

**2-5596 Mechanika viazaných mechanických systémov (VMS)**

pre špecializáciu Aplikovaná mechanika, 4.roč. zimný sem.

Prednáša: doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

**6. Maticové metódy dynamickej analýzy VMS. 1.časť**

**Aké sú teoretické východiská pre riadenie algoritmov riešiča**

**MSC.ADAMS/Solver**

**1.časť**

**Obsah**

**1časť**

- 1 Poslanie technológie virtuálnych prototypov
- 2 Výber vhodného matematického formalizmu pre algoritmy riešiča
  - 2.1 Hamiltonov variačný princíp
- 3 Stavové rovnice a stavové premenné
  - 3.1 Stavové rovnice pre teleso
  - 3.2 Stavové premenné pre teleso
  - 3.3 Stavové rovnice mechatronickej sústavy
4. Stratégia dosiahnutia výpočtovej efektívnosti algoritmov riešiča GSTIFF
  - 4.1. Prvý krok stratégie - dosiahnutie riedkosti Jakobiánu
  - 4.2. Druhý krok stratégie - konvertovanie DAE na ODE
  - 4.3. Tretí krok stratégie - konvertovanie ODE na NAE
5. Práca prediktora a korektora pri dynamickej analýze
  - 5.1. Práca prediktora
  - 5.2. Práca korektora
  - 5.3. Stabilita procesu integrácie

**2. časť**

6. Integrátor ABAM
7. Integrátor RKF
8. Dynamická analýza s integrátormi Newmark a HHT
9. Typy analýz virtuálneho prototypu
  - 9.1.1 Analýza východiskovej polohy členov (Assembly)
  - 9.1.2 Analýza východiskových rýchlostí členov
  - 9.2. Kinematická analýza zrýchlení členov
  - 9.3 Inverzná dynamická analýza
  - 9.4 Statická analýza
  - 9.5 Kvázistatická analýza
  - 9.6 Dynamická analýza
  - 9.7 Lineárna modálna analýza vlastných tvarov a vlastných frekvencií
  - 9.8 Frekvenčná analýza vynúteného kmitania
10. Integrátory a ich vlastnosti v prostredí programu MSC.ADAMS
  - 10.1 Štandardné nastavenia parametrov v module MSC.ADAMS/Solver
  - 10.2 Riadenie práce riešiča

- 10.3 Kroky priebehu riešenia systému DAE rovníc
- 10.4 Riešenie systému DAE vo východiskovom stave modelu
- 10.5 Predikcia riešenia pre nasledovný krok
- 10.6 Iteratívna korekcia
- 10.7 Odchýlky pri numerickom riešení
- 10.8 Hodnotenie kvality riešenia
- 11. Záver
- 12. Literatúra

## **1 Poslanie technológie virtuálnych prototypov**

Pri navrhovaní výrobkov sa popri reálnych experimentoch čoraz viac uplatňujú nástroje počítačovej podpory inžinierskych činností (CAE), medzi ktoré patrí (MSS) technológia virtuálnych prototypov MSC.ADAMS na dynamické simulácie mechatronických systémov zložených z tuhých aj pružných telies s kombináciou relatívne veľkých premiestnení členov a relatívne malých pružných deformácií členov voči rozmerom členov v súčinnosti s integrovanými systémami riadenia a tekutinovými obvodmi.

Výhodou MSS technológie virtuálnych prototypov je, že počas procesu modelovania geometrických tvarov členov, silových interakcií, predpísaných priebehov pohybu, pružných vlastností, prvkov automatického riadenia, prípadne hydraulického obvodu multidisciplinárneho virtuálneho prototypu budúceho výrobku v zjednotenom používateľskom prostredí A/View pripravené algoritmy automaticky zostavujú explicitné rovnice príslušného matematického modelu. Efektívnosť využitia horizontálnych modulov (A/Flex, A/Vibration, A/Controls,...) a vertikálnych modulov (A/Car, A/Rail, A/Aircraft,...) potom závisí od výpočtovo efektívnej a spoľahlivej práce riešiča A/Solver sústav rovníc matematického modelu, s ktorým sú všetky moduly programu MSC.ADAMS priamo prepojené.

Vysoký stupeň automatizácie vyžadovaných analýz umožňuje takmer automatizované numerické riešenie matematického modelu virtuálneho prototypu, pričom používateľ má k dispozícii elektronickú dokumentáciu, nápovede pri modelovaní jednotlivých prvkov, súbežnú kontrolu syntaxe príkazov, ako aj oznamy o práci algoritmov riešiča a o pravdepodobných príčinách v prípade jeho kolapsu. Avšak na to, aby používateľ dokázal plnohodnotne využívať pripravené nástroje a robiť kvalifikované rozhodnutia je potrebné, aby sa zoznámil s podstatou matematických metód riešenia sústav lineárnych aj nelineárnych algebrických rovníc ako aj riešenia zmiešaných systémov pohybových diferenciálnych rovníc a väzobných nelineárnych algebrických rovníc. Odmenou je schopnosť utvoriť výpočtovo efektívny model pre analýzy ako aj optimalizáciu a zodolňovanie vlastností budúceho výrobku voči náhodným zmenám vonkajšieho zaťaženia a jeho vnútorných vlastností.

Zásľuhou takejto všestrannej počítačovej podpory inžinierskych činností sa z výpočtárov stávajú organizátori, ktorí môžu tvorivé sily venovať príprave nových koncepcií budúceho výrobku a potrebných vstupov, sledovať či sa virtuálne výrobky správajú počas simulácie pracovných režimov podľa očakávania, riadiť proces riešenia a na základe komplexného

zhodnotenia získaných výsledkov prijať správne rozhodnutia na dosiahnutie vyžadovaných vlastností.

