

Označme α_i uhol mimobežiek z_{i-1}, z_i

$$\alpha_i = \angle (z_{i-1}, z_i) \quad (4.20f)$$

Označme d_i vzdialenosť

$$d_i = \overline{O_{i-1}P_{i-1}} \quad (4.20g)$$

a označme δ_i uhol osí x_{i-1}, x_i

$$\delta_i = \angle (x_{i-1}, x_i) \quad (4.20h)$$

Podľa (4.9) je poloha bodu $L \in U_i$ s lokálnymi súradnicami polohy (obr. 4.33b):

$$k_{i-1,L} = T_{i-1,i} k_{iL} \quad (4.21)$$

kde $T_{i-1,i}$ je Hartenbergova-Denavitova (HD) transformačná matica ako funkcia štyroch prvkov: $\delta_i, d_i, a_i, \alpha_i$:

$$T_{i-1,i} = T_{z6}(\delta_i) T_{z3}(d_i) T_{z1}(a_i) T_{z4}(\alpha_i) \quad (4.22)$$

a po vynásobení matic:

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\delta_i & -s\delta_i c\alpha_i & s\delta_i s\alpha_i & a_i c\delta_i \\ s\delta_i & c\delta_i c\alpha_i & -c\delta_i s\alpha_i & a_i s\delta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Poloha bodu $L \in U_i$ s globálnymi súradnicami polohy je podľa (4.9) a (4.21):

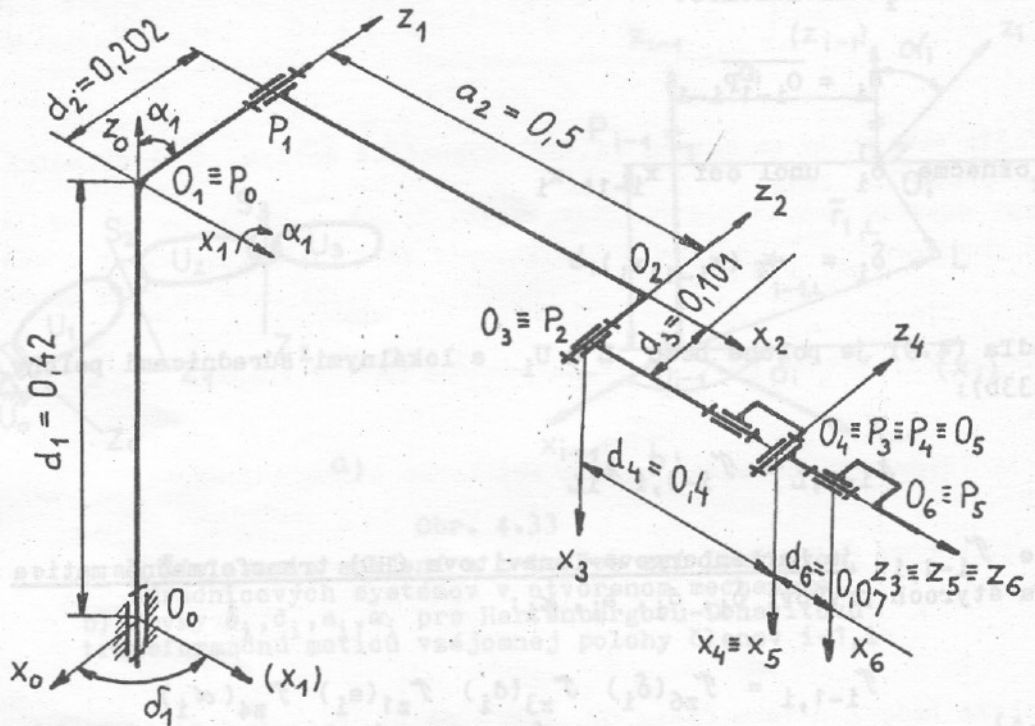
$$k_{oL} = T_{o,i-1} T_{i-1,i} k_{iL} \quad (4.24)$$

Príklad 4.23:

V OM laboratórneho robota LABROB na obr. 4.34 vyznačte osi lokálnych súradnicových systémov vhodných pre HD transformačné matice a podľa daných rozmerov vypíšte ich prvky $\delta_i, d_i, a_i, \alpha_i$.

