

**SLOVENSKÁ VYSOKÁ ŠKOLA TECHNICKÁ V BRATISLAVE**

---

**STROJNICKA FAKULTA**

Prof. Ing. Jozef Petráš, CSc. - Ing. Cyril Štavina - RNDr. Jarolím Vaník

# **F Y Z I K A II**

**Základný kurz pre poslucháčov Strojníckej fakulty**

**1984**

# Predslov

Do rúk poslucháčov Strojníckej fakulty SVŠT sa dostáva tento učebný text spracovaný kolektívom autorov Katedry fyziky Sjf. Autorov pri spracovaní textu viedla snaha dať do rúk poslucháčov základnú študijnú literatúru, ktorej je citeľný nedostatok, pretože sa zvyšuje počet poslucháčov.

Jednotlivé kapitoly spracovali nasledovní pracovníci Katedry fyziky Strojníckej fakulty:

7. Kmity a vlny; 8. Vlnová optika - RNDr. Jarolím Vaník;

9. Základy kvantovej a atómovej fyziky; 10. Základy fyziky atómového obalu a jadrová fyzika; 11. Fyzika pevných látok - Ing. Cyril Šťavina.

Učebné texty boli spracované podľa celoštátnych učebných osnov pre poslucháčov strojnícckych fakúlt v ČSSR.

Autori budú povďační za všetky pripomienky k eventuálnym nedostatkom, ktoré sa pri tvorbe tohto textu mohli vyskytnúť, aby sa v prípadnom ďalšom vydaní už neopakovali.

Kolektív autorov

## 7. Kmity a vlny

### 7.1 POPIS HARMONICKÉHO POHYBU HMO TNÉHO BODU PO PRIAMKE

Kmitaním (osciláciami) všeobecne nazývame takú zmenu fyzikálnej veličiny, pri ktorej daná veličina nadobúda hodnoty len z obmedzeného intervalu a mnohokrát nadobúda tú istú hodnotu. Ak okrem toho existuje časový interval  $T$ , že po jeho uplynutí sa hodnoty danej veličiny presne zopakujú, také kmity nazývame periodickými a časový interval  $T$  periódou kmitov. Najjednoduchšie periodické kmity sú harmonické. Obmedzíme sa na štúdium len harmonických kmitov, pretože v mnohých prípadoch technicky a fyzikálne dôležitých sa skutočné kmity veľmi podobajú harmonickým. Tak je to napr. pri pohybe fyzikálneho a torzného kyvadla, harmonický priebeh majú kmity elektrického prúdu a napätia v technickej sieti a v rôznych elektrických obvodoch, kmity strún v hudobných nástrojoch, kmity atómov v molekule atď.

Svojou podstatou sa kmity rôznych fyzikálnych veličín líšia, avšak ich formálny popis je v mnohých črtách rovnaký. Objasníme ho na príklade harmonického pohybu hmotného bodu (alebo tuhého telesa) pozdĺž priamky.

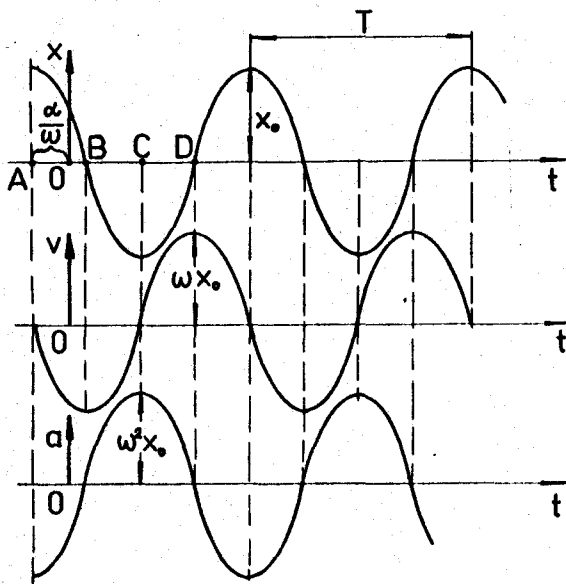
Hmotný bod koná harmonický pohyb po priamke, napr. pozdĺž osi  $x$ , ak jeho súradnica  $x$  závisí od času, podľa vzťahu

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (7.1)$$

kde  $t$  je čas. Význam veličín  $x_0$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  vysvetlíme ďalej. Hmotný bod, ktorý vykonáva pohyb popísaný vzťahom (7.1), nazývame lineárnym harmonickým oscilátorom. Bod  $x = 0$ , okolo ktorého hmotný bod kmitá, je stredom pohybu alebo tiež rovnovážnou polohou. Závislosť výchylky hmotného bodu z jeho rovnovážnej polohy je znázornená na obr. 7.1a. Maximálnu výchylku  $x_0$  nazývame amplitúdou. Ak je amplitúda konštantná, nezávislá od času, ide o harmonický pohyb netlmený, ak s časom klesá, ide o harmonický pohyb tlmený.

Argument kosínusovej funkcie  $\omega t + \alpha$  sa nazýva fáza,  $\alpha$  je fázová konštanta, udáva hodnotu fázy v čase  $t = 0$ . Jej hodnota závisí od voľby okamihu, od ktorého začíname merať čas.

Keby sme začali merať čas od okamihu vyznačeného na obr. 7.1a bodom A,  $\alpha$  by bolo rovné nule. Ak by sme začali merať čas postupne od okamihov znázor-



Obr. 7.1

nených bodmi B, C, D, časová závislosť výchylky z rovnovážnej polohy by bola:

$$x = x_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -x_0 \sin \omega t$$

$$x = x_0 \cos(\omega t + \pi) = -x_0 \cos \omega t$$

$$x = x_0 \cos\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) = x_0 \sin \omega t$$

Vhodnou voľbou okamihu, od ktorého začneme merať čas, možno dosiahnuť, aby  $\alpha = 0$ .

Funkcia  $\cos \omega t$  je periodická funkcia s periódou  $2\pi$ . Pre periódu harmonického pohybu teda musí platiť:

$$\cos \omega(t + T) = \cos(\omega t + 2\pi) \implies \omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{7.2}$$

Veličina  $\omega$  sa nazýva uhlová frekvencia harmonického pohybu. Pohyb, ktorý vykoná hmotný bod počas jednej periódy, sa volá kmit. Počet kmitov za jednotku času nazývame frekvenciou  $\nu$  harmonického pohybu:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{7.3}$$

Rozmery  $[\nu] = [\omega] = s^{-1}$ . V elektrotechnike sa používa jednotka frekvencie herz, skratka Hz, pričom  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ kmit za sekundu}$ . Teda  $[\text{Hz}] = s^{-1}$ .

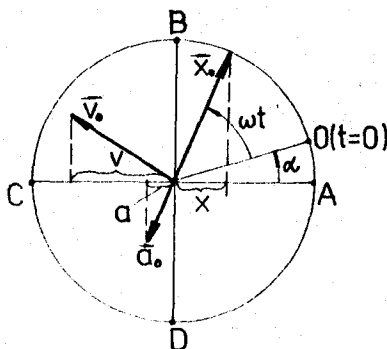
Rýchlosť v bode konajúceho harmonický pohyb je

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0 \omega \sin(\omega t + \alpha) = x_0 \omega \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7.4)$$

a zrýchlenie

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = \omega^2 x_0 \cos\left(\omega t + \alpha + \pi\right) = -\omega^2 x \quad (7.5)$$

Teda rýchlosť a zrýchlenie hmotného bode konajúceho harmonický pohyb je tiež harmonickou funkciou. Amplitúda rýchlosti je  $v_0 = x_0 \omega$  a zrýchlenia  $a_0 = x_0 \omega^2$ . Kmity rýchlosti, ako vidieť z (7.4), predbiehajú vo fáze kmity polohy o  $\pi/2$  a zrýchlenie ich predbieha o  $\pi$ . Vzájomný súvis medzi polohou, rýchlosťou a zrýchlením je znázornený na obr. 7.1a,b,c. Všimnime si, že zrýchlenie je úmerné výchylke a vždy smeruje proti výchylke. Súvis medzi polohou, rýchlosťou a zrýchlením pri harmonickom pohybe možno ukázať ešte názornejšie, ak si uvedomíme, že výraz pre polohu hmotného bode (7.1) možno chápať ako priemet vektora  $\vec{x}_0$ , rotujúceho s konštantnou uhlovou rýchlosťou  $\omega$  do smeru osi  $x$  (obr. 7.2). Na obr. 7.2 vyznačené body A, O, B, C, D odpo-



Obr. 7.2

vedajú týmto bodom na obr. 7.1. Vektor  $\vec{x}_0$  sa otáča proti smeru hodinových ručičiek a jeho absolútna hodnota sa rovná amplitúde kmitov. Vektor  $\vec{v}_0$ , ktorého priemet do smeru osi  $x$  predstavuje rýchlosť hmotného bode, zvierá uhol  $\pi/2$  s vektorom  $\vec{x}_0$ , ako to vyplýva zo (7.4). Podobne z (7.5) vyplýva, že vektor  $\vec{a}_0$ , ktorého priemet do osi  $x$  je zrýchlenie, je voči  $\vec{x}_0$  potočený o  $\pi$ , teda má smer opačný ako výchylka.

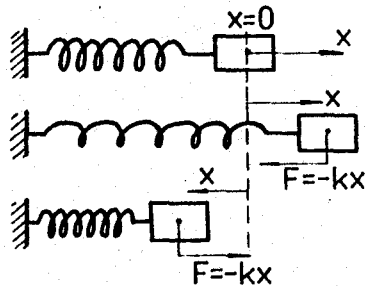
## 7.2 DYNAMIKA HARMONICKÉHO POHYBU HMOTNÉHO BODU

Podľa druhého pohybového zákona sila  $\vec{F}$  spôsobujúca zrýchlenie  $\vec{a}$  hmotného bodu sa rovná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia. Podľa (7.5) sila, ktorá spôsobuje harmonický pohyb v priamke, je

$$F = - m \omega^2 x = - k x \quad (7.6)$$

kde sme označili  $m \omega^2 = k$ .

Veľkosť sily je priamo úmerná výchylke hmotného bodu z rovnovážnej polohy a má smer proti výchylke, t.j. sila vždy smeruje do stredu harmonického pohybu ( $x = 0$ ). Pri  $x = 0$  je  $F = 0$ , a to je dôvod, prečo sme bod  $x = 0$  nazvali rovnovážnou polohou. Harmonický pohyb je preto stredovým (centrálnym) pohybom: Jeden druh síl, ktoré môžeme vyjadriť v tvare (7.6), t.j.  $F = -k x$ , sú sily elastické, možno ich realizovať napr. pomocou pružín. Silové pomery pri pohybe hmotného bodu za účinku pružiny sú znázornené na obr. 7.3. Predpokladáme, že povrch podložky je dokonale hladký, takže sily trenia netreba uvažovať.



Obr. 7.3

Z predchádzajúceho vyplýva, že ak hmotný bod koná harmonický pohyb, deje sa tak za účinku sily  $F = -k x$ . Treba ukázať i opačný postup, to znamená, že ak na hmotný bod pôsobí sila  $F = -k x$ , kde  $k > 0$ , účinkom tejto sily koná harmonický pohyb. Pri riešení pohybu za účinku známej sily vychádzame z pohybovej rovnice  $\vec{F} = m\vec{a}$ , ktorá pre nami vyšetrovaný prípad je

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - k x \quad (7.7)$$

Po predelení tejto rovnice hmotnosťou  $m$  a po zavedení označenia

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (7.7')$$

dostávame homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (7.8)$$

ktorá sa nazýva tiež diferenciálnou rovnicou harmonického pohybu. Jej všeobecné riešenie, ako sa možno presvedčiť priamo dosadením do nej, môžeme zapísať v jednom z nasledujúcich tvarov:

$$x = A \cos (\omega t + \alpha) \quad (7.9a)$$

$$x = B \sin (\omega t + \beta) \quad (7.9b)$$

$$x = C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (7.9c)$$

$$x = E e^{i\omega t} + F e^{-i\omega t} \quad (7.9d)$$

Keďže rovnica (7.7) je diferenciálna rovnica druhého rádu, jej všeobecné riešenie obsahuje dve ľubovoľné konštanty  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ ,  $(C, D)$ ,  $(E, F)$ , ktoré treba pre konkrétny prípad určiť z počiatočných podmienok. Všetky tvary v (7.9) sú ekvivalentné, od jedného možno prejsť k druhému. Napr. z tvaru (7.9a) možno prejsť na tvar (7.9c)

$$x = A \cos (\omega t + \alpha) = A \cos \alpha \cos \omega t - A \sin \alpha \sin \omega t$$

kde sme položili

$$A \cos \alpha = C, \quad -A \sin \alpha = D$$

Dokázať ekvivalentnosť ostatných tvarov prenechávame čitateľovi.

Je teda jedno, ktorý tvar riešenia rov. (7.8) zvolíme. Ešte ukážeme, ako určíme konštanty  $(A, \alpha)$  v (7.9a) z počiatočných podmienok. Nech v čase  $t = 0$  je hmotný bod v polohe  $x(0)$  a má rýchlosť  $v(0)$ .

Keď tieto podmienky dosadíme do rovnice (7.9a) a (7.4), dostaneme rovnice:

$$x(0) = A \cos \alpha, \quad v(0) = -A \omega \sin \alpha$$

z ktorých delením druhej rovnice prvou dostaneme pre fázovú konštantu

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{v(0)}{\omega x(0)}$$

Ak uvedené rovnice umocníme na druhú a sčítame, dostaneme amplitúdu

$$A = \sqrt{x^2(o) + \left(\frac{v(o)}{\omega}\right)^2}$$

Riešenie (7.9a) spĺňajúce spomínané počiatočné podmienky teda je

$$x = \sqrt{x^2(o) + \left(\frac{v(o)}{\omega}\right)^2} \cos \left[ \omega t + \arctg \left( \frac{-v(o)}{\omega x(o)} \right) \right]$$

Kmity hmotného bodu spôsobené len silou  $F = -kx$  nazývame vlastnými kmitmi harmonického lineárneho oscilátora a frekvenciu

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

vlastnou frekvenciou.

### 7.3 ENERGETICKÉ POMERY PRI HARMONICKOM POHYBE

Kinetická energia kmitajúceho hmotného bodu je, ak použijeme (7.4)

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) \quad (7.10)$$

Keďže  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ , použijúc (7.1), môžeme (7.10) upraviť na tvar

$$W_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 [1 - \cos^2(\omega t + \alpha)] = \frac{1}{2} m \omega^2 (x_0^2 - x^2) \quad (7.11)$$

Vidíme, že maximálnu kinetickú energiu má hmotný bod v okamihu, keď prechádza rovnovážnou polohou ( $x = 0$ ), minimálnu má v krajných polohách ( $x = \pm x_0$ ).

Práca potrebná na vychýlenie hmotného bodu z rovnovážnej polohy o hodnotu  $x$  závisí len od počiatočnej a konečnej polohy, môžeme ju teda stotožniť s potenciálnou energiou  $W_p$  vzhľadom na polohu  $x = 0$ :

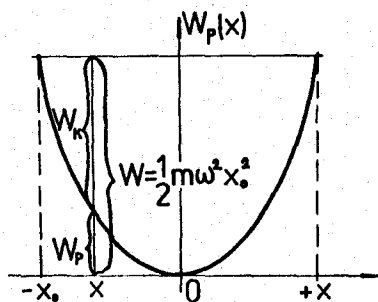


$$A = \int_0^x kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = W_p(x) \quad (7.12)$$

kde sme použili označenie (7.7'). Závislosť  $W_p(x)$  je parabola. Potenciálna energia má minimum v rovnovážnej polohe ( $x = 0$ ) a maximálnu hodnotu nadobúda v krajných polohách ( $x = \pm x_0$ ). Celková mechanická energia harmonického oscilátora je, použijúc (7.11) a (7.12), konštantná

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \quad (7.13)$$

Pre harmonický oscilátor platí zákon o zachovaní mechanickej energie. Počas pohybu sa neustále vymieňa jeden druh energie na druhý. Zväčšenie potenciálnej energie je sprevádzané zmenšením energie kinetickej. Názorne si možno predstaviť energetické pomery pri harmonickom pohybe, ak si zobrazíme potenciálnu energiu  $W_p$  ako funkciu výchylky  $x$  (obr. 7.4). Celkovú energiu predstavuje horizontálna čiara  $W = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$ , čo je hodnota potenciálnej energie v krajných bodoch pohybu.



Obr. 7.4

Potenciálna energia v bode  $x$  je daná vzdialenosťou príslušného bodu na parabole  $W_p(x)$  od osi  $x$ , kinetická energia vzdialenosťou tohto bodu od čiar  $W = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$ .

#### 7.4 TLMENÉ KMITY

Videli sme, že účinkom elastickej sily  $F = -kx$  teleso koná harmonický pohyb s konštantnou amplitúdou  $x_0$ . Zo skúsenosti vieme, že pohyb telesa by sa stlmil, pretože spravidla okrem sily  $F = -kx$  podlieha vplyvu síl, pôsobiacich proti pohybu. Ak napr. pohyb prebieha vo vzduchu, pôsobí odpor vzduchu a pod. Častý a veľmi dôležitý je prípad, keď odpor prostredia  $R$  je aspoň pri malých rýchlostiach úmerný prvej mocnine rýchlosti a má smer proti rýchlosti telesa, t.j.

$$R = - B v = - B \frac{dx}{dt} \quad (7.14)$$

kde  $B$  je konštanta úmernosti medzi odporom  $R$  a rýchlosťou kmitajúceho telesa. Celková sila pôsobiaca na teleso je potom

$$F = - k x - B \frac{dx}{dt}$$

Príslušnú pohybovú rovnicu

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - B \frac{dx}{dt} - k x$$

možno použitím označení

$$\frac{B}{m} = 2 b, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (7.15)$$

upraviť na tvar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.16)$$

Podrobnosťami riešenia tejto rovnice sa tu nebudeme zaoberať. Riešenie bude závisieť od vzájomnej veľkosti veličín  $\omega_0, b$ , ktoré vlastne udávajú veľkosti sily elastickej a odporu prostredia.

Ak  $b < \omega_0$ , čo zodpovedá malému tlmeniu, riešenie má tvar

$$x = A e^{-bt} \cos(\omega t + \alpha) = X(t) \cos(\omega t + \alpha) \quad (7.17)$$

kde  $A, \alpha$  sú ľubovoľné konštanty, ktoré pre konkrétny prípad treba určiť z počiatočných podmienok pohybu, a

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{B^2}{4 m^2}} \quad (7.18)$$

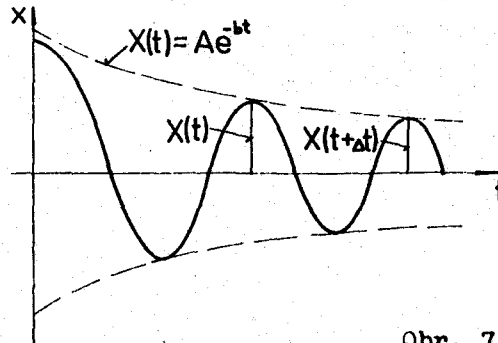
je frekvencia tlmených kmitov.

Riešenie (7.17) sa líši od čisto harmonického pohybu (7.1) tým, že

a) amplitúda kmitov

$$X(t) = A e^{-bt} \quad (7.19)$$

nie je konštantná, ale s časom exponenciálne klesá, ako to vidieť z obr. 7.5, v ktorom priebeh amplitúdy je vyznačený prerušovanou čiarou. Čím väčšie je tlmenie  $b$ , tým je pokles amplitúdy rýchlejší;



Obr. 7.5

b) frekvencia  $\omega$  tlmených kmitov, daná vzťahom (7.18), je menšia ako by bola v prípade bez tlmenia ( $\omega_0$ ) a perióda tlmených kmitov je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \quad (7.20)$$

Pomer dvoch po sebe nasledujúcich amplitúd je podľa (7.19)

$$\frac{X(t)}{X(t+T)} = \frac{A e^{-bt}}{A e^{-b(t+T)}} = e^{bT} = \lambda$$

t.j. je konštantný, nazýva sa útlm. Možno ním charakterizovať tlmenie kmitového pohybu. Udáva totiž, koľkokrát sa zmenší amplitúda kmitov počas jednej periódy ( $e^{bT}$ -krát). Na popis tlmenia sa častejšie používa prirodzený logaritmus útlmu

$$\ln \lambda = bT = \delta \quad (7.21)$$

ktorý nazývame logaritmickým dekrementom.

S rastom odporu prostredia perióda kmitov podľa (7.20) sa zväčšuje a pri  $b = \omega_0$   $T \rightarrow \infty$ . Pri ďalšom zväčšovaní tlmenia sa perióda  $T$  stáva imaginárnou, pohyb sa stáva aperiodický. To značí, že po vychýlení hmotného bodu z rovnovážnej polohy sa k nej pozvoľna vracia bez toho, aby cez ňu prešiel. Všeobecné riešenie rovnice (7.16) pre  $b > \omega_0$  je

$$x = C_1 e^{-\beta_1 t} + C_2 e^{-\beta_2 t}$$

kde  $C_1, C_2$  sú ľubovoľné konštanty a

$$\beta_1 = b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}, \quad \beta_2 = b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

V krajnom prípade, keď  $b = \omega_0$  je všeobecné riešenie rovnice (7.16)

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-bt}$$

kde  $C_1, C_2$  sú ľubovoľné konštanty.

## 7.5 VYŇÚTENÉ KMITY. REZONANCIA

V predchádzajúcom článku sme videli, že vlastné kmity v dôsledku odporu prostredia sú tlmené. Aby hmotný bod kmital stále, netlmene, treba, aby naň pôsobila dodatočná vonkajšia harmonická sila, ktorej práca vykompenzuje straty energie vzniknuté tlmením. Túto silu nazývame vnútenou silou a kmity ňou vyvolané vynútenými kmitmi.

Nech vnútená sila leží v priamke, po ktorej prebieha kmitanie hmotného bodu, a jej veľkosť je

$$F_v = F_0 \cos \omega t \quad (7.22)$$

kde  $F_0$  je amplitúda a  $\omega$  uhlová frekvencia vnútenej sily. Celková sila pôsobiaca na hmotný bod potom bude

$$F = -kx - B \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

a pohybová rovnica

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - B \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

Ak túto rovnicu vydělíme hmotnosťou a použijeme označenie (7.15), môžeme ju prepísať do tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (7.23)$$

Je to nehomogénna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientmi. Líši sa od rovnice (7.16) tým, že pravá strana sa nerovná nule.

Všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice (7.23) dostaneme superpozíciou všeobecného riešenia  $x_1$  rovnice homogénnej, t.j. rovnice (7.16) a partikulárneho riešenia  $x_2$  rovnice (7.23). Riešenie rovnice (7.16) sú vlastné (voľné) kmity a je dané vzťahom (7.17)  $x_1 = A_1 e^{-bT} \cos(\omega t + \omega)$ . Všeobecné riešenie rovnice (7.23) bude  $x = x_1 + x_2$ . Amplitúda vlastných kmitov však s časom klesá k nule, takže po dostatočne dlhom čase sa tieto kmity stlmia, nemusíme ich brať do úvahy. V ustálenom stave bude hmotný bod vykonávať len vynútené kmity  $x_2$ , t.j. kmity spôsobené vnútenou silou  $F_v$ .

Frekvencia vynútených kmitov musí byť rovná frekvencii vnútenej sily a ich amplitúda musí byť konštantná, pretože amplitúda vnútenej sily je konštantná. Preto riešenie (7.23), ktoré zodpovedá ustálenému stavu, musí mať tvar

$$x_2 = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (7.24)$$

kde amplitúda  $A$  vynútených kmitov a fázové posunutie  $\varphi$  medzi vnútenou silou a výchylkou  $x_2$  treba určiť tak, aby bola splnená rovnica (7.23). Aby sme  $A, \varphi$  našli, dosadíme (7.24) do (7.23). Keďže

$$\frac{dx_2}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi)$$

a

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

dostávame:

$$\begin{aligned} & -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - 2bA\omega \sin(\omega t - \varphi) + \\ & + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \end{aligned}$$

Použijeme známe vzťahy z trigonometrie:

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cdot \sin \varphi$$

a v predchádzajúcej rovnici združujeme osobitne členy obsahujúce  $\cos \omega t$  a osobitne členy obsahujúce  $\sin \omega t$ . Dostávame:

$$\begin{aligned} A [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2b\omega \sin \varphi] \cos \omega t + A [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - \\ - 2b\omega \cos \varphi] \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \end{aligned}$$

Porovnaním pravej a ľavej strany tejto rovnice dostávame dve rovnice:

$$A [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2 b \omega \sin \varphi] = \frac{F_0}{m}$$

$$A [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2 b \omega \cos \varphi] = 0$$

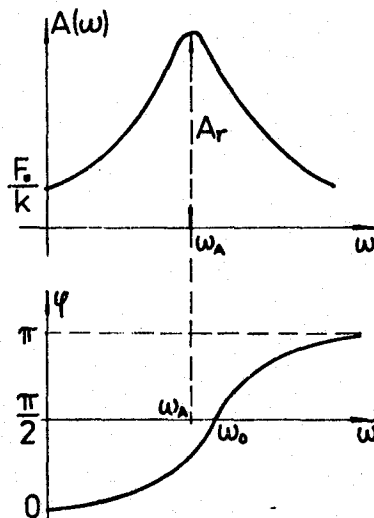
Z druhej rovnice dostaneme pre fázové posunutie  $\varphi$  kmitov voči vnúternej sile

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 b \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.25)$$

Keď povýšime obe predchádzajúce rovnice na druhú a potom sčítame, dostaneme pre amplitúdu vynútených kmitov hodnotu

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 b^2 \omega^2}} \quad (7.26)$$

Závislosť amplitúdy  $A$  vynútených kmitov a fázového posunutia  $\varphi$  medzi vnútenou silou a výchylkou  $x_2$  je znázornená na obr. 7.6. Závislosť  $A(\omega)$  nazývame rezonančnou krivkou. Amplitúda je maximálna pre tú frekvenciu  $\omega_A$  vnúternej sily, pre ktorú má menovateľ v (7.26) najmenšiu hodnotu, t.j. kde sa derivácia menovateľa (7.26) podľa  $\omega$  rovná nule.



Obr. 7.6

Z tejto podmienky dostávame:

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2 b^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{B^2}{2 m^2}} \quad (7.27)$$

Tento stav nazývame amplitúdovou rezonanciou.

Amplitúdu kmitov pri rezonancii určíme, keď dosadíme do (7.26) rezonančnú frekvenciu  $\omega_A$

$$A_r = \frac{F_0/m}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = \frac{F_0}{B\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{B^2}{4m^2}}} \quad (7.28)$$

kde sme použili označenia (7.15).

Čím menšie je tlmenie  $B$ , tým je rezonančná amplitúda  $A_r$  väčšia a rezonančná krivka užšia. Frekvencia  $\omega_A$ , pri ktorej nastáva rezonancia, sa líši od vlastnej frekvencie  $\omega_0$  netlmených kmitov, aj od vlastnej frekvencie tlmených kmitov, ktorá je daná vzťahom (7.18). Pri malom tlmení, keď  $b \ll \omega_0$ , rezonančná frekvencia  $\omega_A$  sa málo líši od vlastnej frekvencie netlmených kmitov, môže klásť  $\omega_A = \omega_0$ . Z obr. 7.6 vidíme, že závislosť  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  majú 3 význačné oblasti:

a) Oblasť malých frekvencií ( $\omega \ll \omega_0$ ): z (7.25) a (7.26) vyplýva, že v tejto oblasti  $\varphi \approx 0$ , a pre malé tlmenie ( $b \ll \omega_0$ )

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

potom

$$x \approx \frac{F_0}{k} \cos \omega t = \frac{F}{k}$$

t.j. hmotný bod kmitá v rytme pôsobiacej sily. Tento príklad je dôležitý napr. v meracej technike, kde chceme, aby merací prístroj presne sledoval zmenu meranej veličiny (ide o prístroje, pri ktorých návrat systému do nulovej polohy je realizovaný pružnými silami).

b) Oblasť veľkých frekvencií ( $\omega \gg \omega_0$ ): tu  $\varphi \rightarrow \pi$ , čiže výchylka má opačnú fázu (opačný smer) ako pôsobiaca sila. V dôsledku toho amplitúda klesá so vzrastom frekvencie. Táto oblasť má prakticky význam pre tlmenie nežiadúcich otrasov. Ak sa objekt, ktorý chcem chrániť pred otrasmi, upevní tak, že jeho vlastná frekvencia  $\omega_0$  je oveľa menšia ako frekvencia sily vyvolávajúcej otrasu, potom amplitúda kmitov bude malá. Zmenšiť vlastnú frekvenciu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

možno buď zmenšením tuhosti pružín  $k$  (ako je to napr. pri odtlmení otrasov automobilov a železničných vozov), alebo zväčšením hmotnosti telesa.

c) Rezonančná oblasť ( $\omega \sim \omega_A \approx \omega_0$ ): amplitúda je maximálna pre  $\omega = \omega_A$ , jej hodnota je daná vzťahom (7.28). Pre malé tlmenie, kedy  $\omega_A \approx \omega_0$  ( $b, \ll \omega_0$ ), je pri rezonancii  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Všeobecne  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , nie pri rezonančnej frekvencii  $\omega_A$ , ale pri  $\omega = \omega_0$ , ako to vidieť zo vzťahu (7.25).

Rezonančné javy hrajú dôležitú úlohu ako v mnohých fyzikálnych javoch, tak i v technike, kde na jednej strane môže byť rezonancia jav nežiadúci, na druhej strane sa práve technicky využíva. Tak napr. mechanické zariadenie, ktoré je poháňané málovykonným motorom, sa môže poškodiť, ak frekvencia buďiacej sily je blízka vlastnej frekvencii zariadenia. Naopak rezonanciu využívame pri meraní kmitočtu mechanickými frekventormi. Najviac sa rozkmitá ten jazýček frekventometra, ktorého vlastná frekvencia je rovná meranej frekvencii. Tiež naladiť rozhlasový prijímač na žiadanú stanicu znamená nastaviť vlastnú frekvenciu vstupných obvodov prijímača na frekvenciu stanicou vysielaných elektromagnetických vln. Pomocou rezonancie možno vysvetliť mnohé javy interakcie elektromagnetického vlnenia s atómovými sústavami atď.

Poznámka: Okrem amplitúdovej rezonancie hrá dôležitú úlohu najmä v elektrotechnike pri výpočte výkonu striedavého harmonického prúdu, rezonancia "energetická", t.j. stav, kedy vnútená sila odovzdáva maximálnu energiu harmonickému oscilátoru. Tento stav nastane, keď priemerný výkon vnútenej sily počas jednej periódy bude maximálny, čiže keď

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T F_v \cdot v \, dt$$

nadobúda maximálnu hodnotu. Vyšetříme podmienky, kedy to nastane. Dosaďme do predchádzajúceho vzťahu za  $F$  a  $v = dx/dt$ . Postupne dostávame:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \cos \omega t (-A\omega) \sin(\omega t - \varphi) dt = \\ &= -A\omega F_0 \left\{ \frac{\cos \varphi}{T} \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t - \frac{\sin \varphi}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt \right\} = \\ &= \frac{A\omega F_0}{2} \sin \varphi \end{aligned}$$

pretože prvý integrál v zátvorke je rovný nule a hodnota druhého je  $\frac{1}{2} T$ .  $N$  je maximálne, ak  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , t.j. ako vyplýva z (7.25), ak  $\omega = \omega_0$ . Maximálnu prácu koná teda vnútená sila pri frekvencii rovnej vlastnej frekvencii



netlmených kmitov. Keďže vtedy je rýchlosť

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\omega \cos \omega t$$

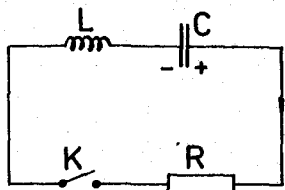
vo fáze s vnútenou silou nazýva sa táto rezonancia i rezonanciou rýchlosti.

## 7.6 ELEKTRICKÝ OSCILAČNÝ OBVOD

Ukážeme, ako možno pojmy a matematický popis, ktorý sme vybuovali pri štúdiu lineárneho harmonického oscilátora, použiť pri štúdiu oscilácií elektrického prúdu v sériovom oscilačnom okruhu. Oscilačné okruhy sú dôležité súčasťou rôznych elektronických zariadení.

### a) Voľné oscilácie

Majme elektrický obvod, tzv. sériový RLC obvod, zložený z kondenzátora s kapacitou  $C$ , cievky s indukčnosťou  $L$  a ohmického odporu  $R$  (obr. 7.7).



Obr. 7.7

Nech pri rozpojení klúča je kondenzátor nabitý, náboj na ňom označme znakom  $Q_0$ . V okamihu  $t = 0$  zapneme klúč  $K$ . Kondenzátor sa začne vybíjať, v okruhu tečie prúd, ktorého veľkosť v čase  $t$  označme  $I$ . Druhý Kirchhoffov zákon pre tento obvod má tvar  $RI = U_L + U_C$ .

Podľa (6.151) a (6.14)

$$U_L = -L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad U_C = \frac{Q_0 - Q}{C}$$

kde  $Q$  je náboj, ktorý z kondenzátora odtiekol za čas  $t$ , počítaný od okamihu zapnutia klúča. Potom

$$RI = -L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q_0 - Q}{C}$$

Po zderivovaní tejto rovnice podľa času a použítí definície intenzity elektrického prúdu  $I = \frac{dQ}{dt}$  dostaneme:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (7.29)$$

Dostali sme diferenciálnu rovnicu, ktorá má presne ten istý tvar ako pohybová rovnica pre tlmený harmonický oscilátor (rovnica predchádzajúca vzťahom (7.15)). Odpovedajúce si veličiny sú  $x \leftrightarrow I, L \leftrightarrow m, \frac{1}{C} \leftrightarrow k$ . Potom veličiny  $b$  a  $\omega_0$  definované vzťahmi (7.15) sú:

$$b = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (7.30)$$

a prúd  $I$  je daný tým istým vzťahom ako  $x$  v (7.17), t.j.

$$I = I_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \alpha) \quad (7.31)$$

kde analogicky s (7.18)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (7.32)$$

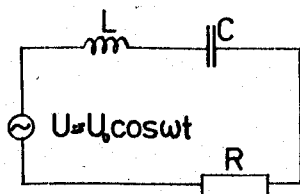
je frekvencia tlmených oscilácií elektrického prúdu. Priebeh  $I(t)$  je podobný ako na obr. 7.5. Keď odpor  $R$  je veľmi malý vzhľadom na indukčnosť  $L$ ,  $b \rightarrow 0$ , dostaneme netlmené oscilácie  $I = I_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$  s frekvenciou

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

čo je vlastná frekvencia netlmeného LC obvodu.

#### b) Vynútené kmity

Ak do obvodu na obr. 7.7 zaradíme zdroj striedavého elektromotorického napätia  $U = U_0 \cos \omega t$ , ako to vidieť na obr. 7.8, 2. Kirchoffov zákon pre tento obvod bude



Obr. 7.8

$$RI = U_L + U_C + U_0 \cos \omega t$$

Podobne ako v prípade obvodu bez vnútornej elektromotorickej sily po zderivovaní tohto vzťahu dostaneme:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d}{dt} (U_0 \cos \omega t) \quad (7.33)$$

alebo

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2b \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = - \frac{U_0 \omega}{L} \sin \omega t \quad (7.34)$$

kde sme použili (7.30). Táto rovnica odpovedá rovnici (7.23) pre vynútené kmity s tým rozdielom, že na pravej strane (7.34) je funkcia  $-\sin \omega t$  namiesto  $\cos \omega t$  (čo však nie je podstatné, pretože posunutím argumentu funkcie o  $\frac{\pi}{2}$  môžeme dosiahnuť, aby na pravej strane bola funkcia kosínus. Potom by sme mohli použiť riešenie pre vynútené kmity, ale museli by sme brať do úvahy spomínané posunutie o  $\frac{\pi}{2}$ . Aby sme veci nekomplikovali, odporúčame urobiť analogický výpočet ako v článku 7.5. Hľadáme riešenie pre ustálený stav v tvare

$$I = I_0 \cos (\omega t - \varphi)$$

kde  $I_0, \varphi$  treba určiť tak, aby bola splnená rovnica (7.34).

Presne takým postupom ako pri odvodzovaní vzťahov (7.25) a (7.26) (čo prenechávame ako samostatné domáce cvičenie) dostaneme:

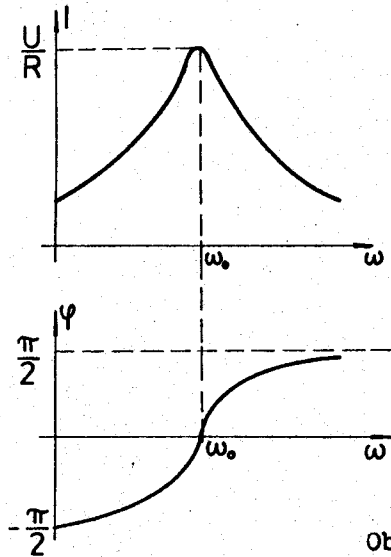
$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (7.35)$$

Veličinu

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

nazývame impedanciou obvodu. Závislosti  $I_0(\omega)$  a  $\varphi(\omega)$  sú znázornené na obr. 7.9.

Zo vzťahu (7.35) vyplýva, že rezonancia nastane pri  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ , odkiaľ dostaneme, že rezonančná frekvencia  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  sa rovná vlastnej frekvencii voľných kmitov netlmeného LC okruhu. Fázový posuv  $\varphi$  medzi prúdom a napätím je pri rezonancii rovný nule.



Obr. 7.9

Pre  $\omega < \omega_0$  je  $\varphi < 0$ , a teda prúd predbieha napätie, pre  $\omega > \omega_0$  je  $\varphi > 0$ , prúd za napätím zaostáva.

Podobne ako v poznámke state 7.5 vyjadrime stredný výkon elektrického prúdu v okruhu

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T U I dt$$

Po dosadení postupne dostaneme:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cos (\omega t - \varphi) dt = \\ &= \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \cos \omega t [\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi] dt = \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = U_e \cdot I_e \cos \varphi \end{aligned} \quad (7.36)$$

Maximálnu prácu koná zdroj elektromotorického napätia za rezonancie, pretože vtedy má svoju maximálnu hodnotu ako  $\cos \varphi$ , tak i  $I_0$ . Veličiny  $U_e$  a  $I_e$  nazývame efektívnymi hodnotami napätia a prúdu,  $\cos \varphi$  je účinník okruhu.

### 7.7 SKLADANIE ROVNOBEŽNÝCH HARMONICKÝCH KMITOV

V mnohých prípadoch pôsobí na teleso súčasne viacero síl, ktoré, keby pôsobili samostatne, by spôsobili harmonický pohyb s príslušnou frekvenciou a amplitúdou. Pri súčasnom pôsobení týchto síl bude pohyb superpozíciou jednotlivých pohybov. Všeobecne platí, že ak nejaká fyzikálna veličina vyhovuje lineárnej diferenciálnej rovnici, platí pre túto veličinu princíp superpozície. Rovnica (7.23) je lineárna, preto ak vnútená sila  $F_1 \cos \omega_1 t$  vyvolá pohyb udaný výchylkou  $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$ , kde  $A_1, \varphi_1$  sú dané rovnicami (7.25) a (7.26), a podobne sila  $F_2 \cos \omega_2 t$  spôsobí výchylku  $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$ , súčasné pôsobenie síl vyvolá pohyb, ktorý je superpozíciou jednotlivých pohybov, t.j.

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \quad (7.37)$$

Výsledný pohyb daný rovnicou (7.37) je všeobecne nie harmonický pohyb. Obmedzíme sa tu na dva význačné prípady:

- a)  $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 + \omega_2$ , t.j. ide o skladanie kmitov blízkyh frekvencií. Pre jednoduchosť volme  $A_1 = A_2 = A$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Posledná podmienka je nepodstatná; vieme, že vhodnou voľbou okamihu  $t = 0$  možno dosiahnuť, aby fázové konštanty boli rovné nule. Potom (7.37) dáva:

$$\begin{aligned} x &= A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2 A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ &= 2 A \cos \Omega t \cos \omega t \end{aligned} \quad (7.38)$$

kde

$$\Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}; \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

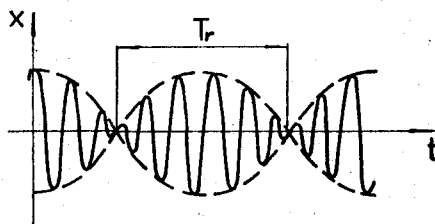
Pohyb vyjadrený rovnicou (7.38) môžeme považovať za harmonický s kruhovou frekvenciou

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

rovnou aritmetickému priemeru frekvencií jednotlivých pohybov, a s amplitúdou  $B$ , ktorá sa s časom pomaly mení

$$B = 2 A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

Časový priebeh výsledného pohybu je znázornený na obr. 7.10, kde prerušovanou čiarou je vyznačený priebeh amplitúdy  $B$ .



Obr. 7.10

Ak takéto kmity je nútený konať bubienok nášho ucha, počujeme kolísanie hlasitosti. Ucho je necitlivé na fázu harmonického pohybu, zaznamenáva druhú mocninu amplitúdy. Keďže počas jednej periódy zmeny amplitúdy má absolútna hodnota  $B$  dvakrát maximum, perióda rázov  $T_r$  sa určí, ako je to zrejme i z obr. 7,10, z podmienky

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T_r = \mathcal{N}$$

z čoho

$$T_r = \frac{2\mathcal{N}}{\omega_2 - \omega_1}; \quad \nu_r = \frac{1}{T_r} = \frac{\omega_2}{2\mathcal{N}} - \frac{\omega_1}{2\mathcal{N}} = \nu_2 - \nu_1 \quad (7.39)$$

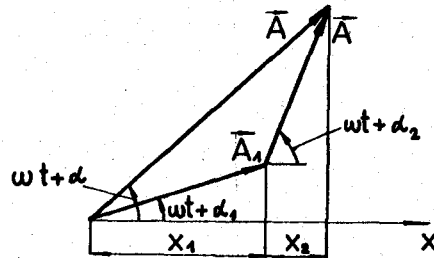
Frekvencia rázov sa rovná rozdielu frekvencií jednotlivých kmitov. Pomocou rázov možno kontrolovať rovnosť frekvencií. Ako sa frekvencie dvoch harmonických signálov blížia k sebe, frekvencia rázov sa znižuje a pri ich rovnosti rázy vymiznú. Na meraní kmitočtu rázov je založená metóda určenia frekvencie porovnávaním so signálom známej frekvencie.

b)  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Výsledný pohyb bude, zrejme, harmonický pohyb s kruhovou frekvenciou  $\omega$ , čiže

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

kde  $A$  a  $\alpha$  treba určiť tak, aby platila táto rovnosť. Hodnoty  $A, \alpha$  môžeme určiť pomocou vyjadrenia výchylky hmotného bodu, ako priemetu rotujúceho vektora  $\vec{A}$  do smeru osi  $x$ , ako to bolo vysvetlené na obr. 7.2. Vektor  $\vec{A}$  dostaneme ako súčet vektorov  $\vec{A}_1, \vec{A}_2$  podľa obr. 7.11. Z tohto obrázku hneď máme pre amplitúdu výsledného pohybu

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (7.40)$$



Obr. 7.11

Pre čas  $t = 0$  z obr. 7.11 máme:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (7.40')$$

### 7.8 SKLADANIE KMITOV NA SEBA KOLMÝCH

#### a) Rovnaké frekvencie

Nech má hmotný bod kmitať v smere osi  $x$  a  $y$  s rovnakými frekvenciami  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  a fázovým rozdielom  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t \\ y &= y_0 \cos (\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (7.41)$$

Aby sme určili trajektóriu bodu, vylúčime z týchto rovníc čas. Druhú z rovníc (7.41) prepíšeme a dosadíme do nej rovnicu prvú. Máme:

$$\frac{y}{y_0} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha = \frac{x}{x_0} \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$$

z čoho

$$\left( \frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} \cos \alpha \right)^2 = (-\sin \omega t \sin \alpha)^2$$

$$\left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \cos^2 \alpha - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \alpha = \sin^2 \omega t \sin^2 \alpha$$

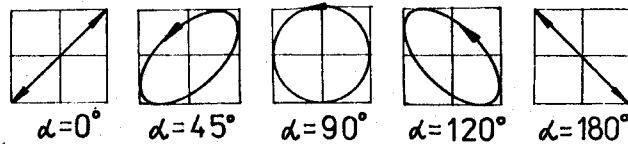
Keď použijeme

$$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t = 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2$$

máme

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (7.42)$$

Je to rovnica elipsy. Všeobecne je výsledný pohyb, vznikajúci zložením dvoch navzájom kolmých kmitov s rovnakou frekvenciou, pohyb po elipse. Tvar a poloha elipsy závisia od amplitúd  $x_0$ ,  $y_0$  skladaných kmitov a od vzájomnej fázy kmitov. Niektoré osobitné prípady sú znázornené na obr. 7.12,



Obr. 7.12

1.  $\alpha = 0$ : už z (7.41) dostávame  $\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$ , čo je rovnica priamky. V tomto prípade hmotný bod kmitá pozdĺž priamky  $y = \frac{y_0}{x_0} x$ .
2.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ : Z (7.42) dostávame  $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1$ , čo je rovnica elipsy, ktorej osi sú rovnobežné so súradnými osami. Ak  $x_0 = y_0$ , elipsa prejde v kružnicu.

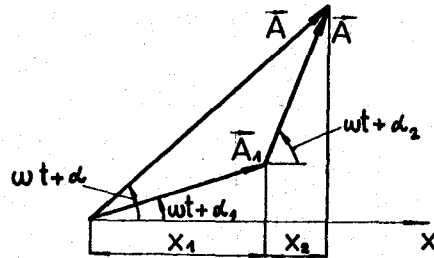
Zložením dvoch kolmých harmonických kmitov s rovnakou frekvenciou dostaneme všeobecne pohyb po elipse, v osobitných prípadoch po priamke a kružnici. A naopak, pohyb po elipse možno rozložiť na dva kolmé harmonické pohyby dané rovnicami (7.41).

- b)  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Pohyb, ktorý vzniká zložením dvoch harmonických pohybov s nerovnakými frekvenciami, je veľmi zložitý. Krivka, ktorú bod pri takomto pohybe opisuje, je dokonca nie uzavretá. Uzavretú krivku dostaneme len v prípade, keď frekvencie skladaných kmitov sú v pomere celých čísiel. Príslušné krivky sa nazývajú Lissajousove krivky a pre niektoré prípady sú znázornené na obr. 7.13.

