2. Vektorová metóda kinematickej analýzy RM

Východiskom pre kinematickú analýzu RM vektorovou metódou sú vektorové slučkové rovnice typu (1.59) polohy členov mechanizmu.

Pre danú štruktúru mechanizmu a známe začiatočné (východiskové) hodnoty súradníc polohy, rýchlostí a zrýchlení vstupných hnacích členov, počet d začiatočných hodnôt súradníc polohy hnaných členov určíme polohu, rýchlosť a zrýchlenie hnaných členov aj vyžadovaných bodov v mechanizme.

2.1 ANALÝZA POLOHY ČLENOV RUM

Pre RM s počtom n nezávislých globálnych súradníc ψ_{ni} polohy vstupných hnacích členov a počtom d globálnych závislých súradníc ψ_{zi} polohy výstupných hnaných členov píšeme podľa (1.60a,b) dve skalárne rovnice väzieb pre každú ZS a jednu prídavnú rovnicu pre každé spojenie triedy t = 1, teda píšeme počet d explicitných rovníc väzieb pre celkový počet m globálnych súradníc polohy členov:

$$f_i(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m) = 0 \tag{2.1}$$

kde i = 1, 2, ..., d.

Po roztriedení súradníc v (2.1) máme:

$$f_i(\psi_{z1}, \ldots, \psi_{zd}, \psi_{n1}, \ldots, \psi_{nn}) = 0 \tag{2.2}$$

kde i = 1, 2, ..., d.

Pre známy <u>vektor</u> $\overline{\psi}_n$ <u>nezávislých súradníc polohy</u>

$$\overline{\psi}_n = \lceil \psi_{n1}, \ldots, \psi_{nn} \rceil \tag{2.3}$$

budeme riešiť nelineárne algebrické rovnice (2.2), ktoré v tvare

$$f_i(\psi_{z1}, \ldots, \psi_{zd}) = 0 \tag{2.4}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, d$, implicitne obsahujú nezávislé súradnice ψ_{ni}, aby sme získali vektor $\overline{\psi}_z$ neznámych závislých súradníc polohy členov mechanizmu:

$$\overline{\psi}_z = [\psi_{z1}, \ldots, \psi_{zd}] \tag{2.5}$$

Sústavu (2.4) nelineárnych algebrických rovníc môžeme riešiť v uzatvorenom algebrickom tvare len v niektorých prípadoch, ale vždy môžeme použiť analytické numerické riešenie Newtonovou-Raphsonovou metódou [22].

Každá z rovníc sústavy (2.4) bude sa rovnať nule pre hodnoty súradníc vektora $\overline{\psi}_z$, ktorý je riešením sústavy.

Označme $\overline{\psi}_{z(1)}$ vektor približných hodnôt závislých súradníc polohy členov ktorý odhadneme (odmeriame) pre známy vektor $\overline{\psi}_n$ v čase $t = t_1$. Rovnice (2.4) môžeme aproximovať v okolí "bodu" $\overline{\psi}_{z(1)}$ lineárnymi členmi I. rádu z Taylorovho radu:

$$f_i(\psi_{zj}) \doteq f_{i(r)} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{z1}}\right)_{(r)} \Delta\psi_{z1(r)} + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zd}}\right)_{(r)} \Delta\psi_{zd(r)} \tag{2.6}$$

kde $r = 1$, $i = 1, 2, \ldots, d$, $j = 1, 2, \ldots, d$.