Riešenie:

Podľa vzťahov (4.20a) až (4.20h) vyznačíme osi z_i, x_i, y_i a prvky HD matíc vypíšeme do tab. 4.13, pričom $x_2 = z_3, y_2 = x_3, x_4 = x_5, y_5 = z_4$.



Obr. 4.34

Otvorený mechanizmus s vyznačenými lokálnymi súradnicovými systémami

Tabuľka 4.13

Člen	U_i	δ_i	d_i	a_i	α_i
1		$\sim 90^\circ$	0,42	0	-90°
2		$\sim 0^\circ$	0,202	0,5	0°
3		$\sim 90^\circ$	0	0	90°
4		$\sim 0^\circ$	0,4	0	-90°
5		$\sim 0^\circ$	0	0	90°
6		$\sim 0^\circ$	0,07	0	0°

4.4 POLOHA ČLENŮ JM

Z celkového počtu c lokálních souřadnic polohy členů JM je podle (3.3) n^s nezávislých souřadnic q_{ni} polohy vstupných hnacích členů, přičemž funkce:

$$q_{ni} = q_{ni}(t) \quad (4.25)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n^s$ sú dané a pomocou nich určujeme závislé lokálne súradnice q_{zj} polohy hnacích členů:

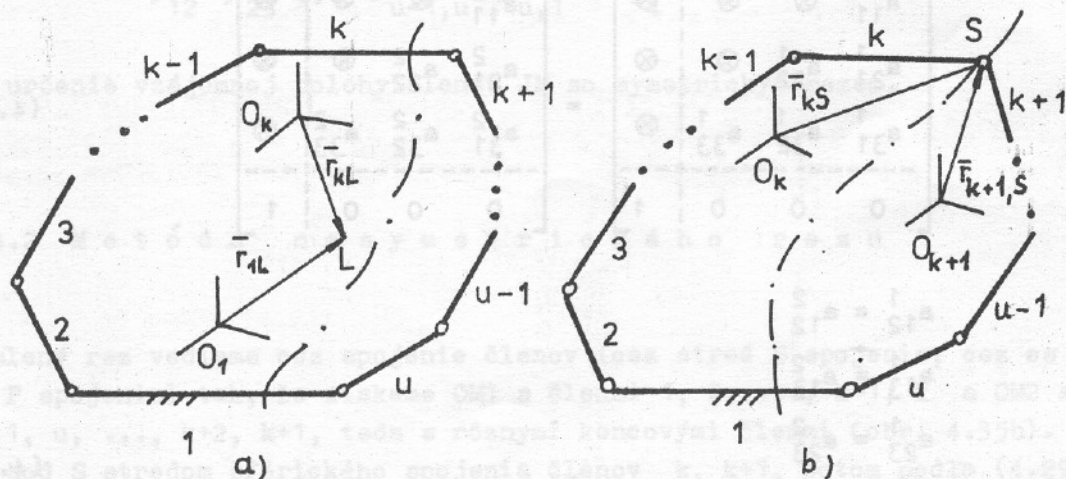
$$q_{zj} = q_{zj}(q_{ni}) \quad (4.26)$$

kde $j = 1, 2, \dots, z^s$ podľa (3.3).

Rovnice (4.26) získame maticovou metódou myšleného rezu.

4.4.1 Metóda symetrického rezu

Urobme myšlený rez ľubovoľným k -tým členom JM tak, že dostaneme OM1 s členmi $1, 2, \dots, k-1, k$ a OM2 s členmi $1, u, \dots, k+1, k$ (obr. 4.35a), pričom oba OM majú ten istý koncový člen k .



