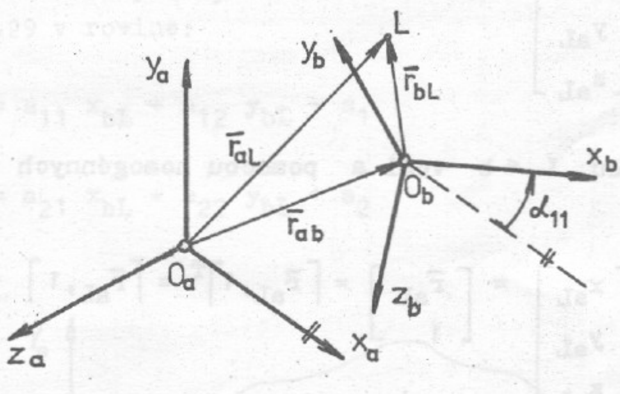
4. Maticové metódy kinematickej analýzy SVT

Pri kinematickej analýze priestorových SVT budeme využívať <u>maticovú metódu rezu</u>, ktorá je základom ďalších metód v analýze aj syntéze priestorových aj rovinných SVT.

4.1 POLOHA A TRAJEKTÓRIA BODU

Polohu bodu $L \in b$ voči telesu a (obr. 4.28) môžeme opísať <u>karteziánskymi súradnicami</u>: $L(x_{aL}, y_{aL}, z_{aL})$ aj <u>homogénnymi súradnicami</u>:



Obr. 4.28
Poloha bodu $L \in b$ voči súradnicovým systémom na telesách a,b v priestore

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{4.1a}$$

pričom čísla im úmerné určujú v priestore E_3 ten istý bod. Ak

a) $\qquad x_4 = 0 \qquad$ (4.1b)

potom je bod L nevlastný: $L^{\infty} \equiv U^{\infty} \in E_3$,

b) $\qquad x_4 \neq 0 \qquad$ (4.1c)

bod L je vlastný bod,

c) $\quad x_4 = 1$

potom podľa (4.1a) zapíšeme polohu vlastného bodu L pomocou homogénnych súradníc polohy:

$$L(x_{aL}, y_{aL}, z_{aL}, 1) \tag{4.1d}$$

kde $x_{aL} = x_1$, $y_{aL} = x_2$, $z_{aL} = x_3$ sú karteziánske súradnice polohy bodu L. Polohu nevlastného bodu U^{∞} zapíšeme pomocou homogénnych súradníc polohy vzhľadom na (4.1b):

$$U^{\infty}(x_{aU}, y_{aU}, z_{aU}, 0) \tag{4.1e}$$

Ekvivalentné maticové zápisy polohového vektora $\bar{r}_{aL}$ bodu $L \in b$ voči telesu a pomocou karteziánskych súradníc polohy sú:

$$\bar{r}_{aL} = \begin{bmatrix} x_{aL} \\ y_{aL} \\ z_{aL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{aL}, y_{aL}, z_{aL} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{aL}, y_{aL}, z_{aL} \end{bmatrix} \tag{4.1f}$$

Polohový vektor bodu $L \in b$ voči a pomocou homogénnych súradníc v maticovej formulácii je

$$\mathbf{r}_{aL} = \begin{bmatrix} x_{aL} \\ y_{aL} \\ z_{aL} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{aL} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{aL}, 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \bar{r}_{aL}, 1 \end{bmatrix} \tag{4.1g}$$

Polohový vektor $\bar{r}_{ab}$ začiatku O_b voči telesu a (obr. 4.28) s karteziánskymi aj homogénnymi súradnicami v maticovom zápise:

$$\bar{r}_{ab} = \begin{bmatrix} a_1, a_2, a_3 \end{bmatrix} \tag{4.1h}$$

$$\mathbf{r}_{ab} = \begin{bmatrix} a_1, a_2, a_3, 1 \end{bmatrix} \tag{4.1i}$$

Označme α_{11} smerový uhol, ktorý zviera os x_b s osou x_a (obr. 4.28)

$$\alpha_{11} = \sphericalangle(x_a, x_b) \tag{4.1j}$$

$\alpha_{22} = \sphericalangle(y_a, y_b)$

a zapíšeme skrátene:

$\alpha_{33} = \sphericalangle(z_a, z_b)$

$$a_{11} = \cos \alpha_{11} = c\ \alpha_{11} = \bar{i}_a \cdot \bar{i}_b \tag{4.1k}$$

Zapíšeme jednotkový vektor $\bar{i}_b$ pomocou karteziánskych súradníc v priestore a:

$$(\bar{i}_b)a = (\bar{i}_a \cdot \bar{i}_b)\bar{i}_a + (\bar{j}_a \cdot \bar{i}_b)\bar{j}_a + (\bar{k}_a \cdot \bar{i}_b)\bar{k}_a =$$

$$= (c\,\alpha_{11})\bar{i}_a + (c\,\alpha_{21})\bar{j}_a + (c\,\alpha_{31})\bar{k}_a =$$

$$= a_{11}\,\bar{i}_a + a_{21}\,\bar{j}_a + a_{31}\,\bar{k}_a = \left\lceil a_{11}, a_{21}, a_{31} \right\rceil \tag{4.1l}$$

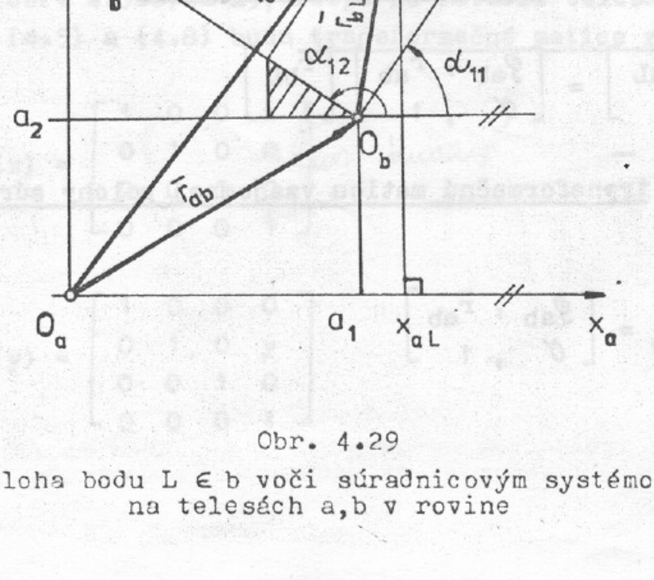
Polohový vektor nevlastného bodu U_b^{∞} na osi x_b zapíšeme pomocou homogénnych súradníc v priestore a:

$$(\bar{r}_{bU^{\infty}})a = \left\lceil a_{11}, a_{21}, a_{31}, 0 \right\rceil \tag{4.1m}$$

vzájomný súvis súradníc polohy bodu $L \in b$ v súradnicových systémoch a,b je podľa obr. 4.29 v rovine:

$$x_{aL} = a_{11}\,x_{bL} + a_{12}\,y_{bL} + a_1$$

$$y_{aL} = a_{21}\,x_{bL} + a_{22}\,y_{bL} + a_2 \tag{4.2}$$



Obr. 4.29

Poloha bodu $L \in b$ voči súradnicovým systémom na telesách a,b v rovine

Analogicky podľa (4.2) je v priestore:

$$
\begin{aligned}
x_{aL} &= a_{11}\, x_{bL} + a_{12}\, y_{bL} + a_{13}\, z_{bL} + a_1 \\
y_{aL} &= a_{21}\, x_{bL} + a_{22}\, y_{bL} + a_{23}\, z_{bL} + a_2 \\
z_{aL} &= a_{31}\, x_{bL} + a_{32}\, y_{bL} + a_{33}\, z_{bL} + a_3
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Maticový zápis transformačných rovníc (4.3) je maticová transformačná rovnica polohy bodu L v súradnicových systémoch a, b.

