1. Štruktúrna analýza a syntéza sústav viazaných telies

Sústava viazaných telies (skrátene SVT) je sústava nedeformovateľných telies bez vôlí v spojeniach (teda v miestach vzájomného dotyku povrchov telies), ale aj ohybných telies, ako sú remene, reťaze, lana, a za teleso SVT pokladáme aj tekutiny (kvapaliny, plyny), ktoré pôsobia na ostatné telesá v SVT. Pružiny a tlmiče považujeme za nehmotné.

V štruktúrnej analýze, ktorá je východiskovou etapou pre kinematickú a dynamickú analýzu mechanizmov, má základný význam otázka vhodného výberu druhu a počtu súradníc polohy bodov a telies. Kým polohu bodov opisujeme spravidla karteziánskymi (základnými) súradnicami, polohu telies v SVT je výhodnejšie opísať zovšeobecnenými súradnicami polohy známymi z analytickej mechaniky, do ktorých zahrnieme okrem nezávislých aj závislé súradnice polohy. Z vlastností spojení telies, pohyblivosti SVT a základných slučiek určíme počet lokálnych aj globálnych súradníc polohy telies, pričom globálne súradnice polohy využívame vo vektorovej metóde kinematickej analýzy rovinných mechanizmov a lokálne súradnice v homogénnom tvare zasa v maticových metódach kinematickej analýzy priestorových mechanizmov.

V zložitom procese utvárania vyžadovaného mechanizmu hrá významnú úlohu návrh štruktúry mechanizmu. Možnosti použitia tried spojení pri syntéze rovinných mechanizmov ukážeme v metóde transformačnej reťaze a možnosti použitia tried členov v modulárnej syntéze rovinných mechanizmov.

1.1 POLOHA A POHYBLIVOSŤ VOĽNÝCH ÚTVAROV

Diskrétny bodový model - DBM voľného telesa v priestore, resp. v rovine tvoria tri rôzne body L_i, $i = 1,2,3$, ktoré nepatria jednej priamke, resp. dva rôzne body, pričom vzájomná vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov je konštantná.

Označme q_i zovšeobecnené lokálne súradnice (skrátene súradnice) vzájomnej polohy susedných útvarov, ktorými môžu byť body, dve telesá alebo viacero telies:

$$q_i \,, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, c \tag{1.1}$$

Ak pre súradnice polohy bodu niet obmedzení, potom sú navzájom nezávislé a označujeme ich q_{ni},

$$q_{ni}\,, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{1.2}$$

kde n je ich počet.

Počet n nezávislých súradníc polohy bodu sa rovná jeho pohyblivosti, ktorú chápeme ako počet nezávislých pohybov bodu (počet stupňov voľnosti pohybu bodu), pri ktorých jednotlivé premiestnenia bodu voči vzťažnému priestoru charakterizujeme príslušnými nezávislými súradnicami polohy. Teda ak niet obmedzení pre súradnice polohy bodu, niet obmedzení ani pre jeho pohyblivosť.

Ak súradnice bodu spĺňajú jednu explicitnú väzobnú podmienku (rovnicu)

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_c, t) = 0 \tag{1.3}$$

je to zároveň obmedzenie pre jeho pohyblivosť, ktorá sa pre aktívne (korektné) väzby skutočne zníži o jeden stupeň voľnosti pohybu.

Z celkového počtu c súradníc q_i polohy bodu, ktoré spĺňajú podmienku (1.3), je počet n nezávislých. Označme:

$$z = c - n \tag{1.4}$$

počet súradníc

$$q_{zi}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, z \tag{1.5}$$

závislých od q_{ni}, lebo ich môžeme pomocou q_{ni} zo vzťahu (1.3) jednoznačne určiť.