Funkcie $f_{i(r)}$ vyčíslime z rovníc (2.4) pre $\overline{\psi}_{z(r)}$ a $\left(\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zj}}\right)_{(r)}$ sú parciálne derivácie funkcií z rovníc (2.4) v "bode" $\overline{\psi}_{z(r)}$. Členy $\Delta\psi_{zj(r)}$ určíme z podmienky pre pravé strany rovníc (2.6), ktoré sa majú rovnať nule, teda

$$\vartheta_{(r)} \; \Delta\overline{\psi}_{z(r)} = -\overline{f}_{(r)} \tag{2.7}$$

Rovnica (2.7) je lineárna vzhľadom k neznámemu vektoru $\Delta\overline{\psi}_{z(r)}$ korekcií, pričom matica $\vartheta_{(r)}$ je Jakobián, ktorý má rozmer $(d \times d)$

$$\vartheta_{(r)} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zj}}\right]_{(r)} \tag{2.8}$$

a $\bar{f}_{(r)}$ je vektor rovníc, ktorý pre $\bar{\Psi}_{z(r)}$ zrejme nie je nulový, lebo odhadnuté hodnoty nie sú riešením sústavy (2.4),

$$\bar{f}_{(r)} = \lceil f_1, \ldots, f_d \rceil_{(r)} \tag{2.9}$$

preto $f_{i(r)}$ nazývame <u>reziduálne funkcie</u>.

Ak vyčíslime rovnice (2.6) pre "bod" $\bar{\Psi}_{z(2)}$

$$\bar{\Psi}_{z(2)} = \bar{\Psi}_{z(1)} + \Delta\bar{\Psi}_{z(1)} \tag{2.10}$$

potom pri konvergencii metódy bude vektor korekcií $\Delta\bar{\Psi}_{z(r+1)}$ pre (r + 1) iteračný krok menší ako $\Delta\bar{\Psi}_{z(r)}$.

Iteračný proces končí, ak splníme jednu z podmienok:

a) $$\left| \Delta\Psi_{zj(r)} \right| \leq x_{Tj} \tag{2.11}$$

kde x_{Tj}, $j = 1, 2, \ldots, d$ je dané číslo,

b) $$\left| f_{i(r)} \right| \leq f_{Tj} \tag{2.12}$$

kde f_{Tj}, $j = 1, 2, \ldots, d$ je vyžadovaná hodnota,

c) $$r = r_M \tag{2.13}$$

kde r_M <u>je maximálny počet iterácií</u>.

2.2 ANALÝZA RÝCHLOSTÍ A ZRÝCHLENÍ BODOV A ČLENOV RM

2.2.1 Poloha, rýchlosť a zrýchlenie bodov a členov v ROM

Polohu ľubovoľného bodu L členov ROM danú karteziánskymi súradnicami L (x_L, y_L) môžeme vyjadriť nezávislými globálnymi súradnicami Ψ_{ni}, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde n je pohyblivosť ROM v explicitných transformačných rovniciach:

$$x_L = x_L(\psi_{n1}, \ldots, \psi_{nn}, t) \tag{2.14a}$$

$$y_L = y_L(\psi_{n1}, \ldots, \psi_{nn}, t) \tag{2.14b}$$

Rýchlosti a zrýchlenia získame derivovaním rovníc (2.14a,b) podľa času. Rýchlosti a zrýchlenia členov ROM sú dané a sú vzájomne nezávislé.

2.2.2 Rýchlosť a zrýchlenie bodov RUM

Kartezianske súradnice polohy ľubovoľného bodu L členov RUM vyjadríme ako funkciu celkového počtu m globálnych súradníc ψ_i, i = 1, 2, ..., m polohy členov:

$$x_L = x_L(\psi_1, \ldots, \psi_m) \tag{2.15a}$$

$$y_L = y_L(\psi_1, \ldots, \psi_m) \tag{2.15b}$$

Deriváciou rovníc (2.15a,b) získame rýchlosť a zrýchlenie:

$$\dot{x}_L = \sum_{i=1}^{m} \dot{\psi}_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} x_L \tag{2.15c}$$

$$\ddot{x}_L = \sum_{i=1}^{m} \ddot{\psi}_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} x_L + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \dot{\psi}_j \dot{\psi}_i \frac{\partial}{\partial \psi_j} \frac{\partial}{\partial \psi_i} x_L \tag{2.15d}$$

analogicky pre $\dot{y}_L$, $\ddot{y}_L$.

