

## 4. Maticové metódy kinematickej analýzy SVT

Základný význam pre celý rad maticových metód kinematickej aj dynamickej analýzy a syntézy majú homogénne transformácie, ktoré používame na opis polohy a orientácie členov SVT. Pre potreby vizuálnych systémov dávajú homogénne transformácie do súvislosti globálnej polohu členov v kartéziánskych súradničach s lokálnou polohou členov v spojeniach.

Každý člen má lokálny súradnicový systém, pričom ak poznáme opis polohy a orientácie člena  $U_i$  voči  $U_j$ , homogénna transformácia umožňuje aj inverzny opis.

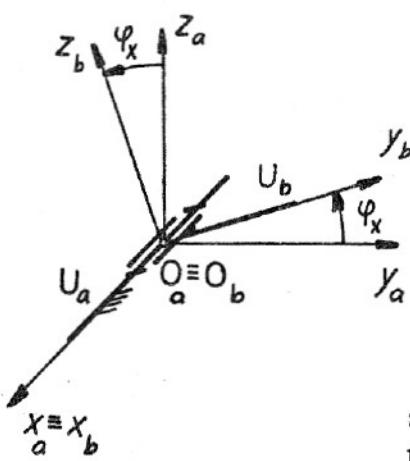
Transformácie môžeme interpretovať ako postupnosť základných rotácií a posuvov, ktoré podľa poradia poskytujú lokálnu resp. globálnu transformáciu.

Homogénne transformácie opisujú súradnicové systémy spravidla pomocou pravouhlých priemetov s goniometrickými funkciami uhlov, pričom všeobecná transformačná matica pootočenia umožňuje opis pomocou vektora a uhla pootočenia.

V kinematickej analýze priestorových SVT budeme využívať maticovú metódu rezu s lokálnymi súradnicami polohy, ktorá je základom pre ďalšie metódy v analýze aj syntéze priestorových a rovinnych sústav viazaných telies, najmä numerických, ktoré umožňujú priame využitie počítača.

### Príklad 4.1

Podľa teoretického úvodu z TM časť 4.1 odvodte transformačnú maticu  $T_{Z4}(\varphi_x)$  danú vzťahom TM(4.11d)



Obr. 4.1

Rotačné spojenie telies  $U_b$ ,  $U_a$

### Riešenie

Teleso  $U_a$  reprezentuje súradnicový systém  $O_a(x_a, y_a, z_a)$  a teleso  $U_b$  rotáčne spojené s telesom  $U_a$  zasa lokálny systém  $U_b(x_b, y_b, z_b)$ , pričom  $x_a \equiv x_b$ ,  $O_a \equiv O_b$ , teda vo všeobecnej transformačnej matici

$$TM(4.8) \quad \boldsymbol{\varphi}_{ab} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{ab}, \bar{\mathbf{r}}_{ab} \\ 0, 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

bude

$$\bar{\mathbf{r}}_{ab} = \bar{0}$$

Vypočítajme prvky  $a_{ij}$  matice  $\boldsymbol{\varphi}_{ab}$  smerových kosínusov, ktorá má podľa TM(4.5) tvar

$$\boldsymbol{\varphi}_{ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Podľa TM(4.1k)

$$a_{11} = c \alpha_{11} = \bar{\mathbf{i}}_a \cdot \bar{\mathbf{i}}_b = \cos 0^\circ = 1$$

analogicky

$$a_{21} = \bar{\mathbf{j}}_a \cdot \bar{\mathbf{i}}_b = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$a_{31} = \bar{\mathbf{k}}_a \cdot \bar{\mathbf{i}}_b = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$a_{12} = \bar{\mathbf{i}}_a \cdot \bar{\mathbf{j}}_b = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$a_{22} = \bar{\mathbf{j}}_a \cdot \bar{\mathbf{j}}_b = \cos \varphi_x$$

$$a_{32} = \bar{\mathbf{k}}_a \cdot \bar{\mathbf{j}}_b = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_x \right) = \sin \varphi_x \quad (4.3)$$

$$a_{13} = \bar{\mathbf{i}}_a \cdot \bar{\mathbf{k}}_b = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$a_{23} = \bar{\mathbf{j}}_a \cdot \bar{\mathbf{k}}_b = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi_x \right) = -\sin \varphi_x$$

$$a_{33} = \bar{\mathbf{k}}_a \cdot \bar{\mathbf{k}}_b = \cos \varphi_x$$

Po dosadení prvkov  $a_{ij}$  z rovníc (4.3) do (4.2) a potom do (4.1) dostaneme naozaj transformačnú maticu  $\tilde{T}_{z4}(\varphi_x)$

$$\tilde{T}_{z4}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi_x & -s\varphi_x & 0 \\ 0 & s\varphi_x & c\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

#### 4.1 LOKÁLNA A GLOBÁLNA TRANSFORMÁCIA

Pri lokálnej transformácii robíme ďalšiu transformáciu voči osiam súradnicovo systému z predošej transformácie, pričom transformačné matice násobíme zľava doprava (postmultiplikácia) tak, ako sme násobili transformačné matice vo vzťahu TM(4.16)

$$\tilde{T}_{13} = \tilde{T}_{12} \tilde{T}_{23} \quad (4.5)$$

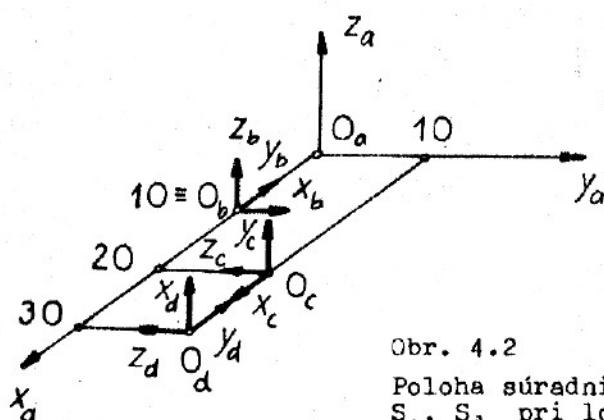
Pri globálnej transformácii robíme všetky transformácie voči osiam základného vzťažného súradnicového systému, pričom transformačné matice násobíme sprava dolava (premultiplikácia) (príklad 4.2). Transformačné matice základných pohybov sú zámenné, teda nezáleží na poradí ich násobenia, ak transformácie prislúchajú tej istej osi.

#### Príklad 4.2

Pre dané transformačné matice  $\tilde{T}_{ab}$  resp.  $\tilde{T}_{ac}$ , ktoré reprezentujú polohu súradnicového systému  $S_b$  resp.  $S_c$  pri lokálnej resp. globálnej transformácii nájdite polohu súradnicového systému  $S_d$  resp.  $S_e$  (obr. 4.2).

$$\tilde{T}_{ab} = \tilde{T}_{z6} (\varphi_z = 90^\circ) \quad \tilde{T}_{z1} (x = 10) \quad (4.6)$$

$$\tilde{T}_{ac} = \tilde{T}_{z4} (\varphi_x = 90^\circ) \quad \tilde{T}_{z2} (y = 10) \quad \tilde{T}_{21} (x = 20) \quad (4.7)$$



Obr. 4.2

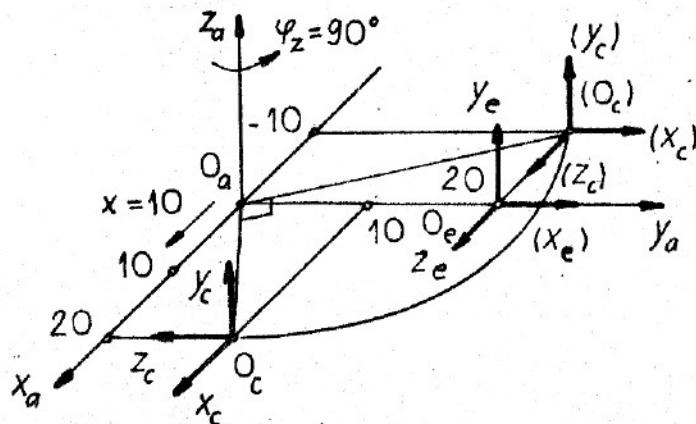
Poloha súradnicových systémov  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ ,  $S_d$  pri lokálnej transformácii

### Riešenie

Lokálna transformácia podľa obr. 4.2 bude

$$\tilde{r}_{ad} = \tilde{r}_{ac} \tilde{r}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Globálna transformácia podľa obr. 4.3 bude



Obr. 4.3

Poloha súradnicových systémov  $S_a$ ,  $S_c$ ,  $(S_c)$ ,  $S_e$  pri globálnej transformácii

$$\tilde{r}_{ae} = \tilde{r}_{ab} \tilde{r}_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Ak uskutočníme globálnu transformáciu matíc  $\mathcal{T}_{ac}$ ,  $\mathcal{T}_{ab}$  v opačnom poradí, dostaneme maticu

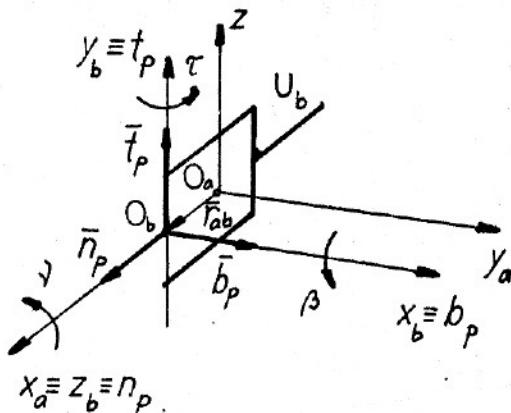
$$\mathcal{T}_{ad} = \mathcal{T}_{ac} \mathcal{T}_{ab} \quad (4.10)$$

#### 4.1.1 Vektor prístupu $\bar{n}_p$ a vektor orientácie $\bar{t}_p$

Na opis polohy a orientácie výstupného (pracovného) člena mechanizmu PReM slúži jeho lokálny súradnicový systém, ktorého jednotkové vektorové prislúchajúce osiam  $x_b$ ,  $y_b$ ,  $z_b$  označíme  $\bar{b}_p$ ,  $\bar{t}_p$ ,  $\bar{n}_p$  (obr. 4.4), teda

$$\bar{t}_p \in y_b, \bar{n}_p \in z_b, \bar{b}_p \in x_b \quad (4.11)$$

pričom  $\bar{n}_p$  je vektor prístupu a  $\bar{t}_p$  vektor orientácie.