Karteziánske súradnice x_L, y_L, z_L polohy voľného bodu:
$L(x_L, y_L, z_L)$ voči ortonormálnemu repéru $O_a(\bar{i}_a, \bar{j}_a, \bar{k}_a)$ sú navzájom nezávislé, potom podľa (1.4) je

$$z = 0, \text{ teda} \qquad c \equiv n = 3 \tag{1.6a}$$

$$q_1 \equiv q_{n1} = x_L, \qquad q_2 \equiv q_{n2} = y_L, \qquad q_3 \equiv q_{n3} = z_L$$

Zo súradníc bodu L viazaného na plochu s rovinou $F(x, y, z) = 0$ (podľa (1.3), v ktorom nevystupuje čas t, teda je to skleronómna väzba) sú dve

nezávislé a jedna závislá, ktorú určíme z rovnice plochy, teda

$$z = 1 , \qquad n = 2 \tag{1.6b}$$

Súradnice bodu L viazaného na krivku spĺňajú súčasne dve väzbové podmienky (rovnice dvoch plôch):

$$F_1(x, y, z) = 0 \tag{1.6c}$$

$$F_2(x, y, z) = 0 \tag{1.6d}$$

teda nezávislá je len jedna súradnica polohy:

$$z = 2 , \qquad n = 1 \tag{1.6e}$$

Počet z závislých súradníc polohy sa rovná počtu m_r rovníc väzieb

$$z = m_r \tag{1.7}$$

V prípade, že rovnice (1.6c), (1.6d) sú rovnicami tej istej plochy, hoci máme pre súradnice bodu L dve väzbové podmienky, v skutočnosti znižujú pohyblivosť bodu len o jeden stupeň voľnosti pohybu. Takéto väzby nazývame pasívne (nekorektné).

Skutočná pohyblivosť n^s bodu bude

$$n^s = n + n_n \tag{1.8}$$

kde n_n je počet neodobratých stupňov voľnosti pohybu.

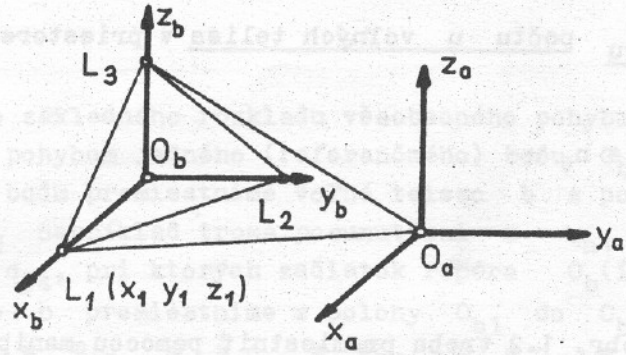
Pre tri body L_i, i = 1, 2, 3 DBM voľného telesa b v priestore a máme vzhľadom na (1.6a) celkový počet c = 9 karteziánskych súradníc polohy, ktoré sú viazané troma implicitnými väzbovými podmienkami (rovnicami):

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - h_{ij}^2 = 0 \tag{1.9}$$

kde (i, j) = (1, 2)(1, 3)(2, 3) a $h_{ij} = \overline{L_i L_j}$, obr. 1.1.

Teda polohu voľného telesa b voči telesu a v priestore určíme podľa (1.4) a (1.7) počtom

$$n = 6 \tag{1.10a}$$



Obr. 1.1
Body L_1, L_2, L_3 diskrétneho bodového modelu voľného telesa b v priestore a

nezávislých súradníc polohy. Počet nezávislých súradníc polohy voľného telesa v rovine je

$$n = 3 \tag{1.10b}$$

Polohu skupiny u voľných telies v priestore, resp. v rovine určíme počtom:

$$n = 6\ u \tag{1.10c}$$

resp.

$$n = 3\ u \tag{1.10d}$$

nezávislých súradníc polohy.