2.2.3 Rýchlosť a zrýchlenie členov RUM

Deriváciou rovníc (2.1) polohy členov RUM získame skalárne slučkové rovnice rýchlostí členov mechanizmu:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_j} \dot{\psi}_j = 0 \tag{2.16}$$

kde i = 1, 2, ..., d.

Podľa (2.2) prepíšeme rovnice (2.16) do tvaru

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zj}} \dot{\psi}_{zj} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{nk}} \dot{\psi}_{nk} \equiv f_{v_i} \tag{2.17}$$

Rovnice (2.17) zapíšeme v maticovej forme:

$$\mathcal{V}_d \, \dot{\bar{\psi}}_z = \mathcal{B} \, \dot{\bar{\psi}}_n \equiv \bar{f}_v \tag{2.18}$$

kde

$$\mathcal{V}_d = \left[\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zj}} \right] \equiv V_{dij} \tag{2.19}$$

$i = 1, 2, \ldots, d, \quad j = 1, 2, \ldots, d$

je <u>matica rýchlostí hnaných členov</u> (Jakobián) RUM s globálnymi súradnicami rozmeru (d x d), pričom matica $\mathcal{V}_d$ rýchlostí a matica $\mathcal{B}$ rozmeru (d x n):

$$\mathcal{B} = - \left[\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{nj}} \right] = - B_{ij} \tag{2.20}$$

$i = 1, 2, \ldots, d, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

sú funkciami globálnych súradníc ψ_j polohy členov, ktoré sme určili v analýze polohy členov RUM. Ak matica $\mathcal{V}_d$ rýchlostí nie je singulárna pre dané rýchlosti ($\dot{\psi}_{n1}, \ldots, \dot{\psi}_{nn}$) vstupných hnacích členov, vyriešime z lineárnej rovnice (2.18) neznáme rýchlosti ($\dot{\psi}_{z1}, \ldots, \dot{\psi}_{zd}$) hnaných členov.

Zrýchlenia hnaných členov RUM získame deriváciou rovníc (2.17):

$$\sum_{j=1}^{d} \left[\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zj}} \ddot{\psi}_{zj}}_{f_{ai}} + \dot{\psi}_{zj} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zj}}}_{\dot{\mathcal{V}}_d} \right] =$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i}{\partial \psi_{nk}} \ddot{\psi}_{nk} + \dot{\psi}_{nk} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{nk}}}_{\dot{\mathcal{B}}} \right] \equiv \dot{f}_{vi} \tag{2.21}$$

Označme:

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zj}} \ddot{\psi}_{zj} = \sum_{j=1}^{d} v_{dij} \ddot{\psi}_{zj} = f_{ai} \tag{2.22}$$

Vzhľadom na (2.19) je vektor rovníc zrýchlení členov RUM

$$\bar{f}_a = \mathcal{V}_d \ddot{\bar{\psi}}_z \tag{2.23}$$

Označme derivácie:

$$\dot{\mathcal{V}}_d \equiv \dot{v}_{dij} = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{zj}}\right] \tag{2.24}$$

$$\dot{\mathcal{B}} \equiv \dot{\mathcal{B}}_{ij} = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \psi_{nj}}\right] \tag{2.25}$$

Potom majú rovnice (2.21) tvar

$$f_{ai} \equiv \dot{f}_{vi} - \sum_{j=1}^{d} \dot{\psi}_{zj} \dot{v}_{dij} = - \sum_{k=1}^{n} \left[\ddot{\psi}_{nk} B_{ij} + \dot{\psi}_{nk} \dot{B}_{ij}\right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{d} \dot{\psi}_{zj} \dot{v}_{dij} \tag{2.26}$$