$\omega_1:\omega_2 \backslash \alpha$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$\pi$
1:1					
1:2					

Obr. 7.13





Obr. 7.11

Pre čas  $t = 0$  z obr. 7.11 máme:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (7.40')$$

### 7.8 SKLADANIE KMITOV NA SEBA KOLMÝCH

#### a) Rovnaké frekvencie

Nech má hmotný bod kmitať v smere osi  $x$  a  $y$  s rovnakými frekvenciami  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  a fázovým rozdielom  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t \\ y &= y_0 \cos (\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (7.41)$$

Aby sme určili trajektóriu bodu, vylúčime z týchto rovníc čas. Druhú z rovníc (7.41) prepíšeme a dosadíme do nej rovnicu prvú. Máme:

$$\frac{y}{y_0} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha = \frac{x}{x_0} \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$$

z čoho

$$\left( \frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} \cos \alpha \right)^2 = (-\sin \omega t \sin \alpha)^2$$

$$\left( \frac{y}{y_0} \right)^2 + \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \cos^2 \alpha - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \alpha = \sin^2 \omega t \sin^2 \alpha$$

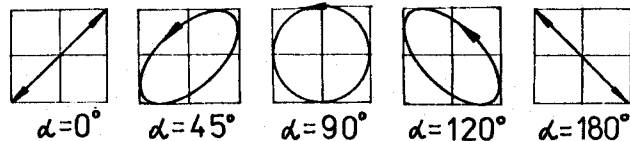
Keď použijeme

$$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t = 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2$$

máme

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (7.42)$$

Je to rovnica elipsy. Všeobecne je výsledný pohyb, vznikajúci zložením dvoch navzájom kolmých kmitov s rovnakou frekvenciou, pohyb po elipse. Tvar a poloha elipsy závisia od amplitúd  $x_0$ ,  $y_0$  skladaných kmitov a od vzájomnej fázy kmitov. Niektoré osobitné prípady sú znázornené na obr. 7.12,

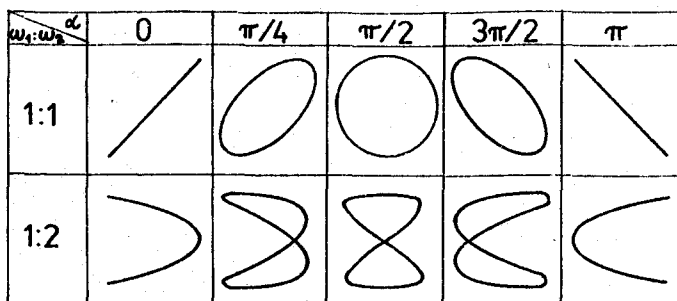


Obr. 7.12

1.  $\alpha = 0$ : už z (7.41) dostávame  $\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$ , čo je rovnica priamky. V tomto prípade hmotný bod kmitá pozdĺž priamky  $y = \frac{y_0}{x_0} x$ .
2.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ : Z (7.42) dostávame  $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1$ , čo je rovnica elipsy, ktorej osi sú rovnobežné so súradnými osami. Ak  $x_0 = y_0$ , elipsa prejde v kružnicu.

Zložením dvoch kolmých harmonických kmitov s rovnakou frekvenciou dostaneme všeobecne pohyb po elipse, v osobitných prípadoch po priamke a kružnici. A naopak, pohyb po elipse možno rozložiť na dva kolmé harmonické pohyby dané rovnicami (7.41).

- b)  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Pohyb, ktorý vzniká zložením dvoch harmonických pohybov s nerovnakými frekvenciami, je veľmi zložitý. Krivka, ktorú bod pri takomto pohybe opisuje, je dokonca nie uzavretá. Uzavretú krivku dostaneme len v prípade, keď frekvencie skladaných kmitov sú v pomere celých čísiel. Príslušné krivky sa nazývajú Lissajoussove krivky a pre niektoré prípady sú znázornené na obr. 7.13.



Obr. 7.13

## 7.9 FOURRIEROVA ANALÝZA PERIODICKÉHO POHYBU

Doteraz sme sa zaoberali len harmonickými osciláciami, a to nielen preto, že sú najjednoduchšie, ale i preto, že ľubovoľný periodický kmitavý pohyb, popísaný periodickou funkciou  $x = f(t)$ , možno považovať za superpozíciu jednotlivých harmonických pohybov. V predmete Matematika sa dozvieme, že každú periodickú funkciu  $f(t)$ , t.j. takú, pre ktorú platí  $f(t + T) = f(t)$ , kde  $T$  je perióda, a ktorá spĺňa tzv. Dirichletove podmienky, možno rozložiť do Fourierovho radu:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \dots \\ &\quad + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t + \dots = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega t \end{aligned} \quad (7.43)$$

kde  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  je perióda, t.j. veličina, pre ktorú platí  $f(t) = f(t + T)$ .

Frekvencia  $\omega$  sa nazýva základná frekvencia; frekvencie  $2\omega, 3\omega, \dots$  sú vyššie harmonické frekvencie. Koeficienty  $A_n, B_n$  dostaneme z nasledujúcich vzťahov:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt; & A_n &= \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t dt \end{aligned} \quad (7.44)$$

kde  $a$  je ľubovoľné číslo.

Určenie koeficientov  $A_n, B_n$  nazývame harmonickou alebo tiež Fourierovou analýzou vyšetřovaného kmitania.

Rozklad periodickej funkcie do Fourierovho radu umožňuje vypočítať aj výsledný pohyb hmotného bodu za účinku ľubovoľnej vnútornej periodickej sily  $F_v(t)$ . Túto silu možno rozložiť do Fourierovho radu a diferenciálnu rovnicu pre vynútené kmity (7.23) riešiť pre každú zložku Fourierovho rozvoja osobitne. Keďže rovnica (7.23) je lineárna, výsledné riešenie bude dané súčtom riešení pre jednotlivé zložky Fourierovho rozvoja vnútornej sily.

## 7.10 VLNENIE. ZÁKLADNÉ POJMY

Doteraz sme si všimli kmitavý pohyb izolovaného hmotného bodu. Ak však kmitajúci hmotný bod (častica) je súčasťou hmotného prostredia, v dôsledku vzájomného pôsobenia jednotlivých častíc prostredia kmitajúca častica vyvolá kmity susedných častíc, tie ďalších atď. Jednotlivé častice pritom odovzdávajú energiu susedným, čiže prostredím sa šíri energia. Teda kmitajúca častica je zdrojom kmitov (žiaričom), ktoré sa šíria na všetky strany. Pritom jednotlivé častice prostredia kmitajú okolo svojich rovnovážnych polôh s určitým oneskorením voči kmitaniu zdroja a voči sebe navzájom, pretože prenos kmitania vždy prebieha určitou konečnou rýchlosťou. Pohyb, ktorý v prostredí vznikne, nazývame vlnením, alebo tiež hovoríme, že sa prostredím šíri vlna.

Oblasť, kde kmitajú všetky častice prostredia, nazývame vlnovým polom. Plochu oddeľujúcu kmitajúce častice prostredia od častíc, ktoré ešte nezačali kmitať, nazývame čelom vln. V izotropnom prostredí smer šírenia sa vlnenia je kolmý na čelo vlny. Smer postupu vlnenia, teda smer kolmý na čelo vlny, nazývame lúčom. Ak čelo vlny je rovina, vlnu nazývame rovinnou vlnou, ak je čelo vlny guľa - vlnu nazývame guľovou vlnou. Ak kmitajú častice v priamke, pozdĺž ktorej sa vlnenie šíri, vlnenie nazývame pozdĺžnym. Ak sú kmity častíc kolmé na smer postupu vlnenia, nazývame vlnenie priečnym. V plynch a kvapalinách sa šíri len pozdĺžne vlnenie, v pevných látkach ako pozdĺžne, tak i priečne vlnenie. Ak smer kmitov všetkých častíc pri priečnom vlnení je stále ten istý, hovoríme, že vlnenie je lineárne polarizované. Taký druh vlnenia, pri ktorom kmitajú jednotlivé častice prostredia, nazývame mechanickým vlnením, aby sme zdôraznili, že kmity vykonávajú hmotné objekty. V elektromagnetickej vlne nekmitajú hmotné častice, ale s časom sa menia intenzita elektrického a intenzita magnetického poľa. Takéto vlnenie sa šíri i vákuom.

Najprv preberieme rôzne typy mechanického vlnenia. Vlastnosti elektromagnetického vlnenia preberieme osobitne.

## 7.11 MATEMATICKÝ POPIS ŠÍRENIA SA VLNENIA. ROVNICA VLNENIA

Označme znakom  $u$  nejakú fyzikálnu veličinu, ktorá popisuje určitý fyzikálny stav. Napr.  $u$  môže byť výchylka častice prostredia z rovnovážnej polohy, zmena tlaku plynu, intenzita elektrického, magnetického poľa atď. (v prípade vektorovej veličiny je  $u$  vektor). V ustálenom stave je  $u$  konštanta.

Ak sa rovnovážny stav poruší v niektorej časti prostredia, porucha rovnovážneho stavu - rozruch - (signál) sa bude šíriť a veličina  $u$  bude funkciou polohy i času.

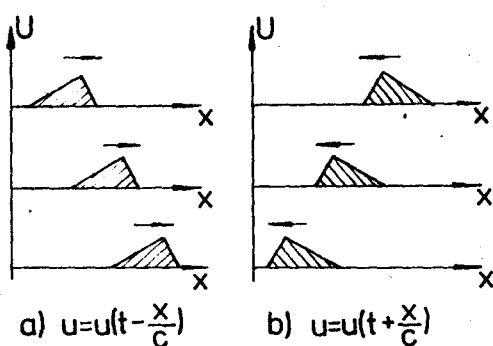
Nech smer šírenia sa rozruchu je totožný so smerom osi  $x$ . Ak v bode  $x = 0$  je časový priebeh rozruchu daný funkciou  $u(t)$ , v mieste vzdialenom o  $x$  od počiatku sa bude priebeh  $u(t)$  opakovať o čas  $t' = \frac{x}{c}$  neskôr. Písmenom  $c$  sme označili rýchlosť šírenia sa rozruchu. Veličina  $u$  bude teda funkciou nielen času, ale i polohy:

$$u(x, t) = u(t - t') = u\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (7.45)$$

Takýto zápis vyjadruje postup rozruchu v smere osi  $x$ , pričom sa rozruch ne-deformuje pri svojom postupe. Rozruch  $u$ , postupujúci v opačnom smere, t.j. oproti smeru osi  $x$ , je popísaný funkciou

$$u(x, t) = u\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (7.45')$$

Priebeh  $u(x, t)$  daný rovnicami (7.45) a (7.45') je znázornený na obr. 7.14 pre tri rôzne časové okamihy (ako keby sme rozruch "odfotografovali" v troch rôznych okamihoch).



Obr. 7.14

Dôležitý je najmä prípad, keď rozruch je nie časovo (teda ani priestorovo) obmedzený a je daný harmonickou funkciou

$$u(x, t) = u_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) = u_0 \cos \left( \omega t - \frac{\omega x}{c} \right) \quad (7.46)$$

Rovnicu (7.46) nazývame rovnicou harmonickej vlny. Popisuje rovinnú harmonickú vlnu, postupujúcu v smere osi  $x$ .  $u_0$  v rovnici (7.46) je amplitúda vlny,  $\omega$  kruhová frekvencia.

Kosínus je periodická funkcia. V rovnici (7.46) je jeho argument funkciou dvoch premenných:  $x, t$ . Je teda periodickou funkciou v čase i v priestore.

Pri fixovanej polohe ( $x = \text{const}$ ) rovnica (7.46) popisuje harmonický pohyb, ktorý vykonáva častica nachádzajúca sa v tomto mieste. Výraz  $\frac{\omega x}{c}$  je fázová konštanta. Časová perióda tohto pohybu je podľa vzťahu (7.2)  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Priestorovú periódu funkcie (7.46) nájdeme, keď fixujeme čas ( $t = \text{const}$ ). Z podmienky periodickosti kosínusu, ak označíme hľadanú priestorovú periódu písmenom  $\lambda$ , čiže z podmienky

$$\omega t - \left( \frac{\omega x}{c} + 2\pi \right) = \omega t - \frac{\omega (x + \lambda)}{c}$$

dostaneme:

$$\frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi \implies \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} = c T \quad (7.47)$$

kde sme použili vzťahy  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $T = \frac{1}{\nu}$ .

Veličinu  $\lambda$  nazývame vlnovou dĺžkou. Podľa (7.47) je to vzdialenosť, ktorú vlnenie prejde počas jednej časovej periódy  $T$ .

Potom rovnicu (7.46) možno prepísať na často používaný tvar

$$u(x, t) = u_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad (7.48)$$

alebo ak označíme  $\frac{2\pi}{\lambda} = K$ , kde  $K$  nazývame kruhovým vlnovým číslom, môžeme rovnicu vlnenia prepísať do tvaru symetrického vzhľadom na premenné  $t, x$ :

$$u(x, t) = u_0 \cos (\omega t - K x) = u_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (7.49)$$

Rovnica (7.49) popisuje rovinnú vlnu postupujúcu v smere osi  $x$ . Rovinnou vlnou rozumieme takú vlnu, v ktorej geometrické miesto bodov rovnakej fázy sú roviny. Napr. v okamihu  $t$  bude geometrické miesto rovnakej fázy  $\Phi$  dané rovnicou

$$\Phi = \omega t - K x \implies x = \frac{\omega t - \Phi}{K}$$

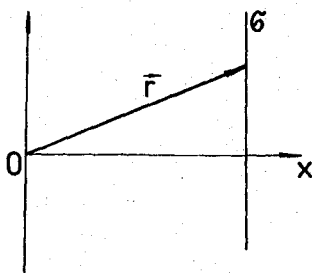
čo je rovnica roviny  $\sigma$  rovnobežnej s rovinou  $yz$  (obr. 7.15).

Množina bodov, v ktorých má vlna v danom čase rovnakú fázu, nazývame vlnoplochou.

Vlnový stav v ľubovoľnom bode, danom polohovým vektorom  $\vec{r}$ , môžeme vyjadriť i takto (obr. 7.15):

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

pretože  $x = \vec{r} \cdot \vec{i}$ , kde  $\vec{i}$  je jednotkový vektor v smere osi  $x$ .



Obr. 7.15

Ak vlnenie postupuje v nejakom všeobecnom smere, danom jednotkovým vektorom  $\vec{n}$ , rovnicu vlnenia možno zapísať analogicky ako pre vlnu postupujúcu v smere osi  $x$ :

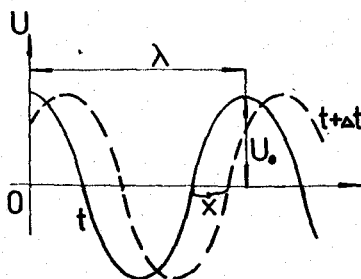
$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = u_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (7.50)$$

kde

$$\vec{k} = k \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \quad (7.51)$$

nazývame vlnovým vektorom.

Obmedzíme sa na štúdium len harmonického vlnenia, pretože podobne, ako sa spomenulo v stati 7.9, každé periodické vlnenie možno nahradiť superpozíciou jednoduchých harmonických vlnení.



Obr. 7.16

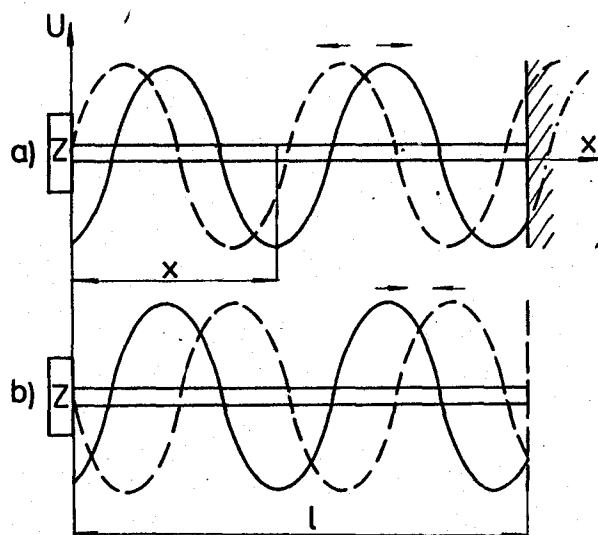
Grafické znázornenie šírenia sa harmonickej vlny je na obr. 7.16, kde súvislou čiarou je zobrazená závislosť výchylky častíc z rovnovážnej polohy v časovom okamihu  $t$  prerušovanou čiarou v čase  $t + \Delta t$ . Pri  $t = \text{const}$  je závislosť (7.46), a teda i (7.48) a (7.49) harmonickou funkciou polohy  $x$ . V čase  $t + \Delta t$ , kde bude priebeh výchyliek v závislosti od  $x$  taký istý ako v čase  $t$ , len bude posunutý vpravo o  $\Delta x = c \cdot \Delta t$ . Častice v rôznych miestach  $x$  kmitajú s rovnakou amplitúdou, ale s nerovnakou fázou. Miesto konštantnej fázy sa pohybuje. Ak položíme fázu  $\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = \text{const}$ , jej zmena  $\omega\left(dt - \frac{dx}{c}\right) = 0$ , z čoho vyplýva, že  $\frac{dx}{dt} = c$ , teda rýchlosť, akou sa šíri vlnenie, je rýchlosť šírenia sa fázy. Nazýva sa preto i fázovou rýchlosťou.

**Poznámka:** Netreba si mýliť rýchlosť postupu vlnenia  $c$  so skutočnou rýchlosťou častice, vykonávajúcej kmitavý pohyb okolo svojej rovnovážnej polohy. Skutočná rýchlosť častice je daná časovou deriváciou jej polohového vektora (v tomto prípade výchylky  $u$  z rovnovážnej polohy):

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \omega \sin(\omega t - Kx) \quad (7.52)$$

## 7.12 STOJATÉ VLNIENIE

Ak prostredím postupujú dve alebo viac vlnení, výsledna výchylka častice z rovnovážnej polohy je daná súčtom výchýliek prislúchajúcich jednotlivým vlnám, t.j.  $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ . (Predpokladáme, že ide buď o vlnenie pozdĺžne, kde netreba brať do úvahy polarizáciu vlnenia, alebo priečne vlnenie s rovnakou polarizáciou.) Veľmi dôležitý je prípad, keď dve vlny postupujú v navzájom opačných smeroch. Takáto situácia často vzniká vtedy, keď sa vlna šíri v ohraničenom prostredí. Pri dopade na rozhranie dvoch prostredí sa vlna odráža. Pri odraze od prostredia úplne tuhého (ktoré nemôže kmitať) zmení vlna, odrazená voči dopadajúcej, svoju fázu o  $\pi$ , kým pri odraze na rozhraní s vákuom (prípadne vzduchom) zmena fázy nenastane. Na obr.7.17a je znázornený odraz harmonickej vlny od upevneného konca tyče, na obr.7.17b od voľného konca tyče. Dopadajúce vlny sú znázornené súvislými čiarami odrazené prerušovanými. Striedavými bodkami a čiarkami je znázornený priebeh vlnenia, kedy nenastal odraz. Zdroj vlnenia  $Z$  je v mieste  $x = 0$ .



Obr. 7.17



Nech dĺžka tyče je  $l$ . Aby sa vlnenie po odraze dostalo do bodu  $x$ , musí prejsť vzdialenosť  $l + (l - x) = 2l - x$ .

Pre vlnu odrazenú od pevného konca tyče dostávame v mieste  $x$ :

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= u_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi(2l-x)}{\lambda} + \pi \right) = \\ &= -u_0 \cos \left( \omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{4\pi l}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (7.53)$$

a pre vlnu odrazenú do voľného konca

$$u_2(x, t) = u_0 \cos \left( \omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{4\pi l}{\lambda} \right) \quad (7.53')$$

Ak v týchto vzťahoch konštantný člen  $\frac{4\pi l}{\lambda}$  vynecháme ako nepodstatný pre ďalšie úvahy (alebo zvolíme dĺžku tyče  $l$  tak, aby  $\frac{4\pi l}{\lambda} = 2n\pi$  kde  $n$  je celé číslo), výchylka častice z rovnovážnej polohy bude daná súčtom výchyliek  $u_1, u_2$ , prislúchajúcich vlnám dopadajúcej a odrazenej:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = u_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) - u_0 \cos \left( \omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = \\ &= 2u_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin \omega t \end{aligned} \quad (7.54)$$

pri odraze vlny od pevného konca tyče a

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = u_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) + u_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = \\ &= 2u_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t \end{aligned} \quad (7.54')$$

pri odraze od voľného konca tyče.

Pri odvodzovaní posledných výrazov sme použili známe vzťahy:

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Výrazy (7.54) a (7.54') nevyjadrujú už postupnú vlnu, pretože neobsahujú fázu charakteristickú pre postupnú vlnu, t.j.  $\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}$ . Rovnice (7.54) a

(7.54') predstavujú jednoduché harmonické kmity, ktorých amplitúda je funkciou  $x$  a je daná výrazmi:

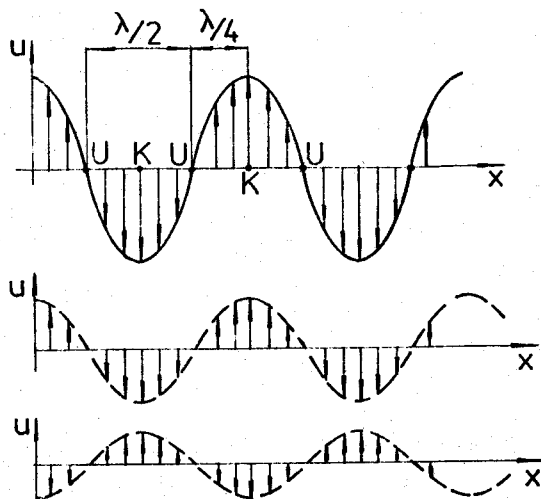
$$A(x) = 2 u_0 \sin \frac{2 \pi x}{\lambda} \quad (7.55)$$

$$A'(x) = 2 u_0 \cos \frac{2 \pi x}{\lambda} \quad (7.55')$$

Takýto vlnový stav nazývame stojatým vlnením alebo chvením. Ďalej si budeme všímať len stojaté vlnenie, ktorého amplitúda je daná rovnicou (7.55), pretože pre (7.55') by boli úvahy tie isté.

Body, pre ktoré platí  $\sin \frac{2 \pi x}{\lambda} = 0$ , ostávajú stále v pokoji, nekmítajú. Nazývame ich uzlami. Polohu  $n$ -tého uzla určíme z podmienky  $\sin \frac{2 \pi x}{\lambda} = 0$ , čiže  $\frac{2 \pi}{\lambda} x_n = n \pi \implies x_n = n \frac{\lambda}{2}$  vzdialenosť susedných uzlov je  $x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$ .

Body, ktoré kmítajú s maximálnou amplitúdou nazývame kmitňami, ich polohu určíme z podmienky  $|\sin \frac{2 \pi x}{\lambda}| = 1$ . Vzdialenosť susedných kmitní, podobne ako uzlov, je  $\frac{\lambda}{2}$ , vzdialenosť uzla od kmitne je  $\frac{\lambda}{4}$ . Pomery pri stojatom vlnení sú znázornené na obr. 7.18. Priebeh amplitúdy daný výrazom (7.55) je znázornený súvislou čiarou.



Obr. 7.18

Priebeh okamžitých výchyliek je pre tri rôzne časové okamihy znázornený orientovanými úsečkami a prerušovanou čiarou, udávajúcou okamžitú hodnotu výchyliek  $u(x, t)$  v danom časovom okamihu. Písmená K, U značia polohu kmitní a uzlov.

Zásadný rozdiel medzi postupnou a stojatou vlnou je tento: v postupnej vlne každý bod kmítá s rovnakou amplitúdou, ale kmity rôznych častíc prostredia

prebiehajú s rozličnými fázami. V ľubovoľnom okamihu niektoré častice majú maximálnu výchylku a súčasne existujú častice, ktoré práve prechádzajú rovnovážnou polohou, t.j. ich výchylka je nulová. V stojatej vlne všetky častice prechádzajú cez rovnovážnu polohu súčasne. Pre výchylku danú rovnicou (7.54) to bude, keď  $\sin \omega t = 0$ . Všetky častice v úseku medzi susednými uzlami kmitajú vo fáze. Body na opačných stranách od uzla kmitajú v opačných fázach (obr. 7.18). Dôležitý rozdiel medzi vlnením postupným a stojatým je, že pri stojatom vlnení sa nešíri energia.

Poznámka 1: Ak člen  $\frac{4\pi}{\lambda} l$  vo vzťahu (7.53) a (7.53') nezanedbáme, dostaneme pre amplitúdu stojateho vlnenia namiesto (7.55) a (7.55') vzťahy:

$$A(x) = 2 u_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (l - x) \quad (7.56)$$

$$A'(x) = 2 u_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (l - x) \quad (7.56')$$

z ktorých hneď vidíme, že pri odraze vlnenia od pevného konca tyče (pre ktoré platí (7.56)) musí vzniknúť stojaté vlnenie s uzlom na konci, pretože  $A(l) = 0$ . Pri odraze od voľného konca vzniká na konci tyče kmitňa, pretože z (7.56') vyplýva, že  $A'(l) = 1$ .

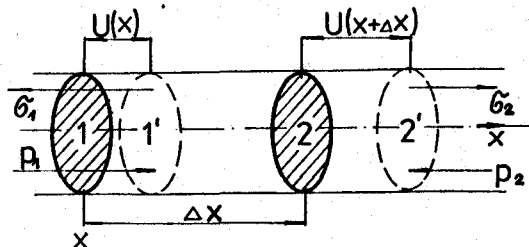
Poznámka 2: Mlčky sme predpokladali, že amplitúda  $u_0$  dopadajúcej a odrazenej  $u_0'$  vlny sú rovnaké. V skutočnosti prakticky vždy  $u_0' < u_0$ . Dopadajúcu vlnu môžeme vyjadriť ako superpozíciu vln s amplitúdami  $u_{01}$ ,  $u_{02}$ , pre ktoré  $u_{01} + u_{02} = u_0$ . Ak zvolíme  $u_{01} = u_0'$ , dopadajúca vlna s amplitúdou  $u_{01}$  s odrazenou vlnou dajú vznik stojatému vlneniu a ešte v smere osi  $x$  bude postupovať vlna s amplitúdou  $u_{02}$ . Výsledný vlnový stav je v tomto prípade daný superpozíciou stojatej vlny a vlny postupujúcej v smere osi  $x$ .

### 7.13 DYNAMIKA ŠÍRENIA SA VLNENIA

Pri vyšetovaní pohybu nejakého hmotného objektu za účinku sily  $\vec{F}$  treba riešiť pohybovú rovnicu  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ . Zrýchlenie  $\vec{a}$  je druhá časová derivácia polohového vektora, v našom prípade druhá derivácia výchylky častice z rovnovážnej polohy. Vyjadríme pôsobiacu silu v niektorých zaujímavých prípadoch a napíšeme príslušnú pohybovú rovnicu.

a) Pozdĺžne vlnenie v pružnej tyči

Majme tyč valcovitého tvaru s prierezom  $S$ , v ktorej sa šíri vlnenie. Zvolme časť tejto tyče, valček obmedzený v pokojovom stave rezmi 1, 2, ktorých vzdialenosť je  $\Delta x$  (obr. 7.19). V dôsledku existencie vlnenia v tyči prajdú prierezy 1, 2 do polôh 1', 2'. Celková sila pôsobiaca na zvolenú časť tyče



Obr. 7.19

je  $F = S(\sigma_2 - \sigma_1)$ , kde  $\sigma_1, \sigma_2$  sú napätia  $\left(\frac{F_1}{S}, \frac{F_2}{S}\right)$  v prierezoch 1, 2. Keďže sily pôsobia v jednej priamke (v osi  $x$ ), píšeme rovnicu v skalárnom tvare. Podľa Hookovho zákona napätie  $\sigma$  v tyči je priamo úmerné relatívnemu predĺženiu  $\varepsilon$ :

$$\sigma = \varepsilon E$$

kde  $E$  je modul pružnosti v ťahu. Relatívne predĺženie je  $\varepsilon = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$ , čo pre malé  $\Delta x$ , t.j.  $\Delta x \rightarrow 0$ , predstavuje deriváciu  $u$  podľa  $x$ , t.j.  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  a

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

Potom

$$F = SE \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right]$$

kde indexy 1, 2 označujú, že ide o derivácie v prierezoch 1, 2. Pre  $\Delta x \rightarrow 0$  je

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right] \Delta x = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \end{aligned}$$

Na vyšetřovanú časť tyče pôsobí teda sila  $F = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$ , a keďže  $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

a hmotnosť zvolenej časti tyče je  $\Delta m = S \Delta x \rho$ , kde  $\rho$  je merná hmotnosť, dostávame:

$$SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x = S \Delta x \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

z čoho

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.57)$$

Vidíme, že pohybová rovnica pre malý zvolený objem tyče vedie k parciálnej diferenciálnej rovnici druhého rádu, ktorú musí spĺňať rovnica vlnenia  $u(x, t)$ .

Pre priečne vlnenie šíriace sa tyčou platí podobná rovnica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.58)$$

kde  $G$  je modul pružnosti v šmyku.

#### b) Pozdĺžne vlnenie v kvapalinách a plynoch

Nech sa vlnenie šíri vo valci naplnenom kvapalinou alebo plynom. Na vysvetlenie pomerov znova použijeme obr. 7.19. Sila pôsobiaca na vybratý objem prostredia je  $F = S (p_1 - p_2)$ , kde  $p_1, p_2$  sú tlaky v prierezoch 1, 2. Nech tlak za pokoja je  $p$ . Zmenu tlaku spôsobenú vlnením nazývame akustickým tlakom. Označme ho  $p_a$ . Potom  $p_1 = p + p_{a1}$ ,  $p_2 = p + p_{a2}$ , a teda výsledná sila bude

$$F = S (p_{a1} - p_{a2}) = - S \frac{1}{\Delta x} (p_{a2} - p_{a1}) \Delta x$$

čo pre  $\Delta x \rightarrow 0$  dáva:

$$F = - S \frac{\partial p_a}{\partial x} \Delta x \quad (7.59)$$

Treba určiť pretlak  $p_a$ . Vyjdeme z definície koeficientu stlačiteľnosti  $\gamma$ , ktorý je definovaný ako relatívne zmenšenie objemu vyvolané jednotkovým zväčšením tlaku, t.j.  $\gamma = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$ . Pretlak  $p_a$  v rovnici (7.59) nie je nič iné, ako  $dp$  v definičnom vzťahu koeficientu stlačiteľnosti. Preto

$$p_a = - \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta V}{V} = - \frac{1}{\gamma} \frac{S \Delta u}{S \Delta x}$$

čo pre  $\Delta x \rightarrow 0$  dáva:

$$p_a = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.60)$$

Keď toto dosadíme do rovnice (7.59), dostávame:

$$\frac{s}{\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x = s \varrho \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

čiže

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\varrho \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.61)$$

Táto rovnica sa líši od rovníc (7.57) a (7.58) len konštantou pri  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

#### e) Priečne vlnenie v strune

Podobným postupom ako v predchádzajúcich prípadoch možno dostať výsledok, že pohybová rovnica zvolenej časti struny vedie k rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{P}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.62)$$

kde  $P$  je sila, ktorou je struna napnutá,  $\mu$  je hmotnosť pripadajúca na jednotkovú dĺžku struny.

### 7.14 VLNOVÁ ROVNICA

V predchádzajúcom článku sme ukázali, že rovnica vlnenia  $u(x,t)$  musí spĺňať diferenciálnu rovnicu úplne rovnakého tvaru bez ohľadu, v akom prostredí sa vlnenie šíri. Rovnice (7.57), (7.58), (7.61), (7.62) sa líšia len konštantou pri  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , vyjadrujúcou vlastnosťou prostredia.

Riešením uvedených rovníc je ľubovoľná funkcia argumentu  $t - \frac{x}{c}$ , kde  $c$  je rýchlosť šírenia sa vlnenia, t.j.  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ . Označme  $t - \frac{x}{c} = h$ . Ak použijeme pravidlo pre derivovanie zloženej funkcie, dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dh} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{df}{dh}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{df}{dh} \right) = \frac{d}{dh} \left( \frac{df}{dh} \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{d^2 f}{dh^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{dh} \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{df}{dh}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{c} \frac{df}{dh} \right) = \frac{d}{dh} \left( -\frac{1}{c} \frac{df}{dh} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = \\ & & &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dh^2} \end{aligned}$$

Ešte raz uvediem tie členy uvedených rovností, ktoré si máme všimnúť

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{dh^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dh^2}$$

z ktorých dostávame:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (7.63)$$

čo je parciálna diferenciálna rovnica druhého rádu, ktorej vyhovuje ľubovoľná funkcia argumentu  $t - \frac{x}{c}$ . Táto rovnica sa nazýva tiež vlnová rovnica. Je totožná s rovnicami (7.57), (7.58), (7.61) a (7.62). Riešením týchto rovníc bude teda ľubovoľná funkcia tvaru  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ , pritom člen pri  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  má význam štvorca rýchlosti šírenia sa vlnenia.

Rýchlosti šírenia sa vlnení v prípadoch, ktoré sme prebrali, sú postupne:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad \sqrt{\frac{1}{\rho \tau}}; \quad \sqrt{\frac{P}{\mu}} \quad (7.64)$$

Podobne sa možno presvedčiť, že funkcia  $f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ , ktorá popisuje šírenie sa rozruchu v opačnom smere, je tiež riešením vlnovej rovnice (7.63).

Všeobecné riešenie je superpozíciou týchto riešení, t.j.

$$u(x, t) = C_1 f\left(t - \frac{x}{c}\right) + C_2 f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

kde  $C_1, C_2$  sú ľubovoľné konštanty, ktoré treba určiť pre konkrétny prípad z počiatočných a okrajových podmienok.

Superpozíciou harmonických vlnení postupujúcich proti sebe je stojaté vlnenie, teda i výrazy popisujúce stojaté vlnenie

$$u(x, t) = u_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t \quad (7.65)$$

$$u(x, t) = u_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t \quad (7.65')$$

sú riešeniami vlnovej rovnice, ako sa možno presvedčiť priamym dosadením týchto výrazov do nej.

Poznámka: Doteraz uvedené vlnové rovnice platia pre vlnu postupujúcu v smere osi  $x$ . Ak vlna postupuje nejakým všeobecným smerom, vlnová rovnica bude mať tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

čo možno krátko písať i ako

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

kde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

je tzv. Laplaceov operátor.

## 7.15 CHVENIE TYČE

Ak v tyči vzbudíme rozruch, napr. krátkym úderom kladiva na jeden koniec tyče, ďalší pohyb bude spôsobený len vnútornými silami. Rozruch sa bude šíriť pozdĺž tyče, na jej konci sa odrazí, vznikne stojaté vlnenie (chvenie).

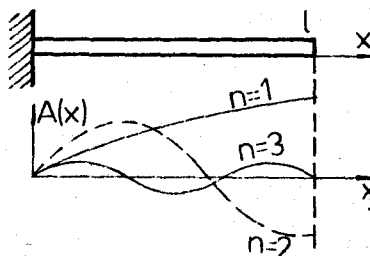
Vlnová dĺžka a frekvencia takto vzniknutého stojatého vlnenia závisí od okrajových podmienok. Vyšetříme teda, ako vplývajú okrajové podmienky na frekvenciu a vlnovú dĺžku stojatého vlnenia. Úvahy budeme aplikovať na pozdĺžne chvenie tyče, ale platia i pre chvenie vzdušného stĺpca, struny a iné prípady.



a) Tyč je upevnená na jednom konci (obr. 7.20)

Okrajové podmienky:

1. v mieste  $x = 0$  je tyč upevnená - musí tam byť uzol stojateho vlnenia,
2. koniec tyče ( $x = l$ ) je voľný, musí tam vzniknúť kmitňa.



Obr. 7.20

Z toho, ako názorne vidieť na obr. 7.20, vyplýva, že na dĺžku tyče pripadá nepárny počet štvrtín

$$l = (2n-1) \frac{\lambda}{4} \implies \lambda_n = \frac{4l}{2n-1} \quad (7.66)$$

kde  $n = 1, 2, 3, \dots$

Vlnovým dĺžkam  $\lambda_n$  prislúchajú frekvencie

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = (2n-1) \nu_1 \quad (7.67)$$

kde  $\nu_1 = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  je tzv. základná frekvencia prislúchajúca  $n = 1$ . Frekvencie prislúchajúce  $n = 2, 3, \dots$  sú vyššie harmonické frekvencie. Tyč upevnená na jednom konci teda môže chvieť len na frekvenciách rovných nepárnemu násobku základnej frekvencie. Vidíme, že frekvenčné spektrum je diskrétné.

Uvedeným okrajovým podmienkam vyhovuje riešenie vlnovej rovnice v tvare (7.65). Skutočne pre  $x = 0$  je  $u(x, t) = 0$ , pretože amplitúda stojateho vlnenia je daná sínusovou funkciou. Na konci tyče musí byť splnená podmienka

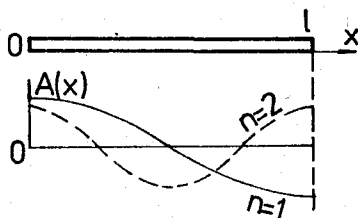
$$\left| \sin \frac{2\pi l}{\lambda_n} \right| = 1 \quad \frac{2\pi l}{\lambda_n} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \implies \lambda_n = \frac{4l}{2n-1}$$

čo je (7.66).

b) Tyč úplne voľná (obr. 7.21)

Okrajové podmienky:

1. v mieste  $x = 0$  je voľný koniec tyče - musí tam byť kmitňa,
2. druhý koniec je tiež voľný - musí tam byť kmitňa.



Obr. 7.21

Na dĺžku tyče pripadá celočíselný násobok  $\frac{\lambda}{2}$ . Teda

$$l = n \frac{\lambda}{2} \implies \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (7.68)$$

Vlnovým dĺžkam  $\lambda_n$  prislúchajú frekvencie

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = n \nu_1 \quad (7.69)$$

kde  $\nu_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  je základná frekvencia.

Teda v tomto prípade môže tyč chvieť na frekvenciách rovných celočíselnému násobku základnej frekvencie.

Videli sme, že tyč, v ktorej sme vzbudili vlnenie a potom je ponechaná sama na seba, chveje len na určitých frekvenciách, ktoré nazývame vlastnými frekvenciami. Keby chvenie tyče bolo spôsobené zdrojom harmonického vlnenia, tyč by vykonávala vynútené kmity. Frekvencia vlnenia v tyči sa rovná frekvencii zdroja. Ak vnútená sila pôsobí na koniec tyče, ktorý i za pôsobenia tejto sily môže považovať za voľný, rezonancia v tyči nastane pri frekvencii vnútenej sily rovnaj jednej z frekvencií vlastných kmitov tyče. Rezonančné chvenie telies môže byť také intenzívne, že môže viesť k ich rozrušeniu. Ak chceme zabrániť chveniu, musíme teleso upevniť v mieste kmitne. Upevnenie telesa v uzle nemá žiadny vplyv na prebiehajúce chvenie.

### 7.16 INTENZITA VLNENIA

Pri postupnom vlnení prostredím, postupuje zmena stavu prostredia vyvolaná zdrojom vlnenia. Jednou z praktického hľadiska najdôležitejších veličín súvisiacich so stavom prostredia je energia. Pri postupnom vlnení sa prenáša energia.

Množstvo energie, ktoré prejde za jednotku času cez plochu  $S$ , nazývame tokom energie cez túto plochu, alebo tiež tokom žiarenia  $P$  (žiarivým tokom)

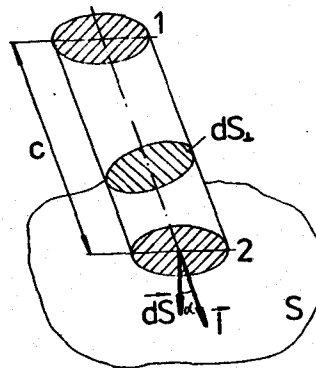
$$P = \frac{dW}{dt} \quad (7.70)$$

kde  $dW$  značí množstvo energie, ktoré prejde uvažovanou plochou  $S$  za čas  $dt$ . Žiarivý tok  $P$  sa v SI sústave meria vo wattoch.

Energiu, ktorá prejde za jednotku času cez jednotkovú plochu postavenú kolmo na smer postupu vlnenia, nazývame intenzitou vlnenia (žiarenia)  $I$ :

$$I = \frac{dP}{dS_{\perp}} \quad (7.71)$$

kde  $dP$  je žiarivý tok prechádzajúci cez plôšku  $dS$ , ktorej priemet do smeru kolmého na smer postupu vlnenia je  $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$ , ako je to znázornené na obr. 7.22.



Obr. 7.22

Ak intenzite vlnenia priradíme vektor rovnobežný so smerom postupu vlnenia, máme pre žiarivý tok podľa (7.71)

$$dP = I dS_{\perp} = \vec{I} \cdot d\vec{S} \quad (7.72)$$

Za jednu sekundu prejde plôškou  $dS$  (obr. 7.22) energia obsiahnutá vo valci obmedzenom prierezmi 1, 2, teda energia v objeme  $c \cdot dS_{\perp}$ .

Ak označíme písmenom  $w$  energiu v objemovej jednotke (čiže hustotu energie), máme  $dP = c dS_{\perp} w$ , a teda podľa (7.71)

$$I = \frac{dP}{dS_{\perp}} = c w \quad (7.73)$$

To platí všeobecne. Pre mechanické vlnenie je  $w$  rovné súčtu hustoty kinetickej a potenciálnej energie,  $w = w_k + w_p$ . Hustota kinetickej energie je zrejme  $w_k = \frac{1}{2} \rho v^2$ , kde  $\rho$  je merná hmotnosť prostredia,  $v$  je rýchlosť častíc prostredia daná vzťahom (7.52). Teda pre harmonické vlnenie

$$w_k = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 \sin^2 (\omega t - K x)$$

Môžeme ukázať, že hustota potenciálnej energie sa rovná hustote energie kinetickej, t.j.  $w_k = w_p$ . Potom celková hustota energie je

$$w = \rho \omega^2 u_0^2 \sin^2 (\omega t - K x)$$

Intenzita vlnenia

$$I = c w = c \rho \omega^2 u_0^2 \sin^2 (\omega t - K x) \quad (7.74)$$

je závislá od času. Vo väčšine prípadov predmetom záujmu je nie okamžitá hodnota intenzity vlnenia, ale jej stredná hodnota a nazývame ju intenzitou vlnenia. Keďže priemerná hodnota funkcie  $\sin^2(\omega t - K x)$  počas jednej periódy sa rovná  $\frac{1}{2}$ , pre strednú hodnotu intenzity vlnenia dostávame:

$$I_s = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 u_0^2 \quad (7.75)$$

## 7.17 ZVUKOVÉ VLNY

Dôležitý druh vlnenia sú akustické vlny (zvuk), t.j. také mechanické vlnenie šíriace sa pružným prostredím (plynom, kvapalinami, pevnými látkami), ktorého rozsah frekvencií je od 20 Hz do 20 000 Hz. V tomto rozsahu je ľudské ucho schopné vlnenie vnímať. V širšom slova zmysle stotožňujeme pojmy zvuk a mechanické vlnenie. Zvuk s kmitočtom nižším ako 20 Hz sa nazýva infrazvuk, zvuk s kmitočtom vyšším než 20 000 Hz je ultrazvuk.

Na náš sluchový orgán obyčajne dopadá vlnenie šíriace sa vzduchom. Zvuková vlna predstavuje šíriace sa zmeny tlaku. Tieto zmeny sú pomerne rýchle, takže ich možno považovať za adiabatické. Vo výraze (7.64) pre rýchlosť zvuku, ktorý tu znova uvádzame

$$c = \sqrt{\frac{1}{\gamma \rho}}$$

je teda koeficient  $\gamma$  adiabatickým koeficientom stlačiteľnosti. Určme ho. Pre adiabatický dej platí Poissonova rovnica (5.91)  $p V^{\gamma} = \text{const.}$  Jej diferenciálnym dostávame  $dp \cdot V^{\gamma} + \gamma p \cdot V^{\gamma-1} dV = 0$  z čoho  $\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma p}$  a koeficient stlačiteľnosti je

$$\gamma = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\gamma p}$$

Potom pre rýchlosť zvukových vln v plynnom prostredí máme

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (7.76)$$

kde pri odvodení posledného výrazu sme použili  $\rho = \frac{m}{V}$  a stavovú rovnicu  $p \cdot V = \frac{m}{M} RT$ .  $M$  je molárna hmotnosť,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ . Z (7.76) vidíme, že rýchlosť zvuku v plyne závisí od pomeru tlaku a hustoty plynu, a nie od veľkosti tlaku a hustoty osobitne. Pomer  $\frac{p}{\rho}$  je funkciou len teploty (ak zloženie vzduchu zostáva rovnaké). Podľa vzťahu (7.76) rýchlosť zvuku vo vzduchu nezávisí od vlnovej dĺžky, čo je experimentálne overené. Tak isto hodnota rýchlosti zvuku vypočítaná zo vzťahu (7.76) je v zhode s experimentálnymi údajmi. Rýchlosť zvuku vo vzduchu má pri  $t = 0^\circ \text{C}$  hodnotu  $c \approx 330$  m za sekundu, a teda frekvenciám zvukového rozsahu odpovedajúce vlnové dĺžky sú približne v rozmedzí od 15 m do 15 mm.

Vzťah (7.75) pre intenzitu vlnenia nie je v akustike vhodný, pretože obsahuje prakticky nemerateľnú veličinu - amplitúdu vlny  $u_0$ . Tento vzťah však možno prepísať do tvaru, v ktorom vystupuje merateľná veličina, a to akustický tlak  $p_a$ . Použitím (7.60) a vzťahu  $c = \sqrt{\frac{1}{\rho \gamma}}$  dostávame z (7.75)

$$I_s = \frac{p_{ao}}{2 \rho c} = \frac{p_e^2}{\rho c} \quad (7.77)$$

kde  $p_e = \frac{p_{ao}}{\sqrt{2}}$  je efektívna hodnota akustického tlaku.

Pri svojom postupe prostredím sa vlnenie zoslabuje, jeho intenzita klesá. Jedna z príčin tkvie priamo v definícii intenzity vlnenia (7.71). Keby sme totiž mali izotropný bodový zdroj vlnenia s výkonom  $P$ , vo vzdialenosti  $r$  od zdroja je intenzita vlnenia

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

t.j. klesá so štvorcem vzdialenosti. Je to preto, lebo vlnenie sa šíri rovnomerne na všetky strany v tvare guľových vln, a teda energia, ktorá prejde za jednotku času jednotkovou plochou, sa so vzdialenosťou znižuje (pretože plocha  $S = 4\pi r^2$  rastie).

Ale i v prípade, keď vlnenie postupuje len jediným smerom, t.j. veľkosť plochy  $S$ , cez ktorú vlnenie prechádza, je stále konštantná, nastáva zoslabenie zvuku v dôsledku vnútorného trenia, ktoré existuje pri prechode vlnenia prostredím. Ak v mieste  $x = 0$  bola intenzita zvuku  $I_0$ , v mieste  $x$  bude  $I(x)$

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} \quad (7.78)$$

kde  $\alpha$  je koeficient zoslabenia zvuku.

