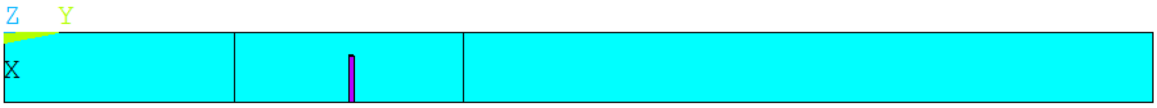
Makro **siet.mac**

```
/prep7
shpp,off
et,1,141
et,2,182
/pnum,area,1
/pnum,type,1
/numb,1
! Tvorba geometrického modelu
```

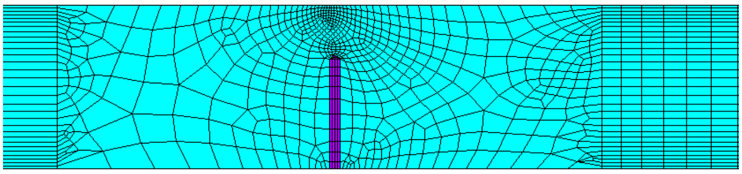
```
rect,0.1,0.3,1.5,1.52
rect,0.,0.3,1.0,2.0
rect,0.,0.3,0.,1.0
rect,0.,0.3,2.0,5.0
aovlap,all
k,22,0.11,1.51
larc,1,4,22,0.011
al,6,4
adel,7
al,6,3,22,7,8,5,21,1
! Zadanie hustoty a zhusťovania siete na čiarach
lesize,1,,,10,-2
lesize,2,,,4,0
lesize,3,,,10,-2
lesize,4,,,4,0
lesize,5,,,30,-3
lesize,7,,,30,-3
lesize,9,,,30,-3
lesize,15,,,30,-3
lesize,17,,,8,0.2
lesize,18,,,8,0.2
lesize21,,,20,12
lesize,8,,,50,-0.07
lesize,19,,,30,6
lesize,20,,,30,6
lesize,22,,,20,12
! Označenie plôch pre prvky clony a uloženie plochy pre morphing
asel,s,,,1,2
aatt,2,2,2
asel,s,,,3
cm,area2,area
alist
! Označenie plôch pre fluidné prvky
asel,a,,,5,6
aatt,1,1,1
alls
! Tvorba siete prvkov
eshape,2
asel,u,,,2,3
amesh,all
eshape,0
asel,s,,,2,3
amesh,all
alls
! Otočenie modelu do vodorovnej polohy a znázornenie plôch
/angle,,-90
aplot
```

Makro *siet.mac* sa po otvorení programu Ansys vykoná po zadaní postupnosti príkazov: Utility Menu, Macro, Execute Macro, Name = siet, OK;

Zobrazia sa vytvorené plochy, ktorých rotáciou okolo osi symetrie (os *y*) vznikne fluidná oblasť a teleso clony



Je vidieť plochu v okolí clony, ktorá sa využije na *Morphing*. Vzhľadom na jej zložitejší tvar sa v tejto oblasti musela urobiť zmiešaná trojuholníková a štvoruholníková sieť prvkov. Možno ju znázorniť príkazmi: Utility Menu, Plot, Elements;



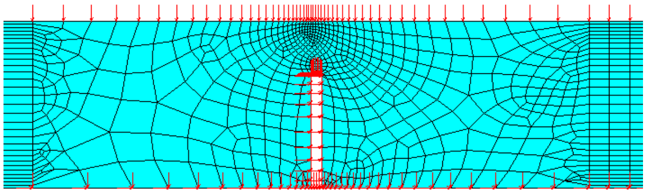
Druhé makro s názvom *fmodel.mac* slúži na vytvorenie fluidného modelu a jeho zapísanie na disk. Spúšťa sa nadväzne po makre *siet*.

Makro **fmodel.mac**

```
et,1,141
et,2,0   ! Deaktivácia prvkov clony
keyopt,1,3,1   ! Rotačne symetrické fluidné prvky
vin=3.5e-1   ! Vstupná rýchlosť vody
! Charakteristiky prúdenia a vlastnosti vody
flda,solu,flow,1
flda,solu,turb,1
flda,iter,exec,300
flda,outp,sumf,10
flda,prot,dens,constant
flda,prot,visc,constant
flda,nomi,dens,1000.
flda,nomi,visc,4.6e-4
! Okrajové podmienky pre rýchlosť na čiarach fluidnej oblasti
lsel,s,,,8,17,9
lsel,a,,,20
dl,all,,vx,0.,1
lsel,s,,,9
dl,all,,vx,0.,1
dl,all,,vy,vin,1   ! Rýchlosť na vstupe
lsel,s,,,2
lsel,a,,,18,19
lsel,a,,,21,22
dl,all,,vx,0.,1
dl,all,,vy,0.,1
lsel,s,,,1,3,2
lsel,a,,,6
dl,all,,vx,0.,1
dl,all,,vy,0.,1
```

! Okrajová podmienka pre tlak na výstupe
lsel,s,,,15
dl,15,,pres,0.,1
alls
! Zápis fluidného fyzikálneho modelu na disk pod názvom fluid
physics,write,fluid,fluid

Po vykonaní makra sa sieť zobrazí s vyznačenými okrajovými podmienkami pre rýchlosť a tlak (nulový na výstupe). Siet okolo clony je

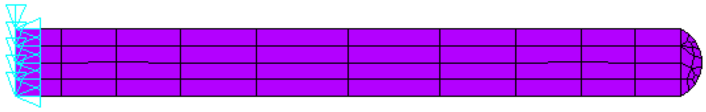


Tretie makro nazvané *gmodel.mac* vytvorí fyzikálny model gumenej clony a zapíše ho na disk:

Makro **gmodel.mac**

physics,clear !Vymazanie fluidného modelu z operačnej pamäti
et,1,0 ! Deaktivácia fluidných prvkov
et,2,182 ! Aktivácia pevnostných prvkov clony
keyopt,2,3,1 ! axisym
keyopt,2,3,2
keyopt,2,6,1
keyopt,2,1,2
! Zadanie vlastností gumy
tb,hyper,2,,2,mooney
tbdata,1,0.293e7,0.177e7, (1.0-2.0*0.49967)/(0.293e7+0.177e7)
! Votknutie vonkajšieho obvodu clony
lsel,s,,,2
nsll,,1
d,all,ux,0.
d,all,uy,0.
alls
finish
! Údaje pre pevnostnú úlohu
/solu
antype,static
nlgeom,on
cnvtol,f,,,,-1
! Zápis mechanického modelu na disk pod názvom struc
physics,write,struc,struc
eplot ! Nakreslenie siete prvkov clony
physics,clear !Vymazanie mechanického modelu z operačnej pamäti
save ! Uloženie spoločnej databázy modelov

Po vykonaní makra sa zobrazí sieť prvkov gumovej clony aj s vyznačením votknutia (kvôli úspore miesta sme ju zobrazili vo vodorovnej polohe).



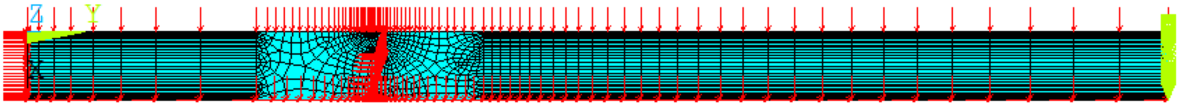
Posledné výpočtové makro *cyklus.mac* vykoná vlastný nelineárny výpočet úlohy. V cykle načíta fluidný model a vyrieši fluidnú úlohu pre vstupnú polohu clony a zaťaží clonu prvotným tlakom vody. Následný nelineárny pevnostný výpočet clony stanoví jej prvú zdeformovanú polohu, podľa ktorej sa *morphing*om upraví tvar a sieť fluidných prvkov v okolí clony. Spustí sa opäť fluidný výpočet a proces sa v cykloch opakuje, až po do siahnutie zanedbateľných zmien polohy clony. Počet iteračných cyklov sme stanovili na desať.

Makro **cyklus.mac**

```
*do,i,1,10   !Začiatok desiatich krokov cyklu
/solu
physics,read,fluid   ! Načítaj fluidný fyzikálny model
*if,i,ne,1,then   ! Po prvom kroku už stačí len 100 iterácií v kroku
flda,iter,exec,100
*endif
solve   ! Vykonaj prvý krok riešenia fluidnej úlohy
fini
/prep7
physics,read,struc   ! Načítaj mechanický model do operačnej pamäti
! Príprava reštaru mechanickej úlohy
/assign,esave,struc,esav
/assign,emat,struc,emat
! Po prvom kroku už rob len reštart
*if,i,gt,1,then
parsave,all
resume
parresume
/prep7
antype,stat,rest
fini
*endif
! Načítaj tlak na clonu z fluidnej úlohy
/solu
solc,off
lsel,s,,,1,3,2
lsel,a,,,6
nsll,,1
esel,s,type,,2
ldread,pres,last,,,,,rfl
sfelist
alls
rescontrol,,none
! Rieš mechanickú úlohu
solve
*if,i,eq,1,then
```

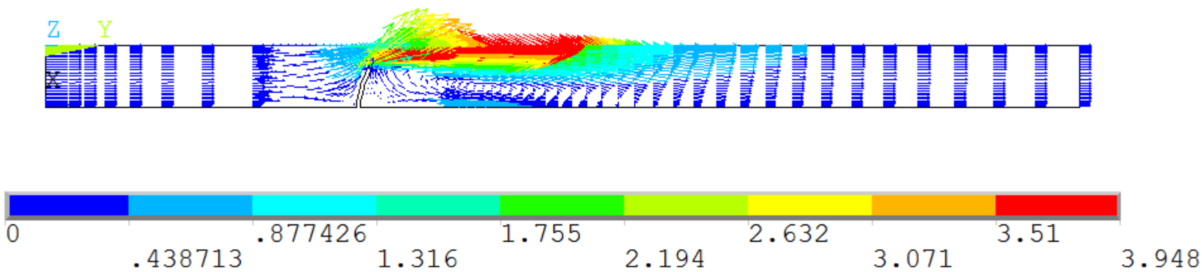
```
save
*endif
fini
! Vykonaj morphing siete na ploche v okolí clony
/prep7
damorph,area2,,2
fini
alls
! Vráť sa k pôvodnej databáze prvkových hodnôt
/assign,esav
/assign,emat
*enddo    ! Koniec cyklu
save
finish
! Príprava na interaktívnu kontrolu výsledkov prúdenia
/angle,,-90
physics,read,fluid
eplot
```

Po prebehnutí výpočtu sa znázorní fluidný model

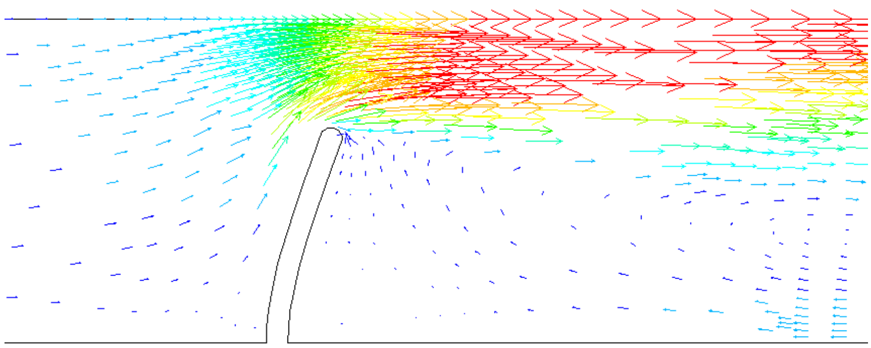


a možno si pozrieť niektoré výsledky výpočtu.

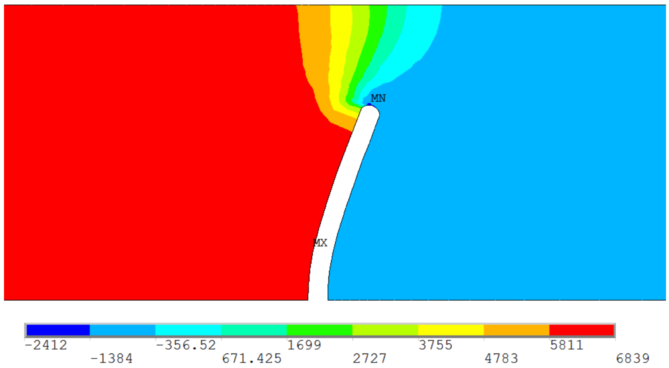
Príkazy na vektorové znázornenie rýchlosti prúdenia sú [m/s]:
General Postproc, Read Results, Last Set;
Plot Results, Vector Plot, Predefined, OK;



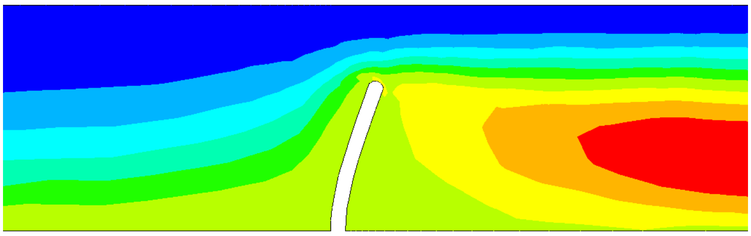
Zväčšené okolie clony



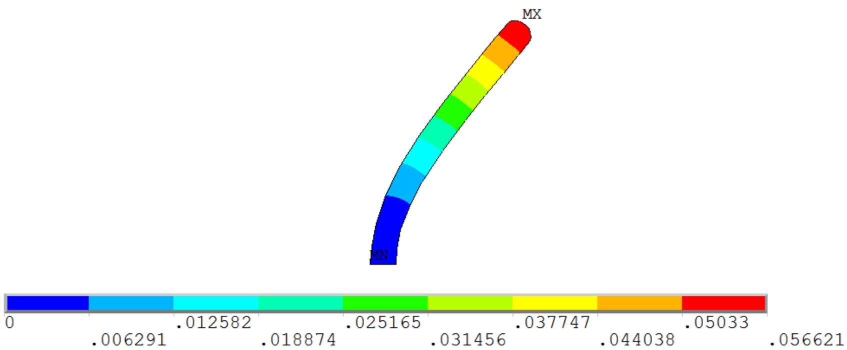
Znázornenie tlaku [Pa]
Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, Pressure, OK;



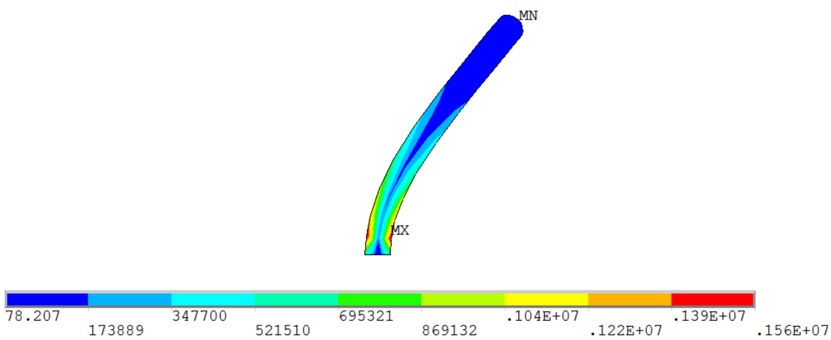
Prúdnice
Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Other FLOTRAN Quantities, Stream Function – 2D, OK;



Deformácia clony [m]
Preprocessor, Physics, Environment, Read, Struc;
General Postproc, Read Results, Last Set;
Plot Results, Nodal Solu, Nodal Solution, DOF Solution, Displacement vector sum, OK;



Napätie v clone [Pa]
Plot Results, Nodal Solu, Stress, von Mises stress, OK;



Poznámka k príkladu

Pri použití Flotranu na riešenie fluidnej úlohy v programe Ansys sa výsledky zapíšu do súboru *Názov úlohy.rfl* (v tomto príklade *file.rfl)*. Pokiaľ vo fluidnom modeli urobíme nejaké zmeny a spustíme výpočet, tak sa tento súbor automaticky neprepíše novými výsledkami (ako pri iných typoch úloh), ale riešenie nadväzuje na predchádzajúce iteračné kroky. Ak chceme výpočet zopakovať od začiatku, musíme tento súbor z pracovného adresára vymazať, alebo nastaviť vo *FLOTRAN Set Up* reštart úlohy od iterácie číslo 1.

24 Elektromagnetické pole

24.1 Úvod a základné pojmy

Elektromagnetické pole vytvárané elektricky nabitými objektami vo všeobecnosti predstavuje vzájomnú väzbu elektrického a magnetického poľa. Pre elektromagnetické pole platia štyri Maxwellove rovnice

1. Gaussov zákon elektrostatiky

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{24.1}$$

2. Zákon spojitosti indukčného toku

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{24.2}$$

3. Zákon elektromagnetickej indukcie (Faradayov indukčný zákon)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{24.3}$$

4. Zákon celkového prúdu (zovšeobecnený Ampérov zákon)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{24.4}$$

kde $\nabla\cdot$ je operátor divergencie
$\nabla\times$ je operátor rotácie
$\mathbf{D}$ je vektor hustoty elektrického toku [C/m^2]
$\mathbf{B}$ je vektor hustoty magnetického toku (magnetická indukcia) [T, Wb/m^2]
$\mathbf{E}$ je vektor intenzity elektrického poľa [V/m]
$\mathbf{H}$ je vektor intenzity magnetického poľa [A/m]
$\mathbf{J}$ je vektor hustoty elektrického prúdu [A/m^2]
ρ je hustota elektrického náboja [C/m^3]
t je čas [s]

Ak vyjadríme divergenciu oboch strán rovnice (24.4) dostaneme rovnicu kontinuity (divergencia rotácie vektorového poľa sa rovná nule)

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0 \tag{24.5}$$

Uvedené rovnice sa dopĺňajú konštitutívnymi (látkovými) rovnicami, ktoré udávajú vlastnosti elektromagnetického materiálu (látky). Pre izotropný magnetický materiál platí

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \tag{24.6}$$

kde μ je permeabilita materiálu [H/m]
μ_0 je permeabilita vákua (μ_0 = $4\pi \cdot 10^{-7}$H/m)
$\mu_r = \mu / \mu_0$ je relatívna permeabilita materiálu [-]

V prípade, že je permeabilita μ funkciou poľa, potom je potrebné ju zadať pomocou krivky závislosti B na H.

Ak sú v skúmanej oblasti prítomné aj permanentné magnety, vzťah (24.6) sa dopĺňa o indukčné pole magnetov

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \tag{24.7}$$

kde $\mathbf{M}$ [A/m] je magnetizácia (magnetizačný vektor).

Konštitutívne vzťahy pre (zviazané) elektrické pole sú

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{24.8}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \tag{24.9}$$

kde σ je elektrická vodivosť materiálu [S/m]

ε je permitivita materiálu [F/m]

$\mathbf{v}$ je vektor rýchlosti [m/s]

ε_0 je permitivita vákua ($\varepsilon_0 \approx 8{,}854188 \cdot 10^{-12}$ [F/m])

$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ je relatívna permitivita materiálu [-]

Pri uvedenom všeobecnom tvare Maxwellových rovníc sa uvažuje časová zmena elektrického a magnetického poľa. To znamená, že elektricky nabité objekty neprodukujú len elektrické pole ale časovou zmenou (pohybom) aj magnetické pole. Analogicky magnetické pole pri časovej zmene produkuje elektrické pole vo všeobecnosti tiež časovo závislé. V takomto prípade hovoríme o *elektrodynamike.*

V prípade, že elektrické pole sa s časom nemení ($\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$), hovoríme o *elektrostatike.* Z Faradyovho zákona potom vyplýva absencia časovo premenlivého magnetického poľa, $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$. Pravda aj v elektrostatike sa môžeme stretnúť s magnetickým poľom alebo elektrickým prúdom, ktoré sú však statické, na čase nezávislé.

Inou špeciálnou kategóriou je *magnetostatika*, charakterizovaná statickým magnetickým poľom. Často sa využíva aj ako vhodná aproximácia prípadu, kedy sa elektrický prúd s časom pomaly mení.

V prípade periodickej zmeny elektromagnetického poľa s frekvenciou f [Hz] dochádza k priestorovej a časovej zmene vektora intenzity elektrického poľa a zviazaného vektora hustoty magnetického poľa. Vzniká elektromagnetické vlnenie spojené s prenosom energie vo forme elektromagnetickej radiácie (pozri kap. 18).

Na základe veľkosti frekvencie sa numerické procedúry MKP pre analýzu elektromagnetického poľa delia na *nízkofrekvenčné* a *vysokofrekvenčné*. Nízkofrekvenčné výpočtové procedúry sa používajú v prípadoch kedy dĺžka vlny je výrazne väčšia ako geometrické rozmery objektu. Je to oblasť zhruba pod rádiovými frekvenciami a hlboko v tejto oblasti leží aj frekvencia striedavého prúdu (50 Hz).

24.2 Elektrické pole

Ak v Maxwellových rovniciach zanedbáme časovú zmenu hustoty magnetického toku $\partial \mathbf{B} / \partial t$, dostaneme ich aproximáciu s $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ a bez obojstrannej väzby elektrického a magnetického poľa. Potom intenzitu (nevírového, konzervatívneho) elektrického poľa možno určovať zo vzťahu

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \tag{24.10}$$

kde ϕ [V] je elektrický potenciál. Ak nás zaujíma len analýza elektrického poľa, možno rovnicu (24.2) neuvažovať a rovnicu (24.4) nahradiť rovnicou kontinuity (24.5) s využitím konštitutívnych vzťahov (bez rýchlostného efektu) (24.8) a (24.9)

$$\nabla\cdot\left[\sigma\mathbf{E}+\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}\right]=0 \tag{24.11}$$

Po využití (24.10) v tejto rovnici dostávame diferenciálnu rovnicu pre skalárny potenciál, vhodnú pre aproximatívne (numerické) riešenie nestacionárneho elektrického poľa

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\phi)-\nabla\cdot\left(\varepsilon\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=0 \tag{24.12}$$

s primárnou neznámou ϕ. Intenzita elektrického poľa sa potom určuje z (24.10). Špeciálnym prípadom je rovnica ustálenej elektrickej kondukcie

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\phi)=0 \tag{24.13}$$

Diferenciálnu rovnicu ustáleného elektrického (elektrostatického) poľa v elektricky izotropnom prostredí s permitivitou ε a objemovou hustotou náboja ρ dostaneme zo vzťahov (24.1), (24.10) a (24.9) v tvare Poissonovej rovnice

$$\nabla\cdot(\nabla\phi)=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{24.14}$$

Rovnice opisujúce elektrické pole slúžia ako východzí zdroj pre formuláciu matíc MKP pre numerické riešenie tejto triedy úloh. Na tento účel možno opätovne využiť Galerkinovu metódu s analogickým postupom ako pri iných fyzikálnych úlohach z predchádzajúcich častí knihy. Pretože elektrický potenciál je skalár, tak ako teplota pri úlohe vedenia tepla, postup jeho výpočtu pomocou MKP je v podstate rovnaký ako postup výpočtu teploty v kapitole 8 (Určenie matíc prvku priamo z diferenciálnych rovníc prvku), kde je Galerkinova metóda podrobne vysvetlená pre prípad jednorozmernej úlohy. Pre dvojrozmernú úlohu

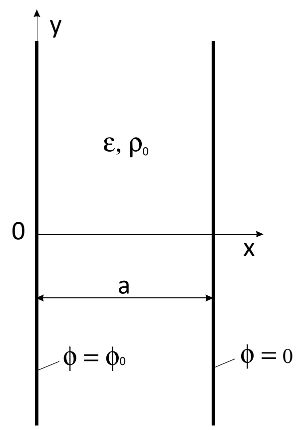
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{24.15}$$

možno odvodenie matíc všeobecného elektrostatického prvku Galerkinovou metódou nájsť napr. v [20].

Numerické riešenie úloh elektrostatiky ukážeme na nasledujúcich jednoduchých príkladoch, ktoré možno porovnať s analytickými riešeniami. Problémy reálnej technickej praxe sa riešia rovnakými postupmi, len prácnosť zadávania úlohy je väčšia.

Príklad 24.1

Dve rozmerné (teoreticky nekonečne veľké) rovnobežné vodivé dosky sú od seba vzdialené o



$a = 0.1$ m podľa obrázku. Jedna doska má konštantný potenciál $\phi_0 = 100$ V a druhá doska je uzemnená. Nemagnetická látka medzi doskami má relatívnu permitivitu $\varepsilon_r = 1$ a objemovú hustotou náboja $\rho_0 = 10^{-6}$ C/m^3. Určte elektrický potenciál a intenzitu elektrického poľa v oblasti medzi doskami.

Analytické riešenie

Pretože je zrejmé, že priebeh potenciálu v oblasti medzi doskami sa v smere osi *y* a *z* nemení, je jeho priebeh definovaný jednorozmerným tvarom rovnice (24.14)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \qquad \text{a)}$$

kde ε_0 je permitivita vákua a okrajové podmienky sú

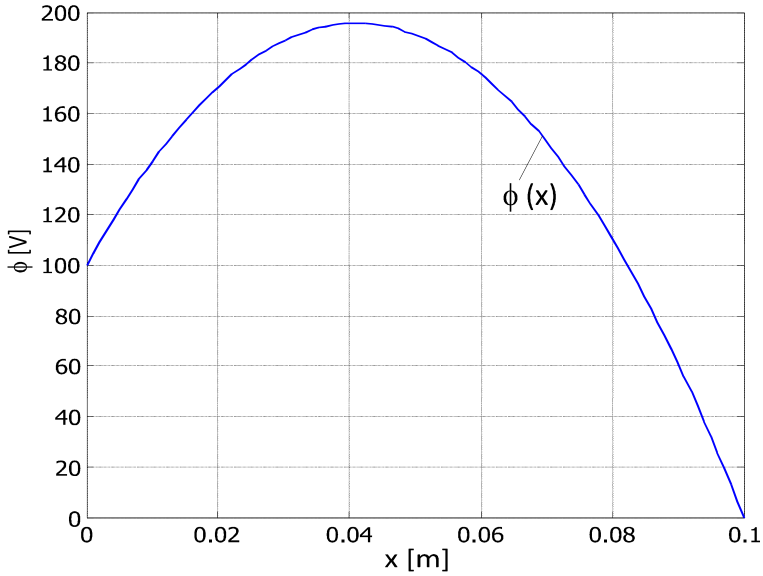
$$\phi(0) = \phi_0$$
$$\phi(\mathrm{a}) = 0$$

Dvojnásobnou integráciou (a) a uplatnením okrajových podmienok dostávame

$$\phi(x) = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} x^2 + \left(\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} - \frac{\phi_0}{a} \right) x + \phi_0 \qquad \text{(b)}$$

Priebeh potenciálu medzi doskami možno graficky znázorniť napr. pomocou programu Matlab

```
a=0.1; ro=10^-6; fi0=100; eps0=8.854*10^-12;
x=linspace(0,0.1,100);
y=-ro/2/eps0*x.^2+(ro/2/eps0*a-fi0/a).*x+fi0
plot(x,y)
```



Z rovnice (24.10) a (b) dostaneme funkciu absolútnej hodnoty vektora intenzity elektrického poľa s lineárnym priebehom medzi doskami

$$E(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} x - \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\phi_0}{a} \qquad \text{(c)}$$

a okrajovými hodnotami

$$E\,(0) = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\phi_0}{a} = -\frac{10^{-6} \cdot 0{,}1}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} + \frac{0.1}{100} = -4650 \text{ V/m}$$

$$E\,(0.1) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} 0.1 - \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\phi_0}{a} = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\phi_0}{a} = \frac{10^{-6} \cdot 0{,}1}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} + \frac{0.1}{100} = 6650 \text{ V/m}$$

Numerické riešenie

Numerické riešenie príkladu sme sme vykonali v interaktívnom móde programu Ansys s touto postupnosťou príkazov:

1) *Zjednodušenie interakcie s programom zadaním typu úlohy*
Preferences, Electric, OK;

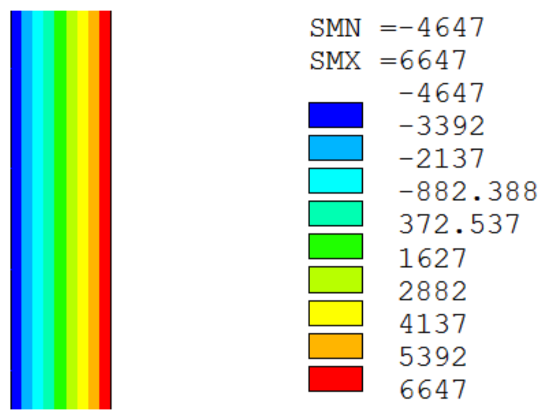
2) *Voľba prvku*
Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Electrostatic, 2D Quad 121, OK, Close;

3) *Zadanie permitivity prostredia*
Material Props,Material Models, Electromagnetics, Relative Permittivity, Constant, PERX=1, OK, Material, Exit;

4) *Vytvorenie oblasti a siete prvkov medzi doskami*
Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=0, X2=0.1, Y1=0, Y2=1, OK;
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, NDIV=10, OK;
Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;

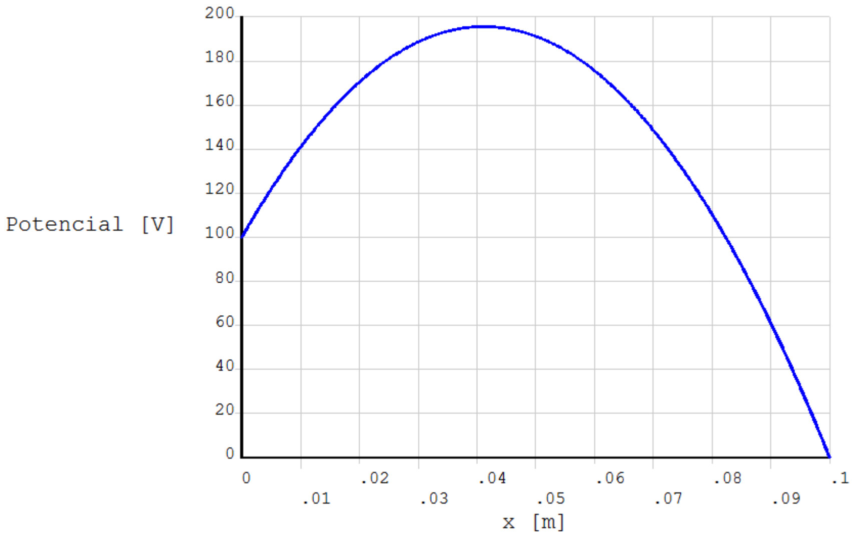
5) *Zadanie okrajových podmienok, hustoty náboja a príkazu na výpočet*
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Boundary, Voltage, On Lines, Kliknite ľavú zvislú stranu obdĺžnika, Apply, VALUE=100, Apply, , Kliknite pravú zvislú stranu obdĺžnika, OK, VALUE=0, OK;
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Exitation, Charge Density, On Areas, Pick All, VAL1=1e-6, OK;
Solve, Current LS, OK;

6) *Zobrazenie priebehu intenzity elektrického poľa pomocou farebnej škály*
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Electric Field, X-Component of electric field, OK;



7) *Vytvorenie trasy uzlov pre grafické zobrazenie výsledkov na tejto trase (čiare)*
Utility Menu, Plot, Nodes, Zväčšite niektorý z hustých vodorovných radov uzlov;
General Postproc, Path Operations, Define Path, By Nodes, Kliknite prvý a posledný uzol zvoleného radu, OK, Name=cesta, OK;

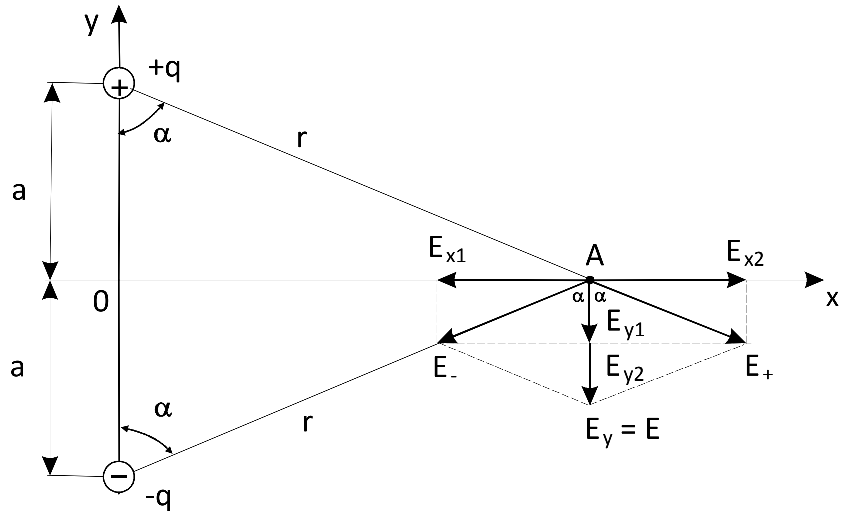
8) *Načítanie hodnôt potenciálu a ich grafické zobrazenie na uzlovej trase*
General Postproc, Path Operations, Map onto Path, Lab=Potenc, Dof Solution, Elec poten VOLT, OK;
General Postproc, Path Operations, Plot Path Item, On Graph, Lab=Potenc, OK;



Dobrá zhoda s analytickým riešením je zrejmá.

