<u>Dostredivý krútiaci moment</u> $\bar{M}_{D12}$ dvojice síl $(\bar{F}_{O2}, -\bar{F}_{O2})$ v osi o_1:

$$M_{D12} = F_{O2}\ cq_2 h_2 sq_2 - (F_{O2}\ sq_2)(h_1 + h_2 cq_2) \tag{5.56}$$

kde

$$F_{O2} = m_2 h_2 \dot{q}_2^2 \tag{5.57}$$

je po dosadení:

$$M_{D12} = -\ (m_2 h_1 h_2 sq_2)\dot{q}_2^2 \tag{5.58}$$

Označme koeficient k_{D12}

$$k_{D12} = -\ m\ h_1 h_2 sq_2 \tag{5.59}$$

Potom

$$M_{D12} = k_{D12}\ \dot{q}_2^2 \tag{5.60}$$

analogicky

$$M_{D\overset{21}{\cancel{12}}} = k_{D21}\ \dot{q}_1^2 \tag{5.61}$$

pričom

$$k_{D21} = k_{D12} \tag{5.62}$$

<u>Dostredivý krútiaci moment</u> $\bar{M}_{D22}$ v osi o_2:

$$M_{D22} = k_{D22}\ \dot{q}_2^2 \equiv 0 \tag{5.63}$$

lebo nositeľka sily $\bar{F}_{O2}$ je rôznobežná s osou o_2.

c) Pri súčasných pohyboch telies O, 1, 2 OM je Coriolisovo zrýchlenie hmotného bodu m_2:

$$a_c = 2\ h_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \tag{5.64}$$

kde $\dot{q}_1$ je unášavá uhlová rýchlosť, $\dot{q}_2$ je relatívna uhlová rýchlosť. Potom Coriolisova sila $\bar{F}_C$ pôsobiaca na hmotný bod m_2 má veľkosť:

$$F_C = -\ m_2\ a_c \tag{5.65}$$

Coriolisov krútiaci moment dvojice síl ($\bar{F}_C$, $-\bar{F}_C$) je

$$M_{C1} = -(2m_2h_1h_2sq_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{5.66}$$

M_{C1} má nositeľku o_1 a môžeme ho zapísať ako súčet:

$$M_{C1} = k_{112}\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + k_{121}\,\dot{q}_2\dot{q}_1 \tag{5.67}$$

kde sú koeficienty:

$$k_{112} \equiv k_{121} = -m_2h_1h_2sq_2 \tag{5.68}$$

Označme:

$$k_{C1} = k_{112} + k_{121} \tag{5.69}$$

potom

$$M_{C1} = k_{C1}\,\dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{5.70}$$

a analogicky

$$M_{C2} = k_{212}\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + k_{221}\,\dot{q}_2\dot{q}_1 \tag{5.71}$$

pričom

$$k_{212} \equiv k_{221} = -m_2h_1h_2sq_2 \tag{5.72}$$

Označme:

$$k_{C2} = k_{212} + k_{221} \tag{5.73}$$

potom

$$M_{C2} = k_{C2}\,\dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{5.74}$$

d) Krútiaci moment M_{1G1} dvojice síl ($\bar{G}_1$, $-\bar{G}_1$), keď tiažová sila

$$G_1 = m_1\,g \tag{5.75}$$

má veľkosť:

$$M_{1G1} = h_1sq_1G_1 \tag{5.76}$$

teda

$$M_{1G1} = m_1gh_1sq_1 \tag{5.77}$$

<u>Krútiaci moment</u> $\bar{M}_{1G2}$ analogicky

$$M_{1G2} = \left[h_1 sq_1 + h_2 s(q_1 + q_2) \right] m_2 g \tag{5.78}$$

potom <u>výsledný krútiaci moment</u> $\bar{M}_{G1}$ v osi o_1 bude

$$M_{G1} = (m_1 + m_2) g h_1 s q_1 + m_2 g h_2 s(q_1 + q_2) \tag{5.79}$$

Označme koeficient k_{G1}:

$$k_{G1} = (m_1 + m_2) h_1 s q_1 + m_2 h_2 s(q_1 + q_2) \tag{5.80}$$

potom

$$M_{G1} = k_{G1}\, g \tag{5.81}$$

<u>Krútiaci moment</u> $\bar{M}_{G2}$ v osi o_2 bude

$$M_{G2} = m_2 g h_2 s(q_1 + q_2) \tag{5.82}$$

označme koeficient k_{G2}

$$k_{G2} = m_2 h_2 s(q_1 + q_2) \tag{5.83}$$

potom

$$M_{G2} = k_{G2}\, g \tag{5.84}$$

Rovnice (5.40), (5.44) prepíšeme pomocou momentov:

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_{z11} + \bar{M}_{z12} + \bar{M}_{C1} + \bar{M}_{D12} + \bar{M}_{G1} \tag{5.85}$$

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_{z21} + \bar{M}_{z22} + \bar{M}_{C2} + \bar{M}_{D21} + \bar{M}_{G2} \tag{5.86}$$

a v maticovom tvare pomocou koeficientov:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{z11} & k_{z12} \\ k_{z21} & k_{z22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{C1} \\ k_{C2} \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & k_{D12} \\ k_{D21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{G1} \\ k_{G2} \end{bmatrix} g \tag{5.87}$$

5.1.2.2 Dynamický model m-členného OM

Príklad č. 5.28 zovšeobecníme pre OM s počtom m pohyblivých členov, ktorý má všetky spojenia typu R alebo P, teda môžeme aplikovať HD transformačné matice $\mathcal{T}_{i-1,i}$ (4.23).

Podľa vzťahov (5.45) k_{z11}, (5.49) k_{z22} označme k_{zii} koeficient účinku zovšeobecneného zrýchlenia v i-tom spojení na i-té spojenie, podľa (5.51) k_{z12}, (5.54) k_{z21} označme k_{zij} koeficient účinku zovšeobecnených zrýchlení v spojeniach i, j na spojenia j, i, podľa (5.55) k_{D11}, (5.63) k_{D22} označme k_{Dij} koeficient účinku dostredivého zrýchlenia v spojení i na spojenie i, podľa (5.60) k_{D12}, (5.62) k_{D21} označme k_{Dij} koeficient účinku dostredivého zrýchlenia v spojení j na spojenie i, podľa (5.68) k_{112}, (5.68) k_{121}, (5.72) k_{212}, (5.72) k_{221} označme k_{ijk} koeficient účinku Coriolisovho zrýchlenia v i-tom spojení ako dôsledok rýchlostí v spojeniach j, k, podľa (5.81) k_{G1}, (5.83) k_{G2} označme k_{Gi} koeficient účinku gravitačného zrýchlenia v i-tom hmotnom bode (ťažisku) na i-té spojenie.

Pre všeobecný zápis rovníc (5.85) zjednodušíme vzťah (4.24) do tvaru

$$r = \mathcal{T}_{oi}\ {}^{i}r \equiv \mathcal{F}_{i}\ {}^{i}r \tag{5.88}$$

kde r, resp. ${}^{i}r$ je sprievodič ľubovoľného bodu telesa i voči globálnemu súradnicovému systému na vzťažnom telese 0, resp. voči lokálnemu súradnicovému systému spojenému s telesom i. Označme podľa (4.76c):

$$\mathcal{U}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{T}_{oi}}{\partial q_j} = \mathcal{T}_1 \dots \mathcal{D}_j\ \mathcal{T}_j \dots \mathcal{T}_i \tag{5.89}$$

a podľa (4.80), (4.81):

$$\mathcal{U}_{jkp} \equiv \frac{\partial \mathcal{T}^2_{oi}}{\partial q_k\ \partial q_p} = \begin{cases} \mathcal{T}_1 \dots \mathcal{D}_k\ \mathcal{T}_k \dots \mathcal{D}_p\ \mathcal{T}_p \dots \mathcal{T}_j & \text{pre } k < p \le j \\ \mathcal{T}_1 \dots \mathcal{D}^2_k\ \mathcal{T}_k \dots \mathcal{T}_j & \text{pre } k = p \le j \end{cases} \tag{5.90}$$

Kinetická energia hmotného elementu dm na člene i s polohou ${}^{i}r$ a rýchlosťou ${}^{i}\dot{r}$ bude

$$dK = \frac{1}{2}\ {}^{i}\dot{r}^2\ dm \tag{5.91}$$

a vzhľadom na

$$ {}^{i}\dot{r}\,{}^{i}\dot{r}^{T} = \begin{bmatrix} {}^{i}\dot{x} \\ {}^{i}\dot{y} \\ {}^{i}\dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{i}\dot{x}, & {}^{i}\dot{y}, & {}^{i}\dot{z}, & 0 \end{bmatrix} \tag{5.92} $$

platí:

$$ dK = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,({}^{i}\dot{r}\,{}^{i}\dot{r}^{T})\,dm \tag{5.93} $$

kde tr je stopa matice (súčet diagonálnych prvkov).