Veličina  $\alpha$  je pre plyny približne úmerná štvorcu frekvencie zvuku ( $\alpha \sim \nu^2$ ), teda zvuk menšej frekvencie (nižšie tóny) je pohlcovaný prostredím menej: počť ho na väčšiu vzdialenosť ako zvuk vyšších frekvencií (vysoké tóny). Veľmi silne sa vo vzduchu pohlcuje ultrazvuk. Intenzita vlnenia frekvencie  $\nu = 1$  MHz klesne na polovičnú hodnotu na vzdialenosti 2,5 cm vo vzduchu, vo vode na vzdialenosti okolo 14 m.

Pri dopade na stenu vlnenie čiastočne postupuje v stene, čiastočne sa odráža. Pomer intenzity dopadajúcej ( $I_0$ ) a odrazenej ( $I$ ) vlny  $a = \frac{I}{I_0}$  nazývame koeficientom zvukovej odrazivosti.

#### 7.18 HLADINA HLASITOSTI A HLADINA INTENZITY ZVUKU

Intenzitou zvuku (fyzikálnou intenzitou zvuku) rozumieme intenzitu vlnenia, ktoré je schopné vyvolať zvukový vnem. Vyjadrujeme ju v jednotkách  $\frac{W}{m^2}$  a je daná výrazom (7.75). Na charakterizovanie sluchového vnemu je však táto veličina málo vhodná, pretože intenzita vnemu nie je lineárnou funkciou fyzikálnej intenzity zvuku. Vzťah medzi popudom (fyzikálnou veličinou, ktorá

spôsobuje vnem) a intenzitou vnemu približne vyjadruje Weberov-Fechnerov psychofyzikálny zákon. Podľa neho subjektívna intenzita zvuku rastie lineárne s logaritmom fyzikálnej intenzity zvuku. Preto pre účely akustiky je výhodné zaviesť logaritmickú stupnicu pre fyzikálnu intenzitu zvuku. Veličinu, ktorá v logaritmickú stupnicu vyjadruje fyzikálnu intenzitu zvuku, nazývame hladinou intenzity zvuku (označíme ju písmenom B) a jej jednotka sa nazýva bel (skratka B). Podľa definície hladina intenzity zvuku B vyjadrená v beloch je

$$B = \log \frac{I}{I_0} \quad (7.79)$$

kde  $I_0$  je fyzikálna intenzita zvuku, ktorého hladina intenzity je  $B = 0$ , pričom  $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$  je prahová intenzita zvuku čistého tónu s frekvenciou 1000 Hz, t.j. také fyzikálna intenzita, ktorú ucho práve začína vnímať. V praxi sa používa jednotka decibel (skratka dB). Pre hladinu intenzity B vyjadrenú v decibeloch teda platí:

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \left( \frac{P_e}{P_{e0}} \right)^2 = 20 \log \frac{P_e}{P_{e0}} \quad (7.80)$$

kde sme použili vyjadrenie  $I$  pomocou akustického tlaku (7.77).  $P_{e0}$  je prahová hodnota akustického tlaku pre tón frekvencie 1000 Hz. Treba mať na pamäti, že veličina "hladina intenzity" vyjadruje fyzikálnu intenzitu zvuku, ale v stupnici, v ktorej vzťah medzi subjektívnym vnemom a fyzikálnou intenzitou zvuku (vyjadrenou v tejto stupnici) by mal byť lineárny, ak platí Weberov-Fechnerov zákon.

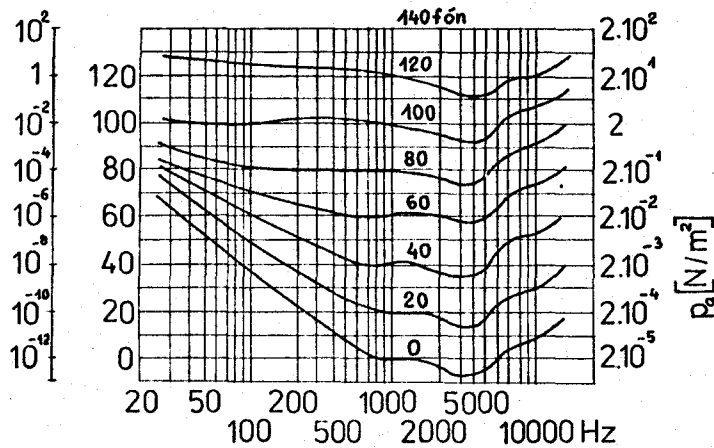
Pomery sa komplikujú ďalej tým, že citlivosť ľudského ucha je závislá od frekvencie vnímaného zvuku. Prahová intenzita vlnenia je funkciou frekvencie. Aby sa mohli subjektívne porovnávať zvuky rôznych frekvencií, volí sa tón frekvencie 1000 Hz za porovnávací (referenčný) tón. Hladinu intenzity referenčného tónu nazývame hladinou hlasitosti  $L$ , jej jednotkou je fón (skratka Ph). Definujeme:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 20 \log \frac{P_e}{P_{e0}} \quad (7.81)$$

kde za prahovú intenzitu porovnávacieho tónu sa dohodou zvolila hodnota  $I_0 = 10^{-12} W m^{-2}$ . Pre frekvenciu 1000 Hz je teda hodnota intenzity zvuku vyjadrená v decibeloch, rovná hladine hlasitosti vyjadrenej vo fónoch.

Pre iné kmitočty ako 1000 Hz treba hladinu hlasitosti určiť subjektívnym porovnávaním s tónom 1000 Hz.

Závislosť hladiny hlasitosti tónov ľubovoľnej frekvencie od ich hladín intenzity sa určila ako stredná hodnota pre veľký počet vyšetovaných osôb. Takto získané krivky rovnakej hlasitosti sú znázornené na obr. 7.23, na ktorom vidieť príslušné hodnoty intenzity zvuku a akustického tlaku.



Obr. 7.23

Subjektívnu mieru zvukového vnemu nazývame hlasitosťou (N). Jej jednotkou je son. Hlasitosť súvisí pravdepodobne s počtom nervových vzruchov, ktoré daný zvuk budí za jednotku času.

Podľa definície hlasitosť jeden son má tón frekvencie 1000 Hz pri hladine hlasitosti 40 Ph. Dva sony má zvuk, ktorý sa javí pozorovateľovi s normálnym sluchom dvojnásobne hlasitý atď.

## 7.19 ULTRAZVUK

Všetko, čo sme povedali o zvukových vlnách, platí pre ultrazvuk, avšak veľký rozdiel medzi hodnotami vlnovej dĺžky zvukových a ultrazvukových vln vedie k tomu, že správanie ultrazvukových vln sa v niektorých ohľadoch podstatne líši: napr. ľahko ich možno nasmerovať do úzkeho zväzku lúčov, možno generovať ultrazvuky veľkých intenzít, poriadku  $10^6 \text{ W m}^{-2}$  (pre porovnanie: intenzita zvuku silne reprodukovanej hudby je  $10^{-4} \text{ W m}^{-2}$ ). Ultrazvukové vlny javia menší ohyb ako obyčajné zvukové vlny, pri ich odraze platí pre ne zákon odrazu, podobne ako pre svetlo.

Ultrazvukové vlny majú široké praktické využitie. Malá absorpcia ultrazvuku vo vode umožňuje zisťovať prekážky pod vodou, mapovať morské dno. Ultra-



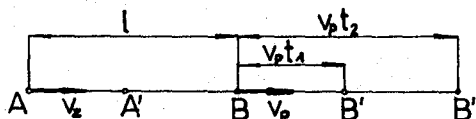
zvukové vlny umožňujú zisťovať kazy v materiáli. Využívajú sa na to jednak zákonitosti pre odraz ultrazvukových vln od nehomogenít prostredia, jednak zákon absorpcie (7.78). Ultrazvukové vlny uľahčujú dokonalejší rozptyl drobných častíc nejakej látky v kvapaline. Umožňujú spájkovať hliník, pretože rozrušujú vrstvu kysličníka, ktorá znemožňuje spájkovanie. Umožňujú opracúvať najtvrdšie látky, napr. vŕtať otvory do tvrdých kovov, keramiky atď.

Na generáciu ultrazvukových vln sa využíva piezoelektrický alebo magnetostrikčný jav.

## 7.20 DOPPLEROV JAV

Keď sa zdroj vlnenia a pozorovateľ (detektor vlnenia) pohybujú vzhľadom na hmotné prostredie, ktorým sa šíri vlnenie (zvuk), a pohybujú sa i voči sebe navzájom, frekvencia vlnenia meraná pozorovateľom sa líši od frekvencie vlnenia vysielaného zdrojom. Tento jav nazývame Dopplerovým javom. Možno ho pozorovať v mnohých prípadoch, napr. výšku tónu zvuku, ktorý produkuje siréna sanitky, vnímame pri približovaní sa auta k nám ako vyššiu voči tej, ktorú by sme vnímali v prípade, že auto je voči nám v pokoji. Pri vzdalovaní auta je výška tónu, vnímaná pozorovateľom, menšia.

Hľadáme súvislosť medzi frekvenciou vlny vysielanou zdrojom Z a nameranou pozorovateľom P v prípade, že pozorovateľ a zdroj sa pohybujú po tej istej priamke (obr. 7.24).



Obr. 7.24

Uvedomme si, že rýchlosť šírenia sa vlnenia nezávisí od pohybu zdroja, ale len od vlastností prostredia, v ktorom sa vlnenie šíri. Nech v čase  $t = 0$ , keď je zdroj v bode A a pozorovateľ v bode B, vyšle zdroj krátky signál. Tento signál zachytí pozorovateľ v čase  $t_1$ , pričom sa nachádza v bode B'. Za čas  $t_1$  pozorovateľ prešiel vzdialenosť  $v_p t_1$ , signál vzdialenosť  $l + v_p t_1$ . Táto vzdialenosť je  $ct_1$ , kde  $c$  je rýchlosť šírenia sa signálu vzhľadom na prostredie. Teda

$$ct_1 = l + v_p t_1 \implies t_1 = \frac{l}{c - v_p}$$

Nech v čase  $t = T$ , keď je zdroj v bode  $A$ , vyšle zdroj druhý signál. Tento dorazí k pozorovateľovi (do bodu  $B''$ ) v čase, ktorý označíme  $t_2$ . Čas potrebný na to, aby signál dosiahol pozorovateľa, je  $t_2 - T$  a za tento čas signál prejde vzdialenosť  $(1 - v_2 T) + v_p t_2$ . Táto vzdialenosť je tiež rovná  $c(t_2 - T)$ . Teda

$$c(t_2 - T) = 1 - v_2 T + v_p t_2 \implies t_2 = \frac{1 + (c - v_2) T}{c - v_p}$$

Časový interval medzi príchodom signálov k pozorovateľovi je

$$T' = t_2 - t_1 = \frac{c - v_2}{c - v_p} T$$

Ak zdroj vysiela sled signálov v rovnakých časových intervaloch  $T$ , alebo vysiela spojitou harmonickú vlnu s periódou  $T$ , pozorovateľ ich prijíma s frekvenciou  $\gamma' = \frac{1}{T'}$ :

$$\gamma' = \frac{c - v_p}{c - v_z} \gamma \quad (7.82)$$

kde  $\gamma$  je frekvencia signálov alebo frekvencia vlnenia vysiellaného zdrojom.

Keď  $v_p$  a  $v_z$  sú oveľa menšie ako  $c$ , čiže ak

$$\frac{v_z}{c} \ll 1, \quad \frac{v_p}{c} \ll 1$$

výraz (7.82) možno zjednodušiť. Môžeme ho zapísať v tvare

$$\gamma' = \frac{1 - \frac{v_p}{c}}{1 - \frac{v_z}{c}} \gamma = \left(1 - \frac{v_p}{c}\right) \left(1 - \frac{v_z}{c}\right)^{-1} \gamma$$

Druhú zátvorku rozvineme podľa binomickej vety a zanedbáme všetky členy druhého a vyšších poriadkov, čiže

$$\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)^{-1} \approx \left(1 + \frac{v_z}{c}\right)$$

Potom

$$\gamma' = \left(1 - \frac{v_p}{c}\right) \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \gamma = \left(1 - \frac{v_p}{c} + \frac{v_z}{c} - \frac{v_z v_p}{c^2}\right) \gamma$$

Posledný člen v zátvorke je druhého poriadku, zanedbáme ho. Dostaneme:

$$\gamma' = \left(1 - \frac{v_p - v_z}{c}\right) \gamma = \left(1 - \frac{v_{pz}}{c}\right) \gamma \quad (7.83)$$

kde  $v_{pz} = v_p - v_z$  je relatívna rýchlosť pozorovateľa vzhľadom na zdroj.

Ak smer šírenia sa vlnenia a smer relatívnej rýchlosti  $v_{pz}$  nie sú totožné, ale zvierajú uhol alfa, treba v (7.83) brať len zložku rýchlosti  $v_{pz}$  spadajúcu do smeru šírenia sa vlnenia, čiže  $v_{pz} \cos \alpha$ .

Potom

$$\gamma' = \left(1 - \frac{v_{pz} \cos \alpha}{c}\right) \gamma \quad (7.84)$$

Výrazy (7.83) a (7.84) sú platné za predpokladu, že

$$\frac{v_z}{c} \ll 1, \quad \frac{v_p}{c} \ll 1$$

i pre elektromagnetické vlnenie, t.j. aj pre svetlo, hoci úvahy robené pri odvodzovaní vzťahu (7.82) sú pre elektromagnetické vlnenie neprípustné a vzťah (7.82) pre elektromagnetické vlnenie neplatí. Vzťah (7.83), prípadne (7.84) je dôsledkom Lorentzových transformácií za aproximácie  $v_z \ll c$ ,  $v_p \ll c$ .

Zo vzťahu (7.83) vidieť, že frekvencia vlnenia zaznamenaná pozorovateľom sa líši od frekvencie vlnenia vysielaného zdrojom, ak zdroj a pozorovateľ sú v relatívnom pohybe. Pri ich vzdalovaní zaznamenaná pozorovateľ nižšiu frekvenciu (a k tomu prislúchajúcu väčšiu vlnovú dĺžku), pri približovaní frekvenciu vyššiu (menšiu vlnovú dĺžku).

Dopplerov jav sa využíva napr. pri štúdiu pohybu hviezd. Pozorovalo sa, že vlnová dĺžka svetla pochádzajúceho z hviezd, je väčšia, ako je vlnová dĺžka svetla vyžadovaného príslušnými atómami, keď sú v pokoji. Tento jav nazývame červeným posuvom, pretože vlnová dĺžka vyšetrovaného svetla je posunutá k červenej hranici viditeľného svetla. Z tohto posuvu usudzujeme, že Vesmír sa rozpína. Zo zmeny vlnovej dĺžky možno určiť rýchlosť hviezd.

Vo veľkom meradle sa využíva Dopplerov jav na meranie rýchlosti prúdenia kvapalín. Drobné nečistoty rozptýlené v kvapaline odrážajú svetlo z lasera, ktorým prúdiacu kvapalinu osvetľujeme. Frekvencia odrazeného svetla závisí od rýchlosti častice, na ktorej nastal odraz. Zo zmeny frekvencie svetla možno určiť rýchlosť prúdenia kvapaliny.

## 7.21 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNIENIE. VLNOVÁ ROVNICA PRE ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

Že elektromagnetické pole sa môže šíriť ako vlnenie, vieme z každodennej skúsenosti. Elektromagnetické vlny vysielané televíznou alebo rozhlasovou anténou vyvolávajú v prijímacej anténe elektromotorické napätie, ktoré televízny alebo rozhlasový prijímač spracúva. Existenciu elektromagnetických vln prvý experimentálne overil Hertz koncom minulého storočia. Pred experimentálnym potvrdením existencie elektromagnetických vln ich existenciu predpovedal Maxwell, ako dôsledok rovníc pre elektromagnetické pole, tzv. Maxwellových rovníc (pozri stať 6.5.5).

Videli sme, že ak sa má zmena nejakej veličiny šíriť ako vlna, musí vyhovovať vlnovej diferenciálnej rovnici (7.63). Ukážeme, že tejto rovnici vyhovuje intenzita elektrického poľa  $\vec{E}$  a indukcia magnetického poľa  $\vec{B}$ . Obmedzíme sa na izotropné a homogénne dielektrikum (t.j. také, v ktorom materiálové konštanty  $\epsilon$ ,  $\mu$  sú skalárne veličiny nezávislé od súradníc), v ktorom nie sú voľné náboje ( $\rho = 0$ ). Maxwellove rovnice pre takéto prostredie sú:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.85)$$

pritom platia materiálové vzťahy:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (7.86)$$

Derivovaním poslednej z rovníc (7.85) podľa času a použitím ostatných rovníc (7.85) postupne dostávame:

$$\begin{aligned} \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = - (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}) = \\ &= \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

t.j.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \Delta \vec{E} \quad (7.87)$$

čo je vlnová rovnica pre intenzitu elektrického poľa.  $\Delta$  značí Laplaceov operátor. Podobne môžeme odvodiť vlnovú rovnicu pre indukciu magnetického poľa:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \Delta \vec{B} \quad (7.87')$$

Teda elektromagnetické pole sa môže v priestore vyplnenom dielektrikom (i vákuom) šíriť. Rýchlosť šírenia sa elektromagnetického vlnenia je

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (7.88)$$

Ak vyjadríme materiálové konštanty  $\epsilon$ ,  $\mu$  pomocou ich relatívnych hodnôt  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ , t.j.  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ,  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , kde  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  sa vzťahujú na vákuum, rýchlosť šírenia sa elektromagnetického vlnenia môžeme vyjadriť pomocou jeho rýchlosti vo vákuu

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (7.89)$$

kde  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$  je index lomu daného prostredia a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (7.90)$$

je rýchlosť elektromagnetických vln vo vákuu. Keďže svetlo je tiež elektromagnetické vlnenie,  $c$  je tiež rýchlosť svetla vo vákuu. Najnovšie merania rýchlosti svetla udávajú preň hodnotu

$$c = (299\,792\,456,2 \pm 1,1) \text{ m s}^{-1}$$

a relatívnou presnosťou poriadku  $10^{-8}$ . Pre bežné účely stačí používať približnú hodnotu  $3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

## 7.22 ROVINNÁ ELEKTROMAGNETICKÁ VLNA

Veličiny, popisujúce elektromagnetické pole, t.j.  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , nie sú navzájom nezávislé. Ich súvis je daný Maxwellovými rovnicami (7.85). Pri odvodzovaní vlnovej rovnice sa tento súvis stratil. Dostali sme dve vlnové rovnice: jed-

nu pre  $\vec{E}$ , druhú pre  $\vec{B}$ . Podrobnejšie vyšetrovanie Maxwellových rovníc vedie k nasledujúcim výsledkom:

1. Vektory intenzity elektrického poľa  $\vec{E}$  a indukcie magnetického poľa  $\vec{B}$  sú kolmé na smer šírenia sa vlnenia. Elektromagnetické vlnenie je teda transverzálne.
2. Vektory  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  sú navzájom kolmé a kmitajú s rovnakou fázou. Pritom platí  $B = \sqrt{\epsilon \mu} E$ .
3. Ak  $\vec{n}$  je jednotkový vektor v smere šírenia sa elektromagnetického vlnenia, vektory  $\vec{n}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  v tomto poradí tvoria osi pravotočivého pravouhlého súradného systému. Teda pre  $\vec{B}$  platí:

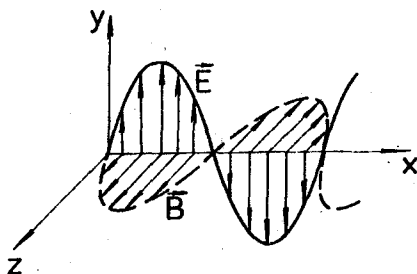
$$\vec{B} = \sqrt{\epsilon \mu} (\vec{n} \times \vec{E}) \quad (7.91)$$

Keďže veličiny  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  súvisia, stačí pracovať len s jednou z týchto veličín (väčšinou s  $\vec{E}$ , najmä v optike, pretože zrakový vnem spôsobuje elektrická zložka elektromagnetickej vlny).

Keď sa priestorom šíri rovinná elektromagnetická vlna, veličinu  $E$  v čase  $t$  a v mieste danom polohovým vektorom  $\vec{r}$  možno vyjadriť v tvare (7.50)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r}) \quad (7.92)$$

Ak amplitúda vlny,  $\vec{E}_0$ , má stále ten istý smer, vektor elektrickej intenzity kmitá stále v jednej rovine. Vlna je lineárne polarizovaná. Pomery v harmonickej elektromagnetickej vlny sú znázornené na obr. 7.25. Vektor  $\vec{E}$  kmitá stále v rovine  $xy$ ,  $\vec{B}$  v rovine  $xz$ .



Obr. 7.25

Ak  $\vec{E}_0$  sa rovnomerne otáča okolo smeru šírenia sa vlnenia, vlna je kruhovo polarizovaná (ak  $E_0 = \text{const}$ ). Vektor  $\vec{E}$  svojím koncovým bodom opisuje skrutkovicu. Ak priemet koncového bodu vektora  $\vec{E}$  do roviny kolmej na smer šírenia sa vlnenia opisuje elipsu, hovoríme, že vlna je elipticky polarizovaná.

V prípade, že smer vektora  $\vec{E}_0$  sa mení s časom náhodne, vlna je nepolarizovaná.

### 7.23 SPEKTRUM ELEKTROMAGNETICKÝCH VÍŇ

Rozsah frekvencií (a im odpovedajúcich vlnových dĺžok) elektromagnetických víŇ je veľmi veľký. Je zvykom triediť elektromagnetické vlnenie podľa vlnových dĺžok takto:

1. Rádiofrekvenčné vlny. Rozsah ich vlnových dĺžok je od niekoľko kilometrov do 0,3 m. Používajú sa na prenos rádiových a televíznych signálov. Sú buďdené elektronickými zariadeniami.
2. Mikrovlny. Rozsah ich vlnových dĺžok je (0,3 ÷ 0,001) m. Používajú sa v radarovej technike a iných komunikačných systémoch. Sú buďdené elektronickými zariadeniami.
3. Infračervené žiarenie. Rozsah vlnových dĺžok je ( $10^{-3}$  ÷  $7,8 \cdot 10^{-7}$ ) m. Tieto vlny vyžarujú molekuly a rozžeravené tuhé telesá.
4. Viditeľné žiarenie - svetlo. Rozsah vlnových dĺžok je ( $7,8 \cdot 10^{-7}$  ÷  $3,8 \cdot 10^{-7}$ ) m. Vlny spadajúce do tejto spektrálnej oblasti vyžarujú atómy a rozžeravené telesá.
5. Ultrafialové lúče. Rozsah vlnových dĺžok je ( $3,8 \cdot 10^{-7}$  ÷  $6,10^{-10}$ ) m. Sú vyžarované atómami.
6. Žiarenie X. Rozsah vlnových dĺžok je ( $10^{-9}$  ÷  $6 \cdot 10^{-12}$ ) m. Podľa svojho objaviteľa Röntgena sa nazývajú aj röntgenovým žiarením. Vznikajú pri prudkom zabrzdení elektrónov (brzdné žiarenie) a sú tiež vyžarované atómami (charakteristické žiarenie). Využívajú sa v medicíne, priemysle a vede.
7. Žiarenie gama. Rozsah vlnových dĺžok je ( $10^{-10}$  ÷  $10^{-14}$ ) m. Sú vyžarované z jadier atómov, najmä pri rádioaktívnom rozpade alebo pri jadrových reakciách. Sú veľmi prenikavé a, tak isto ako žiarenie X, vyvolávajú nepriaznivé efekty v ľudskom organizme.

### 7.24 INTENZITA ELEKTROMAGNETICKÉHO VLNENIA

Pre intenzitu vlnenia sme odvodili vzťah (7.73)  $I = c w$ , kde  $w$  je hustota energie vlnenia,  $c$  - rýchlosť šírenia sa vlnenia. V tomto prípade je hustota energie elektromagnetického poľa  $w = w_e + w_m$ .  $w_e$ ,  $w_m$  sú hustoty energie elektrického a magnetického poľa. Podľa (6.49) a (6.164)

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2; \quad w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

Keďže v elektromagnetickej vlne  $B = \sqrt{\epsilon\mu} E$ , je

$$w_m = \frac{1}{2} \mu \frac{B^2}{\mu^2} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

a teda hustota energie elektromagnetického poľa je

$$w = w_e + w_m = \epsilon E^2$$

Potom intenzita elektromagnetického vlnenia (intenzita žiarenia) je

$$I = c \epsilon E^2 \quad (7.93)$$

Pre rovinnú elektromagnetickú vlnu postupujúcu v smere osi  $x$  je

$$I = c \epsilon E_0^2 \cos^2 \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (7.94)$$

Intenzita elektromagnetického vlnenia sa teda s časom mení. Frekvencia vlnenia je, najmä vo viditeľnej oblasti spektra, taká veľká ( $\nu \approx 5 \cdot 10^{14}$  Hz), že žiadny detektor nemôže zaregistrovať časový priebeh (7.94). Detektory, vrátane nášho oka, registrujú strednú hodnotu tejto veličiny za čas veľmi dlhý voči perióde  $T = \frac{1}{\nu}$ , čiže registrujú hodnotu

$$I_s = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} I dt = \langle I \rangle = c \epsilon \langle E^2 \rangle \quad (7.95)$$

Intenzitou elektromagnetického vlnenia budeme rozumieť túto strednú hodnotu a budeme ju jednoducho označovať písmenom  $I$  bez indexu  $s$ . Lomené zátvorky v (7.95) znamenajú iné označenie pre časovú strednú hodnotu.

Pre rovinnú elektromagnetickú vlnu bude teda

$$\begin{aligned} I &= c \epsilon E_0^2 \left\langle \cos^2 \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \right\rangle = c \epsilon E_0^2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left[ \frac{1}{2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \cos 2 \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \right] dt = c \epsilon E_0^2 + \\ &+ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{1}{2} \cos 2 \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) dt \end{aligned}$$

Keďže hodnota integrálu v poslednom výraze má vždy konečnú veľkosť, limita tohto výrazu má hodnotu 0 a

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon E_0^2 \quad (7.96)$$



## 8. Vlnová optika

### 8.1 ÚVOD

Optika je časť fyziky, ktorá sa zaoberá štúdiom javov súvisiacich so svetlom, a to najmä s jeho vznikom, povahou, s jeho šírením sa priestorom a s jeho interakciou s prostredím. Ako sa už spomenulo v predchádzajúcej kapitole, svetlo je elektromagnetické vlnenie, ktoré vnímame zrakom. V širšom slova zmysle svetlom rozumieme i blízke infračervené a ultrafialové žiarenie.

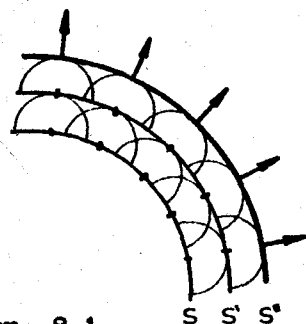
Keďže vlnová dĺžka svetla je malá (400 - 750 nm), možno šírenie sa svetla považovať v prvom priblížení za priamočiare, ak si všimame jeho prechod okolo veľkých prekážok alebo cez veľké otvory. Na predpoklade o priamočiarom šírení sa svetla je založená časť optiky, tzv. geometrické optika. Zákony geometrickej optiky platia len približne. Čím menšími otvormi svetlo prechádza, tým zreteľnejšie sa prejavuje vlnová povaha svetla. Tú časť optiky, ktorá skúma svetlo ako vlnenie, nazývame vlnovou optikou. V nasledujúcej kapitole sa dozvieme, že svetlo má tiež kvantovú povahu. Z tohto hľadiska ho skúma kvantová optika.

### 8.2 HUYGENSOV PRINCÍP. FRESNEL-KIRCHHOFFOV DIFRAKČNÝ VZOREC

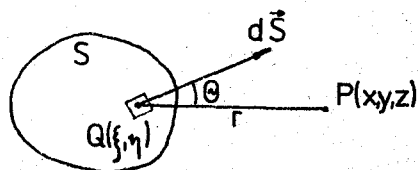
Šírenie sa elektromagnetického vlnenia je úplne popísané riešením vlnovej rovnice (7.87) pri zadaných okrajových podmienkach. Avšak len veľmi málo konkrétnych úloh pri štúdiu ohybu svetla na prekážkach bolo riešené presne, na základe vlnovej rovnice. V úplnej väčšine konkrétnych praktických úloh treba siahnuť po približných metódach, z ktorých najväčšiu rolu hrá Huygensova-Fresnelova-Kirchhoffova teória. Najjednoduchšie, ale zato najmenej úplne popisuje šírenie sa svetla Huygensov princíp. Umožňuje určiť čelo vlny v čase  $t + \Delta t$ , ak ho poznáme v čase  $t$ . Podľa Huygensovho princípu každý bod čela vlny možno považovať za zdroj rozruchu, z ktorého sa vlnenie šíri v tvare guľových vln na všetky strany. Za čas  $\Delta t$  sa vytvorí guľová vlnoplocha polomeru  $c \cdot \Delta t$ , kde  $c$  je rýchlosť šírenia sa vlnenia. Čelo vlny je potom obálka elementárnych vlnoploch. Situáciu ozrejmuje obr. 8.1, kde  $S$  je čelo vlny v čase  $t$ ,  $S'$  v čase  $t = t + \Delta t$ ,  $S''$  v čase  $t + 2 \Delta t$ . Smer postupu vlny

nenia je kolmý na čelo vlny (na obrázku je tento smer znázornený orientovanými úsečkami). Huygensov princíp umožňuje konštrukciu čela vlny, a teda i smer postupu vlnenia, nehovorí však nič o intenzite vlnenia. Platí tak pre mechanické, ako i pre elektromagnetické vlnenie.

Huygensov princíp neskôr doplnil Fresnel predpokladom, že výsledný vlnový stav v nejakom bode je daný superpozíciou všetkých elementárnych vln, a to i s prihliadnutím na fázu elementárnych vln v danom bode. Čiže prihliada sa na interferenciu elementárnych vln.



Obr. 8.1



Obr. 8.2

Prísne matematický základ tomuto Fresnelovmu predpokladu dal Kirchhoff, ktorý odvodil vzťah pre amplitúdu a fázu vlny v nejakom bode  $P(x, y, z)$ , ak je známe rozloženie amplitúdy a fázy v každom bode  $Q(\xi, \eta)$  na nejakej ploche  $S$  (obr. 8.2).

Kmity intenzity elektrického poľa v bode  $Q(\xi, \eta)$  môžeme vyjadriť (ak neprihliadame na ich polarizáciu, t.j. neberieme do úvahy smer kmitov) ako

$$E(\xi, \eta, t) = E_0(\xi, \eta) \cos [\omega t - \Phi(\xi, \eta)]$$

kde  $E_0(\xi, \eta)$  je amplitúda a  $\Phi(\xi, \eta)$  fázová konštanta. Tento výraz môžeme písať:

$$\begin{aligned} E_0(\xi, \eta) \cos [\omega t - \Phi(\xi, \eta)] &= \text{Re} \left\{ E_0 e^{i(\omega t - \Phi)} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ E_0 e^{-i\Phi} \cdot e^{i\omega t} \right\} \end{aligned}$$

kde znak  $\text{Re} \left\{ \right\}$  značí, že treba brať len reálnu časť výrazu uvedeného v zátvorkách.

Veličinu

$$u(\xi, \eta) = E_0(\xi, \eta) \cdot e^{-i\Phi(\xi, \eta)} \quad (8.1)$$

nazývame komplexnou amplitúdou kmitov v bode  $Q(\xi, \eta)$ . Podobne

$$u_p(x,y,z) = E_0(x,y,z) e^{-i\phi(x,y,z)}$$

je komplexná amplitúda kmitov v bode P. Vo výraze pre komplexnú amplitúdu je zahrnutá ako reálna amplitúda  $E_0$ , tak i fáza  $\phi$ .

Fresnell-Kirchhoffov difrakčný vzorec

$$u_p(x,y,z) = \int_S \frac{u(\xi,\eta) e^{iKr}}{r} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2} dS \quad (8.2)$$

umožňuje určiť komplexnú amplitúdu v ľubovoľnom bode  $P(x,y,z)$ , ak je známa jej hodnota v každom bode na ploche S. V (8.2) treba integrovať po celej ploche, ktorá prispieva k vlnovému stavu v bode P. Plocha S je napr. plocha otvoru v tienidle. Význam veličín  $r$ ,  $\theta$ ,  $dS$  je zrejmý z obr. 8.2,  $K = 2\pi/\lambda$  je absolútna hodnota vlnového vektora,  $i = \sqrt{-1}$  je imaginárna jednotka.

Výraz

$$\frac{u(\xi,\eta) e^{iKr}}{r}$$

v integrále (8.2) popisuje guľovú vlnu, a teda integrál (8.2) popisuje superpozíciu guľových vln, pričom sa berie do úvahy aj orientácia plochy.

### 8.3 INTERFERENCIA SVETLA

Ak dva (alebo viac) vlnových pohybov prebieha súčasne v tom istom mieste priestoru, dochádza k ich superpozícii. Amplitúda výsledného vlnenia v danom mieste závisí od rozdielu fáz dvoch vln v tomto mieste. Ak sa pritom rozdiel týchto fáz v ľubovoľnom bode s časom nemení, dostávame statické rozloženie amplitúdy v priestore. Budú existovať miesta s maximálnou a minimálnou amplitúdou. Takéto skladanie vlnení nazývame interferenciou. Pri interferencii svetla pozorujeme svetlé a tmavé pružky, ktoré nazývame interferenčnými pružkami. Ak interferujúce svetlo nie je monochromatické, v dôsledku interferencie pozorujeme také javy, ako je sfarbenie mydlových bublín, typické sfarbenie tenkých olejových vrstiev atď. Hoci skladanie vlnení nastáva vždy, keď sa v danom prostredí šíria dve (alebo viac) vlny, pozorovateľný, t.j. statický interferenčný jav vzniká len pri splnení určitých podmienok. Niektoré z týchto podmienok vyšetríme v nasledujúcej časti.

### 8.3.1 Podmienky pre vznik interferencie svetla

a) Aby ďalší výklad nebol rušený matematickými výpočtami, uvedieme najprv niektoré vzťahy, ktoré budeme potrebovať.

Vzťahom (7.95) sme zaviedli časovú strednú hodnotu veličiny. Vypočítame stredné hodnoty niektorých výrazov:

$$\begin{aligned} 1. \quad \langle \cos (\omega t + \alpha) \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos (\omega t + \alpha) dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sin (\omega \tau + \alpha) - \sin \alpha}{\tau \omega} \end{aligned}$$

Keďže  $|\sin (\omega \tau + \alpha) - \sin \alpha| \leq 2$ , limita posledného výrazu je rovná nule. Teda

$$\langle \cos (\omega t + \alpha) \rangle = 0 \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \langle \cos (\omega_1 t + \alpha_1) \cdot \cos (\omega_2 t + \alpha_2) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \cos [(\omega_2 - \omega_1) t + \\ &+ \alpha_2 - \alpha_1] \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos [(\omega_1 + \omega_2) t + \alpha_1 + \alpha_2] \rangle \end{aligned}$$

Ak  $\omega_1 \neq \omega_2$ , podľa vzťahu (8.3) sú oba členy predchádzajúcej rovnice rovné nule.

Ak  $\omega_1 = \omega_2$ , druhý člen predchádzajúcej rovnice je rovný podľa (8.3) nule a z prvého člena máme

$$\frac{1}{2} \langle \cos (\alpha_2 - \alpha_1) \rangle$$

V prípade, že  $\alpha_2 - \alpha_1$  je konštanta nezávislá od času,

$$\frac{1}{2} \langle \cos (\alpha_2 - \alpha_1) \rangle = \frac{1}{2} \cos (\alpha_2 - \alpha_1)$$

pretože stredná hodnota z konštanty sa rovná tejto konštante. Ak však  $\alpha_2 - \alpha_1$  sa s časom náhodne mení, takže s rovnakou pravdepodobnosťou nedobúda každú hodnotu z intervalu  $[0, 2\pi]$ ,  $\cos (\alpha_2 - \alpha_1)$  rovnako často nedobúda hodnoty kladné ako záporné a stredná hodnota  $\langle \cos (\alpha_2 - \alpha_1) \rangle = 0$ .

Zhrnieme tento výsledok:

$$\langle \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \cdot \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ak } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \frac{1}{2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1), & \text{ak } (\alpha_2 - \alpha_1) = \text{konšt.} \\ 0, & \text{ak } (\alpha_2 - \alpha_1) \text{ sa s časom náhodne mení} \end{cases} \quad (8.4)$$

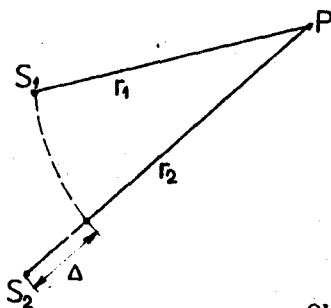
$\omega_1 = \omega_2$

$$3. \quad \langle \cos^2(\omega t + \alpha) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} + \frac{\cos 2(\omega t + \alpha)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle \cos 2(\omega t + \alpha) \rangle$$

Pretože posledný člen v predchádzajúcom výraze je podľa (8.3) rovný nule, máme:

$$\langle \cos^2(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{1}{2} \quad (8.5)$$

- b) Podmienky vzniku interferencie svetla vysvetlíme na príklade znázornenom na obr. 8.3. Majme dva zdroje ( $S_1, S_2$ ) monochromatického svetla, ktorého uhlové frekvencie sú  $\omega_1, \omega_2$  (a im odpovedajúce vlnové dĺžky  $\lambda_1, \lambda_2$ ). Určíme intenzitu svetla v bode P.



Obr. 8.3

Zdroje  $S_1, S_2$  vyžarujú elektromagnetické vlnenie. Vektory elektrickej intenzity v bode P nech sú  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  a podľa (7.92) ich možno vyjadriť:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_{10} \cos \left( \omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 + \varphi_1 \right) \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20} \cos \left( \omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 + \varphi_2 \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

kde  $\varphi_1, \varphi_2$  sú fázy v čase  $t = 0$  v mieste  $r_1 = r_2 = 0$ , t.j. v mieste zdrojov svetla.

Výsledná intenzita elektrického poľa v bode P je

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Podľa definície intenzity svetla (7.95) v bode P bude intenzita svetla

$$\begin{aligned} I &= c \varepsilon \langle E^2 \rangle = c \varepsilon \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = c \varepsilon \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \rangle = \\ &= c \varepsilon \langle E_1^2 \rangle + c \varepsilon \langle E_2^2 \rangle + 2 c \varepsilon \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} c \varepsilon E_{10}^2 + \frac{1}{2} c \varepsilon E_{20}^2 + 2 c \varepsilon \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \end{aligned}$$

kde sme použili vzťah (8.5) na výrazy (8.6). Ale podľa vzťahu (7.96)

$$c \varepsilon \langle E_1^2 \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon E_{10}^2 = I_1; \quad c \varepsilon \langle E_2^2 \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon E_{20}^2 = I_2 \quad (8.7)$$

sú intenzity svetla v bode P vyvolané každým zdrojom osobitne.

Teda

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2 c \varepsilon \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \left\langle \cos \left( \omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi_1 \right) \cos \left( \omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 + \varphi_2 \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (8.8)$$

Vidíme, že intenzita svetla v bode P je nie púhym súčtom intenzít svetla  $I_1, I_2$  od jednotlivých zdrojov. Jej hodnota podstatne závisí od člena  $2 c \varepsilon \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$ . Nazvime ho interferenčným členom. Hneď vidíme, že tento člen je rovný nule, ak vektory  $\vec{E}_{10}, \vec{E}_{20}$  sú na seba kolmé, t.j. ak svetelné vlny sú lineárne polarizované v rovinách navzájom kolmých. V tomto prípade je výsledná intenzita svetla daná súčtom intenzít svetla od jednotlivých zdrojov, takže k interferencii nedochádza.

Interferenčný člen najviac ovplyvní výslednú intenzitu svetla, ak polarizačné roviny oboch svetelných vln splávajú. Vtedy

$$\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} = E_{10} E_{20} \cos 0 = E_{10} E_{20}$$

Ďalej budeme predpokladať, že vlny sú polarizované v jednej rovine. Podľa vzťahu (8.4) sa posledný člen vo výraze (8.8) nebude rovnať nule za týchto podmienok:

1.  $\omega_1 = \omega_2$ . Zdroje musia vyžarovať svetlo rovnakej frekvencie (a teda i rovnakej vlnovej dĺžky  $\lambda$ ).
2.  $\alpha_1 - \alpha_2 = \text{const.}$  V tomto prípade je

$$\alpha_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} r_1 + \varphi_1, \quad \alpha_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} r_2 + \varphi_2,$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Vzdialenosť  $S_1P = r_1$ ,  $S_2P = r_2$  sa nemení. Ak teda má byť  $\alpha_1 - \alpha_2$  konštantné, musí byť konštantný rozdiel  $\varphi_1 - \varphi_2$ , t.j. zdroje musia vyžarovať svetlo s konštantným rozdielom fáz.

Také zdroje, ktoré spĺňajú tieto podmienky, nazývame koherentnými. Koherentné zdroje sú teda také, ktoré vyžarujú svetlo rovnakej frekvencie a pritom rozdiel medzi fázami vyžarovaného svetla je konštantný. Podobne dve vlny (lúče) nazývame koherentnými, ak v ľubovoľnom bode sa rozdiel ich fáz s časom nemení. Pritom v každom bode môže byť iný.

Pre naše účely nebude hodnota konštantného fázového rozdielu, s akým zdroje vyžarujú svetlo, podstatná, preto sa obmedzíme na prípad  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ . Potom intenzita svetla v bode P bude

$$I = I_1 + I_2 + 2 c \epsilon E_{10} E_{20} \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)$$

Zo vzťahu (8.7) vyplýva

$$E_{10} = \sqrt{\frac{2 I_1}{c \epsilon}}, \quad E_{20} = \sqrt{\frac{2 I_2}{c \epsilon}}$$

Použijúc tieto vzťahy máme:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \tag{8.9}$$

kde

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \tag{8.10}$$

je rozdiel fáz vlnení v bode P. Nazývame ho fázovým rozdielom. Rozdiel

$$\Delta = (r_2 - r_1)$$

predstavuje rozdiel dráh, ktoré prejde svetlo od zdrojov  $S_1, S_2$  do bodu P. Nazývame ho dráhovým rozdielom (obr. 8.3).

Z doteraz povedaného vyplýva dôležitý záver. Ak treba určiť intenzitu svetla pri superpozícii nekoherentných svetelných vln, sčítame intenzity svetla jednotlivých vln. Ak určujeme intenzitu svetla pri superpozícii koherentných svetelných vln, sčítame ich vektory intenzity elektrického poľa a výsledná intenzita svetla je

$$I = c\epsilon \langle |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 \rangle$$

čo vedie k výrazu (8.9).

Maximálna intenzita svetla bude v miestach, kde  $\cos \delta = 1$ , čiže tam, kde

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 2\pi m \quad \text{alebo} \quad \Delta = r_2 - r_1 = m\lambda \quad (8.11)$$

kde  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Ak necháme svetlo dopadať na tienidlo, maximálne osvetlenie bude v miestach, v ktorých dráhový rozdiel lúčov sa rovná celočíselnému násobku vlnovej dĺžky (vtedy kmity intenzity elektrického poľa oboch lúčov sú vo fáze).

Minimálna intenzita svetla, teda tmavé miesta budú tam, kde  $\cos \delta = -1$ , čiže

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = (2m+1)\pi \quad \text{alebo} \quad \Delta = r_2 - r_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (8.12)$$

Podmienka pre interferenčné minimum je, aby dráhový rozdiel interferujúcich lúčov sa rovnal nepárnemu násobku polovičnej vlnovej dĺžky (alebo, čo je to isté, ak vlny v danom mieste majú fázu líšiacu sa o  $\pi$ , prípadne nepárny násobok  $\pi$ ).

Aplikujúc podmienky (8.11) a (8.12) na (8.9), máme:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Ak  $I_1 = I_2$ ,  $I_{\max} = 4 I_1$ ,  $I_{\min} = 0$ . V tomto prípade interferenčný obrazec má najväčší kontrast. Závislosť intenzity svetla od fázového rozdielu  $\delta$  je v tomto prípade daná

$$I = 2 I_1 + 2 I_1 \cos \delta = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (8.13)$$

Poznámka: V podmienkach (8.11) a (8.12) je vlnová dĺžka svetla v tom prostredí, v ktorom sa svetlo šíri. Je zvykom vyjadrovať podmienky (8.11) a (8.12)



pomocou vlnovej dĺžky svetla vo vákuu  $\lambda_0$ . Ak index lomu prostredia je  $n$ , rýchlosť svetla v ňom je  $v = \frac{c}{n}$ , kde  $c$  je rýchlosť svetla vo vákuu, potom

$$\lambda = v T = \frac{c}{n} T = \frac{\lambda_0}{n}$$

Podmienky (8.11) a (8.12) potom môžeme zapísať v tvare

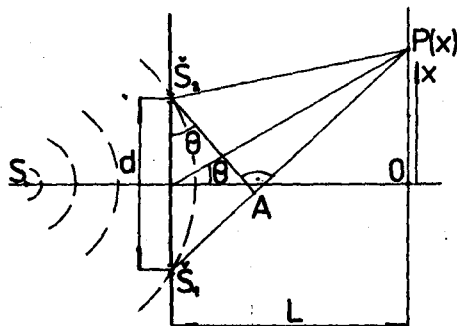
$$n (r_2 - r_1) = m \lambda_0 \quad (8.11')$$

$$n (r_2 - r_1) = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (8.12')$$

Je zvykom index  $\lambda_0$ , označujúci že ide o vlnovú dĺžku svetla vo vákuu, vynechávať a pod  $\lambda$  vo vzťahoch (8.11), (8.12) sa rozumie vlnová dĺžka svetla vo vákuu.

### 8.3.2 Niektoré dôležité prípady interferencie

a) Youngov pokus. Ide o interferenciu od dvoch dlhých štrbín, takže interferenčné krúžky budú rovnobežné so štrbinami. Štrbiny  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  v tienidle sú osvetlené zdrojom  $S$  (obr. 8.4). Podľa Huygensovho princípu sa štrbiny stávajú sekundárnymi zdrojmi svetla, a to zdrojmi koherentnými, pretože sú odvodené z tej istej vlnoplochy. Tento spôsob získavania koherentných zdrojov nazývame delením čela vlny. Interferenciu pozorujeme na tienidle.