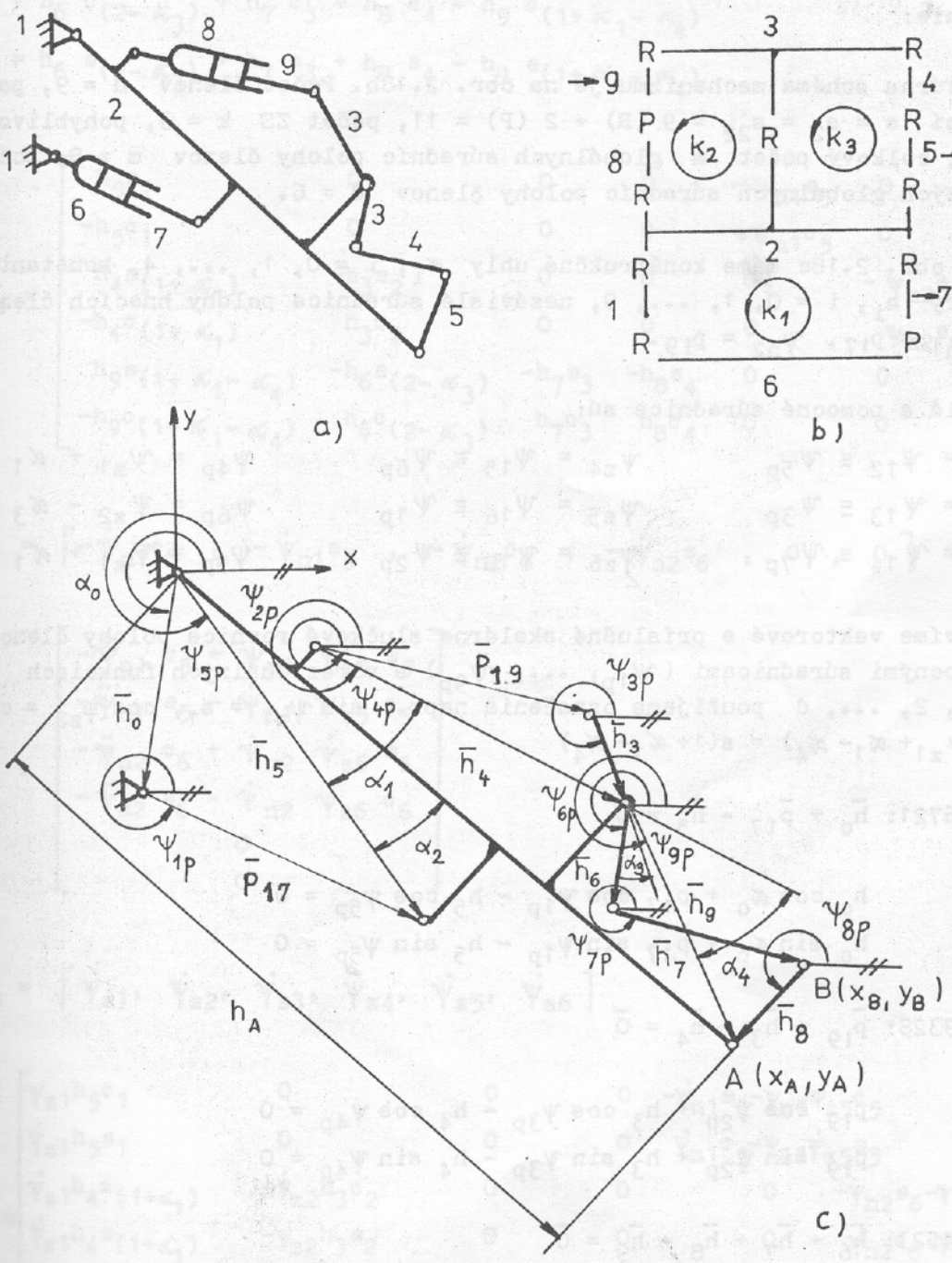
Rovnice (2.26) vzhľadom na (2.20) zapíšeme v maticovom tvare

$$\bar{f}_a \equiv \dot{\bar{f}}_v - \dot{\mathcal{V}}_d \dot{\bar{\psi}}_z = \mathcal{B} \ddot{\bar{\psi}}_n + \dot{\mathcal{B}} \dot{\bar{\psi}}_n - \dot{\mathcal{V}}_d \dot{\bar{\psi}}_z \tag{2.27}$$

Neznáme zrýchlenia ($\ddot{\psi}_{z1}, \ldots, \ddot{\psi}_{zd}$) hnaných členov vypočítame z lineárnej rovnice (2.23), v ktorej sú dané zrýchlenia ($\ddot{\psi}_{n1}, \ldots, \ddot{\psi}_{nn}$) vstupných hnacích členov za predpokladu, že matica $\mathcal{V}_d$ rýchlostí nie je singulárna.