## 2 Výber vhodného matematického formalizmu pre algoritmy riešiča

Dnešné algoritmy riešenia matematických modelov multidisciplinárnych mechatronických systémov umožňujú rýchle, spoľahlivo a s potrebnou presnosťou realizovať súbežné dynamické simulácie mechanických aj riadiacich systémov, lebo využívajú jednak súčasnú úroveň výpočtovej techniky s rýchlymi procesormi ako aj sofistikované numerické metódy riedkych matic a stabilnej integrácie, ktoré postupne navrhli Newmark (1959), Gear (1971), Orlandea, Chace, Calahan (1977), Hilber, Hughes, Taylor (1977) a Wielenga (1986), pričom vývoj nových prístupov stále pokračuje: Brenan, Campbell, Petzold (1996), Orlandea (1999), Negrut, Dyer (2004).

Požiadavkami pre výber vhodného formalizmu na zostavovanie a riešenie zmiešaného systému DAE pohybových diferenciálnych rovníc a väzobných algebrických rovníc, ktoré reprezentujú viazanú aj neviazanú mechatronickú sústavu (virtuálny prototyp) bolo, aby boli stavové rovnice v symbolickom tvare výpočtovo nenáročné a nezávislé na topológii systému, aby sa dal Jakobián väzobných rovníc analyticky rýchle zostavovať a paralelne vyčísl'ovať a aby výpočet pasívnych odporov v geometrických väzbách prebiehal automaticky .

Z analytickej dynamiky boli k dispozícii jednak diferenciálne princípy platné pre nekonečne malé zmeny veličín a integrálne princípy pre konečné zmeny veličín s kombináciou nevariačného princípu a variačného princípu na formuláciu podmienok pre extrém veličiny pri jej nekonečne malej, alebo konečnej zmene v rámci možných stavov. Podľa tohto triedenia medzi diferenciálne nevariačné princípy patria najpoužívanejšie Newtonove zákony a Lagrangeove rovnice prvého a druhého druhu a do skupiny diferenciálnych variačných princíпов patrí najjednoduchší princíp virtuálnych prác a D`Alambertov princíp, najvšeobecnejší Gaussov princíp najmenšieho nútenia a Hetzov princíp najpriamejšej dráhy. Do skupiny integrálnych nevariačných princíпов patrí princíp zachovania energie a medzi integrálne variačné princípy patrí najdôležitejší Hamiltonov princíp a Marpertuisov, Eulerov a Jakobiho princíp najmenšieho účinku.

### 2.1 Hamiltonov variačný princíp

Každý zo diferenciálnych, alebo integrálnych princíпов má svoje špecifické poslanie a pre algoritmizáciu numerickej integrácie systému DAE sa najlepšie osvedčil Hamiltonov variačný princíp:

$$dI \approx d \int_{t_1}^{t_2} (L + \sum_{k=1}^a \bar{F}_{Ak} \cdot \bar{r}_{Ak} + \sum_{j=1}^b \lambda_j \bar{F}_j) dt = 0$$

$dI$  je variácia funkcionálu  $I$ , pre ktorý hľadáme extrém

$L = E_K - E_P$  je Lagrangián ako rozdiel kinetickej  $E_K$  a potenciálnej  $E_P$  energie systému

$\bar{F}_{Ak}$  sú akčné sily,  $k = 1, 2, \dots, a$

$\bar{r}_{Ak}$  sú sprievodiče pôsobísk akčných síl  $\bar{F}_{Ak}$

$\lambda_j$  sú Lagrangeove súčinitele,  $j=1,2,\dots,b$

$\bar{F}$  je aritmetický vektor väzobných rovníc  $\Phi_j$

## 2.2 Eulerove-Lagrangeove rovnice

Z Hamiltonovho integrálneho variačného princípu vyplývajú pohybové diferenciálne Eulerove-Lagrangeove rovnice druhého rádu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \sum_{k=1}^a \bar{F}_{Ak} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{Ak}}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^b \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,c$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} \right) - \sum_{k=1}^a \bar{F}_{Ak} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{Ak}}{\partial \bar{q}} + \sum_{j=1}^b I_j \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{q}} = \bar{0}$$

kde  $\bar{q}$  je aritmetický vektor celkového počtu  $c$  zovšeobecnených súradníc  $q_i$ ,  $i=1,2,\dots,c$ ,  $\bar{F}_{Ak}$  je počet  $a$  akčných síl a  $\bar{F}$  je aritmetický vektor počtu  $b$  väzobných nelineárnych algebrických rovníc  $\Phi_j$ .

## 2.3 Sústava DAE pre viazaný aj voľný mechanický systém

Počas modelovania virtuálneho prototypu algoritmy riešiča A/Solver (C++) zostavujú sústavu DAE podľa diferenciálnych Eulerových-Lagrangeových rovníc druhého rádu, z podmienok uzatvorenosti, metódy fiktívneho rozpájania slučiek a z vlastností Lagrangeových súčiniteľov, ktoré reprezentujú normálové sily v geometrických väzbách pre viazaný aj neviazaný mechanický systém v tvare

$$M \ddot{\bar{q}} - A^T \bar{F}_A(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + \bar{F}_q^T \bar{\lambda} = \bar{0}$$

$$\bar{F}(\bar{q}, t) = \bar{0}$$

kde

$M$  je matica hmotnosti systému

$\bar{q}$  je aritmetický vektor súradníc  $q_i$  v smere osí  $x, y, z$  globálneho súradnicového systému GCS pre ( $i=1,2,3$ ) a okolo osí  $x, y, z$  lokálneho súradnicového systému LCS pre ( $i=4,5,6$ )