Označme n_b <u>pohyblivosť voľného bodu</u>, potom podľa (1.6a,b,e) je pohyblivosť hmotného bodu

v priestore: $n_b = 3$ (1.11a)

v rovine : $n_b = 2$ (1.11b)

na krivke : $n_b = 1$ (1.11c)

<u>Pohyblivosť</u> n_v <u>voľného telesa</u> bude

v priestore: $n_v = 6$ (1.11d)

a pri rovinnom pohybe:

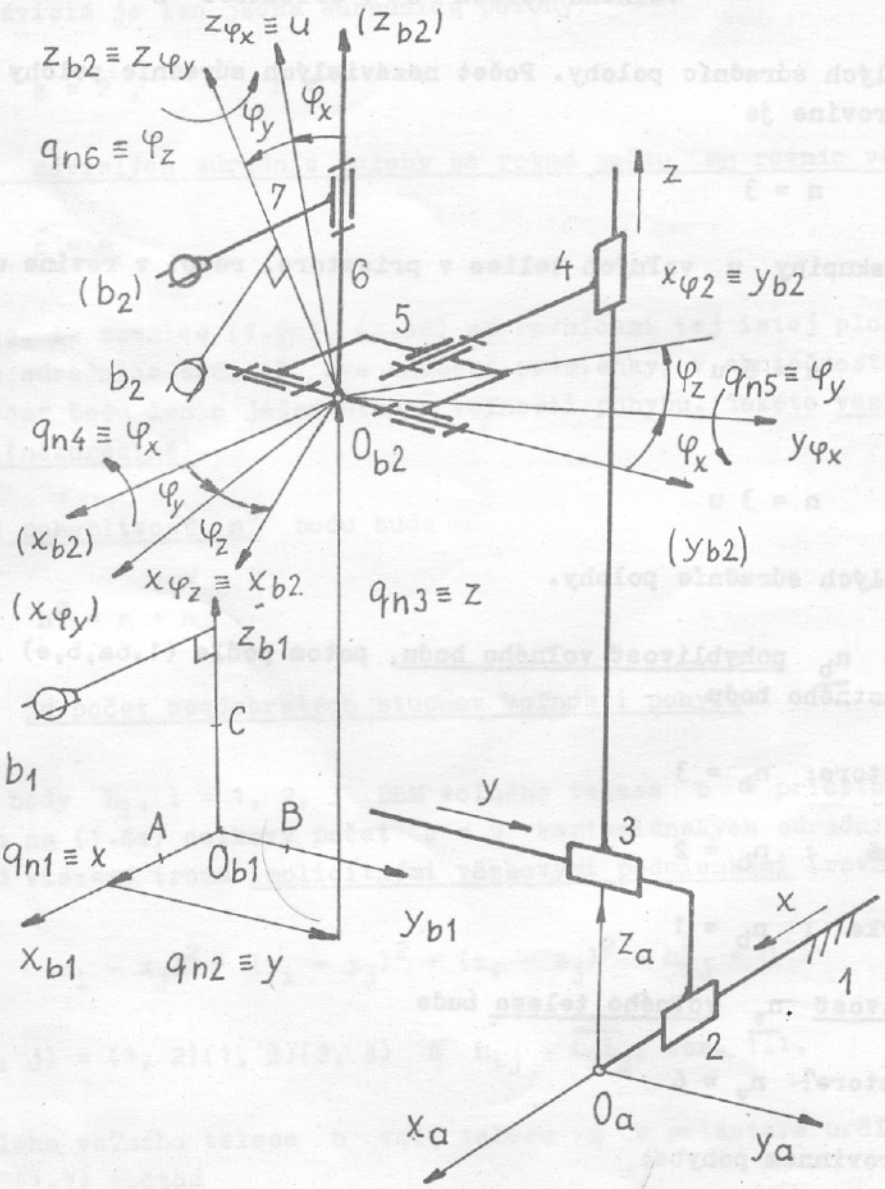
$$n_v = 3 \tag{1.11e}$$

Pohyblivosť n_{vu} počtu u voľných telies v priestore, resp. v rovine bude

$$n_{vu} = n_v\, u \tag{1.11f}$$

Príklad 1.1:

Teleso b na obr. 1.2 treba premiestniť pomocou manipulátora z východiskovej polohy b_1 do konečnej polohy b_2 podľa (1.11d) šiestimi navzájom nezávislými pohybmi.