Príklad 24.2

Dva dlhé tenké rovnobežné priamkové drôty nesú rovnako veľký statický náboj opačného znamienka s hustotou +q a -q o veľkosti 10^{-6} C/m. Drôty sú vo vákuu vzdialené od seba o $2a$ podľa obrázku. Určte a nakreslite priebeh intenzity elektrického poľa na osi x v okolí nábojov, keď $a = 10$ cm.



<u>*Analytické riešenie*</u>

Obrázok predstavuje rez rovinou kolmou na drôty, pričom pri veľkej dĺžke drôtov môžeme úlohu riešiť ako rovinnú (s jednotkovou dĺžkou drôtu) a prierez tenkého drôtu považovať za bod. Pri uvedenej voľbe súradnicového systému je úloha symetrická voči rovine *yz* a stačí riešiť len oblasť napravo od tejto roviny.

Intenzita elektrického poľa v každom bode kolmého rezu na drôt (v rovine *xy*) je vektor, ktorého nositeľka prechádza cez prierez drôtu a bod, v ktorom určujeme intenzitu poľa. Zmysel vektora pri kladnom náboji je od prierezu a pri zápornom naopak. Pre absolútnu veľkosť vektora vo vákuu platí [21]

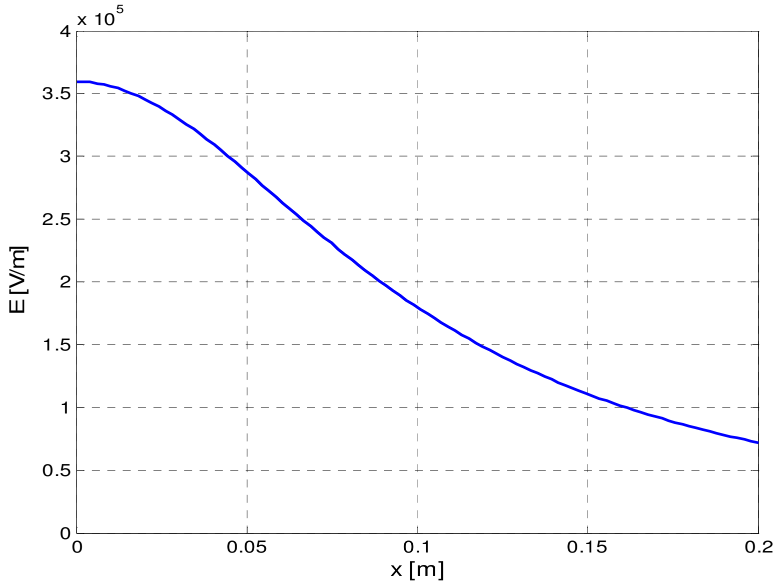
$$E_+ = E_- = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r} = k\frac{|q|}{r} \qquad \text{(a)}$$

kde ε_0 je permitivita vákua a *r* je vzdialenosť bodu od náboja. Ako vidieť, výslednica oboch vektorov v bode A má nulovú zložku v smere osi x a jej y-ová zložka, ktorá je na osi *x* aj výslednou absolútnou hodnotou intenzity poľa, je

$$E = E_y = E_{y1} + E_{y2} = 2E_{y1} = 2E_+\cos\alpha = 2k\frac{q}{r}\cos\alpha = 2k\frac{q}{r}\frac{a}{r} = \frac{qa}{\pi\varepsilon_0\left(a^2 + x^2\right)}$$

Pribeh intenzity na osi *x* v intervale 0 až 0.2 m možno graficky znázorniť napr. pomocou programu Matlab

```
a=0.1; q=10^-6; eps0=8.854*10^-12;
x=linspace(0,0.2,100);
E=q*a./(3.14*eps0*(a^2+x.^2));
plot(x,E)
```



Numerické riešenie

Numerické riešenie príkladu sme sme vykonali v interaktívnom móde programu Ansys s touto postupnosťou príkazov:

1. *Zjednodušenie voľby príkazov zadaním typu úlohy*
Preferences, Electric, OK;

2. *Voľba prvkov*

Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Electrostatic, Infinite Boundary, 2D Inf Quad 110, OK, Options, K1=Volt(charge), OK, Add, Electrostatic, 2D Quad 121, OK, Close;

3. *Zadanie permitivity prostredia*
Material Props,Material Models, Electromagnetics, Relative Permittivity, Constant, PERX=1, OK, Material, Exit;

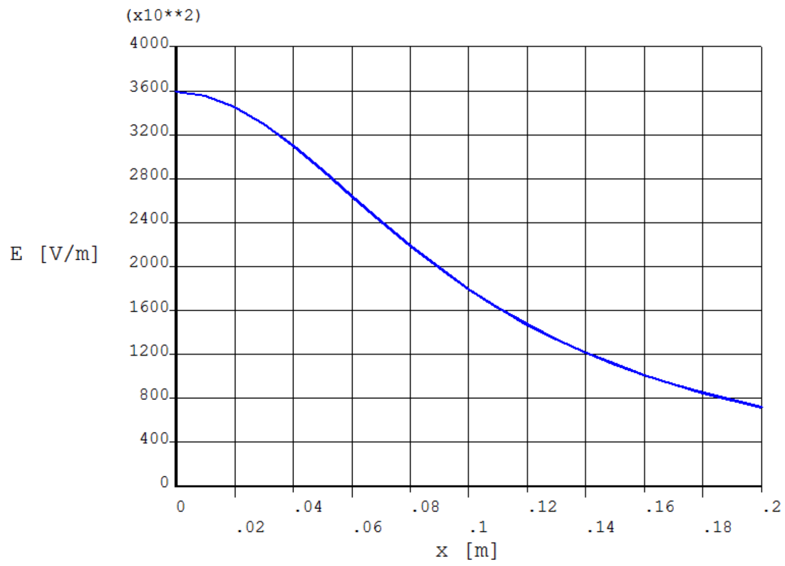
4. *Vytvorenie plošných oblastí*
Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, RAD1=0.1, THETA1=-90, THETA2=90, Apply,RAD1=0.2, Apply, RAD1=0.3, OK;
Operate, Booleans, Overlap, Areas, Pick All;

5. Rozdelenie plôch (aby sme mali čiary na osi x pre zobrazenie priebehu intenzity el. poľa)
Utility Menu, WorkPlane, Offset WP by Increments, Nastavte Degrees na 90, Kliknite X- ;
Operate, Booleans, Divide, Area by WrkPlane, PickAll;

6. Vytvorenie siete prvkov
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, All Lines, NDIV=10, OK, Picked Lines, Kliknite tri rovné čiary vonkajšieho polprstenca, OK, NDIV=1;
Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, *Kliknite dve plochy vonkajšieho polprstenca*,OK;
Mesh Attributes, Default Attribs, TYPE=2 Plane 121, OK;
Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, *Kliknite zvyšné plochy*, OK;

7. Zadanie elektrických nábojov, okrajovej podmienky a spustenie výpočtu
Plot, Lines;
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Exitation, Charge, On Keypoints, Kliknite horný bod na najmenšej polkružnici, Apply, VALUE=0.5e-6, Apply, *Kliknite dolný bod na najmenšej polkružnici*, OK, VALUE=-0.5e-6, OK;
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Flag, Infinite Surf, On Lines, *Kliknite dve vonkajšie zakrivené čiary najväčšej polkružnice*, OK;
Solution, Solve, Current LS, (Varovanie označte Yes);

8. *Nakreslenie priebehu intenzity elektrického poľa pozdĺž osi* x
General Postproc, Path Operations, Define Path, By Nodes, Kliknite prvý a posledný uzol, OK, Name=cesta, nDiv=50, OK;
General Postproc, Path Operations, Map onto Path, Flux & gradient, EFSUM, OK;
General Postproc, Path Operations, Plot Path Item, On Graph, EFSUM, OK;



Výsledný priebeh a hodnoty sa dostatočne presne zhodujú s analytickým riešením.

Príklad 24.3

Vo voľnom priestore (vákuu) je umiestnená elektricky nabitá guľa s priemerom 1 cm a nábojom 1 nC. Určte rozloženie potenciálu a intenzity elektrického poľa v jej okolí a ich veľkosť na polomere 0,5 a 2 cm. Úlohu riešte analyticky a tiež numericky.

A) <u>Analytické riešenie</u>

Ak do voľného priestoru s permitivitou ε [F/m] umiestnime bodový náboj o veľkosti Q [C], potom veľkosť intenzity tzv. radiálneho elektrického poľa na polomere r možno určiť z Coulombovho zákona

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2} \quad \text{[V/m]} \tag{24.16}$$

Pre hodnoty elektrického potenciálu v okolí náboja platí

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r} \quad \text{[V]} \tag{24.17}$$

a, ako vidieť, nulový potenciál (okrajová podmienka) je v nekonečne vzdialených bodoch.

Vzťahy (24.16) a (24.17) platia aj pre guľu s nábojom Q a polomerom R v intervale $R \le r \le \infty$. Veľkosť intenzity elektrického poľa a potenciálu v radiálnej vzdialenosti 0,005 a 0,02 m potom v našom príklade je

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854188\cdot 10^{-12}\cdot 0.005^2} = 359504 \text{ V/m}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854188\cdot 10^{-12}\cdot 0.005} = 1796 \text{ V}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854188\cdot 10^{-12}\cdot 0.02^2} = 22469 \text{ V/m}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854188\cdot 10^{-12}\cdot 0.02} = 449 \text{ V}$$

Pre potreby numerického výpočtu vyčíslime ešte plošnú hustotu elektrického náboja na povrchu gule

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{10^{-9}}{4\pi r^2} = \frac{10^{-9}}{4\pi\cdot 0{,}005^2} = 0{,}31831\cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

B) *<u>Numerické riešenie</u>*

Veľkosť a poloha elektrického náboja sa vo vyšetrovanej oblasti s časom nemení, takže vytvára vo svojom okolí len statické (stacionárne) elektrické pole charakterizované vektorom intenzity elektrického poľa $\mathbf{E}$. Program numericky vyrieši rovnicu (24.14) s primárnou neznámou $\phi(x,y,z)$ vo forme aproximačných funkcií na prvkoch. Z nich sa potom určuje intenzita elektrického poľa podľa (24.10).

Napriek tomu, že je príklad jednoduchý, nevyhneme sa niektorým problémom spojených s numerickou analýzou vlastností a účinku elektromagnetických polí: Modelovať treba vo všeobecnosti priestorové oblasti, okrajové podmienky sa často zadávajú pre vzdialené body, pričom oblasť záujmu treba deliť podrobne, lebo hľadané premenné sa menia nelineárne.

Úlohu sme vyriešili pomocou programu Ansys v interaktívnom móde s touto postupnosťou príkazov:

1. *Zjednodušenie voľby príkazov zadaním typu úlohy*
Ansys Main Menu, Preferences, Electric, OK;

2. *Voľba potrebných prvkov a ich charakteristík*
Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Electrostatic, 3D Tet 123, Apply, Not Solved, Mesh Facet 200, Apply, Infinite Boundary, 3D Inf Brick 111, OK, *Vyznačte* Type 2 MESH200, Options, K1 = TRIA 6-NODE, OK, *Vyznačte* TYPE 3 INFIN111, Options, K1 = VOLT (Charge), K2 = 20-Noded Brick, OK, Close;

3. *Zadanie permitivity prostredia*
Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permittivity, Constant, PERX = 1, OK, Material, Exit;

4. *Vytvorenie tvoriacej plochy oblasti, kde nás zaujímajú výsledky*
Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, RAD1 = 0.02, RAD2 = 0.005, Theta1 = -90, Theta2 = 90, OK;

5. *Určenie hustoty delenia oblati*
Meshing, Size Cntrls, ManualSize, Lines, Picked Lines, *Kliknite zvislé strany medzikružia*, Apply, NDIV = 30, Apply, *Kliknite oblúky*, OK, NDIV = 60, OK;

6. *Vytvorenie priestorovej oblasti. Vzhľadom na symetriu sa tvorí len jej výsek*
Modeling, Operate, Extrude, Areas, About Axis, PickAll, *Kliknite dva rozdielne body na osi Y*, OK, ARC = 30, NSEG = 1, OK;

7. *Vytvorenie siete elektrostatických prvkov*
Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, 1 SOLID123, OK;
Meshing, Mesh, Volumes, Free, PickAll;

8. Vytvorenie pomocných plošných prvkov na vonkajšom obvode oblasti. Je to príprava na tvorbu INFIN prvkov, ktoré nám nahradia delenie nezaujímavej oblasti do veľkej (teoreticky nekonečnej) vzdialenosti s nulovým potenciálom

Utility Menu, Select, Entities, Areas, Apply, *Kliknite vonkajšiu plochu oblasti*, OK;
Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, 2 MESH200, OK;
Meshing, Mesh, Areas, Free, PickAll;

9. Vytvorenie INFIN prvkov

Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, 3 INFIN111, OK;
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, NDIV = 1,OK;
Utility Menu, WorkPlane, Change Active CS to, Global Spherical;
Modeling, Operate, Extrude, Areas, By XYZ Offset, PickAll, DX = 0.02, OK;

10. Utility Menu, Select, Everything;
11. Utility Menu, Plot, Lines;

12. *Zadanie okrajovej podmienky (nulový potenciál pomocou INFIN prvkov)*

Solution, Define Loads, Apply, Electric, Flag, Infinite Surf, On Areas, *Kliknite vonkajšiu zakrivenú plochu oblasti*, OK;

13. *Zadanie hustoty plošného elektrického toku náboja na vyšetrovanú oblasť*

Utility Menu, Select, Entities, Nodes, By Location, Xcoordinates, 0.005, Apply;
Utility Menu, Select, Entities, Elements, Attached to, Nodes, OK;
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Excitation, Surf Chrg Den, On Nodes, PickAll, Value = 3.1831e-6,OK;

14. Utility Menu, Select, Everything;
15. Utility Menu, WorkPlane, Change Active CS to, Global Cartesian;

16. *Výpočet*

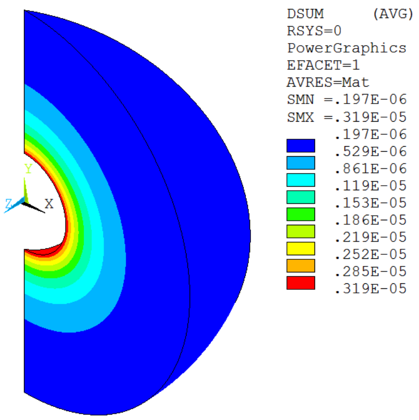
Solve, Current LS, OK; *Zvoľte na upozornenia yes.*

17. Odstránenie oblasti s INFIN prvkami

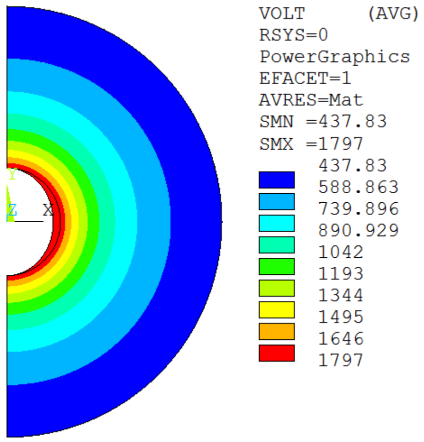
Utility Menu, Plot, Volumes;
Utility Menu, Select, Entities, Volumes, By Num Pick, Aplly, *Kliknite vonkajší pomocný objem s INFIN prvkami*, Ok, Elements, Attached to, Volumes, Unselect, OK;

18. Kontrola zadanej plošnej hustoty elektrického toku na povrchu gule [C/m^2]

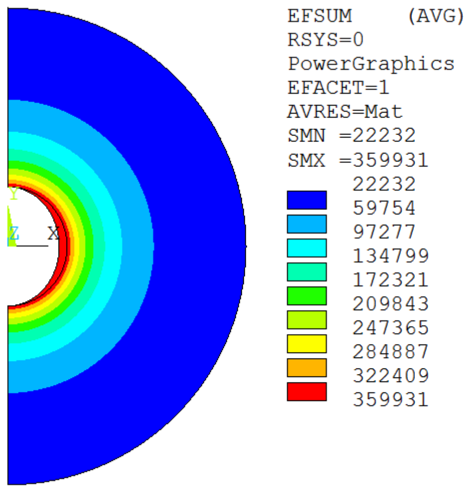
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Electric Flux Density, Electric flux density vector sum, OK;



19. *Vykreslenie potenciálu* [V] (0,005 m $\leq r \leq$ 0,02 m)
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, DOF Solution, Electric potential, OK;



20. *Vykreslenie intenzity elektrického poľa* [V/m], (0,005 m $\leq r \leq$ 0,02 m)
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Electric Field, Electric field vector sum, OK;



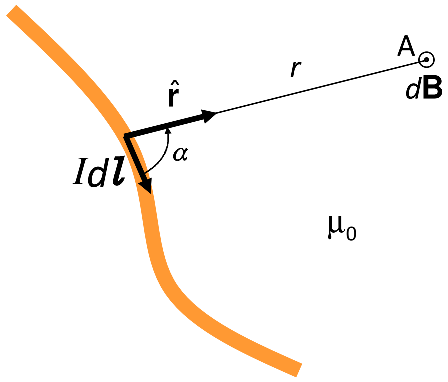
Výsledky dostatočne presne súhlasia s analytickým riešením.

24.3 Stacionárne magnetické pole

Zdrojom *stacionárneho* magnetického poľa sú nepohyblivé vodiče ustáleného jednosmerného elektrického prúdu a nepohybujúce sa permanentné magnety. Pre výpočtársku analýzu účinkov magnetického poľa v technických aplikáciách má prvoradý význam určenie vektorového poľa magnetickej indukcie **B** a z neho odvodených veličín, vrátane silových účinkov. Na jeho určenie možno využiť viaceré postupy vychádzajúce zo základných zákonov teórie magnetického poľa. Sú to predovšetkým:

a) Biotov-Savartov zákon, ktorý umožňuje počítať magnetickú indukciu **B** elektrických prúdov, ktoré tečú v objeme *V* s prúdovou hustotou ***J*** alebo v okolí prúdovodičov, cez ktorých prierez tečie prúd o veľkosti I .
Pre magnetické pole v okolí vodiča možno diferenciálny prírastok vektora magnetickej indukcie (pozri obr. 24.1) vypočítať zo vzťahu

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (24.18)$$



Obr. 24.1

kde **B** [T, Wb/m^2, kg/(s^{2}A)) je vektor magnetickej indukcie (hustoty magnetického toku), I je elektrický prúd [A], $d\boldsymbol{l}$ je elementárna vektorová dĺžka vodiča orientovaná v smere prúdu, $\hat{\mathbf{r}}$ je jednotkový vektor udávajúci smerovanie vzdialenosti r od elementu po vyšetrovaný bod a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [T·m/A] je permeabilita vákua (magnetická konštanta). Permeabilita vzduchu sa len nepatrne líši od permeability vákua a možno v bežných výpočtoch zaviesť $\mu_{vzduchu} = \mu_0$ a $\mu_r^{vzduchu} = 1$.

Vektor $d\mathbf{B}$, ako vyplýva z definície vektorového súčinu, je kolmý na rovinu preloženú cez nositeľky vektorov $d\boldsymbol{l}$ a $\hat{\mathbf{r}}$ a jeho zmysel určuje pravidlo pravej ruky. (Pri situácii podľa obrázku bude vektor vychádzať z uvedenej roviny smerom k pozorovateľovi.)
Magnetickú indukciu v okolí vodiča prúdu s dĺžkou L dostaneme ako integrálny súčet elementárnych hodnôt tohto vektora po celej dĺžke vodiča

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\boldsymbol{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (24.19)$$

b) Ampérov zákon celkového (obopnutého) prúdu, podľa ktorého krivkový integrál magnetickej indukcie **B** po ľubovoľnej uzavretej orientovanej krivke L je priamo úmerný celkovému elektrickému prúdu I_{celk}, ktorý tečie cez ľubovoľný povrch S ohraničený touto krivkou

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{celk} \quad (24.20)$$

resp. v bežných prípadoch bez prúdu zviazaného s materiálom vyšetrovanej oblasti

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{volny} \quad (24.21)$$

c) *Využitie magnetického vektorového potenciálu*. Ak elektrický prúd I tečie uzavretým prúdovodičom L malého prierezu s konštantnou prúdovou hustotou $\mathbf{J}$, potom na prúdovodiči možno voliť prúdové elementy $I d\boldsymbol{l} = \mathbf{J} dV$ a pre vektorový magnetický potenciál platí

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\boldsymbol{l}}{r} \quad (24.22)$$

kde r je vzdialenosť vyšetrovaného bodu od dĺžkového elementu.

Magnetickú indukciu možno pomocou magnetického potenciálu vyjadriť v tvare

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{24.23}$$

pretože takto definovaná indukcia vždy spĺňa zákon spojitosti indukčného toku (24.2)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{24.24}$$

Ampérov zákon (24.4) pre časovo nezávislé magnetické pole je

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{24.25}$$

a keď do tejto rovnice dosadíme z (24.6) a (24.23), s predpokladom závislosti permeability materiálu od magnetickej indukcie, dostaneme výsledný vzťah pre určenie magnetického potenciálu

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu(\mathbf{B})} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \tag{24.26}$$

Po určení magnetického potenciálu vhodnou numericku metódov (program Ansys využíva MKP), magnetická indukcia vo vyšetrovanej oblasti sa vypočíta z (24.23). Poznamenávame, že pri rovinnej úlohe v súradnicovej rovine *xy* má vektor magnetického potenciálu nenulovú zložku len v smere osi z a rieši sa diferenciálna rovnica len s touto jednou neznámou.

d) *Využitie magnetického skalárneho potenciálu.* Ak vo vyšetrovanej oblasti nie je žiadny prúdový vodič (napr. v oblasti len s permanentnými magnetmi) , t.j. platí $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, potom sa rovnica (24.25) zmení na

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{24.27}$$

a v oblasti môžme zaviesť analogicky s elektrostatikou skalárny magnetický potenciál ψ, pre ktorý platí

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi \tag{24.28}$$

Formuláciu priestorovej úlohy potom možno previesť na diferenciálnu rovnicu s jedinou neznámou funkciou ψ a po jej (numerickom) určení cez rovnicu (24.28) a materiálové vzťahy $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ skompletovať analýzu oblasti. Je to pri porovnaní s metódou magnetického potenciálu výhodnejší postup, pretože vtedy pri priestorovej úlohe treba riešiť tri diferenciálne rovnice s tromi neznámymi zložkami vektora $\mathbf{A}$.

Pre oblasti s prúdovými vodičmi možno použiť metódu *redukovaného skalárneho potenciálu*. V tomto prípade sa vektor intenzity magnetického poľa rozkladá na dve zložky

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_c + \mathbf{H}_m \tag{24.29}$$

Vektor $\mathbf{H}_m$ spĺňa podmienku (24.27) a možno ho vyjadriť pomocou skalárneho potenciálu ψ_r, ktorý však vzhľadom na to, že nereprezentuje kompletné pole $\mathbf{H}$, sa nazýva redukovaný skalárny potenciál

$$\mathbf{H}_m = -\nabla \psi_r \tag{24.30}$$

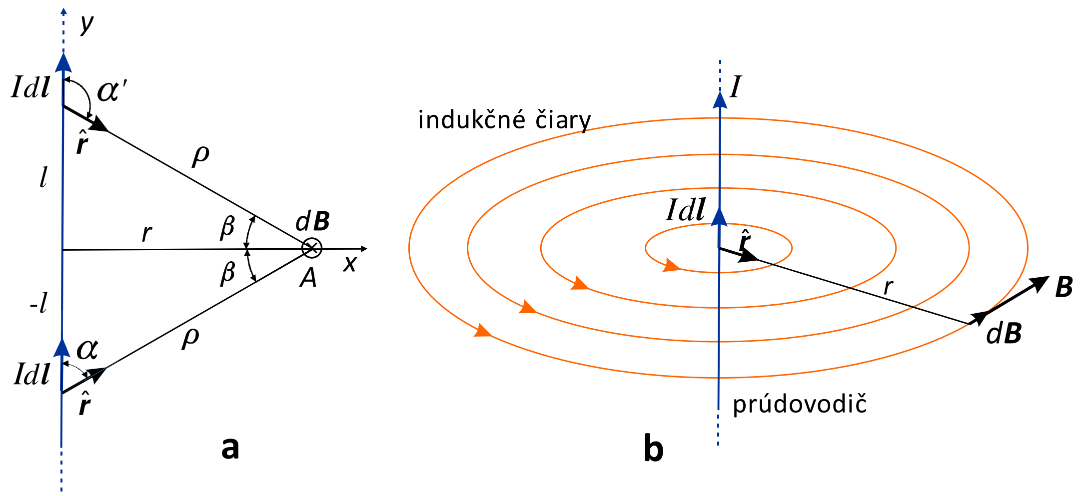
Prvý člen v (24.29) vyjadruje pole prúdovodičov a určuje sa obyčajne analyticky pomocou Biot-Savartovho zákona. To má v MKP výhodu, že možno v riešenej oblasti využiť jednoduché zdrojové prúdovodičové priestorové prvky magnetického poľa (napr. prvok SORC36 v Ansyse), na druhej strane kombinácia analyticky určeného poľa $\mathbf{H}_c$ s numericky určeným poľom $\mathbf{H}_m$

vyžaduje pri rôznych kombináciách a rôznej intenzite oboch polí špeciálne numerické procedúry na zabezpečenie vyhovujúcej presnosti výsledkov.

24.4 Magnetické pole v okolí prúdovodičov a cievok

So spôsobom využívania metód uvedených v predchádzajúcej časti i s charakteristickými črtami magnetickej indukcie v okolí prúdovodičov a cievok je užitočné zoznámiť sa pomocou jednoduchých analytických a numerických príkladov.

Najprv uvedieme klasický príklad využitia Biotovho-Savartovho a Ampérovho zákona pri určení veľkosti a smeru magnetickej indukcie **B** v okolí nekonečne dlhého priameho tenkého prúdovodiča, v ktorom tečie stály prúd I (obr 24.2). Ak cez takýto prúdovodič a zvolený vyšetrovaný bod A s kolmou radiálnou vzdialenosťou r od vodiča preložíme súradnicovú rovinu xy (obr. 24.2a), tak je zrejmé, že úloha je osovosymetrická, pretože všetky takto zvolené roviny s takto zvoleným bodom A sú rovnocenné. Vzhľadom na nekonečnú dĺžku vodiča sa situácia nemení pri ani posúvaní bodu v smere osi y, a teda stačí situáciu riešiť v jedinej rovine kolmej na vodič, pretože v ostatných takto zvolených rovinách by sme dostali identické výsledky. Z hľadiska riešenia ide teda o rovinnú rotačne symetrickú úlohu, čo je užitočné vedieť pri globálnom vyhodnotení výsledkov a, samozrejme, aj pri zádavaní úlohy do programu pri numerickom riešení.



Obr. 24.2

Kvôli zjednodušeniu výpočtu zvolíme na vodiči vo vzdialenostiach $\pm l$ dva prúdové elementy Idl v rovnakej vzdialenosti ρ od bodu A. Vektorový príspevok $d\mathbf{B}_1$ od spodného prúdového elementu podľa (24.18) je

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{\rho^2}$$

a z dôvodov symetrie príspevok od horného je rovnaký. Podľa pravidla pravotočivej skrutky oba vektory smerujú za nákresňu, takže pre absolútnu hodnotu prírastku vektora indukcie v bode A platí

$$dB = 2dB_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Idl\cos\beta}{\rho^2} \tag{a}$$

Takéto elementárne hodnoty indukcie treba spočítať (zintegrovať) pre l od 0 po ∞, čo možno nahradiť výhodnejším intervalom od 0 po $\pi/2$ pre uhol β. Pre diferenciál dĺžky l platí

$$dl = d(r\, tg\beta) = \frac{r\, d\beta}{\cos^2 \beta}$$

a po dosadení spolu s $\rho = r/\cos\beta$ do (a) dostávame

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos\beta\, d\beta$$

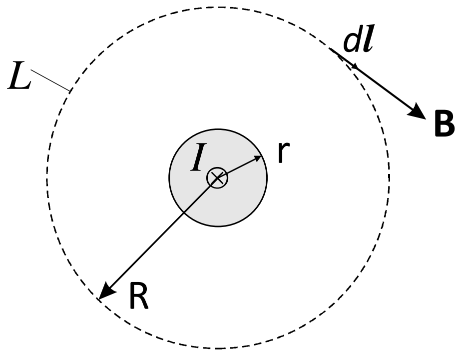
Prírastok indukcie už závisí len od β a po jeho integrácii dostávame

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{\pi/2} \cos\beta\, d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{24.31}$$

Výsledok potvrdzuje rotačnú symetriu úlohy, vektor **B** má na kružnici s polomerom *r* konštantnú hodnotu, tangenciálny smer a leží v rovine kolmej na prúdovodič (pozri obr. 24.2b). Sústredené kružnice okolo prúdovodiča sú indukčné čiary.

Príklad 24.4

Určte magnetickú indukciu v okolí i vo vnútri nekonečne dlhého prúdovodiča kruhového prierezu s polomerom *r* = 0,5 cm. Vodičom preteká prúd rovnomerne rozdelený po priereze o veľkosti 100 A v smere do nákresne *xy* (obr. 24.3). Úlohu riešte analyticky i numericky.