Obr. 8.4

Podľa obr. 8.4, za predpokladu, že  $L \gg d$ , čiže aj  $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \frac{x}{L}$ , dráhový rozdiel je

$$\Delta = r_1 - r_2 = \mathcal{S}_1 A = d \cdot \sin \theta \approx d \frac{x}{L}$$

Intenzita svetla na tienidle bude podľa (8.13); (predpokladáme, že intenzita svetla od oboch štrbín je rovnaká na celom tienidle):

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = I_0 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = I_0 \cos^2 \frac{\pi dx}{L} \quad (8.14)$$

kde sme označili  $4 I_1 = I_0$ . Je to intenzita svetla pri  $\theta = 0$ . Maximálna intenzita svetla bude v bodoch  $x_M$ , pre ktoré

$$\Delta = d \cdot \sin \theta = d \frac{x_M}{L} = m \lambda$$

odkiaľ

$$x_M = \frac{\lambda L}{d} m \quad (8.15)$$

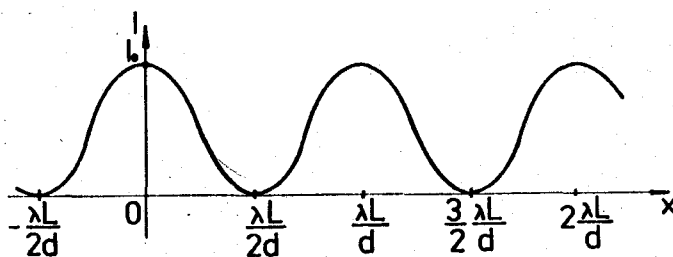
a minimálna (nulová) v bodoch  $x_m$ , pre ktoré je splnená podmienka (8.12), t.j.

$$\Delta = d \frac{x_m}{L} = (2m+1) \frac{\lambda}{2}$$

čiže

$$x_m = \frac{\lambda L}{d} \frac{(2m+1)}{2} \quad (8.16)$$

Priebeh intenzity svetla na tienidle daný výrazom (8.14) je znázornený na obr. 8.5.

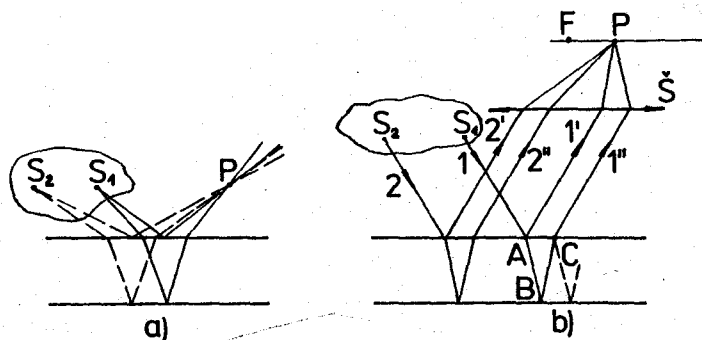


Obr. 8.5

b) Interferencia svetla na doštičke. Pod pojmom doštička budeme rozumieť vrstvu priehľadnej látky, ohraničenú dvoma plochami. Najčastejšie to býva sklenená doštička alebo vrstva vzduchu medzi dvoma sklenenými doštičkami.

Osvetlime planparalelnú doštičku zdrojom svetla konečných rozmerov. Keďže jednotlivé body zdroja vyžarujú svetlo nezávisle jeden od druhého, lúče vychádzajúce z rôznych bodov sú nie koherentné. Koherentnými sú len lúče vychádzajúce z jedného bodu zdroja (vyžiarené jedným atómom zdroja svetla).

Rozoberme situáciu znázornenú na obr. 8.6a. Dva lúče, vychádzajúce z bodu  $S_1$  zdroja svetla, sa stretnú v bode  $P$  s určitým fázovým rozdielom. Z každého bodu zdroja môžeme nájsť dva také lúče, ktoré sa pretínajú v bode  $P$ .



Obr. 8.6

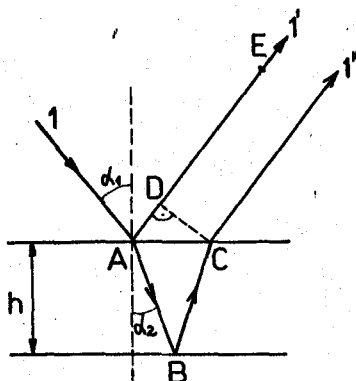
Na obr. 8.6a je zobrazený chod lúčov od dvoch bodov zdroja svetla, a to od bodov  $S_1, S_2$ . Ale každá dvojica týchto lúčov príde do bodu  $P$  s iným fázovým rozdielom. Podobne to bude pre ľubovoľný bod  $P$  pozorovania. Neexistujú teda miesta, do ktorých prídu všetky dvojice lúčov s konštantným dráhovým rozdielom. Interferencia nenastane.

Iná situácia vznikne, ak budeme uvažovať lúče, ktoré vznikli rozdelením jedného lúča pri čiastočnom odraze od horného povrchu doštičky v bode  $A$ , ako to vidieť na obr. 8.6b. Lúče  $1', 1''$  sú koherentné, lebo vznikli rozdelením lúča  $1$ . Hovoríme, že koherentné lúče v tomto prípade vznikli rozdelením amplitúdy.

Lúč, ktorý vniká do doštičky, sa čiastočne odráža na spodnej stene doštičky (v bode  $B$ ) a po lome na hornej stene (v bode  $C$ ) postupuje rovnobežne s lúčom odrazeným v bode  $A$ . (Čas svetla sa v bode  $C$  tiež odrazí späť do doštičky, vznikne mnohonásobný odraz. Tieto lúče však nebudeme brať do úvahy.)

Lúče  $1', 1''$  sú rovnobežné. Aby mohli interferovať, musíme ich sústrediť do jedného bodu pomocou šošovky  $\mathcal{S}$ . Všetky navzájom rovnobežné lúče šošovka sústredí do jedného bodu  $P$  ohniskovej roviny. Lúče  $2', 2''$ , ktoré vznikli rozdelením lúča  $2$ , vychádzajúceho z iného bodu zdroja (z bodu  $S_2$ ), ale postupujúceho rovnobežne s lúčom  $1$ , vykazujú ten istý dráhový rozdiel ako lúče  $1', 1''$ . To platí pre všetky lúče vychádzajúce z ľubovoľného bodu zdroja svetla v danom smere. Lúče postupujúce z jednotlivých bodov zdroja svetla v iných smeroch sa sústredia v inom bode ohniskovej roviny šošovky. Dráhový rozdiel lúčov, ktoré vznikli rozdelením na povrchu doštičky, závisí od smeru dopadajúcich lúčov. Teda do každého bodu ohniskovej roviny prídu lúče s konštantným dráhovým rozdielom, ktorý je, pravda, pre každý bod iný. V ohniskovej rovine šošovky vznikne interferenčný obrazec. Ak ako šošovku použijeme šošovku nášho oka, interferenčný obrazec vznikne v ohniskovej rovine oka.

Určíme dráhový rozdiel  $\Delta$  lúčov  $1'$ ,  $1''$ . Použijeme označenia uvedené na obr. 8.7. Kým lúč v doštičke prešiel dráhu  $AB + BC = 2AB$ , lúč  $1'$  odrazený v bode A prešiel dráhu  $AE$ . Dráhový rozdiel týchto lúčov je teda  $\Delta = AE - AD$ . Nech  $t$  je čas, za ktoré svetlo v doštičke prešlo dráhu  $2AB$ .



Obr. 8.7

Potom  $AE = ct$ ,  $2AB = \frac{c}{n} t$  a teda  $AE = 2AB \cdot n$  ( $n$  je index lomu doštičky). Keďže  $AD = AC \cdot \sin \alpha_1$ , máme:

$$\Delta = 2AB \cdot n - AC \sin \alpha_1 = \frac{2 h n}{\cos \alpha_2} - 2 h \operatorname{tg} \alpha_2 \sin \alpha_1$$

Nech doštička je vo vzduchu, pre ktorý index lomu kladieme rovný jednej. Ak použijeme zákon lomu:  $1 \cdot \sin \alpha_1 = n \cdot \sin \alpha_2$ , dostávame:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2 h n}{\cos \alpha_2} (1 - \sin^2 \alpha_2) = 2 h n \cos \alpha_2 = 2 h n \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \\ &= 2 h n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{n^2}} = 2 h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Pri odraze svetla od opticky hustejšieho prostredia (od prostredia s väčším indexom lomu, ako je index lomu prostredia, z ktorého svetlo na rozhranie dopadá), podobne ako pri odraze vlny od pevného konca tyče, nastáva zmena fázy o  $\pi$ , čomu prislúcha dráhový rozdiel  $\frac{\lambda}{2}$ .

Podmienka interferenčného maxima teda je

$$\begin{aligned} 2 h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} + \frac{\lambda}{2} &= m \lambda \iff 2 h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} = \\ &= (2m-1) \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (8.17)$$

a podmienka minima

$$2 h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} + \frac{\lambda}{2} = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \implies 2 h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} = m\lambda \quad (8.18)$$

Vidíme, že dráhový rozdiel  $\Delta$  je funkciou troch premenných:  $h, n, \alpha_1$ . Môžeme zvoliť také podmienky pozorovania interferencie, že vždy dve z týchto troch premenných udržujeme konštantné.

Ak budú konštantné  $h, n$ , podmienka pre interferenčné maximum (i minimum) bude splnená pri určitých smeroch osvetlenia doštičky. Jednému interferenčnému prúžku prislúcha jedna hodnota  $\alpha_1$ , t.j. jeden smer osvetlenia. Preto takéto prúžky nazývame prúžkami rovnakého sklonu. Ak v osvetľovacom zväzku lúčov sú zastúpené všetky smery a pozorujeme smery kolmo na doštičku, interferenčné prúžky sú kružnice.

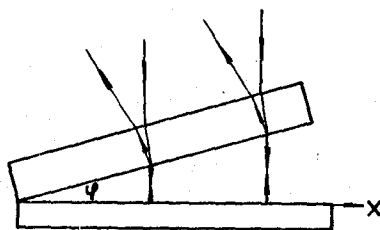
Ak zvolíme pevný smer osvetľovania, napr. kolmo na doštičku, dráhový rozdiel  $\Delta$  závisí od hrúbky  $h$  doštičky. Ak je hrúbka premenlivá, pre miesta rovnakej hrúbky je dráhový rozdiel rovnaký - interferenčné prúžky nazývame prúžkami rovnakej hrúbky. Takto môžeme povrch doštičky "zmapovať". Interferenčné prúžky sú vlastne vrstevnice. Táto okolnosť sa využíva na kontrolu rovinnosti a paralelnosti doštičiek.

Vhodnou voľbou podmienok pozorovania možno dosiahnuť, že prúžky vidíme priamo na povrchu doštičky, takže ich môžeme pozorovať napr. mikroskopom zaostre- ným na povrch doštičky.

Ak svetlo nie je monochromatické, pre každú vlnovú dĺžku  $\lambda$  je podmienka maxima a minima splnená pre iné uhly  $\alpha_1$  a hrúbku  $h$ . Toto vysvetľuje vznik farieb na tenkých olejových vrstvách na povrchu vody.

Veľké praktické využitie má interferencia na teknej klinovej vrstve. Pri osvetlení tejto vrstvy rovnobežným zväzkom lúčov pozorujeme na doštičke prúžky rovnakej hrúbky. Vyšetříme pomery na vzdušnom klíne vytvorenom stenami dvoch doštičiek, ako to vidieť na obr. 8.8. Doštičku osvetľujeme kolmo. V tomto prípade  $\alpha_1 = 0, n = 1$ . Podmienka interferenčného maxima (8.17) sa zreduku-

Obr. 8.8

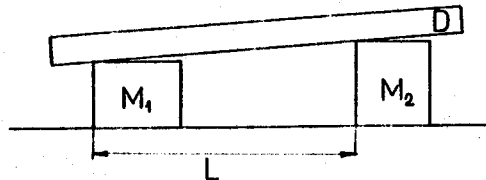


je na  $2 h = (2m-1) \frac{\lambda}{2}$ . Interferenčné prúžky sú priamky rovnobežné s hranou klína. Pre dva susedné prúžky platí:  $2 h_1 = (2m-1) \frac{\lambda}{2}, 2 h_2 = [2(m+1) - 1] \frac{\lambda}{2}$ , z čoho  $h_2 - h_1 = \frac{\lambda}{2}$ . Keďže  $h = x \operatorname{tg} \varphi$ , vzdialenosť susedných prúžkov je

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2 \operatorname{tg} \varphi} \pm \frac{\lambda}{2 \varphi} \quad (8.19)$$

pretože pre malé uhly  $\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$ .

Často sa interferencia využíva na vzdušnej klinovej vrstve, pomocou nej možno napr. kontrolovať koncové mierky (obr. 8.9).



Obr. 8.9

Ak mierky  $M_1, M_2$  nie sú rovnaké, vzniká medzi ich hornou stenou a rovinnou doštičkou  $D$ , na ne položenou, vzdušný klin. Zo vzdialenosti interferenčných prúžkov podľa vzťahu (8.19) možno určiť uhol  $\varphi$  a pri známej vzdialenosti mierok  $L$  vieme určiť rozdiel ich hrúbky.

Špeciálne usporiadania na pozorovanie interferencie za účelom merania sa nazývajú interferometre. Podľa toho, ktorú veličinu vystupujúcu v rovnici (8.17), resp. (8.18) chceme merať ( $h, n, \lambda$ ), delíme interferometre na:

- a) prístroje určené na meranie dĺžok - sú to interferenčné komparátory (napr. Michelsonov interferometer),
- b) prístroje na meranie indexu lomu, tzv. interferenčné refraktometre (napr. Rayleighov interferometer),
- c) prístroje na určenie jemnej štruktúry spektrálnych čiar, tzv. interferenčné spektroskopy (napr. Fabry-Perotov interferometer).

### 8.3.3 Interferencia kvázimonochromatického svetla

Žiadny zdroj svetla nevyžaruje prísne monochromatické svetlo. Dokonca voľné atómy vyžarujú svetlo v určitom, hoci malom, ale predsa konečnom intervale vlnových dĺžok  $\Delta\lambda$ . Označme strednú hodnotu vlnových dĺžok z intervalu  $\Delta\lambda$  znakom  $\lambda_g$ . Ak je splnená podmienka  $\Delta\lambda \ll \lambda_g$ , hovoríme, že svetlo je kvázimonochromatické.

Pre každú monochromatickú zložku kvázimonochromatického svetla sú podmienky interferenčného maxima, a tak isto i minima, splnené v inom mieste, pre iný

dráhový rozdiel. Vlnenia rôznych vlnových dĺžok nie sú koherentné, a preto výsledný interferenčný obrazec je daný superpozíciou interferenčných obrazcov odpovedajúcich jednotlivým vlnovým dĺžkam.

Analýzu interferenčného javu v kvazimonochromatickom svetle urobíme na jednoduchom prípade, keď máme svetlo s dvoma monochromatickými zložkami, ktorých intenzity svetla sú rovnaké a ich vlnové dĺžky  $\lambda_1, \lambda_2$  sa líšia len málo, t.j.  $\lambda_1 - \lambda_2 = \Delta\lambda \ll \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_s$ . Tak napr. pri svetle vyžarovanom atómami sodíka je  $\lambda_1 = 589,5$  nm,  $\lambda_2 = 588,9$  nm,  $\Delta\lambda = 0,6$  nm.

Rozloženie intenzity svetla na tienidle v Youngovom pokuse je pre tieto dve zložky dané vzťahom (8.14).

$$I_1 = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = I_0 \cos^2 \frac{\pi d}{\lambda_1 L} x$$

$$I_2 = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = I_0 \cos^2 \frac{\pi d}{\lambda_2 L} x$$

Polohy maxim intenzity svetla dané vzťahom (8.15) sú pre tieto dve zložky:

$$x_{M1} = \frac{\lambda_1 L}{d} m, \quad x_{M2} = \frac{\lambda_2 L}{d} m$$

Vidíme, že ich polohy sú nie totožné. Ich vzdialenosť  $x_{M1} - x_{M2} = \frac{L}{d} m (\lambda_1 - \lambda_2)$  sa s rastom poriadku interferencie  $m$  (a teda s rastom dráhového rozdielu  $\Delta$ ) zväčšuje, čo má za následok, že kontrast interferenčného obrazca klesá a pri určitej veľkosti dráhového rozdielu  $\Delta = 1$  interferenčný obrazec vymizne. Dostaneme súvislé, rovnomerné osvetlenie tienidla, bez interferenčných prúžkov. To bude vtedy, keď výsledná intenzita svetla

$$I = I_1 + I_2 = I_0 \left( \cos^2 \frac{\delta_1}{2} + \cos^2 \frac{\delta_2}{2} \right)$$

bude konštantná, nezávislá od fázového rozdielu  $\delta$  (a teda i od dráhového rozdielu  $\Delta$ ). Predchádzajúci výraz bude konštantný, ak  $\delta_2 = \delta_1 + \pi$ . Potom

$$\cos^2 \frac{\delta_1}{2} + \cos^2 \left( \frac{\delta_1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

Avšak

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \Delta, \quad \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \Delta$$

Potom podmienka vymiznutia interferenčného obrazca je

$$\delta_2 - \delta_1 = \mathcal{K} = 2\mathcal{K}\Delta \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 2\mathcal{K}\Delta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$$

z čoho pre hodnotu hraničného dráhového rozdielu  $\Delta = 1$  dostávame

$$1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{(\lambda_2 + \Delta\lambda) \cdot \lambda_2}{2\Delta\lambda} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_2}\right) \lambda_2^2}{2\Delta\lambda} \approx \frac{\lambda_2^2}{2\Delta\lambda}$$

kde  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_2} \ll 1$  sme zanedbali.

Pre svetlo vyžarované sodíkom je

$$1 = \frac{(589 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2}{2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 0,29 \text{ nm}$$

Ak máme svetlo, v ktorom sú spojito zastúpené všetky vlnové dĺžky z nejakého intervalu, situácia je zložitejšia, ale analogická tej, ktorú sme práve prebrali.

Ako kritérium pre posúdenie, že pri akom dráhovom rozdiely už nemôžeme pozorovať interferenciu kvazimonochromatického svetla, sa udáva hodnota

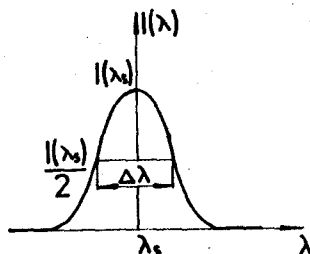
$$1 = \frac{\lambda_s^2}{\Delta\lambda} \tag{8.20}$$

ktorá sa nazýva koherenčná dĺžka.  $\lambda_s$  je stredná vlnová dĺžka a  $\Delta\lambda$  je tzv. spektrálna šírka daného svetla. Jej význam je zrejmý z obr. 8.10, ktorý vyjadruje priebeh intenzity svetla v závislosti od vlnovej dĺžky.

Zo vzťahu (8.20) vidíme, že čím väčšia je spektrálna šírka, tým je koherenčná dĺžka menšia. Pri sodíkovom svetle, ako sme videli, je koherenčná dĺžka iba 0,3 mm. Preto sa interferencia svetla ľahšie pozoruje na tenkých vrstvách, kde dráhový rozdiel je malý. Týmto vysvetľujeme i okolnosť, ktorú sme mlčky obišli pri skúmaní interferencie na kline (obr. 8.8). Tam sme brali do úvahy len interferenciu lúčov odrazených od spodnej steny vrchnej doštičky s lúčmi odrazenými od vrchnej steny spodnej doštičky. Ak je totiž doštička dostatočne hrubá, lúče odrazené od jej hornej a dolnej steny nemôžu interferovať, pretože ich dráhový rozdiel je väčší ako koherenčná dĺžka.



Spektrálna šírka svetla vyžarovaného niektorými atómami býva pri dodržaní špeciálnych podmienok  $\sim 2 \cdot 10^{-12}$  m, čomu odpovedá koherenčná dĺžka  $\sim 0,2$  m. V súčasnosti najväčšiu koherenčnú dĺžku má svetlo z lasera. Dosahuje hodnoty hodne prevyšujúce dĺžku 1 m. Tak veľká koherenčná dĺžka svedčí, že laser vyžaruje svetlo vo veľmi úzkom pásme vlnových dĺžok.



Obr. 8.10



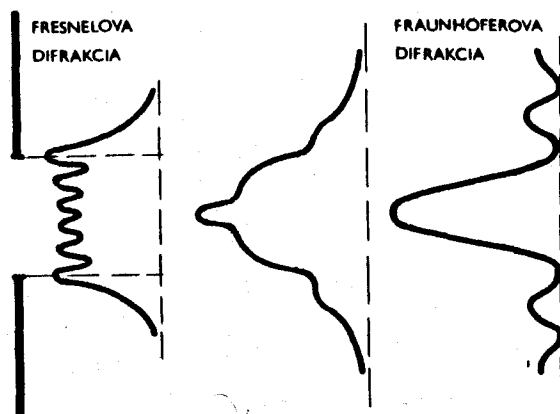
Obr. 8.11

#### 8.4 DIFRAKCIA (OHYB) SVETLA

V dôsledku malej vlnovej dĺžky svetla môžeme šírenie sa svetla v prvom priblížení považovať za priamočiare. Pri šírení sa svetla v okolí malých prekážok alebo pri jeho prechode cez otvory, ktorých niektorý rozmer je porovnateľný s vlnovou dĺžkou svetla, sa prejavujú vlnové vlastnosti svetla. Nastáva ohyb svetla, takže svetlo postupuje aj do smerov geometrického tieňa. Ak napr. rovinná vlna dopadá na otvor, podľa Huygensovho princípu každý bod otvoru je elementárnym zdrojom vlnenia. Obálka elementárnych vlnoploch dáva výslednú vlnoplochu. Keďže smer šírenia sa vlny je kolmý na vlnoplochu, z obr. 8.11 vidíme, že svetlo za otvorom sa šíri nielen v smere svetla dopadajúceho. Tento jav nazývame difrakciou (ohybom) svetla. Kvantitatívne tento jav popíšeme, ak udáme, ako bude rozdelená intenzita svetla do smerov, do ktorých sa svetlo po prechode otvorom šíri.

##### 8.4.1 O h y b s v e t l a n a š t r b i n e

Nech dlhá úzka štrbina šírky  $a$  má smer osi  $y$  (obr. 8.12). Ohybový obraz bude po celej dĺžke štrbiny rovnaký (okrem jej koncov). Nech na štrbinu dopadá kolmo rovinná vlna amplitúdy  $E_0$ . Rozloženie amplitúdy a fázy na štrbi-

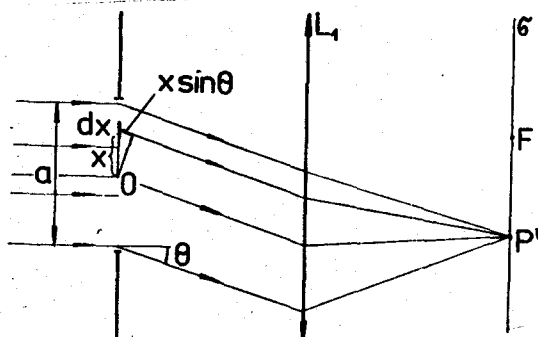


Obr. 8.12

ne je teda známe a podľa Fresnel-Kirchhoffovho difrakčného vzťahu (8.1) možno amplitúdu a fázu v každom bode  $P$  za otvorom vypočítať. Keď chceme teda poznať rozloženie intenzity svetla za otvorom, musíme ju určiť v dostatočnom počte bodov, čo je zdĺhavá procedúra. Rozloženie intenzity svetla bude podstatne závisieť od vzdialenosti roviny, v ktorej ju pozorujeme. Na obr. 8.12 sú znázornené typické priebehy intenzity svetla v troch rôznych vzdialenostiach. Prvý zľava prislúcha malej vzdialenosti od otvoru, tretí vzdialenosti veľmi veľkej. Ak lúče dopadajúce na štrbinu sú paralelné a difrakčný obrazec pozorujeme v dostatočne veľkej vzdialenosti od štrbiny, hovoríme, že ide o Fraunhoferovu difrakciu. Ak zväzok lúčov dopadajúcich na štrbinu nie je rovnobežný, alebo sa zaujímate o vlnový stav v ľubovoľnom bode (aj blízkom k štrbine), hovoríme, že ide o difrakciu Fresnelovu.

Podrobnejšie si všimneme Fraunhoferovu difrakciu, pretože hrá dôležitú rolu v niektorých optických prístrojoch a výpočet rozloženia intenzity svetla je v tomto prípade jednoduchý.

Nech bod  $P$ , v ktorom určujeme intenzitu svetla za štrbinou, je tak ďaleko, že lúče prichádzajúce doň z rôznych častí štrbiny sú prakticky rovnobežné.



Obr. 8.13

Ale rovnobežné lúče môžeme sústrediť šošovkou  $L_1$  do jedného bodu ohniskovej roviny šošovky, a tým vlastne presunúť bod  $P$  z nekonečna do bodu  $P'$

v ohniskovej rovine (obr. 8.13), a teda pozorovať ohybový jav v konečnej vzdialenosti od otvoru. Pri výpočte vlnového poľa za štrbinou nebudeme vychádzať z Fresnel-Kirchhoffovho difrakčného vzťahu, ale volíme jednoduchší postup.

Od pásu šírky  $dx$  ležiaceho vo vzdialenosti  $x$  od stredu štrbiny príde vlnenie do bodu  $P'$  s fázovým rozdielom  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta$  voči lúčom prechádzajúcemu stredom štrbiny. Časť štrbiny šírky  $dx$  prispieva k veľkosti intenzity elektrického poľa podielom

$$dE = \frac{E_0}{a} dx \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \right)$$

kde  $\frac{E_0}{a}$  je amplitúda elektromagnetickej vlny dopadajúcej na štrbinu, pripadajúca na jednotku šírky štrbiny.

Intenzita elektrického poľa od celej štrbiny je

$$E = \frac{E_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \right) dx \quad (8.21)$$

Postupne dostávame:

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0}{a} \left[ \frac{\sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \right)}{-\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta} \right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \\ &= \frac{-E_0}{\frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta} \left[ \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \sin \theta \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \sin \theta \right) \right] = E_0 \frac{\sin \left( \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

kde sme použili vzťah

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

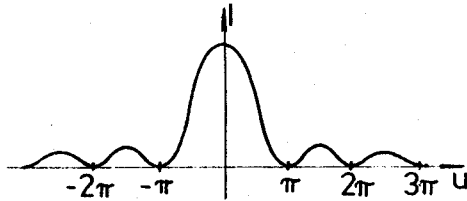
Intenzita svetla postupujúceho v smere  $\theta$  (t.j. v bode  $P'$ ) je teda

$$I = c \varepsilon \langle E^2 \rangle = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right)^2} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \quad (8.22)$$

kde

$$I_0 = c \varepsilon \frac{1}{2} E_0^2, \quad u = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

Závislosť intenzity svetla od uhla  $\theta$ , daná vzťahom (8.22), je znázornená na obr. 8.14. Zo vzťahu (8.22) vyplýva, že intenzita svetla postupujúceho v určitých smeroch je nulová.



Obr. 8.14

Podmienka pre tieto smery  $\theta$  je

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta = m \pi \quad \text{kde} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

čiže

$$a \sin \theta_m = m \lambda \quad (8.23)$$

Hodnote  $m = 0$  prislúcha  $\theta = 0$ . V smere dopadajúceho lúča je intenzita svetla  $I = I_0$ , ako to vidieť z obr. 8.14, alebo priamo zo vzťahu (8.22). Medzi susednými minimami intenzity svetla sa nachádzajú maximá intenzity svetla, ktoré s rastom  $\theta$  klesajú. Medzi minimami prvého poriadku ( $m = \pm 1$ ) je centrálné maximum, na ktoré pripadá  $\sim 96\%$  celkovej intenzity svetla.

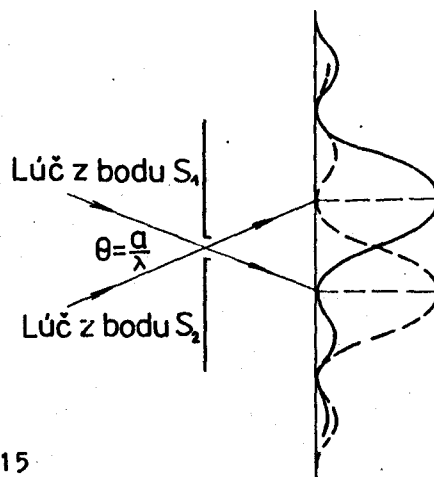
Čím je šírka štrbiny menšia, uhol  $\theta_1$  prislúchajúci prvému minimu je väčší a krivka na obr. 8.14 je v smere osi  $u$  rozťahovanejšia.

V prípade difrakcie na kruhovom otvore polomeru  $a$  bude situácia podobná. Podmienka pre polohu prvého minima je

$$a \sin \theta_1 = 0,61 \lambda$$

Difrakcia na obrubách a clonkách optických prístrojov spôsobuje, že nemožno zobrazit ľubovoľne blízke body tak, aby ich bolo možné rozlíšiť, hoci by ináč optický systém zobrazoval ideálne. Obraz bodu je vlastne vždy difrakčný obrazec, podobný ako na obr. 8.14. Ako kritérium rozlíšiteľnosti dvoch bodov sa najčastejšie používa Rayleighovo kritérium, ktoré vyžaduje, aby difrakčné maximá nulového poriadku, zodpovedajúce obrazom jednotlivých bodov,

neboli bližšie, ako je vzdialenosť prvého minima od centrálného maxima. Ak lúče od dvoch zobrazovaných bodov  $S_1, S_2$  vstupujú do štrbiny tak, že zvierajú uhol  $\theta_1$  (obr. 8.15), Rayleighovo kritérium vyžaduje, aby  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ , ako to vyplýva zo vzťahu (8.23). Pre malé uhly  $\sin \theta_1 \approx \theta_1$ , a teda  $\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$ . Nemožno teda rozlíšiť dva body, z ktorých lúče vstupujú do optického systému pod uhlom menším ako  $\theta_1$ . Rozlišovacia schopnosť optického systému závisí teda od veľkosti otvorov a od vlnovej dĺžky. Pre najdôležitejší optický systém, ľudské oko, je najmenší zorný uhol, pri ktorom ešte rozlíšime dva body  $\theta_1 \approx 1'$ . Na rozlišovaciu schopnosť ľudského oka okrem difrakcie má vplyv i hustota receptorov svetla - tyčíniek a čapkov. Vzdialenosť receptorov svetla na sietnici dosť úzko súvisí so vzdialenosťou difrakčného minima prvého rádu od centrálného maxima.

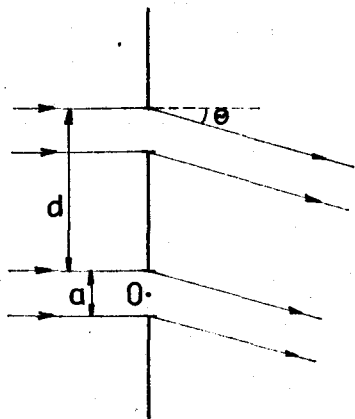


Obr. 8.15

#### 8.4.2 Difrakcia na dvoch štrbinách

V časti 8.3.2 sme popísali interferenciu svetla od dvoch štrbín, ktorých šírku sme zanedbali. Reálne štrbiny vždy majú konečnú šírku. Ak túto šírku nezanedbáme, máme vlastne difrakciu na dvoch štrbinách.

Majme dve rovnobežné, veľmi dlhé štrbiny šírky  $a$ . Vzdialenosť štrbín nech je  $d$  (obr. 8.16). Budeme postupovať úplne rovnako ako v predchádzajúcom prípade difrakcie na jednej štrbine. Zmenia sa len hranice integrovania vo vzťahu (8.21). Dolná hranica je  $-\frac{a}{2}$ , horná  $d + \frac{a}{2}$ . Nepriehľadná časť medzi štrbinami neprispieva k intenzite svetla za štrbinami, takže integrál (8.21) môžeme rozpísať na dva integrály s hranicami  $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ ,  $(d - \frac{a}{2}, d + \frac{a}{2})$ . Hodnotu prvého integrálu sme vypočítali v predchádzajúcom článku, je daná vzťahom (8.22). Ostáva určiť hodnotu integrálu



Obr. 8.16

$$\frac{E_0}{a} \int_{d - \frac{a}{2}}^{d + \frac{a}{2}} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \right) dx$$

Zavedením substitúcie  $x = \xi + d$  predchádzajúci integrál bude

$$\begin{aligned} & \frac{E_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta - \frac{2\pi}{\lambda} \xi \sin \theta \right) d\xi = \\ & = E_0 \frac{\sin \left( \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \cdot \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \right) \end{aligned}$$

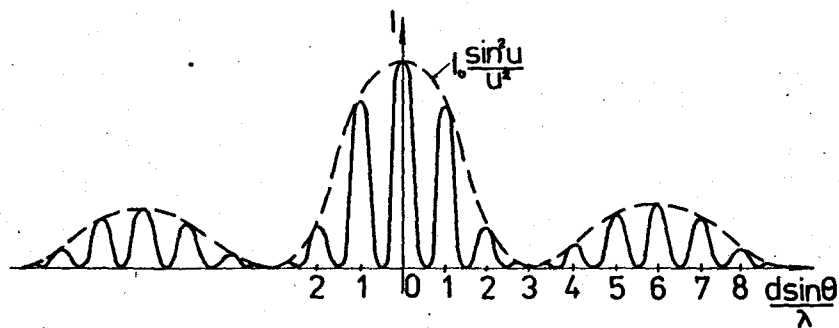
Teda

$$\begin{aligned} & \frac{E_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{d + \frac{a}{2}} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \right) dx = \frac{E_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cos \left( \omega t - \right. \\ & \left. - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \right) dx + \frac{E_0}{a} \int_{d - \frac{a}{2}}^{d + \frac{a}{2}} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \right) dx = \\ & = E_0 \frac{\sin \left( \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \left[ \cos \omega t + \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \right) \right] = \\ & = E_0 \frac{\sin \left( \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \cdot 2 \cos \left( \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \right) \cdot \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \right) \end{aligned}$$

Pre intenzitu svetla konečne dostávame:

$$I = c \varepsilon \langle E^2 \rangle = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right]^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta\right) \quad (8.24)$$

Keď porovnáme tento vzťah so vzťahom (8.22) pre difrakciu na štrbine a so vzťahom (8.14) pre dve nekonečne úzke štrbiny, vidíme, že rozloženie intenzity svetla dané rovnicou (8.24) je dané súčinom intenzity svetla od jednej štrbiny a dvoch nekonečných úzkych štrbín. Graficky je priebeh rovnice (8.24) znázornený na obr. 8.17.



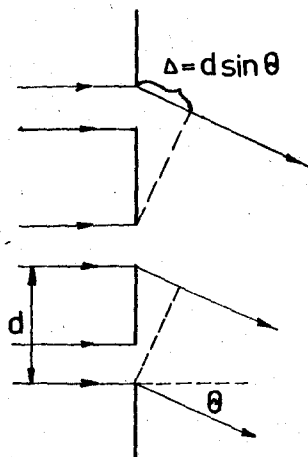
Obr. 8.17

#### 8.4.3 O h y b s v e t l a n a m r i e ž k e

Mriežka je sústava rovnobežných štrbín. Nech vzdialenosť štrbín je  $d$ , ich šírka  $a$ . Výpočet pre rozloženie svetla je v tomto prípade zložitejší, nebudeme ho uvádzať. Z obr. 8.18 však ľahko nájdeme podmienku pre interferenčné maximá. Je to

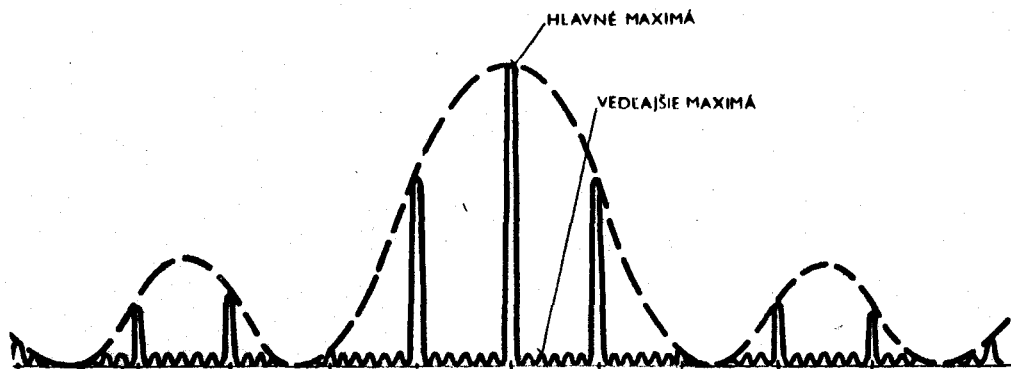
$$d \sin \theta = m \lambda$$

(8.25)



Obr. 8.18

Táto podmienka dáva polohu tzv. hlavných interferenčných maxím. Podmienka (8.25) berie do úvahy len interferenciu medzi lúčmi z dvoch susedných štrbín. Interferujú však aj lúče napr. z prvej štrbiny s lúčmi tretej, štvrtej a ďalšej štrbiny. To vedie k vzniku vedľajších maxím. Podobne ako v predchádzajúcom prípade difrakcie na dvoch štrbinách, rozloženie intenzity svetla závisí aj od šírky štrbiny. Skutočný priebeh intenzity svetla pri difrakcii na ôsmich štrbinách je znázornený na obr. 8.19. Pre rôzne vlnové dĺžky  $\lambda$  je podmienka (8.25) splnená pri rôznych smeroch  $\theta$ . Ak na mriežku dopadá svetlo zložené, nastane na mriežke jeho rozklad podľa vlnových dĺžok. Pre túto vlastnosť sa používa mriežka na rozklad svetla v monochromátoroch.



Obr. 8.19

## 8.5 HOLOGRAFIA

Holografia je metóda, pomocou ktorej sa zaznamenáva amplitúdová i fázová informácia o vlne (grécke slovo holos značí úplný; teda holografia značí úplný záznam vlny).

Obyčajný fotografický záznam dáva informáciu len o amplitúde vlny, pretože fotografická doska, podobne ako ľudské oko, je citlivá len na amplitúdu, nie na fázu. Ak napr. osvetľujeme fotografickú dosku rovinnou svetelnou vlnou, ktorá má po celej ploche fotografickej dosky rovnakú amplitúdu, dostaneme rovnomerné sčernenie dosky, bezohľadu na to, z ktorého smeru vlna na dosku dopadne. Zo sčernenia fotografickej dosky nijako nemôžeme zistiť smer dopadajúcej vlny.

V predchádzajúcich článkoch sme videli, že intenzita svetla dvoch interferujúcich vln závisí aj od fázového rozdielu  $\delta$  týchto vln v mieste, kde k interferencii dochádza, a podľa vzťahu (8.9) je



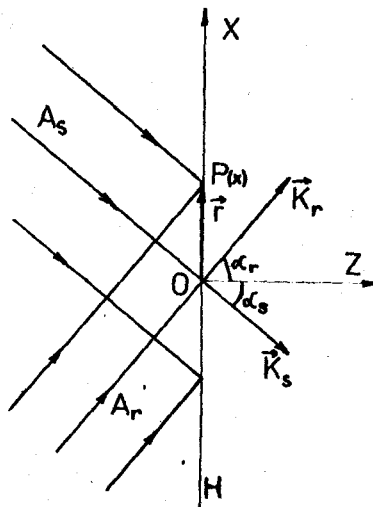
$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

ak teda fotografickú dosku osvetlíme ešte nejakou pomocnou vlnou (nazývame ju referenčnou vlnou), ktorej intenzita svetla a fáza v každom bode fotografickej dosky sú známe, z interferenčného obrazca, pomocou vzťahu (8.9) možno určiť fázu i intenzitu (a teda i amplitúdu) uvažovanej vlny v rovine fotografickej dosky. Podľa difrakčného vzťahu (8.2), ak je známe rozloženie amplitúdy a fázy na nejakej ploche, vieme určiť komplexnú amplitúdu vlny v ľubovoľnom mieste. Vieme teda pôvodnú vlnu pomocou difrakčného vzťahu zrekonštruovať. Existuje však spôsob, ako danú vlnu zrekonštruovať nie numericky, ale reálne. Vysvetlíme podstatu tejto metódy na jednoduchom prípade, keď referenčná vlna i vlna, ktorú chceme zaregistrovať, sú rovinné vlny. Predpokladajme, že obe vlny sú lineárne polarizované v tej istej rovine. Potom intenzitu elektrického poľa v týchto dvoch vlnách môžeme vyjadriť

$$\begin{aligned} A_s &= A_{s0} \cos (\omega t - \vec{K}_s \cdot \vec{r}) \\ A_r &= A_{r0} \cos (\omega t - \vec{K}_r \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (8.26)$$

kde index r sa vzťahuje na referenčnú vlnu, index s na vlnu, ktorú chceme zaznamenať.

Počiatok súradného systému zvolíme na doske H. Orientácia osí X, Y, Z je zrejmá z obr. 8.20. Potom fáza v počiatku súradnej sústavy bude rovná nule.



Obr. 8.20

V bode P(x) budú fázy:

$$\begin{aligned} \Phi_s &= -\vec{K}_s \cdot \vec{r} = -\vec{K}_s \cdot x\vec{i} = -K_s x \cos (90 + \alpha_s) = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha_s \\ \Phi_r &= -\vec{K}_r \cdot \vec{r} = -\vec{K}_r \cdot x\vec{i} = -K_r x \cos (90 - \alpha_r) = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha_r \end{aligned}$$

Fázový rozdiel týchto vln v bode  $P(x)$  je

$$\delta = \Phi_S - \Phi_R = \frac{2\pi}{\lambda} x (\sin \alpha_S + \sin \alpha_R) \quad (8.27)$$

Vlny  $A_S, A_R$  na doske  $H$  interferujú, rozloženie intenzity svetla bude dané vzťahom (8.9). Interferenčný obrazec má tvar prúžkov rovnobežných s osou  $Y$ . Z podmienky interferenčného maxima  $\delta_m = 2m\pi$ , kde  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , vyplýva, že vzdialenosť  $d$  susedných interferenčných prúžkov je, ak vyjadríme  $\delta$  z (8.27)

$$\begin{aligned} d = x_{m+1} - x_m &= (\delta_{m+1} - \delta_m) \frac{\lambda}{2\pi (\sin \alpha_S + \sin \alpha_R)} = \\ &= \frac{\lambda}{\sin \alpha_S + \sin \alpha_R} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Ak takto osvetlenú fotografickú dosku vyvoláme, dostaneme akúsi optickú mriežku. Definujeme amplitúdový činiteľ priestupu  $T$  nejakého prostredia ako pomer amplitúdy svetla, ktoré cez dané prostredie prešlo ( $A_P$ ), k amplitúde svetla naň dopadajúceho ( $A_0$ )

$$T = \frac{A_P}{A_0} \quad (8.29)$$

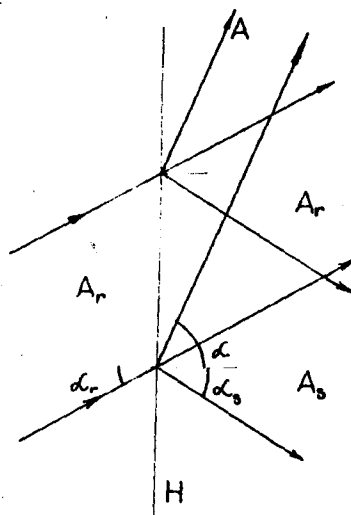
Technológiu spracovania fotografickej dosky možno zvoliť tak, aby jej amplitúdový činiteľ priestupu  $T$  bol priamo úmerný intenzite svetla, ktoré na dosku pôsobilo, t.j.

$$T \sim I = I_S + I_R + 2 \sqrt{I_S I_R} \cos (\Phi_S - \Phi_R)$$

Ak takto spracovanú fotografickú dosku (ktorá sa nazýva hologram, osvetlíme referenčnou vlnou  $A_R$  (túto operáciu nazývame rekonštrukciou), bezprostredne za hologramom bude vlnové pole podľa (8.29) dané vzťahom

$$\begin{aligned} A &= T A_R \sim (I_S + I_R) A_{R0} \cos (\omega t + \Phi_R) + \\ &+ 2 \sqrt{I_S I_R} \cos (\Phi_S - \Phi_R) A_{R0} \cos (\omega t + \Phi_R) = \\ &= (I_S + I_R) A_{R0} \cos (\omega t + \Phi_R) + \sqrt{I_S I_R} A_{R0} \left[ \cos (\omega t + \Phi_S) + \right. \\ &+ \left. \cos (\omega t + \Phi_S + 2 \Phi_R) \right] = (I_S + I_R) A_{R0} \cos (\omega t + \Phi_R) + \\ &+ \sqrt{I_S I_R} A_{R0} \cos (\omega t + \Phi_S) + \sqrt{I_S I_R} A_{R0} \cos (\omega t + \Phi_S + 2 \Phi_R) \end{aligned} \quad (8.30)$$

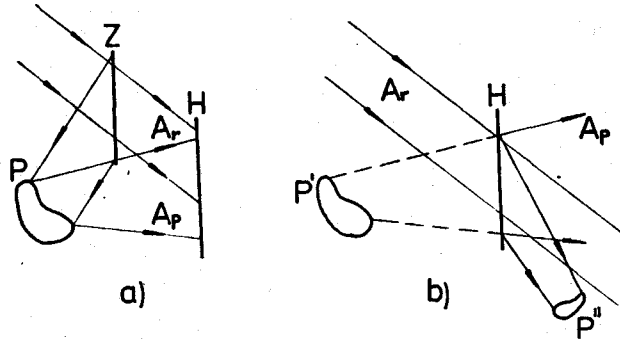
Hoci sme hologram osvetlili len jednou vlnou (referenčnou vlnou), za hologramom máme tri vlny. Prvý člen vo vzťahu (8.30) popisuje rovinnú vlnu šíriacu sa v smere referenčnej vlny  $A_r$ . Druhý člen popisuje rovinnú vlnu šíriacu sa v smere vlny  $A_s$ . Tretí člen popisuje tiež rovinnú vlnu, pre ktorú platí  $\Phi = \Phi_s + 2\Phi_r$ , čiže vlnu, šíriacu sa v smere  $\alpha$ , pričom platí  $\sin \alpha = \sin \alpha_s + 2 \sin \alpha_r$ . Situáciu ozrejmjuje obr. 8.21.



Obr. 8.21

Pri rekonštrukcii vznikla aj vlna, ktorá sa nezúčastnila na vytvorení hologramu. Jej existenciu možno názorne (i keď nie presne) zdôvodniť takto: Interferenciou vln  $A_r$ ,  $A_s$  na fotografickej doske vznikne interferenčný obrazec v tvare rovných interferenčných prúžkov. Vzdialenosť interferenčných prúžkov, daná vzťahom (8.28), závisí od uhlov, ktoré zvierajú vlny  $A_r$ ,  $A_s$  s kolmicou dopadu. Informácia o smere vlny  $A_s$  je pri známom smere  $A_r$  zakódovaná vo vzdialenosti prúžkov. Ale rovnakú vzdialenosť interferenčných prúžkov dostaneme i vtedy, ak osvetlíme dosku vlnou  $A_r$  a vlnou  $A$ , ktorá postupuje v takom smere  $\alpha$ , že  $\sin \alpha = 2 \sin \alpha_r + \sin \alpha_s$ . Existujú teda dva spôsoby, ako získať rovnaký hologram. Keďže fotografická doska "nevie", ktorým spôsobom interferenčný obrazec vznikol, rekonštruje "pre istotu" oba. Presnejšie povedané: pri rekonštrukcii nastáva na holograme difrakcia referenčnej vlny. Difrakčné maximum nultého poriadku je v smere referenčnej vlny. Ďalšie dve vlny odpovedajú vedľajším maximám poriadku  $\pm 1$ .