Obr. 4.35

- a) Myslený symetrický rez k -tým členom jednoslučkového mechanizmu
- b) Myslený nesymetrický rez cez spojenie členov $k, k+1$ jednoslučkového mechanizmu

Bod $L \in k$ je spoločný bod OM1 aj OM2, teda podľa (4.18):

$$k_{1L} = \tau_{12} \tau_{23} \dots \tau_{k-1,k} k_{kL} \quad (4.27)$$

aj

$$k_{1L} = \tau_{1u} \tau_{u,u-1} \dots \tau_{k+1,k} k_{kL} \quad (4.28)$$

Porovnaním pravej strán rovníc (4.27), (4.28) dostaneme:

$$\tau_{12} \tau_{23} \dots \tau_{k-1,k} k_{kL} = \tau_{1u} \tau_{u,u-1} \dots \tau_{k+1,k} k_{kL} \quad (4.29)$$

Z rovnice (4.29) po úprave máme maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov JM so symetrickým rezom:

$$\tau_{12} \tau_{23} \dots \tau_{k-1,k} = \tau_{1u} \tau_{u,u-1} \dots \tau_{k+1,k} \quad (4.30)$$

Po vynásobení transformačných matic v rovnici (4.30) dostaneme rovnosť matic typu $(4,4) = (4,4)$, z ktorých porovnaním zodpovedajúcich si prvkov získame 16 skalárnych rovníc. Keďže v priestorovom JM je $z^s \leq 6$ na určenie maximálne 6 neznámych závislých lokálnych súradníc q_{zj} potrebujeme rovnaký počet lineárne nezávislých rovníc. Podľa (4.5), (4.6) môžeme z matice φ porovnať celkove 3 prvky, ale z jedného stĺpca maximálne 2 prvky, ďalšie 3 prvky sú karteziánske súradnice polohového vektora $\vec{r}_{1k}$. Jedna z možností výberu prvkov je v nasledujúcej rovnici pre OM1 a OM2 podľa (4.30):

$$\begin{bmatrix} a_{11}^1 & \otimes & \otimes & \otimes \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \otimes & \otimes \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & \otimes \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & \otimes & \otimes & \otimes \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & \otimes & \otimes \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & \otimes \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31a)$$

$$\begin{aligned} a_{12}^1 &= a_{12}^2 \\ a_{13}^1 &= a_{13}^2 \\ a_{23}^1 &= a_{23}^2 \\ a_{14}^1 &= a_{14}^2 \\ a_{24}^1 &= a_{24}^2 \\ a_{34}^1 &= a_{34}^2 \end{aligned} \quad (4.31b)$$

Rovnice (4.31b) majú všeobecný tvar

$$f_j(q_{zj}, q_{ni}) = 0 \quad (4.31c)$$

kde $j = 1, 2, \dots, z^s$, $i = 1, 2, \dots, n^s$.

Sústavu nelineárnych rovníc (4.31c) riešime obyčajne numericky. Rovnice (4.31c) v maticovej forme majú tvar

$$\vec{f}(\vec{q}_z, \vec{q}_n) = \vec{0} \quad (4.31d)$$

kde $\vec{f}$ je vektor rovníc polohy

$$\vec{f} = [f_1, f_2, \dots, f_{z^s}] \quad (4.31e)$$

$\vec{q}_z$ je vektor súradníc polohy hnacích členov

$$\vec{q}_z = [q_{z1}, q_{z2}, \dots, q_{zz^s}] \quad (4.31f)$$

a $\vec{q}_n$ je vektor súradníc polohy vstupných hnacích členov

$$\vec{q}_n = [q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn^s}] \quad (4.31g)$$

Po vynásobení rovnice (4.30) maticou inverznou k pravej strane dostaneme maticovú rovnicu

$$\tau_{12} \tau_{23} \dots \tau_{u-1,u} \tau_{u,1} = \tau_4 \quad (4.32)$$

na určenie vzájomnej polohy členov JM so symetrickým rezom.

