Dôkaz pomocou súčtov:

Po rozdelení u členov do počtu k ZR r_i, i = 1, 2, ..., k bude v prvej ZJR r_1 vzhľadom na (1.19) $s_{r1} = u_{r1}$ a v i-tej ZOROV $i \in \langle 2,k \rangle$ bude počet spojení s_{ri} vzhľadom na (1.21) $s_{r1} = u_{r1} + 1$.

Počet s spojení všetkých dvojíc členov vo VR bude

$$s = s_{r1} + \sum_{i=2}^{k} s_{ri}$$

po dosadení

$$s = u_{r1} + \sum_{i=2}^{k} (u_{ri} + 1)$$

po rozpísaní:

$$s = u_{r1} + u_{r2} + \ldots + u_{rk} + (k - 1)$$

a vzhľadom na to, že

$$u = \sum_{i=1}^{k} u_{ri}$$

je naozaj (1.29):

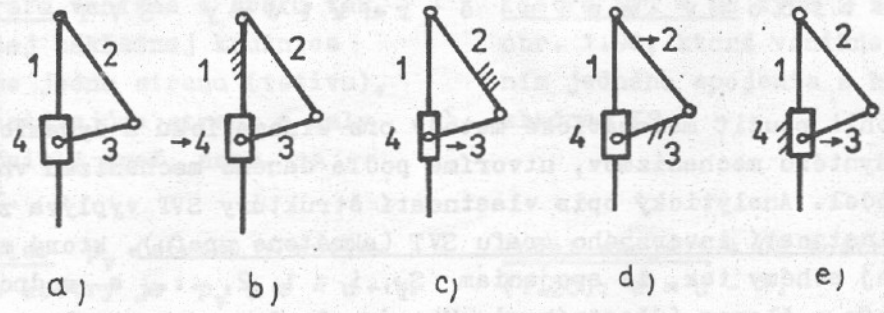
$$s = u + k - 1$$

Eulerova veta nám umožňuje vypočítať počet k ZS v SVT, ktoré má počet s spojení a u členov:

$$k = s - u + 1 \qquad (1.30)$$

<u>Mechanizmus - M</u> dostaneme znehybnením jedného člena v reťazi a označujeme ho analogicky ako reťaze podľa počtu k ZS, teda <u>otvorený mechanizmus</u> - OM má počet k = 0, <u>uzatvorený mechanizmus</u> - UM má počet $k \geq 1$, <u>jednoslučkový mechanizmus</u> - JM má počet k = 1, <u>viacslučkový mechanizmus</u> - VM má počet $k > 1$. Ak po znehybnení jedného člena v KR bude v štruktúre aspoň jedna UR a jedna OR, získame <u>kombinovaný mechanizmus</u> - KM.

Všetky možnosti získania mechanizmu znehybnením jedného člena v reťazi sú na obr. 1.7abcde.