$A^T$  je transformačná matica pre priemety síl  $\bar{F}_{Ak}$  do smeru súradníc  $q_i$

$\bar{F}_A$  je aritmetický vektor akčných síl a gyroskopických zložiek zotrvačných síl  $F_{Ak}$

$\bar{F}_q^T$  je gradient väzieb v normále k väzobnej ploche v konfiguračnom priestore v okamžitom stave sústavy

$\bar{\lambda}$  je aritmetický vektor Lagrangeových súčiniteľov  $\lambda_j$

$\bar{F}$  je aritmetický vektor sústavy geometrických a kinematických väzobných rovníc  $\Phi_j$

### 3 Stavové rovnice a stavové premenné

Na matematickú reprezentáciu vlastností virtuálneho prototypu pomocou modelovacích prvkov využívajú algoritmy riešiča A/Solver nasledovné veličiny:

#### Polohový vektor $\bar{r}_p$ ťažiska telesa

Na určenie polohy ťažiska telesa voči GCS globálnemu súradnicovému systému  $(0_1, x_1, y_1, z_1)$  slúži polohový vektor  $\bar{r}_p$  s karteziánskymi súradnicami  $\bar{r}_p = [x, y, z]^T$ .

#### Aritmetický vektor $\bar{g}$ Eulerových uhlov

Vzájomnú polohu osí LCS lokálneho súradnicového systému telesa  $(0_2, x_2, y_2, z_2)$  voči osiam GCS globálneho súradnicového systému  $(0_1, x_1, y_1, z_1)$  so spoločným začiatkom  $0_1 \equiv 0_2$  opisujeme aritmetickým vektorom  $\bar{g}$  Eulerových uhlov  $\bar{g} = [\psi, \varphi, \theta]^T$ .

#### Aritmetický vektor $\bar{q}_p$ zovšeobecnených súradníc polohy telesa

Aritmetický vektor  $\bar{q}_p$  zovšeobecnených súradníc  $\bar{q}_p = [\bar{r}_p, \bar{g}_p]^T$  prislúchajúcich telesu p.

#### Jakobián $F_q$ väzobných rovníc

Jakobián  $F_q$  väzobných rovníc je matica parciálnych derivácií väzobných rovníc  $\Phi_j$  podľa závislých zovšeobecnených súradníc polohy  $q_{zi}$

$$F_q = \left[ \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_{zi}} \right], \quad i = 1, 2, \dots, z, \quad j = 1, 2, \dots, b$$

#### Vektor $\bar{v}_p$ okamžitej rýchlosti ťažiska telesa

Vektor  $\bar{v}_p$  okamžitej rýchlosti ťažiska telesa získame deriváciou  $\bar{v}_p = \dot{\bar{r}}_p$  polohového vektora  $\bar{r}_p$  ťažiska telesa voči GCS.

#### Vektor $\bar{w}$ okamžitej uhlovej rýchlosti telesa

Nekonečne malú zmenu polohy LCS voči GCS vo sférickej geometrickej väzbe opisujeme vektorom  $\bar{w}$  okamžitej uhlovej rýchlosti LCS telesa so súradnicami voči LCS telesa.

Eulerov vz'ážny systém EAF tvoria jednotkové vektory  $(\bar{k}_1, \bar{i}_y, \bar{k}_2)$  osí  $(z_1, x_y, z_2)$ , ktoré nie sú na seba kolmé. Ak označíme  $B$  transformačnú maticu vzájomnej polohy LCS a EAF, potom  $\bar{w} = B\dot{\bar{g}}$  kde  $\dot{\bar{g}}$  je derivácia aritmetického vektora  $\bar{g}$  Eulerových uhlov, pričom  $\bar{w}_E = \dot{\bar{g}}$  je vektor  $\bar{w}_E$  okamžitej uhlovej rýchlosti LCS telesa so súradnicami v EAF ako ďalšími stavovými premennými.

### Vektor zovšeobecnenej hybnosti $\bar{P}_i$

Euler-Lagrangeove rovnice budú mať jednoduchší tvar zavedením zovšeobecnenej hybnosti  $\bar{P}_i = \partial E_K / \partial \dot{\bar{q}}_i$ , lebo je výhodné ak pri zostavovaní rovníc rovnováhy telesa prebieha sumácia posuvných zovšeobecnených síl voči osiam GCS a sumácia krútiacich zovšeobecnených síl voči osiam EAF. Zovšeobecnená hybnosť  $\bar{P}_i$  pre posunutia (hybnosť) je potom

$$\bar{P}_t \equiv \partial E_K / \partial \dot{\bar{r}} = m \dot{\bar{r}}_p$$

a zovšeobecnená hybnosť  $\bar{P}_g$  pre rotácie (moment hybnosti) bude

$$\bar{P}_g = \partial E_K / \partial \dot{\bar{g}}.$$

### 3.1 Stavové rovnice pre teleso

Každé teleso v sústave viazaných telies reprezentuje aritmetický vektor  $\bar{g}$  sústavy stavových rovníc  $\bar{g} = [g_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$

