

6. Rozmerová syntéza rovinného mechanizmu 4R

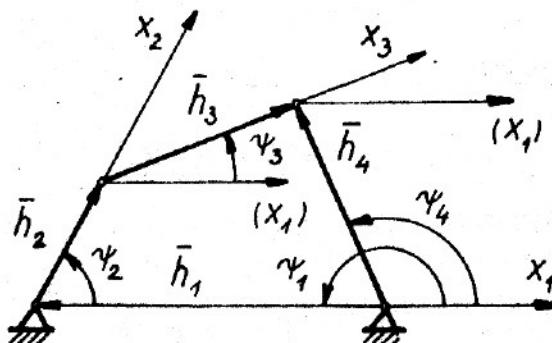
Cieľom syntézy mechanizmu je návrh takého mechanizmu, ktorého výstupný člen generuje vyžadované veličiny (priebeh súradníc polohy, rýchlosťí, zrýchlenia...).

Východiskom pre rozmerovú kolokačnú metódu bude Freudensteinova rovnica.

6.1 FREUDENSTEINOVA ROVNICA

Podľa TM(1.59) má vektorová rovnica uzavorenosti pre mechanizmus 4R z obr. 6.1 tvar

$$\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 - \bar{h}_4 = \bar{0} \quad (6.1)$$



Obr. 6.1
Mechanizmus 4R

Jednotkový vektor \bar{t}_2 na osi x_2 má exponenciálny tvar zápisu podľa Eule-
ra

$$e^{i\psi_2} = c \psi_2 + i s \psi_2 \quad (6.2)$$

kde

$$i^2 = -1 \quad (6.3)$$

potom polohový vektor \bar{h}_2 zapíšeme v tvare

$$\tilde{h}_2 = h_2 e^{i\psi_2} \quad (6.4)$$

Rovnicu (6.1) môžeme zapísat v tvare

$$h_1 c \psi_1 + h_2 c \psi_2 + h_3 c \psi_3 - h_4 c \psi_4 + \\ + i(h_1 s \psi_1 + h_2 s \psi_2 + h_3 s \psi_3 - h_4 s \psi_4) = 0 \quad (6.5)$$

Položme reálnu aj imaginárnu časť rovnú nulu a pre $\psi_1 = 180^\circ$ upravíme:

$$- h_1 + h_2 c \psi_2 + h_3 c \psi_3 - h_4 c \psi_4 = 0 \quad (6.6ab) \\ h_2 s \psi_2 + h_3 s \psi_3 - h_4 s \psi_4 = 0$$

Súradnicu ψ_3 eliminujeme, aby sme získali závislosť medzi vstupom ψ_2 a výstupom ψ_4 .

Rovnice (6.6ab) umocníme na druhú a sčítame, pričom nech

$$k_1 = \frac{h_1}{h_2}, \quad k_2 = \frac{h_1}{h_4}, \quad k_3 = \frac{h_2^2 - h_3^2 + h_4^2 + h_1^2}{2 h_2 h_4} \quad (6.7abc)$$

Po úprave dostaneme Freudensteinovu rovnicu

$$k_1 c \psi_4 - k_2 c \psi_1 + k_3 = \cos(\psi_2 - \psi_1) \quad (6.8)$$

z ktorej môžeme vypočítať súradnicu ψ_4 podľa danej hodnoty ψ_2 .

$$(\psi_4)_{1,2} = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) \quad (6.9)$$

$$A = c \psi_2 - k_1 - k_2 c \psi_2 + k_3 \quad (6.10abc)$$

$$B = -2 c \psi_2$$

$$C = k_1 - (1 + k_2) c \psi_2 + k_3$$

6.2 KOLOKAČNÁ METÓDA PRE $n < 5$ POLÔH

Ak máme dané tri polohy vstupného aj výstupného člena, teda súradnice

$$\psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}, \psi_{41}, \psi_{42}, \psi_{43}$$

potom môžeme vypočítať rozmery h_1, h_2, h_3, h_4 mechanizmu 4R, ktorý generuje dané polohy pomocou rovnice (6.8), pričom ju spíňajú všetky dané súradnice polohy.