Obr. 1.2

Člen 7 otvoreného mechanizmu manipulátora premiestňuje teleso b z východiskovej polohy b_1 do konečnej polohy b_2

Riešenie:

Podľa Poissontovho základného rozkladu všeobecného pohybu telesa b na translačný určený pohybom jedného (referenčného) bodu O_b telesa b a sférický okolo tohto bodu premiestnime voľné teleso b z polohy b_1 do vyžadovanej polohy b_2 napríklad troma posunutiami $x = q_{n1} \equiv q_{12}$, $y = q_{n2} \equiv \equiv q_{23}$, $z = q_{n3} \equiv q_{34}$, pri ktorých začiatok repéra $O_b(\bar{i}_b, \bar{j}_b, \bar{k}_b)$ reprezentujúceho teleso b premiestnime z polohy O_{b1} do O_{b2} a troma pootočeniami $\varphi_x = q_{n4} \equiv \varphi_{45}$, $\varphi_y = q_{n5} \equiv \varphi_{56}$, $\varphi_z \equiv q_{n6} \equiv \varphi_{67}$ (Cardanove uhly) alebo φ, ϑ, ψ (Eulerove uhly), ktoré vyplývajú zo známej medzipolohy (b_2) po posunutiach a vyžadovanej konečnej polohy b_2.

1.2 POLOHA A POHYBLIVOSŤ TELESA V SPOJENÍ DVOCH A VIACERÝCH TELIES

Ak dve voľné telesá prinútime, aby sa ich povrchy trvalo dotýkali, utvoríme z nich <u>holonómnu sústavu</u> dvoch <u>viazaných telies</u> (dvojicu telies).

Základným (Soniho [24]) <u>bodovým modelom spojenia</u> dvoch telies je všeobecné G spojenie, v ktorom <u>elementmi spojenia</u> sú priestorové plochy, ktoré sa trvalo dotýkajú v spoločnom bode. Ak takéto spojenie znemožňuje vzájomný pohyb telies pozdĺž spoločnej normály povrchov v mieste dotyku, zníži voľnému telesu pri vstupe do G spojenia jeho pohyblivosť v priestore na $n = 5$, resp. v rovine na $n = 2$.

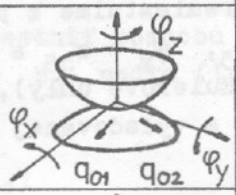
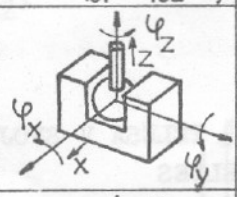
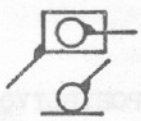
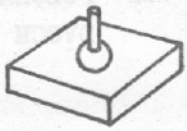
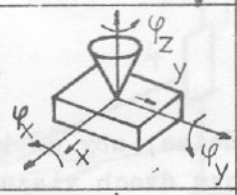
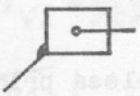
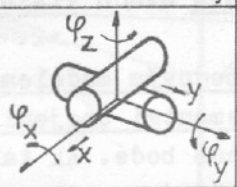
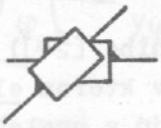
Podľa počtu t bodov dotyku počtu $v = 2$ telies, v ktorých majú ich povrchy spoločné normály, máme <u>triedy t spojení S_{tv} dvoch telies</u>, pričom pre spojenia s rôznymi geometrickými útvarmi dotyku sú spoločné Soniho bodové modely spojení (tabuľky spojení tab. 1.1 - 1.5).

<u>Spojenie S_{tv} viacerých telies</u> tvoria dotýkajúce sa elementy spojenia počtu $v \geq 3$ telies, pričom priesečník priamok spojených s telesami nemení pri vzájomnom pohybe telies polohu voči vzťažnému priestoru (tab. 1.6).