Podľa (4.43) je

$$ {}^{i}\dot{r} = \mathcal{T}_{oi}\,\mathcal{V}_{oi}\,{}^{i}r \tag{5.94} $$

potom kinetická energia člena i bude

$$ K_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\mathcal{T}_{oi}\,\mathcal{V}_{oi}\left(\int_{(i)} {}^{i}r\,{}^{i}r^{T}\,dm\right)\mathcal{T}_{oi}^{T}\,\mathcal{V}_{oi}^{T}\right] \tag{5.95} $$

Označme $\mathcal{J}_i$ pseudozotrvačnú maticu hmotnosti člena i:

$$ \mathcal{J}_i = \int_{(i)} {}^{i}r\,{}^{i}r^{T}\,dm \tag{5.96} $$

pričom je

$$ \mathcal{J}_i = \begin{bmatrix} {}^{i}x^2 & {}^{i}x\,{}^{i}y & {}^{i}x\,{}^{i}z & {}^{i}x \\ {}^{i}x\,{}^{i}y & {}^{i}y^2 & {}^{i}y\,{}^{i}z & {}^{i}y \\ {}^{i}x\,{}^{i}z & {}^{i}y\,{}^{i}z & {}^{i}z^2 & {}^{i}z \\ {}^{i}x & {}^{i}y & {}^{i}z & 1 \end{bmatrix} \tag{5.97} $$

Alebo pomocou momentov zotrvačnosti k osiam súradného systému na telese i, deviačných momentov a statických momentov:

$$\mathcal{J}_i = \begin{bmatrix} I_{ix} & D_{ixy} & D_{ixz} & m_i x_i \\ D_{iyz} & I_{iy} & D_{iyz} & m_i y_i \\ D_{izx} & D_{izy} & I_{iz} & m_i z_i \\ m_i x_i & m_i y_i & m_i z_i & 1 \end{bmatrix} \tag{5.98}$$

kde m_i je hmotnosť i-tého člena, x_i, y_i, z_i - súradnice ťažiska T_i i-tého člena v i-tom súradnicovom systéme.

Kinetická energia u-členného OM potom bude

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr} \, (\mathcal{T}_{oi} \, \mathcal{V}_{oi} \, \mathcal{J}_i \, \mathcal{T}_{oi}^T \, \mathcal{V}_{oi}^T) \tag{5.99}$$

Potenciálna energia u-členného OM bude

$$P = - \sum_{i=1}^{m} m_i \, g^T \, \mathcal{T}_{oi} \, {}^i\!r_i \tag{5.100}$$

kde

$$g^T = [\,0, \; 0, \; g_z, \; 0\,] \tag{5.101}$$

je vektor tiažového zrýchlenia a

$${}^i\!r_i = [\,x_i, \; y_i, \; z_i, \; 1\,] \tag{5.102}$$

je polohový vektor ťažiska T_i i-tého člena v i-tom súradnicovom systéme.

Utvoríme dynamické rovnice podľa (5.36):

deriváciou (5.99) a úpravou dostaneme:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=i}^{m} \mathrm{tr} \left[\dot{\mathcal{F}}_j \, \mathcal{J}_j \left(\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial q_j} \right)^T \right] \tag{5.103}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{tr} \left[\dot{\mathcal{F}}_j \, \mathcal{J}_j \left(\frac{\partial \dot{\mathcal{F}}_j}{\partial q_i} \right)^T \right] \tag{5.104}$$

deriváciou (5.100) a úpravou:

$$\frac{\partial P}{\partial q_i} = -\sum_{j=i}^{m} m_j\, g^T \left(\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial q_i}\right) {}^{i}r_j \tag{5.105}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=i}^{m} \left[\ddot{\mathcal{F}}_j\, \mathcal{J}_j \left(\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial q_i}\right)^T + \dot{\mathcal{F}}_j\, \mathcal{J}_j \left(\frac{\partial \dot{\mathcal{F}}_j}{\partial q_i}\right)^T\right] \tag{5.106}$$