Obr. 4.4

Orientácia výstupného člena pomocou tangenty  $t$ , normály  $n$  a binormály  $b$

Označme  $\bar{r} = \bar{r}_{ab}$  sprievodíč začiatku  $O_b$  voči  $O_a$ , potom pomocou jednotkových vektorov  $\bar{b}_p$ ,  $\bar{t}_p$ ,  $\bar{n}_p$  so súradnicami vo vzťažnom priestore a utvoríme transformačnú maticu

$$\mathcal{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \bar{b}_p & \bar{t}_p & \bar{n}_p & \bar{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

#### Príklad 4.3

Napište transformačnú maticu prislúchajúcu uhlom pootočenia  $\gamma$  okolo  $t_p$ ,  $\gamma$  okolo  $n_p$ ,  $\beta$  okolo  $b_p$  (obr. 4.4).

### Riešenie

Pomocou transformačných matic základných pohybov vzhľadom na súradnicové osi môžeme písť:

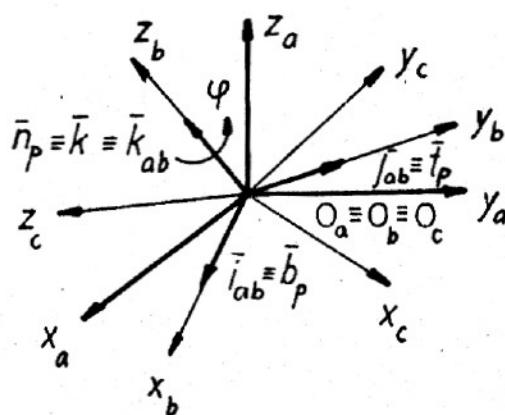
$$\mathcal{T}_{RNB}(\tau, \gamma, \beta) = \mathcal{T}_{z_5}(\tau) \mathcal{T}_{z_6}(\gamma) \mathcal{T}_{z_4}(\beta) \quad (4.13)$$

### 4.2 VŠEOBECNÁ TRANSFORMAČNÁ MATICA POOTOČENIA

Nározdiel od transformačných matic  $\mathcal{T}_{z_4}$ ,  $\mathcal{T}_{z_5}$ ,  $\mathcal{T}_{z_6}$ , ktoré sme ako operátory aplikovali na matice vzájomnej polohy telies b : a alebo na polohové vektory bodov bude podľa [26]  $\mathcal{T}_a(\bar{k}, \varphi)$  všeobecná transformačná matica pootočenia súradnicového systému ľubovoľného telesa okolo zvoleného vektora  $\bar{k}$  (obr. 4.5), pričom nech

$$\bar{k} = \bar{n}_p = \bar{k}_{ab} \quad (4.14)$$

$$\bar{k} = n_{px} \bar{I}_a + n_{py} \bar{J}_a + n_{pz} \bar{k}_a \quad (4.15)$$



Obr. 4.5

Vzájomná poloha súradnicových systémov  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  a vektora  $\bar{k}$

Transformačnú maticu  $\mathcal{T}_a(\bar{k}, \varphi)$  získame na základe úvahy, že rotácia telesa  $C(\mathcal{T}_{ac})$  okolo  $\bar{k}$  (voči a) je ekvivalentná rotácii telesa  $C(\mathcal{T}_{bc})$  okolo osi  $z_b$  voči telesu B (transformovanej do a), teda

$$\mathcal{T}_a(\bar{k}, \varphi) = \begin{bmatrix} k_x k_x v \varphi + c \varphi & k_y k_x v \varphi - k_z s \varphi & k_z k_x v \varphi - k_y s \varphi & 0 \\ k_x k_y v \varphi + k_z \varphi & k_y k_y v \varphi + c \varphi & k_z k_y v \varphi - k_y s \varphi & 0 \\ k_x k_z v \varphi - k_y s \varphi & k_y k_z c \varphi + k_x s \varphi & k_z k_z v \varphi + c \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

kde

$$v \varphi = 1 - c \varphi \quad (4.17)$$

Z operátora  $\mathcal{T}_a(\bar{k}, \varphi)$  môžeme získať hodnotu základnej transformačnej maticu  $\mathcal{T}_{z4}$ ,  $\mathcal{T}_{z5}$ ,  $\mathcal{T}_{z6}$ .

#### Príklad 4.4

Odvodte transformačnú matice  $\mathcal{T}_{z6}(\varphi_z)$  zo všeobecnej transformačnej matice pootočenia (4.16).

#### Riešenie

Podľa obr. 4.5 je  $k_x = n_{px} = 0$ , potom prvk  $a_{11}$  matice  $\mathcal{T}_a(\bar{k}, \varphi)$ , ktorý je zároveň prvk  $a_{11}$  matice smerových kosínusov (4.2) bude

$$a_{11} c \varphi = c \varphi_z$$

analogicky  $k_y = k_z = n_{px} = n_{py} = 0$ , teda

$$a_{21} = s \varphi = s \varphi_z$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{21} = -s \varphi_z$$

$$a_{22} = c \varphi_z$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{13} = 0$$

$$a_{23} = 0$$

$$a_{33} = 1$$

Označme získané prvky  $a_{ij}$  vzťahom (4.18)

Porovnaním prvkov  $a_{ij}$  zo vzťahu (4.18) s prvkami matice  $\mathcal{T}_{z6}(\varphi_z)$  podľa TM(4.11f) môžeme konštatovať, že sú rovnaké, teda odvodili sme transformačnú maticu

$$\mathcal{T}_{z6}(\varphi_z) = \begin{bmatrix} c \varphi_z & -s \varphi_z & 0 & 0 \\ s \varphi_z & c \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

#### 4.3 HARTENBERGOVA-DENAVITOVA TRANSFORMAČNÁ MATICA

Nech je  $U_0$  základný vzťažný člen otvoreného mechanizmu PRaM s rotačnými R, alebo posuvnými P spojeniami susedných členov a  $U_{u-1}$  výstupný pracovný člen (spojený len s členom  $U_{u-2}$ ). Označme členy  $U_i$ , pričom ich počet bude u

$$U_i, \quad i = 0, 1, \dots, u-1 \quad (4.20)$$

spojenia (R, P)

$$S_i, \quad i = 1, 2, \dots, u-1 \quad (4.21)$$

Postup, ktorým získame prvky  $a_{ij}$  HD transformačnej matici je v časti TM 4.3.1. V ďalšom ho po doplnení uvedieme pre OM s R spojeniami resp. pre OM s R a P spojeniami.

##### 4.3.1 Otvorené mechanizmy s R spojeniami

V OM len s R spojeniami členov označme  $\alpha_i$  transformačné matice vzájomnej polohy členov  $U_{i-1}, U_i$ , s prvkami, ktoré určíme podľa Hartenbergovej Denavitovej metodiky [6]. Východiskom je axonometrická kinematická schéma OM, teda sú známe rozmery členov, počet členov a spojení a ich vzájomná poloha v priestore. Po označení členov a spojení podľa (4.20), (4.21):

1. Označme os  $z_i$  (os rotácie) spojenia  $S_{i+1}$  telies  $U_i, U_{i+1}$  (obr. 4.6ab)

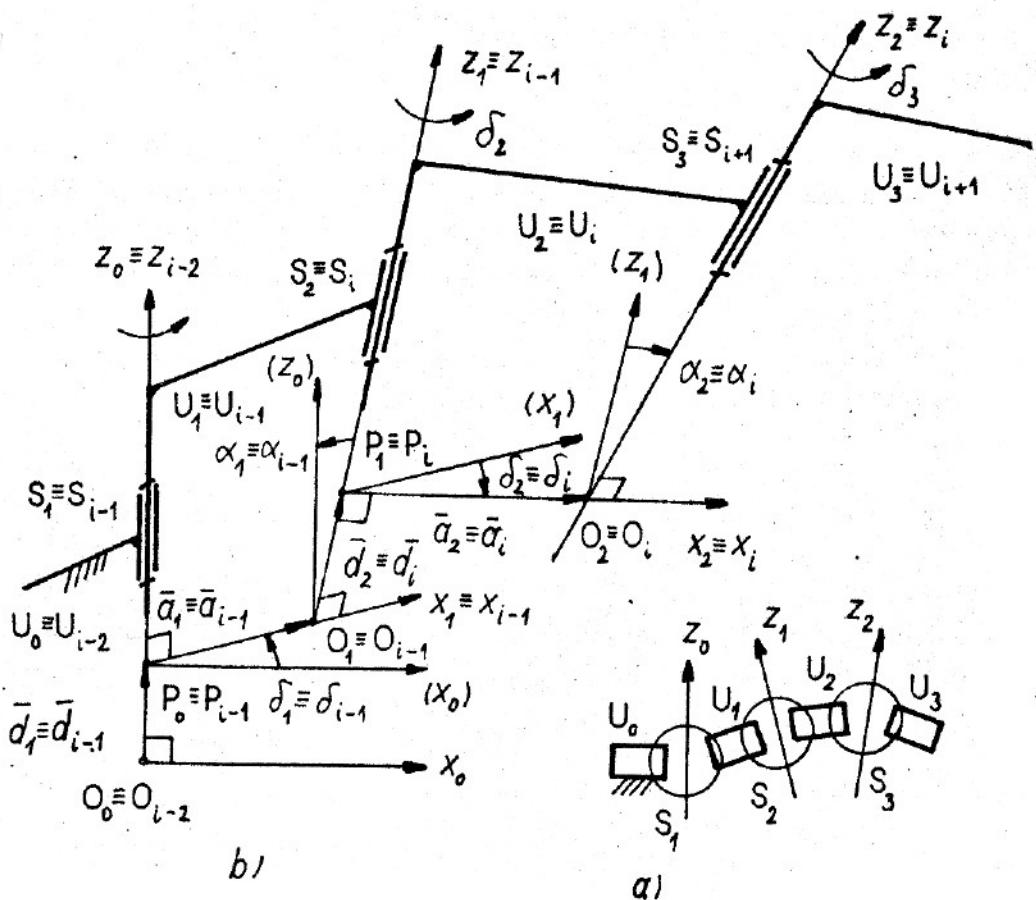
$$z_i, \quad i = 0, 1, \dots, u-1 \quad (4.22)$$

Na výstupnom pracovnom  $U_{u-1}$  zvolíme os  $z_{u-1}$  ľubovoľne. Orientáciu osí  $z_i$  zvolíme ľubovoľne.