4.4.2 Metóda nesymetrického rezu

Myslený rez vedieme cez spojenie členov (cez stred S spojenia, cez os R alebo P spojenia) tak, že získame OM1 s členmi 1, 2, ..., k-1, k a OM2 s členmi 1, u, ..., k+2, k+1, teda s rôznymi koncovými členmi (obr. 4.35b). Nech je bod S stredom sférického spojenia členov k, k+1, potom podľa (4.29) dostaneme maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov JM s nesymetrickým rezom:

$$\tau_{12} \tau_{23} \dots \tau_{k-1,k} \tau_{k,S} = \tau_{1u} \tau_{u,u-1} \dots \tau_{k+2,k+1} \tau_{k+1,S} \quad (4.33)$$

Po roznásobení členov rovnice (4.33) dostaneme rovnosť matíc typu $(4,1) = (4,1)$, z ktorých porovnaním zodpovedajúcich si prvkov získame 3 lineárne nezávislé skalárne rovnice (štvrtá je triviálna) na určenie maximálne 3 neznámych závislých lokálnych súradníc polohy hnanych členov. Tým, že sme viedli rez stredom sférického spojenia v rovnici (4.33) sa nevyskytujú 3 súradnice polohy telesa v S spojení. V prípade použitia metódy nesymetrického rezu pre R alebo P spojenie sa v skalárnych rovniciach typu (4.31c) nevyskytujú tie zo súradníc polohy telesa v spojení telies $k, k+1$, ktoré nie sú v sprievodičoch $\mathcal{R}_{k,S}, \mathcal{R}_{k+1,S}$.

4.4.3 Poloha členov vo sférickom JM

Keďže vo sférickom mechanizme (obr. 4.36b), kde jeden bod patriaci všetkým členom je voči vzťažnému priestoru nepohyblivý, môžu telesá konať vzájomný sférický alebo rotačný pohyb; je pohyblivosť "voľného" telesa

$$n_v = 3 \quad (4.34a)$$

Potom podľa (1.55e) máme:

$$z = 3 \quad (4.34b)$$

závislé súradnice polohy hnanych členov. Z rovnice (4.30) získame maticovú rovnicu vzájomnej polohy členov sférického JM so symetrickým rezom:

$$\mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{23} \cdots \mathcal{P}_{k-1,k} = \mathcal{P}_{1u} \mathcal{P}_{u,u-1} \cdots \mathcal{P}_{k+1,k} \quad (4.35)$$

z ktorej po vynásobení matíc smerových kosínusov dostaneme rovnosť matíc typu $(3,3) = (3,3)$ a porovnaním zodpovedajúcich si prvkov, napríklad podľa (4.31a), máme 3 lineárne nezávislé rovnice na určenie 3 závislých súradníc polohy hnanych členov.

4.4.4 Poloha členov v rovinnom mechanizme

Pri aplikácii metódy rezu na analýzu polohy členov v rovinnom JM sa zníži rád matíc, lebo vynecháme riadok a stĺpec prislúchajúci tej osi súradnicového systému, ktorá neleží v rovine mechanizmu. Potom z rovnice (4.30) pre symetrický rez získame rovnosť matíc typu $(3,3) = (3,3)$, z ktorých porovnaním

zodpovedajúcich si vhodných prvkov dostaneme 3 lineárne nezávislé skalárne rovnice potrebné na určenie 3 závislých lokálnych súradníc polohy hnaných členov. Z rovnice (4.33) získame rovnosť matic typu $(3,1) = (3,1)$, ktoré nám poskytnú len 2 lineárne nezávislé skalárne rovnice. Tretiu skalárnu rovnicu potrebnú na určenie poslednej súradnice polohy hnaného člena získame z vlastností štruktúry rovinného JM, v ktorej súčet vnútorných uhlov mnoho-uholníka je násobok π .

4.5 POLOHA ČLENOV VM

Počet závislých súradníc polohy hnaných členov v priestorovom VM je podľa (1.55e)

$$z = 6k \quad (4.36)$$

kde k je počet ZS (1.30). Pre každú ZS, ktorá reprezentuje JM, napíšeme maticovú rovnicu (4.32) vzájomnej polohy členov JM so symetrickým rezom, z ktorých získame potrebných $6k$ lineárne nezávislých skalárnych rovníc.