Keďže

$$\dot{\mathcal{F}}_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial q_k}\, \dot{q}_k \tag{5.107}$$

a

$$\ddot{\mathcal{F}}_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial q_k}\, \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{\partial \dot{\mathcal{F}}_j}{\partial q_k}\right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^{j} \mathcal{U}_{jk}\, \ddot{q}_k + $$

$$+ \sum_{k=1}^{j} \sum_{p=1}^{j} \mathcal{U}_{jkp}\, \dot{q}_k\, \dot{q}_p \tag{5.108}$$

Potom po dosadení dostávame:

$$Q_i = \sum_{j=i}^{m} \sum_{k=1}^{i} \mathrm{tr}\,(\mathcal{U}_{jk}\, \mathcal{J}_j\, \mathcal{U}_{ji}^T)\, \ddot{q}_k +$$

$$+ \sum_{j=i}^{m} \sum_{k=1}^{j} \sum_{p=1}^{j} \mathrm{tr}\,(\mathcal{U}_{jkp}\, \mathcal{J}_j\, \mathcal{U}_{ji}^T)\, \dot{q}_k\, \dot{q}_p -$$

$$- \sum_{j=i}^{m} m_i\, g^T\, \mathcal{U}_{ji}\, {}^{i}r_j \tag{5.109}$$

Rovnice (5.109) zapíšeme pomocou koeficientov:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} k_{zij}\, \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} k_{ijk}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k + k_{Gi} \tag{5.110}$$

kde

$$k_{zij} = \sum_{j=\max(i,k)}^{m} \mathrm{tr}\,(\mathcal{U}_{jk}\ \mathcal{J}_j\ \mathcal{U}_{ji}^{T}) \tag{5.111}$$

$$k_{ijk} = \sum_{j=\max(i,k,p)}^{m} \mathrm{tr}\,(\mathcal{U}_{jkp}\ \mathcal{J}_j\ \mathcal{U}_{ji}^{T}) \tag{5.112}$$

$$k_{Gi} = \sum_{j=i}^{m} m_i\ g^T\ \mathcal{U}_{ji}\ {}^{i}\mathcal{r}_j \tag{5.113}$$

5.1.2.3 Interaktívny simulačný program dynamiky OM

Podľa matematického dynamického modelu vo forme rovníc (5.110) vznikol na základe spolupráce KTM SjF SVŠT a ÚTK SAV v Bratislave interaktívny simulačný program ISP dynamiky m-členného OM ($m \leq 7$) s P alebo R spojeniami. ISP je v jazyku FORTRAN a možno ho implementovať na počítačoch radu SMEP od typu SM 4/20. ISP:

- umožňuje používateľovi viesť dialóg vo forme otázok a odpovedí,
- na požiadanie poskytne informácie, ktoré údaje treba zadať, ako možno pokračovať, identifikuje a upozorňuje na nesprávne vstupy, pričom po korekcii umožňuje ďalšiu prácu,
- umožňuje zadávať a selektívne zobrazovať parametre OM PRaM,
- robí dynamický výpočet potrebných hnacích účinkov pre sériu postupne zadávaných pohybových stavov alebo ponúknuté typy pohybov,
- umožňuje zobrazovať výsledky vo forme tabuliek a grafov, v ktorých podľa potreby jednotlivé premenné zvlášť ciachuje,
- umožňuje uchovávať sady parametrov pre rôzne typy OM v dátovom súbore na disku a kedykoľvek ich opäť načítať.

5.2 DYNAMICKÁ ANALÝZA SVT S DANÝMI AKČNÝMI SILAMI

Úlohou je jednak určiť pohyb členov SVT pomocou dynamického modelu

$$\ddot{\bar{q}} = f(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{F}) \tag{5.114}$$

pre ktorý poznáme časový priebeh vektora $\bar{q}$ zovšeobecnených súradníc polohy vstupných hnacích členov a časový priebeh vektora $\overline{F}$ zovšeobecnených hnacích síl, ako aj určiť reakcie v spojeniach telies.