1.  $m \dot{\bar{r}}_p - \bar{Q}_R + \bar{C}_R = \bar{0}$  je rovnica rovnováhy posúvajúcich zovšeobecnených síl, kde  $m \dot{\bar{r}}_p = \dot{\bar{P}}_t$  je derivácia zovšeobecnenej hybnosti pre posunutia a  $m$  je hmotnosť telesa,  $\bar{Q}_R$  je výslednica zovšeobecnených síl a  $\bar{C}_R$  je výslednica reakčných síl s priamočiarymi súradnicami,
2.  $\bar{v}_p = \dot{\bar{r}}_p$  je rovnica pre rýchlosti, kde  $\dot{\bar{r}}_p$  je derivácia polohového vektora ťažiska telesa voči GCS,
3.  $\bar{P}_g = B^T I B \dot{\bar{g}}$  je rovnica pre zovšeobecnú hybnosť  $\bar{P}_g$  (moment hybnosti) pre rotácie, kde  $I$  je diagonálny tenzor zotrvačnosti telesa, lebo LCS telesa má osi totožné s hlavnými osami momentu zotrvačnosti,
4.  $\dot{\bar{P}}_g - \partial E / \partial \bar{g} - \bar{Q}_g + \bar{C}_g = \bar{0}$  je rovnica rovnováhy krútiacich zovšeobecnených síl, kde  $\dot{\bar{P}}_g$  je derivácia zovšeobecnenej hybnosti  $\bar{P}_g$  (momentu hybnosti) pre rotácie,  $\bar{Q}_g$  je výslednica zovšeobecnených síl a  $\bar{C}_g$  je výslednica reakčných síl s uhlovými súradnicami,

5.  $\bar{w}_E = \dot{\bar{g}}$  je rovnica pre okamžitú uhlovú rýchlosť, kde  $\dot{\bar{g}}$  je derivácia aritmetického vektora  $\bar{g}$  Eulerových uhlov so súradnicami v Eulerovom súradnicovom systéme EAF.

### 3.2 Stavové premenné pre teleso

V stavových rovniciach  $\bar{g} = [g_i]$ ,  $i=1,2,\dots,5$  každé teleso reprezentuje 15 skalárnych stavových premenných  $\bar{y} = [y_j]$ ,  $j=1,2,\dots,15$

- 3 karteziánske súradnice geometrického vektora  $\bar{r}_p = [x,y,z]^T$  polohy ťažiska telesa voči GCS,
- 3 Eulerove uhly v aritmetickom vektore  $\bar{g} = [\psi,\varphi,\theta]^T$ ,
- 3 súradnice okamžitej rýchlosti  $\bar{v}_p = [v_x,v_y,v_z]^T$  ťažiska telesa voči GCS,
- 3 súradnice okamžitej uhlovej rýchlosti  $\bar{w}_E = [w_{Ey},w_{Ez},w_{Ej}]^T$  LCS telesa v Eulerovom vzťahnom systéme EAF,
- 3 súradnice zovšeobecnenej hybnosti  $\bar{P}_g = [P_\psi,P_\varphi,P_\theta]^T$  pre rotácie (momentu hybnosti telesa).

### 3.3 Stavové rovnice mechatronickej sústavy

Holonómna, alebo neholonómna väzba je okrajová podmienka pre zovšeobecnené súradnice virtuálneho prototypu. Holonómna väzba (geometrická väzba) predstavuje okrajové podmienky vo forme algebrických vzťahov a môže byť buď skleronómna, vtedy nezávisí na čase a sústava nekoná žiadnu prácu, alebo rheonómna, explicitne závislá na čase a sústava koná prácu. Neholonómna väzba (napr. guľa sa valí po krivke bez trenia), môže byť vyjadrená len pomocou diferenciálov, teda nedá sa integrovať do holonómnej formy a v diferenciáloch musí byť lineárna, pričom predstavuje väzobnú podmienku pre rýchlosti. Na opis vlastností mechatronickej sústavy je potom k dispozícii nasledovná sústava stavových rovníc:

- 6 dynamických diferenciálnych rovníc prvého rádu pre každé teleso, dávajúca do súvisu zrýchlenia a sily,
- 6 kinematických diferenciálnych rovníc prvého rádu pre každé teleso, dávajúca do súvisu súradnice polohy a rýchlosti telesa,
- 1 algebrická rovnica pre každú skalárnu holonómnu kinematickú väzbu, teda integrovateľnú rovnicu pre predpísaný pohyb,

- 1 diferenciálna rovnica prvého rádu pre skalárnu neholonómnu kinematickú väzbu, teda neintegrovateľná rovnica vznikajúca pri prerušeníach geometrických väzieb,
- 1 algebrická rovnica pre každú skalárnu súradnicu akčnej sily,
- ľubovoľný počet používateľom predpísaných algebrických a diferenciálnych rovníc prvého rádu, dávajúcich do súvisu stavové premenné (napr. pri modelovaní neštandardných druhov geometrických väzieb a pri modelovaní systémov riadenia so spätnou väzbou).

#### 4. Stratégia na dosiahnutie výpočtovej efektívnosti algoritmov riešiča GSTIFF

Počas skladania (assembly) mechanického systému utvoria algoritmy riešiča zmiešanú sústavu DAE  $\equiv \bar{g}(\bar{y}, t) = \bar{0}$ ,  $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$  zloženú z diferenciálnych rovníc druhého rádu a nelineárnych väzobných algebrických rovníc, implicitných pre deriváciu stavového vektora  $\bar{y}$ . Snahou je dosiahnutie výpočtovej efektívnosti algoritmov riešiča pre všetky typy analýz (analýza skladania, začiatočných podmienok, statická, kvázi statická, kinematická, dynamická, inverzná dynamická a modálna analýza).