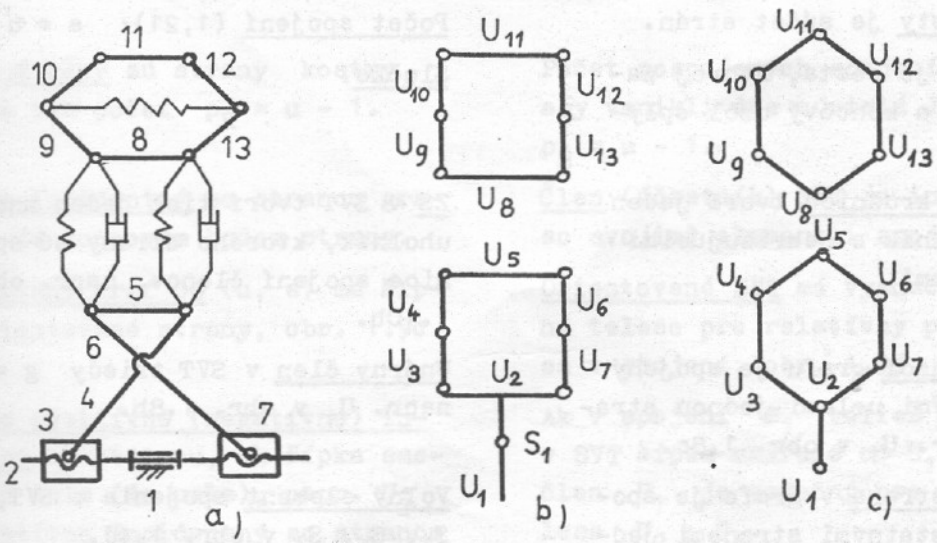


Obr. 1.7

a) Jednoslučková reťaz, b) kľukový mechanizmus, priamovoď c) Whiteworthov mechanizmus, mech. plniaceho zariadenia, d) mechanizmus plniaceho zariadenia, obracača sena, miešačky, e) mechanizmus vyhadzovača

1.3.3 Viackomponentné SVT - VSVT

Viackomponentnú SVT tvoria najmenej dve JSVT, ktoré sú medzi sebou viazané pružinami, tlmičmi a pod., pričom JSVT môže byť aj jedno teleso. V SVT na obr. 1.8a sú každé dva susedné členy 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 spojené elementmi spojenia, teda tvoria JSVT 1, analogicky telesá 8, 9, 10, 11, 12, 13 patria JSVT 2, teda SVT je dvojkomponentná a jej štruktúrna schéma má dve súvislé časti - obr. 1.8b.



Obr. 1.8

a) Dvojkomponentná sústava viazaných telies (odpružené sedadlo s prestaviteľnou výškou), b) Štruktúrna schéma dvojkomponentnej sústavy viazaných telies z obr. 1.8a c) Inverzný graf dvojkomponentnej sústavy viazaných telies z obr. 1.8a

