2-5596 Mechanika viazaných mechanických systémov (VMS)
pre špecializáciu Aplikovaná mechanika, 4.roč. zimný sem.
Prednáša: doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

Aké sú teoretické východiská pre modálnu reprezentáciu pružného telesa v prostredí modulu MSC.ADAMS/Flex

Motiváciou pre zohľadnenie pružných vlastností telies pri dynamických simuláciách virtuálneho prototypu je rozhodujúca miera ich vplyvu na prevádzkové parametre virtuálneho prototypu ako aj na spoľahlivé určenie časovej histórie dynamického zaťaženia pružných telies potrebnej pre ich dimenzovanie a predikciu ich životnosti.

Na zakomponovanie pružných telies do virtuálneho prototypu v prostredí programu MSC.ADAMS sú k dispozícii moduly A/Flex a A/AutoFlex.

Pružné teleso (Finite Element Body - FEB) v prostredí externého konečno-prvkového FE programu reprezentuje súbor MNF (Modal Neutral File), ktorý obsahuje všetky dôležité údaje o zotrvačných a pružných vlastnostiach pružného telesa ako aj informácie potrebné pri zakomponovaní pružného telesa do virtuálneho prototypu v prostredí programu MSC.ADAMS pomocou modulu A/Flex.

Ak má pružné teleso geometricky jednoduchý tvar, potom na utvorenie odpovedajúceho MNF súboru nie je potrebný externý FE program, lebo utvorenie a zakomponovanie FEB do virtuálneho prototypu v prostredí programu MSC.ADAMS umožňuje modul A/AutoFlex.

Craig a Bampton navrhli metódu syntézy tvarov (Component Mode Synthesis – CMS) pružného telesa (FEB), ktorá umožňuje reprezentovať pružné teleso (FEB) syntézou tvarov (Mode Shapes) ako modálne pružné teleso (Modal Flexible Body – MFB). V prostredí programu MSC.ADAMS je modálne pružné teleso vo forme modelovacieho prvku Flex_Body, ktorý sa dá pripojiť na susedné tuhé, alebo pružné telesá prvkami geometrických väzieb. Modálne pružné teleso (MFB) je v porovnaní s doterajšou reprezentáciou pružného telesa (FEB) súborom MNF v prostredí FE programu vhodnejšie na:

- realizáciu úsporných dynamických simulácií v sústave s ostatnými pružnými, alebo tuhými telesami s veľkými (nelineárnymi) premiestneniami v porovnaní so svojimi rozmermi, lebo má verné dynamické vlastnosti (FEB) pružného telesa, ale s výpočtovo úsporným menším počtom stupňov voľnosti pohybu,
- na dynamické simulácie veľkých deformácií telesa v porovnaní so svojimi rozmermi vo forme sústavy modálnych pružných telies (MFB), pri ktorých sa prejavuje zvyšovanie tuhosti pružného telesa v dôsledku jeho zotrvačných vlastností,
- na výpočtovo efektívnu reprezentáciu pružného telesa vo vymedzenom frekvenčnom rozsahu, lebo umožňuje uskutočniť vhodnú modálnu redukciu s malým počtom stupňov voľnosti pohybu (Degrees of Freedom – DOF),
- na ľubovoľné nastavovanie tlmenia pre jednotlivé vlastné tvary formou pomeru s kritickým tlmením,

- na realizáciu intuitívnych, alebo cielených zmien vlastností pružného telesa podľa výsledkov experimentálnych modálnych meraní po dosiahnutie výžadovaného stupňa korelácie.

Dynamické simulácie sústavy viazaných modálnych pružných telies (MFB) a tuhých telies s veľkými (nelineárnymi) premiestneniami v prostredí programu MSC.ADAMS sú výpočtovo efektívnejšie v porovnaní s prostredím FE programov najmä preto, že určovanie malých lineárnych deformácií modálneho pružného telesa prebieha voči lokálnemu vzťažnému systému (Local Coordinate System – LCS), ktorý sa premiestňuje voči globálnemu vzťažnému systému (Global Coordinate System – GCS).

Reálne pružné teleso je kontinuum s nekonečne veľkým počtom stupňov voľnosti pohybu. Diskretizáciou reálneho pružného telesa vznikla konečno-prvková (Finite Element Body - FEB) aproximácia pružného telesa s konečným, ale veľkým počtom DOF.
Modálne pružné teleso (MFB) je výpočtovo úspornejšia reprezentácia konečno-prvkového pružného telesa, lebo malé lineárne deformácie konečno-prvkového telesa (FEB) (voči rozmerom telesa), reprezentované vektorom $\overline{u}$ premiestnení uzlov voči LCS nahradíme súčtom súčinov (lineárnou kombináciou) počtu m vlastných vektorov (alebo modálnych tvarov) f_i s modálnymi súradnicami q_i, ktoré v uzloch odpovedajú amplitúdam modálnych tvarov

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{m} f_i q_i \tag{1a}$$

Grafická analógia náhrady tvarovo zložitej deformácie lineárnou kombináciou vlastných tvarov je na Obr.1.