2. Vyznačíme osi  $x_i$  s ľubovoľnou orientáciou, pritom to budú spoločné normálne osi  $z_{i-1}, z_i$ , teda

$$x_i \perp z_{i-1}, z_i \quad (4.23)$$

pričom začiatok  $O_i$  lokálneho súradnicového systému  $S_{oi}$  na telesse  $U_i$  bude



Obr. 4.6

a) číslovanie členov, b) prvky HD transformačnej metice

$$O_i \equiv x_i \times z_i \quad (4.24)$$

a priesečník  $O_o$  zvolíme ľubovoľne.

Označme  $P_{i-1}$  priesečník osí  $x_i, z_{i-1}$

$$P_{i-1} \equiv x_i \times z_{i-1} \quad (4.25)$$

a) pre mimobežné osi  $z_{i-1}$ , je os  $x_i$  ich transverzála (obsahuje najkratšiu priečku),

b) pre rôznobežné osi  $z_{i-1}, z_i$  prechádza os  $x_i$  ich priesečníkom

$$O_i \equiv P_{i-1} \quad (4.26)$$

c) pre rovnobežné a totožné osi  $z_{i-1}, z_i$  zvolíme priesečník  $O_i$  ľubovoľne, pričom platí (4.23), (4.24).

3. Označme  $\delta_i$  veľkosti uhlov

$$\delta_i = \varphi(x_{i-1}, x_i) \quad (4.27)$$

a v OM vyznačme orientované uhly

$$\bar{\delta}_i = \delta_i E_{i-1} \quad (4.28)$$

4. Označme  $d_i$  dĺžky úsečiek

$$d_i = \overline{O_{i-1} P_{i-1}} \quad (4.29)$$

V prípade, že sú osi  $z_{i-1}$ ,  $z_i$  rovnobežné resp. totožné, spravidla zvolíme začiatok  $O_i \equiv x_i$   $x \equiv z_i$  tak, aby dĺžka  $d_i$  bola nulová.

V OM vyznačíme orientované úsečky

$$\bar{d}_i = d_i E_{i-1} \quad (4.30)$$

5. Označme  $a_i$  dĺžky úsečiek

$$a_i = \overline{P_{i-1} O_i} \quad (4.31)$$

a v OM vyznačíme orientované úsečky

$$\bar{a}_i = a_i T_i \quad (4.32)$$

6. Označíme  $\alpha_i$  veľkosti uhlov

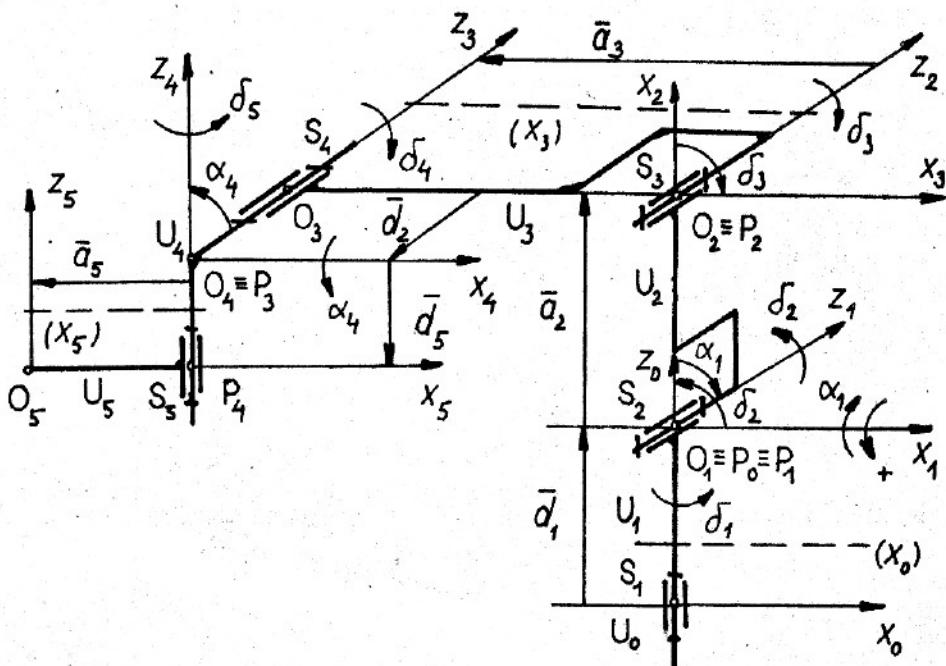
$$\alpha_i = \varphi(z_{i-1}, z_i) \quad (4.33)$$

a v OM vyznačíme orientované uhly

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i T_i \quad (4.34)$$

#### Priklad 4.5

V kinematickej schéme priemyselného robota SPR-10 z obr. 4.7 vyznačte Hartenbergove-Denavitove parametre a zapíšte ich do tab. 4.1.



Obr. 4.7

Kinematická schéma OM SPR - 10 s prvkami  
pre HD transformačné matice

### Riešenie

Podľa časti 4.3.1 určíme pre členy  $U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  začiatočné hodnoty velkostí  $\delta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$  s príslušnými znamienkami, pričom premenlivé hodnoty parametrov  $\delta_i$  označíme skratkou var, obr. 4.7, tab. 4.1.

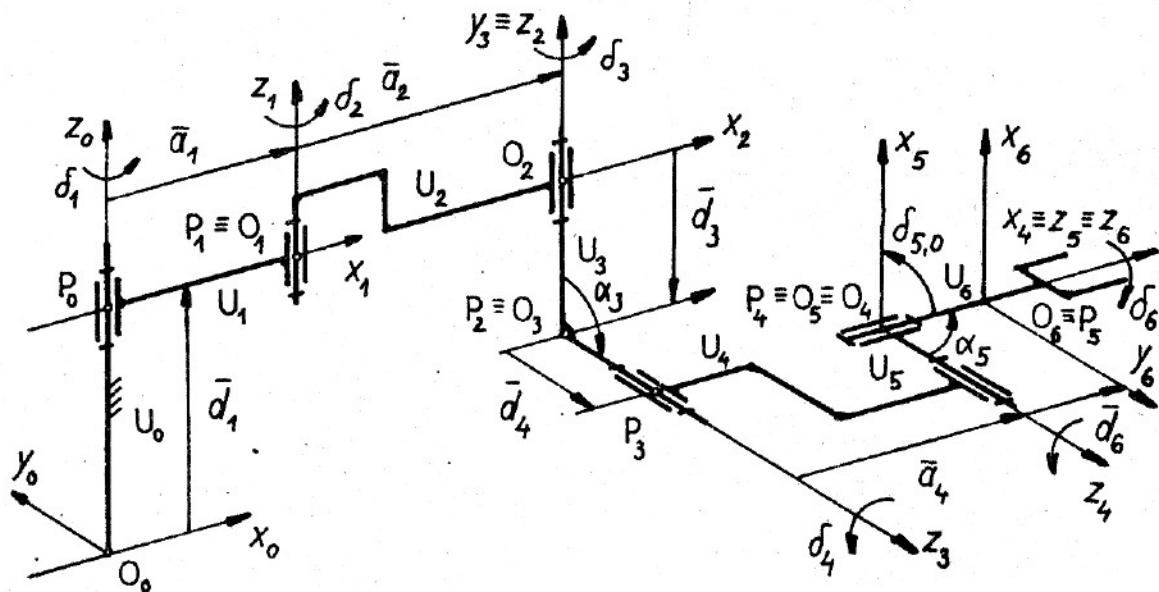
Prvky pre Hartenbergove-Denavitove transformačné maticice otvoreného mechanizmu SPR-10

Tabuľka 4.1

$U_i$	$S_i$	$\delta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0-1	R	var	0°	$d_1$	0
2	R	var	-90°	0	$a_2$
3	R	var	90°	0	$-a_3$
4	R	var	0	$-d_4$	0
5	R	var	0	$-d_5$	$-a_5$

Príklad 4.6

V kinematickej schéme priemyselného robota MR1 z obr. 4.8 vyznačte Hartenbergove-Denavitové parametre a zapíšte ich do tab. 4.2.



Obr. 4.8

Kinematická schéma OM MR-1 s prvkami pre HD transformačné matice

Prvky pre HD transformačné matice otvoreného mechanizmu MR-1

Tabuľka 4.2

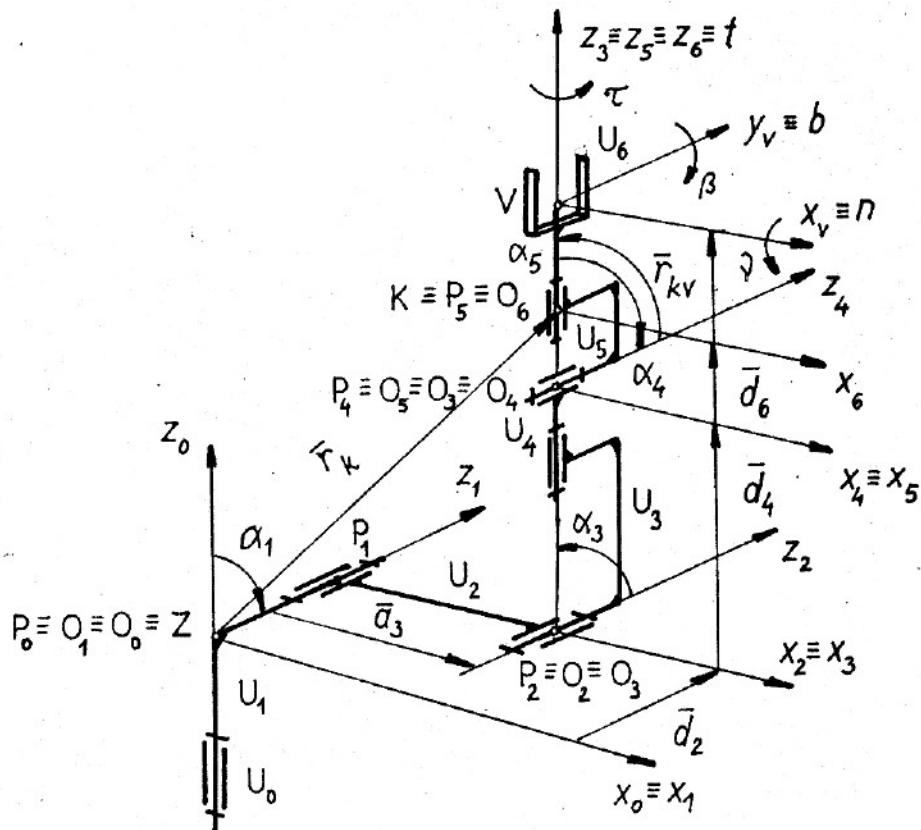
$U_i$	$S_i$	$\delta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0-1	R	var.	$0^\circ$	$d_1$	$a$
2	R	var.	$0^\circ$	0	$a$
3	R	var.	$0^\circ$	$d_3$	$90^\circ$
4	R	var.	$0^\circ$	$d_4$	$a$
5	R	var.	$90^\circ$	0	$0$
6	R	var.	$0^\circ$	$d_6$	$0$

Riešenie

Postupujeme analogicky ako v príklade 4.5.