##### 4.1. Prvý krok stratégie zameraný na dosiahnutie riedkosti Jakobiánu

Prvý krok stratégie na dosiahnutie výpočtovej efektívnosti algoritmov riešiča je zameraný na reprezentáciu mechanického systému čo najväčším počtom výpočtovo nenáročných rovníc, aby bola matica Jakobiánu riedka s počtom nenulových prvkov pod 6%. Z tohto dôvodu algoritmy riešiča zámerné nederivujú výraz  $\bar{P}_g = B^T J B \bar{g}$  na výpočet zovšeobecnenej hybnosti  $\bar{P}_g$  (momentu hybnosti) pre rotácie, lebo je nelineárny kvôli trigonometrickým funkciám v transformačnej matici  $B$  vzájomnej polohy lokálneho súradnicového systému LCS a Eulerovho súradnicového systému EAF, ale ho pridajú k stavovým rovniciam, pričom jeho zložky  $\bar{P}_g = [P_\psi, P_\phi, P_\theta]^T$  sú ďalšie stavové premenné. Algoritmy riešiča zabezpečia, aby bola matica  $J$  tenzora zotrvačnosti diagonálna, čo výpočet zovšeobecnenej hybnosti  $\bar{P}_g$  pre rotácie výrazne zjednoduší.

Nežiadúcou vlastnosťou sústavy DAE je, že majú singulárnu maticu  $\partial(\text{DAE})/\partial \bar{y}$ , lebo obsahuje algebrické väzobné rovnice. Výhodou obyčajných diferenciálnych rovníc ODE  $\equiv \dot{\bar{y}} = \bar{g}(\bar{y}, t) = \bar{0}$ ,  $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$  explicitných pre  $\bar{y}$  je, že na rozdiel od DAE majú nesingulárnu maticu  $\partial(\text{ODE})/\partial \bar{y} = I$ .

##### 4.2. Druhý krok stratégie spočíva v konvertovaní DAE na ODE

Druhý krok stratégie spočíva v zabezpečení stabilnej (stiff) integrácie implicitnej sústavy DAE druhého rádu jej konvertovaním na sústavu dynamických a kinematických obyčajných



explicitných diferenciálnych rovníc ODE prvého rádu a cieleným tlmením vlastných frekvencií vyšších ako je frekvencia prevádzkového budenia. Algoritmus konvertuje dynamické diferenciálne rovnice druhého rádu na ODE prvého rádu substitúciou aritmetického vektora rýchlostí  $\bar{u} = \dot{\bar{q}}$  čím zároveň získa kinematické ODE pre rýchlosti.

Na konvertovanie väzobných algebrických rovníc  $\bar{c} \equiv \bar{F}(\bar{q}, t) = \bar{0}$  zo zmiešanej sústavy DAE  $\bar{e} = [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$  prvého rádu

$$\bar{a} \equiv M \ddot{\bar{q}} - A^T \bar{F}_A(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + \bar{F}_q^T \bar{\lambda} = \bar{0}$$

$$\bar{b} \equiv \bar{u} - \dot{\bar{q}} = \bar{0}$$

$$\bar{c} \equiv \bar{F}(\bar{q}, t) = \bar{0}$$

na kinematické ODE sú potrebné tri derivácie (Index I3), z toho sú dve derivácie väzobných rovníc a jedna derivácia Lagrangeových súčiniteľov.

Získaný systém ODE sa dá riešiť algoritmi Runge-Kutta-Fehlberg, alebo Adams-Bashforth-Moulton, ale pri výpočtovo najnáročnejších krokoch dynamickej analýzy, pri utváraní a invertovaní Jakobiánu, sú však pomalé.

#### 4.3. Tretí krok stratégie má za cieľ konvertovať ODE na NAE

Tretí krok stratégie je zameraný na konvertovanie ODE na sústavu diferenčných nelineárnych algebrických rovníc NAE, aby z nich po linearizácii dali určiť korekcie  $\Delta \bar{y}_{n+1}$  stavového vektora rýchlymi Calahanovými algoritmi, ktoré pracujú podľa Gaussovej eliminačnej metódy s rozkladom matice  $A$  systému na súčin  $A = LU$  dolnej  $L$  a hornej  $U$  trojuholníkovej matice.

Konvertovanie ODE na NAE prebieha spätnou Eulerovou implicitnou aproximáciou BE (Backward Euler)  $\dot{\bar{y}}_{n+1} \approx (1/h_n)(\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n)$ , kde  $h_n = t_n - t_{n-1}$  je časový integračný krok. Algoritmus BE definuje vzťah medzi každou neznámu a jej deriváciou v stavovom vektore  $\bar{y}$  a poskytuje pre riešenie najväčšiu oblasť stability v Gaussovej komplexnej rovine, pričom BE aproximácia nahradí parciálnu deriváciu  $\partial \dot{\bar{y}}_n / \partial \bar{y}_n$  každej neznámej zo stavového vektora  $\bar{y}$  v Jakobiáne  $F_{\bar{c}} = [\partial g_i / \partial y_j]$  stavových rovníc  $\bar{g} = [g_i]$  podľa vzťahu  $\partial \dot{\bar{y}}_n / \partial \bar{y}_n = 1/h_n$ .

### 5. Práca prediktora a korektora pri dynamickej analýze

Pri dynamickej analýze, ktorej cieľom sú priebehy pohybu členov a reakcií vo väzbách ako odozvy na pôsobenie akčných síl, je úlohou algoritmov určiť hodnoty stavového vektora  $\bar{y}$  v zvolených diskretných okamihoch  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{end}$ , pričom časový krok  $h_n$  nie je vo všeobecnosti konštantný.