Obr. 24.3

Na analytické riešenie úlohy využijeme Ampérov zákon celkového prúdu (24.20)

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{celk} \tag{a}$$

Pretože prierez vodiča je osovo symetrický, dá sa predpokladať, aj bez vedomostí z predchádzajúceho príkladu, že indukčné čiary budú tiež osovo symetrické kružnice. Je preto výhodné zvoliť orientovanú uzavretú krivku *L* v tvare symetrickej kružnice, pretože k indukčnej čiare má vektor **B** vždy tangenciálny smer. Potom integrál skalárneho súčinu na ľavej strane rovnice (a) je *BL* a pre $R \geq r$ dostávame výslednú absolútnu hodnotu indukcie

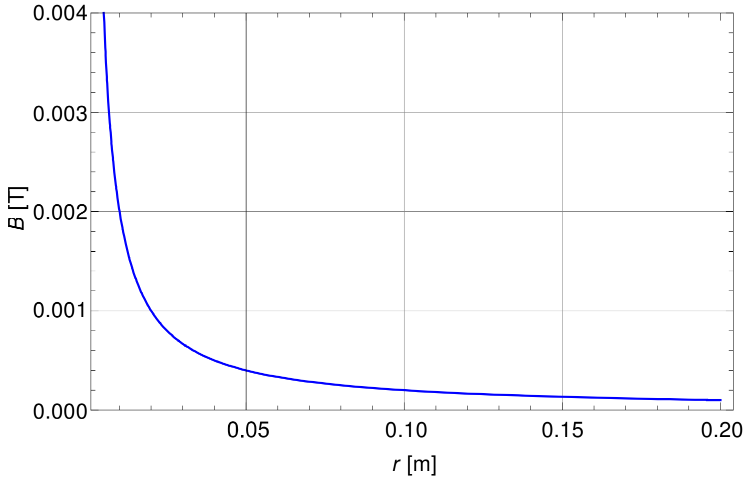
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{L} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{24.32}$$

Je to rovnaký výsledok, ako sme dostali pre tenký vodič (24.31) a možno povedať, že magnetické pole v okolí vodiča s kruhovým prierezom je také, ako keby celý prúd bol sústredený v strede prierezu.

Pre zvolené hodnoty maximálna hodnota indukcie je na povrchu prúdovodiča $r = R$

$$B_{\max} = B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2\pi \cdot 0{,}005} = 0{,}004 \text{ T}$$

a podľa (24.32) od $r = 0{,}005$ m asymptoticky klesá k nule:



Teraz využijeme Ampérov zákon celkového prúdu pre určenie magnetického poľa v priereze prúdovodiča, t.j. pre $r \le R$. Pre magnetickú indukciu opäť platí (24.32), ale prúd vo vnútri kružnice je teraz už len časťou celkového prúdu I. Pri predpoklade rovnomerného rozdelenia prúdu po priereze platí

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

čo dáva výsledok v tvare

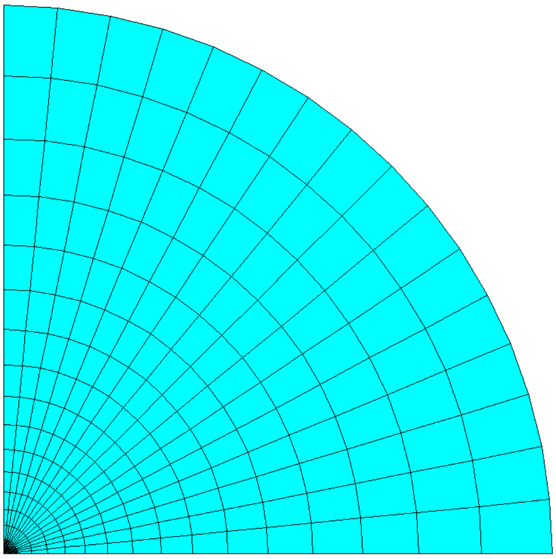
$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \tag{24.33}$$

Vo vnútri vodiča teda magnetická indukcia lineárne narastá z nuly na hore uvedenú maximálnu hodnotu $B_{\max}$.

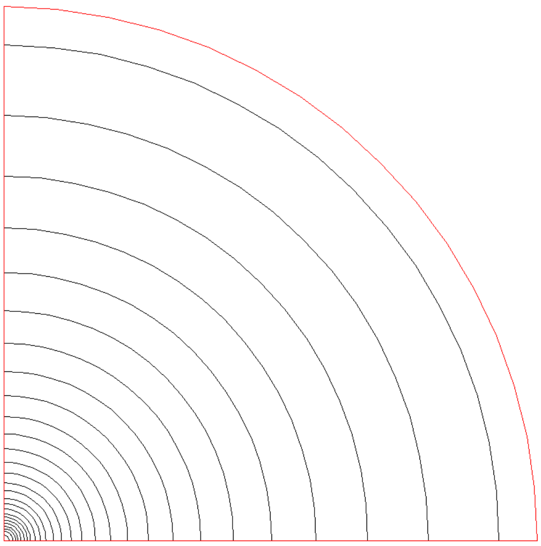
Numerické riešenie sme vykonali pomocou programu Ansys v interaktívnom móde s touto postupnosťou príkazov:

1. Preferences, Magnetic Nodal, OK;
2. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Magnetic Vector, Quad 8 node 53, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1, OK, Material, Exit;
4. Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, RAD1=0.005, THETA2=90, Apply, RAD1=0.2, OK;
5. Operate, Booleans, Overlap, Areas, Pick All;

6. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, All Areas, SIZE=0.001, OK;
7. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, Picked Lines, *Kliknite na dve rovné strany veľkého štvrťkruhu*, Apply, NDIV=15, SPACE=5, Apply, *Kliknite oblúk veľkého štvrťkruhu*, OK, NDIV=15, SPACE=0, OK;
8. Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;

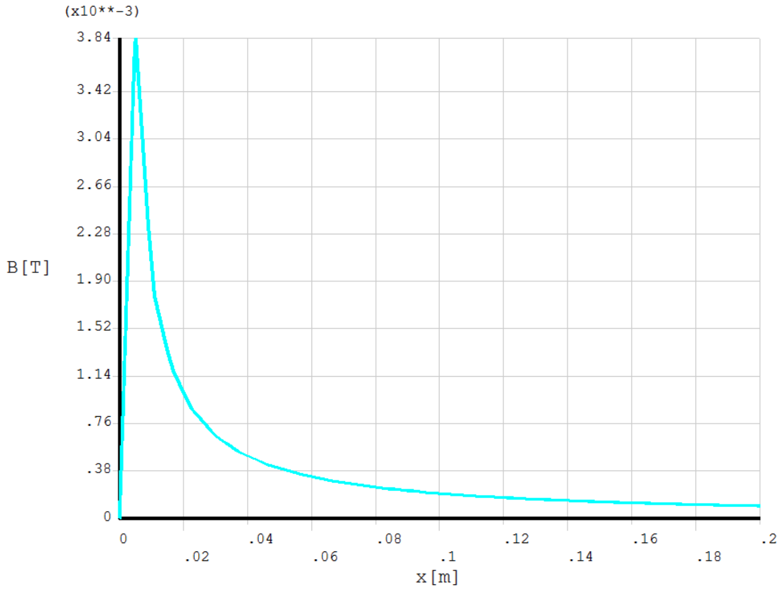


9. Solution, Define Loads, Apply, Magnetic, Excitation, CurrDensity, On Areas, *Kliknite malý štvrťkruh*, OK, VAL3=100/3.14/0.005**2, OK;
10. Solution, Define Loads, Apply, Magnetic, Boundary, Vector Poten, Flux Par'l, On Lines, *Kliknite vonkajší oblúk*, OK;
11. Solve, Current LS, OK;
12. General Postprocessor, Plot Results, Contour Plot, 2D Flux Lines, OK;



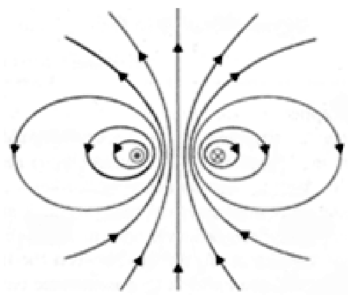
13. Utility Menu, Plot, Elements

14. General Postprocessor, Path Operations, Define Path, By Nodes, *Po zväčšení malého štvrťkruhu kliknite na osi x prvý uzol, potom uzol na konci malého štvrťkruhu a potom úplne posledný uzol,* OK, Name=cesta, nDiv=100, OK;
15. Map onto Path, Flux & gradient, BSUM, OK;
16. Plot Path Item, On Graph, BSUM, OK;



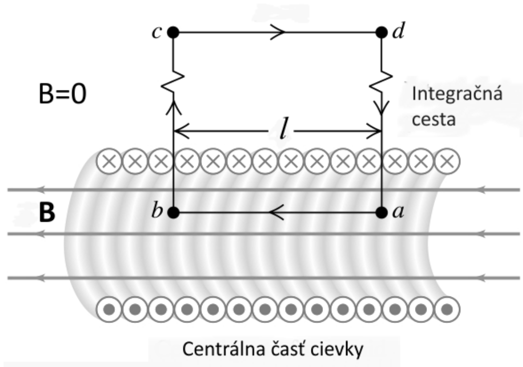
Priebeh magntickej indukcie je v dobrej zhode s analytickým riešením.

Pokiaľ sa na prúdovodiči urobí slučka približne do tvaru kružnice, vo vnútri slučky dôjde ku koncentrácii magnetického poľa (obr. 24.4). Efekt zosilnie pri vytvorení viacero závitov do tvaru cievky o určitej dĺžke, ktorá môže obsahovať aj viaceré vrstvy závitov navinutých na sebe. Teoreticky si možno predstaviť aj nekonečne dlhú cievku s jednou vrstvou závitov



Obr. 24.4 *Koncentrácia magnetického poľa vo vnútri slučky prúdovodiča*

(nekonečne dlhý solenoid). Vo vnútri takejto cievky, vzhľadom na to, že magnetické siločiary idúce do nekonečna musia byť uzavreté, vznikne homogénne magnetické pole a na vonkajšej strane cievky je pole nulové (obr. 24.5).



Obr. 24.5 *Nekonečne dlhý solenoid*

Magnetickú indukciu takejto cievky možno jednoducho určiť pomocou Ampérovho zákona celkového prúdu, pretože pre výpočet integrálu $\oint \mathbf{B}d\boldsymbol{l}$ možno výhodne vybrať integračnú čiaru *abcd*, ktorá obopína nl závitov, kde *n* je počet závitov na jednotku dĺžky. Potom pre cievku, ktorej dĺžka je výrazne väčšia ako jej priemer platí

$$\oint_{abcd} \mathbf{B}d\boldsymbol{l} = Bl = \mu_0 nlI$$

a pre veľkosť magnetickej indukcie vo vnútri cievky mimo koncov dostávame jednoduchý vzťah

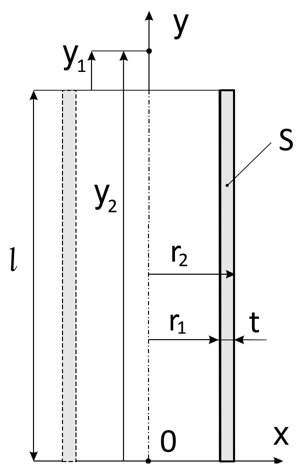
$$B = \mu_0 nI \tag{24.34}$$

ktorý nezávisí od priemeru cievky, čo sa pri nekonečne dlhej cievka dalo očakávať.

Pri numerickom riešení možno napr. husto vinutú valcovú cievku s celkovým počtom závitov N a jej magnetické pole analyzovať ako rotačne symetrickú úlohu (obr. 24.6). Pritom sa čistá aktívna plocha závitov v rezovej rovine *alikvótne* nahradzuje spojitou plochou S. Na takúto plochu treba zadať plošnú prúdovú hustotu určenú zo vzťahu

$$J = \frac{NI}{S} = \frac{NI}{tl} = \frac{nI}{t} \tag{24.35}$$

kde $n = N/l$ je počet závitov na jednotku dĺžky a I je veľkosť prúdu.



Obr. 24.6 *Rotačne symetrický model valcovej cievky*

Príklad 24.5

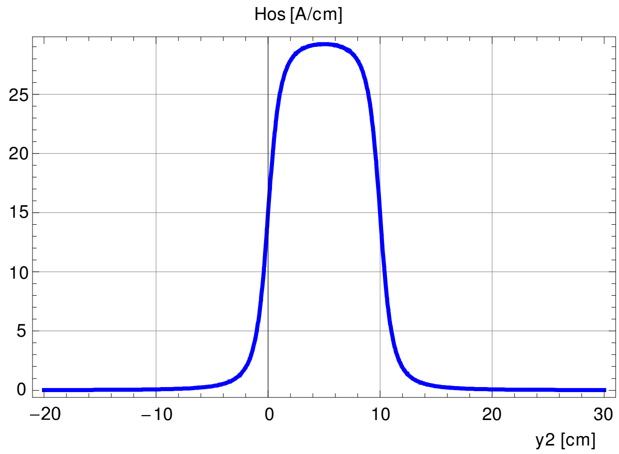
Pre husto vinutú cievku s dĺžkou l = 10 cm, vnútorným polomerom $r_1 = 1\,\text{cm}$ a čistou aktívnou prierezovou plochou drôtov $S = 300\ \text{mm}^2$ určte a nakreslite priebeh intenzity magnetického poľa H_{os} pozdĺž jej osi. Cievka má N = 30 závitov a preteká ňou prúd I = 10 A.

Ak na cievke zvolíme súradnicový systém podľa obr. 24.6, potom pre priebeh intenzity magnetického poľa na osi cievky platí [22]

$$H_{os} = \frac{B_{os}}{\mu_0} = \frac{nI}{2(r_2 - r_1)}\left[y_2 ln \frac{\sqrt{r_2^2 + y_2^2} + r_2}{\sqrt{r_1^2 + y_2^2} + r_1} - y_1 ln \frac{\sqrt{r_2^2 + y_1^2} + r_2}{\sqrt{r_1^2 + y_1^2} + r_1} \right] \tag{24.36}$$

kde v našom príklade je $t = S / l$= 300/100 = 3 mm , $r_2 = r_1 + t = 10 + 0{,}3 = 10{,}3$ cm a $n = N/l = 30$ závitov/(10 cm) $= 3$ závity/cm.

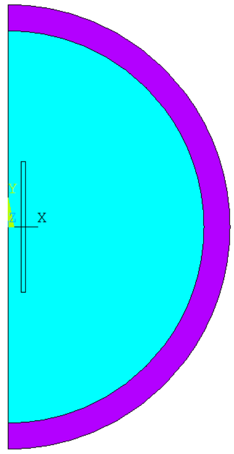
Priebeh H_{os} pozdĺž cievky so zadanými hodnotami (pri voľbe dĺžkovej jednotky cm) sme podľa vzťahu (24.36) znázornili na nasledujúcom obrázku



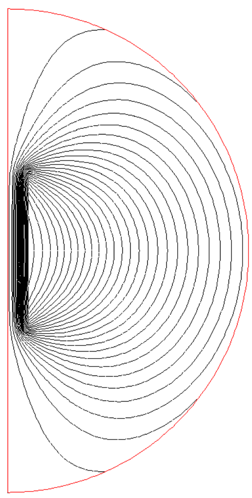
Maximálna hodnota v strede cievky ($y2$ = l/2, $y1$ = -l/2) je 29,23 A/cm.

Numericky sme úlohu riešili v programe Ansys týmto interaktívnym postupom:

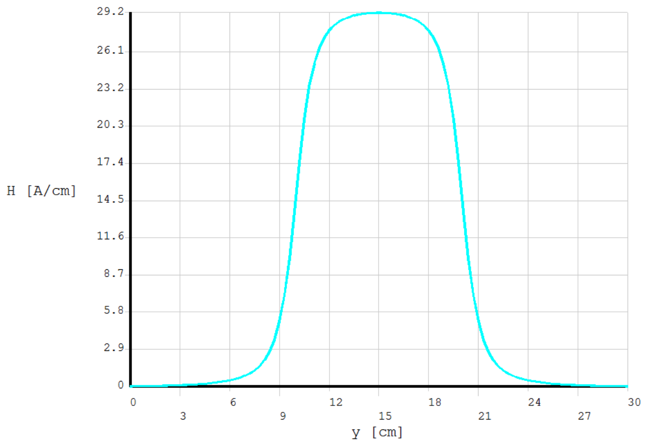
1. Preferences, Magnetic Nodal, OK;
2. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Magnetic Vector, Quad 8 node 53, OK, Options, K3=Axisymmetric, OK, Add, Infinite Boundary, 2D Inf Quad 110, OK, *Vyznačte* Type 2 INFIN110, Options, K2=8-noded Quad, K3=Axisymmetric, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1, OK, Material, Exit;
4. *Cez príkazové okno programu zadajte tieto parametre*: L=10; r1=1; r2=1,3; i=10; N=30; S=3; J=N*i/S;
5. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=r1, X2=r2, Y1=-L/2, Y2=L/2, OK;
6. Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, RAD1=1.5*L, THETA1=-90, THETA2=90, Apply, RAD1=1.5*L+2, (*uhly bez zmeny*), OK;
7. Operate, Booleans, Overlap, Areas, Pick All;



8. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Areas, All Areas, SIZE=0.3, OK;
9. Mesh, Areas, Free, *Kliknite obdĺžnik a vnútorný polkruh*, OK;
10. Mesh Attributes, Default Attribs, TYPE=2 INFIN110, OK;
 Plot, Areas;
11. Size Controls, Manual Size, Lines, Picked Lines, *Kliknite dve zvislé koncové čiary vonkajšej polprstencovej plochy*, OK, NDIV=1, OK;
12. Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, *Kliknite vonkajší* polprstenec, OK;
 Plot, Areas;
13. Solution, Define Loads, Apply, Magnetic, Excitation, CurrDensity, On Areas, *Kliknite obdĺžnikovú plochu cievky*, OK, VAL3=J, OK;
14. Boundary, Vector Poten, On Lines, *Kliknite vonkajšiu čiaru polprstenca*, OK, AZ=0, OK;
15. Flag, Infinite Surf, On Lines, *Kliknite vonkajšiu čiaru polprstenca*, OK;
16. Solve, Current LS, OK;
 Plot, Elements;
17. General Postprocessor, Plot Results, Contour Plot, 2D Flux Lines, OK;



18. General Postprocessor, Path Operations, Define Path, By Nodes, *Kliknite od spodu prvý a posledný uzol vnútorného polkruhu na osi y*, OK, Name=cesta, nDiv=100, OK;
19. Map onto Path, Lab=Hos, Flux & gradient, HY, OK;
20. Plot Path Item, On Graph, Hos, OK;



Výsledok je v dobrej zhode s analytickým riešením.

24.5 Elektromagnet a jeho silové účinky

V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali magnetickým poľom vo vákuu. Vzťah medzi intenzitou magnetického poľa $\mathbf{H}$ a magnetickou indukciou $\mathbf{B}$ je v takomto prípade jednoduchý

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{24.37}$$

kde μ_0 je permeabilita vákua (μ_0 = $4\pi \cdot 10^{-7}$H/m).

Je to priamo úmerný vzťah, resp. rovnica priamky, ktorá v diagrame B-H prechádza počiatkom a jej smernica je μ_0. Pretože permealita vzduchu sa len nepatrne líši od permeality vákua, možno pri bežných praktických výpočtoch tento vzťah využívať aj pri analýze magnetického poľa vo vzduchovom prostredí.

Podobný jednoduchý vzťah so skalárnou hodnotou permeability platí aj pre *izotropné lineárne* materiály

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \tag{24.38}$$

kde μ je permeabilita materiálu [H/m] a $\mu_r = \mu / \mu_0$ je relatívna permeabilita materiálu [-]. Tento vzťah umožňuje klasifikovať magnetické materiály ako *diamagnetické* ($\mu_r < 0$), *paramagnetické* ($\mu_r = 1$ až 10) a *feromagnetické* ($\mu_r \gg 10$), pravda, pre aplikačne najdôležitejšie, feromagnetické izotropné materiály je nelineárny

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H})\,\mathbf{H} \tag{24.39}$$

a navyše nejednoznačný, pretože okamžitá hodnota $\mathbf{B}$ závisí aj od predchádzajúcej histórie zmeny $\mathbf{H}$. Pre nestacionárnu numerickú analýzu magnetického poľa v takomto materiáli treba zadať hodnoty z jeho hysteréznej slučky podľa typu materiálu a podľa rozsahu v akom sa predpokladá zmena budiacej intenzity $\mathbf{H}$. Vzťah (24.39) naznačuje aj nelinearitu μ v závislosti od intenzity magnetického poľa. Ďalšiu komplikáciu pri určovaní magnetických vlastností rôznorodých magnetických materiálov spôsobuje aj ich závislosť od teploty a pri nestacionárnych úlohách aj od frekvencie zmeny magnetického poľa. Pri výpočtových analýzach reálnych úloh sa mnohokrát treba zmieriť so spriemerovanými aproximačnými hodnotami. prípadne vykonať vlastné experimentálne merania materiálu pri daných podmienkach.

Vzťah (24.39) možno zapísať aj v tvare

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H}) \right] \tag{24.40}$$

aby sa vyčlenil (nelineárny) príspevok samotného materiálu k celkovej indukcii. Vektor $\mathbf{M}$ [A/m] (kolineárny s $\mathbf{B}$) s nazýva *vektor magnetizácie* (magnetizácia, celkový magnetizačný moment). Ak z (24.40) pomocou (24.38) vylúčime $\mathbf{B}$ dostaneme vzťah pre magnetizáciu v závislosti od intenzity magnetického poľa

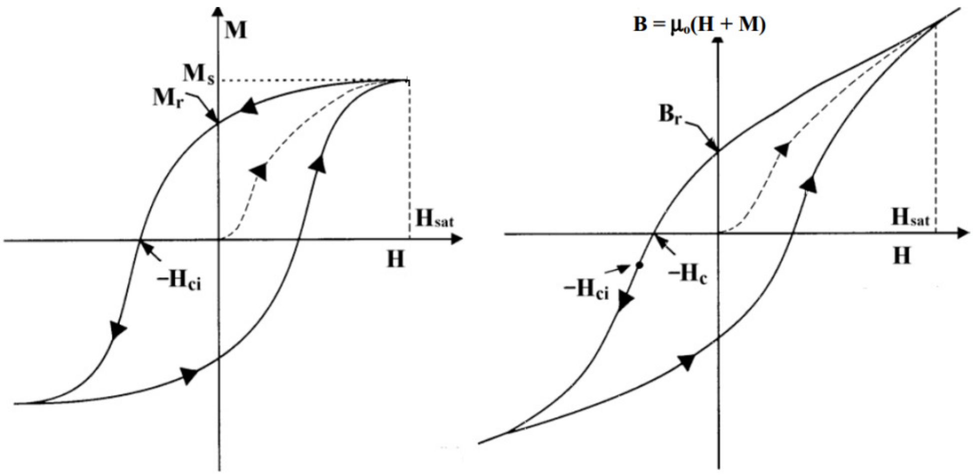
$$\mathbf{M} = \left[\mu_r(\mathbf{H}) \text{-} 1 \right] \mathbf{H} \tag{24.41}$$

Sú to všetko empirické vzťahy a pre konkrétne feromagnetikum sa určujú experimentálne. Možno sa teda stretnúť s dvomi druhmi experimentálne zistených hysteréznych slučiek feromagnetického materiálu (obr. 24.7). Pre potreby numerickej analýzy magnetického poľa v konkrétnom materiáli sa využívajú B-H krivky a z nich odčítané hodnoty:

$\mathbf{B}_r$ - zvyšková magnetická indukcia

$\mathbf{H}_c$ - koercitívna intenzita magnetického poľa

Pomocou hysteréznej slučky materiálu možno odhadnúť tiež tzv. hysterézne energetické straty pri striedavom magnetovaní (napr. zohrievanie jadier transformátorov), ktoré sú úmerné obsahu plochy ohraničenej hysteréznou slučkou.



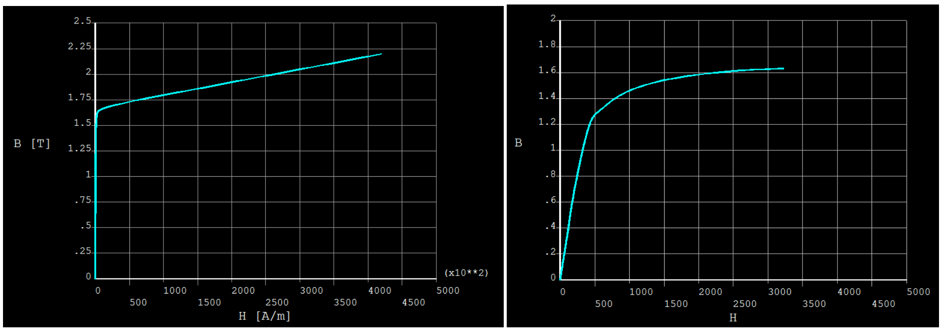
Obr. 24.7 *(a) Závislosť magnetizácie* $\mathbf{M}$ *a (b) magnetickej indukcie* $\mathbf{B}$ *feromagnetického materiálu od zmeny intenzity pôsobiaceho magnetického poľa* $\mathbf{H}$

Podľa tvaru hysteréznej slučky sa materiály delia na :

1. *magneticky tvrdé* – majú širokú magnetickú slučku a vysokú hodnotu B_r a H_c. Ich zmagnetovanie je energeticky pomerne náročné a zdĺhavé, ale po zrušení vonkajšieho magnetického poľa zostávajú naďalej zmagnetované a využívajú sa hlavne na výrobu permanentných magnetov pre priemyselné využitie.
2. *magneticky mäkké* – majú veľmi úzku hysteréznu slučku, teda malú hodnotu H_c pri relatívne vysokom magnetickom výkone (relatívne veľká hodnota B_r) , dajú sa ľahko zmagnetizovať a pri cyklickom zaťažovaní vykazujú malé energetické straty. Majú široké priemyselné využitie, mimo iného aj na jadrá elektromagnetov.

Hysterézne slučky magneticky mäkkého materiálu sú veľmi úzke, z hľadiska praktických výpočtov sa v podstate kryjú s krivkou prvotnej magnetizácie (čiarkovaná krivka v obr. 24.7b) a sú v určitom začiatočnom intervale blízke lineárnemu priebehu so zanedbateľne malou hodnotou H_c. Vypnutie napájania cievky elektromagnetu s magneticky mäkkým jadrom (kedy $H=0$) potom vedie k vypnutiu magnetického poľa ($B \approx 0$), t.j. k vypnutiu magnetického účinku elektromagnetu. Napr. B-H závislosť kremíkovej (elektrickej) ocele určenej pre jadrá elektromagnetov obsiahnutá v databáze magnetických materiálov programu Ansys túto charakteristiku podľa obr. 24.8 potvrdzuje. Po saturácii pri pomerne malej hodnote H_{sat} a vysokej hodnote B_{sat} nasleduje lineárny priebeh $B=\mu_0 H$ už prakticky s nulovou magnetizáciou materiálu. Pri zväčšení mierky vidieť že približne lineárny priebeh B-H charakteristiky materiálu je zhruba do 1,2 T.

Point	H	B
1	59.524	0.20000
2	119.05	0.40000
3	158.73	0.55000
4	396.83	1.1500
5	555.56	1.3000
6	793.65	1.4000
7	1587.3	1.5500
8	3968.3	1.6350
9	7936.5	1.6550
10	15873.	1.6750
11	31746.	1.7014
12	63492.	1.7500
13	95238.	1.7900
14	0.19048E+06	1.9098
15	0.28571E+06	2.0296
16	0.38095E+06	2.1495
17	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000



Obr. 24.8 *Príklad experimentálne zistenej B-H závislosti kremíkovej ocele*

Permanentný magnet v magnetickom obvode pracuje v oblasti demagnetizačnej krivky (2. kvadrant v obr.24.7), takže stačí zadať hodnoty hysteréznaj slučky v tomto kvadrante. Pritom sa pri numerickom riešení v programe obyčajne vyžaduje posunutie týchto hodnôt o H_c do prvého kvadrantu s kladnými hodnotami *H.*

Silový účinok magnetického poľa na teleso z feromagnetického materiálu možno vypočítať napr. pomocou metódy Maxwellovho napätia (*Maxwell stress method*). Pre objemovú hustotu Lorentzovej sily v magnetickom poli platí

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{24.42}$$

kde $\mathbf{J}$ je objemová hustota prúdu. Celková magnetická sila na teleso s objemom V potom je

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \tag{24.43}$$

Z Ampérovho zákona (zanedbávame posuvný prúd) pre hustotu prúdu dostávame

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0 \tag{24.44}$$

takže vzťah pre magnetickú silu sa zmení na

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} dV \tag{24.45}$$

Možno ukázať že

$$-\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{T} \tag{24.46}$$

kde $\mathbf{T}$ je tenzor Maxwellovho napätia pre stacionárne magnetické pole

$$\mathbf{T} = \mathbf{BB} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} \tag{24.47}$$

s jednotkovým tenzorom $\mathbf{I}$. Dosadením (24.47) do (24.45) a využitím divergenčnej teorémy dostávame výsledný vzťah pre výpočet magnetickej sily na teleso

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_V \nabla \times \mathbf{T} dV = \frac{1}{\mu_0} \int_S \mathbf{T} \cdot dS \tag{24.48}$$

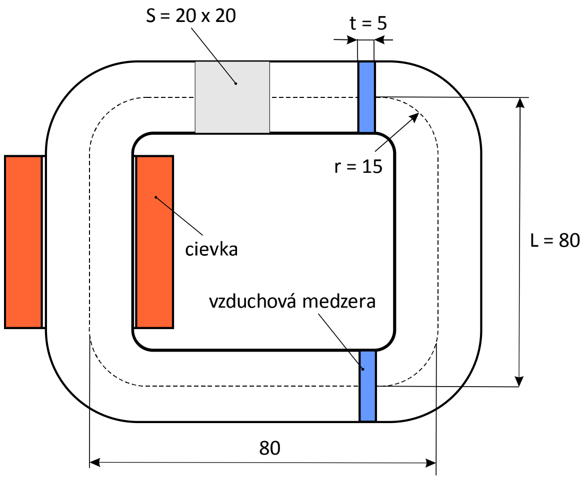
kde *S* je plocha ohraničujúca teleso. Metóda vyžaduje, aby sa plocha *S* stýkala len so vzduchom ktorého permeabilita je prakticky rovná μ_0.

Príklad 24.6

Pre magnetický obvod s cievkou (NI=1000 Ampérzávitov, prierez 40x6 mm) a feromagnetickým jadrom ($\mu_r = 1000$) s dvomi vzduchovými medzerami (obr. 24.9) určte analyticky a numericky:

1. Veľkosť magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ v obvode
   a) bez vzduchových medzier
   b) so vzduchovými medzerami
2. Veľkosť sily, ktorou elektromagnet pôsobí na oddelenú kotvu

Rozptyl magnetického poľa v okolí jadra (s vysokou permeabilitou voči vzduchu) i rozptyl poľa v okolí vzduchových medzier zanedbávame.