Príklad 4.7

V kinematickej schéme priemyselného robota PUMA z obr. 4.9 vyznačte Hartenbergove-Denavitove parametre a zapíšte ich do tabuľky.

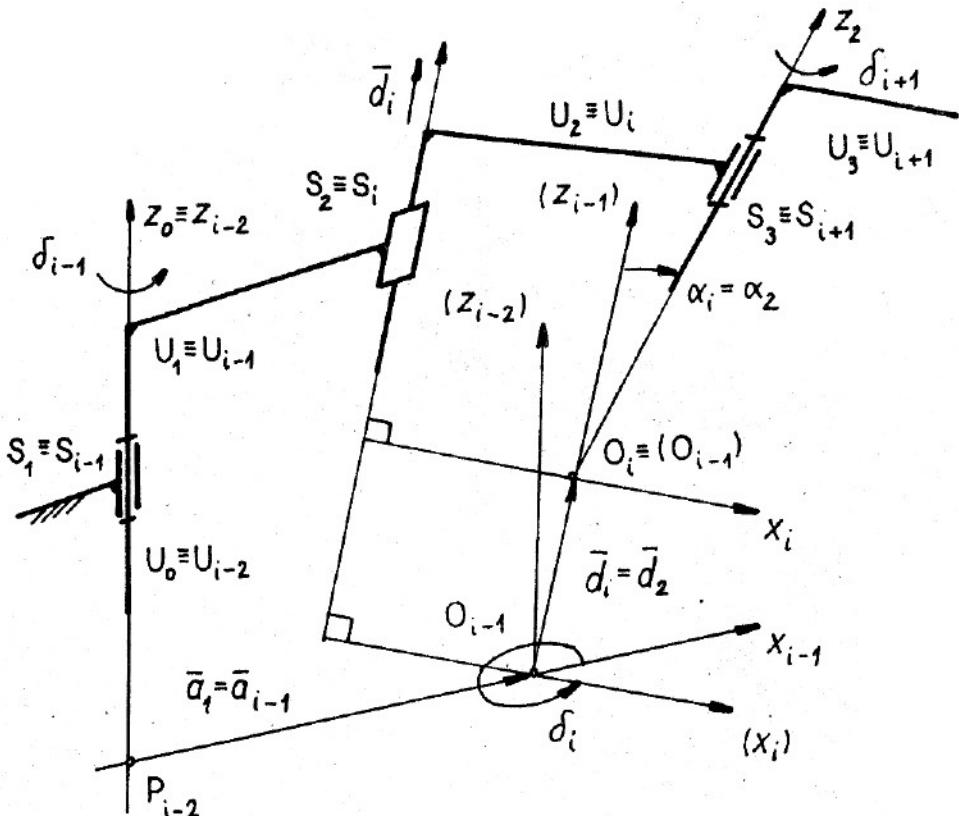


Obr. 4.9  
Kinematická schéma OM PUMA

#### 4.3.2 Otvorené mechanizmy s P spojením

Ak sú v OM členy  $U_{i-1}$ ,  $U_i$  spojené P spojením, potom poloha osi  $z_{i-1}$  patrívaca spojeniu  $S_i$  nie je definovaná, pričom parameter je premenlivý (var) a jeho orientáciu určuje pohyb telesa  $U_i$  voči  $U_{i-1}$ . Parameter  $s_i$  v tomto prípade nemá taký význam ako pri R spojení a kladieme ho spravidla rovny nule, obr. 4.10.

Ak začiatok  $O_{i-1}$  lokálneho súradnicového systému na člene  $U_{i-1}$  (spojeného P spojením s členom  $U_i$ ) stotožníme so začiatkom  $O_i$  na nasledujúcim



Obr. 4.10

Prvky  $\delta_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$  pre HD transformačné matice v OM s rotačnými  $i^R$  a posuvnými P spojeniami

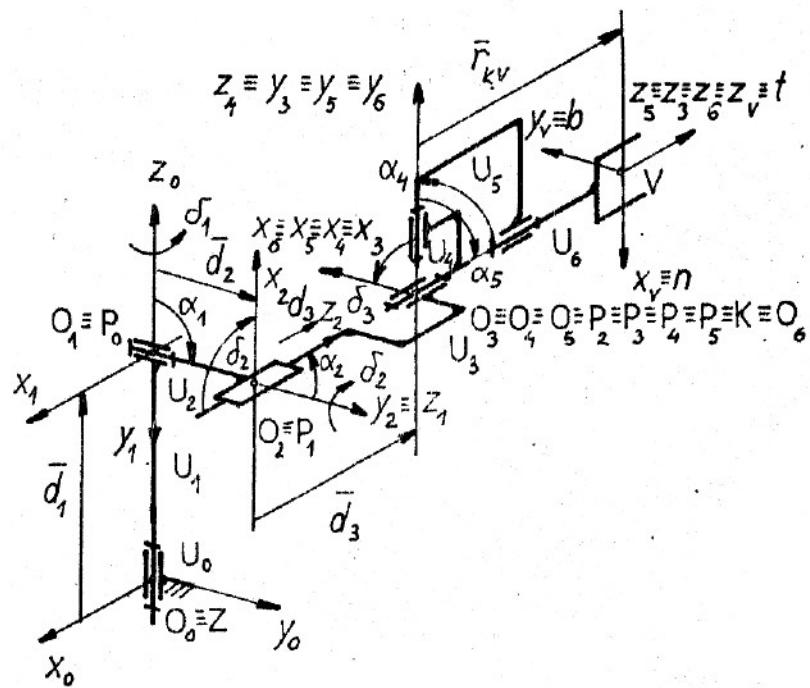
člene U ( $O_i$  získame ako priesečník tranverzálny  $x_{i-1}$  osí  $z_{i-2}$ ,  $z_i$ ), potom bude veľkosť  $d_i = 0$ , obr. 4.10.

#### Príklad 4.8

V kinematickej schéme OM priemyselného robota Stanford z obr. 4.11 vyznačte Hartenbergove-Danevitove parametre a zapíšte ich do tabuľky 4.3.

#### Riešenie

Postupujeme analogicky ako v príklade 4.5.



Obr. 4.11

Kinematická schéma otvoreného mechanizmu  
Stanford

Prvky pre HD transformačné matice otvoreného  
mechanizmu Stanford

Tabuľka 4.3

$U_i$	$S_i$	$\delta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	
0-1	R	var.	$0^\circ$	$d_1$	0	$-90^\circ$
2	R	var.	$-90^\circ$	$d_2$	0	$90^\circ$
3	R	v	$-90^\circ$ var.	$d_3$	0	$0^\circ$
4	R	var.	$0^\circ$	0	0	$-90^\circ$
5	R	var.	$0^\circ$	0	0	$90^\circ$
6	R	var.	$0^\circ$	0	0	$0^\circ$

4.3.3 HD transformačné matice  $\alpha_i$   
pre R a P spojenia členov  
 $U_{i-1}, U_i$

Podľa časti 4.3.1 hude Hartenbergova-Denavitova transformačná matica R spojenie členov  $U_{i-1}, U_i$  funkciou štyroch parametrov  $\delta_i, d_i, a_i, \alpha_i$  podľa základných typov premiestnení

$$\alpha_i = T_{i-1,i} = T_{z6}(\delta_i) T_{z3}(d_i) T_{z1}(a_i) T_{z4}(\alpha_i) \quad (4.35)$$

a po vynásobení príslušných matíc

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} c\delta_i & -s\delta_i c\alpha_i & s\delta_i s\alpha_i & a_i c\delta_i \\ s\delta_i & c\delta_i c\alpha_i & -c\delta_i s\alpha_i & a_i s\delta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

HD transformačnú maticu P spojenia členov  $Z_{i-1}, U_i$  dostaneme z (4.36) pre  $a_i = 0$ .

#### 4.4 POLOHY ČLENOV OTVORENÉHO MECHANIZMU

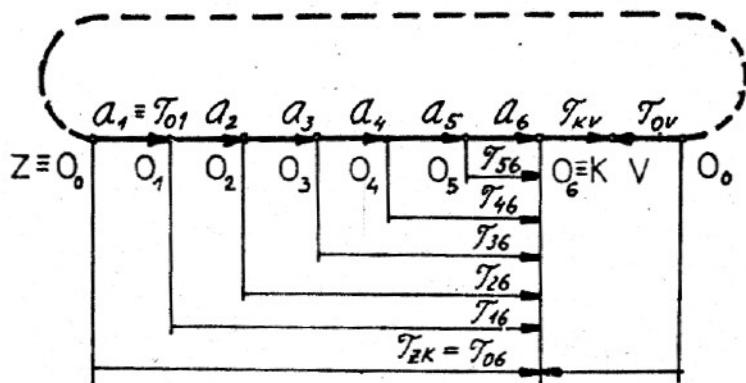
Orientovaný graf transformácií pre OM z obr. 4.11 s členmi  $U_i, i = 0, 1, \dots, 6$  je na obr. 4.12, pričom  $K \equiv O_6$  je začiatok lokálneho súradnicového systému na koncovom člene  $U_6$  a  $V$  je začiatok lokálneho súradnicového systému repéra  $V(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ .

Podľa obr. 4.12 je

$$T_{zk} \equiv T_{06} \equiv \prod_{i=1}^6 T_{i-1,i} = \prod_{i=1}^6 \alpha_i \quad (4.37)$$

$$T_{OV} = T_{ZK} T_{KV} \quad (4.38)$$

Ak pre zjednodušenie výrazov položíme  $K \equiv V$ , potom podľa (4.12) za predpokladu, že vzťažné telo  $a \equiv U_0$ , výstupný člen  $b \equiv U_6$ ,  $\bar{r} = \overline{O_0 K} = (x_k, y_k, z_k)$  dostaneme základnú maticovú rovnicu polohy a orientáciu výstupného člena OM



Obr. 4.12  
Orientovaný graf transformácií v OM

$$\mathcal{T}_{ZK} \equiv \mathcal{T}_6 = \begin{bmatrix} b_{px} & t_{px} & n_{px} & x_k \\ b_{py} & t_{py} & n_{py} & y_k \\ b_{pz} & t_{pz} & n_{pz} & z_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Ak vyčíslime súčiny matic v rovnici (4.37) a porovnáme odpovedajúce si prvky, dostaneme skalárne rovnice polohy a orientácie výstupného člena OM.