$$
\begin{bmatrix} x_{aL} \\ y_{aL} \\ z_{aL} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_{bL} \\ y_{bL} \\ z_{bL} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}
$$

Označme $\mathcal{S}_{ab}$ <u>maticu smerových kosínusov uhlov</u>, ktoré zvierajú osi x_b, y_b, z_b s osami x_a, y_a, z_a:

$$
\mathcal{S}_{ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{4.5}
$$

Matica $\mathcal{S}_{ab}$ má stĺpcové jednotkové vektory vzájomne ortogonálne, preto je $\mathcal{S}_{ab}$ <u>ortonormálna, vlastná</u> a platí:

veľké písané S

$$
\mathcal{S}_{ab}^{-1} = \mathcal{S}_{ab}^{T} \tag{4.6}
$$

Zapíšme rovnicu (4.4) <u>pomocou rozdelených matíc:</u>

$$
\begin{bmatrix} \bar{r}_{aL} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{ab} , & \bar{r}_{ab} \\ \mathcal{O} , & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_{bL} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.7}
$$

písaná nula

Označme $\mathcal{T}_{ab}$ <u>transformačnú maticu vzájomnej polohy súradnicových systémov telies a, b:</u>

$$
\mathcal{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{ab} , & \bar{r}_{ab} \\ \mathcal{O} , & 1 \end{bmatrix} \tag{4.8}
$$

Potom polohový vektor $\boldsymbol{r}_{aL}$ bodu $L \in b$ vyjadrený homogénnymi súradnicami v priestore a je podľa (4.4)

$$\boldsymbol{r}_{aL} = \mathcal{T}_{ab}\, \boldsymbol{r}_{bL} \tag{4.9}$$

Ak sú $\boldsymbol{r}_{aL}$, $\mathcal{T}_{ab}$ funkciami času a $\boldsymbol{r}_{bL} = \boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}$ je konštantný vektor), potom (4.9) je rovnica trajektórie bodu $L \in b$ voči a pri pohybe b:a, teda v danom okamihu z nej určíme okamžitú polohu bodu L. Po vynásobení matíc v rovnici (4.7) dostaneme polohový vektor $\boldsymbol{r}_{aL}$ bodu $L \in b$ vyjadrený karteziánskymi súradnicami v priestore a:

$$\bar{r}_{aL} = \mathcal{S}_{ab}\, \bar{r}_{bL} + \bar{r}_{ab} \tag{4.10}$$

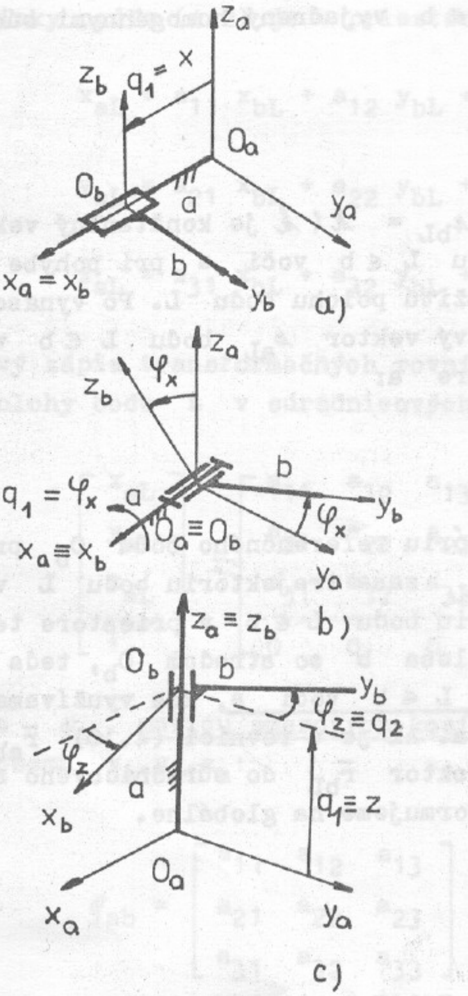
Sprievodičom $\bar{r}_{ab}$ opisujeme trajektóriu referenčného bodu O_b pri translačnom pohybe b:a, sprievodičom $\bar{r}_{bL}$ zasa trajektóriu bodu L v priestore b a výrazom $\mathcal{S}_{ab}\,\bar{r}_{bL}$ trajektóriu bodu $L \in b$ v priestore telesa a vo všeobecnosti pri sférickom pohybe telesa b so stredom O_b, teda rovnica (4.10) je <u>rovnicou trajektórie bodu $L \in b$ voči a</u>, kde využívame základný rozklad všeobecného pohybu telesa b:a. Ak je v rovnici (4.10) $\bar{r}_{ab} = \bar{0}$, potom rovnicou (4.10) transformujeme vektor $\bar{r}_{bL}$ do súradnicového systému a, teda lokálne súradnice polohy transformujeme na globálne.