Obr. 24.9

Pre súvislé jadro (bez vzduchových medzier) možno približnú hodnotu intenzity magnetického poľa (konštantnú po priereze i celom obvode) vyjadriť pomocou Ampérovho zákona obopnutého prúdu (24.21)

$$\oint_\ell \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{volny} = NI$$

V našom prípade dostaneme

$$H\ell = NI \quad \rightarrow \quad H = \frac{NI}{\ell} = \frac{NI}{4(L-2r)+2\pi r} = \frac{1000}{4(0{,}08-2\cdot 0.015)+2\pi 0.015} = 3398 \text{ A/m} \tag{a}$$

a z toho

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 3398 = 4{,}27 \text{ T} \tag{b}$$

Spojitosť a konštantnú veľkosť H však narušujú vzduchové medzery. Označme veľkosť intenzity magnetického poľa v jadre H_j a v medzerách H_m. Uvedený integrál sa takto rozkladá na súčet dvoch integrálov po stredovej čiare oboch oblastí s výsledkom

$$H_j\left[4(L-2r)+2\pi r-2t\right]+H_m 2t=NI \tag{c}$$

Pretože na rozhraní dvoch prostredí s rôznymi permeabilitami sa nemení na rozhranie kolmá zložka vektora $\mathbf{B}$, platí

$$B_j=B_m \quad\rightarrow\quad \mu_r\mu_0 H_j=\mu_0 H_m \quad\rightarrow\quad H_m=\mu_r H_j \tag{d}$$

Z rovníc (d) a (c) dostávame intenzitu magnetického poľa vo vzduchovej medzere

$$H_m=\frac{NI}{1/\mu_r\left[4(L-2r)+2\pi r-2t\right]+2t}=$$

$$=\frac{1000}{1/1000\left[4(0{,}08-2\cdot 0{,}015)+2\pi 0{,}015-2\cdot 0{,}005\right]+2\cdot 0{,}005}=97087\ \text{A/m}$$

Približná veľkosť magnetickej indukcie v obvode so vzduchovými medzerami (konštantná po priereze i celom obvode) teda je

$$B=B_j=B_m=\mu_0 H_m=4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 97087=0{,}122\ \text{T} \tag{e}$$

Pre ťahovú silu na kotvu platí [pozri napr. http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnet]

$$F=2F_m=2\frac{B^2 S}{2\mu_0}=2\frac{0.122^2\cdot 0.02^2}{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}=4{,}74\ \text{N} \tag{f}$$

Numericky sme úlohu riešili v programe Ansys týmto interaktívnym postupom:

1. Preferences, Magnetic-Nodal, OK;

Zadanie typu prvku a relatívnej permeability materiálu jadra obvodu

2. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Magnetic Scalar, Scalar Brick 96, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1000, OK, Material, Exit;

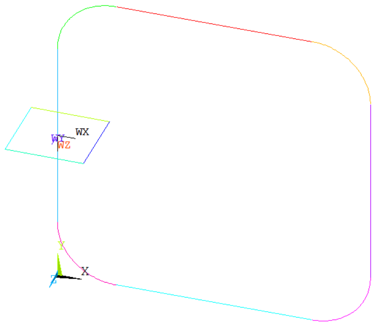
Vytvorenie stredovej čiary jadra

4. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=0, X2=0.08, Y1=0, Y2=0.08, OK;
5. Modeling, Delete, Areas Only, Pick All;
6. Plot, Lines;
7. Modeling, Create, Lines, Line Filet, Kliknite dve stýkajúce sa čiary, OK, RAD=0.015, Apply, Postup zopakujte pre zvyšné tri dvojice čiar, OK;

Umiestnenie pracovnej roviny do miesta a správnej polohy na vytvorenie cievky a zadanie prierezu jadra

8. Work Plane, Offset WP by Increment, XYZ Offsets: 0, 0.04,0 Apply,Nastavte Degrees na 90 a kliknite +X, OK;
9. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Centr&Cornr, Width=0.02, Height=0.02, OK;

10. Plot, Lines, Kliknite ikonku šikmého pohľadu;



Vytvorenie jadra obvodu (zatiaľ bez vzduchových medzier)

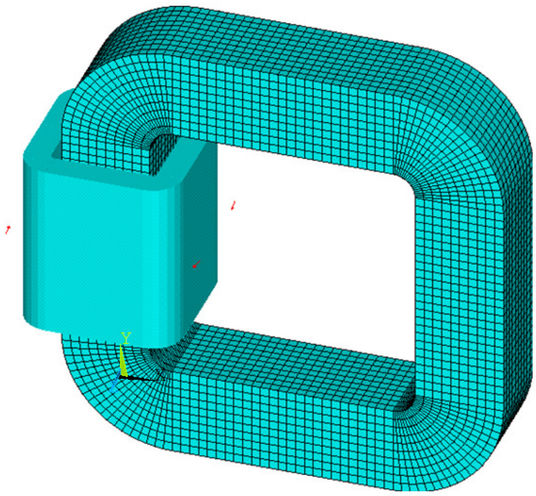
11. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Line by WrkPlane, Kliknite ľavú zvislú čiaru, OK;
12. Modeling, Operate, Extrude, Areas, Along Lines, Kliknite štvorcovú plochu, OK, Kliknite postupne všetky čiary veľkého štvorca začínajúc čiarou nad plochou, OK;
13. Numbering Ctrls, Merge Items, Label=Keypoints, OK;

Vytvorenie konečných prvkov súvislého jadra obvodu

14. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, SIZE=0.002, OK;
15. Meshing, Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All;

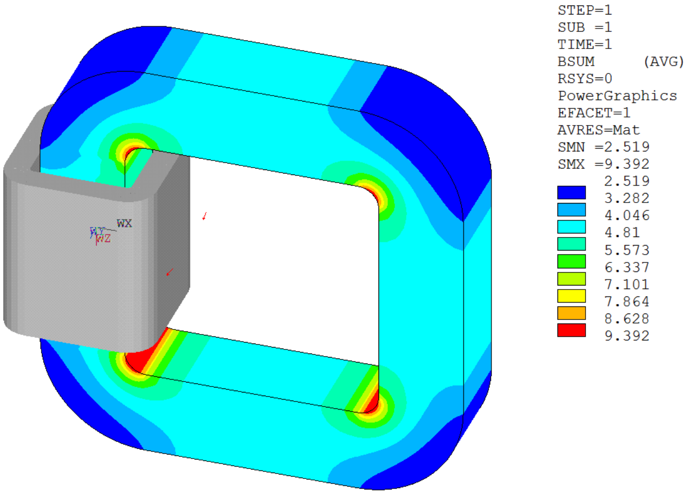
Vytvorenie cievky

16. Modeling, Create, Racetrack Coil, XC=0.015, YC=0.015, RAD=0.004, TCUR=1000, DY=0.006, DZ=0.04, Cname=cievka, OK;
17. Plot, Replot;



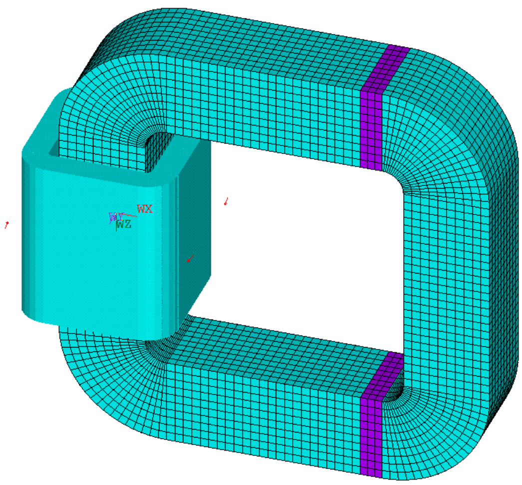
Výpočet úlohy metódou redukovaného skalárneho potenciálu (RSP) a znázornenie hodnôt hustoty magnetického toku (V rovných častiach jadra sa B pohybuje v rozmedzí 4,046 až 4,81 T; uvedený analytický odhad v týchto miestach je 4,27 T)

18. Solution, Solve, Electromagnet, Static Analysis, Opt&Solv, Option=RSP, Biot=YES, OK;
19. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Flux Density, Magnetic flux density vector sum, OK;



Vytvorenie modelu jadra so vzduchovými medzerami (t.j. elektromagnetu s oddelenou kotvou)

20. Preprocessor, Meshing, Clear, Volumes, Pick All;
21. Plot, Lines;
22. Modeling, Copy, Areas, Kliknite pravé koncové plochy vodorovných objemov jadra, OK, DX=-0.005, OK;
23. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Volume by Area, Kliknite horný vodorovný objem jadra, OK, Kliknite hornú novovytvorenú plochu, Apply, To isté zopakujte aj so spodnou časťou, OK;
24. Plot, Volumes;
25. Material Props, Material Models, Material, New Model, OK, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1, Material, Exit;
26. Meshing, Mesh Attributes, Picked Volumes, Kliknite objemy vzduchových medzier, OK, MAT=2, OK;
27. Meshing, Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All;
28. Plot Ctrls, Numbering, Elem-Attrib numbering, Material Numbers, /NUM=Colors Only, OK;



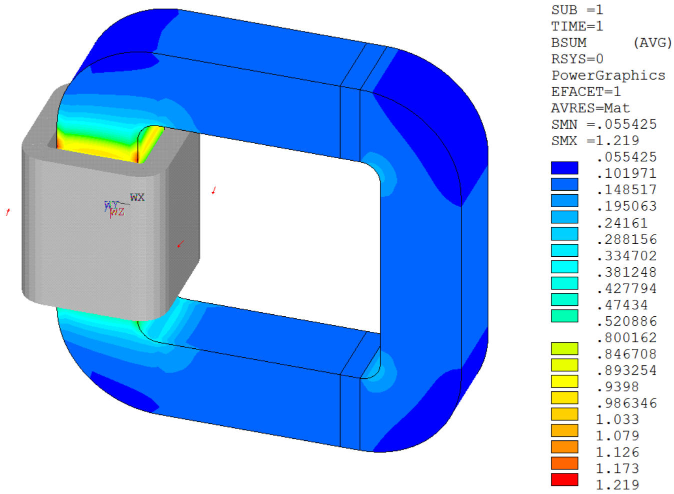
Príkazy na výpočet ťahovej sily na kotvu metódou Maxwellovho napätia

29. Select, Entities, Volumes, By Num Pick, From Full, Apply, Kliknite tri objemy kotvy, OK, Elements, Attached to Volumes, OK;
30. Select, Comp/Assembly, Create Component, Cname=kotva, Entity=Elements, OK;

31. Select, Everythings;
32. Solution, Define Loads, Apply, Magnetic, Flag, Comp Force/Torque, KOTVA, OK;

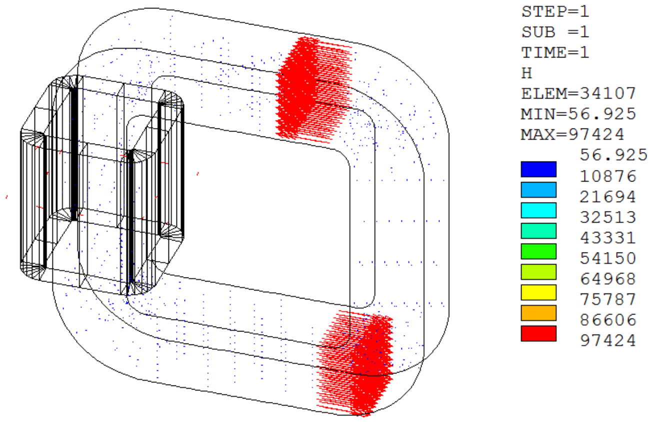
Výpočet a znázornenie veľkosti hustoty magnetického toku B. Porovnajte výrazný pokles oproti hodnotám bez vzduchových medzier. V rovných častiach sa hodnoty pohybujú v rozmedzí 0,10 až 0.15 T. Uvedený analytický odhad v týchto miestach je 0,12 T

33. Solution, Solve, Electromagnet, Static Analysis, Opt&Solv, Option=RSP, Biot=YES, OK;
34. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Flux Density, Magnetic flux density vector sum, OK;



Znázornenie intenzity magnetického poľa vo vzduchových medzerách(t.j. medzi magnetom a kotvou). Uvedený analytický odhad je 97087 A/m

35. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Field Intensity, Magnetic field intensity vector sum, OK;



Vypísanie vypočítanej ťahovej sily na kotvu

36. General Postproc, Elec&Mag Calc, Component Based, Force,, Component=KOTVA, OK;

SUMMARY OF FORCES BY MAXWELL STRESS TENSOR
Units of Force: (N)

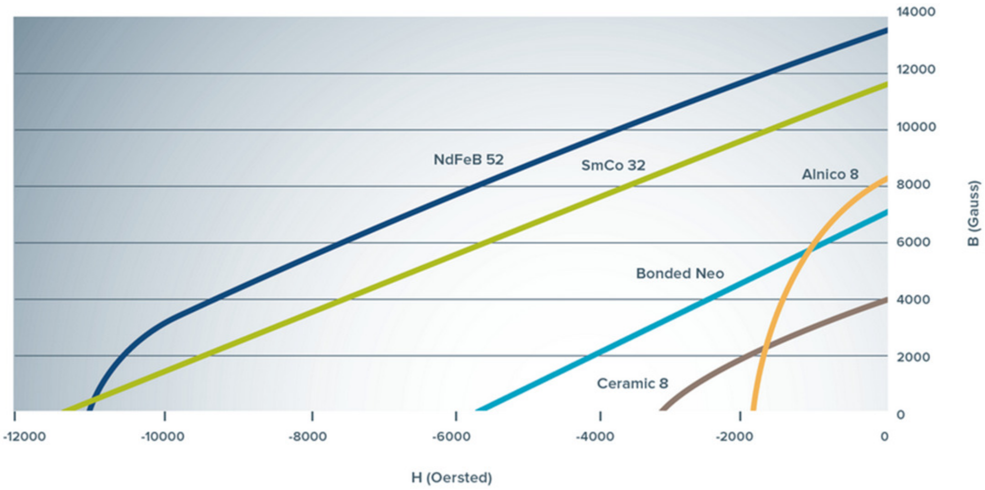
Component	Force-X	Force-Y	Force-Z
KOTVA	-0.47599E+01	0.70437E-13	0.19686E-14

Note: Maxwell forces are in the Global Cartesian coordinate system.

37. File, Exit, Save Geom+Loads, OK;

24.6 Obvod s permanentným magnetom

V mnohých priemyselných elektrotechnických aplikáciách je z dôvodov výhodnosti resp. nutnosti elektromagnet nahradzovaný permanentným magnetom s určitou vhodnou charakteristikou. Parametre magnetu udávajú výrobcovia a medzi najdôležitejšie patria charakteristiky udané na demagnetizačnej krivke materiálu magneta (2. kvadrant normálnej hysteréznej slučky – obr. 24.7 b). Ukážka týchto charakteristík niektorých materiálov používaných na výrobu výkonných permanentných magnetov je uvedená na obr. 24.10.

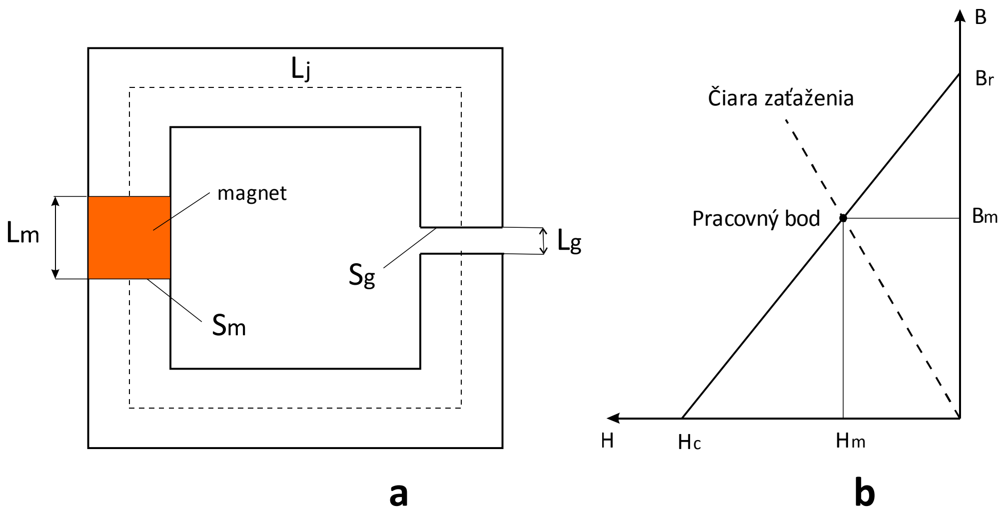


Obr. 24.10 *Demagnetizačné krivky niektorých priemyselných magnetických materiálov (1 gauss = 10^{-4} tesla, 1 oersted = 79,577 A/m)*

Hlavnou úlohou permanentného magnetu vo viac alebo menej zložitom magnetickom obvode je, rovnako ako pri elektromagnete, vytvoriť na požadovanom mieste vo vzduchovej medzere alebo viacerých medzerách potrebnú intenzitu magnetického poľa. Pri jednoduchom obvode možno rozmery magnetu resp. jeho magnetickú výkonnosť vo vyšetrovanom obvode určiť aj analyticky, pri zložitejších obvodoch sa nezaobídeme bez využitia numerických sofvérových prostriedkov. Treba si uvedomiť, že výrobcom udávané základné charakteristiky sú len určité vstupné údaje do týchto analýz, ku ktorým pristupujú ďalšie, predovšetkým tvarové charakteristiky magnetu i tvarové a materiálové charakteristiky obvodu.

Uvažujme jednoduchý magnetický obvod na obr. 24.11a s lineárnou demagnetizačnou charakteristikou materiálu magnetu (obr. 24.11b). Na približnú analýzu obvodu možno využiť Ampérov zákon (24.21) s integrálom po stredovej čiare obvodu, podľa ktorého pri absencii voľného elektrického prúdu pre intenzity magnetického poľa v jednotlivých dĺžkových úsekoch obvodu platí

$$H_m L_m + H_j L_j + H_g L_g = 0 \qquad (24.49)$$



Obr. 24.11 **a)** Jednoduchý obvod so vzduchovou medzerou
b) Určenie pracovného bodu

Ako vidieť úlohu zjednodušujeme tak, že magnetické pole existuje len v materiáli obvodu a vzduchovej medzere, čo možno pripustiť pri vysokej permeabilite jadra a malej šírke vzduchovej medzery (únik generovaného magnetického poľa do vzduchového okolia s veľmi nízkou permeabilitou μ_0 je veľmi malý). Vzhľadom na vysokú permeabilitu jadra μ_j je člen $H_j L_j$ zanedbateľne malý ($H_j = B_j / \mu_j$) oproti ostatným členom a rovnica (24.49) sa zjednodušuje na

$$H_m L_m + H_g L_g = 0 \tag{24.50}$$

Využijeme tiež Gaussov zákon o spojitosti magnetického toku v obvode, podľa ktorého platí

$$B_m S_m = B_g S_g \tag{24.51}$$

kde vystupujú prierezové plochy magnetu a vduchovej medzery, ktoré môžu mať nerovnakú veľkosť. Kombináciou týchto rovníc a využitím vzťahu $B_g = \mu_0 H_g$, ktorý platí pre vzduchovú medzeru, dostávame rovnicu priamky zaťaženia v tvare

$$B_m = -\mu_0 \frac{S_g}{S_m} \frac{L_m}{L_g} H_m \tag{24.52}$$

Analytické alebo grafické určenie súradníc priesečníka priamky zaťaženia a demagnetizačnej čiary poskytne potom hľadané hodnoty H_m a B_m a z predchádzajúcich rovníc aj ďalšie údaje o magnetickom poli v obvode.

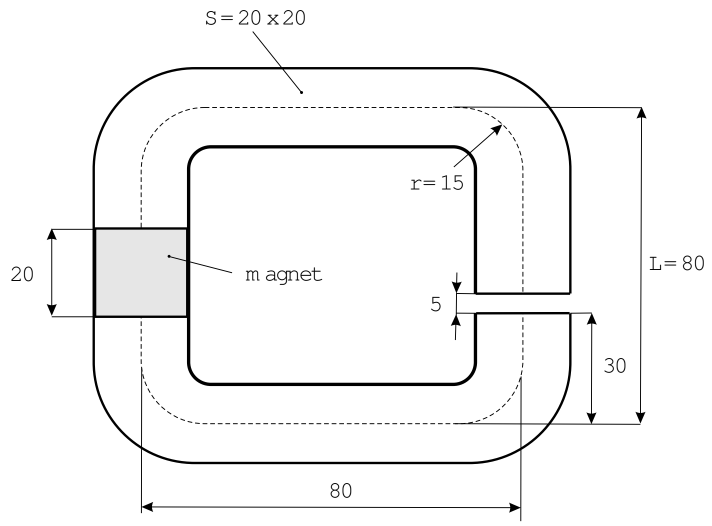
Príklad 24.7

Magnetický obvod s permanentným magnetom a jadrom s $\mu_r = 5000$ má rozmery podľa obr. 24.12. Určte:

Veľkosť intenzity magnetického poľa vo vzduchovej medzere H_g,keď

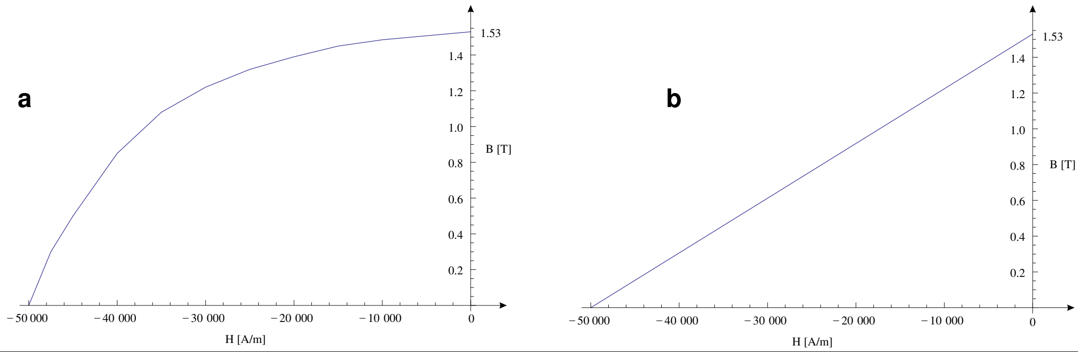
a) demagnetizačná čiara materiálu magnetu je lineárna (zadaná na obr.24.13b)
b) demagnetizačná čiara materiálu magnetu je nelineárna (zadaná na obr.24.13a)

Rozptyl magnetického poľa v okolí jadra (s vysokou permeabilitou voči vzduchu) i rozptyl poľa v okolí vzduchovej medzery zanedbávame.



Obr.24.12 *Obvod s permanentným magnetom a vzduchovou medzerou*

```
ListLinePlot[{{-50000, 0}, {0, 1.53}}]
ListLinePlot[{{-50000, 0}, {-47500, 0.3}, {-45000, 0.5},
  {-40000, 0.85}, {-35000, 1.08}, {-30000, 1.22},
  {-25000, 1.32}, {-20000, 1.39}, {-15000, 1.45},
  {-10000, 1.485}, {0, 1.53}}]
```



Obr.24.13 *Demagnetizačná krivka materiálu (**a**) a jej lineárna aproximácia (**b**)*

Pre analytické lineárne riešenie napíšeme rovnicu demagnetizačnej priamky s premennými H_1 a B_1

$$B_1 = \frac{B_r}{H_c} H_1 + B_r$$

a rovnicu priamky zaťaženia podľa (24.52) s pemennými H_2 a B_2 pričom $S_g = S_m$

$$B_2 = -\mu_0 \frac{L_m}{L_g} H_2$$

Priesečník týchto priamok má v oboch rovniciach rovnaké súradnice; sú to hľadané hodnoty H_m a B_m pracovného bodu (pozri obr.24.11b). Na ich určenie po dosadení konkrétnych hodnôt dostávame z uvedených rovníc dve rovnice o dvoch neznámych

$$B_m = \frac{1,53}{50000} H_m + 1,53$$

$$B_m = -4\pi \cdot 10^{-7} \frac{0.02}{0.005} H_m$$

Riešením dostávame $H_m = 42900$ A/m a intenzita magnetického poľa vo vzduchovej medzere podľa (24.50) je

$$H_g = -\frac{L_m}{L_g} H_m = -\frac{0,02}{0,05} 42900 = -171680 \text{ A/m}$$

Pre numerické riešenie úlohy v programe Ansys treba demagnetizačné čiary materiálu magnetu presunúť do kladných čísiel (do prvého kvadrantu hysteréznej slučky) a jednotlivé body zadať tabuľkovým spôsobom (pri B-H voľbe zadávania materiálu v programe). Dosiahne sa to pripočítaním hodnoty $+H_c$ ku všetkym hodnotám H demagnetizačnej krivky. Začiatočný bod je potom vždy H =0, B = 0, ktorý sa nemusí zadávať.

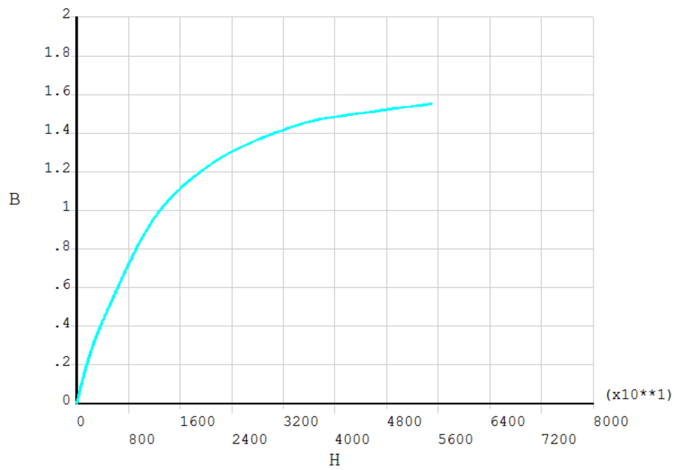
Lineárny priebeh sa jednoducho zadá pomocou kladnej hodnoty H_c a sklonu krivky, t.j. pomocou konštantnej hodnoty relatívnej permeability o veľkosti B_r/H_c. Pre tento príklad to je: $\mu = \mu_0\mu_r = \mu_0 B_r / H_c = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,53 / 50000 = 24$ H/m.

Podľa obr.24.13 prepočítané hodnoty pre udanie B – H závislosti do programu sú:

H	2500	5000	10000	15000	20000	25000	30000	35000	40000	45000	50000
B	0,3	0,5	0,85	1,08	1,23	1,32	1,39	1,45	1,49	1,52	1,53

Kontrolné numerické lineárne riešenie úlohy ako aj riešenie s reálnou (nelineárnou) demagnetizačnou krivkou materiálu (obr.24.13a) sme dostali v jednom behu programu Ansys s touto postupnosťou príkazov v interaktívnom móde programu:

1. Preferences, Magnetic-Nodal, OK;
   Zadanie typu prvku a materiálov (1 = jadro, 2 = vzduch, 3 = magnet - lineárny materiál, 4 = magnet - BH krivka)
2. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Magnetic Scalar, Scalar Brick 96, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=5000, OK, Material, Exit;
4. Material Props, Material Models, Material, New Model, OK, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1, Material, New Model, OK, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=24, OK, Coercive force, Orthotropics, MGYY=50000, OK, Material, New Model, OK, Electromagnetics, Coercive Force, Orthotropic, MGYY=50000, OK, BH Curve, H=2500, B=0.3, Add Point, H=5000, B=0.5, Add Point, H=10000, B=0.85, Add Point, H= 15000, B=1.08, Add Point, H=20000, B=1.22, Add Point, H=25000, B=1.32, Add Point, H= 30000, B=1.39, Add Point, H=40000, B=1.485, Add Point, H=50000, B=1.53, Graph, BH, OK, Material, Exit;

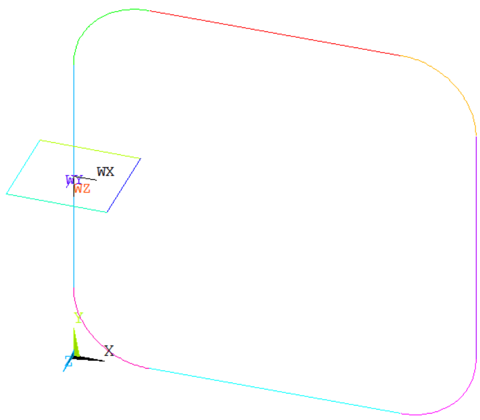


Vytvorenie stredovej čiary jadra

5. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=0, X2=0.08, Y1=0, Y2=0.08, OK;
6. Modeling, Delete, Areas Only, Pick All;
7. Plot, Lines;
8. Modeling, Create, Lines, Line Filet, *Kliknite dve ľubovoľné stýkajúce sa čiary*, OK, RAD=0.015, Apply, *Postup zopakujte pre zvyšné tri dvojice čiar*, OK;

Umiestnenie pracovnej roviny do miesta a správnej polohy na vytvorenie jadra (zatiaľ bez vzduchovej medzery) a zadanie jeho prierezu

9. Work Plane, Offset WP by Increment, XYZ Offsets: 0, 0.03,0 Apply, *Nastavte Degrees na 90 a kliknite +X*, OK;
10. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Centr&Cornr, Width=0.02, Height=0.02, OK;
11. Plot, Lines, *Kliknite ikonku šikmého pohľadu*;

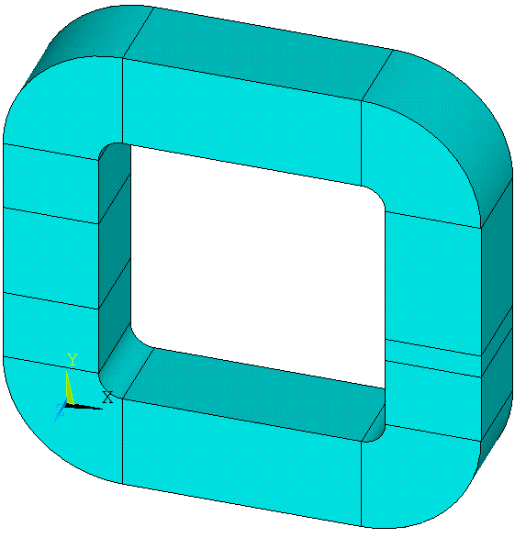


12. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Line by WrkPlane, *Kliknite ľavú zvislú čiaru*, OK;
13. Modeling, Operate, Extrude, Areas, Along Lines, *Kliknite štvorcovú plochu*, OK, *Kliknite postupne všetky čiary veľkého štvorca začínajúc čiarou nad plochou*, OK;
14. Numbering Ctrls, Merge Items, Label=Keypoints, OK;

Vytvorenie objemov pre vzduchovú medzeru a magnet

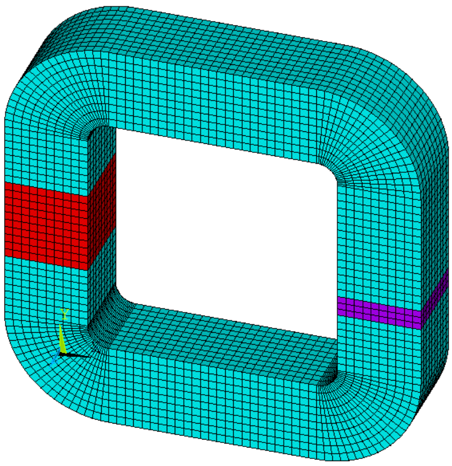
15. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Volumes by WrkPlane, *Kliknite pravý zvislý objem*, OK, Plot, Replot;
16. Work Plane, Offset WP by Increments, XYZ Offsets: 0, 0, -0.005, OK;

17. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Volumes by WrkPlane, *Kliknite pravý väčší zvislý objem*, OK, Plot, Replot;
18. Work Plane, Offset WP by Increments, XYZ Offsets: 0, 0, -0.015, OK;
19. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Volumes by WrkPlane, *Kliknite ľavý väčší zvislý objem*, OK, Plot, Replot;



Tvorba siete prvkov

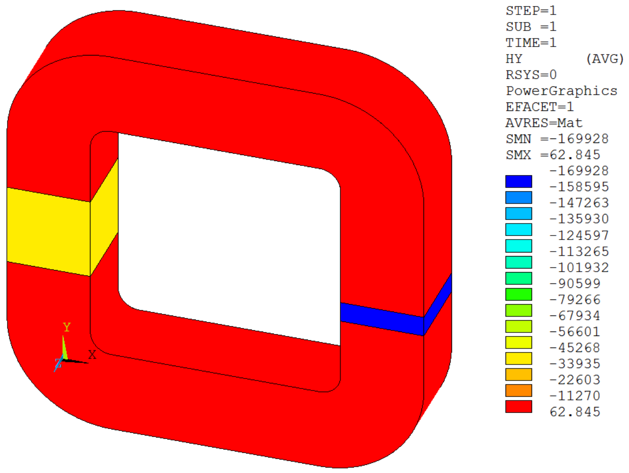
20. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, SIZE=0.002, OK;
21. Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All;
22. Plot, Volumes;
23. Mesh Attributes, Default Attribs, MAT=2, OK;
24. Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, *Kliknite objem vzduchovej medzery*, OK, Yes, OK;
25. PlotCtrls, Numbering, Elem/Attrib numbering = Material numbers, /NUM=Colors only, OK;
26. Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, MAT=3, OK;
27. Meshing, Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, *Kliknite objem magneta*, OK, Yes, OK;



Lineárny výpočet a znázornenie veľkosti intenzity magnetického poľa. (Uvedený analytický odhad vo vzduchovejm medzere je -171680 A/m.)