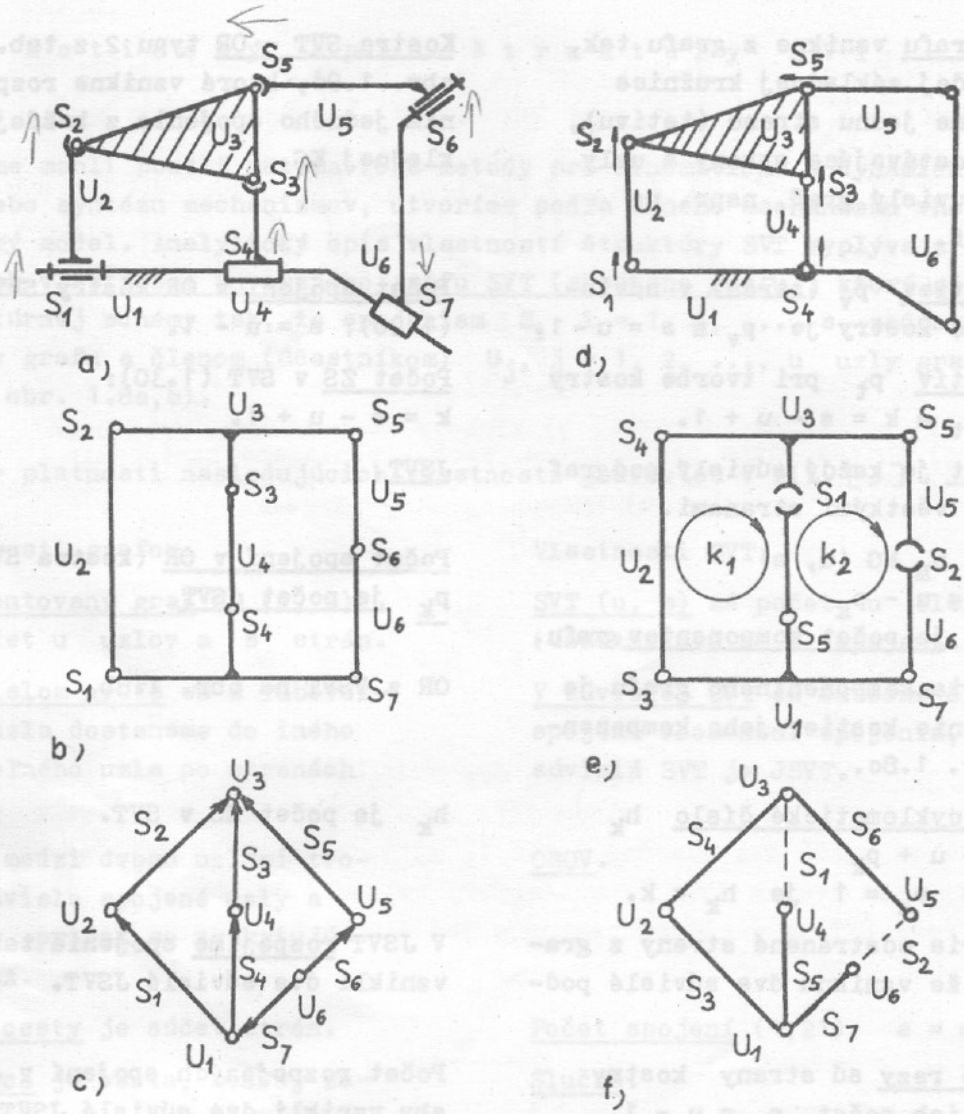
1.3.4 Maticový opis štruktúry SVT

Aby sme mohli použiť matematické metódy pre kinematickú a dynamickú analýzu alebo syntézu mechanizmov, utvoríme podľa daného mechanizmu vhodný matematický model. Analytický opis vlastností štruktúry SVT vyplýva z topologických vlastností inverzného grafu SVT (skrátene grafu), ktorý získame zo štruktúrnej schémy tak, že spojeniam S_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ zodpovedajú strany grafu a členom (účastníkom) U_j, $j = 1, 2, \ldots, u$ uzly grafu (tab. 1.7 a obr. 1.8a,b).

Dôkazy platnosti nasledujúcich vlastností grafov sú v lit. [3].

Vlastnosti grafov:	Vlastnosti SVT:
Neorientovaný graf NG (u, s) má počet u uzlov a s strán.	SVT (u, s) má počet u členov (účastníkov) a s spojení.
V súvislom grafe sa z ľubovoľného uzla dostaneme do iného ľubovoľného uzla po stranách grafu.	V súvislej SVT sú susedné členy spojené elementmi spojenia, teda súvislá SVT je JSVT.
Cestu medzi dvoma uzlami tvoria súvislo spojené uzly a strany, pričom sa vyskytujú len raz.	OROV.
Dĺžka cesty je súčet strán.	Počet spojení (1,21): $s = u + 1$.
Kružnica je cesta, ktorej začiatočný a koncový uzol splývajú.	Slučka.
Základnú kružnicu tvorí jeden mnohouholník s nekrižujúcimi sa stranami.	ZS v SVT tvorí tiež jeden mnohouholník, ktorého strany sú spojnice spojení členov, napr. obr. 1.10b.
Osamelý uzol grafu je spojený s ostatnými uzlami jednou stranou, napr. U_1 v obr. 1.8c.	Unárny člen v SVT triedy $g = 1$, napr. U_1 v obr. 1.8b.
Osamelá strana v grafe je spojená s ostatnými stranami jedným uzlom, napr. S_1, S_5, S_4, obr. 1.4e.	Voľný element spojenia v SVT, napr. S_1, S_5, S_4 v obr. 1.4d.
Uzavretý graf je súvislý graf bez osamelých uzlov a osamelých strán.	UR.