4.2 TRANSFORMAČNÉ MATICE VZÁJOMNÝCH POLOH A POHYBOV TELIES

Označme <u>Z1 základný pohyb</u> transláciu telesa b voči telesu a pozdĺž osi x_a (obr. 4.30a) a analogicky základné pohyby Z2, resp. Z3 translácie telesa b pozdĺž osí y_b, resp. z_b. Základný pohyb Z4 bude rotácia telesa b okolo osi x_a (obr. 4.30b) a Z5, resp. Z6 rotácie telesa b okolo osí y_b, resp. z_b. Podľa (4.5) a (4.8) budú <u>transformačné matice základných pohybov</u>:

$$\mathcal{T}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11a}$$

$$\mathcal{T}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11b}$$



Obr. 4.30

a) Posuvné spojenie telies b,a
b) Rotačné spojenie telies b,a
c) Valcové spojenie telies b,a

$$\mathcal{T}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11c}$$

$$\mathcal{T}_{z4}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi_x & -s\varphi_x & 0 \\ 0 & s\varphi_x & c\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11d}$$

$$\mathcal{T}_{z5}(\varphi_y) = \begin{bmatrix} c\varphi_y & 0 & s\varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\varphi_y & 0 & c\varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11e}$$

$$\mathcal{T}_{z6}(\varphi_z) = \begin{bmatrix} c\varphi_z & -s\varphi_z & 0 & 0 \\ s\varphi_z & c\varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.11f}$$

Pri súčasných pohyboch telies T1, T2, T3 (obr. 4.31) je podľa (4.9) poloha bodu L:

$$r_{1L} = \mathcal{T}_{12}\, r_{2L} \tag{4.12}$$

kde

$$r_{2L} = \mathcal{T}_{23}\, r_{3L} \tag{4.13}$$

Ak dosadíme (4.13) do (4.12):

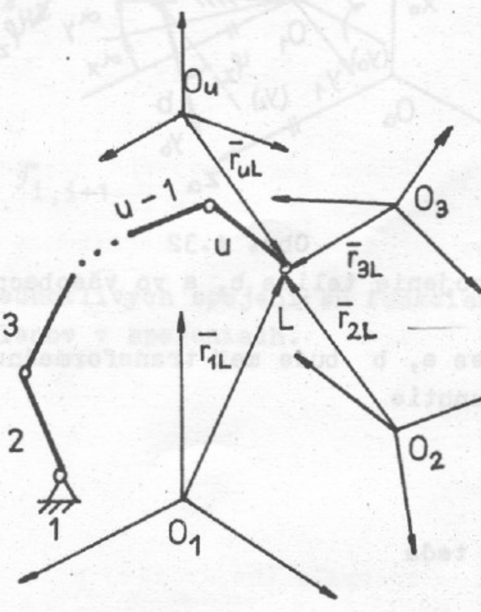
$$r_{1L} = \mathcal{T}_{12}\, \mathcal{T}_{23}\, r_{3L} \tag{4.14}$$