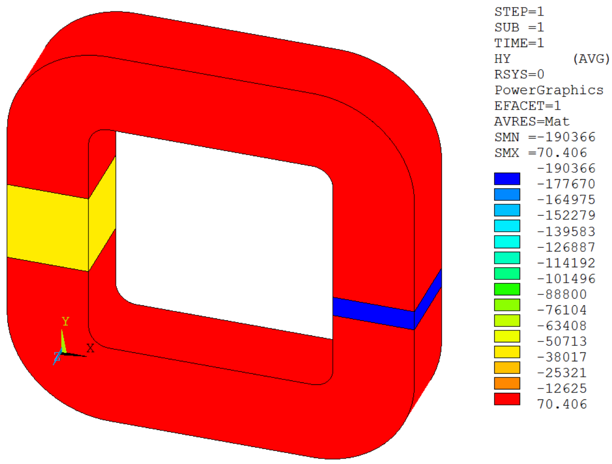
28. Solution, Solve, Electromagnet, Static Analysis, Opt&Solv, Option=RSP, OK;

29. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Field Intensity, Y-component of magnetic field intensity, OK; (Numerický výsledok je, ako vidieť, -169928 A/m.)



Nelineárny výpočet s B-H krivkou materiálu magneta a znázornenie veľkosti intenzity magnetického poľa.

30. Preprocessor, Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, MAT=4, OK;
31. Meshing, Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, *Kliknite objem magneta*, OK, Yes, OK;
32. Solution, Solve, Electromagnet, Static Analysis, Opt&Solv, Option=RSP, OK;
33. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Field Intensity, Y-component of magnetic field intensity, OK;



Nelineárny výpočet s B-H krivkou upresnil maximálnu intenzitu magnetického poľa vo vzduchovej medzere na -190366 A/m. Znamienko mínus znamená, že vektor **H** má vo vzduchovej medzere opačný zmysel ako kladná globálna os Y.

25 Kontakt telies

25.1 Úvod

Kontakt dvoch alebo viacerých telies patrí do kategórie pomerne zložitých nelineárnych úloh mechaniky kontinua. Rozpätie týchto úloh je od kontaktu bez trenia s malými deformáciami až po kontakt s trením s veľkými deformáciami a materiálovými nelinearitami. Formulácia kontaktných podmienok je síce rovnaká pri všetkých týchto prípadoch, ale do príslušnej úlohy vnáša ďalšie nelinearity v oblasti styku telies, nehovoriac o algoritmických problémoch spojených s detekciou a nepreniknuteľnosťou stykových plôch, ako aj s nespojitosťami pri zohľadňovania trecích síl.

Význam riešenia týchto úloh z priemyselného hľadiska je značný; vyplýva z množstva oblastí, kde sa vyžaduje analýza kontaktných problémov:

- tvárnenie kovov a plastických látok
- prevody a ďalšie časti strojov a mechanizmov
- spoje v stavebných konštrukciách
- skrutky, matice
- základy
- nápravy, spoje v rotoroch atď.
- bariérové testy vozidiel
- odlievanie, nitovanie
- analýza vlastností pneumatík, tesnení, ložísk
- elektrické spínače

Pri analýze tejto škály problémov sa možno stretnúť s problémami charakterizovanými jedným typom fyzikálneho poľa ako aj so zviazanými problémami rôznych fyzikálnych polí. Pokiaľ sa obmedzíme len na kontaktné úlohy s mechanickým poľom premenných, potom môžeme úlohy charakterizovať ako:

- jedno, dvoj a trojrozmerné
- lineárne (napr. kontakt dvoch elastických nosníkov s malými deformáciami a posunutiami) a nelineárne (napr. kontakt pneumatiky s podložím)
- statické alebo nestacionárne (dynamické) pri nízkej alebo vysokej rýchlosti zaťaženia
- bez trenia alebo s trením

Najdôležitejšie zviazané úlohy spojené s kontaktom sú

- Termo-mechanický kontakt - je spojený s vývinom tepla od plastickej deformácie i trenia. Príkladom je rotácia a brzdenie zaťažených kolies, mechanické rezanie kovov, objemové tvárnenie
- Elektro-magneto-mechanický kontakt, napr. analýza spínačov a mikro-elektro-mechanických systémov
- interakcia tekutiny a telesa

V ďalšom texte si niektoré základné pojmy z oblasti kontaktu telies ozrejmíme pomocou jednoduchých statických príkladov.

25.2 Základné pojmy

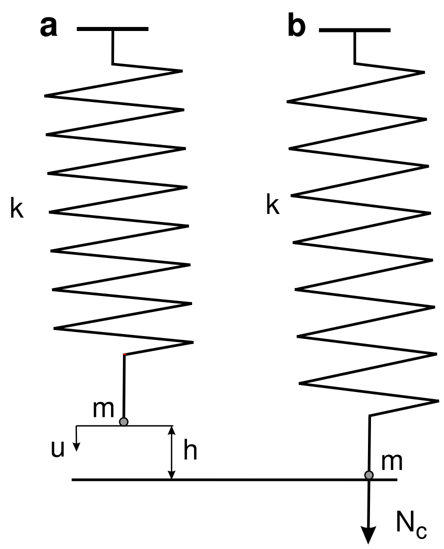
Ak valcovú pružinu na obr. 25.1a zaťažíme tiažovou silou bodovej hmotnosti *m*, bremeno sa posunie o hodnotu *u,* pre ktorej výpočet platí rovnovážna rovnica

$$ku - mg = 0 \tag{25.1}$$

Ak je pod bremenom tuhá podložka vo vzdialenosti *h*, môže dôsť ku kotaktu s podložkou. Situácia sa kontroluje pomocou tzv. *medzerovej (penetračnej) funkcie* $g_n(u)$, pre ktorú sa predpisuje obmedzenie

$$g_n(u) = h - u \geq 0 \tag{25.2}$$

ktoré pri kontakte ($u = h$) zabraňuje *penetrácii* telies (t.j. nesmie byť $u > h$).



Obr. 25.1

Pri hmotnosti *m*, ktorá by pružinu natiahla o väčšiu hodnotu ako *h*, dôjde ku kotaktu s podložkou a vzniku normálovej *kontaktnej tlakovej* sily $N_c < 0$ (obr. 25.1b). Pri konkrétnych hodnotách *m*, *k*, a *h*, môžu teda nastať dva rozdielne prípady

1. Tuhosť pružiny je dostatočne veľká, aby zabránila kontaktu bremena s podložkou. Vtedy platia podmienky

$$g_n(u) > 0 \qquad \text{a} \qquad N_c = 0 \tag{25.3}$$

2. Tuhosť pružiny je malá, dôjde ku kontaktu s tuhou podložkou a platí

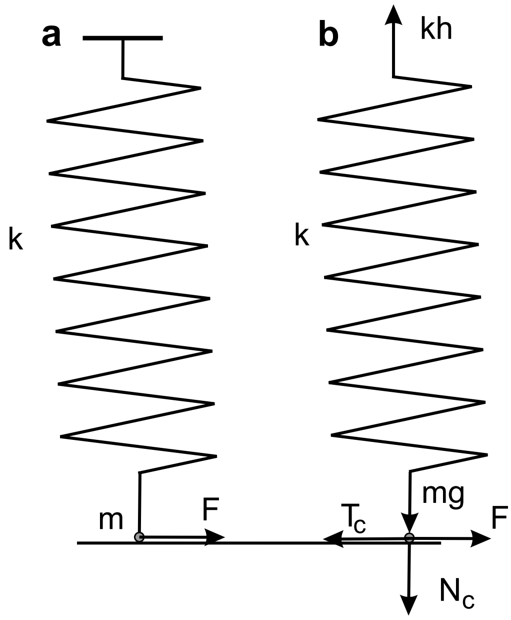
$$g_n(u) = 0 \qquad \text{a} \qquad N_c < 0 \tag{25.4}$$

Výpočet kontaktnej sily je pri tejto jednoduchej úlohe možný priamo z podmienky rovnováhy (25.1)

$$N_c = -mg + kh \tag{25.5}$$

pričom z podmienky $g_n(u) = 0$ vyplýva $u = h$.

Uvažujme teraz, že došlo ku kontaktu a na bremeno pôsobí aj sila *F* v smere rovnobežnom s podložkou (obr. 25.2a). Rovnovážne rovnice síl podľa obr. 25.2b sú



Obr. 25.2

$$N_c + mg - kh = 0 \tag{25.6}$$

$$F - T_c = 0 \tag{25.7}$$

Trenie medzi hmotnosťou a tuhou podperou treba opísať pomocou trecej konštitutívnej rovnice tak, aby dostatočne presne vystihovala reálnu fyzikálnu situáciu v mieste kontaktu oboch telies. Najjednoduchší a často využívaný model poskytuje Coulombov trecí zákon. Udáva vzťah medzi normálovou kontaktnou silou a kontaktnou trecou silou

$$f(N_c, T_c) = |T_c| + \mu N_c \leq 0 \tag{25.8}$$

kde μ je koeficient statického šmykového trenia. Nerovnosť (25.8) poskytuje rozlíšenie medzi statickým a dynamickým trením v mieste kontaktu. Pre situácie, kedy dochádza k statickému treniu platí (pripomínme, že tlaková sila N_c má zápornú hodnotu)

$$|T_c| < -\mu N_c \qquad \rightarrow \qquad F < -\mu N_c \tag{25.9}$$

a pre začiatok dynamického trenia platí

$$|T_c| = -\mu N_c \qquad \rightarrow \qquad F = -\mu N_c \tag{25.10}$$

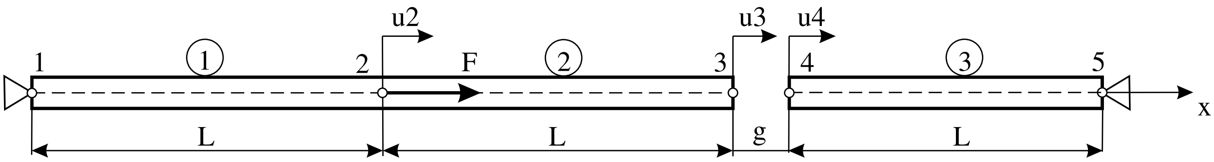
Pri statickom trení nedôjde k tangenciálnemu posunu hmotnosti po podložke (*stick state*), pri dynamickom sa hmotný bod posunie v tangenciálnom smere (*slip state*).

25.3 Metódy riešenia

Princíp a fyzikálny základ metód využívaných v MKP na riešenie kontaktných úloh možno vysvetliť na jednoduchom príklade bodového kontaktu. Príklad vyriešime pomocou najčastejšie využívaných metód:

- metóda Lagrangeových multiplikátorov (*Lagrange multiplier method*)
- pokutová metóda (*penalty method*)
- rozšírená Lagrangeova metóda (*augmented Lagrange method*)

Uvažujme výpočtový model MKP jednorozmernej prútovej úlohy s tromi prvkami a piatimi uzlovými bodmi vyznačený na obr. 25.3. Sila F zaťažuje prút z lineárneho elastického materiálu s prierezom S a modulom pružnosti E smerom k ďalšiemu nezaťaženému prútu tých istých vlastností. Medzi koncovými bodmi prútov je medzera g. Zadané sú tieto hodnoty: F = 1500 N, ES = 10000 N, L = 400 mm, g = 30 mm. Pomocou MKP treba určiť kontaktnú silu N_c a posunutia voľných uzlov



Obr. 25.3

Celková potenciálna energia výpočtového modelu je [1]

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{f} \tag{25.11}$$

kde $\mathbf{u}$ je vektor posunutí uzlových bodov modelu, $\mathbf{K}$ je globálna matica tuhosti a $\mathbf{f}$ je globálny vektor vonkajších uzlových síl. Aplikáciou princípu minima potenciálnej energie $\partial\Pi / \partial\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na (25.11) dostaneme výslednú sústavu rovníc

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{25.12}$$

Pretože posunutia uzlov 1 a 5 sú nulové, výsledná sústava rovníc po usporiadanom sčítaní rozšírených matíc tuhosti prvkov [1] má tvar

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2ES/L & -ES/L & 0 \\ -ES/L & ES/L & 0 \\ 0 & 0 & ES/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25.13}$$

Riešenie rovníc dáva: $u_4 = 0$, $u_2 = u_3 = FL/(ES) = 1500 \cdot 400/10000 = 60$ mm. Podľa týchto výsledkov výpočtový model z hľadiska kontaktnej terminológie vykazuje totálnu penetráciu uzla 3 do elementu č. 3 bez prenosu kontaktnej sily. Pretože posunutie u_3 je väčšie ako g, v skutočnosti ale dôjde ku kontaktu oboch telies, ktorý treba zohľadniť pomocou vhodnej metódy.

25.3.1 Metóda Lagrangeových multiplikátorov

V klasickej podobe sa táto metóda využíva na hľadanie minima funkcie viacerých premenných, pri súčasnom splnení určitých obmedzení. Pri kontaktných úlohách v MKP sa využíva na hľadanie extrémov funkcionálov pri zohľadnení obmedzení (väzieb) vyvolaných vzájomným kontaktom telies. Využijeme ju teraz pri riešení uvedeného príkladu.

Posunutia uzlov 3 a 4 pri kontakte obmezuje deformačná podmienka (pozri obr. 25.3)

$$u3 - u4 = g \tag{25.14}$$

Z tejto podmienky dostaneme medzerovú funkciu, ktorá sa pri kontakte a fyzikálne správnych hodnotách u_3 a u_4 rovná nule (25.4)

$$g_n = g - u_3 + u_4 = 0 \tag{25.15}$$

Splnenie (vynútenie) tejto podmienky (väzby) možno dosiahnuť tak, že ju vynásobíme Lagrangeovým multiplikátorom

$$\lambda g_n = \lambda\left(g - u_3 + u_4\right) \tag{25.16}$$

a tento súčin pridáme do potenciálnej energie (25.11)

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{f} + \lambda\left(g - u_3 + u_4\right) \tag{25.17}$$

Z tohto postupu vyplýva, že v rovniciach MKP sa nám okrem neznámych $\mathbf{u}$ objaví aj nová neznáma λ s rozmerom sily; je to kontaktná sila N_c v stýkajúcich sa uzloch 3 a 4.

Aplikáciou variačného postupu z podmienky $\delta\Pi^* = 0$, dostávame

$$\delta\mathbf{u}\mathbf{K}\mathbf{u} - \delta\mathbf{u}\mathbf{f} + \delta\lambda\left(g - u_3 + u_4\right) + \lambda\left(-\delta u_3 + \delta u_4\right) = 0 \tag{25.18}$$

a z toho sústavu rovníc zapísanú v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} 2ES/L & -ES/L & 0 & 0 \\ -ES/L & ES/L & 0 & -1 \\ 0 & 0 & ES/L & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \tag{25.19}$$

Po dosadení číselnych hodnôt a využití programu *Mathematica 5* dostávame

```
A={{50,-25,0,0},
   {-25,25,0,-1},
   {0,0,25,1},
   {0,-1,1,0}};
b={1500,0,0,-30};
particular=LinearSolve[A,b]
{50,40,10,-250}
```

s výsledkom

$u_2 =$ 50 mm
$u_3 =$ 40 mm
$u_4 =$ 10 mm
$\lambda = N_c$ = -250 N

Pravda, vo všeobecnosti možno na výpočtový model telesa s n stupňami voľnosti predpísať m lineárne nezávislých diskrétnych deformačných obmedzení (väzieb) pre $\mathbf{u}$ v tvare

$$\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{25.20}$$

kde $\mathbf{B}$ je matica typu $m \times n$ a $\mathbf{v}$ je zadaný vektor. Potom splnenie deformačných obmedzení môžeme dosiahnuť tak, že rovnicu (25.20) skalárne vynásobíme vektorom $\boldsymbol{\lambda}$, ktorý obsahuje m konštant (Lagrangeových multiplikátorov), a tento súčin pripočítame k funkcionálu (25.11)

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{f} + \boldsymbol{\lambda}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{v}\right) \tag{25.21}$$

Minimalizácie Π^* podľa $\mathbf{u}$ dáva

$$\mathbf{Ku} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f} \tag{25.22}$$

a pretože musia platiť aj podmienky (25.20), dostávame sústavu rovníc v blokovom maticovom zápise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \tag{25.23}$$

kde vektor $\mathbf{u}$ udáva posunutia uzlových bodov so zohľadnenými obmedzeniami a vektor $\boldsymbol{\lambda}$ obsahuje Lagrangove multiplikátory. Tie v prípade pevnostnej úlohy predstavujú (uzlové) sily, vyvolané zadanými deformačnými (kontaktnými) obmedzeniami alebo inak povedané, sú to sily, ktoré zabezpečujú, aby boli dodržané predpísané väzby (25.20).

Rovnice príkladu (25.19) sú špeciálnym (jednoduchým) prípadom rovníc (25.23). Pretože máme len jednu obmedzujúcu rovnicu (jednu deformačnú podmienku), vektory $\boldsymbol{\lambda}$, a $\mathbf{v}$ i matica $\mathbf{0}$ sú jednočlenné a matica $\mathbf{B}$ je riadková.

25.3.2 Pokutová metóda

Skôr ako ukážeme základné vzťahy využívané pri pokutovej metóde, je užitočný vytvoriť si predstavu o fyzikálnom princípe tejto metódy. Môže na to poslúžiť príklad 25.1 z predchádzajúcej časti, pre ktorý nech platia rovnice bez kontaktu (25.13). Pri týchto rovniciach, ako sme už uviedli, dochádza k totálnej penetrácii uzla 3 do prvku 3. Uvažujme teraz, že sme medzi uzly 3 a 4 vložili fiktívnu lineárnu “pružinou” s tuhosťou α (medzerový konečný prvok s normálovou tuhosťou α), ktorá zabraňuje tejto penetrácii tým viac, čím je jej tuhosť väčšia.

Uvedený dôsledok sa pri riešení uvedeného príkladu dosiahne tak, že k energetickému potenciálu (25.11) sa pripojí energia, ktorú takáto pružina vykazuje na penetračnom posunutí (na nesplnení podmienky $g_N = g - u_3 + u_4 = 0$), kde tuhosť α vystupuje ako pokutový parameter

$$\Pi^{**} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{Ku} - \mathbf{u}^T\mathbf{f} + \frac{1}{2}\alpha\left(g - u_3 + u_4\right)^2 \tag{25.24}$$

Aplikáciou variačného postupu na minimalizáciu (25.24), t.j. z podmienky $\delta\Pi^{**} = 0$, dostávame

$$\mathbf{Ku} - \mathbf{f} + \alpha\left(g - u_3 + u_4\right)\left(-\delta u_3 + \delta u_4\right) = 0 \tag{25.25}$$

Posledný člen v (25.25) posunutí dodá do sústavy rovníc bez kontaktu (25.13) dve ďalšie rovnice (vystriedaním jenotkových a nulových hodnôt variácií u_3 a u_4)

$$\begin{aligned} \alpha u_3 - \alpha u_4 &= \alpha g \\ -\alpha u_3 + \alpha u_4 &= -\alpha g \end{aligned}$$

takže výsledná sústava rovníc príkladu v maticovom tvare podľa pokutovej metódy je

$$\begin{bmatrix} 2ES/L & -ES/L & 0 \\ -ES/L & ES/L + \alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & ES/L + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \alpha g \\ -\alpha g \end{bmatrix} \tag{25.26}$$

Ako vidieť, pri tejto metóde do sústavy rovníc pre určenie uzlových posunutí nepribudla žiadna nová neznáma, čo je základná výhoda oproti metóde Lagrangeových multiplikátorov. Určitá výhoda je aj to, že sa pri nej nezväčšuje šírka nenulového pásu globálnej matice tuhosti $\mathbf{K}$.

Zvoľme tuhosť pružiny (mala by byť výrazne väčšia ako tuhosť prútov), $\alpha = 100000$ N/mm a keď použijeme údaje o príklade a dosadíme čísla do (25.26) dostávame rovnice

$$\begin{bmatrix} 50 & -25 & 0 \\ -25 & 25+10^5 & -10^5 \\ 0 & -10^5 & 25+10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 10^5 \cdot 30 \\ -10^5 \cdot 30 \end{bmatrix}$$

Výpočet posunutí uzlových bodov z týchto rovníc (pomocou programu *Mathematica 5*) dáva dostatočne presné výsledky pri porovnaní s horeuvedenými exaktnými výsledkami dosiahnutými pomocou metódy Lagrangeových multiplikátorov:

```
A={{50,-25,0},
   {-25,100025,-100000},
   {0,-100000,100025}};
b={1500,100000*30,-100000*30};
particular=LinearSolve[A,b]//N
{50.0008,     40.0017,     9.9991}
```

Vypočítané posunutia už zodpovedajú kontaktu oboch telies (penetrácia sa znížila na prijateľnú hodnotu 0,0026 mm a absolútnu hodnotu kontaktnej sily možno vypočítať napr. z posunutia u_4 pravej časti

$$|N_c| = \frac{ES}{L} u_4 = \frac{10000}{400} 9{,}9991 = 249{,}98 \text{ N}$$

Presnosť výsledkov závisí od veľkosti pokutového parametra α, pri väčších hodnotách je vyššia a naopak. Pravda, pri jeho extrémnom zvýšení hrozí nestabilita numerickej výpočtovej procedúry.

25.3.3 Rozšírená Lagrangeova metóda

Metóda v podstate predstavuje iteračnú kombináciu oboch predchádzajúcich metód. Energia pokutového člena v potenciáli sa doplňuje energiou Lagrangeovho multiplikátora $\bar{\lambda}$, kde pruh znamená, že sa pri minimalizácii potenciálu chová ako konštanta (mení sa len v iteračnej procedúre), takže rovnica (25.25) teraz je

$$\mathbf{Ku} - \mathbf{f} + \left[\bar{\lambda} + \alpha\left(g - u_3 + u_4\right)\right]\left(-\delta u_3 + \delta u_4\right) = 0 \qquad (25.27)$$

a výsledná sústava rovníc pre riešenie analyzovanej úlohy rozšírenou Lagrangeovou metódou je

$$\begin{bmatrix} 2ES/L & -ES/L & 0 \\ -ES/L & ES/L+\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & ES/L+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \bar{\lambda} + \alpha g \\ -\bar{\lambda} - \alpha g \end{bmatrix} \qquad (25.28)$$

Ak v prvom iteračnom kroku zvolíme $\bar{\lambda}_1 = 0$, dostaneme, ako vidieť, rovnice pokutovej metódy (25.26). V ďalších iteračných krokoch sa potom príslušné členy na pravej strane rovníc modifikujú Lagrangeovým multiplikátorom, ktorý sa v iteračnej procedúre mení podľa vzťahu

$$\bar{\lambda}_{i+1} = \bar{\lambda}_i + \alpha(g_n)_{i+1} = \bar{\lambda}_i + \alpha(-u_3 + u_4 + g)_{i+1} \tag{25.29}$$

Riešenie rovníc (25.28), s meniacou sa hodnotou $\bar{\lambda}$, sa opakuje až po splnenie požadovaných konvergenčných kritérií. Na ich riešenie so zvolenou hodnotou $\alpha = 1000$ N/m (relatívne malou oproti pokutovej metóde) sme využili program *Mathematica 5*

```
i=1;lambda=0;g=30;alfa=1000;
While[i<5,
A={{50,-25,0},
      {-25,25+alfa,-alfa},
      {0,-alfa,25+alfa}};
b={1500,lambda+alfa*g,-lambda-alfa*g};
c=particular=LinearSolve[A,b];
Print["i = ", i]Print["lambda = Nc =
",lambda//N];
Print["u2 = ",c[[1]]//N," u3 = ",
           c[[2]]//N," u4 =
",c[[3]]//N];
lambda=lambda+alfa*(g-c[[2]]+c[[3]]);
i++]
```

s výsledkami

```
i = 1
lambda = Nc = 0.
u2 = 50.0826 u3 = 40.1653 u4 = 9.91736
i = 2
lambda = Nc = -247.934
u2 = 50.0007 u3 = 40.0014 u4 = 9.99932
i = 3
lambda = Nc = -249.983
u2 = 50. u3 = 40. u4 = 9.99999
i = 4
lambda = Nc = -250.
u2 = 50. u3 = 40. u4 = 10.
```

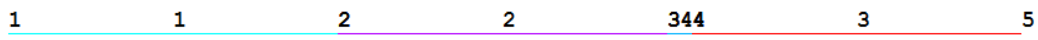
ktoré v poslednom iteračnom kroku už zodpovedajú exaktným hodnotám.

Príklad 25.1

Riešte uvedený inštruktážny príklad (obr. 25.3) pomocou programu Ansys 12.1. V programe Ansys je implicitne nastavené riešenie rozšírenou Lagrangeovou metódou. Vo voľbách (Element type options) pre kontaktný prvok možno zvoliť aj iné, horeopísané metódy.
Príklad sme riešili pomocou týchto príkazov v interaktívnom móde programu:

1. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Link, 2D spar 1, OK, Close;
2. Real Constants, Add/Edit/Delete, Add, OK, AREA=10, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX=1000, PRXY=0.3, OK, Material, Exit;
4. Modeling, Create, Nodes, In Active CS, X=0, Y=0, Apply, X=400, Y=0, Apply, X=800, Y=0, Apply, X=830, Y=0, Apply, X=1230, Y=0, OK;

5. Modeling, Create, Elements, Auto Numbered, Thru Nodes, Kliknite uzly 1 a 2, Apply, 2 a 3, Apply, 4 a 5, OK;
6. Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Contact, 2D pt-to-pt 178, OK, Close;
7. Real Constants, Add/Edit/Delete, Add, Type2 CONTACT178, OK, FKN=1, OK, Close;
8. Modeling, Create, Elements, Element Attributes, Type=2 CONTACT178, REAL=2, OK, Auto Numbered, Thru Nodes, Kliknite uzly 3 a 4, OK;



9. Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Nodes, Kliknite uzol 1 a 5, OK, All DOF, Vyznačte UX a UY, OK;
10. Solution, Define Loads, Apply, Structural, Force/Moment, On Nodes, Kliknite uzol 2, OK, Value=1500, OK;
11. Analysis Type, Sol'n Controls, Time=1, Number of substeps=1, Max. no. of substeps=2, Min. no. of substeps=1, OK;
12. Solution, Curent LS, OK;
13. Výpis posunutí uzlových bodov
General Postproc, List Results, Nodal Solution, X-Component of displacement, OK;

```
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

  NODE       UX
     1    0.0000
     2    50.000
     3    40.000
     4    10.000
     5    0.0000
```

14. Výpis síl v prvkoch
Element Table, Define Table, Add, Lab=Sily, By sequence num, SMISC,1, OK, Close, List Elem Table, Sily, OK;

```
 ***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****

   STAT     CURRENT
   ELEM     SILY
      1    1250.0
      2   -250.00
      3   -250.00
      4   -250.00
```

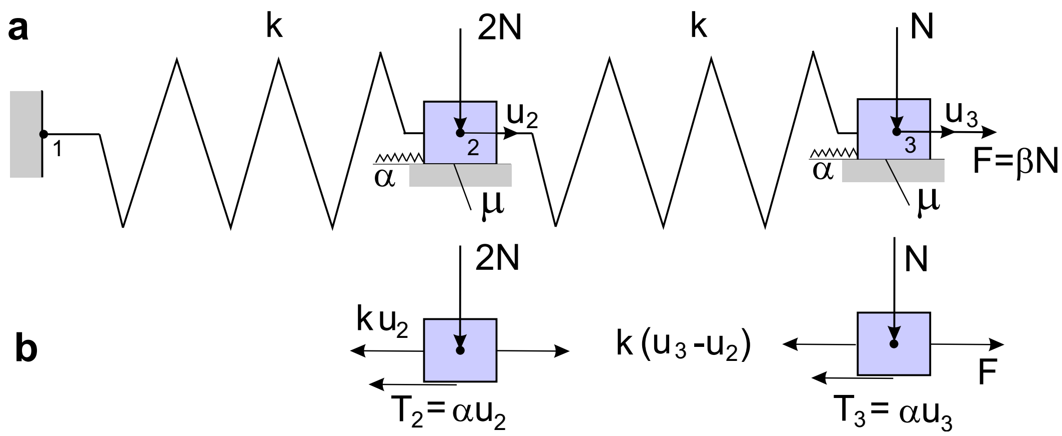
15. File, Exit, OK;

Výsledky súhlasia s horeuvedenými riešeniami.

25.3.4 Kontakt s trením

Základné pojmy súvisiace s trením pri kontakte možno opäť vysvetliť na jednoduchom príklade uzlového kontaktu. Uvažujme sústavu, ktorá sa skladá z troch uzlov a dvoch pružinových prvkov s rovnakou tuhosťou k (obr. 25.4a). Uzol 1 je tuho upevnený a v uzle č. 3 pôsobí ťahová sila F, ktorá je β-násobkom sily N. Uzly 2 a 3 sú v kontakte s tuhým telesom a sú zaťažené normálovými kontaktými silami $2N$ a N, ktoré kvôli jednoduchosti rovnovážnych rovníc nech sú konštantné. Medzi uzlami a telesom uvažujeme Coulombovo trenie s koeficientom statického šmykového trenia μ.

Pri manipulácii s veľkosťou vonkajšej zaťažujúcej sily $F = \beta N$ pomocou násobku β možno hovoriť o troch fázach reakcie tohto systému na zaťaženie:



Obr. 25.4

1. Úplný priľnutý (*sticking*) kontakt. To znamená, že trenie zabraňuje pohybu oboch uzlov. V tomto prípade tangenciálne sily medzi uzlami a telesom sú reakcie v "upevnenom" uzle.
2. Čiastočne priľnutý a čiastočne klzný (*sliding*) kontakt. V časti uzlov (v tomto príklade v jednom) dôjde k prekĺznutiu, pričom reakčnú silu pri známom koeficiente trenia predstavuje kontaktná trecia sila *T*, ktorej veľkosť určuje Coulombov trecí zákon a ostatné (v tomto príklade jeden) zostanú v stave priľnutia.
3. Úplný klzný kontakt, kedy vo všetkých uzloch dochádza k prekĺznutiu a proti pohybu uzlov pôsobia tangenciálne kontaktné trecie sily (obr. 25.4b).

Pri numerickej analýze kontaktných úloh s trením sa využívajú tie isté metódy ako pri úlohách bez trenia, pravda, trenie do výpočtu vnáša komplikáciu v podobe nespojitosti posunutí uzlových bodov. Ukážeme si to na analýze uvedeného príkladu. Na rozlíšenie medzi priľnutím a prekĺznutím uzla využijeme trecí zákon vo forme nerovnosti

$$T \leq \mu N \tag{25.30}$$

a využijeme pokutovú metódu. Pri tejto metóde pokutový parameter α predstavuje tuhosť pružín, ktoré imitujú trecí silový odpor, vzniknutý v mieste styku uzlov s telesom pri zaťažení systému silou *F*.