5.2.1 Dynamické pohybové rovnice

Stanovené úlohy pre SVT s pohyblivosťou n vyriešime pomocou Lagrangeových dynamických pohybových rovníc zmiešaného typu:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \tag{5.115}$$

$i = 1, 2, \ldots, p$, pričom p je počet vybratých parametrov, K je kinetická energia SVT, Q_i sú zovšeobecnené sily, ktoré vyjadríme v tvare

$$Q_i = Q_i^A - \frac{\partial P}{\partial q_i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \tag{5.116}$$

v ktorom je okrem veličín podľa vzťahu (5.22) D Rayleighova disipačná funkcia, f_k sú explicitné skalárne väzbové rovnice typu (1.60ab), ktoré majú všeobecný tvar

$$f_k(q_i, t) = 0 \tag{5.117}$$

$k = 1, 2, \ldots, r$, pričom r je počet závislých parametrov z vybratých parametrov p SVT pre dynamické riešenie, λ_k sú Lagrangeove multiplikátory.

5.2.2 Numerické riešenie dynamických pohybových rovníc

Derivujeme rovnice (5.117) podľa času a označme členy:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \tag{5.118}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overbrace{\frac{\partial f_k}{\partial q_i}}^{f_{ki}} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \overbrace{\frac{\partial f_k}{\partial q_j\,\partial q_i}}^{f_{kji}} \dot{q}_i\,\dot{q}_j + 2\sum_{i=1}^{p} \overbrace{\frac{\partial^2 f_k}{\partial q_i\,\partial t}}^{f_{kit}} \dot{q}_i + \overbrace{\frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2}}^{f_{ktt}} = 0 \tag{5.119}$$

kde $k = 1, 2, \ldots r$. Vzhľadom na (5.118), (5.119) prepíšme rovnice (5.115):

$$\sum_{j=1}^{p}\underbrace{\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}_j\,\partial\dot{q}_i}}_{{}^1K_{ij}}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{p}\underbrace{\frac{\partial^2 K}{\partial q_j\,\partial\dot{q}_i}}_{{}^2K_{ij}}\dot{q}_j+\underbrace{\frac{\partial^2 K}{\partial t\,\partial\dot{q}_i}}_{K_{it}}-\underbrace{\frac{\partial K}{\partial q_i}}_{K_i}=$$

$$=Q_i^A-\underbrace{\frac{\partial P}{\partial q_i}}_{P_i}-\underbrace{\frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i}}_{D_i}+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial q_i}}_{f_{ki}} \tag{5.120}$$

$i = 1, 2, \ldots, p$. Algebrické rovnice (5.115), (5.119), (5.120) sú lineárne vzhľadom na neznáme $\ddot{q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$ a λ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$.

Rovnice (5.120) zapíšeme vo forme rozdelených matíc:

$$\left[\begin{array}{c:c} K_{11}\ldots K_{1p} & f_{11}\ldots f_{r1} \\ \vdots & \\ K_{p1}\ldots K_{pp} & f_{1p}\ldots f_{rp} \\ \hdashline f_{11}\ldots f_{1p} & 0\ldots 0 \\ \vdots & \\ f_{r1}\ldots f_{rp} & 0\ldots 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_p \\ \hdashline -\lambda_1 \\ \vdots \\ -\lambda_r \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} Q_1^A-P_1-D_1+K_1-K_{1t}-\sum_{j=1}^{p}{}^2K_{1j}\dot{q}_j \\ \vdots \\ Q_p^A-P_p-D_p+K_p-K_{pt}-\sum_{j=1}^{p}{}^2K_{pj}\dot{q}_j \\ \hdashline -\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}f_{1ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-2\sum_{i=1}^{p}f_{1it}\dot{q}_i-f_{1tt} \\ \vdots \\ -\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}f_{rij}\dot{q}_i\dot{q}_j-2\sum_{i=1}^{p}f_{rit}\dot{q}_i-f_{rtt} \end{array}\right] \tag{5.121}$$

a v kompaktnom zápise:

$$\begin{bmatrix}\mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2^T \\ \mathcal{K}_2 & \mathcal{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\bar{q}} \\ -\bar{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2\end{bmatrix} \tag{5.122}$$