Príklad 2.14:

Podľa kinematickej schémy nakladacieho mechanizmu univerzálneho kĺbového nakladača UNK na obr. 2.18a urobte štruktúrnu analýzu a pripravte vstupy pre numerickú analýzu vektorovou metódou programom, ktorý máme k dispozícii.



Obr. 2.18

a) Kinematická schéma mechanizmu univerzálneho kĺbového nakladača UNK

b) Štruktúrna schéma mechanizmu z obr. 2.18a

c) Kinematická schéma mechanizmu s parametrami (konštrukčné uhly α_i, konštantné rozmery h_i, nezávislé súradnice ψ_{ni}, závislé súradnice ψ_{zi}, pomocné súradnice ψ_{ip})

Riešenie:

Štruktúrna schéma mechanizmu je na obr. 2.18b. Počet členov $u = 9$, počet spojení $s = s_2 = s_{22} = 9\ (R) + 2\ (P) = 11$, počet ZS $k = 3$, pohyblivosť $n = 2$, celkový počet m globálnych súradníc polohy členov $m = 8$, počet d závislých globálnych súradníc polohy členov $d = 6$.

Podľa obr. 2.18c máme konštrukčné uhly α_i, $i = 0, 1, \ldots, 4$, konštantné rozmery h_i, $i = 0, 1, \ldots, 9$, nezávislé súradnice polohy hnacích členov 7, 9: $\psi_{n1} = p_{17}$, $\psi_{n2} = p_{19}$.

Závislé a pomocné súradnice sú:

$$\psi_{z1} = \psi_{12} \equiv \psi_{5p} \qquad \psi_{z4} = \psi_{15} \equiv \psi_{6p} \qquad \psi_{4p} = \psi_{z1} + \alpha_1$$
$$\psi_{z2} = \psi_{13} \equiv \psi_{3p} \qquad \psi_{z5} = \psi_{16} \equiv \psi_{1p} \qquad \psi_{6p} = \psi_{z2} - \alpha_3$$
$$\psi_{z3} = \psi_{14} \equiv \psi_{7p} \qquad \psi_{z6} = \psi_{18} \equiv \psi_{2p} \qquad \psi_{9p} = \psi_{z1} + \alpha_1 - \alpha_4$$

Zostavíme vektorové a príslušné skalárne slučkové rovnice polohy členov s pomocnými súradnicami $(\psi_{1p}, \ldots, \psi_{9p})$ a v reziduálnych funkciách f_i, $i = 1, 2, \ldots, d$ použijeme označenia napr.: $\sin\psi_{z1} = s_1$, $\cos\psi_{z2} = c_2$, $\sin(\psi_{z1} + \alpha_1 - \alpha_4) = s(1+\alpha_1-\alpha_4)$

k_1: 16721: $\bar{h}_o + \bar{p}_{17} - \bar{h}_5 = \bar{0}$

$$h_o \cos\alpha_o + p_{17} \cos\psi_{1p} - h_5 \cos\psi_{5p} = 0$$
$$h_o \sin\alpha_o + p_{17} \sin\psi_{1p} - h_5 \sin\psi_{5p} = 0$$

k_2: 89328: $\bar{p}_{19} + \bar{h}_3 - \bar{h}_4 = \bar{0}$

$$p_{19} \cos\psi_{2p} + h_3 \cos\psi_{3p} - h_4 \cos\psi_{4p} = 0$$
$$p_{19} \sin\psi_{2p} + h_3 \sin\psi_{3p} - h_4 \sin\psi_{4p} = 0$$