Takýmto spôsobom môžeme zaznamenať informáciu o ľubovoľnej vlně a rekonštruovať ju. Na obr. 8.22a je schéma usporiadania pri zázname vlny  $O$  odrazenej od predmetu  $P$ . Rovnobežný zväzok lúčov z lasera dopadá na polopriepustné zrkadlo  $Z$ , od ktorého sa časť svetla odráža a osvetľuje predmet  $P$ . Na predmete sa toto svetlo difúzne odráža a dopadá na fotografickú dosku  $H$ , na ktorú súčasne dopadá časť svetla, ktoré prešlo polopriepustným zrkadlom  $Z$  a ktoré predstavuje referenčnú vlnu. Na obr. 8.22b je znázornená rekonštrukcia tejto vlny. Rozloženie amplitúdy a fázy v rovine hologramu je dané funkciami  $O(x,y)$ ,  $\Phi(x,y)$ . Referenčná vlna nech je rovinnou vlnou  $A_r = A_{r0} \cos(\omega t +$



Obr. 8.22

+  $\Phi_r$ ). Intenzita svetla na fotografickej doske, a teda i jej činiteľ priestupu  $T$ , je podobne ako pri (8.30), kde  $I_r = A_{r0}^2$ ,  $I_s = 0^2(x,y)$ :

$$T \sim I \sim A_{r0}^2 + 0^2(x,y) + 2 A_{r0} 0(x,y) \cos [\Phi(x,y) - \Phi_r]$$

Ak rekonštrukciu robíme referenčnou vlnou  $A_r$ , vlnový stav za hologram je

$$\begin{aligned} T A_r &= (A_{r0}^2 + 0^2(x,y)) A_{r0} \cos(\omega t + \Phi_r) + A_{r0}^2 0(x,y) \cos(\omega t + \Phi) + \\ &+ A_{r0}^2 0(x,y) \cos(\omega t + \Phi + 2\Phi_r) \end{aligned} \quad (8.31)$$

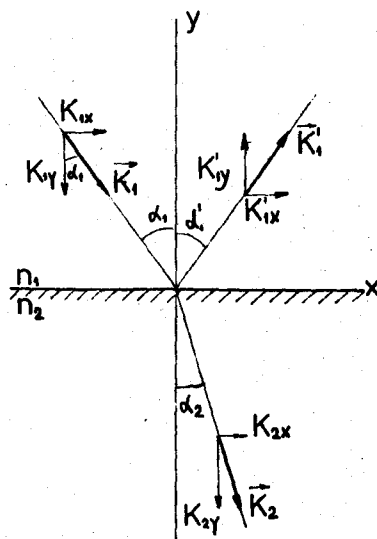
Jednotlivé členy v tomto výraze charakterizujú jednotlivé rekonštruované vlny. Prvý člen  $(A_{r0}^2 + 0^2(x,y)) A_{r0} \cos(\omega t + \Phi_r)$  vyjadruje vlnu, ktorá je pokračovaním rekonštruovanej vlny (s málo zmenenou amplitúdou). Druhý člen je zápis pôvodnej vlny odrazenej od predmetu, popisuje teda zdanlivý obraz  $P'$  pôvodného predmetu, ktorý možno premeniť optickou sústavou na reálny obraz. Pozorovateľ vidí teda cez hologram obraz predmetu  $P$  na tom istom mieste, kde bol predmet pri snímaní hologramu. Tretí člen popisuje vlnu, ktorá vytvára skutočný obraz  $P''$ , ktorý možno zachytiť na tienidle.

Existuje veľmi mnoho oblastí, kde možno využiť holografii. Poukážeme aspoň na jednu aplikáciu použiteľnú v strojárskkej praxi. Tým, že možno získať presnú kópiu vlny odrazenej od predmetu bez toho, aby predmet bol pri rekonštrukcii potrebný, dovoľuje porovnávať túto vlnu s vlnou odrazenou od skutočného predmetu, ktorý nejakým spôsobom zmenil svoj stav (zdeformoval sa, alebo zmenil polohu). Keď sa hologram položí na pôvodné mieszo, vlna odrazená od predmetu interferuje s vlnou rekonštruovanou. Na rekonštruovanom obraze sa objavia interferenčné pružky. Poloha týchto pružkov a ich vzdialenosť určujú typ a veľkosť zmeny, ktorá nastala s telesom v čase medzi snímaním hologramu a jeho rekonštrukciou. Túto metódu nazývame metódou živých pružkov. Možno však postupovať aj ináč. Hologram sa sníma v dvoch krokoch. Raz pri jednom stave telesa (pred deformáciou), potom na tú istú fotografickú dosku po jeho zmene (po deformácii). Až potom sa fotografická doska vyvolá. Pri rekonštrukcii sa rekonštruujú súčasne obe vlny a interferujú. Túto metódu nazývame metódou dvojexpozície.

## 8.6 LOM A ODRAZ SVETLA. ABSORPCIA SVETLA

### 8.6.1 Zákon odrazu a lomu svetla na rovinnom rozhraní dvoch prostredí

Ak na rozhranie dvoch prostredí s rôznymi indexami lomu ( $n_1, n_2$ ) dopadá rovinná elektromagnetická vlna (svetlo), rozdelí sa na dve vlny: jedna sa odráža, druhá preniká do druhého prostredia, pričom sa smer postupu zmení. Odvodíme súvis medzi smermi postupu týchto troch vln.



Obr. 8.23

Na obr. 8.23 rozhranie dvoch prostredí je rovina  $XZ$ . Kolmica na rozhranie (nazývame ju kolmicou dopadu) má v tomto prípade smer osi  $Y$ . Uhol, ktorý zvierajú dopadajúci lúč kolmicou dopadu, nazývame uhlom dopadu ( $\alpha_1$ ). Kolmica dopadu a dopadajúci lúč definujú rovinu dopadu. Uhly, ktoré zvierajú s kolmicou dopadu lúč odrazený a lomený, nazývame uhlom odrazu ( $\alpha_1'$ ) a uhlom lomu ( $\alpha_2$ ).

Smer lúča je totožný so smerom postupu rovinatej vlny, teda so smerom vlnového vektora. Označme vlnové vektory vlny dopadajúcej, odrazenej a lomenej znakmi  $\vec{K}_1, \vec{K}_1', \vec{K}_2$  (obr. 8.23). Podľa vzťahu (7.92) rovnice vlnenia vektora intenzity elektrického poľa pre tieto tri vlny sú:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{K}_1 \cdot \vec{r}) \\ \vec{E}_1' &= \vec{E}_{10}' \cos(\omega t - \vec{K}_1' \cdot \vec{r}) \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{K}_2 \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (8.31)$$

Je experimentálne overené, že frekvencia vlnenia sa nezmení pri odraze alebo lome, preto v predchádzajúcich vzťahoch je  $\omega$  pre všetky vlny rovnaké.

Úplne podobné vzťahy platia i pre intenzitu magnetického poľa  $\vec{H}$ .

Pri prechode rozhraním sa zachovávajú zložky intenzity elektrického i magnetického poľa spadajúce do roviny rozhrania. V našom prípade je rozhraním rovina XZ, teda musia sa zachovávať x-ová a z-ová zložka týchto vektorov:

$$\begin{aligned} E_{1x} + E'_{1x} &= E_{2x} & E_{1z} + E'_{1z} &= E_{2z} \\ H_{1x} + H'_{1x} &= H_{2x} & H_{1z} + H'_{1z} &= H_{2z} \end{aligned} \quad (8.32)$$

Prvá z týchto rovníc použitím rovníc (8.31) je

$$\begin{aligned} E_{10x} \cos(\omega t - \vec{K}_1 \cdot \vec{r}) + E'_{10x} \cos(\omega t - \vec{K}'_1 \cdot \vec{r}) &= \\ &= E_{20x} \cos(\omega t - \vec{K}_2 \cdot \vec{r}) \end{aligned} \quad (8.33)$$

Táto rovnica musí byť splnená v ľubovoľnom mieste rozhrania. Je to možné iba vtedy, ak

$$\vec{K}_1 \cdot \vec{r} = \vec{K}'_1 \cdot \vec{r} = \vec{K}_2 \cdot \vec{r} \quad (8.34)$$

Ostatné rovnice v (8.32) vedú k tejto istej podmienke.

Vektor  $\vec{r}$  je polohový vektor bodu na rozhraní.  $\vec{K}_1$  je vlnový vektor dopadajúcej vlny, podľa našej voľby leží v rovine XY. Teda

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + z\vec{k} & \vec{K}_1 &= K_{1x}\vec{i} + K_{1y}\vec{j} \\ \vec{K}'_1 &= K'_{1x}\vec{i} + K'_{1y}\vec{j} + K'_{1z}\vec{k} & \vec{K}_2 &= K_{2x}\vec{i} + K_{2y}\vec{j} + K_{2z}\vec{k} \end{aligned} \quad (8.35)$$

Keď dosadíme z (8.35) do (8.34), dostaneme:

$$x K_{1x} = x K'_{1x} + z K'_{1z} = x K_{2x} + z K_{2z} \quad (8.36)$$

To platí pre všetky body v rovine XZ, teda aj pre  $x = 0$ , čo vedie k výsledku

$$K'_{1z} = K_{2z} = 0 \quad (8.37)$$

Teda lúč odrazený a lomený ležia v rovine XY, v rovine dopadu. Rovnica (8.36) musí byť splnená i pre  $z = 0$ , z čoho vyplýva:

$$K_{1x} = K'_{1x} = K_{2x} \quad (8.38)$$

Z obr. 8.23 vidieť, že

$$K_{1x} = K_1 \sin \alpha_1, \quad K'_{1x} = K'_1 \sin \alpha'_1, \quad K_{2x} = K_2 \sin \alpha_2 \quad (8.39)$$

Absolútna hodnota vlnového vektora je

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad (8.40)$$

Použitím vzťahov (8.39) a (8.40) z (8.38) dostávame, ak spoločným činiteľom  $\omega$  vydělíme

$$\frac{1}{v_1} \sin \alpha_1 = \frac{1}{v_1} \sin \alpha'_1 = \frac{1}{v_2} \sin \alpha_2$$

Z týchto vzťahov vyplýva:

$$\alpha_1 = \alpha'_1 \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (8.41)$$

$v_1, v_2$  v predchádzajúcich vzťahoch sú rýchlosti svetla v uvažovaných prostrediach.

Podľa vzťahu (7.89)

$$v_1 = \frac{c}{n_1}, \quad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

kde  $c$  je rýchlosť svetla vo vákuu. Potom rovnica vyjadrujúca zákon lomu svetla má tvar

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Pre smery odrazenej a lomenej vlny platia teda tieto zákonitosti:

1. svetlo sa pri lome a odraze od rozhrania šíri tak, že dopadajúci, odrazený a lomený lúč ležia v jednej rovine, v rovine dopadu,
2. uhol odrazu sa rovná uhlu dopadu,

$$\alpha_1 = \alpha'_1 \quad (8.42)$$

3. súčin indexu lomu prostredia a sínusu uhla, ktorý zvierá lúč postupujúci týmto prostredím s kolmicou dopadu, je konštantný

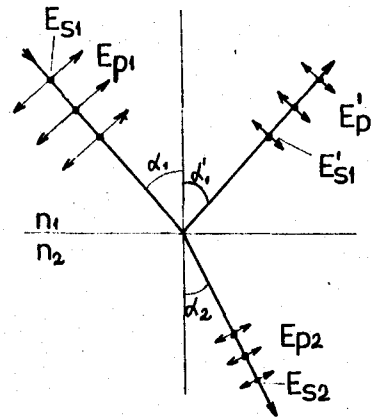
$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (8.43)$$

Vzťah (8.43) je zákon lomu svetla.

Poznámka: Vzťahy (8.41) platia i pre odraz a lom mechanickej vlny, ktorej rýchlosť šírenia sa v daných prostrediach je  $v_1, v_2$ .

### 8.6.2 Fresnelove vzorce

Zákony odrazu a lomu svetla odvodené v predchádzajúcom článku nehovoria nič o tom, aká časť svetla sa odráža alebo prechádza do druhého prostredia. Pomer intenzít svetla odrazeného, resp. prechádzajúceho do druhého prostredia, k intenzite dopadajúceho svetla závisí od indexov lomu prostredí, od uhla dopadu a závisí i od smeru polarizačnej roviny dopadajúceho svetla, t.j. od smeru kmitov vektora intenzity elektrického poľa. Vektor intenzity elektrického poľa (tak isto i vektor intenzity magnetického poľa) možno rozložiť na dve zložky: paralelnú ( $E_p$ ) a kolmú ( $E_s$ ) k rovine dopadu, čiže  $\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_s$ .



Obr. 8.24

Na obr. 8.24 nech rovina dopadu je daná rovinou nákresu. Zložky vektorov ležiace v rovine dopadu ( $E_p$ ) sú označené orientovanými úsečkami, zložky kolmé ( $E_s$ ) sú označené bodkami. Z okrajových podmienok (8.32) a súvisu medzi  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  (7.91) možno odvodiť pre pomer amplitúd odrazenej a dopadajúcej, resp. prechádzajúcej a dopadajúcej vlny tzv. Fresnelove vzťahy:

$$R_p = \frac{E'_{10p}}{E_{10p}} = \frac{n_1 \cos \alpha_2 - n_2 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_2 + n_2 \cos \alpha_1} \quad (8.44a)$$

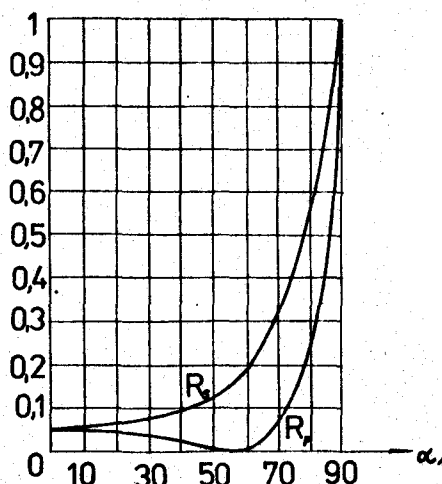
$$R_s = \frac{E'_{10s}}{E_{10s}} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} \quad (8.44b)$$

$$T_p = \frac{E_{20p}}{E_{10p}} = \frac{2 n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_2 + n_2 \cos \alpha_1} \quad (8.44c)$$



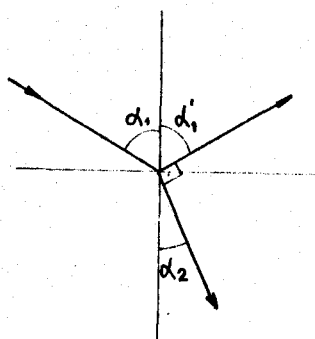
$$T_s = \frac{E_{20s}}{E_{10s}} = \frac{2 n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} \quad (8.44d)$$

Veličiny  $R_p$ ,  $R_s$ ,  $T_p$ ,  $T_s$  sa nazývajú Fresnelove koeficienty. Závislosť  $R_p$ ,  $R_s$  od uhla dopadu pre sklo s indexom lomu  $n = 1,5$  je znázornená na obr. 8.25.



Obr. 8.25

Vyšetříme jeden dôležitý prípad, keď lúč odrazený a lomený sú kolmé. Vtedy (obr. 8.26)



Obr. 8.26

$$\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$$

$$R_p = \frac{n_1 \cos(90 - \alpha_1) - n_2 \cos(90 - \alpha_2)}{n_1 \cos \alpha_2 + n_2 \cos \alpha_1} = \frac{n_1 \sin \alpha_1 - n_2 \sin \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_2 + n_2 \cos \alpha_1} = 0$$

pretože čitateľ sa rovná nule v dôsledku platnosti zákona lomu. To značí, že v odrazenom lúči je zložka intenzity elektrického poľa ležiaca v rovine dopadu rovná nule. Ak teda na rozhranie dopadá nepolarizované svetlo, odrazený lúč je úplne polarizovaný v rovine kolmej k rovine dopadu. Uhol dopadu, pri ktorom tento jav nastane, nazývame Brewsterovým uhlom  $\mathcal{E}$ . Jeho hodnotu nájdeme zo zákona lomu  $n_1 \sin \mathcal{E} = n_2 \sin(90 - \mathcal{E})$ , z čoho

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{n_2}{n_1}$$

Určíme ešte, aká časť svetla sa odrazí pri kolmom dopade svetla. Vtedy  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

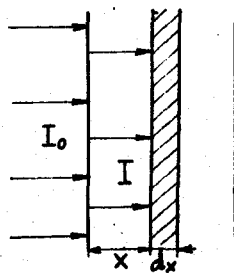
Pomer intenzít svetla odrazeného k dopadajúcemu je v tomto prípade

$$\rho = \left( \frac{E'_{10p}}{E_{10p}} \right)^2 = \left( \frac{E'_{10s}}{E_{10s}} \right)^2 = R_p^2 = R_s^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (8.45)$$

Pri kolmom odraze na rozhraní vzduch ( $n_1 = 1$ ) - sklo ( $n_2 = 1,5$ ) je činiteľ povrchového odrazu  $\rho = 0,04$ , teda približne 4 % svetla sa odrazí. Na rozhraní sklo - vzduch je činiteľ povrchového odrazu taký istý, pretože výmena poradia indexov lomu vo vzťahu (8.45) nevedie k zmene hodnoty tohto výrazu. Pri kolmom prechode svetla neabsorbujúcou sklenenou doštičkou sa odrazí na stenách doštičky približne 8 % svetla.

### 8.6.3 Absorpcia svetla

V dôsledku interakcie svetla s prostredím sa intenzita svetla pri jeho prechode prostredím znižuje. Nebudeme skúmať mechanizmus interakcie svetla s látkou. Z experimentálnych údajov vyplýva, že relatívne zmenšenie intenzity svetla, pripadajúce na jednotkovú hrúbku prostredia, je konštantné. Ak teda na vrstve hrúbky  $dx$  sa intenzita svetla zmení o hodnotu  $-dI$  (obr. 8.27), pomer  $-\frac{1}{I} \frac{dI}{dx}$  je konštantný. Označme ho znakom  $a$  a nazývame ho exponenciálnym súčiniteľom absorpcie.



Obr. 8.27

Teda

$$-\frac{1}{I} \frac{dI}{dx} = a \longrightarrow \frac{dI}{I} = -a dx \longrightarrow I = I_0 e^{-ax} \quad (8.46)$$

kde  $I_0$  je intenzita svetla v mieste  $x = 0$ . Vzťah (8.46) udáva intenzitu svetla vo vzdialenosti  $x$  od miesta, kde intenzita svetla má hodnotu  $I_0$ .

## 9. Základy kvantovej a atómovej fyziky

### 9.1 TEPLOTNÉ ŽIARENIE PEVNÝCH A KVAPALNÝCH LÁTKOK

#### 9.1.1 Ú v o d

Každá látka emituje elektromagnetické žiarenie, ktorého charakter závisí od povahy a teploty látky. Pôvod tohto žiarenia treba hľadať v tepelných pohyboch častíc látky, a preto sa nazýva teplotné žiarenie. Spektrum teplotného žiarenia budených plynov je čiarové (diskrétne), lebo vzniká pri elektrónových prechodoch vo vnútri izolovaného atómu. V pevných a kvapalných látkach atómy, prípadne molekuly nie sú izolované, sú blízko pri sebe, takže ich vzájomné pôsobenie má za následok vyžarovanie spojitého spektra. Pri teplotách nižších ako  $\sim 525^\circ\text{C}$  je toto žiarenie neviditeľné a najčastejšie sa označuje názvom infračervené žiarenie. Monochromatické zložky tohto žiarenia majú dĺžku vlny asi v rozsahu (780 nm  $\div$  1 mm). So zvyšovaním teploty stúpa celkové množstvo vyžiarenej energie a žiarenie sa presúva do oblasti kratších vlnových dĺžok. Žiarenie, vnímané ľudským okom, nazývame viditeľným žiarením a jeho monochromatické zložky majú dĺžku vlny asi v rozsahu (380 nm  $\div$  780 nm). Žiarenie, ktorého monochromatické zložky majú dĺžku vlny asi v rozsahu (1 nm  $\div$  380 nm), nazývame ultrafialovým žiarením.

Teraz si zavedieme niektoré energetické pojmy a veličiny súvisiace so žiarením. Fyzikálne veličiny budeme označovať indexom  $e$  ako energetické (tie isté fyzikálne veličiny pre viditeľné žiarenie sa označujú indexom  $v$  - vizuálne). Index  $e$  môžeme aj vynechať, ak z textu vidieť, že sú to veličiny energetické, a nie vizuálne.

Žiarivý tok  $\Phi_e$  je výkon prenášaný elektromagnetickým žiarením. Zo zdroja žiarenia sa žiarivá energia šíri do všetkých smerov rýchlosťou svetla. Žiarivý tok  $\Phi_e$  je podiel žiarivej energie, prechádzajúcej danou plochou, a doby, počas ktorej žiarivá energia prechádza:

$$\Phi_e = \frac{dW_e}{dt} = \int_{(S)} \vec{P} \cdot \vec{n} dS \quad (9.1)$$

kde  $\vec{P}$  je Poyntingov vektor,  $\vec{n}$  - jednotkový vektor kolmý na elementárnu plošku  $dS$ . Jednotkou žiarivého toku je  $W$ .

Spektrálna hustota žiarivého toku  $\phi_{e,\lambda}$  je podiel žiarivého toku, pripadajúceho na nekonečne malý element vlnových dĺžok a tohto elementu

$$\phi_{e,\lambda} = \frac{d\phi_e}{d\lambda} \quad (9.2)$$

$\phi_{e,\lambda}$  udáva spektrálne rozloženie žiarivého toku. Jednotkou spektrálnej hustoty žiarivého toku je  $W m^{-1}$ .

Vo všeobecnosti nemusí každá ploška žiariaceho telesa vysielat' rovnaký žiarivý tok, preto sa zavádzajú žiara a intenzita vyžarovania.

Žiara  $L_e$  je podiel žiarivého toku, ktorý vychádza, dopadá alebo prestupuje nekonečne malou plochou v danom bode, nekonečne malým priestorovým uhlom v danom smere a súčinu tohto priestorového uhla a priemetu tejto plochy do roviny kolmej na daný smer

$$L_e = \frac{d^2\phi_e}{d\Omega dS \cos\theta} \quad (9.3)$$

kdže  $\theta$  je uhol medzi kolmicou na plochu  $dS$  a daným smerom. Jednotkou žiary je  $W m^{-2} sr^{-1}$ .

Intenzita vyžarovania  $M_e$  je podiel žiarivého toku, ktorý vychádza z plošky zdroja a obsahu tejto plošky

$$M_e = \frac{d\phi_e}{dS} = \int L_e \cos\theta d\Omega \quad (9.4)$$

Vzťah (9.4) udáva aj súvis medzi žiarou a intenzitou vyžarovania. Jednotkou intenzity vyžarovania je  $W m^{-2}$ .

Analogicky ako pre spektrálnu hustotu žiarivého toku zavádzajú sa spektrálna hustota žiare  $L_{e,\lambda}$  a spektrálna hustota intenzity vyžarovania  $M_{e,\lambda}$ :

$$L_{e,\lambda} = \frac{dL_e}{d\lambda} \quad M_{e,\lambda} = \frac{dM_e}{d\lambda} \quad (9.5)$$

Jednotkou  $L_{e,\lambda}$  je  $W m^{-3} sr^{-1}$  a jednotkou  $M_{e,\lambda}$  je  $W m^{-3}$ .

Doteraz sme definovali fyzikálne veličiny, ktoré charakterizujú vyžarovanie energie. Podobne sú definované fyzikálne veličiny, charakterizujúce ožiarenie (telies).

Intenzita ožiarenia  $E_e$  je podiel žiarivého toku, ktorý dopadá na plošku, a obsahu tejto plošky

$$E_e = \frac{d\phi_e}{dS} \quad (9.6)$$

Spektrálna hustota intenzity ožiarenia  $E_{e,\lambda}$  je podiel intenzity ožiarenia, pripadajúcej na nekonečne malý element vlnových dĺžok a tohto elementu

$$E_{e,\lambda} = \frac{dE_e}{d\lambda} \quad (9.6a)$$

Jednotkou  $E_e$  je  $W m^{-2}$  a jednotkou  $E_{e,\lambda}$  je  $W m^{-3}$ .

Teleso žiarenie nielen vysiela (emituje), ale aj žiarenie, ktoré naň dopadá, môže pohlcovať (absorbovať). To sa dalo očakávať, lebo ak teleso je v tepelnej rovnováhe so svojím okolím, musí z neho absorbovať energiu v rovnakom množstve, v akom ju emituje. Schopnosť telesa absorbovať žiarenie charakterizuje činiteľ pohltienia  $\alpha_e$ , je to podiel žiarivého toku, ktorý teleso absorbuje, a žiarivého toku, ktorý naň dopadá:

$$\alpha_e = \frac{d\phi_{e,a}}{d\phi_e} \quad (9.7)$$

Žiarenie, ktoré na teleso dopadá, nemusí byť iba pohltené. Vo všeobecnosti teleso jednu časť žiarenia pohltí (absorpcia), druhú časť žiarenia odrazí (reflexia) a tretiu časť teleso prepustí (transmisia). Schopnosť telesa odrážať žiarenie naň dopadajúce charakterizuje činiteľ odrazu,  $\rho_e$ , je to podiel žiarivého toku telesom odrazeného a žiarivého toku naň dopadajúceho

$$\rho_e = \frac{d\phi_{e,r}}{d\phi_e} \quad (9.7a)$$

Odráž môže byť zrkadlový  $\rho_{e,z}$ , ale aj difúzny - rozptylový  $\rho_{e,d}$ , a teda platí:

$$\rho_e = \frac{d\phi_{e,r}}{d\phi_e} = \frac{d\phi_{e,r,z}}{d\phi_e} + \frac{d\phi_{e,r,d}}{d\phi_e} = \rho_{e,z} + \rho_{e,d} \quad (9.7b)$$

Činiteľ priestupu  $\tau_e$  je podiel žiarivého toku vystupujúceho z telesa (žiarenie, ktoré teleso prepúšťa) a žiarivého toku naň dopadajúceho

$$\tau_e = \frac{d \phi_{e,t}}{d \phi_e} \quad (9.7c)$$

Priestup môže byť aj priamy - regulárny  $\tau_{e,p}$ , aj difúzny  $\tau_{e,d}$  a platí:

$$\tau_e = \frac{d \phi_{e,t}}{d \phi_e} = \frac{d \phi_{e,t,p}}{d \phi_e} + \frac{d \phi_{e,t,d}}{d \phi_e} = \tau_{e,p} + \tau_{e,d} \quad (9.7d)$$

$\alpha_e$ ,  $\rho_e$ ,  $\tau_e$  sú všeobecne závislé od vlnovej dĺžky, uhla dopadu a polarizácie. Pre tú istú vlnovú dĺžku alebo interval vlnových dĺžok žiarenia, uhol dopadu a polarizáciu platí:

$$\alpha_e + \rho_e + \tau_e = 1 \quad (9.7e)$$

$\alpha_e$ ,  $\rho_e$ ,  $\tau_e$  sú definované buď pre určitý, alebo celý obor vlnových dĺžok žiarenia. Pre žiarenie monochromatické (žiarenie určitej jedinej vlnovej dĺžky alebo v širšom zmysle, žiarenie z veľmi úzkej oblasti vlnových dĺžok, ktoré možno charakterizovať jedinou vlnovou dĺžkou) sa definujú spektrálne činitele pohltivosti, odrazu a priestupu, ako podiel spektrálnej hustoty žiarivého toku absorbovaného, odrazeného, prepusteného telesom a spektrálnej hustoty žiarivého toku, dopadajúceho na teleso

$$\alpha_{e,\lambda} = \frac{d \phi_{e,\lambda,a}}{d \phi_{e,\lambda}} \quad \rho_{e,\lambda} = \frac{d \phi_{e,\lambda,r}}{d \phi_{e,\lambda}} \quad \tau_{e,\lambda} = \frac{d \phi_{e,\lambda,t}}{d \phi_{e,\lambda}} \quad (9.8)$$

Pre odraz a priestup, analogicky ako vo vzťahoch (9.7b) a (9.7d), platí:

$$\rho_{e,\lambda} = \rho_{e,\lambda,z} + \rho_{e,\lambda,d} \quad \tau_{e,\lambda} = \tau_{e,\lambda,p} + \tau_{e,\lambda,d} \quad (9.8a)$$

kde  $\rho_{e,\lambda,z}$  je spektrálny činiteľ zrkadlového odrazu,  $\rho_{e,\lambda,d}$  - spektrálny činiteľ rozptylového odrazu,  $\tau_{e,\lambda,p}$  - spektrálny činiteľ priameho priestupu,  $\tau_{e,\lambda,d}$  - spektrálny činiteľ rozptylového priestupu.

Ak monochromatické žiarenie dopadá na veľmi malú plošku povrchu telesa v určitom smere (pod určitým uhlom dopadu), určitej polarizácie, potom pre dané činitele tejto malej časti povrchu telesa platí:

$$\alpha_{e,\lambda} + \rho_{e,\lambda} + \tau_{e,\lambda} = 1 \quad (9.8b)$$

Taký žiarič (teleso), ktorý pohlcuje všetko žiarenie naň dopadajúce, bez ohľadu na jeho vlnovú dĺžku, smer dopadu a polarizáciu, nazývame čiernym žiaričom, čiernym telesom, a platí:

$$\alpha_e = \alpha_{e,\lambda} = 1 \quad (9.8c)$$

Činiteľ pohltenia je teda nezávislý od vlnovej dĺžky a je v celej oblasti vlnových dĺžok ( $\lambda = 0$  a  $\lambda \rightarrow \infty$ ) konštantný a rovný jednej. To znamená, že činiteľ odrazu  $\rho_e = \rho_{e,\lambda} = 0$  a činiteľ priestupu  $\tau_e = \tau_{e,\lambda} = 0$ . Spektrálna hustota intenzity vyžarovania žiariča (telesa) má pri všetkých vlnových dĺžkach najvyššiu možnú hodnotu zo všetkých teplotných žiaričov. Takémuto ideálnemu čiernemu telesu sa najviac blíži žiariaca dutina. Všetky iné reálne telesá nespĺňajú požiadavky kladené na čierne teleso. Aby sme mohli opísať žiarenie aj takýchto telies, definuje sa emisivita teplotného žiariča  $\varepsilon$  ako podiel intenzity vyžarovania teplotného žiariča a intenzity vyžarovania čierneho žiariča pri rovnakej teplote

$$\varepsilon = \frac{d M_e}{d M_{e,0}} \quad (9.9)$$

Indexom  $o$  budeme označovať, keď to bude treba, fyzikálne veličiny, týkajúce sa čierneho telesa (žiariča).

Spektrálna emisivita teplotného žiariča  $\varepsilon_\lambda$  je podiel spektrálnej hustoty intenzity vyžarovania teplotného žiariča a spektrálnej hustoty intenzity vyžarovania čierneho žiariča pri rovnakej teplote

$$\varepsilon_\lambda = \frac{d M_{e,\lambda}}{d M_{e,\lambda,0}} \quad (9.9a)$$

Spektrálna emisivita teplotného žiariča v bode na jeho povrchu pri jeho ľubovoľnej teplote a vlnovej dĺžke ním emitujúceho žiarenia sa rovná spektrálnemu činiteľu pohltenia pre žiarenie, ktoré dopadá v tom istom smere. Táto rovnosť platí pre ľubovoľnú polarizovanú zložku ako emitujúceho, tak aj dopadajúceho žiarenia

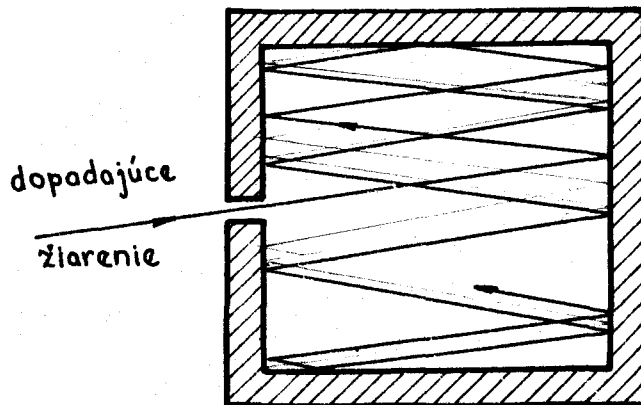
$$\varepsilon_\lambda = \alpha_{e,\lambda} \quad (9.9b)$$

Tento poznatok, kvantitatívne vyjadrený vzťahom (9.9b), sa nazýva Kirchhoffov zákon pre teplotný žiarič.

Ak platí  $\varepsilon = \varepsilon_\lambda < 1$ , taký žiarič nazývame sivým žiaričom. Sivý aj čierny žiarič sú neselektívne žiariče a platí  $\varepsilon = \varepsilon_\lambda$ . Nerovnosť  $\varepsilon \neq \varepsilon_\lambda$  je podmienkou pre selektívny žiarič,  $\varepsilon_\lambda$  je funkciou vlnovej dĺžky.

Vonkajší povrch nijakého reálneho telesa nežiari ako čierny žiarič. Ak, v telese urobíme dutinu (obr. 9.1), ktorej vnútorný povrch prípadne začier-

nime (pokryjeme sadzami), žiari takýto povrch cez malý otvor dutiny ako čier-  
ny žiarič (čierne teleso), lebo činiteľ pohltenia takéhoto otvoru sa praktic-  
ky rovná jednej.



Obr. 9.1

Čierne teleso je kosínusový žiarič. Kosínusové žiariče spĺňajú Lambertov zá-  
kon:

$$d I_{e,\theta} = d I_{e,n} \cos \theta \quad (9.10)$$

kde

$$d I_{e,\theta} = \frac{d^2(\phi_e)_\theta}{d\Omega}$$

je žiarivosť zdroja z plošky  $dS$  v smere odchylenom od kolmice k ploške  $dS$   
o uhol  $\theta$  a je definovaná ako podiel žiarivého toku, ktorý ploška vysiela  
do nekonečne malého priestorového uhla, ktorého os leží v uvažovanom smere  
žiarenia a toho priestorového uhla kužela. Jednotkou žiarivosti je  $W \text{ sr}^{-1}$ .

$d I_{e,n}$  je žiarivosť zdroja z plošky  $dS$  v smere kolmom na tú plošku. Medzi  
žiarou, žiarivosťou a žiarivým tokom platia vzťahy:

$$L_e = \frac{d I_{e,\theta}}{dS \cos \theta} = \frac{d^2 \phi_e}{dS d\Omega \cos \theta} \quad (9.11)$$

z ktorých možno odvodiť súvis medzi žiarou a intenzitou vyžarovania, a tiež  
ich spektrálnymi hustotami pre kosínusové žiariče:

$$M_e = \mathcal{K} L_e \quad (9.12)$$

$$M_{e,\lambda} = \mathcal{K} L_{e,\lambda}$$



### 9.1.2 Planckova hypotéza a vyžarovacie zákony

Teplotné žiarenie v uzavretej dutine (obr. 9.1), ktoré môžeme pozorovať cez malý otvor, sa podobá dokonalému plynu. Každá časť vnútorného povrchu dutiny žiari a súčasne žiarenie, vysielané inými časťami povrchu, ako aj žiarenie, dopadajúce cez malý otvor zvonku, odráža aj pohlcuje. Keď predpokladáme, že dutina je vzduchoprázdna, je v každom elemente priestoru nejaké množstvo žiarivej energie, lebo elektromagnetické vlnenie nesie určitú energiu. Ak je teplota stien dutiny (termodynamický systém) ustálená - časovo aj miestne konštantná, je aj žiarenie vo vnútri dutiny ustálené. To znamená, že hustota žiarivej energie vo vnútri dutiny je konštantná. Žiarenie pôsobí tiež určitým tlakom na plochu, keď na ňu dopadá. Tento "energetický plyn" ako pracovná látka termodynamického systému má teda svoju hustotu a tlak. V tomto prípade tiež môžeme použiť podobné úvahy ako v termodynamike a odvodzovať z nich rôzne zákony, podobné zákonom termodynamickým.

Na základe takýchto predstáv prišiel Kirchhoff (roku 1860) k dôležitému zákonu, že podiel intenzity vyžarovania  $M_e$  k činiteľu pohltivosti  $\alpha_e$  závisí len od teploty telesa  $T$ . Kirchhoffov zákon môžeme teda vyjadriť rovnicou

$$\frac{M_e}{\alpha_e} = f(T) \quad (9.13)$$

Tento podiel je len funkciou teploty  $T$ , nezávisí od akosti povrchu telesa. Vzťah (9.13) platí aj pre každú vlnovú dĺžku osobitne, teda i pre monochromatické žiarenie a monochromatickú absorpciu, ale v tomto prípade je funkciou nielen teploty, ale aj určitej vlnovej dĺžky  $\lambda$  z celkového žiarenia.

Kirchhoffov zákon pre monochromatické žiarenie má tvar

$$\frac{M_{e,\lambda}}{\alpha_{e,\lambda}} = F(T, \lambda) \quad (9.14)$$

kde  $F(T, \lambda)$  je funkcia dvoch premenných  $T$  a  $\lambda$ ,

- $M_{e,\lambda}$  - spektrálna hustota intenzity vyžarovania,
- $\alpha_{e,\lambda}$  - spektrálny činiteľ pohltivosti pre žiarenie s vlnovou dĺžkou  $\lambda$ .

Pre čierne teleso je činiteľ pohltivosti rovný jednej pre všetky vlnové dĺžky (9.8c), takže rovnice (9.13) a (9.14) sa zjednodušia a budú mať tvar

$$M_{e,o} = M_e = f(T) \quad (9.15)$$

$$M_{e,o,\lambda} = M_{o,\lambda} = F(T,\lambda) \quad (9.16)$$

Určiť funkcie  $f(T)$  a  $F(T,\lambda)$  bolo ťažiskom bádania v druhej polovici 19. storočia. Ľahšie bolo určiť funkciu  $f(T)$ . Na základe experimentálnych výsledkov stanovil Stefan (roku 1879) túto funkciu v tvare

$$M_o(T) = \sigma T^4 \quad (9.17)$$

ktorú Boltzmann teoreticky odvodil použitím termodynamických zákonov. Vzťah (9.17) sa nazýva Stefan-Boltzmannov zákon.  $\sigma$  je Stefan-Boltzmannova konštanta, ktorej hodnota je

$$\sigma \in \langle 5,67032 \pm 0,00073 \rangle \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (9.18)$$

Aby bol problém žiarenia čierneho telesa vyriešený, musela sa určiť ešte funkcia  $F(T,\lambda)$  v rovnici (9.16). Prvý sa o to pokúsil Wien (roku 1896), keď na základe termodynamických zákonov zistil, že funkcia má tvar

$$M_{o,\lambda}(T,\lambda) = \frac{1}{\lambda^5} \varphi(\lambda T) \quad (9.19)$$

$\varphi(\lambda T)$  je už len funkciou súčinu  $\lambda T$ , teda len jednej premennej.

Okrem toho, že čierne teleso, keď je teplejšie, žiari viac, než keď je chladnejšie (čo už vyjadruje Stefan-Boltzmannov zákon), sa z výsledkov pozorovaní zistilo, že spektrum teplejšieho čierneho telesa má svoje maximum pri kratšej vlnovej dĺžke, než je maximum spektra chladnejšieho čierneho telesa. Pri zahrievaní železná tyč spočiatku svieti červeno, potom jasne oranžovo, až konečne dosiahne "bielu žiaru". Spektrum žiarenia čierneho telesa pre viacero teplôt je na obr. 9.2. Medzi  $L_{o,\lambda}$  a  $M_{o,\lambda}$  platí vzťah (9.12). Tento poznatok viedol Wiena určiť dĺžku vlny  $\lambda_m$ , ktorá odpovedá maximálnej spektrálnej hustote intenzity vyžarovania. Hľadaná vlna je daná podmienkou

$$\frac{\partial M_{o,\lambda}}{\partial \lambda} = 0 \quad (9.20)$$

Po aplikovaní tejto podmienky na funkciu (9.19) dostaneme:

$$-\frac{5}{\lambda_m^6} \varphi(\lambda_m T) + \frac{T}{\lambda_m^5} \frac{\partial \varphi(\lambda_m T)}{\partial \lambda_m} = 0$$

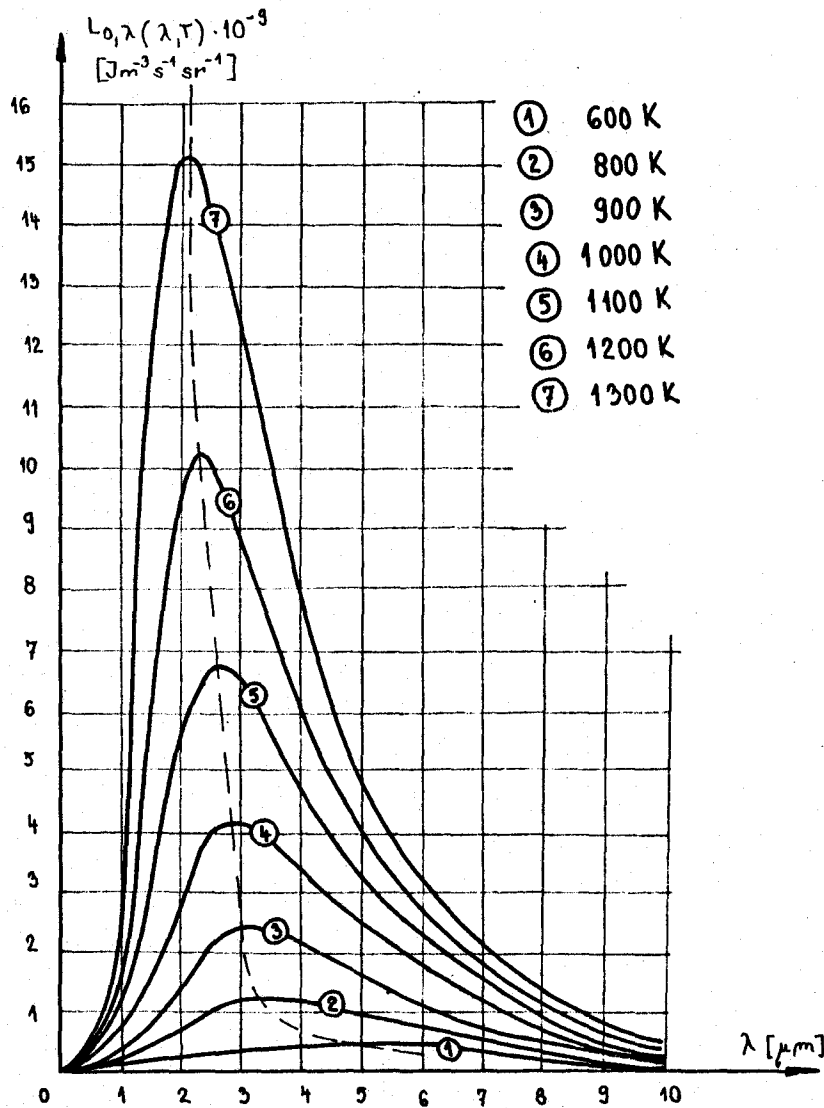
po úprave

$$\lambda_m T \frac{\partial \varphi(\lambda_m T)}{\partial \lambda_m} = 5 \varphi(\lambda_m T) \quad (9.21)$$

Platnosť rovnice (9.21) možno zachovať pre reálny koreň iba vtedy, keď je súčin  $\lambda_m T$  rovný konštante, ktorá vyplýva priamo z merania

$$\lambda_m T = b \quad (9.22)$$

kde  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$ .



Obr. 9.2

Odvođená rovnica (9.22) vyjadruje Wienov posunový zákon. Na obr. 9.2 je závislosť (9.22) vynesená čiarkovane. Medzi hodnotami  $\lambda_m$  a  $\gamma_m$  (frekvencia) neplatí vzťah  $\lambda = c/\gamma$ , lebo maximá  $M_{0,\lambda}$  a  $M_{0,\gamma}$  sú na rôznych miestach

spektra. Wien odvodil aj tvar funkcie  $\varphi(\lambda T)$  z predpokladov klasickej štatistiky

$$\varphi(\lambda T) = c_1 \exp\left(\frac{-c_2}{\lambda T}\right) \quad (9.23)$$

kde  $c_1$  a  $c_2$  sú konštanty. Po dosadení funkcie (9.23) do vzťahu (9.19) dostaneme:

$$M_{0,\lambda}(T,\lambda) = c_1 \lambda^{-5} \exp\left(\frac{-c_2}{\lambda T}\right) \quad (9.24)$$

čo je Wienov zákon o žiarení. Ukázalo sa však, že Wienov zákon je len čiastočne správny a dáva výsledok s presnosťou lepšou než 1 %, ak je  $\lambda T < 0,002$  m K (napr. v červenom svetle pre  $T < 3500$  K). Pre teplotné žiarenie v dlhovlnovej oblasti sa rozchádza s experimentálnymi výsledkami. Túto oblasť sa podarilo uspokojujúco pokryť funkciou

$$\varphi(\lambda T) = c_3 \lambda T \quad c_3 = \frac{c_1}{c_2} = \text{const} \quad (9.25a)$$

ktorú teoreticky odvodili Rayleigh a Jeans. Po dosadení funkcie (9.25a) do vzťahu (9.19) dostaneme:

$$M_{0,\lambda}(T,\lambda) = \frac{c_1}{c_2} \lambda^{-4} T \quad (9.25b)$$

Vzťah (9.25b) je Rayleighov a Jeansov zákon a dáva výsledok s presnosťou lepšou než 1 %, ak je  $\lambda T > 0,72$  m K (napr. v oblasti infračerveného žiarenia vlnovej dĺžky 0,1 mm pre  $T > 7200$  K).

Pri pohľade na Rayleighov a Jeansov zákon (9.25b), ktorý je dôsledkom termodynamických zákonov klasickej fyziky, zistíme jeden jeho podstatný nedostatok. Pri klesajúcej  $\lambda$ , čo odpovedá prechodu do ultrafialovej oblasti spektra, predpovedá (9.25b) neohraničené zväčšovanie spektrálnej hustoty intenzity vyžarovania čierneho telesa. Toto je však v rozpore nielen s experimentálnymi výsledkami, ale aj so zákonom zachovania energie. Tento nesúhlas je známy pod názvom "ultrafialová katastrofa". Nesúlad obidvoch zákonov, ktoré sa vzájomne líšia a opisujú ten istý jav, priviedol k nevyhnutnosti nahradiť ich jediným zákonom. Formálne nebolo ani ťažké nájsť takú funkciu  $\varphi(\lambda T)$ , ktorá by vyhovovala pre celú oblasť vlnových dĺžok a pre všetky teploty žiarenia. Roku 1900 určil Planck funkciu  $\varphi(\lambda T)$  v tvare

$$\varphi(\lambda T) = \frac{c_1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (9.26)$$

ktorá veľmi dobre vyhovovala kladeným požiadavkám, ale nebolo ju možné z klasickej štatistiky teoreticky odvodiť.