Pred integráciou pohybových rovníc najprv prebehne výpočet stavových veličín  $\bar{y}_0$  v čase  $t_0$  pri procese poskladania sústavy (Assembly) do východiskovej konfigurácie tak, aby polohy a

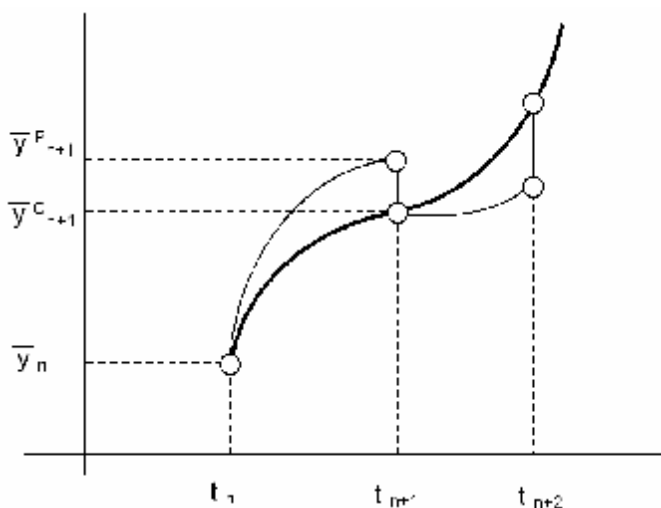
rýchlosti členov spĺňali väzobné podmienky a aby zrýchlenia a sily spĺňali začiatočné podmienky (Initial Condition Analysis). Potom algoritmy určia zrýchlenia a sily, ktoré odpovedajú konzistentnej sústave začiatočných podmienok.

### 5.1. Práca prediktora

Cieľom prediktora je odhadnúť hodnoty  $\bar{y}_{n+1}^P$ ,  $\bar{f}_{n+1}^P$  tak, aby ležali na aproximačnom polynóme (Obr.1) a súčasne spĺňali stavové rovnice s vyžadovanou presnosťou.

Gear navrhol aproximačný integračný algoritmus  $\bar{f}_{n+1}^P = h_n \bar{I}_E \bar{y}_{n+1}$ , kde  $\bar{I}_E$  je aritmetický vektor vlastných hodnôt matice systému, ktorý pre integračnú metódu BE s dostatočne malým krokom  $h_n$  splní podmienku jej stability  $|1 - h_n \bar{I}_E| \geq 1$ , teda aby  $h_n \bar{I}_E$  boli v stabilnej zápornej časti Gaussovej komplexnej roviny. Algoritmy štandardného riešiča GSTIFF využívajú na začiatočný odhad  $\bar{y}_n^P$  hodnôt stavového vektora  $\bar{y}_n$  pre aktuálny krok explicitnú metódu s aproximačným polynómom rádu  $k$  v tvare Nordsiekovho aritmetického vektora  $\bar{N} = [n_1, n_2, \dots, n_k]^T$  s členmi podľa Taylorov radu  $\bar{N} = [\bar{y}, h_1 \bar{f}, \dots, (h_k \bar{y}^{(k)})/k!]^T$ , kde  $(k)$  je rád derivácie. Pre nasledovný krok  $t_{n+1}$  algoritmus sčíta prvky  $\bar{y}_{n+1}^P = \sum_{i=0}^k (h_i \bar{y}_n^{(i)})/i!$

Nordsiekovho vektora  $\bar{N}$ , pričom algoritmy násobia Nordsiekov vektor  $\bar{N}$  Pascalovou trojuholníkovou maticou  $P$  aby všetky predikované hodnoty ležali na tom istom polynóme, teda  $\bar{N}_p = P\bar{N}$ . Riešič GSTIFF je rýchly, ale sleduje len dodržiavanie presnosti pre premiestnenia.



Obr.1 Odhad  $\bar{y}_{n+1}^P$  z prediktora a korigovaný odhad  $\bar{y}_{n+1}^C$  pre krok  $t_{n+1}$ .

### 5.2. Práca korektora

Na spresnenie odhadov  $\bar{y}_{n+1}^P$ ,  $\bar{f}_{n+1}^P$  z prediktora pre nový krok  $t_{n+1}$  využíva algoritmus korektora aproximačný polynóm spätných diferencií BDF (Backward Differentiation

Formula)  $\bar{y}_{n+1} = \sum_{k=0}^p \alpha_k \bar{y}_{n-k} + h_n b_0 \mathcal{F}_{n+1}$ , ktorý dáva do súvisu stavový vektor  $\bar{y}_{n+1}$  a jeho deriváciu  $\mathcal{F}_{n+1}$  so známym stavovým vektorom a jeho deriváciou v predošlom kroku  $t_n$ . Metódy spätnej diferenciacie BDF využívajú na aproximáciu derivácie  $\mathcal{F}_{n+1}$  funkcie  $y(t)$  čase  $t_{n+1}$  hodnotu  $y_{n+1}$  a hodnotu  $y_n$  funkcie  $y(t)$  z predošlého kroku v čase  $t_n$

$$\mathcal{F}_{n+1} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n}$$

Súčinitele  $\alpha_k, b_0$  závisia od rádu  $k$  polynómu BDF, teda implicitný integrátor BE je vlastne integrátor BDF prvého rádu. Algoritmus korektora spresňuje odhad  $\bar{y}_{n+1}^P$  z prediktora iteračným procesom  $\bar{y}_{n+1}^{(m)} = \bar{y}_{n+1}^{(m-1)} + \Delta\bar{y}_{n+1}$ ,  $m=1,2,\dots,r$  s maximálnym počtom  $r$  iterácií pre integračný krok.