k_3: 34523: $\bar{h}_6 + \bar{h}_7 + \bar{h}_8 - \bar{h}_9 = \bar{0}$

$$h_6 \cos\psi_{6p} + h_7 \cos\psi_{7p} + h_8 \cos\psi_{8p} - h_9 \cos\psi_{9p} = 0$$
$$h_6 \sin\psi_{6p} + h_7 \sin\psi_{7p} + h_8 \sin\psi_{8p} - h_9 \sin\psi_{9p} = 0$$

$$f_1 = h_o c_o + \psi_{n1} c_5 - h_5 c_1 \qquad c_o = \cos\alpha_o$$
$$f_2 = h_o s_o + \psi_{n1} s_5 - h_5 s_1 \qquad s_o = \sin\alpha_o$$
$$f_3 = \psi_{n2} c_6 + h_3 c_2 - h_4 c_{(1+\alpha_1)}$$
$$f_4 = \psi_{n2} s_6 + h_3 s_2 - h_4 s_{(1+\alpha_1)}$$

$$f_5 = h_6\, c_{(2-\alpha_3)} + h_7\, c_3 + h_8\, c_4 - h_9\, c_{(1+\alpha_1-\alpha_4)}$$

$$f_6 = h_6\, s_{(2-\alpha_3)} + h_7\, s_3 + h_8\, s_4 - h_9\, s_{(1+\alpha_1-\alpha_4)}$$

$$\vartheta_d = \begin{bmatrix} h_5 s_1 & 0 & 0 & 0 & -\psi_{n1} s_5 & 0 \\ -h_5 c_1 & 0 & 0 & 0 & +\psi_{n1} c_5 & 0 \\ h_4 s_{(1+\alpha_1)} & -h_3 s_2 & 0 & 0 & 0 & -\psi_{n2} s_6 \\ -h_4 c_{(1+\alpha_1)} & h_3 c_2 & 0 & 0 & 0 & \psi_{n2} s_6 \\ h_9 s_{(1+\alpha_1-\alpha_4)} & -h_6 s_{(2-\alpha_3)} & -h_7 s_3 & -h_8 s_4 & 0 & 0 \\ -h_9 c_{(1+\alpha_1-\alpha_4)} & h_6 c_{(2-\alpha_3)} & h_7 c_3 & h_8 c_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}_v = \left[-\dot{\psi}_{n1} c_5 \;,\; -\dot{\psi}_{n1} s_5 \;,\; -\dot{\psi}_{n2} c_6 \;,\; -\dot{\psi}_{n2} s_6 \;,\; 0 \;,\; 0 \right]$$

$$\dot{\bar{f}}_v = \begin{bmatrix} -\ddot{\psi}_{n1}\, c_5 + \dot{\psi}_{n1}\, \dot{\psi}_{z5}\, s_5 \\ -\ddot{\psi}_{n1}\, s_5 - \dot{\psi}_{n1}\, \dot{\psi}_{z5}\, c_5 \\ -\ddot{\psi}_{n2}\, c_6 + \dot{\psi}_{n2}\, \dot{\psi}_{z6}\, s_6 \\ -\ddot{\psi}_{n2}\, s_6 - \dot{\psi}_{n2}\, \dot{\psi}_{z6}\, c_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{\psi}}_z = \left[\dot{\psi}_{z1},\; \dot{\psi}_{z2},\; \dot{\psi}_{z3},\; \dot{\psi}_{z4},\; \dot{\psi}_{z5},\; \dot{\psi}_{z6} \right]$$