Teda pre dané nezávislé lokálne súradnice polohy  $q_{ni}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  kde  $n$  je pohyblivosť OM z rovníc polohy a orientácie zíslame súradnice polohy aj orientácie výstupného člena OM voči základnému vzťažnému priestoru.

Ak je známa poloha výstupného člena OM, teda poznáme prvky matice  $\mathcal{T}_6$  (4.39) a máme určiť, aké hodnoty majú pre túto polohu nezávislé lokálne súradnice  $\bar{\varphi}_n = [\varphi_{n1}, \dots, \varphi_{nn}]$ , potom riešime inverznú úlohu polohy členov OM. Východiskom je maticová rovnica polohy podľa (4.37), (4.39)

$$\mathcal{T}_{06} = \mathcal{T}_6 \quad (4.40)$$

teda

$$\mathcal{T}_6 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \quad (4.41)$$

Násobením inverzou maticou dostaneme:

$$a_1^{-1} \mathcal{T}_6 = \mathcal{T}_{16} \quad (4.42)$$

kde

$$\mathcal{T}_{16} = \mathcal{T}_{12} \mathcal{T}_{23} \mathcal{T}_{34} \mathcal{T}_{45} \mathcal{T}_{56} \equiv a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \quad (4.43)$$

je známa matica, pričom

$$a_1^{-1} f_6 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{px} & t_{px} & n_{px} & x_k \\ b_{py} & t_{py} & n_{py} & y_k \\ b_{pz} & t_{pz} & n_{pz} & z_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Teda môžeme porovnávať odpovedajúce si prvky matíc (4.42), (4.44). Takto získame päť maticových rovníc typu (4.42) a porovnávaním prvkov z každej po 12 skalárnych rovníc (z nich sú tri rovnice pre vektoru  $\bar{t}_p$ ,  $\bar{n}_p$ ,  $\bar{b}_p$ ,  $\bar{r}$ ). Pre počet OM  $u \leq 6$  môžeme nájsť zo získaných rovníc explicitne rekurentne vztahy pre neznáme nezávislé lokálne súradnice polohy  $\varphi_n$  [26].

#### 4.5 POLOHA ČLENOV V JEDNOSLUČKOVOM MECHANIZME

Na rozdiel od vektorovej metódy kinematickej analýzy rovinnych mechanizmov z časti 3, v ktorej sme využívali globálne súradnice polohy členov, v maticovej metóde analýzy polohy členov v jednoslučkovom mechanizme (rovinnom alebo priestorovom) využijeme lokálne súradnice.

Podľa TM 4.4 určíme závislé lokálne súradnice  $q_{zj}$  polohy hnaných členov

$$q_{zj} = f_j(q_{ni}) \quad (4.45)$$

kde  $j = 1, 2, \dots, z^s$ ,  $i = 1, 2, \dots, n^s$  (a  $q_{ni}$  sú nezávislé lokálne súradnice vstupných hnaných členov) z matematického modelu vo forme skalárnych rovníc polohy, ktorý získame maticovými metodami myšľeného rezu [3].

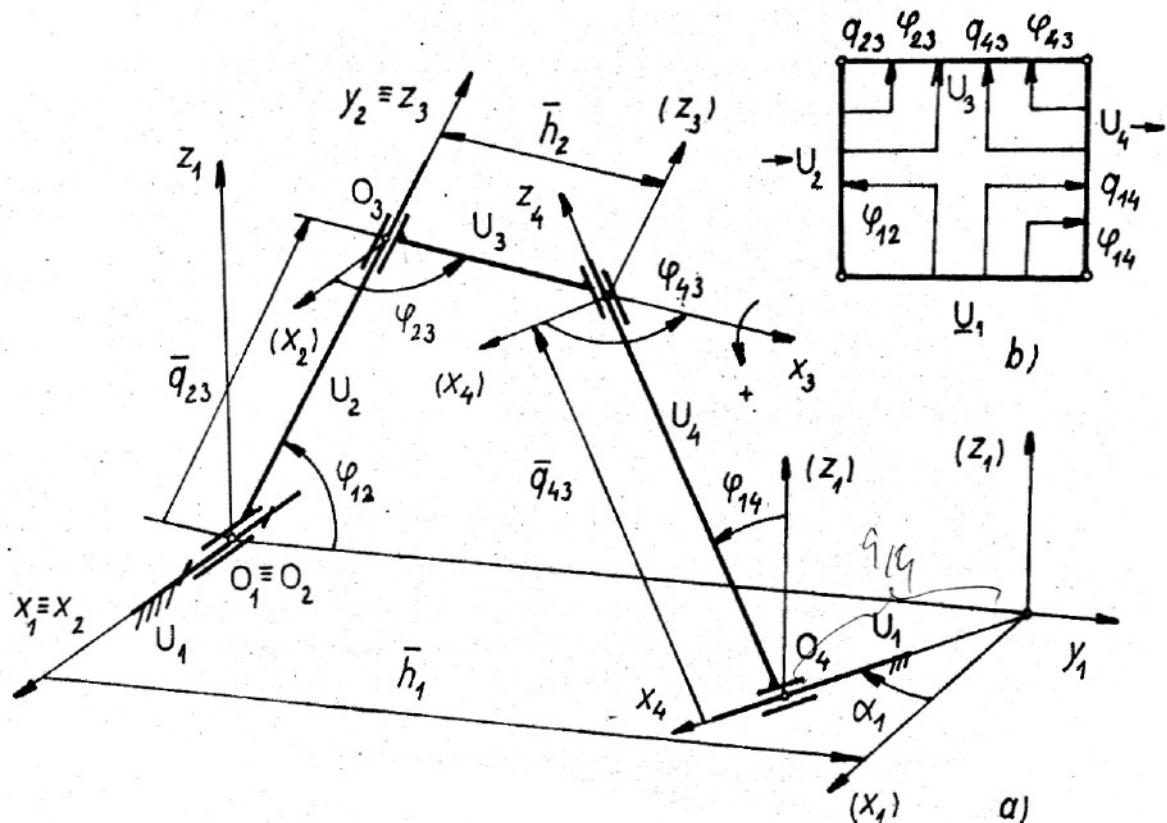
##### 4.5.1 Metóda symetrického rezu

Podľa TM(4.30) sme maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov JM získali symetrickým rezom členom  $U_k$

$$\tau_{12} \tau_{23} \dots \tau_{k-1,k} = \tau_{1u} \tau_{u,u-1} \dots \tau_{k+1,k} \quad (4.46)$$

Príklad 4.9

Zostavte maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov priestorového prevodového mechanizmu z obr. 4.13a metódou symetrického rezu.



Obr. 4.13

a) priestorový prevodový mechanizmus RCCC s lokálnymi súradnicami polohy, b) štruktúrna schéma

Riešenie

Najprv urobíme štruktúrnu analýzu a vyšpecifikujeme lokálne súradnice polohy členov

$$v_m = 2, t_m = 5, s_{24} = s_4 = 3(C), s_{25} = s_5 = 1(R),$$

$$s = 4, n_v = 6, n_4 = 2, n_5 = 1$$

$$g_m = 2, u_2 = u = 4$$

$$k = 1, c = 7, n_k = n^s = n_h = n = 1, z = 6$$

Základná slučka bude

$$k_1 = 12341, \quad k_1: ABCDEO_1A$$

Lokálne súradnice polohy členov budú:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_{n1} = \varphi_{12} \\
 q_2 &= q_{z1} = q_{23} \\
 q_3 &= q_{z2} = \varphi_{23} \\
 q_4 &= q_{z3} = q_{14} \\
 q_5 &= q_{z4} = \varphi_{14} \\
 q_6 &= q_{z5} = q_{43} \\
 q_7 &= q_{z6} = \varphi_{43}
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Symetrický rez viedieme členom  $U_3$ , potom podľa (4.46) bude

$$\tau_{12} \tau_{23} = \tau_{14} \tau_{43} \tag{4.48}$$

kde podľa obr. 4.13 jednotlivé transformačné matice budú:

$$\begin{aligned}
 \tau_{12} &= \tau_{z4}(\varphi_{12}) \\
 \tau_{23} &= \tau_{z2}(q_{23}) \tau_{z5}(\varphi_{23}) \tau_{z6}(-\alpha_1) (+90) \\
 \tau_{14} &= \tau_{z2}(h_1) \tau_{z6}(-\alpha_1) \tau_{z1}(q_{14}) \tau_{z4}(\varphi_{14}) \\
 \tau_{43} &= \tau_{z3}(q_{43}) \tau_{z6}(\varphi_{43}) \tau_{z4}(-\alpha_2) \tau_{z1}(-h_2)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Po vynásobení transformačných matíc v rovnici (4.48) porovnaním odpovedajúcich si prvkov výsledných matíc získame 16 skalárnych rovnic pre 6 neznámych lokálnych súradníc polohy členov z (4.47). Program OKAM [28] má algoritmus výberu 6 lineárne nezávislých rovnic, pričom tento výber sa môže počas pohybu členov mechanizmu meniť, aby bol optimálny z hľadiska stability riešenia.