Algoritmus určí korekcie  $\Delta\bar{y}_{n+1}$  zo systému linearizovaných NAE modifikovanou Newton-Raphsonovou metódou a z polynómu BDF. Algoritmus BDF sa snaží použiť v nasledovnej iterácii čo najväčší časový integračný krok  $h$  a čo najvyšší stupeň  $k$  aproximačného polynómu prediktora, pričom ich optimálne hodnoty vyplývajú z podmienky  $c_k \|D(\bar{y}_{n+1}^{(P)} - \bar{y}_{n+1}^{(C)})\| (h_{n+1}/h_n)^{k_{n+1}} < e$ , kde  $c_k$  je súčiniteľ, ktorý súvisí so stupňom  $k$  polynómu BDF a  $D$  je filtrovacía diagonálna matica. Na určenie vhodnej hodnoty  $h_{n+1}$  pre nový časový krok a  $k_{n+1}$  pre rád aproximačného polynómu slúžia rozdiely  $\Delta\bar{y}_{n+1}$  medzi predikovaným  $\bar{y}_{n+1}^P$  a korigovaným odhadom  $\bar{y}_{n+1}^C$ . Ak je rozdiel  $\Delta\bar{y}_{n+1}$  menší ako dovolená odchýlka  $e$  (ERROR), potom iterácia skončí a pokračuje sa v ďalšom časovom kroku. Ak je rozdiel  $\Delta\bar{y}_{n+1}$  väčší, systém sa vráti do posledného úspešného časového kroku a pokračuje sa s menším časovým krokom  $h$ . Pri väčších problémoch s konvergenciou algoritmus riešiča zmení stupeň  $k$  aproximačného polynómu prediktora, prípadne aj integračné konštanty  $\alpha_k, b_0$  v Gearovej BDF rovnici.

Iteračný proces skončí, keď norma korekcie  $\|\Delta\bar{y}_{n+1}\|$  splní konvergenčné kritérium  $\|\Delta\bar{y}_{n+1}\| < c_k e$ , kde  $e$  (Error) je dovolená integračná odchýlka, lebo vtedy korigovaný odhad  $\bar{y}_{n+1}^C$  spĺňa stavové rovnice s vyžadovanou presnosťou.

Pre integrátory GSTIFF a WSTIFF odchýlka  $e$  (ERROR) závisí od nasledovných parametrov  $ERROR = VEPS * (6*N_b + 3*N_p + N_u + 2*N_m)$ , kde

- VEPS je želaná odchýlka premennej za integračný krok
- $N_b$  je počet pohyblivých členov
- $N_p$  je počet bodových hmotností
- $N_u$  je počet používateľom zadaných diferenciálnych rovníc
- $N_m$  je celkový počet modálnych súradníc

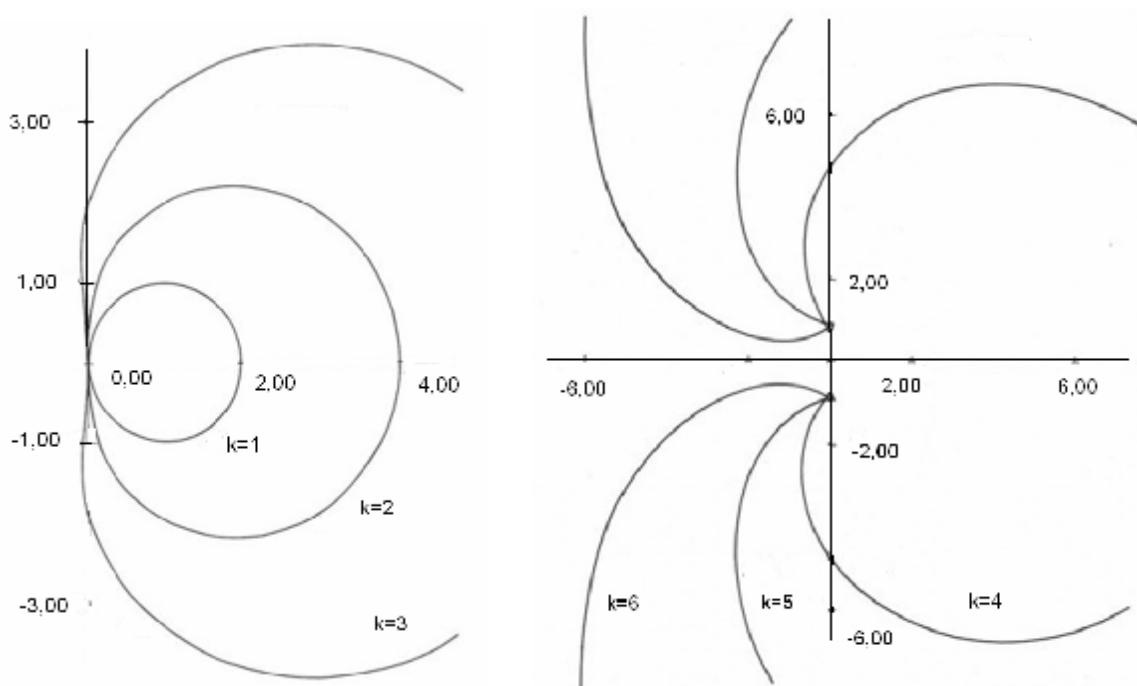
### 5.3. Stabilita procesu integrácie

Pri konvertovaní ODE na sústavu diferenciálnych nelineárnych algebrických rovníc NAE algoritmy riešiča diskretizujú zmiešanú sústavu DAE  $\bar{e} = [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$  prvého rádu aproximáciou BDF na systém diferenciálnych rovníc s maticou Jakobiánu  $F_{\bar{y}}$

$$\begin{bmatrix} M/hb_0 - A^T \bar{F}_A & M_{\bar{q}} \bar{u} + \bar{F}_{\bar{q}\bar{q}}^T \bar{I} - (A^T \bar{F}_A)_{\bar{q}} & \bar{F}_{\bar{q}}^T \\ E & E/hb_0 & 0 \\ 0 & \bar{F}_{\bar{q}} & 0 \end{bmatrix}_m \begin{Bmatrix} \Delta \bar{q} \\ \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{I} \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} -\bar{a} \\ -\bar{b} \\ -\bar{c} \end{Bmatrix}_m$$

pre neznáme korekcie  $\Delta \bar{y}_{n+1} = [\Delta \bar{q}, \Delta \bar{u}, \Delta \bar{I}]_m^T$ , kde  $m$  je číslo iterácie.