Pod zdrojom žiarenia v dutine si predstavujeme elektromagnetické oscilátory (žiariče), ktoré sú rozložené po vnútorných stenách dutiny. Takými oscilátormi môžu byť elektrické náboje, konajúce harmonické kmity rôznych frekvencií. Od nich sa šíria (podľa klasickej fyziky) elektromagnetické vlny, oscilátor žiari. Naopak, každý oscilátor môže elektromagnetické vlnenie aj pohltiť, najmä ak má tú istú frekvenciu, s akou vlnenie vysiela (jeho vlastná frekvencia je v rezonancii s dopadajúcim žiarením). Každý lineárny oscilátor má dva stupne voľnosti. Podľa ekvipartičného zákona pripadá na jeden stupeň voľnosti energia  $\frac{1}{2} k T$ , takže oscilátor má energiu  $k T$ , kde  $k$  je Boltzmannova konštanta (pozri (5.21)). To ale znamená, že energia oscilátora môže rásť neohraničene s teplotou, čo vedie, ako sme už povedali, k nesprávnym výsledkom. Planck usúdil, že práve predpoklad plynulej meniteľnosti energie je nesprávny. Viedlo ho to k prevrátenému predpokladu, že "žiarivá energia môže byť absorbovaná alebo vyžarovaná len po celistvých násobkoch kvanta  $W_\nu = h\nu$ ", kde  $\nu$  je vlastná frekvencia oscilátora a  $h$  je účinkové kvantum (ešte podľa Plancka), teraz nazývaná Planckova konštanta. Jej hodnota je

$$h \in \langle 6,626176 \pm 0,000036 \rangle \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (9.27)$$

Vypočítame strednú hodnotu energie  $\bar{W}(T)$  oscilátora s diskretnými hodnotami energie  $W_n = nh\nu$ , kde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ . Relatívna pravdepodobnosť, že oscilátor má pri teplote  $T$  energiu  $W_n$ , je určená Boltzmannovým faktorom  $\exp(-W_n/kT)$ , ktorá je vždy menšia ako 1. Na určenie  $\bar{W}(T)$  treba  $W_n$  vynásobiť jej relatívnou pravdepodobnosťou výskytu, sčítať cez všetky  $n$  od  $n = 0$  až po  $n \rightarrow \infty$  a vydeliť v dôsledku normovania sumou relatívnych pravdepodobností pre všetky  $n$ . Dostaneme:

$$\begin{aligned} \bar{W}(T) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} W_n \exp\left(-\frac{W_n}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{W_n}{kT}\right)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h \nu \exp\left(-\frac{n h \nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n h \nu}{kT}\right)} \\ &= \frac{h\nu \left[ \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) + 2\exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right) + \dots \right]}{1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right) + \dots} = h\nu \frac{d}{d\beta} \ln \left[ 1 + e^{-\beta} + e^{-2\beta} + \dots \right] \end{aligned} \quad (9.28)$$

kde  $\beta = -h\nu/kT$ . V hranatej zátvorke je nekonečný geometrický rad  $1 + q + q^2 + \dots$ , ktorého súčet je  $s = \frac{1}{1-q}$ , ak  $|q| < 1$ . V našom prípade je  $q = e^\beta = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$  a je menšie ako jedna, teda súčet radu je

$$\frac{1}{1 - e^\beta} = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)} = 1 + e^\beta + e^{2\beta} + \dots \quad (9.29)$$

Po dosadení (9.29) do (9.28) dostaneme:

$$\bar{W}(T) = h\nu \frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^\beta} = \frac{h\nu e^\beta}{1 - e^\beta} = \frac{h\nu}{e^{-\beta}(1 - e^\beta)} = \frac{h\nu}{e^{-\beta} - 1}$$

teda

$$\begin{aligned} \bar{W}(T) &= \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{hc}{\lambda \exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1} = \\ &= \frac{hc}{\lambda \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} \end{aligned} \quad (9.30)$$

kde  $c_2 = hc/k$  je konštanta. Vzťah (9.30) vyjadruje strednú energiu kvantového oscilátora. Samotná Planckova teória je matematicky dosť komplikovaná a ani iné odvodenia Planckovho zákona tu nebudeme uvádzať, lebo sú tiež matematicky náročné. Výsledný vzťah pre spektrálnu hustotu intenzity vyžarovania, ktorý Planck odvodil, je

$$\begin{aligned} M_{0,\lambda}(\lambda, T) &= \frac{2\mathcal{F}c}{\lambda^4} \bar{W}(T) = \frac{2\mathcal{F}hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1} = \\ &= \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} \end{aligned}$$

Planckov zákon sa najčastejšie uvádza v tvare

$$M_{0,\lambda}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (9.31)$$

kde  $c_1 = 2\mathcal{F}hc^2$ ;  $c_2 = hc/k$  a ich hodnoty sú:

$$c_1 \in \langle 3,741832 \pm 0,000020 \rangle \cdot 10^{-16} \text{ W m}^2$$

$$c_2 \in \langle 1,438786 \pm 0,000046 \rangle \cdot 10^{-2} \text{ m K} \quad (9.32)$$

Z Planckovho zákona možno priamo odvodiť Wienov posunový zákon (9.22) a Stefanov a Boltzmannov zákon (9.17). Rayleighov a Jeansov zákon (9.25b) je jeho špeciálnym prípadom pre  $h\nu \ll kT$  (t.j.  $c_2 \ll \lambda T$ ) a Wienov zákon o žiarení (9.24) pre  $h\nu \gg kT$  (t.j.  $c_2 \gg \lambda T$ ).

Ak je  $c_2 \gg \lambda T$ , môžeme v Planckovom zákone (9.31) jednotku v menovateli zanedbať, pretože člen  $\exp(c_2/\lambda T)$  je veľmi veľký. Tak dostaneme známy Wienov zákon o žiarení (9.24)

$$M_{0,\lambda}(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right)$$

Ak je  $c_2 \ll \lambda T$  v Planckovom zákone (9.31)  $\exp(c_2/\lambda T)$  rozvineme pomocou Taylorovho radu  $\exp(c_2/\lambda T) \approx 1 + c_2/\lambda T$ , ostatné členy zanedbáme a dostaneme Rayleigh - Jeansov zákon (9.25b)

$$M_{0,\lambda}(\lambda, T) = \frac{c_1}{c_2} \lambda^{-4} T$$

Stefanov a Boltzmannov zákon dostaneme z Planckovho zákona integráciou cez všetky vlnové dĺžky, teda

$$\begin{aligned} M_0(T) &= \int_0^{\infty} M_{0,\lambda}(\lambda, T) d\lambda = c_1 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} = \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \frac{\pi^4}{15} = 6 T^4 \end{aligned}$$

Pri riešení integrálu sme zaviedli novú integračnú premennú

$$x = \frac{hc}{k\lambda T}$$

z čoho je

$$d\lambda = -\frac{hc}{kT} \frac{dx}{x^2} \quad (9.33)$$

teda

$$M_0(T) = \sigma T^4$$

čo je Stefanov a Boltzmannov zákon (9.17) a konštanta  $\sigma$  je

$$\sigma = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$$

Aj Wienov posunový zákon možno odvodiť z Planckovho zákona (9.31), keď riešime rovnicu

$$\frac{\partial M_{0,\lambda}(\lambda, T)}{\partial \lambda} = \frac{2 \pi h c^2}{\lambda^6} \left[ \frac{5}{e^x - 1} + \frac{\lambda e^x}{(e^x - 1)^2} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right] = 0$$

pre  $\lambda = \lambda_m$ , kde sme použili rovnaké označenie ako v (9.33).

Po úprave dostaneme:

$$x + 5 e^{-x} = 5 \tag{9.34}$$

Rovnici (9.34) okrem  $x = 0$  vyhovuje koreň

$$x = \frac{hc}{k \lambda_m T} = 4,965$$

teda

$$\lambda_m T = b$$

čo je Wienov posunový zákon (9.22).

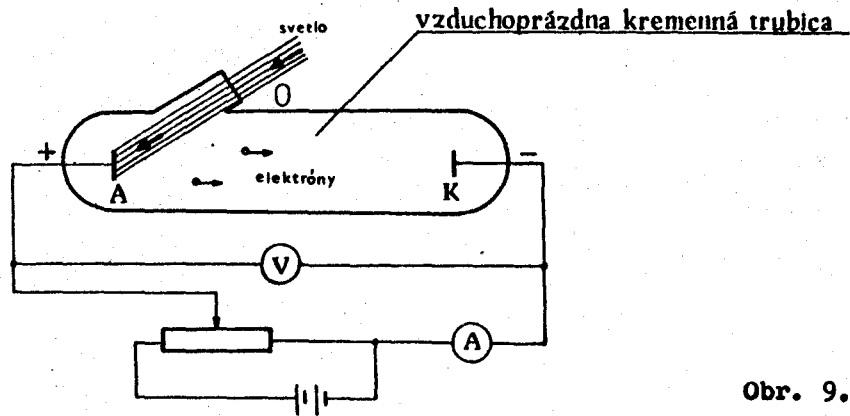
Planckova revolučná myšlienka zmenila základy teoretickej fyziky a viedla ku kvantovej teórii, na ktorej je vybudovaná celá moderná fyzika.

## 9.2 ZAČIATKY KVANTOVEJ TEÓRIE

### 9.2.1 Fotoelektrický jav

Koncom 19. stor. mnoho experimentov (H. Hertz, P. Lenard) ukázalo, že pri dopade svetla s dostatočne veľkou frekvenciou na povrch kovu sú z neho emitované elektróny (okrem alkalických kovov, kde je vždy potrebné ultrafialové svet-

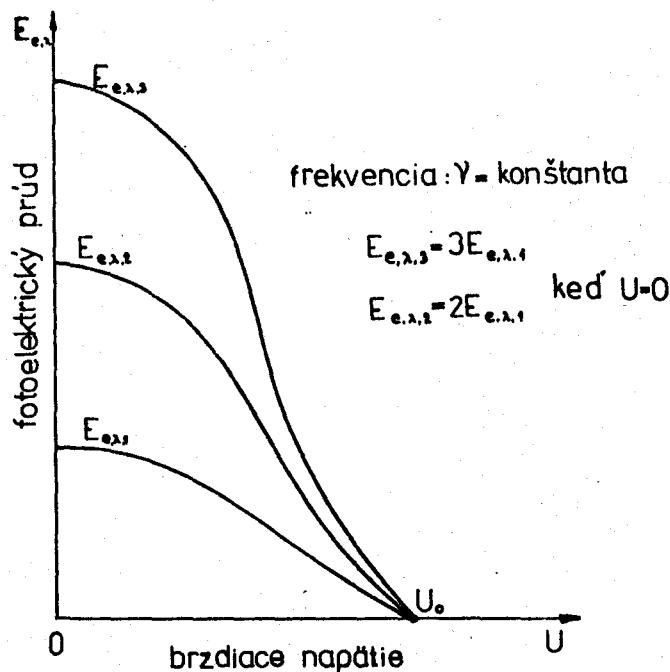




Obr. 9.3

lo). Tento efekt sa nazýva fotoelektrický jav. Na obr. 9.3 vidieť zariadenie, ktoré sa použilo pri týchto pokusoch. Cez okienko O vzduchoprázdnej kremennej trubice dopadá na anódu A svetlo. Pod jeho účinkom vylétujú elektróny. Niektoré z týchto elektrónov majú dostatočnú energiu na to, aby dosiahli katódu K napriek svojej zápornej polarite. Tieto elektróny tvoria elektrický prúd, ktorý je meraný ampérmetrom. So zvyšovaním brzdiaceho napätia  $U$  dopadá na katódu čoraz menej elektrónov a prúd klesá. Keď napätie  $U$  dosiahne, alebo prevýši hodnotu  $U_0$  (rádovo niekoľko voltov), na katódu už nedopadajú elektróny a elektrický prúd netečie. Pokusy ukázali, že:

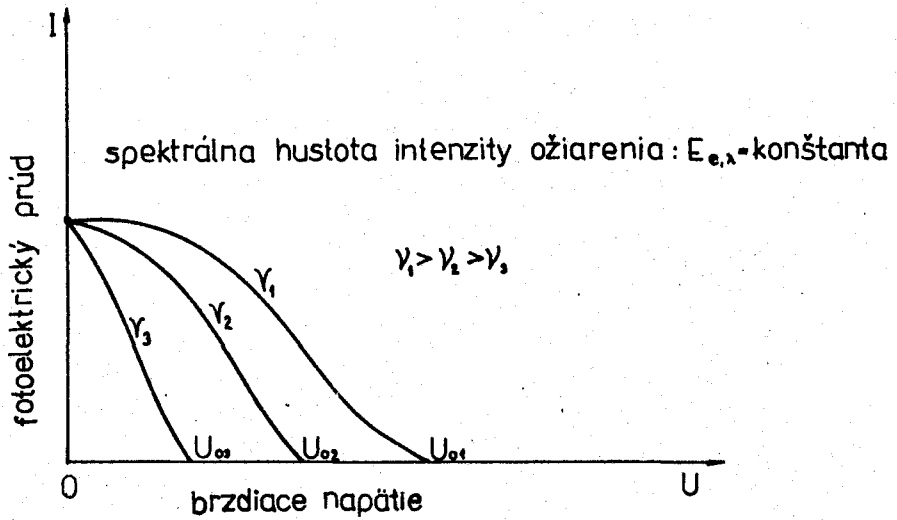
1. ak dopadajúce svetlo je monochromatické, energetické rozdelenie emitovaných elektrónov (tzv. fotoelektróny) nezávisí od jeho intenzity (elektróny majú rovnakú energiu), obr. 9.4,



Obr. 9.4

2. od intenzity dopadajúceho monochromatického svetla závisí len počet emitovaných elektrónov, obr. 9.4,

3. so zvyšovaním frekvencie dopadajúceho svetla a rastie energia emitovaných elektrónov, obr. 9.5.



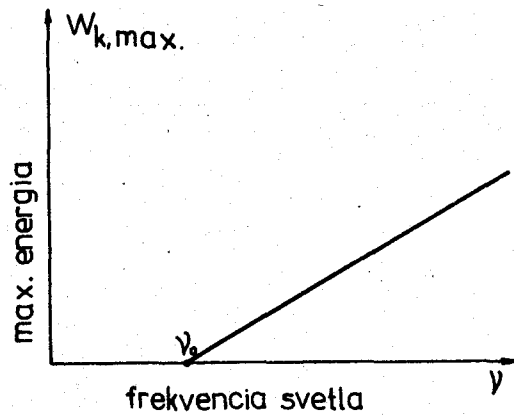
Obr. 9.5

Fotoelektrický jav vyvolal veľký rozruch, lebo ho nevedela vtedajšia klasická fyzika vysvetliť (v rámci klasickej vlnovej teórie svetla, vyplývajúcej z Maxwellových rovníc). Uvažujme fialové svetlo, dopadajúce na povrch sodíka v zariadení podľa obr. 9.3. Merateľný elektrický prúd dosiahneme, keď intenzita ožiarenia povrchu kovu je aspoň  $10^{-6} \text{ W m}^{-2}$ . Vo vrstve sodíka veľkosti 1 atómu a plochy  $1 \text{ m}^2$  je  $10^{19}$  atómov. Keď predpokladáme, že svetlo je absorbované vrchnými 10 vrstvami, potom na jeden atóm dopadá žiarenie výkonu  $10^{-26} \text{ W}$ , čo je menej ako  $10^{-7} \text{ eV/s}$ . Aby elektrón nadobudol energiu  $\approx 1 \text{ eV}$  (čo podľa experimentu má), muselo by naň dopadať svetlo  $10^7 \text{ s}$ , t.j. takmer rok. V skutočnosti neexistuje takmer žiadne časové zdržanie (ak je, potom je menšie ako  $3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ ) medzi dopadom svetla na povrch kovu a emisiou fotoelektrónov. Aj keby sme vzali maximálnu dobu zdržania  $3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ , priemer- ný elektrón podľa elektromagnetickej teórie získa len  $3 \cdot 10^{-16} \text{ eV}$ .

Zvláštna z hľadiska vlnovej teórie je skutočnosť, že energia fotoelektrónu závisí od frekvencie použitého svetla, obr. 9.6. Pri frekvenciách nižších, ako je kritická frekvencia  $\nu_0$ , ktorá je charakteristická pre každý daný kov, nie sú už elektróny emitované. Hodnoty dĺžkovej hranice  $\lambda_0 = c/\nu_0$  pre niektoré kovy sú uvedené v tab. 9.1.

Tabuľka 9.1

Kov	Cs	Na	Zn	Ag	Pt
$\lambda_0$ [nm]	660	500	472	260	196,2



Obr. 9.6

Nad touto prahovou frekvenciou majú fotoelektróny energiu v rozmedzí od nuly až po určitú maximálnu hodnotu, ktorá lineárne rastie so stúpajúcou frekvenciou (pozri obr. 9.6).

Aj keď Planck musel predpokladať emisiu elektromagnetickej energie žeravým telesom po kvantách, nepochyboval o tom, že sa táto energia v priestore šíri spojito ako elektromagnetické vlny. Einstein išiel ďalej a navrhol predpoklad, podľa ktorého sa žiarenie (svetlo) nielen vyžaruje, ale i šíri po jednotlivých kvantách. Pomocou tejto hypotézy sa fotoelektrický jav dá ľahko vysvetliť.

Pri každom pohltení alebo vyžiarení kvanta sa energia elektromagnetickej vlny zmení o  $h\nu$ . Zákon zachovania energie pri pohltení žiarenia a vyrazení elektrónu z kovu možno zapísať v tvare

$$h\nu + W_{p1} + W_{k1} = W_{p2} + W_{k2} \quad (9.35)$$

kde  $h\nu$  je energia dopadajúceho fotónu,  $W_{p1}$  a  $W_{k1}$  sú potenciálna a kinetická energia elektrónu vo vnútri kovu (anódy),  $W_{p2}$  a  $W_{k2}$  sú potenciálna a kinetická energia elektrónu po opustení kovu. Rozdiel  $W_{p2} - (W_{p1} + W_{k1}) = A_\varphi$  nazývame výstupnou prácou, ktorá je rovná  $h\nu_0$ . Potom rovnica (9.35) prejde do tvaru

$$h\nu = h\nu_0 + W_{k2}$$

$W_{k2}$  je maximálna možná energia fotoelektrónu; označíme ju  $W_{k,max}$ , potom bude

$$h\nu = h\nu_0 + W_{k,max}$$

alebo

$$W_{k,max} = h(\nu - \nu_0) = e \cdot U_0 \quad (9.36)$$

kde  $e \cdot U_0$  je práca elektrostatičného poľa, potrebná na zmenu kinetickej energie elektrónu z maximálnej hodnoty, ktorú môže dosiahnuť, na nulovú.

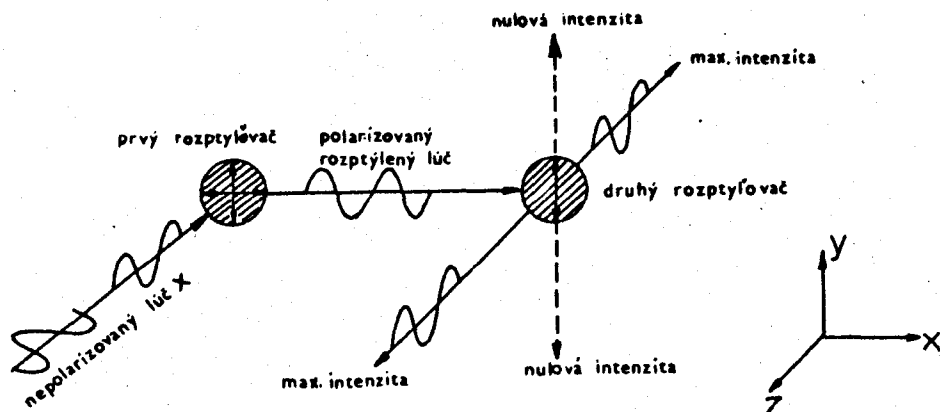
Vzťah (9.36) sa nazýva Einsteinova rovnica. Pomocou nej možno určiť Planckovu konštantu "h" a jej hodnota je taká istá ako hodnota, získaná podľa Planckovho zákona pre teplotné žiarenie čierneho žiariča (telesa).

### 9.2.2 Röntgenove žiarenie

Fotoelektrický jav je presvedčivým dôkazom schopnosti fotónov odovzdávať energiu elektrónom. Je však možný aj obrátený proces, t.j. časť alebo celá kinetická energia pohybujúceho sa elektrónu sa môže premeniť na energiu fotónu. Tento jav bol objavený (i keď nie pochopený) ešte pred teoretickými prácami Plancka a Einsteina. Konrad Wilhelm Röntgen (roku 1895) na základe experimentov zistil, že pri náraze rýchlych elektrónov na látku vzniká veľmi prenikavé žiarenie neznámej podstaty. Ako sa ukázalo, lúče X (ako ich pomenoval sám objaviteľ) tohto žiarenia sa šíria priamočiarno, a to i v elektrickom aj v magnetickom poli, ľahko prechádzajú neprehľadnými materiálmi, vyvolávajú žiarenie fluorescenčných látok a pôsobia na fotografické dosky. Čím rýchlejšie sú pôvodné elektróny, tým prenikavejšie sú výsledné lúče X. S počtom elektrónov sa zvyšuje intenzita zväzku lúčov X.

Krátko po objave bol vyslovený predpoklad, že lúče X sú vlastne elektromagnetické vlny. Elektromagnetická teória predpovedá, že elektrický náboj, pohybujúci sa zrýchlene, bude vyžarovať elektromagnetické vlny a rýchly elektrón iste nemožno zastaviť bez (záporného) zrýchlenia. Žiarenie vznikajúce za týchto okolností sa nazýva brzdné žiarenie. Fakt, že v prvých experimentoch nebol pozorovaný lom lúčov X, možno vysvetliť ich veľmi krátkou vlnovou dĺžkou, menšou ako v ultrafialovom pásme, lebo index lomu látky klesá k jednotke (čo zodpovedá priamočiarnemu šíreniu) s klesajúcou vlnovou dĺžkou.

Vlnovú povahu lúčov X demonštroval ako prvý Barkla (1906), ktorý dokázal ich polarizáciu. Princíp jeho experimentu je znázornený na obr. 9.7. Rozoberme si tento pokus za predpokladu, že lúče X sú elektromagnetické vlny. Zľava v smere osi z dopadá na malý kúsok uhlíka zväzok nepolarizovaných lúčov X. Tieto lúče sa na uhlíku rozptyľujú, to znamená, že elektróny uhlíkových atómov začnú kmitať pozdĺž elektrických vektorov lúčov X a samé sa stávajú zdrojom žiarenia. Pretože elektrický vektor je v elektromagnetickej vlne kolmý na smer jej šírenia, elektrické vektory pôvodného zväzku lúčov X ležia iba v rovine xy. Elektróny uhlíkového terčika sú teda nútené kmitať v rovine xy. Rozptylený lúč X, ktorý sa šíri v kladnom smere osi x, môže mať elektrický vektor len v smere osi y a je teda polarizovaný v rovine. Na dôkaz tejto polarizácie je umiestnený do cesty lúča druhý kúsok uhlíka (obr. 9.7 vpravo). Elektróny tohto terčika sú vo svojich kmitoch obmedzené na smer osi y, a preto budú vyžarovať lúče X, ktoré sa šíria len v rovine xz, a



Obr. 9.7

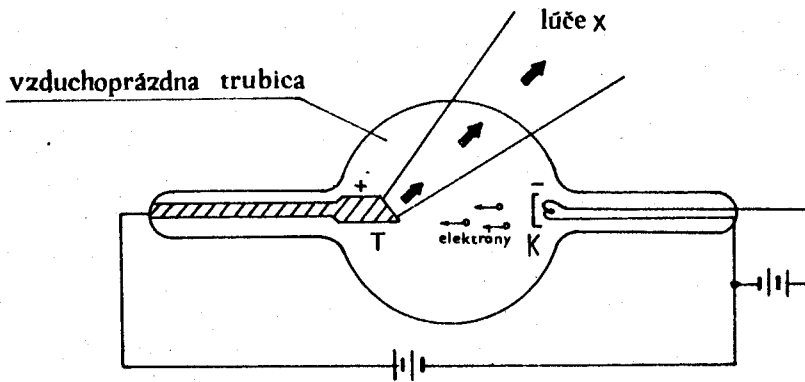
nie v smere osi  $y$ . Pretože rozptylené lúče  $X$  sa skutočne nepozorujú mimo roviny  $xz$ , potvrdzuje sa tým ich vlnový charakter.

Na zistenie vlnovej dĺžky lúčov  $X$  navrhol Max von Laue (roku 1912) metódu, založenú na difrakcii (rozptyle) lúčov  $X$ . Z vlnovej optiky vieme, že k uspokojivým výsledkom dochádza, ak vzdialenosť medzi susednými vrypami difrakčnej mriežky je rádovo rovná vlnovej dĺžke svetla. Difrakčnú mriežku, ktorá by uvedenú požiadavku spĺňala pri pokuse s lúčmi  $X$ , nebolo technicky možné vyrobiť. Z tohto dôvodu navrhol Max von Laue použiť na difrakciu lúčov  $X$  kryštály, ktoré svojim pravidelným usporiadaním atómov tvoria trojrozmernú mriežku (vzdialenosť atómov je rádovo  $0,1$  nm). Príslušné experimenty urobili v nasledujúcom roku Fridrich a Knipping. Prechodom lúčov  $X$  cez doštičku hrúbky  $0,5$  mm, vyrezanú z kryštálu  $ZnS$ , sa na fotografickej doske vytvoril difrakčný obraz, tzv. Laueov diagram. Pri týchto pokusoch boli stanovené vlnové dĺžky od  $0,013$  nm do  $0,048$  nm, čo je desaťtisíckrát menej ako pri viditeľnom svetle a kvantá žiarenia majú  $10^4$ -krát väčšiu energiu.

Pre účely klasifikácie sa dnes elektromagnetické žiarenie s vlnovými dĺžkami od  $10^{-11}$  m do  $10^{-8}$  m [ $(0,01 \div 10)$  nm] označuje ako žiarenie  $X$  (Röntgenove žiarenie).

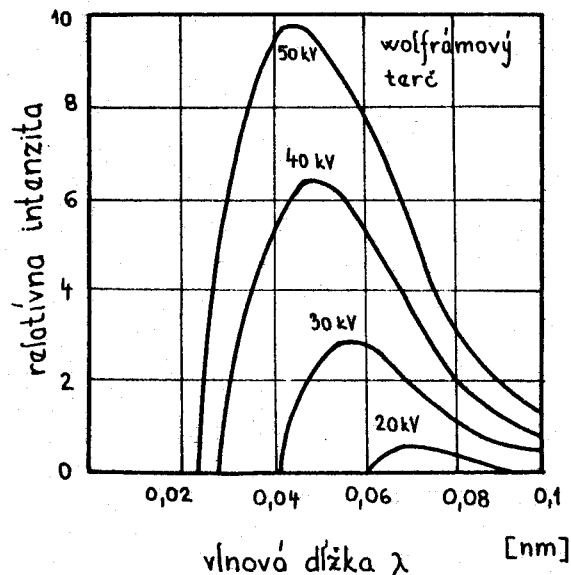
Na obr. 9.8 je znázornený princíp röntgenovej lampy. Katóda  $K$ , ktorá je žeravená vláknom, ktorým prechádza elektrický prúd, dodáva elektróny prostredníctvom termoemisie. Veľký potenciálny rozdiel  $U$ , udržiavaný medzi katódou a kovovým terčom  $T$ , urýchľuje elektróny smerom na terčik. Čelná plocha terčika je voči elektrónovému zväzku pod určitým uhlom a lúče  $X$ , ktoré vyletujú z terča, prechádzajú stenou lampy von. Trubica lampy je vzduchoprázdna, aby sa umožnil nerušený prechod elektrónov k terčiku.

Ako sme už spomenuli, klasická teória elektromagnetického poľa predpovedá vznik brzdného žiarenia pri zrýchlenom pohybe elektrónov, a tým vysvetľuje emisiu lúčov  $X$  pri zastavení rýchlych elektrónov v terči röntgenovej lampy.



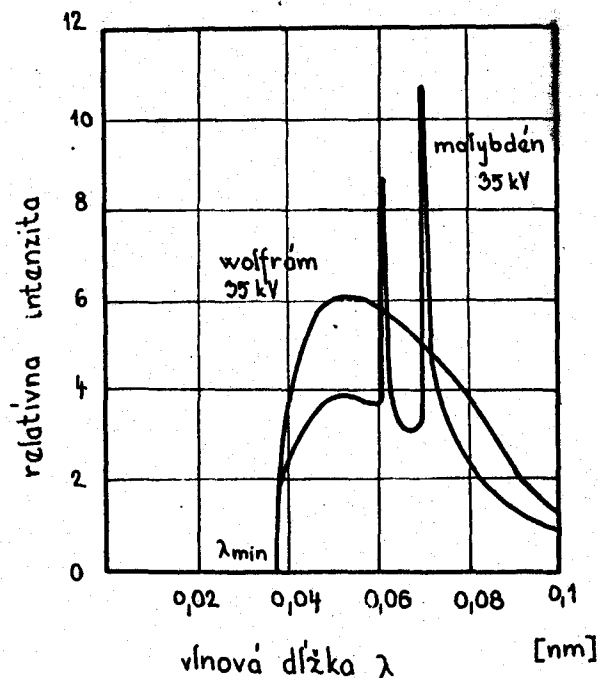
Obr. 9.8

Súhlas klasickej teórie s experimentálnymi výsledkami nie je však v niektorých dôležitých bodoch uspokojivý. Obr. 9.9 a 9.10 ukazujú spektrá lúčov X, vznikajúcich pri ostreľovaní wolfrámových a molybdénových terčov elektrónmi pri rôznych urýchľujúcich napätiach. Krivky vykazujú dve význačné vlastnosti, ktoré nemožno vysvetliť pomocou teórie elektromagnetického poľa:



Obr. 9.9

1. Na molybdénových terčoch sa pri určitých vlnových dĺžkach zreteľne vyskytujú ostré maximá intenzity, spôsobené zvýšenou produkciou lúčov X. Tieto maximá sa objavujú pri rôznych vlnových dĺžkach, charakteristických pre každý materiál terča a majú pôvod v zmene elektrónových štruktúr atómov terča, porušených ostreľujúcimi elektrónmi. Okrem spojitého spektra vznikajú teda lúče X charakteristických vlnových dĺžok (čo je neklasickej efekt) a nazývame to charakteristickým žiarením.
2. Lúče X, produkované pri konštantnom urýchľujúcom napätí  $U$ , majú rôzne vlnové dĺžky, avšak žiadna z nich nie je kratšia ako určitá hodnota  $\lambda_{\min}$ ,



Obr. 9.10

ktorá klesá so stúpajúcim napätím  $U$ . Pri určitom napätí  $U$  je však hodnota  $\lambda_{\min}$  rovnaká pre wolfrámový aj molybdénový terč. Duane a Hunt zistili, že  $\lambda_{\min}$  je nepriamo úmerné napätiu  $U$ , čo sa označuje ako Duane-Huntov zákon:

$$\lambda_{\min} = \frac{d_h}{U} \quad (9.37)$$

kde  $d_h$  je konštanta úmernosti, určená experimentálne, a má hodnotu  $d_h = 1,24 \cdot 10^{-6}$  V m.

Druhú význačnú vlastnosť lúčov X ľahko pochopíme na základe kvantovej teórie žiarenia. Väčšina elektrónov, dopadajúcich na terč, postupne stráca svoju kinetickú energiu v rade zrážok s atómami terča a táto energia sa mení na teplo. (To je dôvod, prečo sú terče v röntgenových lampách obvykle zhotovené z ťažkotaviteľných kovov a prečo sa často používajú aj účinne prostriedky na ich chladenie.) Niekoľko elektrónov však stráca väčšiu časť alebo celú energiu v jednej zrážke s atómom terča a pritom sa vyžarujú lúče X. Okrem ostrých maxím na obr. 9.10 (čo je prvá význačná vlastnosť lúčov X) ich vznik predstavuje obrátený fotoelektrický jav. Namiesto premeny energie fotónu na kinetickú energiu elektrónu mení sa kinetická energia elektrónu na energiu fotónu. Pre fotón s maximálnou energiou môžeme písať:

$$h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \quad (9.38)$$

Zákon zachovania energie pre zrážku elektrónu s atómom terča, pri ktorej elektrón stratí celú svoju energiu, je

$$W_{p1} + W_{k1} = W_{p2} + W_{k2} + h\nu_{\max}$$

kde  $W_{p1}$  a  $W_{k1}$  je potenciálna a kinetická energia elektrónu pred vstupom do terča,  $W_{p2}$  a  $W_{k2}$  sú energie elektrónu vo vnútri terča a  $h\nu_{\max}$  je energia vyžiareného fotónu. Rozdiel

$$W_{p1} - (W_{p2} + W_{k2}) = A\varphi$$

je výstupná práca, ktorú elektrón vykoná pri prechode cez potenciálovú bariéru pri vniknutí do terča. Pretože  $A\varphi \approx 1$  eV, môžeme ju vzhľadom na  $W_{k1} \approx 10^4$  eV zanedbať a položiť  $W_{k1} = eU$  (ako vo vzťahu (9.36)). Po tejto úvahe je

$$h\nu_{\max} = eU \quad (9.39)$$

Keď do (9.38) dosadíme (9.39), dostaneme:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{e} \frac{1}{U} \quad (9.40)$$

Vypočítame  $hc/e$  a zistíme, že sa veľmi dobre zhoduje s konštantou  $d_h$  v experimentálnej rovnici (9.37), vyjadrujúcej Duane-Huntov zákon.

Konvenčný röntgenový prístroj má urýchľujúce napätie okolo 50 kV a pre jeho najkratšiu vlnovú dĺžku podľa (9.37) je  $\lambda_{\min} = 0,0248$  nm. Tejto vlnovej dĺžke odpovedá frekvencia  $\nu_{\max} = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}$ .

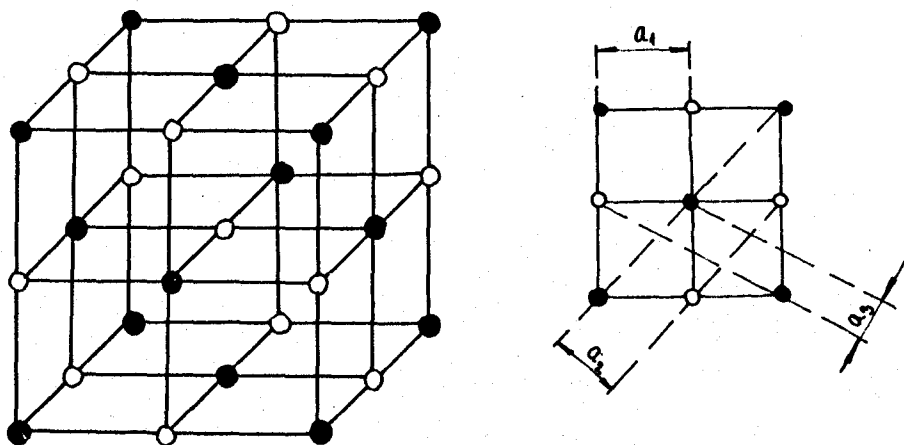
#### 9.2.2.1 Difrakcia röntgenového žiarenia

Vráťme sa naspäť k otázke, akým spôsobom možno demonštrovať lúče X ako elektromagnetické vlny. Kryštál pozostáva z usporiadaného súboru atómov, z ktorých každý môže rozptylovať akúkoľvek elektromagnetickú vlnu, ktorá naň dopadne. Mechanizmus rozptylu je takýto: Atóm v konštantnom elektrickom poli sa polarizuje, lebo na jeho záporne nabitých elektrónoch a kladných jadrách pôsobia sily rovnakého smeru, ale opačnej orientácie. Tieto sily sú malé v porovnaní so silami, ktoré držia pohromade atóm, takže výsledkom je len jeho deformovanie rozdelenia náboja, ekvivalentné elektrickému dipólu. V prítomnosti strieďavého elektrického poľa elektromagnetickej vlny s frekvenciou  $\nu$  sa polarizácia atómu mení s tou istou frekvenciou  $\nu$ . Vytvára sa teda oscilujúci elektrický dipól na úkor časti energie dopadajúcej vlny, ktorej amplitúda sa podľa toho znižuje (pozri časť 7.23). Kmitajúci dipól spätne vyžaruje elektromagnetické vlny s frekvenciou  $\nu$  a tieto sekundárne vlny sa šíria vo všet-



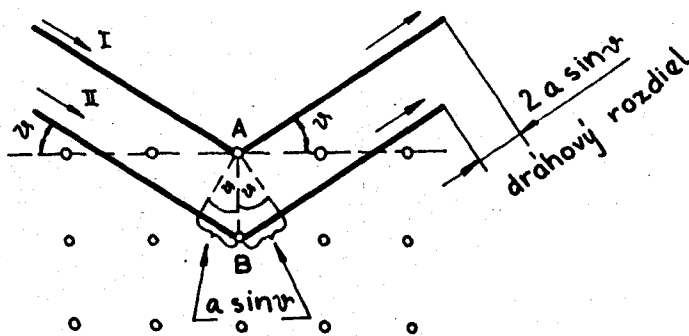
kých smeroch okrem smeru pozdĺž hlavnej osi dipólu. V súbore atómov, ktoré sú vystavené nepolarizovanému žiareniu, je sekundárne žiarenie izotropné, pretože príspevky jednotlivých atómov sú náhodne rozdelené, neusporiadané. Ak by sme použili vlnovú terminológiu, sekundárne vlny majú guľové vlnoplochy na rozdiel od rovinného čela ako dopadajúcich, tak i nerozptýlených vln. Pri rozptyle teda atóm pohlcuje dopadajúce rovinné vlny a pod ich účinkom vyžaruje guľové vlny s tou istou frekvenciou.

Monochromatický zväzok lúčov X, dopadajúci na kryštál, sa rozptyľuje do všetkých smerov vo vnútri kryštálu, avšak v dôsledku pravidelného usporiadania atómov sa rozptýlené vlny v niektorých smeroch zosilňujú a v iných zase zoslabujú. Atómy v kryštáli môžeme uvažovať, ako by tvorili systémy rovnobežných rovín, ktorých vzdialenosť je charakteristická pre daný kryštál (obr. 9.11). Analýzu takehoto problému navrhol (roku 1913) W.L. Bragg a podľa neho sa nazývajú Braggove roviny.



Obr. 9.11

Podmienky, ktoré musí žiarenie spĺňať, aby sa pri rozptyle na atómových interferenciou zosilňovalo, odvodíme na základe schematického náčrtu na obr.9.12. Zväzok lúčov X s vlnovou dĺžkou  $\lambda$  dopadá na kryštál pod uhlom  $\nu$  vzhľadom na systém Braggových rovín, ktorých vzájomná vzdialenosť je  $a$ . Zväzok



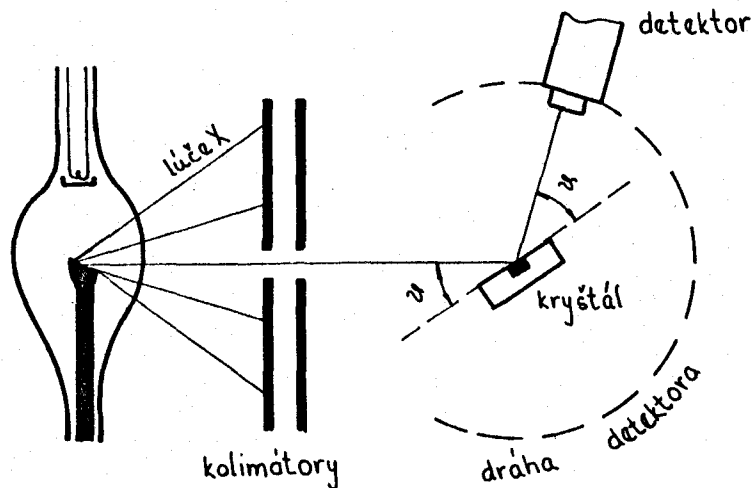
Obr. 9.12

prechádza okolo atómu A v prvej rovine a okolo atómu B v susednej rovine. Obidva atómy rozptyľujú časť zväzku v náhodných smeroch. Zosilnenie interferenciou bude len medzi takými dvoma lúčmi, ktoré sú rovnobežné a ich dráhy sa líšia presne o  $\lambda$ ,  $2\lambda$ ,  $3\lambda$  atď., t.j. dráhový rozdiel musí byť  $n\lambda$ , kde  $n$  je celé číslo. Z lúčov rozptyľovaných na atómoch A a B to platí len pre lúče na obr. 9.12 označené I a II. Prvá podmienka vyžaduje od lúčov I a II, aby ich spoločný uhol rozptylu bol rovný uhlu dopadu  $\psi$  pôvodného zväzku. (Táto podmienka je rovnaká ako v optike pre zrkadlový odraz, preto, aj keď nesprávne, sa rozptyl lúčov X na atómových rovinách nazýva Braggov odraz.) Druhá podmienka vyžaduje

$$2a \sin \psi = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.41)$$

lebo lúč II musí vzhľadom na lúč I uraziť vzdialenosť väčšiu o  $2a \sin \psi$ . Číslo  $n$  je rád rozptýleného zväzku.

Braggova metóda je veľmi výhodná na určovanie vlnových dĺžok röntgenového žiarenia. Laueova metóda je vhodnejšia na štúdium kryštalickej štruktúry látok.

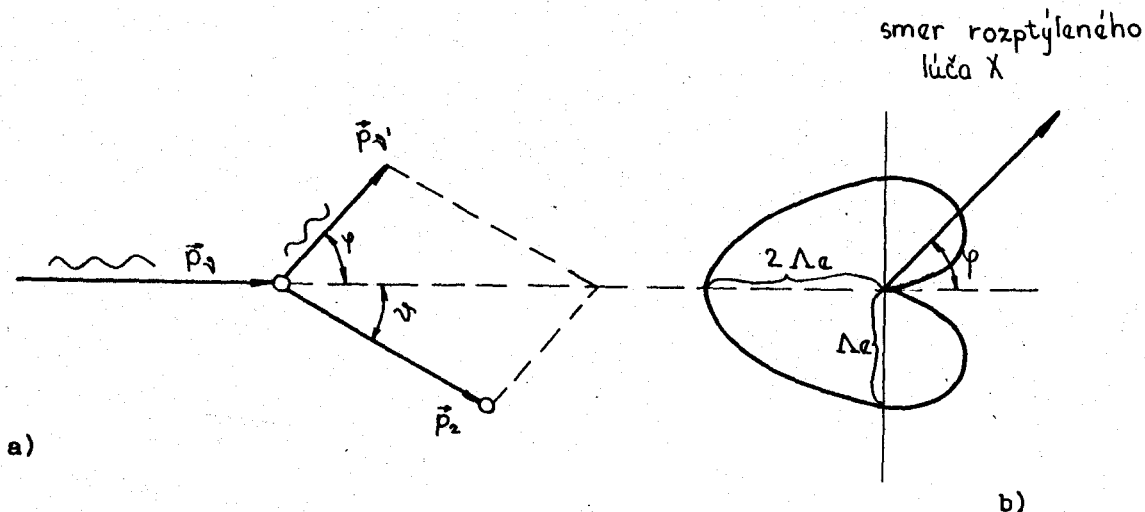


Obr. 9.13

Na obr. 9.13 je znázornený princíp röntgenového spektrometra, využívajúci Braggovu metódu rozptylu. Kolimovaný zväzok lúčov X dopadá na kryštál pod uhlom  $\psi$  a detektor je umiestnený tak, aby registroval lúče pod uhlom rozptylu  $\psi$ , lebo každý lúč spĺňa prvú Braggovu podmienku. Keď sa mení  $\psi$ , detektor zaznamenáva ostré maximá, odpovedajúce rádu rozptýleného zväzku z rovnice (9.41). Ak poznáme vzdialenosť  $a$  medzi susednými Braggovými rovinami v kryštáli, môžeme vypočítať vlnovú dĺžku  $\lambda$  lúčov X.