$$\dot{\vartheta}_d = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{z1} h_5 c_1 & 0 & 0 & 0 & -\dot{\psi}_{n1} s_5 - \psi_{n1} \dot{\psi}_{z5} c_5 & 0 \\ \dot{\psi}_{z1} h_5 s_1 & 0 & 0 & 0 & \dot{\psi}_{n1} c_5 - \psi_{n1} \dot{\psi}_{z5} s_5 & 0 \\ \dot{\psi}_{z1} h_4 c_{(1+\alpha_1)} & -\dot{\psi}_{z2} h_3 c_2 & 0 & 0 & 0 & -\dot{\psi}_{n2} s_6 - \psi_{n2} \dot{\psi}_{z6} c_6 \\ \dot{\psi}_{z1} h_4 s_{(1+\alpha_1)} & -\dot{\psi}_{z2} h_3 s_2 & 0 & 0 & 0 & \dot{\psi}_{n2} c_6 - \psi_{n2} \dot{\psi}_{z6} s_6 \\ \dot{\psi}_{z1} h_9 c_{(1+\alpha_1-\alpha_4)} & -\dot{\psi}_{z2} h_6 c_{(2-\alpha_3)} & -\dot{\psi}_{z3} h_7 c_3 & -\dot{\psi}_{z4} h_8 c_4 & 0 & 0 \\ \dot{\psi}_{z1} h_9 s_{(1+\alpha_1-\alpha_4)} & -\dot{\psi}_{z2} h_6 s_{(2-\alpha_3)} & -\dot{\psi}_{z3} h_7 s_3 & -\dot{\psi}_{z4} h_8 s_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vybraté body A, B, ktoré nás zaujímajú, majú nasledujúce karteziánske súradnice polohy rýchlosti a zrýchlenia:

$$\psi_{z7} \equiv x_A = h_A\, c_{(1+\alpha_2)}$$
$$\psi_{z8} \equiv y_A = h_A\, s_{(1+\alpha_2)}$$
$$\psi_{z9} \equiv x_B = h_A\, c_{(1+\alpha_2)} - h_8\, c\, \psi_{z4}$$
$$\psi_{z10} \equiv y_B = h_A\, a_{(1+\alpha_2)} - h_8\, s\, \psi_{z4}$$
$$\dot{\psi}_{z7} \equiv \dot{x}_A = -h_A\, \dot{\psi}_{z1}\, s_{(1+\alpha_2)}$$
$$\dot{\psi}_{z8} \equiv \dot{y}_A = h_A\, \dot{\psi}_{z1}\, c_{(1+\alpha_2)}$$
$$\dot{\psi}_{z9} \equiv \dot{x}_B = -h_A\, \dot{\psi}_{z1}\, s_{(1+\alpha_2)} + h_8\, \dot{\psi}_{z4}\, s\, \psi_{z4}$$
$$\dot{\psi}_{z10} \equiv \dot{y}_B = h_A\, \dot{\psi}_{z1}\, c_{(1+\alpha_2)} - h_8\, \dot{\psi}_{z4}\, c\, \psi_{z4}$$
$$\ddot{\psi}_{z7} \equiv \ddot{x}_A = -h_A \left[\ddot{\psi}_{z1}\, s_{(1+\alpha_2)} + \dot{\psi}^2_{z1}\, c_{(1+\alpha_2)}\right]$$
$$\ddot{\psi}_{z8} \equiv \ddot{y}_A = -h_A \left[\ddot{\psi}_{z1}\, c_{(1+\alpha_2)} - \dot{\psi}^2_{z1}\, s_{(1+\alpha_2)}\right]$$
$$\ddot{\psi}_{z9} \equiv \ddot{x}_B = -h_A \left[\ddot{\psi}_{z1}\, s_{(1+\alpha_2)} + \dot{\psi}^2_{z1}\, c_{(1+\alpha_2)}\right] + h_8 \left[\ddot{\psi}_{z4}\, s_4 + \dot{\psi}^2_{z4}\, c_4\right]$$
$$\ddot{\psi}_{z10} \equiv \ddot{y}_B = h_A \left[\ddot{\psi}_{z1}\, c_{(1+\alpha_2)} - \dot{\psi}^2_{z1}\, s_{(1+\alpha_2)}\right] - h_8 \left[\ddot{\psi}_{z4}\, c_4 - \dot{\psi}^2_{z4}\, s_4\right]$$