Matica Jakobiánu  $F_{\bar{y}}$  má niektoré členy násobené  $1/h$ , preto bude singulárna pre hodnoty integračného kroku  $h$  blízke 0 a proces integrácie bude nestabilný. Čím je rád  $k$  aproximačného BDF polynómu väčší ako 1, tým väčšie sú oblasti nestability riešenia v zápornej časti komplexnej roviny.



Obr.2 a), b) Oblasti stability BDF aproximácie polynómom rádu  $k = 1$  až 6 mimo ohraničení krivkami v zápornej časti Gaussovej roviny

Mechanická sústava bude stabilná (stiffly stable), teda odolná voči vybudeniu vysokých vlastných frekvencií vonkajšími silami a stabilný bude aj proces integrácie príslušných obyčajných diferenciálnych rovníc ODE, ak sústava má :

- široko rozložené vlastné frekvencie,
- utlmené vysoké vlastné frekvencie,
- zotrvačné sily, ktoré ovplyvňujú odozvu.

Obyčajné diferenciálne rovnice ODE sú numericky stabilné (stiff), ak reprezentujú mechanickú sústavu, ktorá má pomer SR (stiffness ratio)  $SR \approx w_D / w_A > 200$ , kde  $w_D$  je najvyššia neaktívna (utlmená) vlastná frekvencia a  $w_A$  je najvyššia aktívna vlastná frekvencia.

Algoritmy štandardného riešiča GSTIFF (Index I3) sledujú tolerančné odchýlky len pre premiestnenia. Spresnenie výsledkov môžeme dosiahnuť znížením indexu IRM (Index Reduktion Method) uplatnením substitučných metód pre stabilizačné procedúry (Stabilized Index) SI2 a SI1. Pri použití metódy SI2 algoritmy riešiča sledujú tolerančné odchýlky pre premiestnenia aj pre rýchlosti, teda v priebehoch zrýchlení budú menšie špičky. Matica Jakobiánu bude potom stabilná aj pre malé kroky, čo zvýši stabilitu práce korektora. Ak chceme získať výsledky s vysokou presnosťou, použijeme metódu SI1 (Stabilized Index 1), pri ktorej algoritmy riešiča sledujú tolerančné odchýlky pre premiestnenia, pre rýchlosti, pre Lagrangeov súčiniteľ aj pre zovšeobecnený moment hybnosti a pre zrýchlenia. Metódy SI1 a SI2 si voči štandardnému riešiču GSTIFF vyžadujú o niečo dlhší čas výpočtu.

## Literatúra

- [1] Newmark, N.M. (1959). A method of computation for structural dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, pages 6794.
- [2] Gear, W.C. (1971). Simultaneous Numerical solution of Differential-algebraic Equations. IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-18, No. 1, pp. 89-95. New York. Institute of Electrical and Electronics Engineers.
- [4] Brayton, R. K., F. G. Gustavson, and G. D. Hatchel. (1972). A New Efficient Algorithm for Solving Differential-Algebraic Systems using Implicit Backward Differentiation Formulas. Proceedings of the IEEE, Vol. 60, No. 1, pp. 98-108. New York. Institute of Electrical and Electronics Engineers.
- [5] Shampine, L.F., Gordon, M.K. (1974). *Computer Solutions of Ordinary Differential Equations*. W. H. Freeman and Co.
- [6] Van Bokhoven, W.M.G. (1975). *Linear Implicit Differentiation Formulas of Variable Step and Order*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 22 (2).
- [7] Orlandea, N., Chace, M.A., Calahan, D.A. (1977). A Sparsity Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems. Part I. and II. Journal of Engineering for Industry, Vol. 99. pp. 773-784.
- [8] Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, 5:283-292.

- [9] Wehage, R.A. and Haug, E.J. (1982). *Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems*. Journal of Mechanical Design, Vol. 104. No. 1, 247 - 255.
- [10] Gear, C.W., Leimkuhler, B., Gupta, G.K. (1985). *Automatic Integration of Euler-Lagrange Equations with Constraints*. Journal of Computation and Applied Mathematics, 12 & 13, pp. 79-90, North-Holland.
- [11] Wielenga, T.J. (1986). The Effect of Numerical Stiffness on Mechanism Simulation. Proceedings from the 1986 International Computers in Engineering Conference, Vol. 1, pp. 369-378. New York. American Society of Mechanical Engineers.
- [12] Wielenga, T.J. (1987). Analysis Methods and Model Representation in ADAMS, Mechanical Dynamic Inc. (MDI).
- [13] Brenan, K.E., Campbell, S.I., and Petzold, L.R. (1996). Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations, Classics in Applied Mathematics, 14. Society for Industrial & Applied Mathematics; ISBN: 0-89871-353-6.
- [14] Asher, U.M.- Petzold, L.R. (1997): Computer Methods for ODE and DAE. Siam. Philadelphia. ISBN 0-89871-412-5.
- [15] J.B. McConville, J.F. McGrath. (1998). Introduction to ADAMS Theory, Mechanical Dynamic Inc. (MDI).
- [16] Orlandea, N.V. (1999). A study of the effects of the lower index methods on ADAMS sparse tableau formulation for the computational dynamics of multi-body mechanical systems, IMechE Proc Instn Mech Engrs V01 213 Part K.
- [17] Negrut, D., Harris, B. (2001). ADAMS Theory in a Nutshell, Mechanical Dynamic Inc. Ann Arbor.
- [18] Negrut, D., Dyer, A. (2004). ADAMS/Solver Primer, MSC Software, Ann Arbor.