Kostra grafu vznikne z grafu tak, že z každej základnej kružnice odstránime jednu stranu (tetivu), pričom zostávajúce strany a uzly tvoria súvislý graf, napr. na obr. 1.9f.	Kostra SVT - OR typu 2 z tab. 1.8, obr. 1.9d, ktorá vznikne rozpojením jedného spojenia z každej základnej KS.
Počet vetiev p_v (strán) v súvislom grafe kostry je $p_v \equiv s = u - 1$.	Počet spojení v OR kostry SVT (1.20): $s = u - 1$.
Počet tetív p_t pri tvorbe kostry grafu $p_t \equiv k = s - u + 1$.	Počet ZS v SVT (1.30): $k = s - u + 1$.
Komponent je každý súvislý podgraf grafu so všetkými stranami.	JSVT.
Hodnosť h_M NG (u, s) $p_v \equiv h_M = u - p_k$ kde p_k je počet komponentov grafu.	Počet spojení v OR (kostra SVT). p_k je počet JSVT
Kostra viackomponentného grafu je zjednotenie kostier jeho komponentov, obr. 1.8c.	OR z VSVT na obr. 1.8b.
Bettiho cyklomatické číslo h_k $h_k = s - u + p_k$ teda pre $p_k = 1$ je $h_k = k$.	h_k je počet ZS v SVT.
Rez tvoria odstránené strany z grafu tak, že vzniknú dva súvislé podgrafy.	V JSVT rozpojíme spojenia tak, aby vznikli dve súvislé JSVT.
Základné rezy sú strany kostry grafu a ich počet $p_R = u - 1$.	Počet rozpojených spojení v JSVT, aby vznikli dve súvislé JSVT $p_R = u - 1$.
Uzol je incidentný so stranou grafu, ak je koncovým bodom strany.	Člen (účastník) SVT je incidentný so svojimi elementmi spojení.
Orientovaný graf OG (u, s) má šípkou orientované strany, obr. 1.9c.	Orientované SVT má vyznačené vzťažné teleso pre relatívny pohyb telesa v spojení, obr. 1.9d.
Uzol je pozitívne (negatívne) incidentný so stranou, ak šípka smeruje od uzla (do uzla), napr. U_2 je negatívne incidentný so stranou S_1 grafu.	Ak v spojení S_1 telies U_1, U_2 v SVT šípka smeruje od U_1 k U_2, člen U_1 je vzťažný pre pohyb telesa U_2 : U_1.
Vstupná (výstupná) trieda g_i i-tého uzla je daná počtom vstupujúcich (vystupujúcich) šípok orientácie strán.	Trieda g_i i-tého člena (účastníka) SVT.



Obr. 1.9

a) Kinematická schéma priestorového dvojslučkového mechanizmu, b) štruktúrna schéma mechanizmu z obr. 1.9a, c) orientovaný inverzný graf orientovaného mechanizmu z obr. 1.9d, d) orientovaný mechanizmus s vyznačenými relatívnymi pohybmi telies v spojeniach, e) štruktúrna schéma kostry mechanizmu z obr. 1.9a s rozpojenými spojeniami S_1, S_2, f) kostra grafu (súvislý graf) kostry mechanizmu z obr. 1.9e

<u>Orientovaná cesta</u> má susedné strany súhlasne orientované.

<u>Orientovaná kružnica</u> je uzatvorená orientovaná cesta.

<u>Graf s údajmi</u> o stranách a uzloch.

<u>Orientovaná OROV</u>.

<u>Orientovaná slučka</u>, ktorej orientované strany tvoria jeden mnohouholník, napr. obr. 1.10b.

<u>SVT s údajmi</u> o triede a type spojení, o hmotnostiach členov atď.

Podľa predošlých vzťahov medzi SVT a jej grafom opíšeme štruktúru SVT <u>topologickými maticami</u>, ktoré tvoria matematický model SVT, pričom budeme pracovať priamo s kinematickou a štruktúrnou schémou SVT na obr. 1.9a,b.

