5. Dynamická analýza SVT

V dynamickej analýze SVT ukážeme postup pri riešení priamej úlohy, v ktorej treba určiť potrebné zovšeobecnené hnacie sily, aby sa SVT pohybovala predpísaným pohybom a postup pri riešení inverznej úlohy, kde podľa daného časového priebehu zovšeobecnených hnacích síl určíme pohyb členov SVT.

5.1 DYNAMICKÁ ANALÝZA SVT S PREDPÍSANÝM POHYBOM ČLENOV

Pre dynamickú analýzu SVT poznáme:

- pohyb členov SVT,
- hmotnosti členov, polohy ťažísk členov, momenty zotrvačnosti a deviačné momenty členov, odporové účinky, technologické sily a dvojice, direkčné sily pružín a iné zaťažujúce účinky.

Úlohou je určiť pre dané podmienky potrebné zovšeobecnené hnacie sily, aby sa SVT pohybovala predpísaným pohybom, ako aj reakcie v spojeniach telies.

5.1.1 D´A l e m b e r t o v a m e t ó d a

Vytvoríme dynamický matematický model tak, že pre každý člen zostavíme maticovú pohybovú rovnicu dynamickej rovnováhy.

5.1.1.1 Bivektor výsledných akčných síl a momentov dvojíc síl

Na j-tom člene triedy aj vo vybratom vzťažnom spojení bude začiatok O_j lokálneho súradnicového systému $O_j(x_j, y_j, z_j)$. Sily a momenty pôsobiace na j-tý člen pretransformujeme do začiatku O_j. Označme $\bar{F}_{jj}^A$ vektor výslednej akčnej sily, pričom prvý index označuje priestor, v ktorom je vektor vyjadrený súradnicami a druhý index určuje poradie člena v SVT:

$$\bar{F}_{jj}^A = \left\lceil F_{jjx}^A, F_{jjy}^A, F_{jjz}^A \right\rceil \tag{5.1a}$$

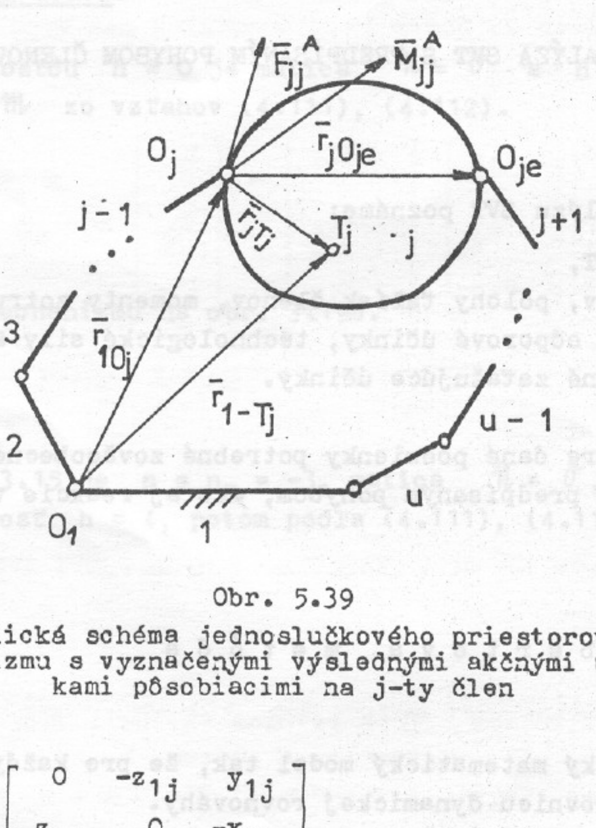
Označme $\bar{M}_{jj}^{A}$ <u>vektor výsledného momentu akčných dvojíc síl:</u>

$$\bar{M}_{jj}^{A} = \left[M_{jjx}^{A},\ M_{jjy}^{A},\ M_{jjz}^{A} \right] \tag{5.1b}$$

Označme $\bar{\mathcal{F}}_{jj}^{A}$ <u>bivektor výsledných akčných síl a momentov:</u>

$$\bar{\mathcal{F}}_{jj}^{A} = \left[\bar{F}_{jj}^{A},\ \bar{M}_{jj}^{A} \right] \tag{5.1c}$$

Označme $\mathcal{R}_{1j}$ antisymetrickú maticu, ktorou zapíšeme polohový vektor $\bar{r}_{10j} = \overrightarrow{O_1 O_j}$, obr. 5.39:



Obr. 5.39

Symbolická schéma jednoslučkového priestorového mechanizmu s vyznačenými výslednými akčnými účinkami pôsobiacimi na j-ty člen

$$\mathcal{R}_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{1j} & y_{1j} \\ z_{1j} & 0 & -x_{1j} \\ -y_{1j} & x_{1j} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Označme $\bar{\mathcal{R}}_{1j}$ bivektor podľa (5.2):

$$\bar{\mathcal{R}}_{1j} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_3, & \mathcal{O} \\ \mathcal{R}_{1j}, & \mathcal{J}_3 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

kde $\mathcal{J}_3$ je jednotková matica typu (3,3) a bivektor $\bar{\mathcal{S}}_{1j}$ matice $\mathcal{S}_{1j}$ smerových kosínusov:

$$\bar{\mathcal{S}}_{1j} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{1j}, & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}, & \mathcal{S}_{1j} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Potom vektory (5.1a), (5.1b) pretransformujeme do priestoru 1:

$$\bar{F}_{1j}^{A} = \mathcal{S}_{1j}\, \bar{F}_{jj}^{A} \tag{5.5a}$$

$$\bar{M}_{1j}^{A} = \mathcal{S}_{1j}\, \bar{M}_{jj}^{A} + \mathcal{R}_{1j}\, \mathcal{S}_{1j}\, \bar{F}_{jj}^{A} \tag{5.5b}$$

a vo forme bivektorov:

$$\bar{\mathcal{F}}_{1j}^{A} = \bar{\mathcal{R}}_{1j}\, \bar{\mathcal{S}}_{1j}\, \bar{\mathcal{F}}_{jj}^{A} \tag{5.5c}$$

5.1.1.2 Bivektory reakčných síl a momentov dvojíc síl

Reakčné sily $\bar{F}_{jj}^{R}$ a momenty $\bar{M}_{jj}^{R}$ pôsobiace vo vzťažnom spojení na j-tom člene zapíšeme analogicky bivektorom:

$$\bar{\mathcal{F}}_{jj}^{R} = \left[\bar{F}_{jj}^{R},\ \bar{M}_{jj}^{R} \right] \tag{5.6}$$

Keďže bivektor v spojení triedy $t < 6$ má t neznámych súradníc, napr. pre R spojenie, v ktorom je os z osou rotácie:

$$\bar{\mathcal{F}}^{R} = \left[F_x^R,\ F_y^R,\ F_z^R,\ M_x^R,\ M_y^R,\ 0 \right] \tag{5.7}$$

potom neznáme hnacie účinky $\bar{M}_z^A$ pôsobiace v osi z zahrnieme medzi neznáme reakcie v spojení. Reakčné sily $\bar{F}_{je}^{R}$ a momenty $\bar{M}_{je}^{R}$ v spojení S_e na j-tom člene (obr. 5.39), kde je začiatok O_{je}, pretransformujeme do O_j a označíme:

$$\bar{F}_{je}^{*R} = -\,\mathcal{S}_{je}\, \bar{F}_{ee}^{R} \tag{5.8}$$

$$\bar{M}_{je}^{*R} = -\,\mathcal{R}_{je}\, \mathcal{S}_{je}\, \bar{F}_{ee}^{R} - \mathcal{S}_{je}\, \bar{M}_{ee}^{R} \tag{5.9}$$

a vo forme bivektora

$$\bar{\mathcal{F}}_{je}^{*R} = \left[\bar{F}_{je}^{*R},\ \bar{M}_{je}^{*R} \right] \tag{5.10}$$

5.1.1.3 Bivektor výsledných zotrvačných síl a momentov

Výsledná zotrvačná sila $\bar{F}_{1j}^{D}$ pôsobiaca na j-ty člen

$$\bar{F}_{1j}^{D} = - m_j \ddot{\bar{r}}_{1Tj} \tag{5.11}$$

kde m_j je hmotnosť j-teho člena a $\ddot{\bar{r}}_{1Tj}$ je zrýchlenie ťažiska T_j j-teho člena, ktoré získame kinematickou analýzou (obr. 5.39). Transformáciu $\bar{F}_{1j}^{D}$ do priestoru člena j urobíme pomocou

$$\mathcal{S}_{j1} = \mathcal{S}_{1j}^{T} \tag{5.12}$$

$$\bar{F}_{jj}^{D} = \mathcal{S}_{j1} \bar{F}_{1j}^{D} \tag{5.13}$$

Výsledný zotrvačný moment $\bar{M}_{jj}^{D}$ vyplýva zo zovšeobecnených Eulerových dynamických rovníc, pretože $O_j \neq T_j$ a osi x_j, y_j, z_j nie sú vo všeobecnosti hlavnými osami zotrvačnosti:

$$\bar{M}_{jj}^{D} = - (\mathcal{J}_{jj} \dot{\bar{\omega}}_{1j} + \Lambda_{1j} \mathcal{J}_{jj} \bar{\omega}_{1j}) + \mathcal{R}_{jTj} \bar{F}_{jj}^{*D} \tag{5.14}$$

kde $\mathcal{J}_{jj}$ je matica (tenzor) zotrvačnosti člena j k osiam x_j, y_j, z_j:

$$\mathcal{J}_{jj} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_z \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

a

$$\bar{F}_{jj}^{*D} = - m_j \ddot{\bar{r}}_{jO_j} \tag{5.16}$$

Bivektor $\bar{\mathcal{F}}_{jj}^{D}$ výsledných zotrvačných účinkov bude

$$\bar{\mathcal{F}}_{jj}^{D} = \left[\bar{F}_{jj}^{D}, \bar{M}_{jj}^{D} \right] \tag{5.17}$$

5.1.1.4 Maticová pohybová rovnica dynamickej rovnováhy

Pre j-ty člen je

hviezdička

$$\bar{\mathcal{F}}_{jj}^{A} + \bar{\mathcal{F}}_{jj}^{D} + \bar{\mathcal{F}}_{jj}^{R} + \sum_{e=1}^{g-1} \bar{\mathcal{F}}_{je}^{*R} = \mathcal{O} \tag{5.18}$$

kde $j = 2, 3, \ldots, u$.

Vzťah (5.18) reprezentuje teda sústavu $6(u-1)$ algebraických rovníc. Pohyblivosť $n = n_G$ korektnej SVT podľa (1.52) je zároveň počet neznámych hnacích účinkov. Reakcie v spojení triedy t znamenajú t neznámych, potom v počte s_t (1.15) spojení máme počet

$$m_R = \sum_{t=1}^{n_v-1} t\, s_t \tag{5.19}$$

neznámych reakcií. Zo vzťahu (1.52) vyplýva:

$$6(u-1) = n + \sum_{t=1}^{n_v-1} t\, s_t \tag{5.20}$$

teda počet rovníc (5.18) sa rovná počtu neznámych.

5.1.2 L a g r a n g e o v a m e t ó d a p r e O M

Matematický dynamický model pre u-členný OM tvoria Lagrangeove rovnice II. druhu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i \tag{5.21}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, m$, pričom podľa (1/70) m je počet pohyblivých členov OM,

q_i - zovšeobecnené lokálne nezávislé súradnice polohy členov,

$\dot{q}_i$ - potom zovšeobecnené rýchlosti,

K - celková kinetická energia SVT,

Q_i - zovšeobecnené sily, ktoré môžeme pre nekonzervatívnu SVT s vonkajšími akčnými účinkami Q_i^A (posuvnými silami F_i, alebo krútiacimi momentmi M_i) vyjadriť v tvare

$$Q_i = Q_i^A - \frac{\partial P}{\partial q_i} \qquad (5.22)$$

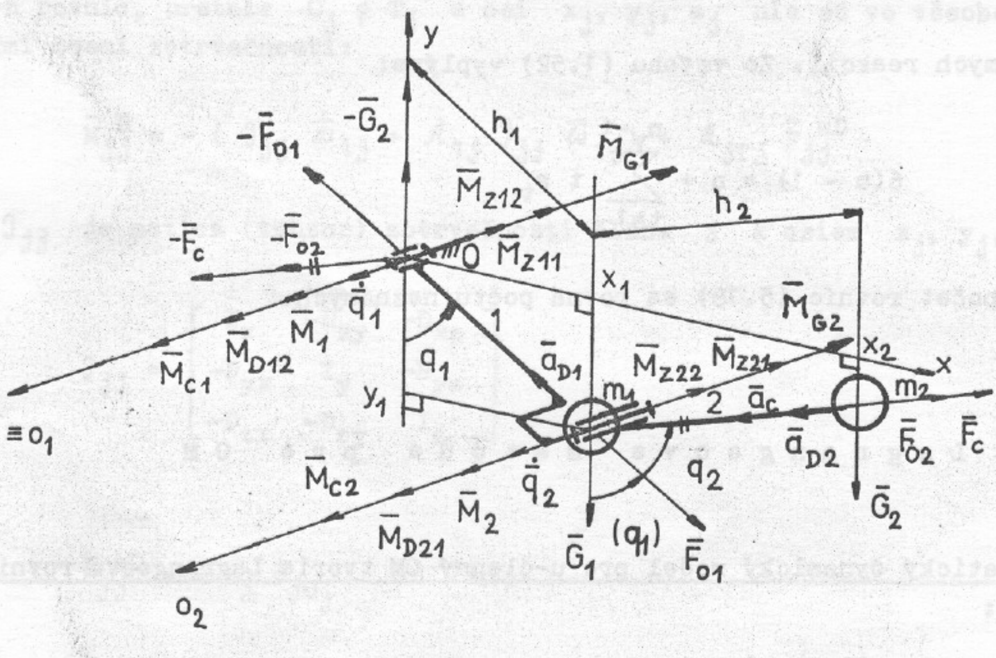
kde P je celková potenciálna energia SVT v gravitačnom poli. Označme L Lagrangián