4.6 RÝCHLOSŤ BODU

Deriváciou maticovej transformačnej rovnice (4.9) polohy bodu L podľa času dostaneme rýchlosť bodu L $\in b$ v priestore a:

$$\dot{\mathbf{r}}_{aL} \equiv \mathbf{v}_{aL} = \dot{\mathbf{r}}_{ab} \mathbf{r}_{bL} \quad (4.37)$$

kde $\dot{\mathbf{r}}_{ab}$ je podľa (4.8):

$$\dot{\mathbf{r}}_{ab} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{ab} & \dot{\dot{\mathbf{r}}}_{ab} \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Keďže platí:

$$\mathbf{r}_{ab} \mathbf{r}_{ab}^{-1} = \mathbf{I} \quad (4.39)$$

môžeme písať:

$$\dot{\mathcal{I}}_{ab} = \mathcal{I}_{ab} \mathcal{I}_{ab}^{-1} \dot{\mathcal{I}}_{ab} \quad (4.40)$$

Inverznú maticu $\mathcal{I}_{ab}^{-1}$ určíme pomocou rozpísanej rovnice (4.39):

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{ab} & \bar{\mathcal{I}}_{ab} \\ \sigma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \beta \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 & \sigma^T \\ \sigma & 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Roznásobením matic v (4.41) zistíme, že

$$c = \sigma, d = 1, a = \mathcal{I}_{ab}^{-1} \equiv \mathcal{I}_{ab}^T, \beta = -\mathcal{I}_{ab}^{-1} \bar{\mathcal{I}}_{ab} \equiv -\mathcal{I}_{ab}^T \bar{\mathcal{I}}_{ab}$$

teda

$$\mathcal{I}_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{ab}^T & -\mathcal{I}_{ab}^T \bar{\mathcal{I}}_{ab} \\ \sigma & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Označme $\mathcal{V}_{ab}$ maticu rýchlostí bodov telesa b pri pohybe b:a, ktorá je vyjadrená v priestore b:

$$\mathcal{V}_{ab} = \mathcal{I}_{ab}^{-1} \dot{\mathcal{I}}_{ab} \quad (4.43)$$

dosadíme (4.43) do (4.40):

$$\dot{\mathcal{I}}_{ab} = \mathcal{I}_{ab} \mathcal{V}_{ab} \quad (4.44)$$

Po vynásobení matic (4.38), (4.42) v (4.43) dostaneme:

$$\mathcal{V}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{ab}^T \dot{\mathcal{I}}_{ab} & \mathcal{I}_{ab}^T \dot{\bar{\mathcal{I}}}_{ab} \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Analogicky podľa (4.40) platí:

$$\dot{\mathcal{I}}_{ab} = \mathcal{I}_{ab} \mathcal{I}_{ab}^{-1} \dot{\mathcal{I}}_{ab} \quad (4.46)$$

Označme $\mathcal{A}_{ab}$ maticu uhlovej rýchlosti pri pohybe telesa b voči a, ktorá je vyjadrená v priestore b:

$$\mathcal{A}_{ab} = \mathcal{I}_{ab}^{-1} \dot{\mathcal{I}}_{ab} \equiv \mathcal{I}_{ab}^T \dot{\mathcal{I}}_{ab} \quad (4.47)$$

Vzťah (4.46) po dosadení z (4.47) má tvar

$$\mathcal{P}_{ab} = \mathcal{P}_{ab} \mathcal{L}_{ab} \quad (4.48)$$

Presvedčme sa, že matica $\mathcal{L}_{ab}$ je polosúmerná a singulárna. Derivujeme podľa času rovnicu

$$\dot{\mathcal{P}}_{ab}^T \mathcal{P}_{ab} = \mathcal{J} \quad (4.49a)$$

$$\dot{\mathcal{P}}_{ab}^T \mathcal{P}_{ab} + \mathcal{P}_{ab}^T \dot{\mathcal{P}}_{ab} = \sigma \quad (4.49b)$$