Porovnaním (4.14) so vzťahom (4.15)

$$r_{1L} = \mathcal{T}_{13}\, r_{3L} \tag{4.15}$$

je transformačná matica výsledného pohybu 3:1:

$$\mathcal{T}_{13} = \mathcal{T}_{12}\, \mathcal{T}_{23} \tag{4.16}$$



dobo je vlastne r_{2L} ale v takomto zápise ~~do~~ nevieme zakresliť prečo $\bar{r}_{2L}$

Obr. 4.31
Poloha bodu L ∈ u otvoreného mechanizmu voči súradnicovým systémom na telesách 1,2,3,u

4.2.1 T r a n s f o r m a č n é m a t i c e n i ž š í c h s p o j e n í

Výsledný pohyb telesa b:a z valcovej dvojice na obr. 4.30c môžeme realizovať pomocou základných pohybov Z3 a Z6. Potom podľa (4.16) transformačná matica C spojenia bude

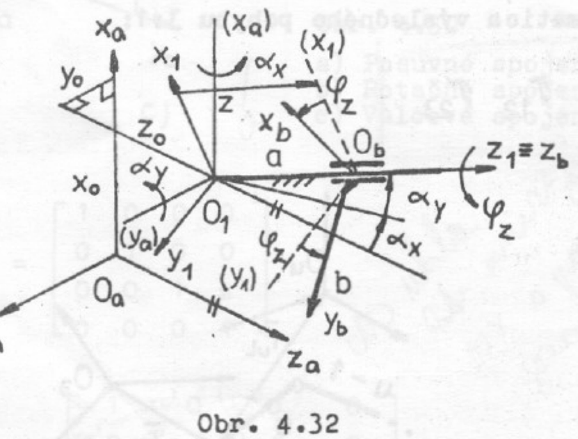
$$\mathcal{T}^C = \mathcal{T}_{z3}(z)\ \mathcal{T}_{z6}(\varphi_z) \tag{4.17a}$$

V prípade, že os z_b C spojenia má polohu voči súradnicovému systému vzťažného telesa a podľa obr. 4.32 bude transformačná matica $\mathcal{T}^C$ obsahovať aj transformáciu danú maticou

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{z1}(x_o)\ \mathcal{T}_{z2}(y_o)\ \mathcal{T}_{z3}(z_o)\ \mathcal{T}_{z4}(\alpha_x)\ \mathcal{T}_{z5}(\alpha_y) \tag{4.17b}$$

kde x_o, y_o, z_o sú karteziánske súradnice polohy začiatku O_1 voči a. Potom bude

$$\mathcal{T}^C = \mathcal{T}_1\ \mathcal{T}_{z3}(z)\ \mathcal{T}_{z6}(\varphi_z) \tag{4.17c}$$



Obr. 4.32
Valcové spojenie telies b, a vo všeobecnej polohe

Rotačné spojenie telies a, b bude mať transformačnú maticu $\mathcal{T}^R$ podľa (4.17a), v ktorom posunutie

$$z = c \tag{4.17d}$$

kde c je konštanta, teda

$$\mathcal{T}^R = \mathcal{T}_1\ \mathcal{T}_{z3}(c)\ \mathcal{T}_{z6}(\varphi_z) \tag{4.17e}$$

po roznásobení:

$$\mathcal{T}^R = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_o+a_{13}c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_o+a_{23}c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_o+a_{33}c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} c\varphi_z & -s\varphi_z & 0 & 0 \\ s\varphi_z & c\varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{P}} \tag{4.17f}$$

Podľa prvkov je vo vzťahu (4.17f) vyznačená matica $\mathcal{C}$ konštantná a matica $\mathcal{P}$ premenná, teda

$$\mathcal{T}^R = \mathcal{C}\,\mathcal{P}(\varphi_z) \tag{4.17g}$$

Analogicky môžeme odvodiť transformačné matice spojení P, H, S, F.