$$L = K - P \qquad (5.23)$$

5.1.2.1 Dynamický model dvojčlenného OM

Príklad 5.28:

Zostavte matematický model dvojčlenného OM na obr. 5.40, v ktorom hmotnosti m_1, m_2 členov sústredíme na konce členov dĺžky h_1, h_2.



Obr. 5.40
Otvorený mechanizmus s dvoma pohyblivými členmi

Riešenie:

OM má rotačné spojenia, potom označíme q_1, q_2 lokálne súradnice polohy členov v spojeniach S_1, S_2.

Celková kinetická a potenciálna energia SVT pre m_1:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 h_1^2 \dot{q}_1^2 \tag{5.24}$$

$$P_1 = - m_1 g h_1 c q_1 \tag{5.25}$$

pre m_2:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{5.26}$$

kde

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \tag{5.27}$$

Deriváciou karteziánskych súradníc x_2, y_2 polohy hmotného bodu m_2:

$$x_2 = h_1 s q_1 + h_2 s (q_1 + q_2) \tag{5.28}$$

$$y_2 = - h_1 c q_1 - h_2 c (q_1 + q_2) \tag{5.29}$$

dostaneme:

$$\dot{x}_2 = h_1 c q_1 \dot{q}_1 + h_2 c (q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \tag{5.30}$$

$$\dot{y}_2 = h_1 s q_1 \dot{q}_1 + h_2 s (q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \tag{5.31}$$

Po umocnení a úprave:

$$v_2^2 = h_1^2 \dot{q}_1^2 + h_2^2(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + (2h_1h_2cq_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2) \tag{5.32}$$

kedže

$$P_2 = - m_2 g y_2 \tag{5.33}$$

podľa (5.29)

$$P_2 = - m_2 g h_1 c q_1 - m_2 g h_2 c (q_1 + q_2) \tag{5.34}$$

Lagrangián podľa (5.23) je potom

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, h_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 h_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) +$$

$$+ (m_2 h_1 h_2 c q_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2) + (m_1 + m_2)\, g h_1 c q_1 +$$

$$+ m_2 g h_2 c\, (q_1 + q_2) \tag{5.35}$$

Dynamické rovnice podľa (5.21), (5.22), (5.23) budú mať tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = M_i \tag{5.36}$$

kde $i = 1, 2$.

Pre náš prípad bude

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\, h_1^2 \dot{q}_1 + m_2 h_2^2 \dot{q}_1 + m_2 h_2^2 \dot{q}_2 +$$

$$+ (2 m_2 h_1 h_2 c q_2)\, \dot{q}_2 + (m_2 h_1 h_2 c q_2)\, \dot{q}_2 \tag{5.37}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left[(m_1 + m_2)\, h_1^2 + m_2 h_2^2 + 2 m_2 h_1 h_2 c q_2\right]\ddot{q}_1 + \left[\, m_2 h_2^2 +\right.$$

$$\left. + m_2 h_1 h_2 c q_2\,\right]\ddot{q}_2 - (2 m_2 h_1 h_2 s q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - (m_2 h_1 h_2 s q_2)\dot{q}_2^2 \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2) g h_1 s q_1 - m_2 g h_2 s (q_1 + q_2) \tag{5.39}$$

<u>Krútiaci moment</u> $\bar{M}_1$ s veľkosťou M_1 z rovnice (5.36) má nositeľku os o_1 (obr. 5.40) a po dosadení (5.37), (5.38), (5.39) do (5.36) bude

$$M_1 = \overbrace{\left[(m_1 + m_2) h_1^2 + m_2 h_2^2 + 2 m_2 h_1 h_2 c q_2\right]}^{k_{z11}} \ddot{q}_1 + \overbrace{\left[\overbrace{m_2 h_2^2}^{k_{z22}} + m\, h_1 h_2 c q_2\right]}^{k_{z12}} \ddot{q}_2 -$$

$$- \underbrace{(2m_2h_1h_2sq_2)}_{k_{C1}}\dot{q}_1\dot{q}_2 - \underbrace{(m_2h_1h_2sq_2)}_{k_{D12}}\dot{q}_2^2 +$$

$$+ \underbrace{\left[(m_1 + m_2)h_1sq_1 + m_2h_2s(q_1 + q_2)\right]}_{k_{G1}} g \qquad (5.40)$$