Obr.1 Zložitý tvar je výsledkom lineárnej kombinácie jednoduchších tvarov.

Výhodou modálnej superpozície je, že modálne pružné teleso (MFB) s oveľa menším počtom modálnych DOF ako má pružné teleso FEB aj po redukcii počtu modálnych tvarov dostatočne presne aproximuje tvar deformácie pružného telesa FEB, ktoré má veľký počet uzlových DOF
Rovnica (1a) má maticový tvar:

$$\overline{u} = \mathbf{\Phi}\overline{q} \ , \tag{1b}$$

kde F je modálna matica, v ktorej stĺpce sú modálne tvary f_i a $\bar{q}$ je vektor modálnych súradníc q_i, i=1,...,m. Po modálnej redukcii bude obdĺžniková modálna matica F transformovať počet m modálnych súradníc q_i na väčší počet fyzikálnych súradníc vektora $\bar{u}$ premiestnení uzlov voči LCS.
Modifikovaná Craig-Bamptonova metóda dáva odpoveď na otázku „ako vybrať minimálny počet modálnych súradníc odpovedajúcich modálnym tvarom pre modálne pružné teleso (MFB), aby dostatočne presne nahradilo pružné teleso (FEB), teda ako optimalizovať „modálnu reprezentáciu" pružného telesa.

Modálna syntéza podľa modifikácie Craig-Bamptonovej metódy syntézy vlastných tvarov

Východiskom je predpoklad, že vlastné vektory by mohli poskytnúť potrebnú modálnu reprezentáciu. Aby sa zabránilo kolíziám v ohraničeniach (väzbách, obmedzeniach) v systéme, najskôr sa využívali vlastné vektory systému bez ohraničení.
Požívatelia sa snažili vystihnúť vlastnosti pružného telesa. Aby dosiahli modálnu vernosť, často používali nadbytočný počet tvarov. Veľký počet určených vlastných vektorov bol nadbytočný pre vyžadovanú úroveň modelovania systému.
Riešením bolo použitie CMS (Component Mode Synthesis) techniky a tento všeobecný postup bol upravený do Craig-Bamptonovej metódy.

Táto metóda umožňuje odstrániť podmnožinu tých DOF, ktoré nie sú predmetom modálnej superpozície. Ak vypneme vlastné tvary vysokých rádov, potom nedochádza k žiadnej strate v rozlíšení pre tieto DOF. Do Craig-Bamptonovej modálnej reprezentácie patria väzobné DOF, ktoré majú alternatívne názvy *(boundar, attachment, interface)*.
Craig-Bamptonova metóda delí premiestnenia na väzobné, (boundary) $\mathbf{u}_B$ (DOF) a vnútorné (internal) $\mathbf{u}_I$ (DOF). Analogicky definujeme dve množiny modálnych tvarov:

1. **Väzobné modálne tvary s jednotkovým posunutím, (Constraint modes)**.

Tieto modálne tvary sú statické tvary získané výpočtami tak, že v každom uzle telesa vo väzbe (DOF) postupne predpíšeme jednotkové premiestnenie (DOF) telesa vo väzbe a uzly v ostatných väzbách zostávajú fixované (ukotvené).
Celkový počet väzobných modálnych tvarov (Constraint modes) je daný počtom väzobných uzlov (boundary nodes) násobených 6 DOF.
Väzobné modálne tvary zachytávajú všetky možné premiestnenia (DOF) telesa vo väzbe s jedno-jednoznačnou reláciou

$$\mathbf{q}_C = \mathbf{u}_B \qquad (2)$$

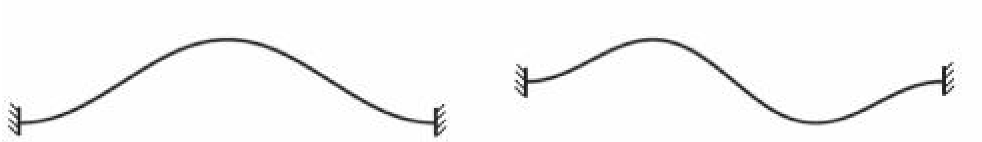
medzi modálnymi súradnicami $\mathbf{q}_C$ väzobných modálnych tvarov a premiestneniami $\mathbf{u}_B$ (DOF) telesa vo väzbe.