4.3 POLOHA ČLENOV OM

Poloha bodu L u-tého člena OM, ktorý má u členov viazaných ľubovoľnými spojeniami (obr. 4.31), je podľa (4.15), (4.16)

$$r_{1L} = \mathcal{T}_{1u}\, r_{uL} \tag{4.18}$$

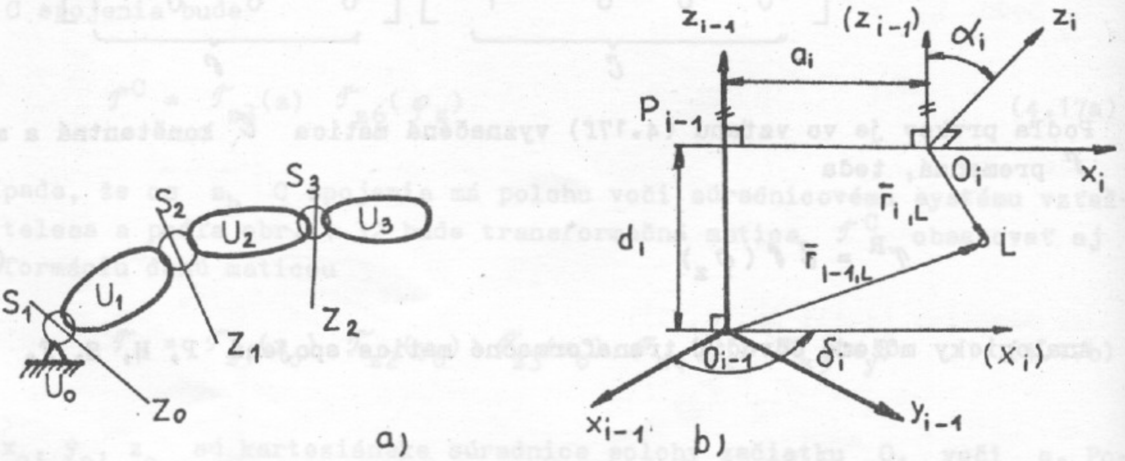
kde

$$\mathcal{T}_{1u} = \prod_{i=1}^{u-1} \mathcal{T}_{i,i+1} \tag{4.19}$$

Transformačné matice jednotlivých spojení sú funkciami nezávislých lokálnych súradníc polohy členov v spojeniach.

4.3.1 Hartenbergova-Denavitova transformačná matica

V otvorenom mechanizme, ktorý má u členov, nech sú členy U_i (obr. 4.33a):



Obr. 4.33

a) Číslovanie spojení a z-tových osí lokálnych súradnicových systémov v otvorenom mechanizme
b) Prvky $\delta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ pre Hartenbergovu-Denavitovu transformačnú maticu vzájomnej polohy členov i-1,i

$$U_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, u-1 \tag{4.20a}$$

spojené len elementmi R a P spojení S_i

$$S_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, u-1 \tag{4.20b}$$

pričom nech os z_i lokálneho súradnicového systému je v prípade R spojenia osou rotácie a pre P spojenie je smerom vzájomného posuvu, pričom os z_i patrí S_{i+1} spojeniu. Označme P_{i-1} priesečník osí (obr. 4.33b):

$$P_{i-1} \equiv x_i \times z_{i-1} \tag{4.20c}$$

Začiatok O_i bude priesečník osí:

$$O_i \equiv x_i \times z_i \tag{4.20d}$$

Označme a_i dĺžku transverzály (najkratšej priečky) mimobežiek z_{i-1}, z_i na osi x_i:

$$a_i = \overline{P_{i-1} O_i} \tag{4.20e}$$