9.2.2.2 Comptonov jav

Kvantová teória žiarenia postuluje správanie sa fotónov ako častíc s nulovou pokojovou hmotnosťou. Na základe tejto predstavy môžeme skúmať zrážky fotónov s elektrónmi ako zrážky pružných gúľ v klasickej mechanike. Obr. 9.14a názorne ukazuje takúto zrážku. Fotón lúča  $X$  naráža na elektrón (predpokladáme, že je nehybný vzhľadom na laboratórny súradnicový systém) a rozptylom



Obr. 9.14

sa odchyľuje od svojho pôvodného smeru pohybu. Elektrón dostane impulz a začne sa pohybovať. Pre takúto zrážku platí zákon zachovania energie a zákon zachovania hybnosti:

$$h\nu + W_1 = h\nu' + W_2 \quad (9.42)$$

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p}_1 = \vec{p}_{\gamma'} + \vec{p}_2 \quad (9.43)$$

kde  $h\nu$  a  $h\nu'$  sú energie dopadajúceho a rozptýleného fotónu,  $W_1$ ,  $W_2$  energia elektrónu pred a po zrážke. Predpokladáme, že elektrón je pred zrážkou nehybný, teda  $\vec{p}_1 = 0$ . Hybnosť elektrónu po zrážke je  $\vec{p}_2$ . Hybnosti fotónov pred a po zrážke (rozptyle) sú  $\vec{p}_\gamma$  a  $\vec{p}_{\gamma'}$ . Podľa špeciálnej teórie relativity medzi hybnosťou  $\vec{p}$  a energiou častice  $W$  platí vzťah

$$W^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (9.44)$$

kde  $m_0$  je pokojová hmotnosť častice a  $c$  je rýchlosť svetla vo vákuu. Pretože pokojová hmotnosť fotónu je nulová, zo vzťahu (9.44) pre hybnosť fotónu dostaneme:

$$p_\gamma = \frac{W_\gamma}{c} \quad (9.45)$$

Pretože energia fotónu je  $W_\gamma = h\nu$ , po dosadení do (9.45) dostaneme vzťah pre hybnosť fotónu

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c} \quad (9.46)$$

Podľa rovnice (9.44) bude

$$W_1 = m_0 c^2 \quad \text{a} \quad W_2 = (m_0^2 c^4 + p_2^2 c^2)^{1/2}$$

Vektorovú rovnicu (9.43) rozpíšeme na dve skalárne rovnice; jednu v smere pôvodného pohybu fotónu, druhú v kolmom smere. Takto zo zákonov zachovania energie a hybnosti dostaneme tri rovnice:

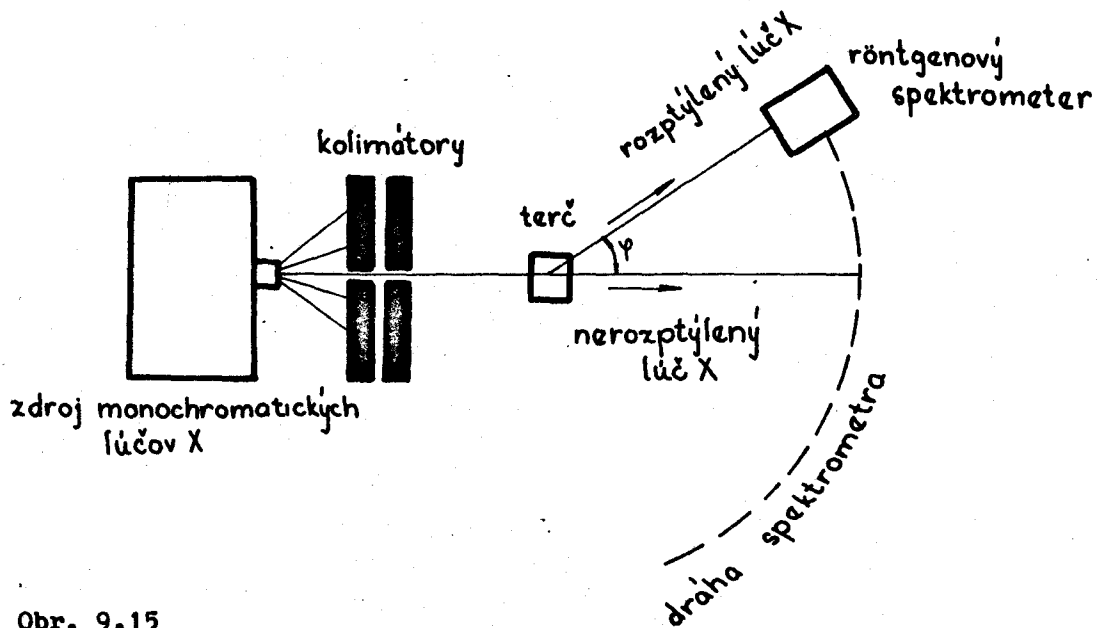
$$\begin{aligned} h\nu + m_0 c^2 &= h\nu' + (m_0^2 c^4 + p_2^2 c^2)^{1/2} \\ \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c} \cos \varphi + p_2 \cos \vartheta \\ 0 &= \frac{h\nu'}{c} \sin \varphi - p_2 \sin \vartheta \end{aligned} \quad (9.47)$$

Ak z rovnice (9.47) vylúčime parametre  $p_2$  a  $\vartheta$  a po dosadení za  $\nu/c = 1/\lambda$  a  $\nu'/c = 1/\lambda'$ , dostaneme:

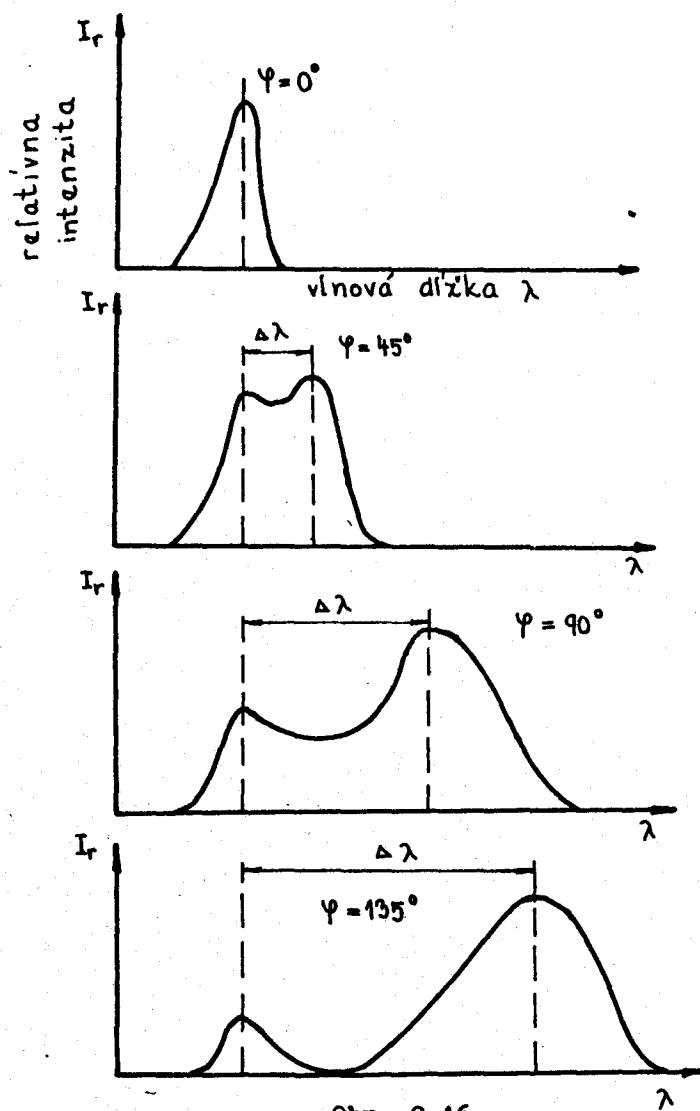
$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) \quad (9.48)$$

Vzťah (9.48), ktorý odvodili Compton a Debye (roku 1922), popisuje jav, ktorý prvý pozoroval na parafíne Compton a podľa neho sa aj nazýva Comptonov jav. Udáva zmenu vlnovej dĺžky fotónu pri rozptyle o uhol  $\varphi$  na častici s pokojovou hmotnosťou  $m_0$  (obr. 9.14b). Ako vidieť, táto zmena nezávisí od vlnovej dĺžky  $\lambda$  dopadajúceho fotónu. Výraz  $h/(m_0 c)$  sa nazýva Comptonova vlnová dĺžka  $\Lambda_0$  rozptyľujúcej častice a pre elektrón je 2,426 pm. Zo vzťahu (9.48) vyplýva, že najväčšia možná zmena vlnovej dĺžky je pre uhol  $\varphi = 180^\circ$ . Vtedy je  $\Delta\lambda = 2\Lambda_0$ . Pretože pre elektrón je  $\Lambda_0$  známa, najväčšia možná zmena vlnovej dĺžky fotónu pri zrážke s elektrónom pri Comptonovom jave je 4,852 pm. Uvedené alebo menšie zmeny sú dobre pozorovateľné len pri röntgenovom žiarení. Pri viditeľnom svetle sa táto zmena nedá pozorovať, pretože predstavuje menej ako 0,01 % z jeho vlnovej dĺžky, zatiaľ čo pri lúčoch X s  $\lambda = 100$  pm je to až 4,852 %.

Experimentálnu ukážku Comptonovho javu názorne vidieť na obr. 9.15. Lúče X s určitou vlnovou dĺžkou, ktorú poznáme, sú zamierené na terč. Na terči sa rozptyľujú do rôznych smerov. Spektrometrom sa pod určitým uhlom  $\varphi$  merajú



Obr. 9.15



Obr. 9.16

všetky lúče X rôznych vlnových dĺžok. Výsledky na obr. 9.16 ukazujú zmenu vlnovej dĺžky  $\Delta\lambda$ , predpovedanú podľa vzťahu (9.48), avšak pri každom uhle  $\phi$  obsahujú rozptýlené lúče X tiež podstatnú zložku s pôvodnou vlnovou dĺžkou. Ako to vysvetliť? Pri odvodzovaní vzťahu (9.48) sme predpokladali, že rozptyľujúce častice sú úplne voľné a môžu sa ľubovoľne pohybovať, čo je správny predpoklad, keď uvážime, že väzbová energia elektrónov k svojim atómom je oveľa menšia ako energia dopadajúcich fotónov. Iné elektróny sú však viazané k atómom veľmi silne a pri zrážke s fotónom odskakuje namiesto jednotlivého elektrónu celý atóm. V takomto prípade je hodnota  $m_0$  vo vzťahu (9.48) pokojovou hmotnosťou celého atómu a je rádovo desiatistíkrát väčšia ako pokojová hmotnosť elektrónu, a Comptonov posuv  $\Delta\lambda$  je taký malý, že ho nezistíme.

### 9.3 ZÁKLADNÉ PREDSTAVY KVANTOVEJ MECHANIKY

#### 9.3.1 De Broglieho vlny

Comptonov jav a Einsteinova interpretácia fotoelektrického javu naznačujú, že elektromagnetické vlny prejavujú pri interakcii s elektrónmi isté korpuskulárne vlastnosti. Planck a Einstein priradzovali energiu a hybnosť fotónu (kvanta) frekvencii (vlnovej dĺžke) elektromagnetickej vlny

$$W_\gamma = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad p = \frac{W_\gamma}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (9.49)$$

Vlnová dĺžka fotónu je

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (9.50)$$

De Broglie, vedený intuitívnym očakávaním symetrie prírody, predpokladal, že vzťah (9.50) je celkom všeobecný, použiteľný tak pre fotóny, ako aj pre hmotné častice. Podľa tohto predpokladu ku každej častici (voľnej), ktorá sa pohybuje rovnomerne a priamočiara (bez pôsobenia vonkajších síl), možno priradiť rovinnú vlnu s frekvenciou  $\nu$  a vlnovou dĺžkou  $\lambda$ , určenú vzťahmi:

$$\nu = \frac{W}{h} \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v} \quad (9.51)$$

ktoré zavedením vlnového vektora  $\vec{k} = (2\pi/\lambda) \vec{n}_0 = (\omega/c) \vec{n}_0$  a kruhovej frekvencie  $\omega = 2\pi\nu = (2\pi c)/\lambda$  (kde  $\vec{n}_0$  je jednotkový vektor, rovnobežný so smerom šírenia vlny, hodnota  $k = 2\pi/\lambda$  je kruhové vlnové číslo) upravíme na tvar

$$\omega = \frac{2\pi}{h} W; \quad \vec{k} = \frac{2\pi p}{h} \vec{n}_0 = \frac{2\pi}{h} \vec{p} \quad (9.52)$$

kde  $W$  a  $\vec{p}$  sú energie a hybnosť častice. Matematicky sú vzťahy (9.51) a (9.52) zhodné so vzťahmi (9.49) a (9.50).

Fyzikálny obsah de Broglieho hypotézy je však radikálne novou myšlienkou. Vlnovú dĺžku príslušnej častice s hybnosťou  $p$  určíme zo vzťahu (9.51)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{(2 m_0 W_k)^{1/2}} \quad (9.53)$$

ak je voľná a pohybuje sa rýchlosťou  $v \ll c$  (nerelativistická častica, teda  $W_k = p^2/2m$ ). Pre voľnú relativistickú časticu ( $v \rightarrow c$ ) je

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{[W_k (W_k + 2 m_0 c^2)]^{1/2}} \quad (9.54)$$

pretože podľa (9.44) a rovnice  $W = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^4}$  [pozri (4.20)] je

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{c^2} (W^2 - m_0^2 c^4) = \frac{1}{c^2} (W - m_0 c^2)(W + m_0 c^2) = \\ &= \frac{1}{c^2} W_k (W_k + 2 m_0 c^2) \end{aligned}$$

Pre  $W_k \ll m_0 c^2$  vzťah (9.54) prechádza na vzťah (9.53).

Ak častica s nábojom  $q$  je urýchlená napätím  $U$ , je  $W_k = qU$ . Príslušnú dĺžku vlny nájdeme dosadením tohto vzťahu do (9.53) a v relativistickom priblížení do (9.54).

Podľa de Broglieho môžeme teda každej častici s hmotnosťou  $m$ , ktorá sa pohybuje a má hmotnosť  $p$ , priradiť vlnu s vlnovou dĺžkou  $\lambda$  podľa (9.51).

Aká je vlnová dĺžka priradená telesu hmotnosti  $1 \text{ kg}$ , pohybujúcemu sa rýchlosťou  $1 \text{ m s}^{-1}$ ? Podľa (9.53) je  $\lambda = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ m}$ . Meranie takýchto dĺžok je za hranicami experimentálnych možností.

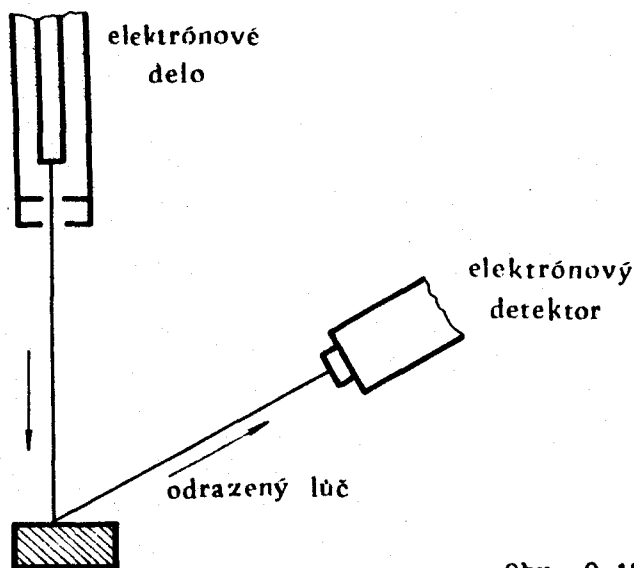
### 9.3.2 Difrakcia častíc

Pre elektróny, urýchlené napätím  $U$ , dostaneme zo vzťahu (9.53)

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m e U}} = \sqrt{\frac{h^2}{2 m e} \cdot \frac{1}{U}} = \sqrt{\frac{150,5 \cdot 10^{-20} \text{ V m}^2}{U}} \quad (9.55)$$

Ak  $U = 37,5 \text{ V}$ , je  $\lambda \approx 0,2 \text{ nm}$  a takéto vlnové dĺžky už možno merať pri difrakcii vln na kryštalických mriežkach, kde medziatómové vzdialenosti sú tiež  $\sim 0,2 \text{ nm}$ .

Potvrdenie de Broglieho hypotézy o vlnových vlastnostiach častíc ako prví podali Davisson a Germer (roku 1927). Študovali rozptyl elektrónov na pevnej látke, keď použili zariadenie, schematicky znázornené na obr. 9.17. Energiu

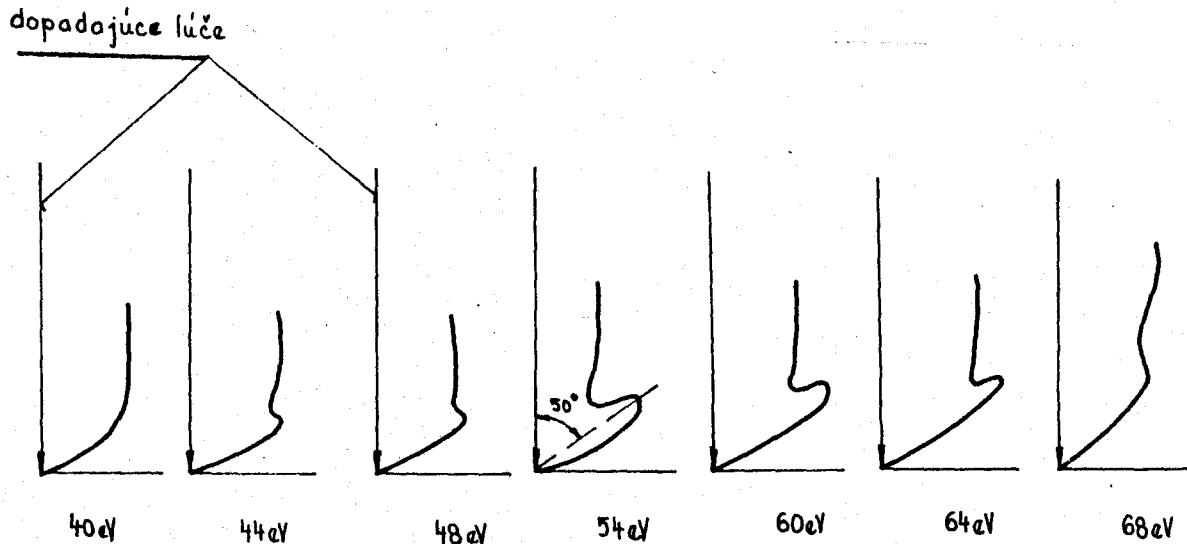


Obr. 9.17

elektrónov v primárnom zväzku, uhol dopadu na terč, ako aj polohu detektora mohli meniť. Klasická fyzika predpovedá, že elektróny sa budú rozptyľovať do všetkých smerov len s nevýraznou závislosťou intenzity od uhla rozptylu a s ešte menšou závislosťou od energie primárnych elektrónov. Ako terč použili nikel. Spočiatku pokus ukázal správnosť predpokladov klasickej fyziky. Uprostred práce pre poruchu na zariadení museli terč z niklu vypáliť v peci pri vysokej teplote, aby odstránili kysličníkovú vrstvu. Pri vypaľovaní sa z drobných kryštálikov niklu, pôvodne chaoticky usporiadaných, vytvoril jeden veľký kryštál, ktorého atómy boli usporiadané do pravidelnej mriežky. Keď pokus znovu zopakovali, výsledky merania sa značne líšili od prvých. Namiesto spo-  
jitej intenzity rozptýlených elektrónov v závislosti od uhla rozptylu pozorova-



vali zreteľné maximá a minimá, ktorých poloha bola závislá od energie elektrónov. Polárne grafy elektrónovej hustoty v uvedenom prípade sú na obr. 9.18. Intenzita je pri každom uhle úmerná vzdialenosti krivky od bodu rozptylu.



Obr. 9.18

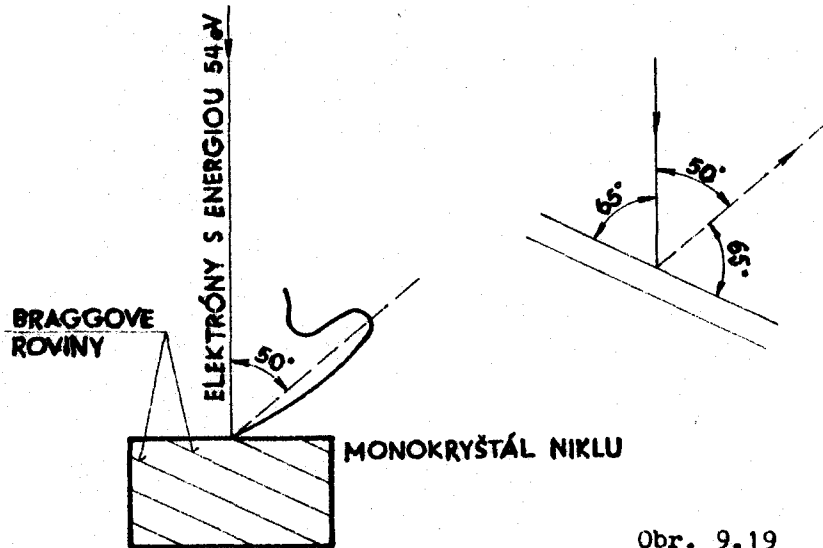
De Broglieho hypotéza navrhuje interpretáciu, podľa ktorej sa elektróny rozptyľujú na terči úplne podobne, ako sa rozptyľujú lúče X, pri Braggovom odraze od kryštalických rovín. Ukážeme si, že de Broglieho vlny môžu skutočne vysvetliť výsledky pokusu Davissona a Germera. V konkrétnom prípade bol zväzok elektrónov s energiou 54 eV zamierený kolmo na niklový terč a ostré maximum v rozdelení elektrónov sa objavilo pod uhlom  $50^\circ$  od smeru pôvodného zväzku. Uhol dopadu a uhol rozptyľu vzhľadom na systém Braggových rovín (obr. 9.19) bude  $65^\circ$  ( $180^\circ - 50^\circ = 65^\circ + 65^\circ$ ). Medzirovinná vzdialenosť v takomto systéme, ktorú môžeme merať difrakciou lúčov X, je 0,091 nm. Po dosadení do Braggovej rovnice (9.48) pre maximum v difrakčnom obraze, pre  $a = 0,091$  nm,  $\vartheta = 65^\circ$  a za predpokladu, že  $n = 1$ , de Broglieho vlnová dĺžka elektrónov  $\lambda$  po difrakcii je

$$n\lambda = 2a \sin \vartheta = 2 \cdot 0,091 \text{ nm} \cdot \sin 65^\circ = 0,165 \text{ nm} \quad (9.56)$$

Použijeme teraz de Broglieho vzorec (9.55) pre  $\lambda$  elektrónov

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{h}{\sqrt{2 m e U}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ A s} \cdot 54 \text{ V}}} = 0,166 \text{ nm} \quad (9.57)$$

Použili sme nerelativistický vzťah, lebo  $e U \ll m_0 c^2$ . Výpočty (9.56) a (9.57)



Obr. 9.19

sa výborne zhodujú, môžeme teda tvrdiť, že Davissonov a Germerov pokus poskytuje priame overenie de Broglieho hypotézy o vlnovej povahe pohybujúcich sa elektrónov.

Elektróny nie sú jedinými časticami (telesami), ktorých vlnové vlastnosti môžeme dokázať. Bola porovnaná difrakcia neutrónov a celých atómov pri rozptyle vhodnými kryštálmi a je to práve neutrónová difrakcia, ktorá je dnes popri difrakcii elektrónov a difrakcii lúčov X najpoužívanejším nástrojom pri skúmaní kryštalických štruktúr.

### 9.3.3 Vlnová funkcia. Vlnový balík

Ako sme už spomenuli, podľa de Broglieho hypotézy ku každej (voľnej) častici, ktorá sa pohybuje rovnomerne a priamočiara (bez pôsobenia vonkajších síl), patrí rovinná vlna. Rovinnú vlnu (pozri vzťah (7.50)) najčastejšie zapisujeme v tvare

$$\phi(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + B \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (9.58)$$

Keď zavedieme substitúciu  $A = D \cos \alpha$ ,  $B = D \sin \alpha$ , dostaneme ekvivalentný zápis vzťahu (9.58) v tvare

$$\phi(\vec{r}, t) = D (\cos \alpha \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \sin \alpha \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

$$\phi(\vec{r}, t) = D \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \quad (9.59)$$

Výhodnejšie je zapisovať rovinnú vlnu v komplexnom tvare

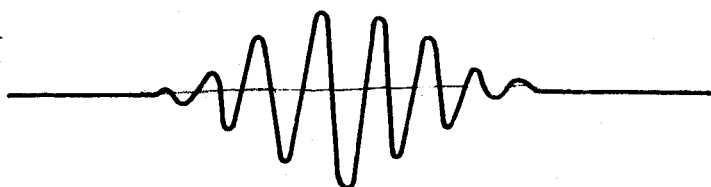
$$\phi(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \quad (9.60)$$

kde  $C$  je komplexné číslo  $C = B - i A$ . Keď použijeme Eulerov vzorec  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  a v rovnici (9.60) necháme len reálnu časť, dostaneme rovnicu (9.58). Používa sa aj zápis

$$\phi(\vec{r}, t) = C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = C \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (9.61)$$

pričom sa bez osobitného vyjadrenia rozumie na pravej strane len reálna časť.

Častice v klasickej mechanike sú vždy lokalizované na určitú oblasť priestoru. Ak majú de Broglieho vlny opisovať pohyb telies, musia byť tiež lokalizované na určitú oblasť priestoru, ako je to znázornené na obr. 9.20. Hoci zápis (9.61) popisuje nekonečný rad vln s rovnakou amplitúdou, môžeme superpozíciou týchto rovinných vln vytvoriť vlnu, zodpovedajúcu reálnym podmienkam. Takáto vlna sa nazýva vlnový balík.



Obr. 9.20

Známym príkladom, ako vznikajú vlnové balíky, sú rázy. Pri skladaní dvoch zvukových vln s rovnakou amplitúdou, ale s rôznou frekvenciou, počujeme tón, ktorý je aritmetickým priemerom dvoch pôvodných frekvencií a s amplitúdou, ktorá sa periodicky zoslabuje a zosilňuje. Počet takých fluktuácií sa rovná rozdielu pôvodných frekvencií (pozri vzťah (7.39)).

Vlnový balík môžeme aj matematicky opísať ako superpozíciu rovinných vln, ktorých kruhové vlnové čísla (vlnové dĺžky) sú z úzkeho intervalu  $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$  a všetky majú smer kladnej osi  $x$ . Superponujeme rovinné vlny typu (9.61)

$$\phi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} C(k) \exp [i (kx - \omega(k) t)] dk \quad (9.62)$$

Pretože vlnové kruhové číslo sa mení, závisí potom od neho aj kruhová frekvencia  $\omega(k)$ , ako je to naznačené vo vzťahu (9.62). Predpokladajme, že amplitúda  $C(k)$  je v intervale  $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$  konštantná  $C(k) = C(k_0)$ . Keď je  $\Delta k$  malé, môžeme  $\omega(k)$  rozvinúť v okolí  $k_0$  do radu pomocou Taylorovho rozvoja

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left[ \frac{d \omega(k)}{dk} \right]_{k=k_0} (k - k_0) + \dots \quad (9.63)$$

Členy s vyššími mocninami  $\Delta k = k - k_0$  sme zanedbali. Potom rovnica (9.62) po dosadení (9.63) a úprave nadobudne tvar

$$\phi(x, t) = C(k_0) \exp [i (k_0 x - \omega_0 t)] \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[ -i (k - k_0) \left( \frac{d \omega_0}{dk} t - x \right) \right] dk \quad (9.64)$$

keď sme pre zjednodušenie označili:

$$\omega_0 = \omega(k_0) \quad \text{a} \quad \frac{d \omega_0}{dk} = \left[ \frac{d \omega(k)}{dk} \right]_{k=k_0}$$

Postupným riešením vzťahu (9.64), keď  $\Delta k = k - k_0$  a  $dk = d(\Delta k)$  dostaneme:

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= C(k_0) \exp [i (k_0 x - \omega_0 t)] \left\{ \int_0^{\Delta k} \exp \left[ -i \Delta k \left( \frac{d \omega_0}{dk} t - x \right) \right] d(\Delta k) + \int_0^{\Delta k} \exp \left[ i \Delta k \left( \frac{d \omega_0}{dk} t - x \right) \right] d(\Delta k) \right\} = \\ &= 2 C(k_0) \exp [i (k_0 x - \omega_0 t)] \cdot \int_0^{\Delta k} \cos \left[ \Delta k \left( \frac{d \omega_0}{dk} t - x \right) \right] d(\Delta k) = 2 C(k_0) \Delta k \exp [i (k_0 x - \omega_0 t)] \cdot \\ &\quad \frac{\sin \left[ \Delta k \left( \frac{d \omega_0}{dk} t - x \right) \right]}{\Delta k \left( \frac{d \omega_0}{dk} t - x \right)} \end{aligned}$$

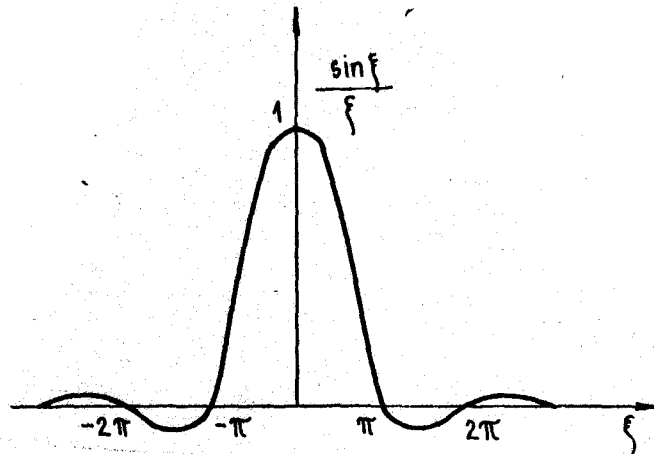
Teda

$$\phi(x, t) = A(x, t) \exp [i (k_0 x - \omega_0 t)] \quad (9.65)$$

kde

$$A(x, t) = 2 C(k_0) \Delta k \frac{\sin \xi}{\xi}; \quad \xi = \Delta k \left( \frac{d \omega_0}{dk} t - x \right)$$

Priebeh funkcie  $(\sin \xi)/\xi$  je na obr. 9.21. V bode  $\xi = 0$  nie je síce definovaná, ale má v tomto bode limitu sprava aj zľava



Obr. 9.21

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin \xi}{\xi} = 1$$

Vlnový balík, opísaný funkciou (9.65), je len špeciálny prípad. V reálnom prípade sa integrácia neohraničuje úzkym intervalom ( $k_0 - \Delta k$ ,  $k_0 + \Delta k$ ). Všeobecná vlastnosť vlnových balíkov je ich rozplývanie, čoho príčinou je disperzia de Broglieho vln (na rozdiel od elektromagnetických vln vzniká aj vo vákuu). Ak označíme  $\Delta x$  ako odhad lineárneho rozmeru vlnového balíka, možno ukázať, že platí:

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{\omega^2} + \left( \frac{h \omega t}{2 \pi m} \right)^2 \quad (9.66)$$

kde  $\omega = (\Delta k)_0$  je rozsah hodnôt kruhového vlnového čísla  $k$  v čase  $t = 0$ . Čím je vlnový balík užší, tým väčší rozsah hodnôt vlnového čísla je potrebný.

#### 9.3.4 Fázová a grupová rýchlosť

Výrazy v exponente v rovniciach (9.50) a (9.61) alebo argumenty trigonometrických funkcií v rovniciach (9.58) a (9.59) nazývame fázou. Označme fázu  $\varphi(\vec{r}, t)$ . Pod vlnoplochou budeme rozumieť plochu, na ktorej má fáza danú konštantnú hodnotu. Rovnica takejto vlnoplochy je

$$\varphi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{const} \quad (9.67)$$

Rýchlosť posunu danej vlnoplochy nazývame fázovou rýchlosťou. Keď uvažujeme rovinnú vlnu, ktorá sa šíri v kladnom smere osi  $x$ , potom rovnica (9.67) má tvar  $(kx - \omega t) = \text{const}$ . Derivovaním podľa času dostaneme pre fázovú rýchlosť

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (9.68)$$

Rýchlosť, ktorou sa pohybuje maximum vlnového balíka, vytvoreného superpozíciou rovinných vln z úzkeho intervalu  $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$  kruhového vlnového čísla, sa nazýva grupová rýchlosť. Ako z rovnice (9.65) a z obr.9.21 vidieť, poloha maxima vlnového balíka je daná rovnicou

$$\frac{d\omega_0}{dk} t - x = 0$$

z toho pre grupovú rýchlosť vyplýva:

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \quad (9.69)$$

V závislosti od toho, ako sa mení fázová rýchlosť v tom-ktorom prostredí, môže grupová rýchlosť vo všeobecnosti byť väčšia alebo menšia ako fázová rýchlosť. Ak je  $v_f$  konštantná pre všetky vlnové dĺžky, sú obe rýchlosti  $v_f$  a  $v_g$  rovnaké.

Keď vyjadríme  $\omega$  a  $k$  ako funkcie rýchlosti  $v$ , ktorou sa pohybuje častica a ktorej pokojová hmotnosť je  $m_0$ , platí:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi m_0 c^2}{h} = \frac{2\pi m_0 c^2}{h \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi m v}{h} = \frac{2\pi m_0 v}{h \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Pre fázovú rýchlosť dostaneme vzťah

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v} \quad (9.70)$$

ktorá je nielen väčšia ako rýchlosť častice  $v$ , ale aj ako rýchlosť svetla  $c$ .

Grupová rýchlosť  $v_g$  de Broglieho vln, spojených s časticou (telesom), je

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega/dv}{dk/dv} = \frac{2\pi m_0 v}{h (1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{h (1 - v^2/c^2)^{3/2}}{2\pi m_0} = v$$

takže

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \quad (9.71)$$

Vlnový balík, spojený s pohybujúcou sa časticou, sa pohybuje tou istou rýchlosťou ako častica.

### 9.3.5 Interpretácia de Broglieho vln

Keď de Broglie navrhol priradenie rovinatej vlny každej častici (telesu), ktorá sa pohybuje priamočiarno rovnomerne, rozvinula sa intenzívna diskusia o fyzikálnom zmysle týchto vln. Dôležitým argumentom v tomto probléme bola difrakcia častíc. Pokus Davissona a Germera ukázal:

- a) zväzok elektrónov, dopadajúcich na kryštalickú mriežku, vytvára interferenčný obraz, ktorý je presne taký, aký by sa vytvoril od dopadajúcej rovinatej vlny s vlnovou dĺžkou  $\lambda = h/p$ ;
- b) interferenčný obraz nezávisí od intenzity dopadajúceho zväzku, a preto nie je dôsledkom vzájomnej interakcie elektrónov vo zväzku, teda interferenčný obraz by sa vytvoril, aj keby elektróny dopadali na kryštalickú mriežku po jednom;
- c) každý elektrón pri dopade na fotografickú platňu zanecháva bodové sčernenie, ktorého veľkosť sa rádovo rovná rozmeru molekuly fotoemulzie.

Tieto poznatky viedli k rôznym hypotézam výkladu de Broglieho vln.

Schrödinger považoval de Broglieho vlny za "hmotnostné vlny", ktoré sú takou istou realitou ako elektromagnetické vlny v klasickej fyzike. Elektrón sa považoval za vlnový balík "hmotnostného poľa" malých rozmerov. Táto hypotéza sa dostala do rozporu so skutočnosťou, lebo nevedela vysvetliť malé rozmery sčernenia, vyvolané jedným elektrónom v interferenčnom obraze, na rozdiel od rozmerov vlnového valíka de Broglieho vln, ktorého rozmery sú také ako celý interferenčný obraz.

De Broglie mal nasledujúcu predstavu: častica je lokalizovaný objekt, ale je viazaná na vlnu (s vlastnosťami de Broglieho vln), šíriacu sa priestorom. Táto predstava už nie je v rozpore so skutočnosťou pri vysvetľovaní interferenčného pokusu. Jej zavedenie si však vyžaduje vysvetlenie interakcie častice s de Broglieho vlnou, ktorá ho "pilotuje" do miest, kde je amplitúda vlny maximálna. V čase, keď táto predstava vln "pilotov" vznikla, neurobil sa pokus o jej ďalšie rozpracovanie.

Born medzitým priradil de Brogliemu vlnám štatistický charakter. Častica zostáva lokálnym objektom a de Brogliemu vlna  $\phi(\vec{r}, t)$  sa interpretuje ako miera pravdepodobnosti nájsť časticu v čase  $t$  v okolí bodu, určeného polohovým vektorom  $\vec{r}$ . Ak je častica popísaná vlnovým balíkom  $\phi(\vec{r}, t)$ , potom pravdepodobnosť nájsť časticu v objeme  $dV = |d\vec{r}|^3$ , ktorý je v mieste určenom  $\vec{r}$ , je

$$dP(\vec{r}, t) = |\phi(\vec{r}, t)|^2 dV \quad (9.72)$$

kde  $dV = dx dy dz$ . Výraz  $|\phi(\vec{r}, t)|^2$  je hustota pravdepodobnosti nájdania častice v čase  $t$  v mieste určenom polohovým vektorom  $\vec{r}$ .

Je veľký rozdiel medzi pravdepodobnosťou udalosti a udalosťou samou. Aj keď budeme hovoriť o vlnovej funkcii  $\phi(\vec{r}, t)$ , ktorá opisuje časticu, že je rozprestretá v priestore, to neznamená, že aj častica je takto rozprestretá v celom priestore, kde platí  $\phi(\vec{r}, t) \neq 0$ . Keď je pravdepodobnosť, že nájdeme časticu v určitom mieste v určitom čase 50 %, to neznamená, že tam nájdeme 50 % častice. Keď experiment zahŕňa veľký počet identických častíc, ktoré sú opísané rovnakou vlnovou funkciou  $\phi(\vec{r}, t)$ , potom skutočná hustota častíc v objeme  $dV$  v mieste s  $\vec{r}$  a v čase  $t$  je úmerná pravdepodobnosti  $|\phi(\vec{r}, t)|^2 dV$ .

Volnej častici, ktorá sa pohybuje rovnomerne priamočiarno odpovedá rovinná vlna  $\phi(\vec{r}, t) = C \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ . Hustota pravdepodobnosti pre nájdanie takejto častice v ľubovoľnom bode priestoru je konštantná. Funkcia  $\phi(\vec{r}, t)$  nie je priamo merateľná veličina, preto môže byť aj komplexnou funkciou. Keď  $\phi(\vec{r}, t)$  má nenulovú reálnu aj imaginárnu časť, hustota pravdepodobnosti bude daná súčinom  $\phi(\vec{r}, t) \cdot \phi^*(\vec{r}, t)$ . Funkcia  $\phi^*(\vec{r}, t)$  je k funkcii  $\phi(\vec{r}, t)$  komplexne združená (v celej funkcii urobíme zmenu  $i$  za  $-i$  všade tam, kde sa v nej  $i$  nachádza).

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) \phi^*(\vec{r}, t) &= C \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] C^* \exp [-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \\ &\quad - \omega t)] = B^2 + A^2 = \text{const} \end{aligned}$$

kde  $C = B - iA$  a  $C^* = B + iA$ .

Bornova interpretácia zavádza do fyziky prvok pravdepodobnosti, ktorý sa nevyskytuje v klasickej fyzike.



#### 9.4 SCHRÖDINGEROVA ROVNICA

Volnej častici, ktorá sa pohybuje rovnomerne priamočiara (bez pôsobenia vonkajších síl), je priradená rovinná vlna vyjadrená vzťahom

$$\phi(\vec{r}, t) = C \exp [ i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) ] \quad (9.73)$$

Predpokladajme, že sa voľná častica pohybuje v kladnom smere osí  $x$ , potom funkcia (9.73) bude mať tvar

$$\phi(x, t) = C \exp [ i (kx - \omega t) ] \quad (9.74)$$

Dosaďme za  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  a za  $\omega = 2\pi\nu$  do (9.74) a dostaneme:

$$\phi(x, t) = C \exp \left[ i 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (9.75)$$

Keď do (9.75) dosadíme vzťahy (9.51), bude

$$\phi(x, t) = C \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (px - wt) \right] \quad (9.76)$$

kde  $\hbar = h/2\pi$ .

Energia častice, ktorá sa pohybuje, je daná súčtom kinetickej a potenciálnej energie:  $W = W_k + W_p$ . Ak sa častica pohybuje v kladnom smere osi  $x$  rýchlosťou  $v \ll c$  (nerelativistická častica), jej energia je

$$W = \frac{p^2}{2m} + W_p(x, t) \quad (9.77)$$

##### 9.4.1 Časový tvar Schrödingerovej rovnice

Chceme získať základnú diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením by boli funkcie  $\phi(\vec{r}, t)$ . V takejto diferenciálnej rovnici by mali byť zahrnuté aj rôzne obmedzenia kladené na pohyb častice.

Derivujeme funkciu (9.76) dvakrát podľa  $x$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = - \frac{p^2}{\hbar^2} \phi \quad (9.78)$$

a raz podľa  $t$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - i \frac{W}{\hbar} \phi \quad (9.79)$$

Vynásobme rovnicu (9.77) funkciou (9.76) a máme:

$$W \phi = \frac{p^2}{2m} \phi + W_p \phi \quad (9.80)$$

Zo vzťahu (9.78) je

$$p^2 \phi = - \hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (9.81)$$

a zo vzťahu (9.79)

$$W \phi = - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9.82)$$

Dosadením výrazov (9.81) a (9.82) do rovnice (9.80) dostaneme:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - W_p \phi \quad (9.83)$$

Rovnica (9.83) je jednorozmerná časová Schrödingerova rovnica.

V trojrozmernom prípade má Schrödingerova rovnica tvar

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) - W_p \phi \quad (9.84)$$

alebo

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi - W_p \phi \quad (9.85)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceov operátor v kartézskych súradniciach.

Schrödingerova rovnica v tvare (9.85) platí vo všetkých súradnicových systémoch za predpokladu, že sa Laplaceov operátor v každom takomto systéme vyjadrí pomocou súradníc, odpovedajúcich tomuto systému.

Pri hľadaní Schrödingerovej rovnice sme vychádzali z vlnovej funkcie pre voľnú časticu, pre ktorú je potenciálna energia  $W_p = \text{const}$ . Schrödingerova rovnica platí aj pre prípady, keď na časticu pôsobia ľubovoľné sily, ktoré závisia nielen od polohy častice, ale aj od času, čo sa prejaví v závislosti  $W_p(x, y, z, t)$ . Platnosť Schrödingerovej rovnice síce nemožno dokázať, môžeme ju iba postulovať. Keď riešenie Schrödingerovej rovnice pre rôzne fyzikálne javy odpovedajú experimentálnym výsledkom, je postulát reprezentovaný Schrödingerovou rovnicou platný. Schrödingerova rovnica je základným zákonom sama osebe. Možno z nej odvodiť druhý Newtonov pohybový zákon, keď hodnoty veličín v nej vystupujúcich berieme nie ako ich určité, ale ako stredné hodnoty. Schrödingerova rovnica nezvyší teda počet postulátov, potrebných na popis fyzikálneho sveta.

#### 9.4.2 Stationárny tvar Schrödingerovej rovnice

V mnohých prípadoch potenciálna energia častice nezávisí explicitne od času. Sily, ktoré na časticu pôsobia, a teda aj  $W_p$ , sa menia len s polohou častice. Za predpokladu, že  $W_p$  nie je funkciou času, môžeme Schrödingerovu rovnicu zjednodušiť odstránením závislosti od času. Keď jednorozmernú vlnovú funkciu  $\phi(x, t)$  (9.76), odpovedajúcu voľnej častici, rozpíšeme:

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= C \exp \left[ (i/\hbar)(px - \omega t) \right] = C \exp \left( \frac{ipx}{\hbar} \right) \exp \left( - \frac{i\omega t}{\hbar} \right) = \\ &= \psi(x) \exp \left( - \frac{i\omega t}{\hbar} \right) \end{aligned} \quad (9.86)$$

$\phi(x, t)$  je súčinom časovo závislej funkcie  $\exp(-i\omega t/\hbar)$  a funkcie polohy  $\psi(x) = C \exp(ipx/\hbar)$ . V skutočnosti je  $\phi(x, t)$  súčinom týchto dvoch funkcií nielen pre voľnú časticu, ale pre všetky vlnové funkcie častíc, na ktoré pôsobia konzervatívne sily.

Dosadením vzťahu (9.86) do časovej Schrödingerovej rovnice (9.83) dostaneme:

$$\begin{aligned} - W \psi \exp(-i\omega t/\hbar) &= \frac{\hbar^2}{2m} \exp(-i\omega t/\hbar) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - \\ &- W_p(x) \psi(x) \exp(-i\omega t/\hbar) \end{aligned}$$

Po úprave

$$W\psi(x) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W_p \right) \psi(x) \quad (9.87)$$

Jej trojrozmerný tvar je

$$W\psi(\vec{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + W_p \right) \psi(\vec{r}) \quad (9.88)$$

Rovnica (9.88) je Schrödingerova rovnica pre stacionárne stavy alebo Schrödingerova rovnica v stacionárnom stave.

## 9.5 STREDNÉ HODNOTY MECHANICKÝCH VELIČÍN

Riešením Schrödingerovej rovnice pre časticu v daných fyzikálnych podmienkach dostaneme vlnovú funkciu  $\phi(x, y, z, t)$ , ktorá obsahuje všetky informácie o častici. Tieto informácie o fyzikálnych veličinách nie sú dané určitými hodnotami (okrem tých, ktoré sú kvantované), ale len pravdepodobnosťami. Ako príklad vypočítame strednú hodnotu  $\bar{x}$  polohy častice, opísanej vlnovou funkciou  $\phi(x, t)$ , na osi  $x$ . Keď máme súbor  $n$  identických častíc, opísaných tou istou vlnovou funkciou  $\phi$ , pravdepodobnosť  $|\phi(\vec{r}, t)|^2 dV$  je úmerná hustote častíc v objeme  $dV$  v mieste, určenom vektorom  $\vec{r}$  a v čase  $t$ . Strednú hodnotu  $\bar{x}_n$  polohy častíc by sme dostali experimentálnym zistením polohy spomínaného súboru častíc v nejakom okamihu  $t$  a vystredovaním výsledkov.

Aby sme si objasnili tento postup, vypočítajme strednú hodnotu polohy súboru  $n$  častíc, rozdelených pozdĺž osi  $x$  tak, že v bode so súradnicou  $x_1$  je  $N_1$  častíc, v bode s  $x_2$  je  $N_2$  atď. Stredná hodnota je v tomto prípade podobná polohe ťažiska tohto rozdelenia a je

$$\bar{x}_n = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots}{N_1 + N_2 + \dots} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i x_i}{\sum_{i=1}^n N_i} \quad (9.89)$$

Nás zaujíma len jedna častica, teda musíme zameniť počet  $N_i$  častíc v bode s  $x_i$  za pravdepodobnosť  $dP_i$  výskytu častice v okolí  $dx$  bodu so súradnicou  $x_i$ . Táto pravdepodobnosť je

$$dP_i = |\phi_i|^2 dx$$

kde  $\phi_i$  je hodnota vlnovej funkcie častice, vypočítaná pre  $x = x_i$ . Zavedením tejto substitúcie a zámenou sumácie za integráciu získame, že stredná hodnota polohy jednej častice je

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |\phi|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi|^2 dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* x \phi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \phi dx} \quad (9.90)$$

Pretože pravdepodobnosť nájsť časticu pozdĺž celej osi sa musí rovnať jednej, vyžadujeme splnenie tzv. normovacej podmienky

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \phi dx = 1 \quad \text{a všeobecne} \quad \int_{(V)} \phi^* \phi dV = 1 \quad (9.91)$$

Zovšeobecnením vzťahu (9.90) a použitím vzťahu (9.91) dostaneme:

$$\overline{\vec{r}(t)} = \int_{(V)} \phi^*(\vec{r}, t) \vec{r}(t) \phi(\vec{r}, t) dV \quad (9.92)$$

Výraz  $\overline{\vec{r}(t)}$  určuje časovú závislosť polohy stredy vlnového balíka a je kvantovomechanickým analógom trajektórie častice v klasickej mechanike.

Rovnaký postup môžeme použiť aj pri výpočte strednej hodnoty  $\overline{G(\vec{r}, t)}$  ľubovoľnej veličiny (napr. potenciálnej energie  $w_p(\vec{r}, t)$ ), ktorá je funkciou polohy častice, opísanej vlnovou funkciou  $\phi$ .

Výsledok je

$$\overline{G(\vec{r}, t)} = \int_{(V)} \phi^*(\vec{r}, t) G(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) dV \quad (9.93)$$

Vzťahy (9.92) a (9.93) platia, aj keď sa veličiny menia s časom, pretože vždy musia byť vypočítané v určitom čase  $t$ , keďže samotná  $\phi$  je funkciou času.

## 9.6 VZŤAHY NEURČITOSTI

Klasická mechanika jednoznačne určuje stav izolovanej sústavy hmotných bodov polohovými vektormi všetkých hmotných bodov a ich hybnosťami. Tieto údaje (spolu so zadaním všetkých síl, pôsobiacich medzi hmotnými bodmi) zadané v čase  $t_0$  jednoznačne určujú polohy hmotných bodov a ich hybnosti v budúcnosti i v minulosti. Častici, ktorá nepodlieha klasickému formalizmu, nemožno súčasne zadať súradnicu a hybnosť. Všetky fyzikálne pojmy klasickej fyziky nemožno použiť v kvantovej mechanike úplne bez toho, že by sa nezmenili.