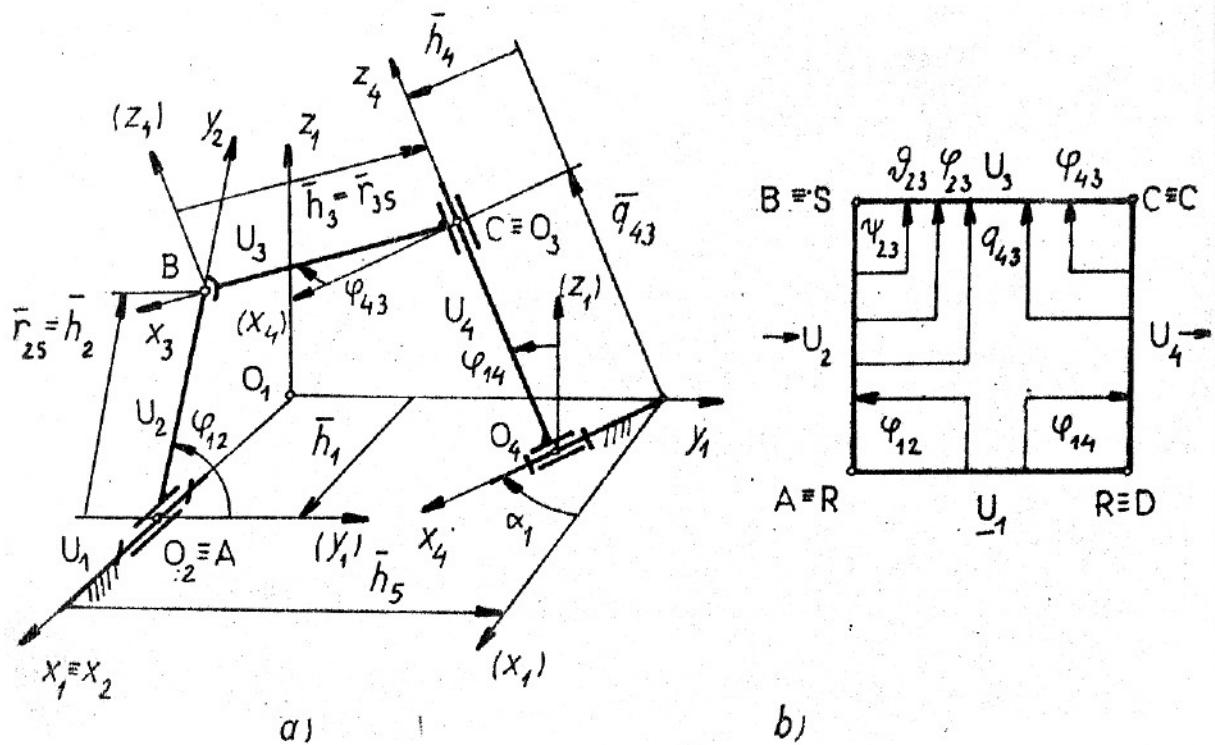
#### 4.5.2 Nesymetrický rez

Maticová rovnica vzájomnej polohy členov JM získaná nesymetrickým rezom stredom S sférického spojenia členov  $U_k, U_{k+1}$  bude podľa TM(4.33)

$$\tau_{12} \tau_{23} \dots \tau_{k-1,k} \tau_{k,s} = \tau_{1u} \tau_{u,u-1} \dots \tau_{k+z,k+1} \tau_{k+1,s} \tag{4.50}$$

Príklad 4.10

Zostavte maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov priestorového prevodového mechanizmu z obr. 4.14a metódou nesymetrického rezu.



Obr. 4.14

a) priestorový prevodový mechanizmus RSCR s lokálnymi súradnicami polohy, b) štruktúrna schéma

Riešenie

podľa postupu v štruktúrnej analýze je

$$\begin{aligned}
 v_m &= 2, t_m = 5, s_{23} = s_3 = 1(S), s_{24} = s_4 = 1(C), s_{25} = s_5 = 2(R), \\
 s &= 4, n_v = 6 \\
 g_m &= 2, u_2 = u = 4, n_3 = 3, n_4 = 2, n_5 = 1 \\
 k &= 1, c = 7, n_k = n^s = n_h = n = 1, z = 6
 \end{aligned}$$

Základná slučka podľa obr. 4.1a,b bude

$$k_1 = 12341, \quad k_1 = ABCDEO_1A$$

Lokálne súradnice polohy členov budú:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = q_{n1} = \varphi_{12} \\ q_2 = q_{z1} = \psi_{23} \\ q_3 = q_{z2} = \hat{\psi}_{23} \\ q_4 = q_{z3} = \varphi_{23} \\ q_5 = q_{z4} = \varphi_{14} \\ q_6 = q_{z5} = q_{43} \\ q_7 = q_{z6} = \varphi_{43} \end{array} \right\} \text{Eulerove uhly} \quad (4.51)$$

Nesymetrický rez viedie stredom B sférického spojenia, potom podľa (4.50) bude

$$\tilde{\tau}_{12} \mu_{2S} = \tilde{\tau}_{14} \tilde{\tau}_{43} \mu_{3S} \quad (4.51a)$$

kde  $\mu_{2S}$ ,  $\mu_{3S}$  sú polohové vektory podľa obr. 4.14a

$$\begin{aligned} \mu_{2S} &= [0, h_2, 0, 1] \\ \mu_{3S} &= [h_3, 0, 0, 1] \end{aligned} \quad (4.52)$$

a jednotlivé transformačné matice:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{12} &= \tilde{\tau}_{z1}(h_1) \tilde{\tau}_{z4}(\varphi_{12}) \\ \tilde{\tau}_{14} &= \tilde{\tau}_{z2}(h_5) \tilde{\tau}_{z6}(\alpha_1) \tilde{\tau}_{z1}(h_4) \tilde{\tau}_{z4}(\varphi_{14}) \\ \tilde{\tau}_{43} &= \tilde{\tau}_{z3}(q_{43}) \tilde{\tau}_{z6}(\varphi_{43}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

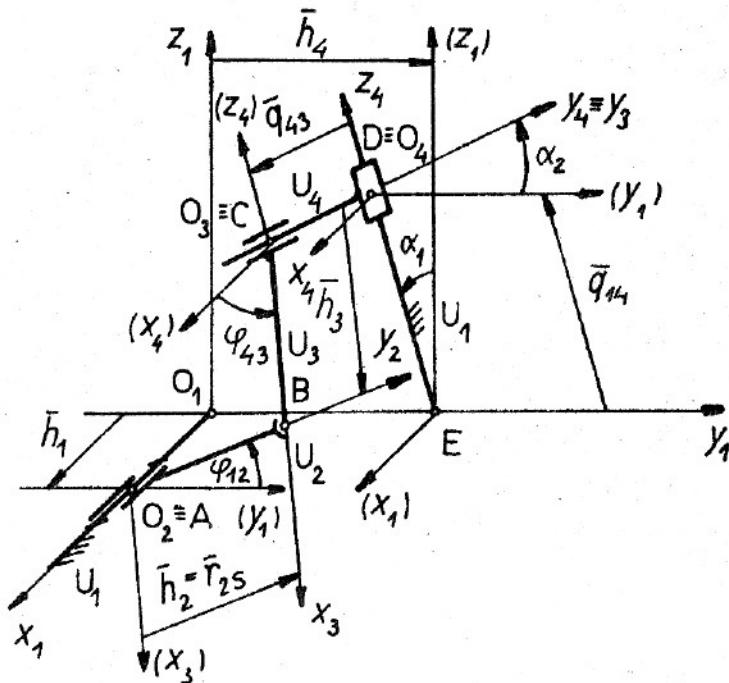
Z maticovej rovnice (4.51) po vynásobení matíc a porovnaním odpovedajúcich si prvkov výsledných stípcových matíc získame na rozdiel od metódy symetrického rezu 3 netriviálne lineárne nezávislé skalárne rovnice pre 3 neznáme lokálne súradnice polohy z rovníc (4.51)

$$\varphi_{14} = f_1(\varphi_{12}), \quad q_{34} = f_2(\varphi_{12}), \quad \varphi_{43} = f_3(\varphi_{12})$$

Z predošlého vyplýva, že nesymetrickým rezom spôsobíme, že lokálne súradnice polohy  $\psi_{23}$ ,  $\hat{\psi}_{23}$ ,  $\varphi_{23}$  telesa  $U_3$  voči telesu  $U_2$  sa v matematickom modeli (4.51) nevyskytujú, teda metódu nesymetrického rezu použijeme vtedy, ak nepotrebuješ poznáť lokálnu polohu telies viazaných sférickým spojením.

Príklad 4.11

Skontrolujte maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov priestorového prevodového mechanizmu zostavenú podľa metódy nesymetrického rezu (obr. 4.15)



Obr. 4.15

Priestorový prevodový mechanizmus RSSP s lokálnymi súradnicami polohy

$$\mathcal{T}_{12} \mathbf{n}_{2S} = \mathcal{T}_{14} \mathcal{T}_{43} \mathbf{n}_{3S} \quad (4.54)$$

kde

$$\mathbf{n}_{2S} = [0, h_2, 0, 1] \quad (4.55)$$

$$\mathbf{n}_{3S} = [h_3, 0, 0, 1]$$

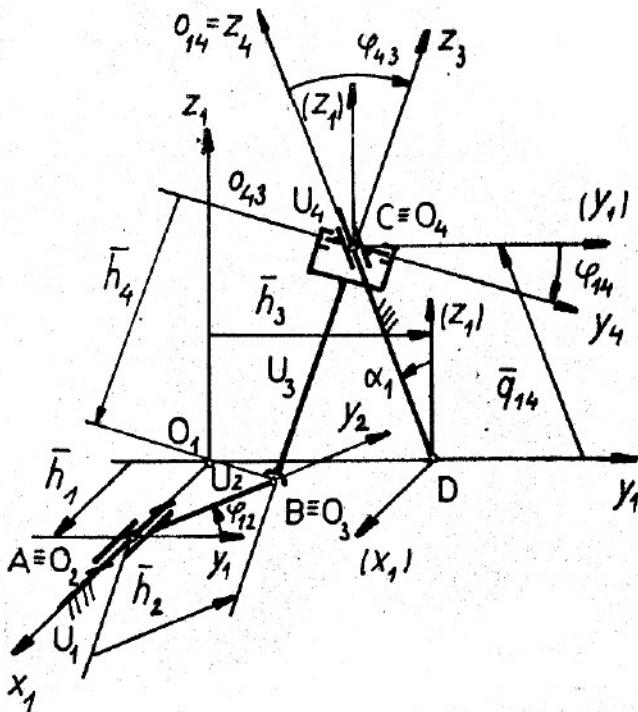
$$\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{z1}(h_1) \mathcal{T}_{z4}(\phi_{12})$$

$$\mathcal{T}_{14} = \mathcal{T}_{z2}(h_4) \mathcal{T}_{z5}(\alpha_1) \mathcal{T}_{z3}(q_{14}) \mathcal{T}_{z6}(\alpha_2) \quad (4.56)$$

$$\mathcal{T}_{43} = \mathcal{T}_{z2}(-q_{43}) \mathcal{T}_{z5}(\phi_{43})$$

Príklad 4.12

Podľa obr. 4.16 priestorového prevodového mechanizmu RSRC urobte štruktúrnu analýzu a zostavte maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov podľa metódy symetrického rezu.

