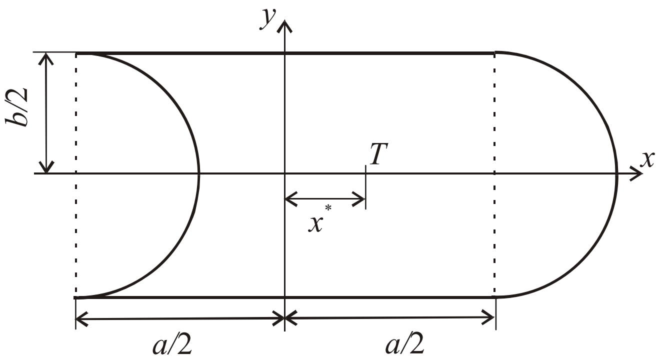
Mechanika sústavy hmotných bodov a tuhého telesa

1. Dva voľné hmotné body A a B s hmotnosťami m_1 a m_2 sa pohybujú rovnomerne priamočiaro. V čase $t = 0$ s je ich poloha v pravouhlej súradnicovej sústave takáto: A(0, 0) a B(0, d). Hmotný bod A má rýchlosť v_1, ktorá je kolmá na spojnicu bodov AB. Hmotný bod B sa pohybuje v smere spojnice AB rýchlosťou v_2 a to od bodu A. Určite: a) veľkosť rýchlosti ťažiska tejto sústavy hmotných bodov, b) rovnicu krivky pohybu ťažiska.

$$[\, y^* = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} x^*,\ v^* = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2} \,]$$

2. Nájdite polohu ťažiska útvaru znázorneného na obr.1, ktorý vznikol tak, že sa z obdĺžnika so stranami a, b vyrezal na ľavej strane polkruh polomeru $b/2$ a priložil sa na pravú stranu obdĺžnika.

$$[\, x^* = \frac{\pi b}{8} \,]$$



Obr.1

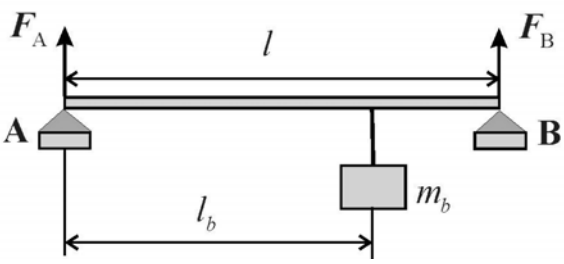
3. Nájdite polohu ťažiska homogénnej mosadznej polgule s polomerom krivosti R.

$$\left[x^* = 0, \quad y^* = 0, \quad z^* = \frac{3}{8} R \right]$$

4. Otec a syn nesú bremeno na tyči s dĺžkou $l = 2$ m. Ako ďaleko od otcovho konca tyče treba zavesiť bremeno hmotnosti m , aby otec niesol tri razy väčšiu záťaž ako syn? Hmotnosť tyče je zanedbateľná proti hmotnosti bremena.

$$\left[x = \frac{l}{4} = 0{,}5 \text{ m} \right]$$

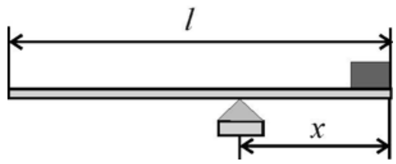
5. Nosník s hmotnosťou m_n a dĺžky l je uložený na dvoch podperách A a B a je zaťažený bremenom hmotnosti m_b zaveseným vo vzdialenosti l_b od miesta A (obr. 2). Určite veľkosť síl F_A a F_B, ktoré pôsobia na nosník od podpier A a B.



Obr.2

$$\left[F_B = \left(\frac{m_n}{2} + \frac{l_b}{l} m_b \right) g, \quad F_A = \left(m_n + m_b \right) g - F_B \right]$$

6. Homogénna úzka obdĺžniková doska s dĺžkou l = 3 m a s hmotnosťou m = 20 kg je na jednom konci zaťažená bremenom s hmotnosťou m_b = 5 kg (obr.3). V akej vzdialenosti od konca, kde sa nachádza bremeno, máme podložiť podperu, aby doska zaujala vodorovnú polohu?



Obr.3

$$\left[x = \frac{m\,l}{2\left(m + m_b\right)} = 1{,}2\,\mathrm{m} \right]$$

7. Vypočítajte moment zotrvačnosti tenkého drôtu hmotnosti m zohnutého do tvaru kružnice polomeru R vzhľadom na rotačnú os totožnú s osou symetrie drôtu. $\left[J = mR^2 \right]$.

8. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče prierezu S_0, dĺžky l a hmotnosti m vzhľadom na os kolmú na dĺžku tyče a prechádzajúcu a) koncovým bodom tyče, b) ťažiskom tyče.

$$[\; J = \frac{1}{3} m\,\ell^2, \quad J^* = \frac{1}{12}\, m\,\ell^2 \;]$$

9. Vypočítajte moment zotrvačnosti J homogénneho plného valca hmotnosti m, polomeru R, výšky h vzhľadom na rotačnú os a) totožnú s jeho osou symetrie, b) totožnú s povrchovou priamkou valca rovnobežnou s osou symetrie. Zvážte, od čoho J nezávisí.

$$\left[a)\; J = \frac{1}{2} mR^2, \quad b)\; J = \frac{3}{2} mR^2 \right]$$

10. Krasokorčuliar sa otáča s frekvenciou $f_1 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. S akou frekvenciou sa bude krasokorčuliar otáčať, ak roztiahnutím rúk zväčší svoj moment zotrvačnosti 2,5-krát?

$$[\; f_2 = \frac{f_1}{2{,}5} = 0{,}8\,\mathrm{s}^{-1} \;]$$

11. Tenký drôt hmotnosti m je zohnutý do tvaru kružnice polomeru R a uložený v tiažovom poli na vodorovnú os. Po malom vychýlení z rovnovážnej polohy ho voľne pustíme. Vypočítajte dobu kyvu a redukovanú dĺžku tohto kyvadla.

$$[\; \tau = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{2R}{g}} = 0{,}314\,\mathrm{s}, \qquad l_r = \frac{J}{mR} = 9{,}8\,\mathrm{cm} \;]$$

12. Tyč dĺžky l = 1 m sa kýva ako fyzikálne kyvadlo okolo vodorovnej osi prechádzajúcej koncovým bodom tyče. Nájdite redukovanú dĺžku tohto kyvadla.

$$\left[l_r = \frac{2}{3}\, l = 0{,}666\,\mathrm{m} \right]$$

13. Zotrvačníkové koleso, ktoré má spolu s hriadeľom moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania J, otáča sa tak, že vykonáva N otáčok za minútu. V okamihu, keď prestanú pôsobiť vonkajšie sily svojím otáčavým momentom, koleso sa zastaví počas doby t_z. Za predpokladu, že trecie sily sú konštantné, vypočítajte ich moment vzhľadom na os. (Riešte pre hodnoty $J = 200\ \mathrm{kg.m^2}$, $N = 180$, $t_z = 2\ \mathrm{min}$).

[$M_v = 2\pi f_0 J \frac{1}{t_z} = 31,4\,\mathrm{N\cdot m}$]

14. Zotrvačník s momentom zotrvačnosti J = 5 kg·m^2 sa roztáča z pokoja za pôsobenia sily, ktorej moment vzhľadom na os otáčania M_{os} = 300 N·m. Za aký čas dosiahne zotrvačník frekvenciu f = 480 min^{-1} a aká bude jeho kinetická energia?

$$\left[t = \frac{2\pi f J}{M_{os}} = 0.838\ \mathrm{s},\ E_k = 2J\left(\pi f\right)^2 = 6316,5\ \mathrm{J} \right]$$

15. Vypočítajte kinetickú energiu telesa valcového tvaru s polomerom R = 8 cm a hmotnosti m = 1,5 kg v čase t = 5 s, keď sa toto teleso otáča okolo svojej geometrickej osi s konštantným uhlovým zrýchlením $\alpha = \frac{\pi}{8}\,\mathrm{s^{-2}}$, ak v čase t = 0 bolo teleso v pokoji.

[$E_k = \frac{1}{4} m\, R^2 \alpha^2 t^2 = 0,00924\ \mathrm{J}$]

16. Homogénna tyč všade rovnakého prierezu, hmotnosti m, dĺžky l voľne visí na vodorovnej osi prechádzajúcej jej koncovým bodom. Akú minimálnu rýchlosť v horizontálnom smere treba udeliť voľnému koncovému bodu tyče, aby sa tyč dostala do vodorovnej roviny prechádzajúcej osou otáčania?

$$\left[v = \sqrt{3gl} \right]$$

17. Teleso v tvare a) valca, b) obruče (s hrúbkou zanedbateľnou oproti polomeru) sa valí po naklonenej rovine, ktorá zviera s vodorovnou rovinou uhol α. Polomer každého z telies je R a hmotnosť m. 1) Vypočítajte rýchlosť ťažiska v^* telesa po prebehnutí dráhy s, keď teleso bolo voľne pustené. 2) Porovnajte vypočítanú hodnotu s rýchlosťou, ktorú by malo ťažisko telesa, keby sa iba šmýkalo po dokonale hladkej naklonenej rovine.

$$\left[1)\ v^* = \sqrt{\frac{2mgs\sin\alpha}{m + \frac{J^*}{R^2}}},\quad \text{kde a) } J^* = \frac{1}{2} mR^2, b)\ J^* = mR^2;\quad 2)\ v^* = \sqrt{2gs\sin\alpha} \right]$$