<u>Incidenčnú maticu</u> $\mathcal{I}_{\overline{M}}$ orientovanej SVT utvoríme tak, že očíslujeme členov 1 až u, spojenia orientujeme šípkami a očíslujeme 1 až s, potom

$$\text{prvok } m_{ij} = \begin{cases} +1, \text{ ak i-tý člen pozitívne inciduje s j-tym spojením} \\ -1, \text{ ak i-tý člen negatívne inciduje s j-tym spojením} \\ 0, \text{ ak i-tý člen neinciduje s j-tym spojením} \end{cases}$$

pričom počet riadkov $\mathcal{I}_{\overline{M}}$ sa rovná počtu u členov, počet stĺpcov $\mathcal{I}_{\overline{M}}$ závisí od počtu spojení, teda typ $\mathcal{I}_{\overline{M}}$ je (u, s) pre SVT na obr. 1.9a je

$$\mathcal{I}_{\overline{M}} = \begin{array}{c} \text{člen } U_i \\ i \in \langle 1,u \rangle \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \text{spojenie } S_j,\ j \in \langle 1,s \rangle \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ak pracujeme s prvkami m_{ij} bez znamienok, potom <u>hodnosť</u> h_M $\mathcal{I}_M$ neorientovanej SVT sa rovná počtu spojení v kostre SVT (počtu p_v vetiev v kostre grafu SVT):

$$h_M = u - p_k \equiv s \equiv p_v \tag{1.32}$$

kde p_k je počet komponentov SVT.

Súčet prvkov v i-tom riadku $\mathcal{I}_M$ dáva triedu g_i telesa u_i:

$$g_i = \sum_{j=1}^{s} m_{ij} \tag{1.33}$$

Súčet prvkov v $\mathcal{I}_M$ sa rovná 2s:

$$2\,s = \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{s} m_{ij} \tag{1.34}$$

V každom stĺpci $\mathcal{I}_M$ sú dve jednotky, ostatné sú nuly. Ak majú dve SVT tú istú $\mathcal{I}_M$, sú izomorfné.

Incidenčná matica $\mathcal{I}_s$ spojení typu (u,u) má prvky:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak sú členy } i, j \text{ spojením} \\ 0, & \text{ak členy } i, j \text{ nie sú spojené} \end{cases} \tag{1.35}$$

Potom platí:

$$\mathcal{I}_M \mathcal{I}_M^T = \mathcal{G} + \mathcal{I}_s \tag{1.36}$$

kde $\mathcal{G} = \lceil g_i \rfloor$ je diagonálna matica typu (u,u), ktorej prvky udávajú triedu g_i člena u_i.

Incidenčná matica $\mathcal{I}_{\bar{K}}$ orientovaných slučiek SVT (u,s) s počtom k_s slučiek k_i, $i = 1, 2, \ldots, k_s$ má prvky:

$$m_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{ak orientácia i-tej slučky je zhodná s orientáciou j-teho spojenia} \\ -1, & \text{ak orientácia i-tej slučky nie je zhodná s orientáciou j-teho spojenia} \\ 0, & \text{ak i-tá slučka neobsahuje j-te spojenie} \end{cases} \tag{1.37}$$

Počet riadkov $\mathcal{I}_{\bar{K}}$ je daný počtom k_s, počet stĺpcov zasa počtom s spojení, teda $\mathcal{I}_{\bar{K}}$ je typu (k_s, s).

V SVT na obr. 1.9d sú slučky:

k_1: 1 2 3 4 1 so spojeniami S_1 S_2 S_3 S_4
k_2: 1 2 3 4 5 6 1 so spojeniami S_1 S_4 S_3 S_5 S_6 S_7
k_3: 1 2 3 5 6 1 so spojeniami S_1 S_2 S_5 S_6 S_7

počet $k_s = 3$.