Rovnice rovnováhy uzlov podľa obr. 25.4b sú

$$-ku_2 + k\left(u_3 - u_2\right) - \alpha u_2 = 0 \tag{25.31}$$

$$-k\left(u_3 - u_2\right) + F - \alpha u_3 = 0 \tag{25.32}$$

a v maticovom zápise s $F = \beta N$

$$\begin{bmatrix} 2k+\alpha & -k \\ -k & k+\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta N \end{bmatrix} \tag{25.33}$$

S pokutovým parametrom $\alpha = 10k$ dostaneme

1. *Úplný priľnutý kontakt.* Pokutová metóda túto situáciu ($u_2 = u_3 = 0$) vystihuje len približne; posunutia priľnutých uzlov sú malé, ale nie nulové. A ako už vieme, presnosť sa zvyšuje so zväčšovaním hodnoty pokutového parametra α . Z (25.33) máme

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{\beta N}{131k}\begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{25.34}$$

2. *Preklznutie uzla č.3*. Teraz tangenciálnu silu v tomto mieste udáva trecí zákon a pretože $u_2 = 0$, možno určiť násobok sily β, pri ktorom dôjde k tejto situácii

$$T_3 = \mu N = \alpha u_3 = \alpha \frac{12F}{131k} = \frac{120}{131}\beta N \qquad \rightarrow \qquad \beta > \frac{131}{120}\mu \tag{25.35}$$

Vzhľadom na preklznutie uzla č.3 sa rovnice (25.33) zmenia na

$$\begin{bmatrix} 2k+\alpha & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\beta-\mu)N \end{bmatrix} \tag{25.36}$$

a pre posunutia uzlov platí

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{N}{11k} \begin{bmatrix} \beta-\mu \\ 12(\beta-\mu) \end{bmatrix} \tag{25.37}$$

3. *Úplný klzný kontakt.* Druhý uzol sa dostane do sklzu, keď bude platiť

$$T_2 = \alpha u_2 = \alpha \frac{N}{11k}(\beta-\mu) = \frac{10N}{11}(\beta-\mu) > \mu 2N \tag{25.38}$$

takže pri $\beta > \frac{32}{10}\mu$ v oboch uzloch pôsobia známe tangenciálne trecie sily a posunutia podľa nového systému rovníc sú

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{N}{1k} \begin{bmatrix} \beta-3\mu \\ 2\beta-4\mu \end{bmatrix} \tag{25.39}$$

25.4 Problematika formulácie a riešenia všeobecnej kontaktnej úlohy pomocou MKP

Formulácia všeobecnej kontaktnej úlohy predpokladá vzájomný kontakt viacerých telies. Pri konkrétnom numerickom riešení sa telesá postupne spárujú, a preto možno vždy úlohu zredukovať na kontakt dvoch všeobecných priestorových telies. Základné kroky numerickej analýzy takejto úlohy sú

1. Formulácia kinematiky pohybu telies
2. Definovanie konštitutívnych (materiálových) rovníc pre oblasť styku telies, minimalizácia penetrácie, výpočet kontaktných síl.
3. Vytvorenie variačných rovníc úlohy a ich diskretizáciu s využitím špeciálnych kontaktných konečných prvkov na rozhraní styku telies
4. Vzhľadom na nespojitosti vyplývajúce z variačných nerovností vytvorenie špeciálnych algoritmov pre numerický výpočet úlohy

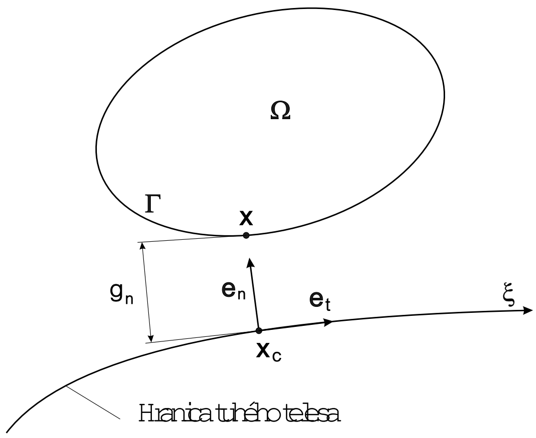
Všeobecná formulácia predpokladá geometrické a fyzikálne nelinearity kontaktujúcich telies, treba ale zdôrazniť, že aj pri ich absencii je úloha nelineárna, pretože kontaktný tlak v mieste styku telies sa pri lineárnom náraste zaťaženia mení nelineárne vzhľadom na zmenu veľkosti plochy kontaktu.

Pre potrebu matematickej formulácie vzdialenosti entít telies a medzerovej funkcie sa obyčajne zavádza rozlíšenie dvojice kontaktujúcich telies, ich styčných plôch a prvkov a tieto pojmy sa potom objavujú aj v manuáloch programov. Rozlišuje sa napr. hlavná (*master*, *target*) plocha a podriadená (*slave*, *contact*) plocha. V algoritmoch kinematických vzťahov sa potom pre každý bod podriadenej plochy určuje (v programe počíta) normálová vzdialenosť po hlavnú plochu.

25.4.1 Podmienky kontaktu

Podmienkami kontaktu sa nazývajú vzťahy, ktoré slúžia na kontrolu, či došlo ku kontaktu bodov hlavnej a podriadenej plochy a charakterizujú prípadný vzniknutý kontakt spárovaných bodov oboch plôch v normálovom i tangenciálnom smere. Pre normálový smer je to podmienka nulovej penetrácie a v tangenciálnom smere podmienka pre prekĺznutie bodov v kontakte.

Obrázok 25.5 udáva veličiny a parametre pomocou ktorých možno vyjadriť tieto podmienky pre *dvojrozmerné* podriadené teleso v kontakte s *dokonale tuhým* hlavným telesom.



Obr. 25.5 *Parametre podmienky bodového kontaktu*

Predpokladajme, že ak dôjde ku kontaktu, tak bod $\mathbf{x}(x,y)$ kontaktnej hranice Γ_c bude v kontakte s bodom

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_c(\xi_c) \tag{25.40}$$

kde ξ_c je prirodzená súradnica udávajúca polohu tohto (zatiaľ neznámeho) partnera bodu $\mathbf{x}$ na hranici tuhého telesa. Jeho nájdenie je prvý krok v iteračnej kontaktnej analýze, pretože treba zistiť, či oba body už sú v kontakte alebo nie. V matematike sa táto operácia nazýva ortogonálna projekcia alebo nájdenie najbližšieho bodu k bodu $\mathbf{x}$. Pokiaľ by bola hranica hlavného telesa rovná čiara, možno tento bod určiť explicitne, v prípade všeobecnej nelineárnej krivky sa musí určovať z nelineárnej rovnice

$$\varphi(\xi_c) = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c)\right)^T \mathbf{e}_t(\xi_c) = 0 \tag{25.41}$$

kde $\mathbf{e}_t = \mathbf{t}/\|\mathbf{t}\|$ je je jednotkový tangenciálny vektor a $\mathbf{t} = \mathbf{x}_{c,\xi} = \partial \mathbf{x}_c / \partial \xi$ je tangenciálny vektor v bode $\mathbf{x}_c$. Rovnica (25.41) sa nazýva podmienka kontaktnej konzistencie a umožňuje určiť bod $\mathbf{x}_c$.

Len čo je bod kontaktu známy, možno už zistiť, či došlo ku kontaktu, a to určením vzdialenosti oboch bodov. Súčasne možno využitím vzdialenosti $\mathbf{x} - \mathbf{x}_c$ predpísať podmienku nepreniknuteľnosti vo forme normálovej medzerovej funkcie

$$g_n = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c)\right)^T \mathbf{e}_n(\xi_c) \geq 0, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_c \tag{25.42}$$

kde $\mathbf{e}_n(\xi_c)$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k hlavnej ploche v bode kontaktu (obr. 25.5).

Pohyb bodu pozdĺž hranice tuhého telesa ovplyvňuje trecia sila závislá od použitého trecieho zákona. V tomto smere ako miera relatívneho pohybu kontaktného bodu pozdĺž hranice tuhého telesa slúži tangenciálna *slip* funkcia

$$g_t = \left\| \mathbf{t}^{n-1} \right\| \left(\xi_c - \xi_c^{n-1} \right) \tag{25.43}$$

kde horný index *n-1* označuje označuje pre tangenciálny vektor $\mathbf{t}$ i premennú ξ_c hodnoty z predchádzajúceho konvergujúceho prírastkového kroku času alebo zaťaženia.

Kontaktná sila vzájomného pôsobenia telies na hranici kontaktu sa rozkladá na normálovú a tangenciálnu zložku

$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{e}_n + t\mathbf{e}_t \tag{25.44}$$

kde λ a t sú hodnoty týchto zložiek. Potom podmienky pre normálový kontakt sú

$$g_n \geq 0; \quad \lambda \geq 0; \quad g_n \lambda = 0 \tag{25.45}$$

kde posledná podmienka vyjadruje fakt, že ak je $g_n > 0$, potom musí byť $\lambda = 0$ a naopak.

Pri určení podmienky pre tangenciálny kontakt predpokladáme, že pre body na kontaktnej hranici platí Coulombov trecí zákon a μ je trecí koeficient. Ďalej zaveďme bezrozmernú premennú

$$\tau = \frac{t}{\mu \lambda}; \quad \lambda > 0 \tag{25.46}$$

kde súčin $\mu\lambda$ vyjadruje veľkosť trecieho odporu v príslušnom stykovom bode telies. Pri stave tangenciálneho pošmyknutia stýkajúcich sa bodov možno ich relatívnu tangenciálnu rýchlosť vyjadriť z ich rýchlostných vektorov

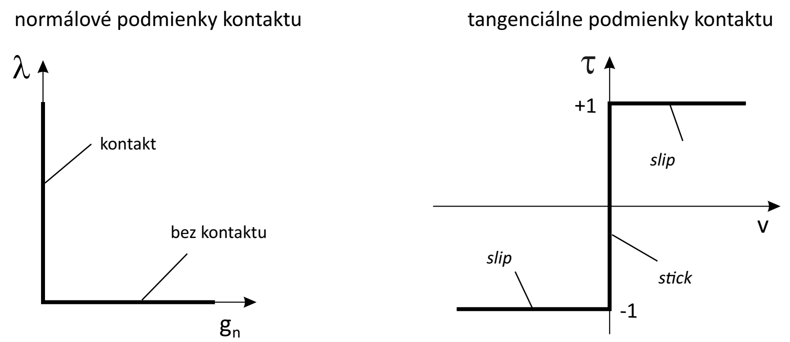
$$v = [\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2] \cdot \mathbf{e}_t \tag{25.47}$$

a pre *stick-slip* podmienky platí

$$\tau \leq 1; \quad \tau < 0 \rightarrow v = 0; \quad \tau = 1 \rightarrow v \neq 0 \tag{25.48}$$

Rýchlosť prekĺznutia sa počíta ako podiel prírastkového preklzovacieho posunutia a časového prírastku. V takejto formulácii potom aj pri statickej analýze s trením čas nie je len formálnym parametrom ako pri klasickej nelineárnej statickej úlohe.

Podmienky kontaktu na stykovej hranici telies (25.45) a (25.48) možno jednoducho graficky zobraziť (obr. 25.6).



Obr. 25.6 Grafické zobrazenie podmienok kontaktu

Príklad 25.1

Hranica 2D tuhého telesa má tvar paraboly s funkciou $y = x^2$, $x > 0$. Určte projekčný bod z polohy $\mathbf{x} = [3,1]^T$ z rovnice (25.41) a vzdialenosť bodov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_c$ z rovnice (25.42).

Vektorová funkcia zadanej paraboly v parametrickom tvare je

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix} \tag{25.49}$$

takže pre jednotkový tangenciálny vektor dostávame

$$\mathbf{e}_t = \frac{\partial x_c / \partial \xi}{\left\| \partial x_c / \partial \xi \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4\xi^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\xi \end{bmatrix} \tag{25.50}$$

a jednotkový normálový vektor je

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_t \times = \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{1+4\xi^2}} \begin{bmatrix} 2\xi \\ -1 \end{bmatrix} \tag{25.51}$$

kde $\mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu, v ktorej leží parabola.

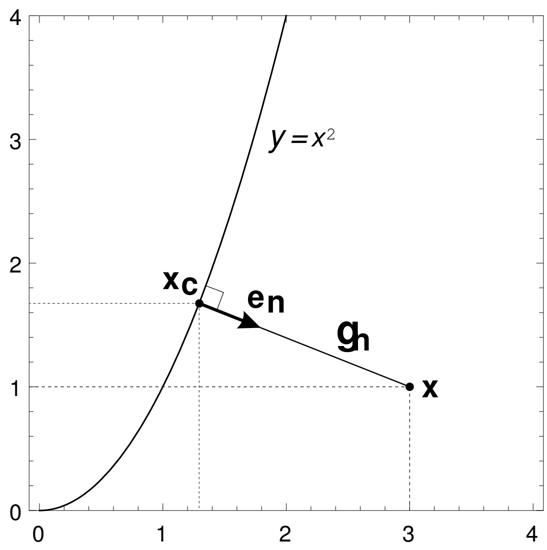
Z rovnice (25.41) možno už určiť súradnice normálovej projekcie bodu $\mathbf{x}$ na parabolu (t.j. partnerský kontaktný bod), pretože ak má pre $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ platiť

$$\varphi(\xi_c) = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi)\right)^T \mathbf{e}_t(\xi_c) = \frac{3+\xi-2\xi^3}{\sqrt{1+4\xi^2}} = 0 \tag{25.52}$$

potom z nulovej hodnoty čitateľa v tomto vzťahu dostaneme $\xi_c = 1{,}29$ a môžme skompletovať (25.49) na

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} 1{,}29 \\ 1{,}66 \end{bmatrix} \tag{25.53}$$

Túto polohu bodu $\mathbf{x}_c$ potvrdzuje aj grafická kontrola v merítku na obr. 25.7



Obr. 25.7

Vzdialenosť oboch bodov sa určí z medzerovej funkcie (25.42)

$$g_n = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c)\right)^T \mathbf{e}_n(\xi_c) = \frac{-\xi_c^2 + 6\xi_c - 1}{\sqrt{1+4\xi_c^2}} = 1{,}83 \tag{25.54}$$

25.4.2 Formulácia kontaktnej úlohy

Existuje viacero formulácií kontaktnej úlohy deformateľných telies i návrhov spôsobu jej (numerického) riešenia (napr. [16], [23]). V tomto odstavci kvôli názornosti a jednoduchosti uvedieme formuláciu navrhnutú v [16], ktorá využíva špeciálnu väzbovú funkciu (*constraint function)* pri riešení silovej a deformačnej situácie na hranici vzájomného kontaktu uvažovaných telies.

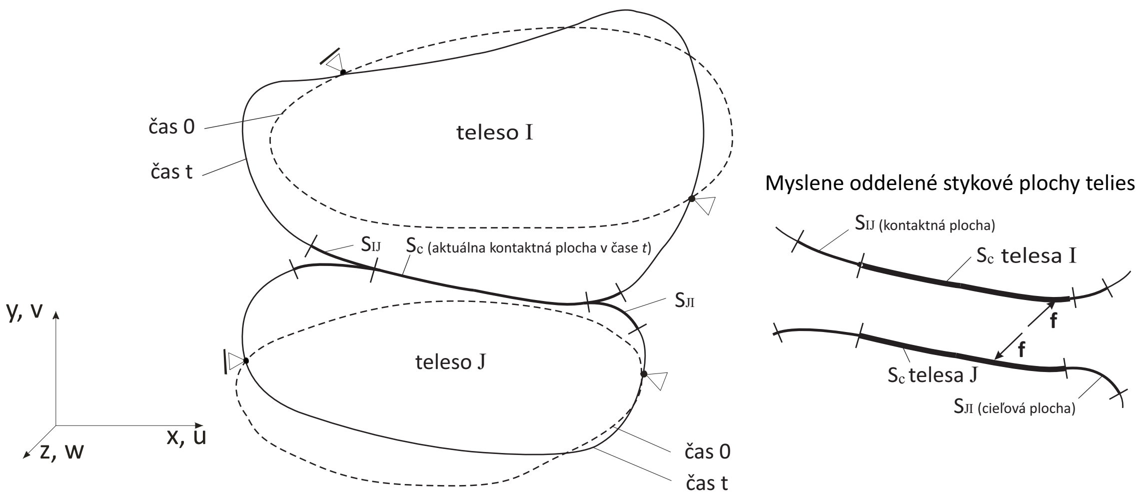
Pre dve telesá, ktoré sú v kontakte v čase *t* (obr. 25.7) podľa princípu rovnosti virtuálnej práce vnútorných a vonkajších síl a (25.44) platí

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV^k = \sum_{k=1}^{2}\left(\int_{V_0} \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u} dV^k + \int_{S_0^k} \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u} dS^k\right) + \sum_{k=1}^{2}\int_{S_c} (\lambda\mathbf{n} + t\mathbf{s})\cdot\Delta\delta\mathbf{u}^{IJ} dS_c \tag{25.55}$$

kde

$$\delta\mathbf{u}_{IJ} = \delta\mathbf{u}_I - \delta\mathbf{u}_J \tag{25.56}$$

Logika tohto vzťahu je jasná: Jeho ľavá strana a prvý člen na pravej strane predstavujú členy známe z príslušnej zvolenej formulácie úlohy (v tomto prípade totálnej Lagrangeovskej formulácie – pozri 6. kapitolu), kým posledný člen predstavuje príspevok kontaktných síl na neznámej spoločnej hranici S_c telies. Na tejto hranici musia byť splnené kontaktné podmieky (25.45) a (25.48).



Obr. 25.7

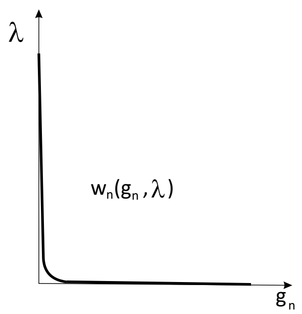
Metóda väzbovej funkcie situáciu na hranici kontaktu rieši tak, že pre podmienky kontaktu v normálovom smere sa zvolí spojitá funkcia $w(g_n,\lambda)$ tak, že ak $w(g_n,\lambda) = 0$, potom sú podmienky (25.45) splnené. Jednou z možností je aproximácia podmienok hyperbolickým vzťahom

$$\lambda g_n = \varepsilon_n \tag{25.57}$$

kde $\varepsilon_n \ll 1$ (napr. $\varepsilon_n = 10^{-12}$). Funkcia sa upravuje do tvaru

$$w_n(\overline{g}_n, \overline{\lambda}) = \frac{\overline{g}_n + \overline{\lambda}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\overline{g}_n - \overline{\lambda}}{2}\right)^2 + \varepsilon_n} \tag{25.58}$$

s bezrozmernými hodnotami $\overline{g}_n$ a $\overline{\lambda}$. Dostaneme tak spojitú a diferencovateľnú náhradu normálových podmienok kontaktu pre všetky hodnoty g_n a λ (obr. 25.8).

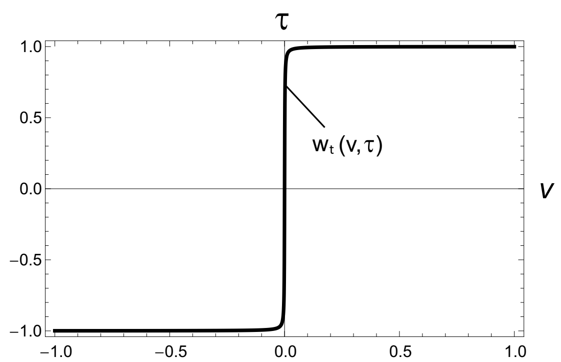


Obr. 25.8

Rovnaký postup sa využíva aj pri zohľadnení tangenciálnych (trecích) podmienok kontaktu. Volí sa taká spojitá a diferencovateľná fukcia $w_t(v,\tau)$, že keď $w_t(v,\tau) = 0$, tak sú splnené podmienky (25.48). Na jej tvorbu je vhodná funkcia

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{v}{\varepsilon_t} \tag{25.59}$$

kde $\varepsilon_t \ll 1$. Pomocou veľkosti tohto parametra možno do určitej miery aj charakterizovať vlastnosti trecieho zákona. Na obr. je znázornená funkcia (25.59) s hodnotou $\varepsilon_t = 10^{-3}$.



Obr. 25.9

Nespojité podmienky kontaktu sa uvedeným postupom aproximovali rovnicami

$$w_n(g_n, \lambda) = 0 \tag{25.60}$$

$$w_t(v,\tau) = 0 \tag{25.61}$$

tieto rovnice možno teraz zaviesť do princípu virtuálnej práce využitím napr. metódy Lagrangeových multiplikátorov, ktoré budú predstavovať premenné λ a τ. V takom prípade možno dostať rovnicu riadiacu kontakt na hranici telies tak, že vynásobíme (25.60) variáciou $\delta\lambda$ a (25.61) variáciou $\delta\tau$ a po sčítaní a integrovaní platí

$$\int_{S_{IJ}} [\delta\lambda w_n(g_n,\lambda) + \delta\tau w_t(v,\tau)] dS_{IJ} = 0 \tag{25.62}$$

Geometrická a časová diskretizácia rovníc (25.55) a (25.62) poskytne klasickým postupom MKP (podrobnejšie pozri [2]) linearizovanú prírastkovú sústavu rovníc pre numerické riešenie úlohy

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \mathbf{f}_c, \qquad \mathbf{q}_c = 0 \tag{25.63}$$

kde $\mathbf{q}$ je vektor vnútorných uzlových síl, $\mathbf{f}$ vektor vonkajších uzlových síl, $\mathbf{f}_c$ vektor kontaktných síl, $\mathbf{q}_c$ vektor kontaktných väzieb vyplývajúci z (25.62) a $\mathbf{u}$ globálny vektor zovšeobecnených uzlových posunutí. Tento systém nelineárnych rovníc sa prírastkovo rieši pomocou Newton-Raphsonovej metódy a rovnice pre iteračný krok sú

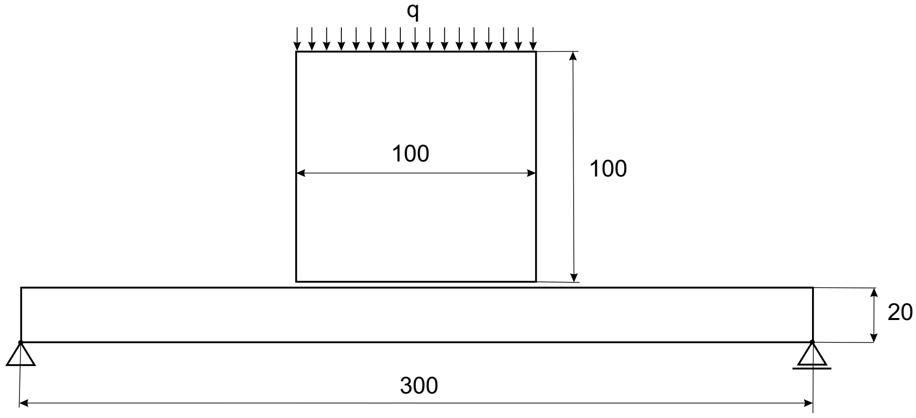
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}} + \dfrac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial \boldsymbol{\phi}_c} \\ \dfrac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{u}} & \dfrac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \boldsymbol{\phi}_c} \end{bmatrix}^{(i-1)} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\boldsymbol{\phi}_c \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(i)} - \mathbf{q}^{(i-1)} - \mathbf{f}_c^{(i-1)} \\ \mathbf{q}_c^{(i-1)} \end{bmatrix} \tag{25.64}$$

kde vektor $\boldsymbol{\phi}_c$ obsahuje kontaktné premenné λ a τ pre každý uzol, ktorý je v kontakte (t.j. pre ktorý sú splnené podmienky kontaktu).

Na záver treba uviesť, že komerčné programy MKP poskytujú pre riešenie všeobecných kontaktných úloh dostatočne kvalitný komfort na to, aby editácia a riešenie takýchto úloh v podstate neboli výrazne komplikovanejšie ako pri analýze bežných statických alebo nestacionárnych nelineárnych úloh. Postup tvorby modelu i nastavenie nelineárnych riešičov je úplne rovnaké, rozdiel je len v tom, že treba vytvoriť prepojenie kontaktného a cieľového telesa pomocou vhodných kontaktných prvkov. Túto fázu tvorby výpočtového modelu si predstavíme na jednoduchom príklade (čo do prácnosti grafickej editácie) v nasledujúcom príklade v prostredí programu Ansys (verzia 12.1).

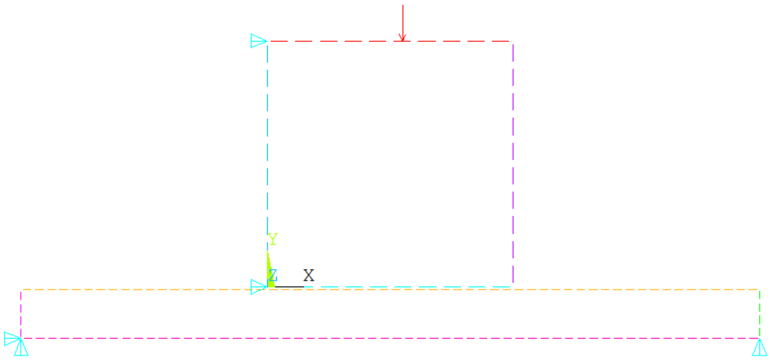
Príklad 25.1

Štvorcová platňa je položená na krátkom nosníku a jej stredová plocha je zaťažená čiarovým tlakom $q = 15$ N/mm. Situácia i rozmery oboch telies jednotkovej hrúbky sú znázornené na obrázku. Materiál oboch telies je rovnaký s hodnotami modulu pružnosti a Pissonovho čísla $E = 20000$ N/mm^2, μ = 0,3 . Určte maximálny priehyb nosníka.

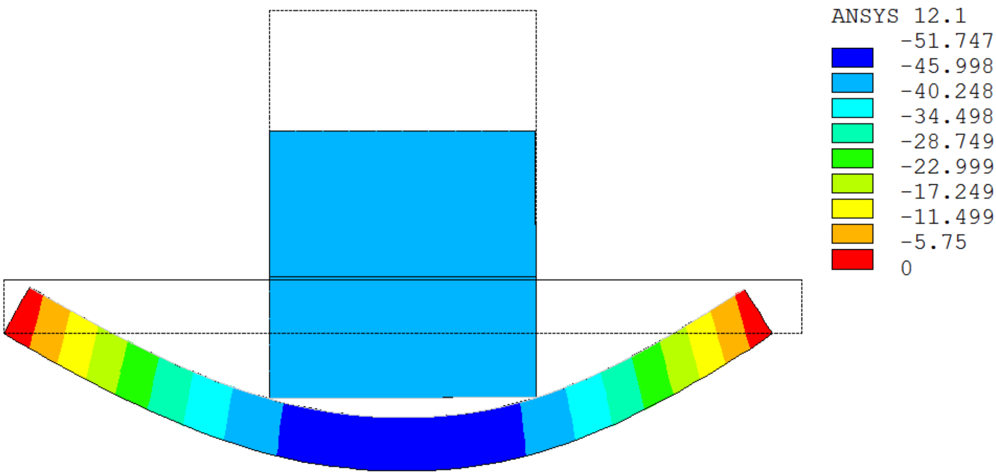


Postup riešenia

1. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Quad 8 node 183, OK, Close;
2. Material Props, Material Models, Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX=20000, PRXY=0.3, OK, Material, Exit;
3. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=0, X2=100, Y1=0, Y2=100, Apply, X1=-100, X2=200, Y1= -1, Y2= -21, OK;
4. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Areas, Picked Areas, Kliknite štvorec, Apply, Size=10, Apply, Kliknite obdĺžnik, OK, Size=5, OK;
5. Meshing, Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;
6. Modeling, Create, Contact Pair, V Contact Manageri kliknite prvú ikonku (Contact Wizard), Pick Target, Kliknite hornú čiaru obdĺžnika, OK, Next, Pick Contact, Kliknite spodnú stranu štvorca, OK, Next, Create, Finish, Zavrite Contact Manager;
7. Element Type, Add/Edit/Delete, CONTA172, Options, K5=Close gap, OK, Close;
8. Plot, Lines;
9. Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Keypoints, Kliknite spodné rohy obdĺžnika, Apply, Vyznačte UY, Apply, Kliknite ľavý roh obdĺžnika a rohy ľavej strany štvorca, OK, Vyznačte (len) UX, OK;
10. Define Loads, Apply, Pressure, On lines, Kliknite hornú stranu štvorca, OK, Value=15, OK;



11. Analysis Type, Sol'n Controls, Time=1, No. of substeps=20, Max. no. of substeps=40, Min. no. of substeps=5, Analysis Options=Large Displacement Static, OK;
12. Solve, Current LS, OK;
13. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, Y-Component of displacement, Scale Factor=True Scale, OK;



14. File, Exit, OK;

26 Výpočtové postupy MKP v akustike

Akustika je náuka o zvuku. Zaoberá sa jeho vznikom (jeho zdrojmi), jeho šírením v plynoch, kvapalinách a tuhých telesách, jeho interakciou s látkou a jeho ľudským vnímaním. Ľudské ucho je schopné vnímať zvuk s frekvenciou zhruba od 16 do 20000 Hertzov. Nižšie hodnoty zvukových frekvencií sa označujú infrazvuk a vyššie ultrazvuk. Akustické vlnenie je šírenie zmien akustického tlaku prostredím. V tekutinách (t.j. v plynoch a kvapalinách) sa jedná o pozdĺžne vlnenie (častice kmitajú v smere postupu vlnenia). V pevných látach sa šíria vlny pozdĺžne i priečne.
Akustika sa delí sa na niekoľko špecializovaných častí:

- Teoretická akustika s analytickou a numerickou analýzou zvukových vĺn
- Kmitanie telies ako zdroj zvukových vĺn, interakcia zvukového vlnenia s telesom (konštrukciou)
- Vyšetrovanie nelineárnych zvukových efektov (sonický tresk, explózia a pod.)
- Šírenie zvuku pod vodnou hladinou, sonar, seizmické efekty
- Ultrazvuk, nedeštruktívne skúšky materiálov, lekárske aplikácie
- Analýza zdrojov hluku a spôsobov protihlukovej ochrany
- Stavebná akustika – odhad, plánovanie, analýza šírenia sa zvukových vĺn v stavebných priestoroch
- Elektroakustika zvukových prevodníkov (reproduktury, mikrofóny, záznamové a signálové systémy)
- Hudobná akustika – analýza zvukov a ich interakcie s ohľadom na potreby hudby
- Fyziologická akustika – analýza vzniku a vnímania zvuku v ľudských zvukových orgánoch

Budeme sa zaoberať len výpočtovými postupmi MKP spadajúcimi do prvých dvoch uvedených špeciálnych oblastí akustiky s tým, že sa predpokladá elementárna znalosť základných pojmov z fyziky o vlnení. Treba však povedať, že tieto postupy sú základom numerických analýz aj vo väčšine ostatných uvedených špeciálnych oblastiach. Tiež treba upozorniť na fakt, že niektoré základné diferenciálne rovnice akustiky a dynamiky telies (ale i vlnenia v iných oblastiach fyziky) sú formálne zhodné, z čoho vyplýva množstvo analogií medzi pojmami i metódami riešenia úloh v týchto oblastiach. Pre tých, ktorí ovládajú výpočtové postupy MKP používané pri analýze kmitania telies (napr. [1]), bude iste zaujímavé pozorovať silnú analógiu s rovnicami a analýzou akustických vĺn. Využívajú sa pri tom formálne rovnaké výpočtové vzťahy a postupy, pravda, s určitými rozdielmi pri zadávaní vstupných hodnôt, budiacich „síl“ a najmä okrajových podmienok.