Teda dostaneme sústavu lineárnych rovníc:

$$k_1 c \psi_{41} - k_2 c \psi_{21} + k_3 = c (\psi_{21} - \psi_{41})$$

$$k_1 c \psi_{42} - k_2 c \psi_{22} + k_3 = c (\psi_{22} - \psi_{42}) \quad (6.11abc)$$

$$k_1 c \psi_{43} - k_2 c \psi_{23} + k_3 = c (\psi_{23} - \psi_{43})$$

s neznámymi k_1, k_2, k_3 . Konkrétnie rozmery získame tak, že zvolíme veľkosť $h_2 = 1$ (dlžková jednotka), potom h_1 vypočítame zo (6.7a), h_4 vypočítame zo (6.7b) a h_3 zo (6.7c).

Príklad 6.1

Utvorte mechanizmus 4R, ktorého výstupný člen bude generovať funkciu $y = x^2$, pričom $\Delta x = 1$ pre vybrané 3 polohy vstupného člena, pričom $0 \leq x \leq 2$ (obr. 6.1).

Riešenie

Ak zvolíme veľkosť začiatočného a konečného uhla pootočenia vstupného člena, potom vypočítame druhú medzihodnotu podľa proporcionalného vzťahu medzi hodnotami premenných x, y podľa danej funkcie, teda pre zvolené hodnoty $\psi_{21} = 80^\circ, \psi_{23} = 175^\circ, \psi_{41} = 70^\circ, \psi_{43} = 190^\circ$ (tab. 6.1)

$$\psi_{23} - \psi_{21} = 95^\circ$$

je

$$(6.12ab)$$

$$\psi_{43} - \psi_{41} = 120^\circ$$

Globálne súradnice polohy členov U_2, U_4

Tabuľka 6.1

Poloha	x	y	% ψ_i	% ψ_{4i}	ψ_{2i}	ψ_{4i}
1	0	0	0	0	80	70
2	1	1	50	25	127,5	100
3	2	4	100	100	175	190

Po dosadení získaných hodnôt do rovnic (6.11abc) získame riešením

$$k_1 = 0,276, \quad k_2 = 0,229, \quad k_3 = 0,015 \quad (6.13)$$

Potom hľadaný mechanizmus bude mať rozmeria členov

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad h_2 = 4,36 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad h_3 = 1,03 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \\ h_4 &= 3,62 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{aligned} \quad (6.14)$$

6.3 KOLOKAČNÁ METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

Ak poznáme počet $i = 1, 2, \dots, p$ (celé kladné číslo) súradníci ψ_{2i} polohy vstupného člena a chceme, aby výstupný člen generoval vyžadované hodnoty ψ_{4i}^v , metódou najmenších štvorcov určíme hodnoty k_1, k_2, k_3 a odpovedajúce rozmeria h_1, h_2, h_3, h_4 tak, aby stredná kvadratická odchýlka

$$\delta = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (\psi_{4i}^v - \psi_{4i})^2 \quad (6.15)$$

bola minimálna, pričom súradnice ψ_{ni} bude generovať mechanizmus a vypočítanými rozmermi h_1, h_2, h_3, h_4 .

Pre každé i umocníme Freudensteinove rovnice (6.8) a sčítame

$$D = \sum_{i=1}^p \underbrace{\left[k_1 c \psi_{4i}^v - k_2 c \psi_{2i}^v + k_3 - c (\psi_{2i} - \psi_{4i}^v) \right]}_{}^2 \quad (6.26)$$

Výraz v rovnici (6.16) označme F_i .

Podmienkou pre δ_{\min} (6.13) je, aby

$$\frac{\partial D}{\partial k_1} = \frac{\partial D}{\partial k_2} = \frac{\partial D}{\partial k_3} = 0 \quad (6.17)$$

teda

$$\frac{\partial D}{\partial k_1} = \sum_{i=1}^p F_i \cdot \psi_{4i}^v = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial k_2} = \sum_{i=1}^p F_i \cdot \psi_{zi}^v = 0 \quad (6.18abc)$$

$$\frac{\partial D}{\partial k_3} = \sum_{i=1}^p F_i = 0$$

Rovnice (6.18abc) tvoria nehomogénnu sústavu algebrických rovníc lineárnych pre k_1, k_2, k_3 .