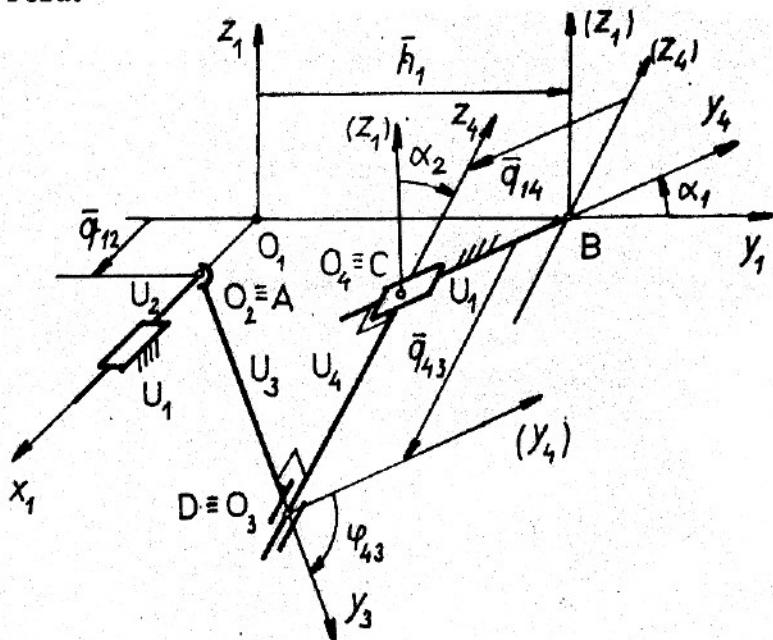


Obr. 4.16

Priestorový prevodový mechanizmus RSRC s lokálnymi súradnicami polohy

#### Priklad 4.13

Podľa obr. 4.17 priestorového prevodového mechanizmu PSCP urobte štruktúrnu analýzu a zostavte maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov podľa metódy ne-symetrického rezu.



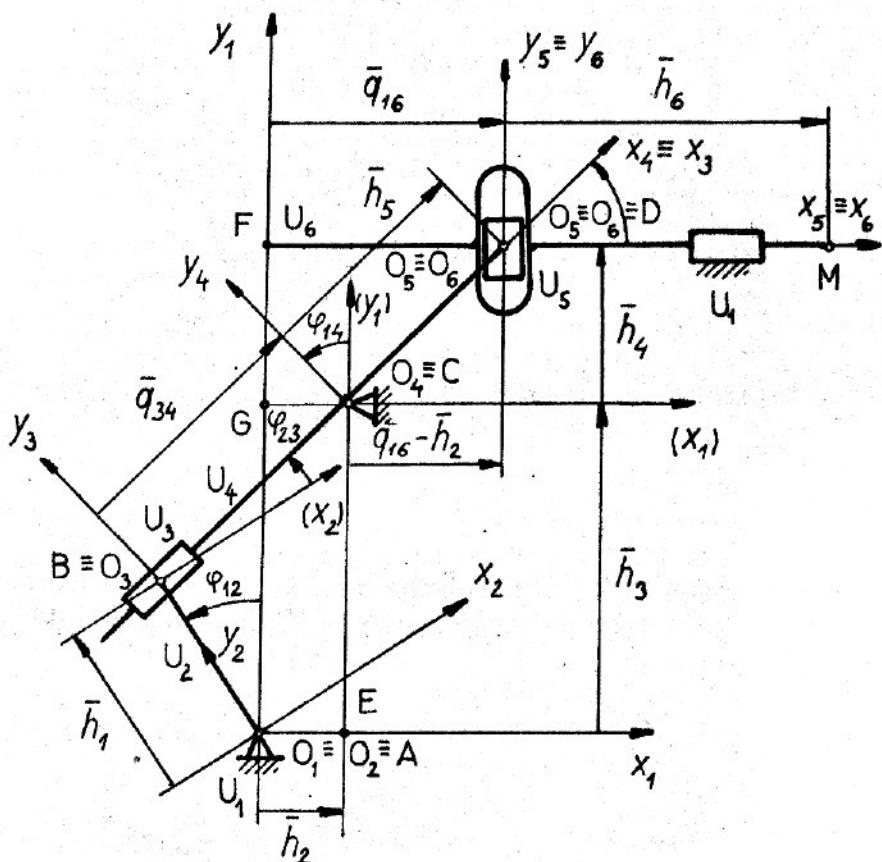
Obr. 4.17

Priestorový prevodový mechanizmus PSCP s lokálnymi súradnicami polohy

#### 4.5.3 Poloha členov v rovinnom mechanizme

##### Príklad 4.14

Aplikujte maticovú metódu symetrického rezu na tvorbu matematického modelu pre rovinný mechanizmus z obr. 4.18.



Obr. 4.18

Kinematická schéma RM s lokálnymi súradnicami polohy

Riešenie

Štruktúrna analýza:

$$v_m = 2, \quad t_m = 2, \quad s_{22} = s_2 = s = 7, \quad n_v = 3, \quad n_2 = 1$$

$$g_m = 3, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 2, \quad u = 6$$

$$k = 2, \quad c = 7, \quad z = 6, \quad n_k = n^s = n_h = n = 1$$

Základné slučky:

$$\begin{array}{c}
 123456 \\
 r_1: 1234 \quad k_1: 12341 \quad k_1: ABCEA \\
 r_2: 56 \quad k_2 = 56145 \quad k_2: DFGCD
 \end{array}$$

Konštantné rozmery sú

$$h_1 \neq h_6$$

Lokálne súradnice polohy budú:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_{n1} = \varphi_{12} \\
 q_2 &= q_{z1} = \varphi_{13} \\
 q_3 &= q_{z2} = q_{34} \\
 q_4 &= q_{z3} = \varphi_{14} \\
 q_5 &= q_{z4} = q_{16} \\
 q_6 &= q_{z5} = q_{65} \\
 q_7 &= q_{z6} = \varphi_{54}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Symetrický rez v základnej slučke  $k_1$  viedieme členom  $U_4$

$$\tilde{\tau}_{12} \tilde{\tau}_{23} \tilde{\tau}_{34} = \tilde{\tau}_{14} \tag{4.58}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tau}_{12} &= \tilde{\tau}_{z6}(\varphi_{12}) \\
 \tilde{\tau}_{23} &= \tilde{\tau}_{z2}(h_1) \tilde{\tau}_{z6}(\varphi_{23}) \\
 \tilde{\tau}_{34} &= \tilde{\tau}_{z1}(q_{34}) \\
 \tilde{\tau}_{14} &= \tilde{\tau}_{z1}(h_2) \tilde{\tau}_{z2}(h_3) \tilde{\tau}_{z6}(\varphi_{14})
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Symetrický rez v základnej slučke  $k_2$  viedieme členom  $U_4$

$$\tilde{\tau}_{16} \tilde{\tau}_{65} \tilde{\tau}_{54} = \tilde{\tau}_{14} \tag{4.60}$$

kde

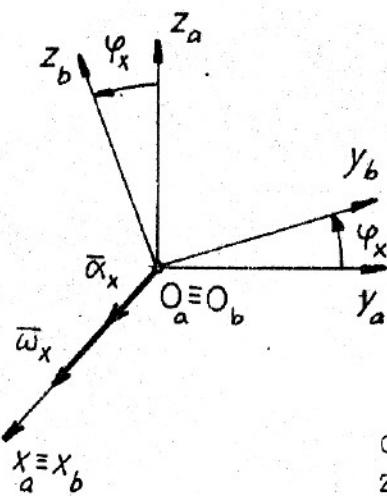
$$\begin{aligned}
 \tilde{\tau}_{16} &= \tilde{\tau}_{z2}(h_3) \tilde{\tau}_{z2}(h_4) \tilde{\tau}_{z1}(q_{16}) \\
 \tilde{\tau}_{65} &= \tilde{\tau}_{z2}(q_{65}) \\
 \tilde{\tau}_{54} &= \tilde{\tau}_{z6}(\varphi_{54}) \tilde{\tau}_{z1}(-h_5) \\
 \tilde{\tau}_{14} &= \tilde{\tau}_{z1}(h_2) \tilde{\tau}_{z2}(h_3) \tilde{\tau}_{z6}(\varphi_{14})
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Po roznásobení matic v rovniciach (4.58), (4.60) a porovnaním odpovedajúcich si vhodných prvkov získame 6 lineárne nezávislých rovnic na určenie 6 neznámych lokálnych súradníc polohy z (4.57).

#### 4.6 MATICA RÝCHLOSTÍ A ZRÝCHLENÍ

##### Príklad 4.15

Odvodte maticu rýchlosťí a zrýchlení pre základný pohyb Z4, pri ktorom rotuje teleso  $U_b$  voči  $U_a$  okolo spoločnej osi  $x_a \equiv x_b$  (obr. 4.19).



Obr. 4.19  
Základný pohyb Z4

##### Riešenie

Podľa TM(4.43) je matica rýchlosťí bodov telesa  $U_b$  pri pohybe  $U_b$  voči  $U_a$  (vyjadrená v priestore telesa  $U_b$ )

$$\mathcal{V}_{ab} = \mathcal{T}_{ab}^{-1} \dot{\mathcal{r}}_{ab} \quad (4.62)$$

teda pre pohyb Z4

$$\mathcal{V}_{Z4}(\varphi_x) = \mathcal{T}_{z4}^{-1}(\varphi_x) \dot{\mathcal{r}}_{z4}(\varphi_x) \quad (4.63)$$

Inverznú transformačnú maticu určíme podľa TM(4.42)

$$\mathcal{T}_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} \varphi_{ab}^T & -\varphi_{ab}^T & \bar{r}_{ab} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Podľa transformačnej matice (4.4)  $\mathcal{T}_{z4}(\varphi_x)$  bude

$$\varphi_{z4}^T(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi_x & s\varphi_x \\ 0 & -s\varphi_x & c\varphi_x \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

a vzhľadom na to, že  $\bar{r}_{ab} = \bar{0}$  bude

$$\mathcal{T}_{z4}^{-1}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi_x & s\varphi_x & 0 \\ 0 & -s\varphi_x & c\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Pri derivácii treba postupovať ako pri derivácii zloženej funkcie, potom

$$\dot{\mathcal{T}}_{z4}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\varphi_x & -c\varphi_x & 0 \\ 0 & c\varphi_x & -s\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_x \quad (4.67)$$

Po dosadení (4.66), (4.67) do (4.63) bude matica rýchlosťí

$$\mathcal{V}_{z4}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_x \quad (4.68)$$

Podľa TM(4.71a) je

$$v_{zi}(q_i) = \mathcal{D}_{zi} q_i \quad (4.69)$$

Potom je maticový diferenciálny operátor

$$\mathcal{D}_{z4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

teda vzťah (4.70) je rovnaký ako v TM(4.72c). Podľa TM(4.53) je

$$\dot{v}_{ab} = \begin{bmatrix} \lambda_{ab}, & \varphi_{ab}^T & \dot{r}_{ab} \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

teda v našom prípade je matica uhlovej rýchlosťi pri pohybe telesa  $U_b$  voči  $U_a$  (vyjadrená v priestore  $U_b$ )

$$\lambda_{z4} (\varphi_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_x \quad (4.72)$$

a podľa TM(4.52) je vektor uhlovej rýchlosťi

$$\bar{\omega}_{z4} (\varphi_x) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

čo je v súlade s rotáciou (základným pohybom Z4) telesa  $U_b$  voči  $U_a$ .