26.1 Niektoré základné pojmy z akustiky

Pod pojmom zvuk rozumieme zmeny akustického tlaku p', superponované na tlak prostredia p_0, ktoré sa šíria prostredím ako vlna a ktoré sme schopní sluchom vnímať. Pre objektívne hodnotenie zvuku sa zaviedla veličina s názvom *intenzita zvuku I*, ktorá je definovaná ako podiel akustického výkonu *P* a plochy *S*, ktorou vlnenie prechádza

$$I = \frac{P}{S} \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \tag{26.1}$$

Intenzita zvuku je teda priamo úmerná energii prenášanej vlnou, ktorá závisí od druhej mocniny amplitúdy tlaku a od druhej mocniny frekvencie. Ľudské ucho je schopné vnímať intenzitu zvuku od prahu počuteľnosti (I_0 = $10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$, resp. od akustického tlaku $p' = 20\ \mu\mathrm{Pa}$) až po prah bolesti (I =

$1\ \mathrm{W/m^2}$, resp. akustický tlak $130\ \mathrm{Pa}$), čo je v jednotkách intenzity zvuku veľmi veľký a pre bežné používanie nepraktický rozsah (pomer najväčšej a najmenšej intenzity je 10^{12}). Zaviedla sa preto aj ďalšia miera L_I s názvom *hladina intenzity (hlasitosti) zvuku* s jednotkou *bel* [B], ktorá vyjadruje intenzitu zvuku v logaritmickej stupnici (v angličtine *sound intensity level, SIL*)

$$L_I = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}\ [\mathrm{dB}] \tag{26.2}$$

kde násobok 10 prepočitáva túto hodnotu na decibely, čo je dostatočne podrobná hodnota pre zaregistrovanie jej zmeny ľudským sluchom. Analogicky možno túto veličinu vyjadriť pomocou tlaku, potom má názov *hladina akustického tlaku* L_p (v angličtine *sound pressure level, SPL*)

$$L_p = 10\log_{10}\left(\frac{p'_{rms}}{p_0}\right)^2 = 20\log_{10}\frac{p'_{rms}}{p_0}\ [\mathrm{dB}] \tag{26.3}$$

kde p'_{rms} je efektívna hodnota tlaku p' a $p_0 = 20\ \mu\mathrm{Pa}$ je referenčný tlak (prah počuteľnosti).

Príklady intenzity zvuku:

prah počuteľnosti 0 dB
šepot 20 dB
ticho hrajúce rádio 40 dB
konverzačná reč 60 dB
hlasitá reč 80 dB
pneumatické kladivo 140 dB
prah bolesti (intenzita, kedy začíname zvuk vnímať jako bolesť) 140 db

Ďalším dôležitým pojmom je *merná akustická impedancia* Z_0, ktorá vyjadruje pomer medzi akustickým tlakom a zložkou rýchlosti v smere kmitajúcej častice zvukovej vlny v určitom bode prostredia (nositeľa zvukových vĺn)

$$Z_0 = \frac{p'}{v}\ [\mathrm{Pa\cdot s/m}] \tag{26.4}$$

Pretože p' i v sa vo všeobecnosti (i v programoch MKP) vyjadrujú vo forme komplexných čísiel, aj akustická impedancia vo všeobecnosti je komplexné číslo. Merná akustická impedancia (resp. reálna časť jej hodnoty) udáva odpor, ktorý kladie médium šíreniu sa zvukovej vlny a závisí od vlastností média a typu zvukovej vlny. Pre rovinnú zvukovú vlnu platí vzťah, ktorý jasnejšie poukazuje na to, ako merná akustická impedancia (v tomto prípade často nazývaná aj *charakteristická impedancia*) závisí od vlastností média

$$Z_0 = \rho_0 c_0 \tag{26.5}$$

kde $\rho_0 c_0$ je súčin hustoty a rýchlosti zvuku v danom prostredí. Vyplýva z toho, že prostredie s vysokou hustotou a vysokou rýchlosťou šírenia zvukových vĺn vykazuje vysoký akustický odpor. A naopak, pri malých hodnotách ρ_0 a c_0, má akustické prostredie malý akustický odpor a podľa (26.4) aj malé efektívne hodnoty tlaku môžu vyvolať vysokú rýchlosť zvukového vlnenia. Je tiež zrejmé, že akustická impedancia závisí od teploty, pretože ako hustota, tak aj rýchlosť zvuku sa s teplotou mení.

Vzhľadom na uvedené je zrejmé, že napr. veľkosti charakteristickej akustickej impedancie vzduchu a vody budú výrazne odlišné. Pri teplote 20°C sú to hodnoty

vzduch: $Z_0 = \rho_0 \cdot c_0 = 1{,}21 \cdot 343 = 415\ \mathrm{kg/(s\cdot m^2)} = 415\ \mathrm{Pa\cdot s/m} = 0{,}415\ \mathrm{kPa\cdot s/m}$

voda: $Z_0 = \rho_0 \cdot c_0 = 1000 \cdot 1480 = 1480 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/(s\cdot m^2)} = 1480 \cdot 10^3\ \mathrm{Pa\cdot s/m} = 1480\ \mathrm{kPa\cdot s/m}$

Mernú akustickú impedanciu Z_0 treba rozlišovať od pojmu *akustická impedancia* Z s definíciou

$$Z=\frac{p'}{vS}=\frac{Z_0}{S}\quad [\mathrm{Pa\cdot s/m^3}] \tag{26.6}$$

Je to pomer akustického tlaku na ploche *S* k objemovému zvukovému toku cez túto plochu. S touto impedanciou sa stretávame v prípadoch, keď jej hodnota nezávisí len od vlastností prostredia, ale aj od tvaru vyšetrovanej oblasti (dychové nástroje, kanály, dutiny, rúry).

Pri riešení akustických úloh pomocou MKP sa merná akustická impedancia prostredia zadáva priamo udaním hmotnosti a rýchlosti zvuku a s oboma impedanciami sa stretávame tiež pri zadávaní okrajových podmienok. Určitú komplikáciu pri zadávaní i vyhodnocovaní akustickej impedancie spôsobuje to, že akustický tlak a rýchlosť zvukovej častice bývajú často fázovo posunuté, čo spôsobuje fázové posunutie viacerých akustických veličín, vrátene impedancie. Rieši sa to komplexnou reprezentáciou hodnôt týchto veličín, pričom obvykle reálna časť reprezentuje sfázovanú zložku a imaginárna časť zložku mimo fázy.

Pri šírení prostredím zvuková vlna môže naraziť na prekážku, prípadne prechádzať do iného prostredia. Pri kolízii s prekážkou (ktorú zvuk nemôže obísť) sa časť zvukovej energie odrazí a časť absorbuje materiál prekážky. Akustické vlastnosti prekážky (steny) z tohto hľadiska možno vyjadriť pomocou *koeficientu absorpcie* zvuku

$$\alpha=\frac{I_{absorb}}{I} \tag{26.7}$$

kde $I=I_{absorb}+I_{refl}$ je intenzita zvuku dopadajúceho na prekážku, I_{absorb} je intenzita pohlteného a prenášaného zvuku a I_{refl} intenzita odrazeného zvuku. Koeficient absorpcie zvuku sa určuje experimentálne a je silne závislý od frekvencie. So zvyšovaním frekvencie sa jeho hodnota zvyšuje. Niektoré jeho hodnoty pre frekvenciu 500 Hz sú: betón 0,015; stena obytnej miestnosti 0,025; sklo 0,027; drevené parkety 0,07; hrubý koberec na betóne 0,14; priemyselné zvukovoizolačné materiály 0,6 – 0,8; otvorené okno 1,0.

Pri prechode zvukovej vlny cez hranicu dvoch rozdielnych prostredí dochádza tiež k odrazu zvuku. Intenzita odrazeného zvuku závisí od uhla dopadu vlny a od impedancie oboch prostredí. Pokiaľ je smer vlny normálový k hranici (normálový odraz), pre koeficient odrazenej intenzity zvuku platí

$$R_i=\frac{I_{refl}}{I_{trans}}=\frac{(Z_{02}-Z_{01})^2}{(Z_{02}+Z_{01})^2} \tag{26.8}$$

kde R_i je *koeficient odrazu intenzity zvuku*, Z_{01} je merná impedancia prostredia prichádzajúcej zvukovej vlny a Z_{02} je impedancia prostredia do ktorého zvuk vchádza a ktoré časť intenzity *R* (0 až 1) odráža. Možno sa stretnúť aj s *koeficientom odrazu tlaku zvuku* pre ktorý platí

$$R_p=\sqrt{R_i} \tag{26.9}$$

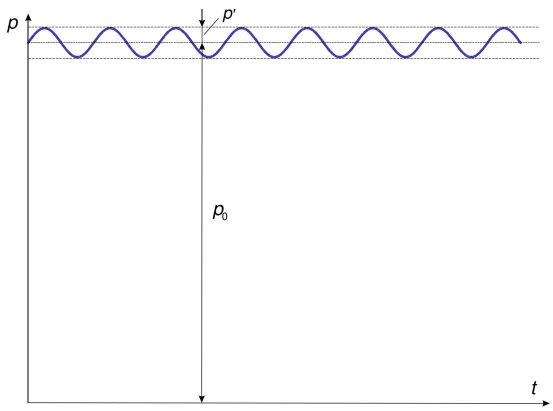
Zo vzorca (26.8) vidieť, že pri malých rozdieloch impedancií je zmena intenzity zvuku pri prechode hranicou prostredí malá (pri rovnakých impedanciách nulová) a naopak.

26.2 Vlnové rovnice

Pri formulovaní a riešení akustických problémov sa predpokladá, že akustické vlny v uvažovanom mieste s pravouhlovými priestorovými súradnicami $\mathbf{x}\equiv(x,y,z)$ a v čase t sú charakterizované tlakom $p(\mathbf{x},t)$, hustotou $\rho(\mathbf{x},t)$ a rýchlosťou častice média (neviskóznej tekutiny) $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$. Ďalej sa predpokladá, že fluktuácie (zmeny) tlaku $p'(\mathbf{x},t)$ a hustoty $\rho'(\mathbf{x},t)$ sú veľmi malé oproti kľudovým hodnotám v uvažovanej oblasti p_0 a ρ_0 (obr. 1) a že rýchlosť pohybu častice $\mathbf{v}'(\mathbf{x},t)$ je veľmi malá oproti rýchlosti zvuku v tekutine c_0. Takže sa zavádzajú vzťahy

$$p=p_0+p',\quad \rho=\rho_0+\rho',\quad p'\ll p_0,\quad \rho'\ll\rho_0,\quad |\mathbf{v}'|\ll c_0 \tag{26.10}$$

Uvažuje sa nulové prúdenie média $|\mathbf{v}_0|=0$.



Obr. 1

Využitím uvedených predpokladov v rovnici kontinuity a pohybovej rovnici média (napr. [1], kap. 20), t.j. zanedbaním súčinov malých veličín, dostaneme linearizovanú rovnicu kontinuity

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla.\mathbf{v}' = 0 \tag{26.11}$$

a linearizovanú pohybovú rovnicu

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = \mathbf{0} \tag{26.12}$$

Ak rovnicu kontinuity zderivujeme podľ času a pohybovú rovnicu po vynásobení operátorom ∇ od nej odčítame, tak dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}'\right) - \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p'\right) = 0$$

a po vyrušení členov s rýchlosťou

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \tag{26.13}$$

Do tejto rovnice ešte potrebujeme nájsť vzťah mezi p' a ρ'. Najjednoduchšiu formu tejto závislosti majú tzv. barotropické tekutiny pri ktorých zmena tlaku závisí len od zmeny hustoty

$$p = p(\rho) \tag{26.14}$$

Tento vzťah sa takisto linearizuje rozvinutím do skráteného radu okolo hodnoty $p(\rho_0) = p_0$

$$p = p_0 + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) + O\left((\rho - \rho_0)^2 + \ ...\right) \tag{26.15}$$

Z tejto aproximácie vyplýva

$$p' = p - p_0 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) = c_0^2 \rho' \tag{26.16}$$

kde

$$c_0^2 \approx \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} \tag{26.17}$$

Dosadením (26.16) do (26.13) dostávame *homogénny tvar vlnovej rovnice* (t.j. bez budiacich akustických zdrojov na pravej strane) pre tlakové fluktuácie

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \tag{26.18}$$

Analogická rovnica platí pre hustotu

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 \rho' = 0 \qquad (26.19)$$

Pre rýchlosť častice $\mathbf{v}'$ platí *vektorová* vlnová rovnica

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v}'}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{v}' = 0 \qquad (26.20)$$

Vektor akustickej rýchlosti $\mathbf{v}'$ je rýchlosť, ktorou kmitajú častice zvukového prostredia, ktoré tvoria zvukovú vlnu, okolo svojich rovnovážnych polôh. Je to časovo periodicky premenná veličina, ktorá pri zvukovom (pozdĺžnom) vlnení má smer šíriacej sa vlny. Nesmieme ju zamieňať s rýchlosťou šírenia akustickej vlny c_0.

Rýchlosť pozdĺžnych vĺn v kvapalinách udáva vzťah

$$c_0 = \sqrt{K/\rho_0} \qquad (26.21)$$

kde K je modul objemovej pružnosti kvapalného prostredia. Je to pomer medzi prírastkom všestranného tlaku a ním vyvolanou pomernou zmenou objemu

$$K = \frac{|\Delta p|}{\Delta V / V_0} \qquad (26.22)$$

Ak akustické vlnenie prebieha v plyne o stálej hmotnosti a adiabatických podmienok (sústava je dokonale izolovaná – nedochádza k výmene tepla s okolím) potom pre rýchlosť zvuku c platí

$$c_0^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \frac{K}{\rho_0} \quad \rightarrow \quad c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0} \qquad (26.23)$$

kde $\gamma = c_p / c_V$ je pomer merných tepelných kapacít pri konštantnom tlaku a konštantnom objeme

Homogénna vlnová rovnica (na rozdiel od nehomogénnej s nenulovou pravou stranou) definuje vlnenie bez prítomnosti jeho zdroja (možno si to predstaviť tak, že je niekde mimo uvažovanej oblasti) a zadanie konkrétnej úlohy vyžaduje predpis začiatočných a okrajových podmienok.

Predpokladajme teraz, že funkcia $p'(\mathbf{x},t)$ vo vlnovej rovnici (26.18) sa s časom mení harmonicky a platí

$$p'(x,y,z,t) = \overline{p}(x,y,z)e^{i\omega t} \qquad (26.24)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \overline{p} e^{i\omega t} = -\omega^2 p' \qquad (26.25)$$

Po dosadení (26.25) do vlnovej rovnice (26.18) sa táto zmení na Helmholtzovu rovnicu

$$\nabla^2 \overline{p} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\overline{p} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \overline{p} + k^2 \overline{p} = 0 \qquad (26.26)$$

ktorá neobsahuje čas a amplitúdy $\overline{p}(x,y,z)$ sú závislé len od polohy. Pomer $k = \omega / c_0$ sa nazýva uhlové vlnové číslo. Rovnica popisuje stojaté vlnenie v ohraničenej oblasti stanovenej okrajovými podmienkami.

Pre rovinné vlnenie, ktoré sa šíri v smere osi x sa vlnová a Helmholtzova rovnica zjednodušia na rovnice len s dvomi nezávislými premenými x a t :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \qquad (26.27)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x^2} + k^2 \overline{p} = 0 \qquad (26.28)$$

Ak vynásobíme pohybovú rovnicu (26.12) operátorom rotácie, dostaneme

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathrm{x} \mathbf{v}' + \nabla \mathrm{x} (\nabla p') = \mathbf{0} \qquad (26.29)$$

a pretože rotácia gradientu skalárneho poľa je nulové pole, rovnica sa zmení na

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \mathrm{x}\mathbf{v}' = \mathbf{0} \tag{26.30}$$

čo znamená konštantnú a vzhľadom na už uvedený predpoklad nulového prúdenia média nulovú vírivosť poľa rýchlosti

$$\nabla \mathrm{x}\mathbf{v}' = \mathbf{0} \tag{26.31}$$

Potom odobne, ako pri iných nevírových poliach, aj v akustickom poli možno definovať skalárnu funkciu $\phi(x,y,z,t)$, tzv. akustický rýchlostný potenciál, vzťahom

$$\mathbf{v}' = \nabla\phi = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{Bmatrix}\phi(x,y,z,t) \tag{26.32}$$

Je to užitočný vzťah, pretože analyticky i numericky je výhodnejšie hľadať skalárnu veličinu (ϕ) ako vektorovú ($\mathbf{v}'$), pričom, ako vidieť, sa zložky rýchlosti z neho jednoducho dajú určiť.

Na zistenie vzťahu medzi rýchlostným potenciálom a tlakom p' využijeme jednorozmernú verziu pohybovej rovnice (26.12)

$$\rho_0\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \nabla p' = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + p'\right) = 0 \quad\rightarrow \rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + p' = C(t) \tag{26.33}$$

Pomocou oprávneného predpokladu $C(t) = 0$, dostávame z (26.33) hľadaný vzťah (platný aj pre 3D oblasť)

$$p' = -\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{26.34}$$

Vráťme sa teraz k rovnici kontinuity (26.11)

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}' = 0$$

Pomocou (26.16) a (26.34) z nej odstráňme hustotu

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}' = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p'}{c_0^2}\right) + \rho_0\nabla\cdot\nabla\phi = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \nabla^2\phi = 0$$

a dostávame potenciálovú formu vlnovej rovnice

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{26.35}$$

Pre okrajové podmienky sa využíva tlak (26.34) a rýchlosť (26.32).

Pri harmonickom vlnení s potenciálom

$$\phi(x,y,z,t) = \Phi(x,y,z)e^{i\omega t} \tag{26.36}$$

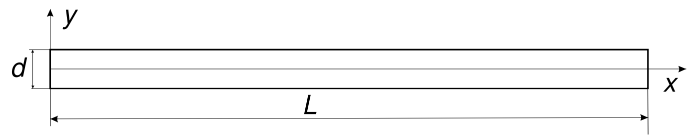
sa rovnica (26.35) zmení na Helmholtzovu

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0 \tag{26.37}$$

Na záver tejto časti poznamenávame, že pri analytickom riešení akustických problémom sa môžeme stretnúť aj s prepisom všetkých uvedených vlnových rovníc do cylindrického alebo sférického súradnicového systému.

26.3 Riešenie jednorozmernej vlnovej rovnice

Budeme analyzovať voľné pozdĺžne akustické vlnenie vzduchového stĺpca vo valcovej rúre o dĺžke L ($d \ll L$). Pri zanedbaní všetkých tlmiacich efektov možno takéto vlnenie považovať za rovinné, ktoré sa šíri v smere osi valca. Nech os valca má smer súradnicovej osi x (obr.2).



Obr. 2

Pri rovinnom vlnení pre pozdĺžne zmeny (kmity) tlaku p' v rúre platí jednorozmerná vlnová rovnica (26.27)

$$c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \qquad (26.38)$$

čo znamená, že tlakové fluktuácie všetkých bodov rovinnej tlakovej vlnoplochy kolmej na os *x* sú rovnaké, a preto má hľadaná funkcia $p'(x,t)$ len dve nezávislé premenné *x* a *t*.

Diferenciálnu rovnicu (26.38) možno vyriešiť metódou separácie premenných. Funkciu $p'(x,t)$ vyjadríme ako súčin dvoch funkcií, z ktorých jedna je funkciou len polohy a druhá len času

$$p'(x,t) = X(x)T(t)$$

Potom
$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = T\frac{d^2X}{dx^2}, \qquad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = X\frac{d^2T}{dt^2}$$

Po dosadení do vlnovej rovnice a separácii premenných dostávame rovnicu

$$c_0^2 \frac{d^2X/dx^2}{X} = \frac{d^2T/dt^2}{T}$$

Pretože funkcie *X* a *T* sú na sebe nezávislé, takéto dva výrazy sa sebe môžu rovnať len vtedy, keď obidva sa rovnajú tej istej konštante. Ak túto konštantu označíme $-k^2$, dostaneme diferenciálne rovnice pre určenie funkcií *X* a *T*

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2X$$

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{d^2T}{dt^2} = -k^2T$$

Využijeme teraz základné definície z teórie vlnenia (kmitania): $c_0 = f\lambda = (\omega/2\pi)(2\pi/k) = \omega/k$. Čiže platí $c_0k = \omega$, čo možno využiť na úpravu druhej z uvedených rovníc a máme

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0 \qquad (26.39)$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2T(t) = 0 \qquad (26.40)$$

Pre istotu si pripomeňme názvy použitých veličín pri tomto odvodení: c_0 – rýchlosť zvuku (fázová rýchlosť) v m/s, f – frekvencia v 1/s (Hz), λ - dĺžka vlny v m, ω- uhlová frekvencia v rad/s, $k = \omega/c$ – uhlové vlnové číslo v rad/m.

Matematický tvar oboch rovníc je zhodný, sú to vlnové rovnice. Všimnime si, že rovnica (26.39) je časovo nezávislá jednorozmerná Helmholtzova rovnica (26.28). Všeobecné riešenia týchto rovníc je (možno sa o tom presvedčiť spätným dosadením)

$$X(x) = A\sin kx + B\cos kx \qquad (26.41)$$

$$T(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t \qquad (26.42)$$

a všeobecné riešenie rovinného pozdĺžneho akustického vlnenia v rúre potom je

$$p'(x,t) = X(x)T(t) = (A\sin kx + B\cos kx)(C\sin\omega t + D\cos\omega t) \qquad (26.43)$$

Pre každé konkrétne (parikulárne) riešenie je potrebné určiť integračné konštanty z dvoch okrajových a dvoch začiatočných podmienok.

Uvažujme najprv, že oba konce rúry (x = 0 a x = L) sú otvorené. Okrajové podmienky v takomto prípade sú

(1) $x=0 \quad \to \quad p'(0,t)=0$

(2) $x=L \quad \to \quad p'(L,t)=0$

Tieto podmienky vyplývajú z toho, že v mieste otvoreného konca rúry je $p=p_0$ a v takom prípade (pozri (26.10)) je v tomto mieste $p'=0$. Upozorňujeme tiež na to, že aj na otvorenom konci rúry (poddajná prekážka) dochádza tiež k odrazu akustickej vlny.

Z podmienky (1) dostávame

$$0=B(C\sin\omega t+D\cos\omega t) \qquad \to \qquad B=0$$

a z podmienky (2)

$$0=A\sin kL(C\sin\omega t+D\cos\omega t) \qquad \to \qquad \sin kL=0$$

Podmienku $\sin kL=0$ spĺňa nekonečný počet uhlov $kL=n\pi,\ n=1,2,3,\ldots$ Ak označíme príslušné kruhové vlnové čísla $k_n=n\pi/L$ a dosadíme do (26.41), dostávame, ako špeciálny prípad vlnenia v rúre, na čase nezávislé riešenia pozdĺžneho stojatého vlnenia tlaku v rúre (tzv. vlastné tvary vlnenia) pri uvedených okrajových podmienkach

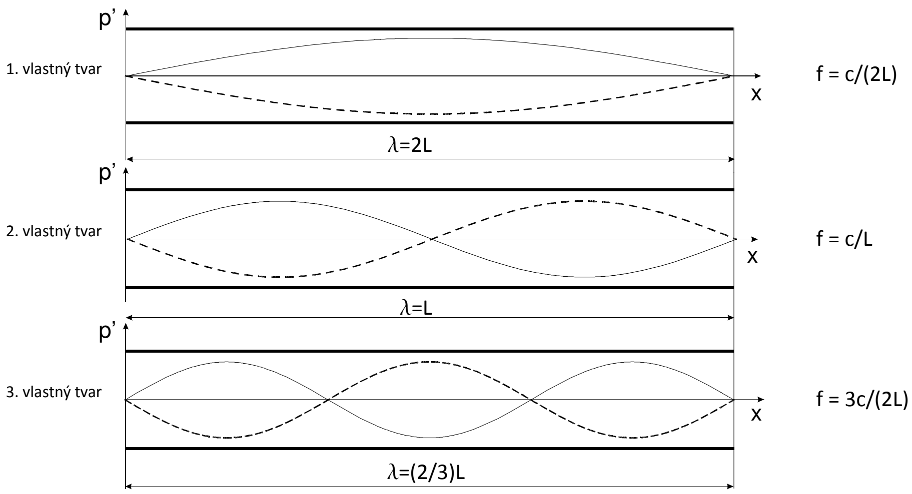
$$X(x)=A_n\sin(k_n x)=A_n\sin(n\pi x/L) \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{26.44}$$

Pre frekvencie vlastných tvarov (vlastné frekvencie) platí

$$f=\frac{nc_0}{2L} \tag{26.45}$$

pretože $kL=n\pi \quad\to\quad (\omega/c_0)L=n\pi \quad\to\quad (2\pi f/c_0)L=n\pi \quad\to\quad f=nc_0/(2L)$.

Prvé tri vlastné tvary sme znázornili graficky na obr. 3 spolu s udanými vlastnými frekvenciami. Veľkosti tlaku p' sa menia s príslušnou frekvenciou medzi plnou a čiarkovanou čiarou, pričom sa vlna nepohybuje pozdĺž rúry. Miesta s nulovým tlakom p' sa nazývajú uzly a miesta s jeho maximálnym rozkmitom – kmitne. Pripomíname, že sa jedná o pozdĺžne vlnenie, takže zmeny tlaku v mieste *x* si treba predstaviť v pozdĺžnom smere a nie v priečnom, ako sú nakreslené jeho absolútne hodnoty v obrázku (priečne, tak, ako je to v obrázku, by kmitala struna o dĺžke *L* upevnená na koncoch) .



Obr. 3

Všeobecné riešenie vlnenia v rúre (26.43) sa po superpozícii členov $X(x)$ (26.44) zmení na

$$p'(x,t)=\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\left(\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\left(C_n\sin\omega_n t+D_n\cos\omega_n t\right) \tag{26.46}$$

kde integračné konštanty C_n a D_n treba určiť z dvoch začiatočných podmienok pre $t=0$. Automatické zavedenie indexu *n* aj do časovo závislej časti riešenia (26.46) vyplýva zo zviazanosti priestorovej vlnovej

dĺžky s časovo závislou frekvenciou cez vzťah $f = c_0/\lambda$, čo platí aj pre vlastné frekvencie $f_n = c_0/\lambda_n$, takže platí $\omega_n = n\pi c_0/L$. Začiatočné podmienky určujú, pre každý vlastný tvar, aká je jeho fáza (v akej polohe je jeho oscilačný cyklus) v čase t = 0.
Úplne analogicky by sme postupovali aj pri určovaní vlastných frekvencií a vlastných tvarov akustického vlnenia v rúre pri ďalších dvoch možných kombináciách okrajových podmienok (oba konce uzavreté a jeden koniec uzavretý, druhý otvorený), pričom na uzatvorenom konci správna okrajová podmienka je $dp'/dx = 0$, ktorú dostaneme derivovaním funkcie (26.43). Výsledky pre takéto kofigurácie rúry sú uvedené v tab. 1.

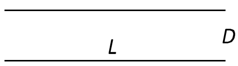
26.4 Princíp tvorby základných matíc konečného akustického prvku

Problematiku tvorby základných matíc prvku sme podrobne opísali v [1] (kap. 8 - Určenie matíc prvku priamo z diferenciálnych rovníc úlohy), kde je vysvetlený aj princíp Galerkinovej metódy, ktorú využijeme aj v tomto prípade.

Budeme sa zaoberať tvorbou matíc akustického konečného prvku určeného na riešenie vlnovej rovnice pre akustický tlak (26.18)

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \tag{26.47}$$

Tabuľka 1

Konfigurácia	Schéma	Index n =	Vlastné frekvencie	Vlastný tvar
otvorená - otvorená		1, 2, 3, ...	$\frac{nc_0}{2L}$	sin(nπx/L)
uzavretá - uzavretá		*0, 1, 2, ...	$\frac{nc_0}{2L}$	cos(nπx/L)
uzavretá - otvorená		1, 3, 5, ...	$\frac{nc_0}{4L}$	cos[nπx/(2L)]

* Prvý index rúry na oboch stranách uzatvorenej je n = 0, pri ktorom dostávame nultý vlastný tvar s f = 0 Hz a konštantným tlakom (tzv. vlastný tvar objemovej kompresie).

Rovnica (26.47) i ďalšie z nej odvodené platia za týchto predpokladov

1. Tekutina je stlačiteľná (hustota sa mení účinkom tlakových oscilácií)
2. Prúdenie média je nulové
3. Viskozita tekutiny je nulová
4. Stredná hodnota hustoty a tlaku sú rovnaké v celej oblasti

(Novšie verzie ANSYSu vypúšťajú posledné dve obmedzenia, čo vedie na komplexnejšiu formu rovníc a širší záber programu.)
Pri použití MKP sa oblasť rozdelí na konečné prvky a na všeobecnom e-tom prvku s *n* zvolenými uzlovými bodmi sa hľadá aproximácia funkcie $p'(x,y,z,t)$ a jej derivácií podľa času pomocou aproximačných vzťahov

$$p^e(x,y,z,t) = p^e = N_1(x,y,z)p_1^e(t) + N_2 p_2^e(t) + \cdots + N_n p_n^e(t) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x,y,z)p_j^e(t) = \mathbf{N}^T\mathbf{p}^e \tag{26.48}$$

$$\frac{\partial p^e(x,y,z,t)}{\partial t} = \dot{p}^e = N_1(x,y,z)\dot{p}_1^e(t) + N_2\dot{p}_2^e(t) + \cdots + N_n\dot{p}_n^e(t) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x,y,z)\dot{p}_j^e(t) = \mathbf{N}^T\dot{\mathbf{p}}^e \tag{26.49}$$

$$\frac{\partial^2 p^e(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \ddot{p}^e = N_1(x,y,z)\ddot{p}_1^e(t) + N_2\ddot{p}_2^e(t) + \cdots + N_n\ddot{p}_n^e(t) = \sum_{j=1}^{n} N_j(x,y,z)\ddot{p}_j^e(t) = \mathbf{N}^T\ddot{\mathbf{p}}^e \tag{26.50}$$

kde N_i sú interpolačné (tvarové) funkcie prvku a p_j^e, $\dot{p}_j^e$, $\ddot{p}_j^e$ sú hodnoty príslušných funkcií v uzloch prvku. Maticovo sú tieto hodnoty zapísané vo vektoroch $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}^e$, $\dot{\mathbf{p}}^e$a $\ddot{\mathbf{p}}^e$. Ak aproximácie $\ddot{p}^e$ a p^e dosadíme do (26.47), rovnica vo všeobecnosti na prvku nebude splnená a dostaneme nenulový zvyšok (rezídium)

$$R(x,y,z,t) = \frac{1}{c_0^2}\ddot{p}^e - \nabla^2\ddot{p}^e \neq 0 \tag{26.51}$$

Galerkinova metóda patrí do kategórie metód vážených zvyškov, pri ktorých sa funkcia $R(x,y,z,t)$ núti blížiť sa k nule určitým sumačným (integrálnym) spriemerovacím spôsobom na oblasti, v našom prípade na objeme prvku V_e

$$\int_{V_e} R(x,y,z,t)w(x,y,z)dV = 0 \tag{26.52}$$

kde w je tzv. váhová funkcia. Dosadením zvyšku (26.51) do tejto rovnice dostávame

$$\int_{V_e} (\frac{1}{c_0^2}\ddot{p}^e - \nabla^2 p^e)wdV = 0 \tag{26.53}$$

Aplikovaním prvej Greenovej identity (pozri napr. Wikipédiu) na druhý člen integrandu sa výhodne zníži stupeň derivácie aproximačnej funkcie p^e (pri jednorozmerných príkladoch v [1] sa to robilo integrovaním tohto člena per partes)

$$\frac{1}{c_0^2}\int_{V_e} \ddot{p}^e wdV + \int_{V_e} \nabla p^e \cdot \nabla wdV - \int_{S_u^e} \frac{\partial p^e}{\partial n} wdS = 0 \tag{26.54}$$

čím sa tiež výhodne, vzhľadom na následné numerické riešenie, znížili (zoslabili) aj nároky na jej spojitosť. Dostali sme tak tzv. slabý tvar diferenciálnej rovnice (26.47) na prvku. V rovnici, ako vidieť, sa objavila aj prirodzená (Neumannova) okrajová podmienka $\partial p^e / \partial n$ v smere vokajšej normály n na ploche prvku S_u^e

$$\int_{S_u^e} \frac{\partial p^e}{\partial n} wdS \tag{26.55}$$

ktorá sa uplatní len vtedy, ak niektorá plocha prvku je na okrajovej ploche oblasti S_u s touto podmienkou.