V čase $t = 0$ sú známe začiatočné hodnoty:

$$q_i = q_{i0} \tag{5.123}$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_{i0} \tag{5.124}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$. Začiatočné hodnoty závislých súradníc q_{i0} a ich derivácii $\dot{q}_{i0}$ pre $i = n+1, \ldots, n+r = p$ vypočítame z rovníc (5.117) a (5.118). Kinematické veličiny vo forme súradníc vektorov $\dot{\bar{q}}(t_j)$ a $\bar{q}(t_j)$, ktoré sme vypočítali pri j-tom kroku integrácie, dosadíme do prvkov matíc $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ v rovnici (5.122) a vypočítame vektor $[\ddot{\bar{q}}(t_j), -\bar{\lambda}(t_j)]$. Metódou Rungeho-Kuttu alebo Adamsovou metódou numericky integrujeme pohybové rovnice, pričom integráciou vektora $\ddot{\bar{q}}(t_j)$ získame vektory rýchlosti $\dot{\bar{q}}(t_{j+1})$ a polohy $\bar{q}(t_{j+1})$ v čase t_{j+1}:

$$t_{j+1} = t_j + \Delta t_j \tag{5.125}$$

Súradnice získaných vektorov sú začiatočnými hodnotami pre (j + 1)-krok.

5.2.3 Reakcie v spojeniach členov SVT

Holonómne väzby v SVT, ktoré majú všeobecný tvar podľa (5.117), vyjadríme pomocou karteziánskych súradníc:

$$f_k(x_k, y_k, z_k) = 0 \tag{5.126}$$

$k = 1, 2, \ldots, r$, pre ktoré máme transformačné vzťahy:

$$x_k = x_k(q_i) \tag{5.127a}$$

$$y_k = y_k(q_i) \tag{5.127b}$$

$$z_k = z_k(q_i) \tag{5.127c}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Veľkosti zložiek R_{kx}, R_{ky}, R_{kz} reakcií $\bar{R}_k$ v spojeniach vyjadríme pomocou <u>Lagrangeových multiplikátorov</u> λ_{kx}, λ_{ky}, λ_{kz}:

$$R_{kx} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{kx} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \tag{5.128a}$$

$$R_{ky} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ky} \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \tag{5.128b}$$

$$R_{kz} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{kz} \frac{\partial f_k}{\partial z_k} \tag{5.128c}$$

Ak reakcie $\bar{R}_k$ považujeme za akčné sily, veľkosti zovšeobecnených zložiek reakcií R_k sú zovšeobecnené sily Q_i^R, ktoré vyjadríme podľa <u>princípu virtuálnych prác</u> v tvare

$$Q_i^R = \sum_{k=1}^{r} \left(R_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + R_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + R_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \tag{5.129}$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

Vzhľadom na rovnice (5.128abc) z (5.129) vyplýva:

$$Q_j^R = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \tag{5.130}$$

Ak SVT v každej nezávislej slučke myslene rozpojíme v jednom spojení, väzobné podmienky:

$$f_{kx} \equiv x_k = 0 \tag{5.131a}$$

$$f_{ky} \equiv y_k = 0 \tag{5.131b}$$

$$f_{kz} \equiv z_k = 0 \tag{5.131c}$$

$k = 1, 2, \ldots, r$ (počet rozpojených miest) vyjadrujú, že telesá sú v skutočnosti spojené. Potom v rovniciach (5.128abc):