Matica zrýchlenia  $\ddot{a}_{ab}$  bodov telesa  $U_b$  pri pohybe vzhľadom na  $U_a$  (vyjadrená v priestore  $U_b$ ) je podľa TM(4.58)

$$\ddot{a}_{ab} = \ddot{v}_{ab} \quad (4.74)$$

a podľa TM(4.71b)

$$\ddot{a}_{zi} (q_i) = \mathcal{D}_{zi} \ddot{q}_i \quad (4.75)$$

teda pre náš prípad

$$\ddot{a}_{z4} (\varphi_x) = \mathcal{D}_{z4} \ddot{\varphi}_x \quad (4.76)$$

Vektor uhlového zrýchlenia bude

$$\bar{\alpha}_{z4} (\varphi_x) = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

#### 4.7 NUMERICKÁ KINEMATICKÁ ANALÝZA MECHANIZMOV

Podľa teoretického úvodu v časti TM 4.12 pri riešení úlohy výpočtu súredníc polohy hnaných členov iteračným procesom potrebujeme na výpočet vektora  $\bar{q}_z$  závislých lokálnych súradníc polohy v rovnici TM(4.99)

$$q_z(r+1) = \bar{q}_z(r) + \Delta \bar{q}_z(r) \quad (4.78)$$

vektor  $\Delta q_z$  korekcií závislých lokálnych súradníc polohy.

Tento vektor získame z maticovej rovnice TM(4.98)

$$\mathcal{M}_{\Delta q_z} = \mathcal{N}_o \quad (4.79)$$

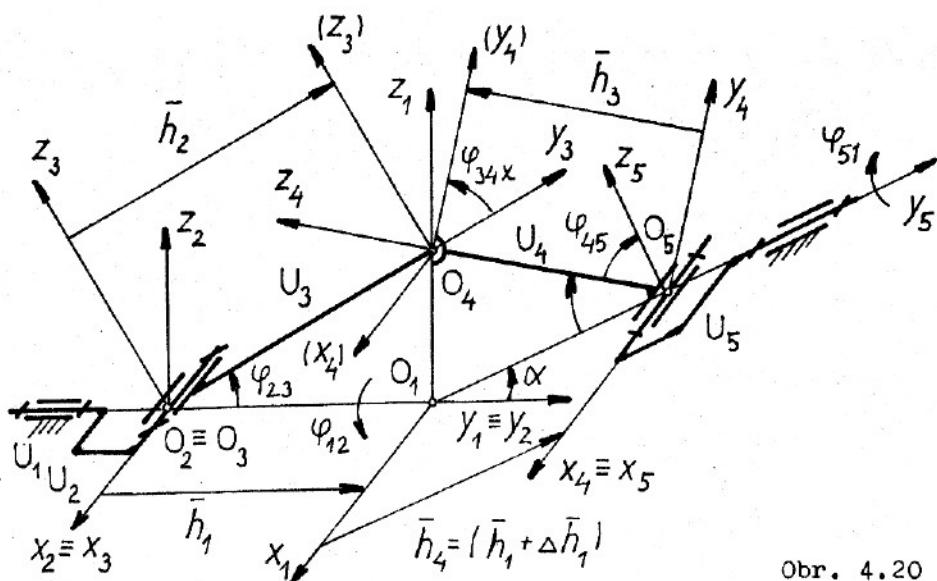
ktorá je analogická s rovnicou TM(2.7)

$$\mathcal{V}(r) \Delta \bar{\psi}_z(r) = - \bar{f}(r) \quad (4.80)$$

ktorá bola lineárna pre hľadaný vektor  $\Delta \bar{\psi}_z(r)$  korekcií závislých globálnych súradníc polohy členov.

#### Príklad 4.16

Zostavte maticovú rovnicu pre výpočet vektora  $\Delta \bar{q}_z$  korekcií závislých lokálnych súradníc polohy hnaných členov mechanizmu z obr. 4.20.



Obr. 4.20

### Riešenie

Pre maticovú rovnicu (4.79) potrebujeme skalárne rovnice polohy, ktoré tvoria matematický model daného mechanizmu, pričom tieto získame štandardným postupom podľa časti 4.5.2. Aplikujme teda maticovú metódu nesymetrického rezu na náš mechanizmus, pričom rez viedieme stredom sférického S spojenia členov  $U_3, U_4$ .

Zo štruktúrnej analýzy vyplýva:

$$\begin{aligned}v_m &= 2, \quad t_m = 5, \quad s_{23} = s_3 = 1(S), \quad s_{25} = s_5 = 4(R), \quad s = 5, \\n_v &= 6, \quad r_3 = 3, \quad n_5 = 1 \\g_m &= 2, \quad u_2 = u = 5 \\k &= 1, \quad c = 7, \quad n_k = n^s = n_h = n = 1, \quad z = 6\end{aligned}$$

Lokálne súradnice polohy členov budú:

$$\begin{aligned}q_1 &= q_{n1} = \varphi_{12} \\q_1 &= q_{z1} = \varphi_{23} \\q_3 &= q_{z2} = \psi_{34} \\q_4 &= q_{z3} = \psi_{34} \\q_5 &= q_{z4} = \varphi_{34} \\q_6 &= q_{z5} = \varphi_{45} \\q_7 &= q_{z6} = \varphi_{15}\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Eulerove uhly} \quad (4.81)$$

Podľa (4.50) bude maticová rovnica pre nesymetrický rez

$$\mathcal{T}_{12} \mathcal{T}_{23} \mathcal{n}_{3S} = \mathcal{T}_{15} \mathcal{T}_{54} \mathcal{n}_{4S} \quad (4.82)$$

kde

$$\mathcal{n}_{3S} = [0, h_3, 0, 1] \quad (4.83)$$

$$\mathcal{n}_{4S} = [0, 0, h_4, 1]$$

a jednotlivé transformačné maticy

$$\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{z2} (-h_2) \mathcal{T}_{z5} (\varphi_{12})$$

$$\mathcal{T}_{23} = \mathcal{T}_{z4} (\varphi_{23})$$

$$T_{15} = T_{z4}(\alpha_1) T_{z2}(h_6) T_{z5}(\varphi_{15}) \quad (4.84)$$

$$T_{54} = T_{z4}(\varphi_{54}) \quad \varphi_{54d} = \frac{T}{2} - \varphi_{54}$$

Po roznásobení transformačných matic dostaneme rovnosť stípových matic

$$\begin{bmatrix} h_2 s\varphi_{23} s_{12} \\ h_2 c\varphi_{23} - h_1 \\ h_2 s\varphi_{23} c_{12} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} h_3 s\varphi_{54} s\varphi_{15} \\ (h_4 - h_3 c\varphi_{54}) c\alpha_1 - h_3 s\varphi_{54} c\varphi_{15} s\alpha_1 \\ (h_4 - h_3 c\varphi_{54}) s\alpha_1 + h_3 s\varphi_{54} c\varphi_{15} c\alpha_1 \end{bmatrix}_1 \quad (4.85)$$

Porovnaním odpovedajúcich si prvkov po úprave dostaneme hľadané skalárne rovnice polohy

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv -h_1 s\varphi_{23} s\varphi_{12} + h_3 s\varphi_{54} s\varphi_{15} = 0 \\ f_2 &\equiv -h_2 c\varphi_{23} + h_1 + (h_4 - h_3 c\varphi_{54}) c\alpha_1 - h_3 s\varphi_{54} c\varphi_{15} s\alpha_1 = 0 \\ f_3 &\equiv -h_2 s\varphi_{23} c\varphi_{12} + (h_4 - h_3 s\varphi_{54}) s\alpha_1 + h_3 s\varphi_{54} c\varphi_{15} c\alpha_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.86)$$

Rovnica (4.79) bude mať pre naš prípad všeobecný tvar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi_{23} \\ \Delta\varphi_{54} \\ \Delta\varphi_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

kde sú jednotlivé korekcie súradníc:

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= \Delta\varphi_{23} \\ \Delta q_2 &= \Delta\varphi_{54} \\ \Delta q_3 &= \Delta\varphi_{15} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Prvky matice  $\mathcal{M}$  vypočítame ako parciálne derivácie príslušných rovníc  $f_i$  podľa lokálnych súradníc polohy členov

$$a_{11} = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{23}} \right] = h_2 c\varphi_{23} s\varphi_{12}$$

$$a_{12} = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{54}} \right] = - h_3 \circ \varphi_{54} \circ \varphi_{15}$$

$$a_{13} = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{15}} \right] = - h_3 \circ \varphi_{54} \circ \varphi_{15}$$

$$a_{21} = h_2 \circ \varphi_{23}$$

$$a_{22} = h_3 (\circ \varphi_{54} \circ \alpha_1 - \circ \varphi_{54} \circ \varphi_{12} \circ \alpha_1)$$

$$a_{23} = h_3 \circ \varphi_{54} \circ \varphi_{15} \circ \alpha_1$$

$$a_{31} = h_2 \circ \varphi_{23} \circ \varphi_{12}$$

$$a_{32} = - h_3 (\circ \alpha_1 \circ \varphi_{54} - \circ \alpha_1 \circ \varphi_{54} \circ \varphi_{15})$$

$$a_{33} = h_3 \circ \alpha_1 \circ \varphi_{54} \circ \varphi_{15}$$