Ak za váhovú funkciu w postupne zvolíme v rovnici (26.54) aproximačné funkcie prvku N_i (Garelkinova metóda) a zohľadníme, že $\partial p^e / \partial \mathrm{n} = \mathbf{n} \cdot \nabla p^e$, kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor normály, dostaneme

$$\frac{1}{c_0^2}\int_{V_e} \ddot{p}^e N_i dV + \int_{V_e} \nabla p^e \cdot \nabla N_i dV - \int_{S_u^e} \mathbf{n} \cdot \nabla p^e N_i dS = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{n} \tag{26.56}$$

V úlohách so vzájomnou interakciou tekutiny a konštrukcie sa plocha S_u^e s Neumannovou okrajovou podmienkou využíva ako rozhranie týchto dvoch oblastí a pre ich vzájomné pôsobenie sa využíva nasledujúci vzťah medzi normálovým tlakom a normálovým zrýchlením na rozhraní [Zienkiewicz]

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p^e = -\rho_0 \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{26.57}$$

kde $\mathbf{u}$ je vektor posunutí konštrukcie na ploche rozhrania. Pre jeho druhú deriváciu podľa času je možno analogicky s deriváciou tlaku (26.50) použiť aproximačný vzťah

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{N}_s \ddot{\mathbf{u}}^e \qquad (26.58)$$

kde $\mathbf{N}_s$ je matica interpolačných funkcií konštrukčnéh prvku na rozhraní a $\ddot{\mathbf{u}}^e$ je vektor zložiek zrýchlenia uzlových bodov konštrukčného prvku na rozhraní.

Ak zavedieme maticový zápis operátora ∇ v tvare

$$\nabla^T f = \mathbf{L}^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right] \quad \rightarrow \quad \nabla f = \mathbf{L} f \qquad (26.59)$$

potom maticový zápis rovnice (26.56) po dosadení za p^e a $\ddot{p}^e$ podľa (26.48) a (26.50) a po dosadení maticového vyjadrenia $\mathbf{n} \cdot \nabla p^e$ podľa (26.57) a (26.58) je

$$\frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dV \ddot{\mathbf{p}}^e + \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV \mathbf{p}^e + \rho_0 \int_{S_u^e} \mathbf{N}\mathbf{n}^T \mathbf{N}_s^T dS \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{0} \qquad (26.60)$$

kde

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}^T \qquad (26.61)$$

Na okraji oblasti je odraz akustickej vlny vo všeobecnosti spojený s čiastočnou disipáciou prenášanej zvukovej energie. Časť energie sa premení na teplo a časť sa absorbuje a ďalej prenáša materiálom hranice oblasti. Absorpčné tlmenie je zviazané s rýchlosťou častice a ak prvok má časť plochy na okraji oblasti (S_a^e) potom sa v rovnici (26.60) objaví aj tlmiaci člen [Theory 12.1]

$$\frac{\beta}{c_0} \int_{S_a} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dS \dot{\mathbf{p}}^e \qquad (26.62)$$

v ktorom β je okrajový absorpčný koeficient (β = 0 bez absorpcie, β = 1 totálna absorpcia zvuku) , S_a^e je plocha prvku na okraji oblasti s absorbčným tlmením a $\dot{\mathbf{p}}^e$ je vektor uzlových hodnôt rýchlosti.

Sústavu rovníc (26.60) možno už teraz skompletizovať na tvar

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{p}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{p}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{p}^e + \rho_0 \mathbf{R}^e \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{0} \qquad (26.63)$$

kde pre maticu akustickej hmotnosti tekutiny prvku $\mathbf{M}^e$, matice akustickej tuhosti tekutiny prvku $\mathbf{K}^e$, matice absorpčného tlmenia prvku $\mathbf{C}^e$ a maticu väzobnej hmotnosti prvku $\rho_0 \mathbf{R}^e$ platí

$$\mathbf{M}^e = \frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dV \qquad (26.64)$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{\beta}{c_0} \int_{S_a^e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dS \qquad (26.65)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV \qquad (26.66)$$

$$\rho_0 \mathbf{R}^e = \rho_0 \int_{S_u^e} \mathbf{N}\mathbf{n}^T \mathbf{N}_s^T dS \qquad (26.67)$$

Ďalší postup riešenia úlohy je už v MKP štandartný. Výpočtový model celej oblasti sa tvorí jej geometrickou diskretizáciou na konečné prvky a globálne matice oblasti sa tvoria sumáciou rozšírených matíc prvkov [2]. Dostaneme takto výslednú (globálnu) sústavu rovníc v tvare

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{p} + \rho_0 \mathbf{R}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \qquad (26.68)$$

kde názvy globálnych matíc sú rovnaké ako pri prvku.

Pri úlohách s akustickým zaťažením (akustickým budením) sa potom na pravej strane rovnice (26.68) objavia uzlové hodnoty príslušných zdrojov akustického budenia v globálnom vektore akustických budiacich síl $\mathbf{f}$ a rovnica sa zmení na

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{p} + \rho_0 \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \qquad (26.69)$$

26.5 Modálna analýza

Modálna analýza sa využíva na výpočet prirodzených frekvencií a tvarov (módov) voľného stojatého harmonického vlnenia (kmitania) akustického systému (akustickej oblasti). Výsledky okrem posúdenia akustických vlastností oblasti môžu slúžiť aj na nútenú harmonickú, nestacionárnu (dynamickú) a spektrálnu analýzu systému.
Ako sme uviedli v predchádzajúcej časti, rovnice výpočtového modelu akustického systému bez tlmenia sa zapisujú v tvare

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}+\mathbf{K}\mathbf{p}=\mathbf{f} \qquad (26.70)$$

kde $\mathbf{M}$ je (globálna) matica hmotnosti, $\mathbf{K}$ je akustická matica tuhosti, $\mathbf{f}$ je vektor vonkajších zaťažovacích (budiacich) uzlových síl a vektor $\mathbf{p}$ obsahuje hodnoty tlaku v uzlových bodoch modelu. Pri voľnom harmonickom vlnení však $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ a uzlové tlaky kmitajú podľa vzťahu

$$\mathbf{p}=\boldsymbol{\phi}\cos\omega t \qquad (26.71)$$

kde $\boldsymbol{\phi}$ je vektor amplitúd tlaku v uzlových bodoch, ω je uhlová rýchlosť (v rad/sek) a *t* je čas. Druhá derivácia (26.71) podľa času dáva

$$\ddot{\mathbf{p}}=-\omega^2\boldsymbol{\phi}\cos\omega t \qquad (26.72)$$

a po dosadení uvedených vektorov do (26.70) s $\mathbf{f}=\mathbf{0}$, dostaneme časovo nezávislú sústavu homogénnych rovníc stojatého vlnenia tlakov v riešenej oblasti

$$(-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K})\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0} \qquad (26.73)$$

Takáto sústava rovníc má triviálne riešenie $\boldsymbol{\phi}_0=\mathbf{0}$ a ďalších *n* nenulových riešení pre prípady kedy determinant sústavy sa rovná nule, t.j.

$$\left|\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right|=0 \qquad (26.74)$$

Rozpísaním determinantu dostaneme algebrickú rovnicu stupňa *n* pre výpočet ω^2

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega^2 m_{11} & k_{12}-\omega^2 m_{12} & \cdots & k_{1n}-\omega^2 m_{1n} \\ k_{21}-\omega^2 m_{21} & k_{22}-\omega^2 m_{22} & \cdots & k_{2n}-\omega^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1}-\omega^2 m_{n1} & k_{n2}-\omega^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\omega^2 m_{nn} \end{vmatrix}=0 \qquad (26.75)$$

Korene tejto rovnice predstavujú vo všeobecnosti *n* vlastných čísiel sústavy rovníc (26.73), v tomto prípade *n* kvadrátov vlastných uhlových frekvencií telesa

$$\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_i^2,\cdots,\omega_n^2$$

kde *n* je globálny počet uzlov (stupňov voľnosti) výpočtového modelu. Ľubovoľnej frekvencii ω_i možno potom zo vzťahu (26.73) priradiť vektor $\boldsymbol{\phi}_i$ - vlastný tvar - aplitúdy tlakového stojatého vlnenia (tlakového stojatého kmitania) uzlových bodov modelu pri tejto frekvencii.

Zo sústavy rovníc (26.73) je zrejmé, že ak $\boldsymbol{\phi}_i$ je jej riešením, potom aj $c\,\boldsymbol{\phi}_i$ je riešením pri ľubovoľnej hodnote čísla *c*. Fyzikálne to znamená, že amplitúdy voľného tlakového harmonického kmitania môžu mať (teoreticky) ľubovoľnú hodnotu v závislosti od veľkosti začiatočného impulzu, ktorý vyvolal tento pohyb. Pri výpočte aplitúd $\boldsymbol{\phi}_i$ sústavy (3) so známou hodnotou ω_i potom postupujeme tak, že ich normujeme; napr. tak, že postavíme ϕ_n = 1. Pri takomto normovaní potom hodnoty amplitúd vo vlastnom tvare kmitania sú

$$\boldsymbol{\phi}_i=\begin{bmatrix} \dfrac{\phi_{i1}}{\phi_{in}} & \dfrac{\phi_{i2}}{\phi_{in}} & \cdots & \dfrac{\phi_{in-1}}{\phi_{in}} & 1 \end{bmatrix}^T \qquad (26.76)$$

Vo vypočítanom vlastnom tvare je teda relatívny pomer amplitúd správny, absolútne hodnoty sú však závislé od spôsobu ich normovania.

V mnohých prípadoch sú matice hmotnosti a tuhosti symetrické a na riešenie tejto úlohy možno v programe ANSYS zvoliť príslušnú metódu výpočtu (napr. blokovú Lanczosovu metódu). K dispozícii je aj riešič pre prípad nesymetrických matíc úlohy.

Treba vedieť, že ANSYS vypisuje vypočítané frekvencie automaticky v Herzoch po prepočítaní zo známeho vzťahu $f_i = \omega_i / 2\pi$.

Výpočtový model oblasti obyčajne obsahuje veľmi vysoký počet uzlov (stupňov voľnosti) a preto sa vo všeobecnosti vyčísľuje len obmedzený počet relevantných najnižších vlastných frekvencií a vlastných tvarov.

Príklad 1

Pre rúru s L = 3,0 m a D = 0,1 m, naplnenú vzduchom s $\rho_0 = 1{,}21$ kg/m^2 a c_0 = 343 m/s, určte prvých šesť vlastných frekvencií a nakreslite prvé tri vlastné tvary pomocou programu ANSYS. Úlohu riešte pre rúru na jednom konci uzavretú a na druhom otvorenú.

Úlohu sme v interaktívnom móde programu ANSYS vyriešili pomocou nasledujúcej postupnosti príkazov:

1. *Redukcia ponuky príkazov a nastavení*

Preferences, ANSYS Fluid, OK;

2. *Voľba typu prvku*

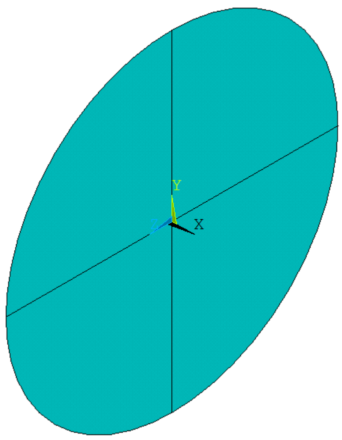
Preprocessor, Element type, Add/Edit/Delete, Add, ANSYS Fluid, 3D acoustic 30, OK, Options, K2 = Structure Absent, OK, Close;

3. *Zadanie materiálových vlastností*

Material Props, Material Models, Acoustics, Density, DENS = 1.21, OK, Sonic Velocity, SONC = 343, OK, Material, Exit;

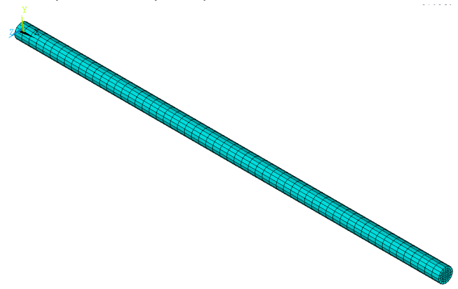
4. *Vytvorenie geometrického modelu rúry*

WorkPlane, Offset WP by Increments, Degrees = 90, Kliknite +Y, OK;
Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, Outer radius = 0.05, THET2 = 90, OK;
Reflect, Areas, Pick All, X-Y plane, Apply, Pick All, X-Z plane, OK;
Numbering Ctrls, Merge Items, Label = Keypoints, OK;
Isometric View ;



Modeling, Operate, Extrude, Areas, By XYZ Offset, Pick All, Dx = 3, OK;
Plot, Volumes;
Vytvorenie výpočtového modelu (siete prvkov)

Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, All Lines, NDIV = 4, OK, Picked Lines, Kliknite zhruba v strede rúry 4krát, OK, NDIV = 60, OK;
Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All, OK;



5. Nastavenie parametrov riešenia úlohy, zadanie okrajovej podmienky a výpočet

Solution, Analysis Type, New Analysis, Modal, OK;
Analysis Options, No. of modes to extract = 6, NMODE = 6, OK, FREQE = 500, Nrmkey = To unity, OK;
Select, Entities, Nodes, By Location, X coordinates, Min = 3, Max = 3, OK;
Define Loads, Apply, Fluid/ANSYS, Pressure DOF, On Nodes, Pick All, PRES = 0, OK;
Select, Everything;
Solve, Current LS, OK;

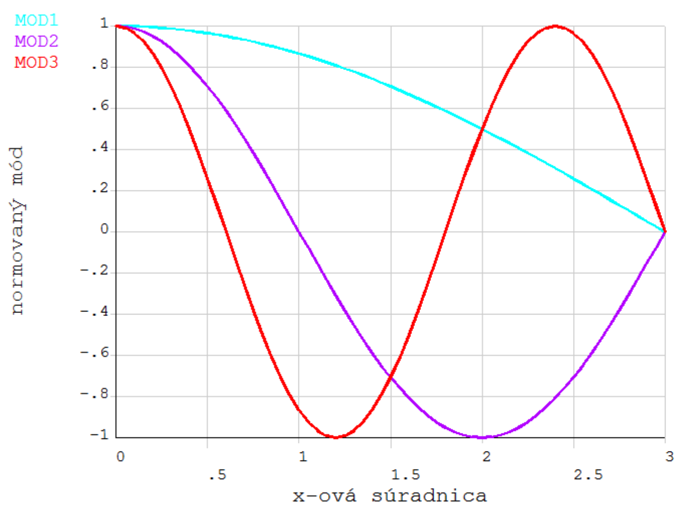
6. Vypísanie vlastných frekvencií

General Postproc, Results Summary;

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	28.584	1	1	1
2	85.772	1	2	2
3	143.02	1	3	3
4	200.36	1	4	4
5	257.85	1	5	5
6	315.50	1	6	6

7. Vykreslenie prvých troch vlastných tvarov

Read results, First Set;
Path Operations, Define Path, By Nodes, Kliknite ľubovoľný ľavý krajný a ľubovoľný pravý krajný uzol modelu, OK, Name = cesta, nDiv = 50, OK;
Map onto Path, Lab = MOD1, DOF solution = Pressure PRES, OK;
Read Results, Next Set;
Path Operations, Map onto Path, Lab = MOD2, OK;
Read Results, Next Set;
Path Operations, Map onto Path, Lab = MOD3, OK;
Plot Path Item, On Graph, Vyznačte MOD1, MOD2, MOD3, OK;



Poznámky k príkladu:

Na celom okraji výpočtového modelu je automaticky splnená Neumannova okrajová podmienka $\partial p'/\partial \mathrm{n} = 0$ pre akusticky tuhý povrch, a preto ani pre uzavretý ľavý okraj rúry (x = 0) túto okrajovú podmienku nebolo potrebné zadávať.

Vzhľadom na rovinné vlnenie v smere osi x, vyplývajúce z tvaru oblasti, je možné deliť oblasť v smere osi y a z deliť aj redšie. Úlohu je možné riešiť aj pomocou rovinného prvku *2D acoustic 29*, dokonca aj jednorozmerným prvkom, pokiaľ by ho ANSYS mal, pretože hodnoty v uzloch na priečnom reze sú rovnaké ako v uzle na osi x. Úlohu sme riešili s priestorovým prvkom, aby sme mohli model využiť aj pri iných úlohách.

Hustota v smere osi x (v smere šírenia vlny) ovplyvňuje presnosť riešenia a počet prvkov pripadajúcich na dĺžku vlny $\lambda = c_0 / f$, by nemal výraznejšie klesnúť pod číslo 8, čo je v našom príklade splnené aj pri najvyššej počítanej frekvencii. Teoretické hodnoty prvých šiestich vlastných frekvencií podľa vzorca v tab. 1 sú: 28,6; 85,8; 142,9; 200,1; 257,3; 314,4 Hz, čo potvrdzuje vyhovujúcu presnosť numerického riešenia.

26.6 Harmonická analýza

Harmonická analýza sa využíva v prípadoch, kedy všetky zaťaženia (budiace sily) sa menia sinusoidálne (harmonicky) a majú rovnakú frekvenciu. Ich fázový posun voči sebe je však prípustný. Potom vektor zaťaženia v rovnici (26.69) (neuvažujeme interakciu s konštrukciou)

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\,\mathbf{p} = \mathbf{f} \tag{26.77}$$

sa zadáva v komplexnom tvare

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_{\max} e^{i\psi})e^{i\Omega t} = \mathbf{f}_{\max}(\cos\psi + i\sin\psi)e^{i\Omega t} = (\mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2)e^{i\Omega t} \tag{26.78}$$

kde

$\mathbf{f}_{\max}$ = amplitúda budiacej akustickej sily

Ω = budiaca kruhová frekvencia v rad/s = $2\pi f$

f = budiaca frekvencia v Hz

ψ = fázový posun sily v radiánoch

$\mathbf{f}_1$ = $\mathbf{f}_{\max}\cos\psi$ = reálna zložka budiacej akustickej sily

$\mathbf{f}_2$ = $\mathbf{f}_{\max}\sin\psi$ = imaginárna zložka budiacej akustickej sily

Účinkom budenia vzniknú v oblasti harmonické tlakové akustické zmeny s rovnakou frekvenciou ako je budiaca frekvencia Ω s prípadným fázovým posunom ϕ (účinkom tlmenia)

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_{\max} e^{i\phi})e^{i\Omega t} = \mathbf{p}_{\max}(\cos\phi + i\sin\phi)e^{i\Omega t} = (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)e^{i\Omega t} \tag{26.79}$$

kde

$\mathbf{p}_{\max}$ = globálny vektor tlakových amplitúd uzlových bodov

ϕ = fázový posun tlaku v radiánoch

$\mathbf{p}_1$ = $\mathbf{p}_{\max}\cos\phi$ = reálna zložka tlaku

$\mathbf{p}_2$ = $\mathbf{p}_{\max}\sin\phi$ = imaginárna zložka tlaku

Dosadením (26.79) a (26.78) do rovnice (26.77) dostávame

$$(-\Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{C} + \mathbf{K}(\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)e^{i\Omega t} = (\mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2)e^{i\Omega t} \tag{26.80}$$

a pretože závislosť oboch strán rovnice na čase ($e^{i\Omega t}$) je rovnaká, z rovnice vypadne a výsledná rovnica harmonického tlakového vlnenia je na čase nezávislá

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{C})(\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2) = (\mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2) \tag{26.81}$$

Možno ju po úprave zapísať aj v jednoduchom tvare

$$\mathbf{K}_c\mathbf{p}_c = \mathbf{f}_c \tag{26.82}$$

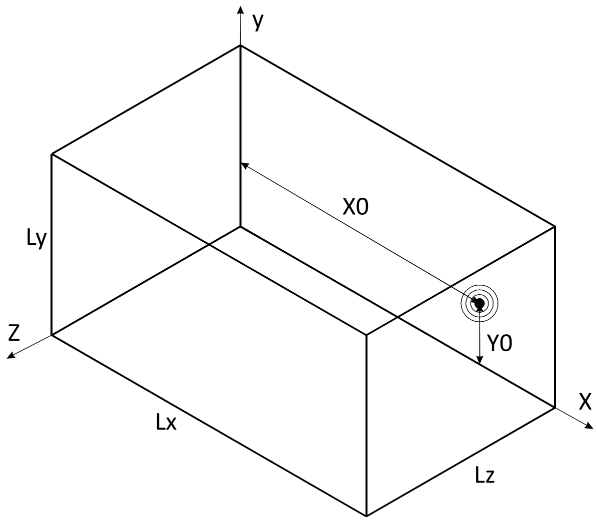
kde index c označuje komplexnú maticu resp. vektor. Takúto súastavu rovníc riešia programy MKP ako statickú úlohu, len s tým rozdielom, že sa používa komplexná aritmetika. Výsledky možno od programu požadovať v dvoch základných formách. Jednak vo forme (26.79) alebo vo forme $\mathbf{p}_{\max}$ a ϕ (t.j. amplitúda a fázový uhol – v stupňoch) tak, ako to definujú vzťahy v (26.79). Pre každý globálny stupeň voľnosti v tomto prípade dostávame

$$p_{\max} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \tag{26.83}$$

$$\phi = \arctan \frac{p_2}{p_1} \tag{26.84}$$

Na riešenie harmonickej analýzy možno využiť aj metódu superpozície vlastných tvarov, ktorej aplikácia je úplne analogická s jej využitím pri analýze harmonického kmitania pružných telies a podrobne je opísaná v našej práci [2].
Harmonická analýza sa často vykonáva tak, že sa zvolí frekvenčný interval, ktorý sa rozdelí na väčší počet frekvenčných hodnôt a v jednom výpočtovom behu programu sa vypočítajú a graficky analyzujú hľadané veličiny pre celý frekvenčný rozsah. Ukážeme si to v nasledujúcom príklade.

Príklad
Pravouhlá miestnosť (pozri obrázok) so zvukovo dokonale tuhými stenami má rozmery Lx = 5m, Ly = 2,5m, Lz = 3m. V miestnosti je umiestnený generátor zvuku vydávajúci čistý sínusový tón s frekvenciou f_0 = 300 Hz a tlakovou amplitúdou $p'_{\max}$ = 0,1412 Pa. Súradnice zdroja zvuku sú X0 = 4 m, Y0 = 1m, Z0 = 0. Vzduch v miestnosti má hustotu $\rho_0 = 1{,}21$ kg/m^3 a hodnota rýchlosti zvuku je $c_0 = 343$ m/s .
Určte ako sa v geometrickom strede miestnosti mení hladina akustického tlaku L_p pri zmene frekvencie zdroja od 300 do 400 Hz.



Vypočítajme najprv akú hodnotu L_p má zdroj zvuku. Pre hladinu akustického tlaku platí vzťah (26.3)

$$L_p = 20\log_{10}\frac{p'_{rms}}{p_0} = 20\log_{10}\frac{p'_{\max l}/\sqrt{2}}{p_0} = 20\log_{10}\frac{0{,}1414/\sqrt{2}}{20\cdot 10^{-6}} = 73{,}97 \text{ dB}$$

Teraz pomocou programu ANSYS v ineraktívnom móde určíme aké hodnoty L_p v geometrickom strede miestnosti vyvolá tento zdroj pri zmene jeho frekvencie v rozsahu od 300 do 400 Hz:

1. Názov úlohy
   File, Change Jobname, SPL miestnosti, OK;
2. Preferovať akustiku
   Preferences, ANSYS Fluid, OK;
3. Zadanie konečného prvku

Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, ANSYS Fluid, 3D acoustic 30, OK, Options, K2=Structure absent, OK, Close;

4. Referenčný akustický tlak

   Real Constants, Add/Edit/Delete, Add, OK, PREF=20e-6, OK, Close;

5. Vlastnosti média

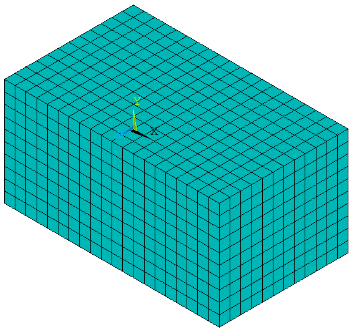
   Material Props, Material Models, Acoustics, Density, DENS=1.21, Sonic Velocity, SONC=343, OK, Material, Exit;

6. Tvorba geometrického modelu

   Modeling, Create, Volumes, Block, By Dimensions, X2=5, Y2=2.5, Z2=3, OK; (Kliknite ikonu Isometric View )

7. Sieť prvkov

   Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, All Lines, SIZE=0.25, OK;
   Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All;



8. Zistenie čísiel uzlov zdroja zvuku a geom. stredu miestnosti

   Napíšte do príkazového okna a Enterom vykonajte:
   node_zdroj=node(4,1,0)
   Napíšte do príkazového okna a Enterom vykonajte:
   node_stred=node(2.5,1.25,1.5)

9. Vypísanie čísiel uzlov

   Parameters, Scalar Parameters, Close; (node_zdroj=133, node_stred=2063)

10. Typ analýzy, jej parametre a výpočet

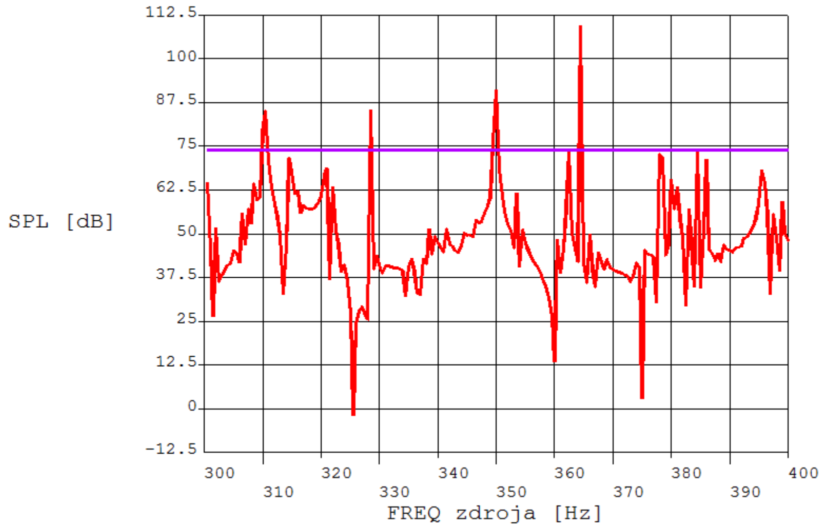
   Solution, Analysis Type, New Analysis, Harmonic, OK;
   Analysis Options, HROPT=Full,OK,OK;
   Load Step Opts, Time/frequenc, Freq and Substeps, HARFRG=300, 400, NSUBST=200, KBC=Stepped,OK;

11. Zadanie akustického zaťaženia a výpočet

   Define Loads, Apply, Fluid/ANSYS, Presure DOF, On Nodes, List of Items=133, OK, PRES=0.1, OK;
   SOLVE, Current LS, OK;

12. Graf priebehu hladiny akustického tlaku L_p v geom. strede miestnosti v závislosti od zmeny frekvencie zaťažovacieho zdroja (vyznačíme aj L_p zdroja)

   TimeHist Postproc, Zatvorte okno Variable Viewer;
   Napíšte do príkazového okna a Enterom vykonajte:
   nsol, 2, 2063,SPL,, SPL_v_strede
   Napíšte do príkazového okna a Enterom vykonajte:
   nsol, 2, 133,SPL,, SPL_zdroja
   Variable Viewer, Vyznačte riadky oboch uzlov, Kliknite ikonu Graph data ;



13. Finish;

26.7 Interakcia zvuku a konštrukcie

Väzba zvuku s konštrukciou sa v technickej praxi bežne vyskytuje, napr. kmitajúca membrána vytvára vlnu kmitajúceho tlaku (zvuk) a naopak, napr. rezonančná stojatá vlna zvuku vznikajúca v T-odbočke plynovodu je schopná rozkmitať okolité potrubie.

Konečné prvky, ktoré sme v predchádzajúcich častiach využívali na riešenie príkladov, boli štandartné, tlakovo formulované prvky s jediným stupňom voľnosti uzla – tlakom p', ktorého hodnoty v analyzovanej oblasti s určitými špeciálnymi fyzikálnymi vlastnosťami reprezentujú *akustické tlakové pole.* Podobne pri zaťaženom telese hovoríme o *mechanickom poli* (posunutí, pretvorení, napätí). Pokiaľ teda chceme riešiť interakciu mechanického a akustického poľa, teda dvoch fyzikálne rozdielnych polí, hovoríme o *zviazanej úlohe* (kap. 23).

27 Bibliografia

[1] Š. Benča, Výpočtové postupy MKP pri riešení lineárnych úloh mechaniky, http://www.1000knih.sk, 2006.

[2] Š. Benča, Riešenie nelineárnych pevnostných úloh pomocou MKP, http://www.1000knih.sk, 2009.

[3] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B., Mechanika kontinua, Praha: ACADEMIA, 2005.

[4] S. Krenk, Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[5] Wegner, J. L., Haddow, J.B., Elements of Continuum Mechanics and Thermodynamics, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[6] J. N. Reddy, An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, Oxford University Press, 2004.

[7] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Finite Element Method, Volume 2, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

[8] M. Bhatti, Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures, New York: Wiley, 2006.

[9] ANSYS, Theoretical Manual, Shell Element 93, Ansyc, Inc.

[10] Bonet, J., Wood, R. D., Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Second Edition, Cambridge: Cambridge U niversity Press, 2008.

[11] M. Zyczkowski, Combined Loadings in the Theory of Plasticity, Warszawa: PWN, 1981.

[12] de Souza Neto, E.A., Perič, D., Owen, D.R.J., Computational Methods for Plasticiry. Theory and Applications, Chichester: Wiley, 2008.

[13] P. Wriggers, Nonlinear Finite Element Methods, Berlin: Springer, 2008.

[14] Lewis, R.W., Nithiarasu, P., Seetharamu, K.N., Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow, Chichester: Wiley, 2004.

[15] Lienhardt, J.H., Lienhardt, J.H., A Heat Transfer Handbook, Cambridge: Phlogiston Press, 2011.

[16] K. J. Bathe, Finite Element Procedures, Englewood Cliffs: Prenice Hall, 1996.

[17] C. Zener, „Internal Friction in Solids I. Theory of Internal Friction in Reeds.,“ *Physical Review,* zv. 52, pp. 230-235, 1937.

[18] C. Zener, „Internal Friction in Solids II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction,“ *Physical Review,* zv. 53, pp. 90-99, 1938.

[19] Bazilevs Y., Takizawa K., Tezduyar T.E. , Computational Fluid-Structure interaction, Wiley, 2013.

[20] A. C. Polycarpou, Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics., Morgan & Claypool, 2006.

[21] A. Tirpák, Elektromagnetizmus, Iris, 2013.

[22] „URL: http://www.netdenizen.com/emagnet/solenoids/solenoidonaxis.htm,“ [Online].

[23] P. Wriggers, Computational Contact Mechanics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2006.