$$\dot{\vartheta}_d\, \dot{\bar{\psi}}_z = \begin{bmatrix} \dot{\psi}^2_{z1}\, h_5\, c_1 - \dot{\psi}_{n1}\, \dot{\psi}_{z5}\, s_5 - \psi_{n1}\, \dot{\psi}^2_{z5}\, c_5 \\ \dot{\psi}^2_{z1}\, h_5\, s_1 + \dot{\psi}_{n1}\, \dot{\psi}_{z5}\, c_5 - \psi_{n1}\, \dot{\psi}^2_{z5}\, s_5 \\ \dot{\psi}^2_{z1}\, h_4\, c_{(1+\alpha_1)} - \dot{\psi}^2_{z2}\, h_3\, c_2 - \dot{\psi}_{n2}\, \dot{\psi}_{z6}\, s_6 - \psi_{n2}\, \dot{\psi}^2_{z6}\, c_6 \\ \dot{\psi}^2_{z1}\, h_4\, s_{(1+\alpha_1)} - \dot{\psi}^2_{z2}\, h_3\, s_2 + \dot{\psi}_{n2}\, \dot{\psi}_{z6}\, c_6 - \psi_{n2}\, \dot{\psi}^2_{z6}\, s_6 \\ \dot{\psi}^2_{z1}\, h_9\, c_{(1+\alpha_1-\alpha_4)} - \dot{\psi}^2_{z2}\, h_6\, c_{(2-\alpha_3)} - \dot{\psi}^2_{z3}\, h_7\, c_3 - \dot{\psi}^2_{z4}\, h_8\, c_4 \\ \dot{\psi}^2_{z1}\, h_9\, s_{(1+\alpha_1-\alpha_4)} - \dot{\psi}^2_{z2}\, h_6\, s_{(2-\alpha_3)} - \dot{\psi}^2_{z3}\, h_7\, s_3 - \dot{\psi}^2_{z4}\, h_8\, s_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}_a = \left[f_{a1}, f_{a2}, f_{a3}, f_{a4}, f_{a5}, f_{a6} \right]$$

$$f_{a1} = -\ddot{\psi}_{n1}\, c_5 - \dot{\psi}^2_{z1}\, h_5\, c_1 + \dot{\psi}_{n1}\, \dot{\psi}^2_{z5}\, c_5 + 2\dot{\psi}_{n1}\dot{\psi}_{z5}\, s_5$$
$$f_{a2} = -\ddot{\psi}_{n1}\, s_5 - \dot{\psi}^2_{z1}\, h_5\, s_1 + \psi_{n1}\, \dot{\psi}^2_{z5}\, s_5 - 2\dot{\psi}_{n1}\dot{\psi}_{z5}\, c_5$$
$$f_{a3} = -\ddot{\psi}_{n2}\, c_6 - \dot{\psi}^2_{z1}\, h_4\, c_{(1+\alpha_1)} + \psi^2_{z2}\, h_3\, c_2 + \psi_{n2}\, \dot{\psi}^2_{z6}\, c_6 + 2\dot{\psi}_{n2}\, \dot{\psi}_{z6}\, s_6$$
$$f_{a4} = -\ddot{\psi}_{n2}\, s_6 - \dot{\psi}^2_{z1}\, h_4\, s_{(1+\alpha_1)} + \dot{\psi}^2_{z2}\, h_3\, s_2 + \psi_{n2}\, \dot{\psi}^2_{z6}\, s_6 - 2\dot{\psi}_{n2}\, \dot{\psi}_{z6}\, c_6$$
$$f_{a5} = -\dot{\psi}^2_{z1}\, h_9\, c_{(1+\alpha_1-\alpha_4)} + \dot{\psi}^2_{z2}\, h_6\, c_{(2-\alpha_3)} + \dot{\psi}^2_{z3}\, h_7\, c_3 + \dot{\psi}^2_{z4}\, h_8\, c_4$$
$$f_{a6} = -\dot{\psi}^2_{z1}\, h_9\, s_{(1+\alpha_1-\alpha_4)} + \dot{\psi}^2_{z2}\, h_6\, s_{(2-\alpha_3)} + \dot{\psi}^2_{z3}\, h_7\, s_3 + \dot{\psi}^2_{z4}\, h_8\, s_4$$