Príklad 6.2

Kolokačnou metódou najmenších štvorcov nájdite rozmeru členov mechanizmu 4R tak, aby výstupný člen generoval funkciu $y = \ln x$, pričom $0 < x \leq 10$ pre 10 polôh vstupného člena, keď $\Delta x = 1$ a aby boli uhly ψ_{zi} a ψ_{4i}^v v rozsahu od 0° do 100° (obr. 6.1).

Riešenie

Hodnoty x, y podľa danej funkcie pre $\Delta x = 1$ vymedzujú hodnoty uhlov ψ_{zi} a ψ_{4i}^v tak, aby boli $\psi_2 = 100^\circ$, $\psi_{4i}^v = 100^\circ$ (tab. 6.2).

Po dosadení ψ_{2i}, ψ_{4i}^v do rovníc (6.18abc) získame riešením

$$k_1 = 3,286, \quad k_2 = -4,847, \quad k_3 = 9,7 \quad (6.19)$$

a z rovníc (6.7abc) pre zvolenú hodnotu $h_2 = 1$ (dĺžková jednotka) bude

$$h_2 = 5,6272 \text{ d.j.}, \quad h_3 = 1,087 \text{ d.j.}, \quad h_4 = 6,4229 \text{ d.j.} \quad (6.20)$$

Hodnoty globálnych súradníc polohy členov U_2, U_4
pre 10 polôh

Tabuľka 6.2

x	y	%x	%y	ψ_{2i} (rad)	ψ_{4i}^v (rad)
1	0,0	10	0	0,1	0
2	0,6	20	30,1	0,3	0,5
3	1,1	30	47,7	0,5	0,8
4	1,3	40	60,2	0,7	1,0
5	1,6	50	69,9	0,8	1,2
6	1,7	60	77,8	1,0	1,3
7	1,9	70	89,3	1,2	1,4
8	2,0	80	90,3	1,4	1,5
9	2,2	90	95,4	1,5	1,6
10	2,3	100	100	1,7	1,7

6.4 BLOCHOVA METÓDA

Ak treba pre dané hodnoty kinematických veličín $\psi_2, \dot{\psi}_2, \ddot{\psi}_2$ hnacieho člena a odpovedajúce hodnoty $\psi_4, \dot{\psi}_4, \ddot{\psi}_4$ výstupného člena mechanizmu 4R vypočítať vyhovujúce rozmery h_1, h_2, h_3, h_4 členov, potom napišeme rovnici (6.1) v komplexnom tvaru

$$h_1 e^{i\psi_1} + h_2 e^{i\psi_2} + h_3 e^{i\psi_3} = h_4 e^{i\psi_4} \quad (6.21)$$

Rovnicu (6.21) zderivujeme podľa času

$$i h_2 \dot{\psi}_2 e^{i\psi_2} + i h_3 \dot{\psi}_3 e^{i\psi_3} = i h_4 \dot{\psi}_4 e^{i\psi_4} \quad (6.22)$$

Rovnicu (6.22) tiež zderivujeme podľa času

$$\begin{aligned} i h_2 (\dot{\psi}_2^2 + i \ddot{\psi}_2) e^{i\psi_2} + i h_3 (\dot{\psi}_3^2 + i \ddot{\psi}_3) e^{i\psi_3} &= \\ = i h_4 (\dot{\psi}_4^2 + i \ddot{\psi}_4) e^{i\psi_4} & \end{aligned} \quad (6.23)$$

Označme $\dot{\psi}_i = \omega_i$, $\ddot{\psi}_i = \alpha_i$ a prepíšme rovnice (6.21), (6.22), (6.23) do tvaru

$$\begin{aligned} \bar{h}_2 + \bar{h}_3 - \bar{h}_4 &= -\bar{h}_1 \\ \omega_2 \bar{h}_2 + \omega_3 \bar{h}_3 - \omega_4 \bar{h}_4 &= \bar{\sigma} \\ (\omega_2^2 + i\alpha_2) \bar{h}_2 + (\omega_3^2 + i\alpha_3) \bar{h}_3 - (\omega_3^2 - i\alpha_4) \bar{h}_4 &= \bar{\sigma} \end{aligned} \quad (6.24abc)$$

Rovnice (6.24abc) tvoria nehomogénny systém lineárnych algebrických rovnia pre neznáme \bar{h}_2 , \bar{h}_3 , \bar{h}_4 keď položíme $h_1 = 1$.