Teda počet modálnych súradníc väzobných modálnych tvarov (Constraint modes) = počtu premiestnení (DOF) pružného telesa v mieste väzby.

Obr.1: Dva väzobné modálne tvary pružného nosníka, ktorý je ukotvený na oboch koncoch. Vľavo je väzobný modálny tvar odpovedajúci jednotkovému posunutiu ľavého konca a na obrázku vpravo je väzobný modálny tvar odpovedajúci jednotkovému natočeniu ľavého konca (pravý koniec je votknutý).

2. Väzobné vlastné tvary s ukotvením (Fixed-boundary normal modes)

Tieto vlastné tvary dosiahneme ukotvením (fixovaním) pružného telesa v mieste väzby a určením vlastných tvarov modálnou analýzou telesa. Potrebné množstvo vlastných tvarov definuje používateľ podľa vyžadovaného stupňa vernosti vlastností náhrady pružného telesa. Tieto tvary definujú „modálnu expanziu" štruktúry vnútorných DOF (medzi väzobnými DOF). Fyzikálna vernosť vlastností pružného telesa a s tým súvisiaci frekvenčný rozsah použitia modelu pružného telesa je úmerná počtu vlastných tvarov definovaných užívateľom.



Obr.2 Dva ukotvené väzobné vlastné tvary pre nosník obojstranne votknutý.

Vzťah medzi fyzikálnymi premiestneniami (DOF), Craig-Bamptonovými modálnymi tvarmi a modálnymi súradnicami je vyjadrený rovnicou:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{IC} & \mathbf{\Phi}_{IN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_N \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Kde

$\mathbf{u}_B$ sú väzobné premiestnenia (DOF)

$\mathbf{u}_I$ sú vnútorné premiestnenia (DOF)

$\mathbf{I},\mathbf{0}$ sú jednotková a nulová matica,

$\mathbf{\Phi}_{IC}$ sú fyzikálne premiestnenia telesa v miestach vnútorných (interior) uzlov pri väzobných modálnych tvaroch s jednotkovým posunutím,

$\mathbf{\Phi}_{IN}$ sú fyzikálne premiestnenia telesa v miestach vnútorných (interior) uzloch pri väzobných modálnych tvaroch s ukotvením telesa vo väzbách

$\mathbf{q}_C$ sú modálne súradnice väzobných modálnych tvarov s jednotkovým posunutím,

$\mathbf{q}_N$ sú modálne súradnice väzobných vlastných tvarov s ukotvením telesa vo väzbách

Zovšeobecnenú maticu tuhosti a hmotnosti zodpovedajúca Craig-Bamptonovej modálnej reprezentácii (báze) získame modálnou transformáciou.
Transformácia matice tuhosti je

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{IC} & \mathbf{\Phi}_{IN} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{IC} & \mathbf{\Phi}_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{CC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{NN} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Transformácia matice hmotnosti je

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{IC} & \mathbf{\Phi}_{IN} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{IC} & \mathbf{\Phi}_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{CC} & \hat{\mathbf{M}}_{NC} \\ \hat{\mathbf{M}}_{CN} & \hat{\mathbf{M}}_{NN} \end{bmatrix} \tag{5}$$

kde písmeno I označuje vnútorné DOF, B väzobné DOF, N väzobné vlastné tvary s ukotvením a C väzobné tvary s jednotkovým posunutím.

$\hat{\mathbf{M}}$ je zovšeobecnená matica hmotnosti a $\hat{\mathbf{K}}$ zovšeobecnená matica tuhosti.

Rovnice (4) a (5) majú niekoľko povšimnutia hodných vlastností:

$\hat{\mathbf{M}}_{NN}$ a $\hat{\mathbf{K}}_{NN}$ sú diagonálne matice pretože sú priradené (asociované) vlastným vektorom (tvarom).
$\hat{\mathbf{K}}$ je blokovo diagonálna matica. Medzi ukotvenými väzobnými vlastnými tvarmi a väzobnými tvarmi s jednotkovým posunutím neexistuje tuhostná väzba.
naopak, $\hat{\mathbf{M}}$ nie je blokovo diagonálna, pretože existuje (zotrvačná) väzba medzi uvedenými vlastnými tvarmi.