Pri vstupe voľného telesa do spojenia S_{tv} triedy t potrebujeme podľa (1.4) na určenie jeho polohy voči susednému telesu počet:

$$n_t = n_v - t \qquad t \in \langle 0,6 \rangle \tag{1.12}$$

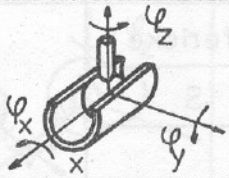
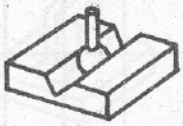
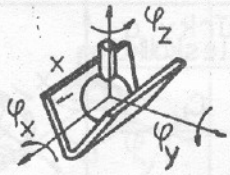
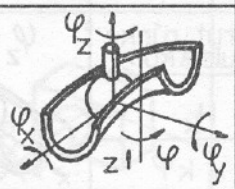
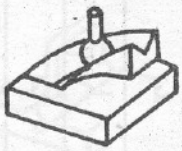
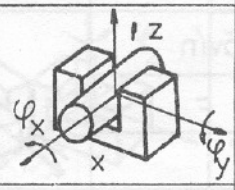
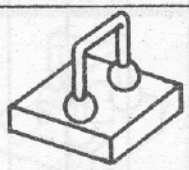
Tabuľka 1.1

SPOJENIA S_{tv}, v = 2 DVOCH TELIES									
TRIEDA t		POH. n_t	POČET MOŽ. POHYBOV			NÁZOV SKRATKA OPIS	KONŠTR. SCHÉMA	KINEM. SCHÉMA (ZNAČKA)	MODEL
PR.	ROV.		ROT.	TRAN	SKR.				
1	–	5	3	2	0	všeobecné G dotyk v bode			
1	–	5	3	2	0	roviny s guľou F_S			
1	–	5	3	2	0	roviny s vrcholom F_B			
1	–	5	3	2	0	valcov C_c			
1	–	5	3	1	1	—			
1	–	5	2	2	1	—			

nezávislých (lokálnych súradníc) súradníc polohy telesa v spojení S_{tv} triedy t, pričom n_t nazývame pohyblivosť telesa v spojení triedy t dvoch telies. Pre t = 0 máme prípad voľného telesa a trieda $t = n_v$ má jediného reprezentanta znehybnené teleso (rám).

Pohyblivosť n_t telesa v spojení súvisí podľa Šrejtra [25] aj so vzájomnou polohou počtu t normál v dotykových bodoch elementov spojenia dvoch telies. Vzťah (1.12) platí vtedy, ak pre $n_v = 6$ počet:

Tabuľka 1.2

SPOJENIA DVOCH TELIES									
TRIEDA t		POH. n_t	POČET MOŽ. POHYBOV			NÁZOV SKRATKA OPIS	KONŠTR. SCHÉMA	KINEM. SCHÉMA (ZNAČKA)	MODEL
PR.	ROV.		ROT.	TRAN.	SKR.				
2	–	4	3	1	0	rúrky s guľou C_s			
2	–	4	3	1	0	drážky s guľou D_s			
2	–	4	3	0	1	skrut. rúr. s guľou H_s $z = k\varphi$			
2	–	4	2	2	0	roviny s valcom F_c			
2	–	4	1	2	1	—			
2	–	4	2	1	1	—			

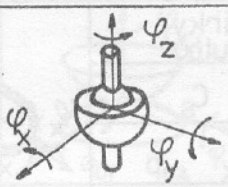
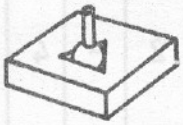
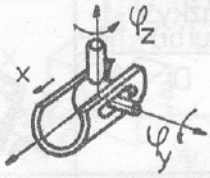
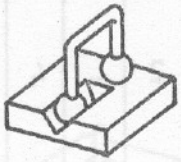
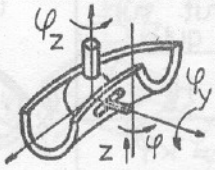
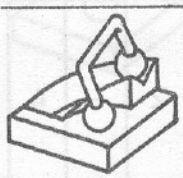
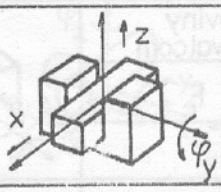
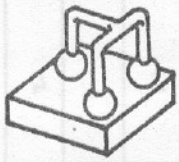
1. t = 6 normál nepatrí tomu istému <u>lineárnemu komplexu</u>, teda 6 normál nepretína tú istú priamku, potom