Podľa (5.35)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2h_2^2\dot{q}_1 + m_2h_2^2\dot{q}_2^2 + (m_2h_1h_2cq_2)\dot{q}_1 \qquad (5.41)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2h_2^2\dot{q}_1 + m_2h_2^2\dot{q}_2^2 + (m_2h_1h_2cq_2)\ddot{q}_1 - (m_2h_1h_2sq_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \qquad (5.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -(m_2h_1h_2sq_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - mgh_2s(q_1 + q_2) \qquad (5.43)$$

<u>Krútiaci moment</u> $\bar{M}_2$ z rovnice (5.36) má nositeľku os o_2 a podľa predošlého

$$M_2 = \underbrace{\left[m_2h_2^2 + m_2h_1h_2cq_2\right]}_{k_{z21}}\ddot{q}_1 + \underbrace{m_2h_2^2}_{k_{z22}}\ddot{q}_2 - \underbrace{(2m_2h_1h_2sq_2)}_{k_{C2}}\dot{q}_1\dot{q}_2 -$$

$$- \underbrace{(m_2h_1h_2sq_2)}_{k_{D21}}\dot{q}_1^2 + \underbrace{\left[m_2h_2s(q_1 + q_2)\right]}_{k_{G2}} g \qquad (5.44)$$

a) V rovnici (5.40) označme:

$$k_{z11} = (m_1 + m_2)h_1^2 + m_2h_2^2 + 2m_2h_1h_2cq_2 \qquad (5.45)$$

Koeficient k_{z11} je <u>moment zotrvačnosti</u> <u>I_z</u> <u>systému</u> <u>(m_1, m_2)</u> <u>k osi z</u> globálneho súradnicového systému:

$$k_{z11} \equiv I_z = m_1h_1^2 + m_2(x_2^2 + y_2^2) \qquad (5.46)$$

Uhlové zrýchlenie $\ddot{q}_1$ telesa 1 spôsobí vznik <u>zotrvačného krútiaceho momentu</u> M_{z11} v osi $z \equiv o_1$ (obr. 5.40), potom jeho veľkosť:

$$M_{z11} = k_{z11}\,\ddot{q}_1 \tag{5.47}$$

analogicky bude

$$M_{z22} = k_{z22}\,\ddot{q}_2 \tag{5.48}$$

kde koeficient k_{z22} je moment zotrvačnosti systému (m_1, m_2) k o_2:

$$k_{z22} = m_2 h_2^2 \tag{5.49}$$

Označme $\bar{M}_{z12}$ reakčný krútiaci moment v osi o_1, ktorý indukuje uhlové zrýchlenie $\ddot{q}_2$, pričom jeho veľkosť je

$$M_{z12} = k_{z12}\,\ddot{q}_2 \tag{5.50}$$

kde

$$k_{z12} = m_2 h_2^2 + m_2 h_1 h_2 c q_2 \tag{5.51}$$

a vzhľadom na (5.49)

$$k_{z12} = k_{z22} + m_2 h_1 h_2 c q_2 \tag{5.52}$$

Reakčný krútiaci moment $\bar{M}_{z21}$ v osi o_2 indukuje uhlové zrýchlenie $\ddot{q}_1$ (v rovnici 5.44), pričom jeho veľkosť je

$$M_{z21} = k_{z21}\,\ddot{q}_1 \tag{5.53}$$

kde

$$k_{z21} = k_{z12} \tag{5.54}$$

b) Pri pohybe hmotného bodu m_1 po kružnici má sprievodič uhlovú rýchlosť $\dot{q}_1$ a pôsobením dostredivého zrýchlenia $\bar{a}_{D1}$ vzniká reakčná odstredivá sila $\bar{F}_{O1}$ (obr. 5.40) a analogicky aj $\bar{F}_{O2}$.

Označme $\bar{M}_{D11}$ dostredivý krútiaci moment v osi o_1, pre ktorý je zrejme

$$M_{D11} = k_{D11}\,\dot{q}_1^2 \equiv 0 \tag{5.55}$$

lebo nositeľka sily $\bar{F}_{O1}$ je s osou o_1 rôznobežná.