Modálny ortonormalizovaný tvar

Craig-Bamptonova metóda je účinný nástroj pre syntézu modálnych reprezentácií, ktoré vyjadrujú požadovaný vplyv uchytenia a požadovanú úroveň dynamických vlastností. Avšak pôvodná koncepcia Craig-Bamptonovej modálnej reprezentácie mala vážne nedostatky, ktoré ju robili nevhodnou pre dynamické simulácie mechanických sústav s pružnými telesami. Tieto sú:

1. V Craig-Bamptonových väzobných tvaroch s jednotkovým posunutím je vložených 6 DOF tuhého telesa, ktoré treba pred analýzou v ADAMSe eliminovať, pretože ADAMS poskytuje svoje vlastné DOF pre veľké premiestnenia tuhého telesa v porovnaní s rozmermi telesa.

2. Craig-Bamptonove väzobné tvary s jednotkovým posunutím sú výsledkom statickej kondenzácie. Tieto tvary neobsahujú dynamickú frekvenciu a preto musia byť priradené k pružnému telesu. Ináč by simulácia nelineárneho systému s neznámymi frekvenciami (ktoré sú vlastné tomuto systému) nebola úspešná.

3. Craig-Bamptonove väzobné tvary s jednotkovým posunutím nemôžeme uvažovať ako znehybnené, pretože to by nezodpovedalo ekvivalentným ohraničeniam na systéme.

Tieto problémy s maticou Craig-Bamptonovej modálnej reprezentácie sa dajú odstrániť výpočtom vlastných hodnôt prislúchajúcich pružnému telesu. Craig-Bamptonove vlastné tvary nie sú ortogonálne a dôkazom je fakt, že zovšeobecnené matice hmotnosti a tuhosti $\mathbf{M}'$ a $\mathbf{K}'$ v rovniciach (4) a (5) nie sú diagonálne.
Výpočtom vlastných hodnôt prislúchajúcich pružnému telesu

$$\mathbf{K}'\mathbf{q} = \lambda \mathbf{M}'\mathbf{q} \tag{6}$$

dostaneme vlastné vektory, ktoré zoradíme do transformačnej matice **N,** ktorou pretransformujeme Craig-Bamptonovu modálnu reprezentáciu na ekvivalentnú ortogonálnu modálnu reprezentáciu s modálnymi súradnicami $\mathbf{q}^*$

$$\mathbf{N}\mathbf{q}^* = \mathbf{q} \tag{7}$$

Vektor premiestnení $\mathbf{u}$ určíme potom superpozíciou podľa vzťahu

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{M} \phi_i q_i = \sum_{i=1}^{M} \phi_i \mathbf{N}\mathbf{q}^* = \sum_{i=1}^{M} \phi_i^{\,*}\mathbf{q}^* \tag{8}$$

kde ϕ_i^* sú Craig-Bamptonove ortogonálne vlastné tvary.
Ortogonálne Craig-Bamptonove vlastné tvary nie sú vlastné vektory východiskového (FEB) pružného telesa. Sú to vlastné vektory Craig-Bamptonovej reprezentácie systému. A ako také majú prislúchajúce vlastné frekvencie. Fyzikálny opis týchto tvarov je zložitý, ale vo všeobecnosti môžeme konštatovať nasledovné:

- Väzobné vlastné tvary s ukotvením sú nahradené aproximáciou vlastných vektorov pre teleso bez ohraničenia. Toto je aproximácia založená len na Craig-Bamptonových vlastných tvaroch. (Okrem týchto vlastných tvarov sa bežne používa 6 tvarov prislúchajúcich tuhému telesu).
- Väzobné tvary s jednotkovým posunutím sú nahradené vlastným vektorom pre teleso s ohraničením (s obmedzením na hraniciach), tento koncept najlepšie vidíme pri porovnaní tvarov pred a po ortogonalizácii pre príklad s obdĺžnikovou plochou, ktorá má Craig-Bamptonov hraničný bod s jednotkovým posunutím na svojej dlhšej strane. Craig-Bamptonov vlastný tvar na obrázku 1.3 odpovedá jednotkovému posunutiu jedného zo svojich okrajových bodov pri ukotvených všetkých ďalších uzloch pozdĺž okraja. Po ortonormalizácii vidíme vlastné tvary obr.1.4, ktoré majú sínusovú krivku pozdĺž okraja.
- existujú aj vlastné tvary, ktoré sa nachádzajú medzi prvou a druhou skupinou vlastných tvarov, ale nemajú fyzikálne vysvetlenie.