$$n_6 = 0 \tag{1.13a}$$

2. t = 5 normál nepatrí tej istej <u>lineárnej kongruencii</u>, teda 5 normál nepretína súčasne dve rôzne priamky,

$$n_5 = 1 \tag{1.13b}$$

Tabuľka 1.3

SPOJENIA DVOCH TELIES									
TRIEDA t		POH. n	POČET MOŽ. POHYBOV			NÁZOV SKRATKA OPIS	KONŠTR. SCHÉMA	KINEM. SCHÉMA (ZNAČKA)	MODEL
PR.	ROV.		ROT.	TRAN.	SKR.				
3	—	3	3	0	0	sférické S			
3	—	3	2	1	0	rúrky a guleskolíkom C_k			
3	—	3	2	0	1	skrut. rúrky a guleskol. H_k $z = k\varphi$			
3	—	3	1	2	0	rovín F			
3	—	3	1	1	1	—			
3	—	3	0	2	1	—			

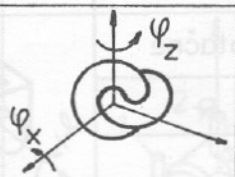
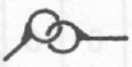
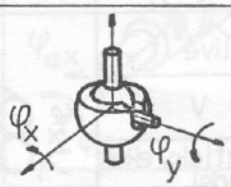
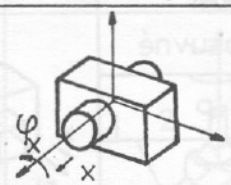
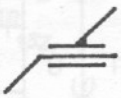
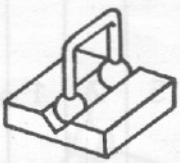
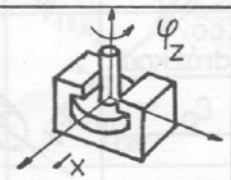
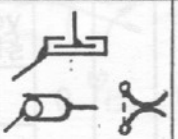
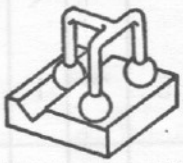
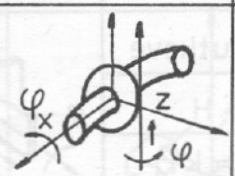
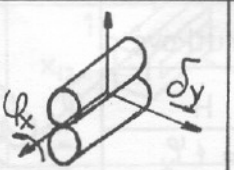
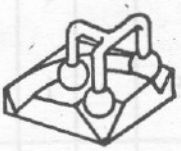
t = 4 normály nepatria tej istej osnove <u>nerozvinuteľnej kvadratickej plochy</u>, teda 4 normály nepretínajú súčasne tri mimobežné priamky,

$$n_4 = 2 \tag{1.13c}$$

4. t = 3 normály ležiace v spoločnej rovine nemajú spoločný bod,

$$n_3 = 3 \tag{1.13d}$$

Tabuľka 1.4

SPOJENIA DVOCH TELIES									
TRIEDA t		POH n_t	POČET MOŽ. POHYBOV			NÁZOV SKRATKA OPIS	KONŠTRUKČ. SCHÉMA	KINEM. SCHÉMA (ZNAČKA)	MODEL
PR.	ROV.		ROT.	TR.	SKR.				
4	–	2	2	0	0	anuloidov A			
4	–	2	2	0	0	sférické s kolíkom S_K			
4	–	2	1	1	0	valcové C			
4	1	2	1	1	0	preklzujúce K			
4	–	2	1	0	1	anuloidu so skrutkovicou A_H $z = k\varphi$			
4	1	2	1	1	0	valivé V kinematicky ekviv. model			
4	–	2	0	2	0	–			
4	–	2	0	1	1	–			

5. t = 2 normály sa nestotožňujú,

$$n_2 = 4 \qquad (1.13e)$$