Pre SVT na obr. 1.9d je incidenčná matica $\mathcal{I}_{\bar{K}}$ orientovaných slučiek:

$$\mathcal{I}_{\bar{K}} = \begin{array}{c} \text{slučka } k_i \\ i \in \langle 1, k_s \rangle \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{spojenie } S_j,\ j \in \langle 1, s \rangle \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>Hodnosť</u> h_k <u>incidenčnej matice</u> $\mathcal{J}_K$ <u>slučiek</u> neorientovanej SVT (bez znamienok +, −) je

$$h_k = s - u + p_k \tag{1.38}$$

a pre $p_k = 1$ (počet komponentov SVT) je

$$h_k = k \tag{1.39}$$

pričom počet k ZS je zhodný s počtom lineárne nezávislých riadkov v $\mathcal{J}_K$.

<u>Incidenčnú maticu</u> $\mathcal{J}_{\overline{KZ}}$ <u>orientovaných ZS</u> JSVT (u,s) získame podľa (1.37) pre $i \in \langle 1,k \rangle$, pričom je typu (k,s). Pre SVT z obr. 1.9d je $\mathcal{J}_{\overline{KZ}}$:

$$\mathcal{J}_{\overline{KZ}} = \begin{array}{c} \text{slučka } k_i \\ i \in \langle 1,k \rangle \\ 1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{spojenie } S_j,\ j \in \langle 1,s \rangle \\ \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \end{array}$$

lebo riadok zodpovedajúci slučke k_3 v $\mathcal{J}_{\overline{K}}$ je lineárnou kombináciou prvých dvoch riadkov. Incidenčnú maticu $\mathcal{J}_{\overline{KZ}}$ môžeme zapísať v tvare

$$\mathcal{J}_{\overline{KZ}} = \left[\mathcal{J}_{\overline{KT}},\ \mathcal{J}_{\overline{KV}} \right] \tag{1.40}$$

kde $\mathcal{J}_{\overline{KT}}$ je <u>jednotková matica</u> typu (k,k) a jej stĺpce zodpovedajú <u>tetivám</u> kostry grafu JSVT a $\mathcal{J}_{\overline{KV}}$ je matica typu (k,p_R), ktorej stĺpce zodpovedajú vetvám kostry grafu.

<u>Incidenčná matica rezov</u> $\mathcal{J}_{\overline{R}}$ orientovanej JSVT (u,s) typu (p_R,s), kde p_R je počet rezov, s počet spojení v JSVT má prvky:

$$m_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{ak je j-te spojenie súhlasne orientované s i-tým rezom} \\ -1, & \text{ak je j-te spojenie nesúhlasne orientované s i-tým rezom} \\ 0, & \text{ak sa j-te spojenie nenachádza v i-tom reze} \end{cases} \tag{1.41}$$

<u>Hodnosť</u> h_R <u>matice</u> $\mathcal{J}_R$ (bez znamienok +, −) sa rovná počtu rozpojených spojení v JSVT, aby sme získali dve závislé JSVT

$$h_R = u - 1 \equiv p_R \tag{1.42}$$

pre $p_K = 1$ je

$$h_R = h_M \tag{1.43}$$

<u>Incidenčnú maticu</u> $\mathfrak{I}_{\overline{RZ}}$ <u>základných rezov</u> orientovanej JSVT typu (p_R, s) získame podľa (1.41) pre $i \in \langle 1, p_R \rangle$ a môžeme ju zapísať v tvare

$$\mathfrak{I}_{\overline{RZ}} = \left[\mathfrak{I}_{\overline{RT}}, \mathfrak{I}_{\overline{RV}} \right] \tag{1.44}$$

Pričom platí:

$$\mathfrak{I}_{\overline{KV}} = - \mathfrak{I}_{\overline{RT}}^{T} \tag{1.45}$$

$$\mathfrak{I}_{\overline{KT}} = - \mathfrak{I}_{\overline{RV}}^{T} \tag{1.46}$$

lebo matice $\mathfrak{I}_{\overline{K}}$ a $\mathfrak{I}_{\overline{R}}$ sú ortogonálne:

$$\mathfrak{I}_{\overline{K}} \, \mathfrak{I}_{\overline{R}}^{T} = \mathcal{O} \tag{1.47}$$