$$R_{kx} = \lambda_{kx} \tag{5.132a}$$

$$R_{ky} = \lambda_{ky} \tag{5.132b}$$

$$R_{kz} = \lambda_{kz} \tag{5.132c}$$

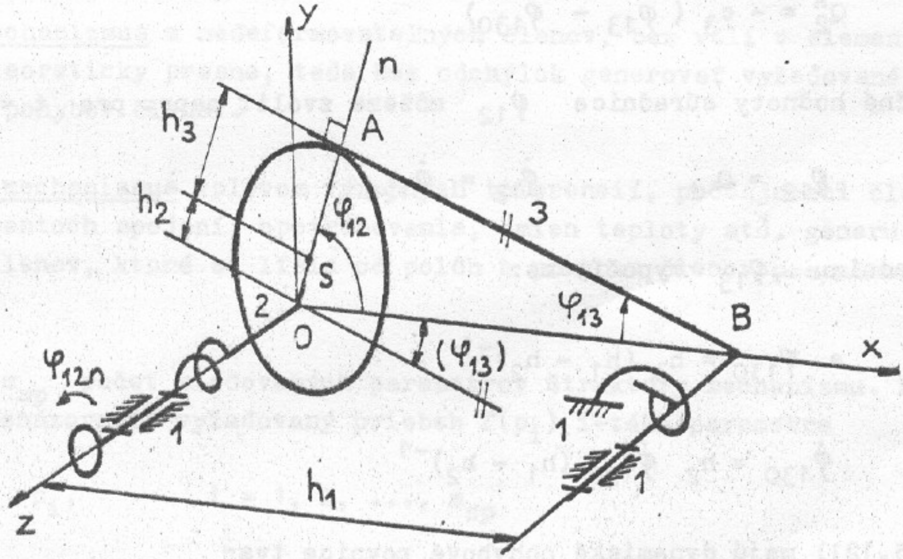
lebo

$$\frac{\partial f_{kx}}{\partial x_k} \doteq \frac{\partial f_{ky}}{\partial y_k} = \frac{\partial f_{kz}}{\partial z_k} = \delta_k \qquad (5.133)$$

kde δ_k je Kroneckerov symbol.

Príklad 5.29:

Pripravte vstupy pre numerický výpočet priebehu pohybu výstupného hnaného člena 3-vačkového mechanizmu na obr. 5.41 v závislosti od daného pohybu $\varphi_{12n} = \varphi_{12n}(t)$ pohonu a priebeh reakcie v mieste A spojenia telies 2, 3, keď sú dané rozmery h_1, h_2 (excentricita kruhovej vačky so stredom S), h_3, momenty zotrvačnosti I_2, I_3 telies 2, 3 k osiam otáčania, torzné tuhosti c_2 (hnacieho hriadeľa), c_3 (plochej pružiny).



Obr. 5.41
Vačkový mechanizmus s poddajným hnacím hriadeľom

Riešenie:

Podľa (5.115), (5.116) máme pre mechanizmus dynamické pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i^A + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad (5.134a)$$

$$i = 1, 2, \ldots, p$$

Pre opis polohy členov mechanizmu máme nezávislú lokálnu súradnicu $q_1 \equiv q_{n1} = \varphi_{12}$ polohy telesa 2 voči 1 a závislú lokálnu súradnicu $q_2 \equiv q_{z1} = \varphi_{13}$ výstupného hnaného člena 3 voči 1, teda p = = 2. Explicitnú skalárnu väzobnú rovnicu dostaneme z mnohouholníka OSABO pomocou priemetov do normály n (obr. 5.41):

$$f \equiv h_2 \, s \, (\varphi_{12} + \varphi_{13}) + h_3 - h_1 \, s \, \varphi_{13} = 0 \tag{5.134b}$$

Kinetická energia:

$$K = (I_2 \, \dot{\varphi}_{12}^2 + I_3 \, \dot{\varphi}_{13}^2) \tag{5.134c}$$

Akčné sily:

$$Q_1^A = c_2 \, (\varphi_{12n} - \varphi_{12}) \tag{5.134d}$$

$$Q_2^A = - c_3 \, (\varphi_{13} - \varphi_{130}) \tag{5.134e}$$

Začiatočné hodnoty súradnice φ_{12} môžeme zvoliť napr. pre $t = 0$:

$$\varphi_{12} = 0 \, , \qquad \dot{\varphi}_{12} = \dot{\varphi}_{120} \tag{5.134f}$$

Pre súradnicu φ_{13} vypočítame:

$$s \, \varphi_{130} = h_3 \, (h_1 - h_2)^{-1} \tag{5.134g}$$

$$\dot{\varphi}_{130} = h_2 \, \dot{\varphi}_{120} \, (h_1 - h_2)^{-1} \tag{5.134h}$$

Podľa (5.121) majú dynamické pohybové rovnice tvar

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 & h_2 c(\varphi_{12}+\varphi_{13}) \\ 0 & I_3 & h_2 c(\varphi_{12}+\varphi_{13}) - h_3 c\varphi_{13} \\ h_2 c(\varphi_{12}+\varphi_{13}), & h_2 c(\varphi_{12}+\varphi_{13}) - h_3 c\varphi_{13}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{12} \\ \ddot{\varphi}_{13} \\ -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_2(\varphi_{12n} - \varphi_{12}) \\ -c_3(\varphi_{13} - \varphi_{130}) \\ h_2(\dot{\varphi}_{12} + \dot{\varphi}_{13})^2 \, s(\varphi_{12} + \varphi_{13}) - h_3 \dot{\varphi}_{13}^2 s\varphi_{13} \end{bmatrix} \tag{5.134ch}$$