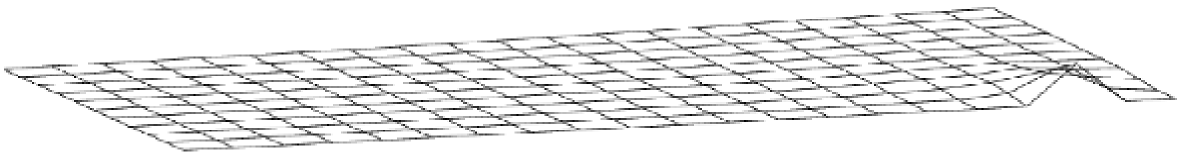
Zhrňme závery z ortonormalizácie Craig-Bamptonových tvarov:

- Ortonormalizácia poskytuje vlastné tvary voľnému pružnému telesu, 6 z nich poskytuje tuhotelesové tvary, ktoré môžu byť zablokované.

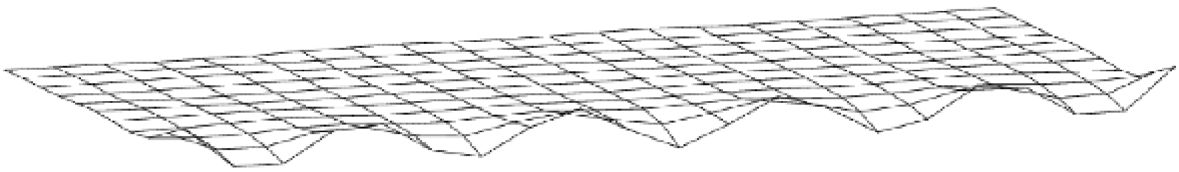
- Pri dynamickej analýze sú všetky vlastné tvary priradené vlastným frekvenciám. Dá sa očakávať, že problém vznikne pre vlastné tvary, ktoré sa týkajú vysokých frekvencií.

Väzobný tvar (Constraint mode) sa pomocou ortonormalizácie transformuje na hraničný vektor s príslušnou vlastnou frekvenciou. Tvar z obrázku Obr.3 sa transformuje na tvar z Obr.4. Ak by sa medzi Craig-Bamptonovými tvarmi na Obr.3 nevyskytoval bod, v ktorom bolo jednotkové posunutie fixované, potom by sa ani tvar na Obr.4 nenachádzal medzi vlastnými vektormi a nevstupovala by tam ani príslušná vlastná frekvencia 1250Hz.

Odstránenie vysokofrekvenčného tvaru, tak ako je to znázornené na obrázku Obr.4 je zrejme prijateľnejšie, než odstránenie tvarov na Obr.3. Odstránenie ďalšieho (následného) tvaru zamedzí priradenému hraničnému uzlu v relatívnom pohybe vzhľadom k jeho susedom. Okrem toho odstránenie predchádzajúceho tvaru len zabráni okrajovej hrane dosiahnuť tento stupeň zvlnenia.



Obr. 3: Väzobný tvar s neurčeným frekvenčným spektrom



Obr. 4: Okrajový vlastný tvar prislúchajúci vlastnej frekvencii 1250 Hz

Analýza napätí na základe modálnych napätí

Modálna Craig-Bamptonova matica $\boldsymbol{\Phi}$ obsahujúca ortogonalizované zložkové tvary sa používa aj na reprezentáciu elastických vlastností konečno-prvkovej reprezentácie poddajného telesa v prostredí MBS. Každý ortogonalizovaný zložkový tvar (deformácia) Φ_i korešponduje s rozdelením napätia σ_i (modálne napätie). Koncept modálnych napätí je analogický s ortogonálnymi zložkovými tvarmi.

Ak sú známe všetky posunutia $\boldsymbol{u}$ vnútorných uzlových bodov konečno-prvkového telesa, vektor pomernej deformácie $\boldsymbol{\varepsilon}$ sa dá určiť maticovou funkciou geometrie $\boldsymbol{B}$ priraďujúcej k deformáciám pomerné deformácie ako lineárny operátor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bu}; \tag{9}$$

Lineárny vzťah medzi pomernými deformáciami $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vektorom vyplývajúcich napätí $\boldsymbol{\sigma}$ je daný maticou $\boldsymbol{E}$ založenou na elastických vlastnostiach materiálu, ktorá obsahuje aj Youngov modul pružnosti.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0; \tag{10}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ vektor intrinzickej pomernej deformácie

$\boldsymbol{\sigma_0}$ vektor intrinzického napätia

Pre známy časový priebeh modálnych súradníc $\boldsymbol{q}$ je rozdelenie napätí $\boldsymbol{\sigma}$ v každom časovom kroku dané rovnicou:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{EB\Phi B}; \tag{11}$$

Výsledný napätostný stav pružného telesa je podľa toho lineárnou kombináciou modálnych napätí. Modálne súradnice pre rozdelenie napätí sú pritom totožné s modálnymi súradnicami prislúchajúcich zložkových tvarov.