Ak vytvoríme kostru SVT tak, že najprv očíslujeme počet k rozpojených spojení (S_1, S_2 v obr. 1.9e), a až potom očíslujeme ostatné spojenia (S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, obr. 1.9e), incidenčná matica $\mathfrak{I}_{\overline{M}}$ bude mať tvar

$$\mathfrak{I}_{\overline{M}} = \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_{\overline{M}11} & \mathfrak{I}_{\overline{M}12} \\ \mathfrak{I}_{\overline{M}21} & \mathfrak{I}_{\overline{M}22} \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

kde $\mathfrak{I}_{\overline{M}11}$ je matica tetív kostry SVT,
$\mathfrak{I}_{\overline{M}12}$ je štvorcová regulárna incidenčná matica kostry SVT typu (p_R, p_R).

Potom z $\mathfrak{I}_{\overline{M}}$ môžeme vypočítať $\mathfrak{I}_{\overline{KZ}}$, $\mathfrak{I}_{\overline{RZ}}$ podľa vzťahov:

$$\mathfrak{I}_{\overline{KZ}} = \left[\mathfrak{I}, - \mathfrak{I}_{\overline{M}11}^{T} \left(\mathfrak{I}_{\overline{M}12}^{-1} \right)^{T} \right] \tag{1.49}$$

$$\mathfrak{I}_{\overline{RZ}} = \left[\mathfrak{I}_{\overline{M}12}^{-1} \mathfrak{I}_{\overline{M}11}, \mathfrak{I} \right] \tag{1.50}$$

kde $\mathfrak{I}$ je jednotková matica typu (k,k).

1.4 POLOHA A POHYBLIVOSŤ TELIES V KOREKTNÝCH SVT

1.4.1 Grüblerovo kritérium pohyblivosti telies v korektných SVT

Pohyblivosť n_{vu} skupiny u voľných telies v priestore, resp. v rovine určíme podľa vzťahu (1.11f): $n_{vu} = n_v\, u$.

Ak každé dve telesá prinútime, aby sa ich povrchy trvalo dotýkali, utvoríme zo skupiny u voľných telies holonómnu sústavu viazaných telies (SVT). Každé aktívne (korektné) spojenie triedy t jednej dvojice telies zníži pohyblivosť členov SVT o t stupňov voľnosti pohybu, potom počet s_t spojení triedy t dvojíc telies odoberá SVT $t\, s_t$ stupňov voľnosti pohybu.

Ak označíme n_G pohyblivosť počtu členov u SVT, podľa predošlého je

$$n_G = n_v\, u - \sum_{t=1}^{n_v} t\, s_t \qquad (1.51a)$$

SVT, ktorá spĺňa podmienku

$$n_G = n^s \qquad (1.51b)$$

kde podľa (1.8) n^s je skutočná pohyblivosť, nazývame korektnou SVT. Z (1.51a) dostaneme modifikáciu Grüblerovho kritéria pre výpočet pohyblivosti korektného mechanizmu, ktorý spĺňa (1.51b), lebo pre $t = n_v$ je $s_t = 1$ (rám)

$$n_G = n_v\,(u - 1) - \sum_{t=1}^{n_v-1} t\, s_t \qquad (1.52)$$

Zo vzťahu (1.52) získame pôvodný tvar kritéria pohyblivosti pre rovinný mechanizmus ($n_v = 3$) so spojeniami len triedy $t = 2$ a pohyblivosťou $n_G = 1$:

$$4 - 3\,u - 2\,s_2 = 0 \qquad (1.53)$$

ktoré nezávisle od seba odvodili Grübler, Kutzbach, Čebyšev aj Sylvester.