Vzhľadom na (4.47) je

$$\dot{\mathcal{P}}_{ab}^T \mathcal{P}_{ab} = -\mathcal{L}_{ab} \quad (4.49c)$$

Transponovaná matica $\mathcal{L}_{ab}^T$:

$$\mathcal{L}_{ab}^T = (\mathcal{P}_{ab}^T \dot{\mathcal{P}}_{ab})^T = \dot{\mathcal{P}}_{ab}^T \mathcal{P}_{ab} = -\mathcal{L}_{ab} \quad (4.49d)$$

Polosúmernou maticou $\mathcal{L}_{ab}$ je určený vektor $\bar{\omega}_{ab}$ uhlovej rýchlosti pri pohybe b:a, vyjadrený v priestore b:

$$\mathcal{L}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Vektor $\bar{\omega}_{ab}$ so súradnicami v priestore a dostaneme vynásobením

$$(\bar{\omega}_{ab})_a = \mathcal{P}_{ab} \bar{\omega}_{ab} \quad (4.52)$$

Dosadíme (4.47) do (4.45):

$$\mathcal{V}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{ab} & \mathcal{P}_{ab}^T \dot{\mathcal{P}}_{ab} \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Po dosadení (4.43) dp (4.40) a spoločne do (4.37) je

$$\mathcal{V}_{aL} = \mathcal{T}_{ab} \mathcal{V}_{ab} \mathcal{L}_{bL} \quad (4.54)$$

Deriváciou (4.10) vzhľadom na (4.48) dostaneme rýchlosť bodu $L \in b$ vyjadrenú v priestore a :

$$\dot{\vec{r}}_{aL} = \mathcal{P}_{ab} \mathcal{N}_{ab} \vec{r}_{bL} + \dot{\vec{r}}_{ab} \quad (4.55)$$

pričom $\dot{\vec{r}}_{ab}$ je rýchlosť začiatku O_b v priestore a , $\mathcal{N}_{ab} \vec{r}_{bL}$ je relatívna rýchlosť bodu L voči O_b v priestore a , $\mathcal{P}_{ab} \mathcal{N}_{ab} \vec{r}_{bL}$ je relatívna rýchlosť bodu L voči O_b v priestore a .

4.7 ZRÝCHLENIE BODU

Deriváciou (4.37) podľa času dostaneme zrýchlenie bodu $L \in b$ v priestore a :

$$\ddot{\vec{r}}_{aL} \equiv \alpha_{aL} = \ddot{\vec{r}}_{ab} \mathcal{N}_{bL} \quad (4.56)$$

Deriváciou (4.44) dostaneme:

$$\ddot{\vec{r}}_{ab} = \dot{\vec{r}}_{ab} \mathcal{V}_{ab} + \mathcal{T}_{ab} \dot{\vec{v}}_{ab} \quad (4.57)$$

Označme a_{ab} maticu zrýchlenia bodov telesa b pri pohybe vzhľadom na a vyjadrenú v priestore b :

$$a_{ab} = \dot{\vec{v}}_{ab} \quad (4.58)$$

Derivujme (4.45):

$$\dot{\vec{v}}_{ab} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{N}}_{ab}, & \dot{\mathcal{P}}_{ab}^T \dot{\vec{r}}_{ab} + \mathcal{P}_{ab}^T \ddot{\vec{r}}_{ab} \\ \sigma, & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Označme a_{ab}^α maticu uhlového zrýchlenia telesa b pri pohybe $b:a$ vyjadrenú v priestore b :

$$a_{ab}^\alpha = \dot{\mathcal{N}}_{ab} \quad (4.60)$$

Z rovnice (4.49d)

$$\dot{\mathcal{P}}_{ab}^T = -\mathcal{N}_{ab} \mathcal{P}_{ab}^{-1} \equiv -\mathcal{N}_{ab} \mathcal{P}_{ab}^T \quad (4.61)$$