Nech častica je opísaná vlnovým balíkom  $\phi(x)$ . Vlnový balík zjednodušujeme na jednorozmerný prípad a vynechávame explicitné vyjadrenie času, lebo nás bude zaujímať rozloženie vlnového balíka v danom (jedinom) čase  $t_0$ . Zvoľme si súradnicovú sústavu tak, aby stred vlnového balíka bol v jej počiatku

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) x \phi(x) dx = 0 \quad (9.94)$$

a tiež aby stredná hodnota hybnosti sa rovnala nule

$$\bar{p}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \phi(x) dx = 0 \quad (9.95)$$

Platnosť vzťahu (9.95) si ukážeme v ďalšej časti. Predpokladajme, že vlnový balík je normovaný

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \phi(x) dx = 1$$

Mierou rozmerov vlnového balíka (mierou "rozmazanosti" okolo strednej hodnoty) je stredná kvadratická odchýlka  $(\Delta x)^2$ , definovaná vzťahom

$$(\Delta x)^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) x^2 \phi(x) dx \quad (9.96)$$

Podobne pre hybnosť

$$(\Delta p_x)^2 = \overline{(p_x - \bar{p}_x)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right)^2 \phi(x) dx \quad (9.97)$$

Vo vzťahoch (9.96) a (9.97) sme využili, že  $\bar{x} = 0$  a  $\bar{p}_x = 0$ . Možno dokázať, že pre súčin stredných kvadratických odchýlok polohy a hybnosti musí byť splnená podmienka

$$\overline{(\Delta x)^2} \overline{(\Delta p_x)^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (9.98)$$

Táto nerovnosť sa nazýva Heisenbergov vzťah neurčitosti. Vzťah (9.98) sa často používa v tvare

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.99)$$

Niekedy je užitočný aj iný tvar vzťahu neurčitosti. Chceli by sme napr. merať energiu  $W$ , vyžiarenú pri atómovom procese v priebehu časového intervalu  $\Delta t$ . Ak je táto energia vo forme elektromagnetických vln, potom ohraničená doba, ktorá je k dispozícii, ohraničuje presnosť, s ktorou môžeme určiť ich frekvenciu. Predpokladajme, že najmenšia neurčitosť v počte vln, s ktorými počítame vo vlnovom balíku, je jedna vlna. Pretože frekvencia uvažovaných vln sa rovná ich počtu, delenému časovým intervalom, je neurčitosť  $\Delta \nu$  nášho merania frekvencie

$$\Delta \nu = \frac{1}{\Delta t}$$

Tomu odpovedajúca neurčitosť určenia energie je

$$\Delta W = h \Delta \nu = h \frac{1}{\Delta t}$$

teda

$$\Delta W \Delta t \geq h$$

Presnejší výpočet dáva:

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar \quad (9.100)$$

prípadne

$$\Delta W \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.101)$$

Tento vzťah možno interpretovať dvoma spôsobmi:

1. ako vzťah medzi neurčitosťou energie systému a rýchlosťou zmien v tom systéme prebiehajúcich,
2. ako vzťah medzi neurčitosťou výmeny energie medzi dvoma systémami, interagujúcimi v časovom intervale  $\Delta t$ .

Okolo vzťahu neurčitosti (9.99) sú časté diskusie, ako ho správne interpretovať. Podľa mechanistického chápania má častica v skutočnosti súčasne presnú hodnotu súradnice a presnú hodnotu hybnosti. Vzťah neurčitosti je len ohraničením presnosti, s ktorou tieto hodnoty fyzikálnych veličín môžeme zmerať. Táto interpretácia predpokladá, že častica sa pohybuje po klasickej trajektórii. Pomocou tejto interpretácie nemožno vysvetliť výsledky pokusu interferencie častíc na dvoch štrbinách.

Prijateľnejšia a dnes všeobecne uznávaná interpretácia vzťahu neurčitosti pochádza od N. Bohra a je založená na princípe komplementarity.

Pri skúmaní vlastností makroskopických systémov sa v klasickej fyzike vybu-  
doval určitý pojmový aparát. Ak skúmame vlastnosti mikroskopických systémov,  
nemôžeme predpokladať, že ten istý pojmový aparát je vhodný aj na opis javov  
z mikrosвета. Spôsob postavenia experimentu na skúmanie vlastností mikrosko-  
pických systémov, ako aj z neho získané výsledky musia byť opísané pojmovým  
aparátom klasickej fyziky. Z tohto dôvodu možno očakávať, že pojmy klasickej  
fyziky, ako je súradnica, hybnosť a pod., bude možné aplikovať v atómovej  
fyzike len s určitými obmedzeniami. Heisenbergov vzťah neurčitosti sa potom  
chápe ako obmedzenie súčasnej použiteľnosti pojmov klasickej fyziky v oblas-  
ti atómovej fyziky.

Na úplný opis systému v klasickej fyzike stačia dve fyzikálne veličiny, napr.  
hybnosť a poloha. Ak použijeme tie isté dve fyzikálne veličiny na úplný opis  
systému v kvantovej mechanike, ohraničenie použiteľnosti týchto pojmov treba  
chápať asi tak, že každá z nich je presnejšie určená len za cenu zväčšenia  
nepresnosti druhej. Obe premenné sa takto dopĺňajú (komplementarita) pri opi-  
se systému, ale ich použitie v zmysle klasickej fyziky sa navzájom vylučuje.

## 9.7 OPERÁTORY

Strednú hodnotu ľubovoľnej fyzikálnej veličiny, ktorá je funkciou polohy  $x$   
častice, opísanej vlnovou funkciou  $\phi(x,t)$ , môžeme vypočítať podľa vzťahu  
(9.93). Tak možno nájsť strednú hodnotu v ľubovoľnom čase ako pre samotné  $x$ ,  
tak aj pre potenciálnu energiu  $W_p(x)$  častice. Platí rovnaký postup aj pre  
iné dynamické veličiny (hybnosť  $p$ , energia  $W$ )? Zdalo by sa, že ich môžeme ur-  
čiť podobnými vzťahmi ako  $x$  a  $W_p(x)$ . Pretože  $\phi(x,t)$  je funkciou polohy  
a času, museli by sme vyjadriť hybnosť  $p$  a celkovú energiu  $W$  tiež ako  
funkcie polohy a času. Avšak v dôsledku vzťahov neurčitosti (9.99) a (9.101)  
takéto funkcie  $p(x,t)$  a  $W(x,t)$  nemôžu existovať. Len čo sú už  $x$  a  $t$   
určené, nemôžeme principiálne  $p$  a  $W$  určiť presne. Platí to aj naopak.



V klasickej fyzike dokážeme zistiť celý budúci priebeh pohybu telesa. V kvantovej mechanike však môžeme aplikáciou Schrödingerovej rovnice na pohyb častice priamo vypočítať jedine vlnovú funkciu  $\phi$ . Budúci priebeh pohybu častice, ako aj počiatočný stav je namiesto určitých hodnôt vyjadrený pravdepodobnosťami.

Ukážeme si platnosť vzťahu (9.95) pre výpočet stredných hodnôt  $p$  a  $W$ . Derivujeme jednorozmernú vlnovú funkciu  $\phi(x, t)$  pre voľnú časticu

$$\phi(x, t) = C \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (px - Wt) \right]$$

raz podľa  $x$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p \phi \quad (9.102)$$

druhý raz podľa  $t$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{i}{\hbar} W \phi \quad (9.103)$$

Vzťahy (9.102) a (9.103) upravíme na tvary:

$$p \phi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \phi \quad \text{a} \quad W \phi = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (9.104)$$

Keď sa na posledné dva vzťahy pozrieme, vidíme, že dynamickej veličine hybnosti  $p$  odpovedá v istom zmysle diferenciálny operátor  $-i \hbar \partial/\partial x$  a celkovej energii  $W$  odpovedá operátor  $i \hbar \partial/\partial t$ . Operátory budeme označovať strieškou nad príslušnou značkou tej fyzikálnej veličiny, ku ktorej je priradený. Príslušné operátory teda sú:

$$\hat{p} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (9.105)$$

$$\hat{W} = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (9.106)$$

Platnosť týchto dvoch vzťahov je všeobecná, rovnako ako platnosť Schrödingerovej rovnice (9.85), aj keď sme uvažovali len voľnú časticu.

Kvantová mechanika musí spĺňať podmienku, že v limite, kedy sa už pozorovaný systém stáva klasickým (makro-) a poruchy začínajú byť zanedbateľné, musí prechádzať kvantová mechanika do klasickej mechaniky, tzv. princíp koreš-

pondencie. Aby to bolo splnené, vyslovuje sa tento fyzikálny postulát P1: "Základné vzťahy medzi fyzikálnymi veličinami v klasickej mechanike platia tiež pre im zodpovedajúce operátory". V zhode s týmto postulátom môžeme k rovnici  $W = W_k + W_p$  napísať operátorovú rovnicu

$$\hat{W} = \hat{W}_k + \hat{W}_p \quad (9.107)$$

Pre nerelativistickú časticu je  $W_k = p^2/2m$  a podľa P1 je k tejto rovnici odpovedajúca operátorová rovnica

$$W_k = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (9.108)$$

Po dosadení (9.106) a (9.108) do (9.107) dostaneme:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W_p \quad (9.109)$$

Teraz vynásobme identickú rovnicu  $\phi = \phi$  operátorovou rovnicou (9.109) a dostaneme:

$$i \hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + W_p \phi$$

čo je jednorozmerná Schrödingerova rovnica (časový tvar).

Postulovanie vzťahov (9.105), (9.106) a Schrödingerovej rovnice je teda navzájom ekvivalentné.

Na základe P1 môžeme pre výpočet stredných hodnôt  $p$  a  $W$  využiť operátory, a tak pre strednú hodnotu hybnosti dostaneme

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x, t) \hat{p} \phi(x, t) dx = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x, t) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} dx \quad (9.110)$$

a pre strednú hodnotu celkovej energie

$$\bar{W} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x, t) \hat{W} \phi(x, t) dx = i \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x, t) \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} dx \quad (9.111)$$

Každú pozorovateľnú veličinu  $G$ , charakterizujúcu fyzikálny systém, môžeme reprezentovať vhodným kvantovomechanickým operátorom  $\hat{G}$ . Na získanie tohto

operátora stačí vyjadriť  $G$  ako funkciu  $x$  a  $p$  a potom namiesto  $p$  dosadiť  $(\hbar/i) \partial/\partial x$ . Operátor  $\hat{G}$  bude teda funkciou  $x$  a  $\partial/\partial x$ ;  $\hat{G}(c, \partial/\partial x)$ .

Tieto poznatky môžeme zhrnúť a vysloviť ďalší postulát (interpretáčny) II: "Stredná hodnota opakovaných pozorovaní fyzikálnej veličiny, reprezentovanej operátorom  $\hat{G}(x, \partial/\partial x)$  v súbore systému, z ktorých každý je v ľubovoľnom stave, je

$$\overline{G(x,p)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x,t) \hat{G}(x, \partial/\partial x) \phi(x,t) dx \quad (9.112)$$

alebo všeobecne

$$\overline{G(\vec{r}, \vec{p})} = \int_{(V)} \phi^*(\vec{r}, t) \hat{G}(\vec{r}, \nabla) \phi(\vec{r}, t) dV \quad (9.113)$$

kde funkcie  $\phi(x,t)$ ,  $\phi^*(x,t)$ , resp.  $\phi(\vec{r}, t)$ ;  $\phi^*(\vec{r}, t)$  musia spĺňať normovacia podmienku (9.91) a  $\nabla = (\partial/\partial x)\vec{i} + (\partial/\partial y)\vec{j} + (\partial/\partial z)\vec{k}$ ". Každé fyzikálnej veličine, ktorá charakterizuje fyzikálny systém, môžeme priradiť operátor. Pozorujeme dve fyzikálne veličiny, polohu a hybnosť kvantového systému. Vieme, že operáciu pozorovania alebo merania ovplyvňuje fyzikálny systém, a preto možno očakávať, že sa to prejaví nejakým spôsobom v teórii. Pretože každé pozorovanie môže zmeniť stav systému, a tým ovplyvniť výsledok druhého pozorovania, možno všeobecne očakávať rozdielne výsledky, či najprv meriame polohu a potom hybnosť, alebo pri opačnom postupe merania. Keď polohu a hybnosť reprezentujeme ich príslušnými operátormi, aký bude výsledok výrazu  $\hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x}$ ? Kvôli zjednodušenému písaniu budeme ho označovať  $[\hat{x}, \hat{p}_x]$  a nazývať komutátorom operátorov  $\hat{x}$  a  $\hat{p}_x$ . Operátorové rovnice nazývame komutačnými vzťahmi. Nech komutátor  $[\hat{x}, \hat{p}_x]$  pôsobí na funkciu  $\phi(x)$  (čo je funkcia  $\phi(x,t)$  v určitom čase  $t$ )

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}_x] \phi(x) &= \left[ x \left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) x \right] \phi(x) = \\ &= i \hbar \left[ \frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi(x) = i \hbar \phi(x) \end{aligned}$$

teda

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i \hbar \quad (9.114)$$

Vzťah (9.114) formulujeme ako druhý fyzikálny postulát P2 (princíp komplementarity). Dve fyzikálne veličiny, ktorých odpovedajúce operátory navzájom nekomutujú ( $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ ), nemožno súčasne určiť s ľubovoľnou presnosťou. Čím je jedna veličina určená presnejšie, tým je druhá určená menej presne. Obidve premenné sa takto dopĺňajú (komplementarita) pri opise sústavy, ale ich použitia v zmysle klasickej fyziky sa navzájom vylučujú.

Možno ukázať, že priamym dôsledkom komutačného vzťahu (9.114) je vzťah neurčitosti

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2 \quad (9.115)$$

Keď komutátor operátorov  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  sa rovná nule, t.j.  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ , hovoríme, že operátory  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  komutujú, potom také dve fyzikálne veličiny, ktorým tieto operátory odpovedajú, možno merať súčasne a výsledok oboch meraní môže byť určený s ľubovoľnou presnosťou. Správnejšia formulácia znie: Meranie jednej veličiny neovplyvňuje predchádzajúci výsledok merania druhej a naopak. Ako príklad možno uviesť hybnosť a energiu voľnej častice

$$[\hat{p}_x, W_k] = \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] = \frac{i\hbar^3}{2m} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \right] = 0$$

## 9.8 VLASTNÉ HODNOTY A VLASTNÉ FUNKCIE

V rovnici (9.88) je operátor celkovej energie

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + W_p \quad (9.116)$$

a nazýva sa Hamiltonov operátor (hamiltonián). V jednorozmernom prípade operátor  $\hat{H}$  má tvar

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W_p \quad (9.117)$$

a Schrödingerova rovnica je

$$W\psi(x) = \hat{H}\psi(x) \quad (9.118)$$

Vo všeobecnosti možno rovnicu (9.118) riešiť len pre určité hodnoty energie  $W$ . Fakt, že energia  $W$  môže nadobúdať iba určité hodnoty, nazývame kvantovaním energie. Riešiť Schrödingerovu rovnicu pre daný systém znamená nájsť takú vlnovú funkciu  $\psi(x)$ , ktorá by vyhovovala nielen Schrödingerovej rovnici a daným okrajovým podmienkam, ale aj požiadavkám, kladeným na vlnovú funkciu, t.j. aby vlnová funkcia a jej derivácie boli spojité, konečné a jednoznačné. Ak neexistuje žiadna taká vlnová funkcia, systém nemôže byť

v stacionárnom stave. Kvantovanie energie sa ukazuje ako univerzálny charakteristický jav pre všetky stabilné systémy. Analógiu kvantovania energie v riešení Schrödingerovej rovnice sú stojaté vlny napätej struny (článok 7.15), upevnenej na oboch koncoch. Hodnoty energie, pre ktoré má Schrödingerova rovnica riešenie, sa nazývajú vlastné hodnoty  $W_n$ , a vlnové funkcie, ktoré prislúchajú k týmto hodnotám, sa nazývajú vlastné funkcie  $\psi_n(x)$ :

$$W_n \psi_n(x) = \hat{H} \psi_n(x)$$

Môžeme teda povedať, že rôzne  $W_n$  sú vlastné hodnoty Hamiltonovho operátora  $\hat{H}$ . Pojem vlastných hodnôt sa nevzťahuje len na energiu. Súvislosť medzi vlastnými hodnotami a operátormi v kvantovej mechanike je všeobecná. Podmienka, podľa ktorej určitá dynamická premenná  $G$  nadobúda rad diskretných hodnôt  $G_n$  ( $G$  je kvantovaná) znamená, že vlnové funkcie  $\psi_n(x)$  (rozlíšené indexom  $n$ ) systému musia byť také, aby platilo:

$$\hat{G} \psi_n(x) = G_n \psi_n(x) \quad (9.119)$$

kde  $\hat{G}$  je operátor, odpovedajúci  $G$ , a  $G_n$  sú reálne čísla.

Ak vlastné hodnoty operátora  $\hat{G}$  nadobúdajú všetky hodnoty z istého intervalu, potom namiesto (9.119) píšeme:

$$\hat{G} \psi_\alpha(x) = G(\alpha) \psi_\alpha(x) \quad (9.120)$$

Množinu vlastných hodnôt operátora nazývame jeho spektrom. V prípade (9.119) hovoríme o diskretnom spektre a v prípade (9.120) o spojitom spektre. Môže však nastať aj taký prípad, že operátor má v určitom intervale vlastných hodnôt spojité spektrum a v inom intervale diskretné spektrum.

Ak jednej vlastnej hodnote prislúcha viacero vlastných funkcií, hovoríme, že príslušná vlastná hodnota je degenerovaná, hovoríme o degenerácii.

Keď je fyzikálna veličina  $G$  kvantovaná, potom meranie takejto veličiny môže dať jednu z hodnôt  $G_n$ . Meranie veličiny  $G$  v rôznych identických systémoch, ktoré sú všetky v stave opísanom vlastnou funkciou  $\psi_k$ , dostaneme pri každom meraní ten istý výsledok, jedinou hodnotu  $G_k$ . Ak fyzikálna veličina nie je kvantovaná, v takom prípade meranie  $G$ , robené na rôznych identických systémoch, nedáva vždy ten istý výsledok, ale len hodnoty s určitou disperziou (rozptylom), ktorých priemer je stredná hodnota

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{G} \psi(x) dx$$

Predchádzajúce poznatky môžeme zhrnúť do ďalších dvoch interpretačných postulátov:

I2: "Možné výsledky pozorovania veličiny, reprezentovanej operátorom  $\hat{G}$ , sú vlastné hodnoty  $G_n$ ".

I3: "Pozorovanie veličiny, reprezentovanej operátorom  $\hat{G}$  v systéme, ktorého stav je opísaný vlastnou funkciou operátora  $\hat{G} - \Psi_n(x)$ , určite vedie k výsledku  $G_n$ ".

## 9.9 APLIKÁCIE KVANTOVEJ MECHANIKY

Riešenie Schrödingerovej rovnice i v jej jednoduchom stacionárnom tvare si často vyžaduje zložité matematické metódy. Budeme sa zaoberať niektorými jednoduchými prípadmi. Niektoré z týchto prípadov (potenciálové jamy a potenciálové bariéry) sú často užitočným priblížením ku skutočnej situácii, iné (napr. harmonický oscilátor) sú nielen ilustráciou metód kvantovej mechaniky, ale sú dôležité aj samy osebe.

### 9.9.1 Častica v jednorozmernej nekonečne hlbokéj potenciálovej jamě

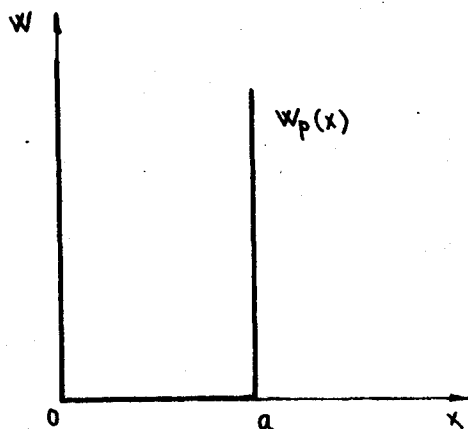
Skúmame pohyb častice, vloženéj do nekonečne hlbokéj pravouhlej potenciálovej jamy (obr. 9.22), t.j.

$$\begin{aligned} W_p(x) &= 0 & \text{pre } 0 < x < a \\ W_p(x) &\rightarrow \infty & \text{pre } 0 \geq x \geq a \end{aligned} \tag{9.121}$$

Z formálneho hľadiska kvantovej mechaniky je potenciálna energia  $W_p(x)$  častice mimo tejto jamy nekonečná a vo vnútri jamy je  $W_p$  konštantná. Pre jednoduchosť voľme  $W_p(x) = 0$ . Pretože častica nemôže mať nekonečnú energiu, nemôže sa mimo jamy vyskytovať, takže jej vlnová funkcia je

$$\psi(x) = 0 \quad \text{pre } 0 \geq x \geq a$$

Našou úlohou je nájsť vlnovú funkciu  $\psi(x)$  pre  $0 \leq x \leq a$ , t.j. vo vnútri jamy. Schrödingerova rovnica (9.87) potom je



Obr. 9.22

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} W \psi(x) = 0 \quad (9.122)$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (9.122) je

$$\psi(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x \quad (9.123)$$

kde

$$\beta^2 = \frac{2mW}{\hbar^2} \quad (9.124)$$

pretože

$$\psi(x) = 0 \quad \text{pre} \quad x = 0 \quad \text{a} \quad x = a \quad (9.125)$$

riešenie (9.123) je

$$\psi(x) = A \sin \beta x \quad (9.126)$$

lebo  $\cos \beta x = 1$  pre  $x = 0$ , musí byť  $B = 0$ , ak má byť splnená okrajová podmienka (9.125). Pretože  $\sin 0 = 0$ , riešenie (9.126) spĺňa podmienku (9.125) v bode  $x = 0$ , ale v bode  $x = a$  bude  $\psi(x) = 0$ , len keď

$$\beta x = n\pi; \quad \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} a = n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.127)$$

Pre energiu častice zo vzťahu (9.127) vyplýva, že môže nadobúdať len rad určitých hodnôt, ktoré budú vlastnými hodnotami operátora energie. Tieto vlastné hodnoty tvoria energetické hladiny systému

$$W_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.128)$$

Častica v nekonečne hlbokoj potenciálovej jame nemôže mať ľubovoľnú energiu, ale len určité diskkrétne hodnoty podľa vzťahu (9.128). Ďalší poznatok je, že častica nemôže mať  $W = 0$ . Ak by mala nulovú energiu, muselo by platiť pre hybnosť  $p = 0$  (lebo  $W_p = 0$ ) a vlnová funkcia  $\psi(x)$  vo vnútri jamy by sa všade rovnala nule, čo by znamenalo, že častica v jame nemôže byť.

Vzťah neurčitosti potvrdzuje, že  $W \neq 0$ . Keby  $W = 0$ , potom aj  $p = 0$ , teda hybnosť je určená presne  $\Delta p = 0$ , čo ale znamená, že  $\Delta x \rightarrow \infty$ . Ak častica má byť v jame, musí sa neurčitosť polohy rovnať nanejvýš hodnote  $a$ , t.j.  $\Delta x \leq a$ , a podľa vzťahu (9.99)

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2a}$$

čo protirečí predpokladu, že  $W = 0$ . Keďže  $W_p = 0$  vo vnútri jamy, je celková energia rovná kinetickej energii a tomu odpovedajúca hybnosť (pre nerelativistickú časticu  $W_k = p^2/2m$ ) je

$$p_1 = \pm \sqrt{2mW_1} = \pm \frac{\pi \hbar}{a}$$

Použili sme vzťah (9.128) pre  $n = 1$ . Vidíme, že je to v súlade so vzťahom neurčitosti.

Zistili sme, že vlnová funkcia má mať tvar

$$\psi(x) = A \sin \beta x \quad \beta^2 = 2mW/\hbar^2$$

Energia častice môže nadobúdať rad hodnôt, určených vzťahom (9.128). Ak dosadíme  $W_n$  za  $W$  do  $\psi(x)$ , dostaneme:

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n \pi x}{a} \quad (9.129)$$

čo sú vlastné funkcie, odpovedajúce vlastným hodnotám  $W_n$ . Vlnové funkcie (9.129) spĺňajú požiadavky, kladené na ne. Sú jednoznačné, spojité, ako aj ich derivácie. Musia byť normované. Z tejto požiadavky si teraz vypočítame  $A$ . Platí rovnosť  $\psi(x) = \psi^*(x)$  a normovacia podmienka je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1 \quad (9.130)$$

lebo  $dP(x) = |\psi(x)|^2 dx$  a častica sa musí nachádzať v jame.



Z podmienky (9.130) po dosadení za  $\psi_n(x)$  dostaneme:

$$A^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n \pi x}{a} dx = A^2 \left[ \frac{1}{2} x - \frac{a}{4 n \pi} \sin \frac{2 n \pi x}{a} \right]_0^a = A^2 \frac{1}{2} a$$

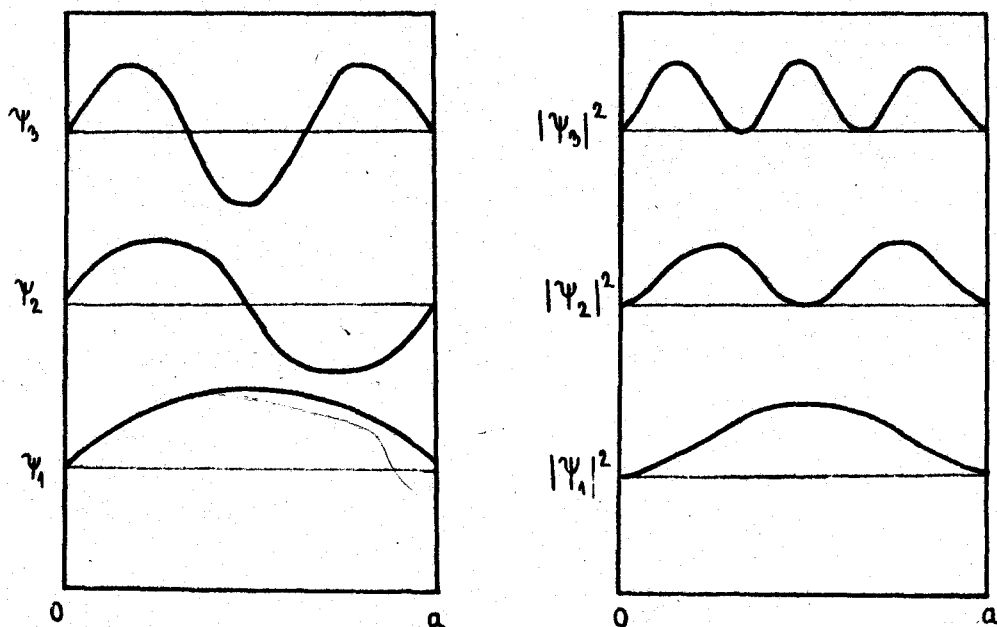
a po dosadení do vzťahu (9.130) dostaneme:

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{9.131}$$

Normované vlastné vlnové funkcie operátora energie častice sú:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n \pi x}{a} \tag{9.132}$$

Pre  $n = 1, 2, 3$  sú funkcie  $\psi_n(x)$  a  $|\psi_n(x)|^2$  nakreslené na obr. 9.23.



Obr. 9.23

Vypočítajte strednú hodnotu hybnosti častice v jame. Pretože

$$\psi^*(x) = \psi(x) \quad \text{a} \quad \frac{d}{dx} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{n \pi}{a} \cos \frac{n \pi x}{a}$$

potom

$$\bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p} \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi dx =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{2}{a} \frac{n\pi}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} dx =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{2n\pi}{a^2} \frac{a}{2n\pi} \left[ \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \right]_0^a = 0$$

Na prvý pohľad je to prekvapujúci výsledok. Odpoveď nám dávajú znamienka  $\pm$  pri výraze

$$p_n = \pm \sqrt{2mW} = \pm \frac{n\pi\hbar}{a} \quad (9.133)$$

Častica sa pohybuje v oboch smeroch tam i späť, takže aritmetický priemer pre ľubovoľné  $n$  pri oboch smeroch je

$$p_s = \frac{1}{2} \left[ (n\pi\hbar/a) + (-n\pi\hbar/a) \right] = 0$$

čo súhlasí s výpočtom strednej hodnoty hybnosti.

Podľa (9.133) by ku každej vlastnej funkcii operátora energie mali existovať dve vlastné funkcie operátora hybnosti, odpovedajúce dvom možným orientáciám smeru pohybu častice v potenciálovej jame.

Podľa vzťahu (9.119) pre výpočet vlastných hodnôt operátora  $\hat{G}$  môžeme v našom prípade napísať:

$$\hat{p} \psi_n(x) = p_n \psi_n(x) \quad (9.134)$$

kde  $p_n$  sú reálne hodnoty. Táto rovnica platí len vtedy, keď sú  $\psi_n(x)$  vlastné funkcie operátora hybnosti  $\hat{p}$ .

Keď aplikujeme operátor  $\hat{p}$  na vlastné funkcie operátora energie, zistíme, že tie nemôžu byť aj vlastnými funkciami operátora hybnosti

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} = \frac{\hbar}{i} \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \neq p_n \psi_n$$

Použijeme známy vzťah

$$\sin \varphi = \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i}$$

Každá vlastná funkcia operátora energie sa potom dá vyjadriť ako lineárna kombinácia dvoch vlnových funkcií:

$$\psi_n^+(x) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{a}} \exp(i n \pi x/a) \quad (9.135)$$

$$\psi_n^-(x) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{a}} \exp(-i n \pi x/a) \quad (9.136)$$

Ak dosadíme (9.135) do rovnice (9.134), dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{a}} \exp(i n \pi x/a) \right] &= \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{i n \pi}{a} \exp(i n \pi x/a) = \\ &= \frac{n \pi \hbar}{a} \psi_n^+(x); \quad p_n^+ = \frac{n \pi \hbar}{a} \end{aligned}$$

Podobne pre funkciu (9.136)

$$p_n^- = - \frac{n \pi \hbar}{a}$$

Pre funkcie (9.135) a (9.136) platí rovnica (9.134), teda sú vlastnými funkciami operátora hybnosti častice uzavretej v nekonečne hlbokoj potenciálovej jame a (9.133) správne udáva príslušné vlastné hodnoty operátora hybnosti.

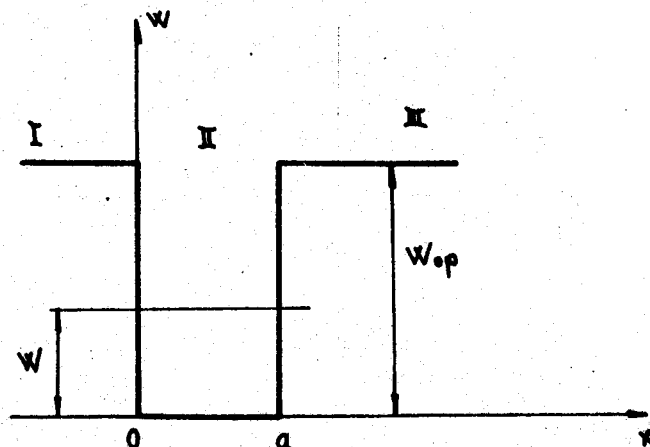
### 9.9.2 Častica v jednorozmernej konečne hlbokoj potenciálovej jame

Keď je častica v jame, kde  $W_p = 0$ , a mimo jamy je  $W_p \rightarrow \infty$ , môžeme si predstaviť, že steny jamy sú dokonale tuhé a nepreniknuteľné. Takýto prípad v skutočnosti neexistuje, lebo potenciálne energie nie sú nikdy nekonečné.

Nech sa častica pohybuje v jame (obr. 9.24)

$$\begin{aligned} W_p(x) &= W_{op} \quad \text{pre} \quad 0 \leq x \leq a \\ W_p(x) &= 0 \quad \text{pre} \quad 0 < x < a \end{aligned}$$

Jednorozmerná Schrödingerova rovnica pre pohyb častice v smere osi  $x$  je (9.87)



Obr. 9.24

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W_p(x) \right] = W \psi(x)$$

pričom hodnoty energie  $W$  budú z intervalu  $0 < W < W_{op}$ . Ak častica má energiu z tohto intervalu, hovoríme o viazanom stave. Častica musí zostať v konečnej vzdialenosti od počiatku. Pre oblasť I, III mimo jamy  $0 \geq x \geq a$  platí Schrödingerova rovnica v tvare

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) - \frac{2m}{\hbar^2} (W_{op} - W) \psi(x) = 0 \quad (9.137)$$

Pre oblasť II v jame  $0 < x < a$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} W \psi(x) = 0 \quad (9.138)$$

keď označíme

$$\frac{2m}{\hbar^2} (W_{op} - W) = \gamma^2; \quad \frac{2m}{\hbar^2} W = \delta^2 \quad (9.138a)$$

Rovnica (9.137) pre oblasť I  $x \leq 0$  a III  $x \geq a$  dáva riešenie

$$\psi_I(x) = D \exp(\gamma x) + D' \exp(-\gamma x) \quad (9.139)$$

$$\psi_{III}(x) = C \exp(-\gamma x) + C' \exp(\gamma x) \quad (9.140)$$

a rovnica (9.138) pre oblasť II  $0 < x < a$  má riešenie

$$\Psi_{II}(x) = A \sin \delta x + B \cos \delta x \quad (9.141)$$

Aby sa funkcie  $\Psi_I(x)$  a  $\Psi_{III}(x)$  dali normovať, musí byť  $D' = C' = 0$ . Keď  $x$  je záporné  $D' \exp(-\gamma x) \rightarrow \infty$  pre  $x \rightarrow -\infty$ , musí byť  $D' = 0$  a podobne aj  $C' = 0$ , lebo pre  $x \rightarrow \infty$  by  $C' \exp(\gamma x) \rightarrow \infty$ . Vlnová funkcia, získaná (zošitá) z riešení (9.139), (9.140) a (9.141), musí byť v bodoch  $x = 0$  a  $x = a$  spojitá a aj jej prvé derivácie musia byť v týchto bodoch spojité, teda

pre  $x = 0$

$$\Psi_I(x) = \Psi_{II}(x); \quad \frac{d}{dx} \Psi_I(x) = \frac{d}{dx} \Psi_{II}(x)$$

pre  $x = a$

(9.142)

$$\Psi_{II}(x) = \Psi_{III}(x); \quad \frac{d}{dx} \Psi_{II}(x) = \frac{d}{dx} \Psi_{III}(x)$$

Z podmienok spojitosti (9.142) dostaneme štyri rovnice:

pre  $x = 0$

$$D = B$$

$$\gamma D = \delta A$$

pre  $x = a$

(9.143)

$$A \sin \delta a + B \cos \delta a = C \exp(-\gamma a)$$

$$\delta A \cos \delta a - \delta B \sin \delta a = -\gamma C \exp(-\gamma a)$$

Zo štyroch rovníc (9.143) dostaneme:

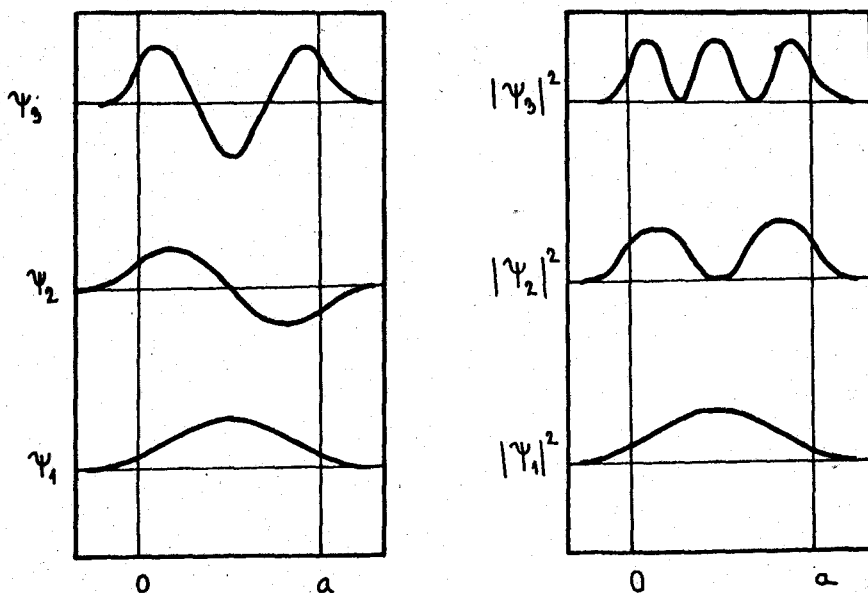
$$\operatorname{tg} \delta a = \frac{2\gamma\delta}{\delta^2 - \gamma^2}$$

a po dosadení za  $\gamma$  a  $\delta$  zo vzťahov (9.138a) je

$$\operatorname{tg} \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mW} = \frac{2\sqrt{W(W_{op} - W)}}{2W - W_{op}} \quad (9.144)$$

Aby sme vyhovelí podmienkam kontinuity, musíme zachovať platnosť transcendentnej rovnice (9.144). Ľahko sa možno presvedčiť, že táto rovnica pre dané  $W_{op}$  neplatí pre všetky hodnoty energie  $W$ , ale iba pre určité vlastné hodnoty  $W_n$ . Transcendentná rovnica sa najjednoduchšie rieši graficky.

Nebudeme sa zaoberať tvarom vlastných vlnových funkcií  $\psi_n(x)$ , ktoré opisujú časticu v potenciálovej jame, ale z ich priebehu a z priebehu  $|\psi_n(x)|^2$  pre  $n = 1, 2, 3$  vidíme, že sa nerovnajú nule mimo potenciálovej jamy (obr. 9.25). Aj keď je energia častice vo vnútri jamy menšia ako hodnota potenciálnej energie  $W_{0p}$  mimo jamy, existuje určitá pravdepodobnosť, že sa častica bude vyskytovať mimo potenciálovej jamy.



Obr. 9.25

### 9.9.3 Lineárny harmonický oscilátor

Podmienkou pre existenciu kmitavého pohybu je prítomnosť "návratnej" sily, ktorá pôsobí tak, že vracia "vychýlený" systém do jeho rovnovážnej polohy. Zotrvačnosť pohybujúcej sa častice hmotnosti  $m$  spôsobí, že častica preletí rovnovážnou polohou a systém kmitá do nekonečna, ak sa súčasne nevyskytujú nejaké stratové, útlmové procesy.

Nech sa častica hmotnosti  $m$  pohybuje po priamke pôsobením sily (výslednice síl), úmernej výchylke častice z rovnovážnej polohy. Rovnovážnou polohou nazývame polohu častice, kde výslednica všetkých síl na časticu pôsobiacich sa rovná nule. Takáto kmitajúca sústava sa nazýva lineárny harmonický oscilátor. Keď je  $\vec{r}$  polohový vektor častice vzhľadom na rovnovážnu polohu, platí:

$$\vec{F} = -k\vec{r} \quad k > 0$$

alebo pre lineárny harmonický oscilátor

$$F = - k x$$

Medzi silou  $F$  a potenciálnou energiou častice  $W_p$  je vzťah  $F = - \partial W_p / \partial x$  takže potom  $W_p(x) = k x^2 / 2$ , alebo keď vyjadríme  $k$  pomocou hmotnosti  $m$  a kruhovej frekvencie  $\omega_0$  oscilátora je energia  $W_p = m \omega_0^2 x^2 / 2$  (pozri vzťah (7.12)).

Ak dosadíme túto potenciálnu energiu do stacionárnej Schrödingerovej rovnice, dostaneme:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{m \omega_0^2 x^2}{2} \psi(x) = W \psi(x)$$

Ak násobíme uvedenú rovnicu výrazom  $2/\hbar\omega_0$ , dostaneme:

$$-\frac{\hbar}{m \omega_0} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{m \omega_0}{\hbar} x^2 \psi(x) = \frac{2W}{\hbar \omega_0} \psi(x) \quad (9.145)$$

Zavedieme bezrozmerné veličiny:

$$y = \frac{m \omega_0}{\hbar} x; \quad \varepsilon = \frac{W}{\hbar \omega_0} \quad (9.146)$$

a rovnica (9.145) bude mať tvar

$$\frac{d^2 \psi(y)}{dy^2} + (\varepsilon - y^2) \psi(y) = 0 \quad (9.147)$$

Rovnica (9.147) je lineárna, homogénna diferenciálna rovnica druhého rádu s premennými koeficientami. Hľadáme najprv asymptotický tvar riešenia rovnice (9.147), ktorý bude mať  $\psi(y)$  v okolí singulárnych bodov  $y \rightarrow \infty$ . Ak má nejaká vlnová funkcia  $\psi(y)$  reprezentovať skutočnú časticu, lokalizovanú v priestore, musí sa jej hodnota blížiť k nule, keď sa  $y \rightarrow \infty$ , tak, aby hodnota

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(y)|^2 dy$$

zostala konečná a nenulová. Rovnicu (9.147) prepíšeme na tvar

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} \frac{1}{(y^2 - \varepsilon) \psi} = 1$$

keď  $y \rightarrow \infty$ , môžeme  $\varepsilon$  zanedbať voči  $y^2$ . V limitnom prípade je

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{d^2 \psi / dy^2}{y^2 \psi} = 1 \quad (9.148)$$

Funkciu  $\psi(y)$ , ktorá spĺňa túto rovnosť, označíme  $\psi_\infty$  a bude mať tvar

$$\psi_\infty = \exp(-y^2/2) \quad (9.149)$$

lebo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{d^2 \psi_\infty}{dy^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} (y^2 - 1) \exp(-y^2/2) = \lim_{y \rightarrow \infty} y^2 \exp(-y^2/2)$$

Funkcia (9.149) vyhovuje rovnici (9.148) a je hľadaným asymptotickým tvarom vlnovej funkcie  $\psi(y)$ .

Môžeme napísať:

$$\psi(y) = f(y) \psi_\infty = f(y) \exp(-y^2/2) \quad (9.150)$$

Funkciu  $f(y)$  musíme ešte nájsť. Dosadením vzťahu (9.150) do rovnice (9.147) dostaneme:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - 2y \frac{df}{dy} + (\varepsilon - 1) f = 0 \quad (9.151)$$

čo je diferenciálna rovnica pre výpočet  $f(y)$ . Riešenie rovnice (9.151) budeme hľadať v tvare mocninového radu

$$f(y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^n \quad (9.152)$$

Derivujeme rad  $f(y)$  podľa  $y$  a máme:

$$\frac{df(y)}{dy} = A_1 + 2 A_2 y + 3 A_3 y^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n y^{n-1}$$

vynásobením premennou  $y$  dostaneme:

$$y \frac{df(y)}{dy} = A_1 y + 2 A_2 y^2 + 3 A_3 y^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n A_n y^n \quad (9.153)$$

Druhá derivácia  $f(y)$  podľa  $y$  je



$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 1.2 A_2 + 2.3 A_3 y + 3.4 A_4 y^2 = \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n y^{n-2}$$

Aby sme aj v tomto rade mali súčet členov od  $n = 0$  až po  $n \rightarrow \infty$ , upravíme to na tvar

$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) A_{n+2} y^n \quad (9.154)$$

Keď dosadíme výrazy (9.152) až (9.154) do rovnice (9.151), dostaneme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) A_{n+2} - (2n+1-\varepsilon) A_n] y^n = 0 \quad (9.155)$$

Aby platila táto rovnica, musí sa výraz v hranatej zátvorke rovnať nule, z čoho vyplýva:

$$A_{n+2} = \frac{2n+1-\varepsilon}{(n+2)(n+1)} A_n \quad (9.156)$$

Tento vzťah (rekurentný) nám umožňuje nájsť koeficienty  $A_2, A_3, A_4, \dots$  pomocou  $A_0$  a  $A_1$ . Rovnica (9.151) nám umožňuje zvoliť v jej riešení dve konštanty  $A_0$  a  $A_1$ , lebo je diferenciálnou rovnicou druhého rádu.

Podľa vzťahu (9.156) rad (9.152) môže patriť do troch typov:

1. ak  $A_0 = 0$ ;  $A_1 = 0$ ;  $\varepsilon = 2n + 1$ ;  $n$  je párne; v tomto prípade je  $f(y)$  polynóm stupňa  $n$ , obsahujúci len párne mocniny  $y$ ;
2. ak  $A_0 = 0$ ;  $A_1 \neq 0$ ;  $\varepsilon = 2n + 1$ ;  $n$  je nepárne; v tomto prípade je  $f(y)$  opäť polynóm stupňa  $n$ , ktorý obsahuje len nepárne mocniny  $y$ ;
3. rad pre  $f(y)$  obsahuje nekonečne mnoho nenulových koeficientov  $A_n$ . Riešenia takéhoto typu nespĺňajú normovaciu podmienku, a preto sú neprípustné.

Ukážeme si platnosť tvrdení v bodoch 1, 2 a 3. Bližšie si všimnime tvar funkcie

$$\psi(y) = f(y) \exp(-y^2/2) \quad (9.157)$$

pri  $y \rightarrow \infty$ .  $\psi(y)$  môže byť fyzikálne prípustnou vlnovou funkciou, len keď sa bude blížiť k nule pri  $y \rightarrow \infty$ . Aby táto požiadavka bola splnená, musí byť

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) < \lim_{y \rightarrow \infty} \exp(y^2/2) \quad (9.158)$$

Aby sme sa presvedčili, či platí táto nerovnosť, rozložíme  $\exp(y^2/2)$  do mocninového radu. Potom vypočítame pomer medzi dvoma za sebou nasledujúcimi koeficientami v oboch radoch pre  $n \rightarrow \infty$ . Podľa vzťahu (9.156) pre  $n \rightarrow \infty$  môžeme napísať:

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} \rightarrow \frac{2}{n}$$

Taylorov rad  $\exp(y^2/2)$  je

$$\begin{aligned} \exp(y^2/2) &= 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2^2 2!} + \frac{y^6}{2^3 3!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0,2,4,\dots} \frac{1}{2^{n/2} (n/2)!} y^n = \sum_{n=0,2,4,\dots} B_n y^n \end{aligned}$$

pre  $n \rightarrow \infty$  je

$$\frac{B_{n+2}}{B_n} = \frac{2^{n/2} (n/2)!}{2^{(n+2)/2} \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right)!} = \frac{1}{n+2} \rightarrow \frac{1}{n}$$

Koeficienty  $A_n$  v rade  $f(y)$  klesajú pomalšie ako koeficienty  $B_n$  v rade  $\exp(y^2/2)$ , namiesto toho, aby klesali rýchlejšie. To znamená, že neplatí nerovnosť (9.158) a  $\psi(y)$  neklesá k nule pre  $y \rightarrow \infty$ , čo je v zhode s bodom 3.

Aby bola nerovnosť (9.158) splnená, musí sa nekonečný rad  $f(y)$  zmeniť na polynóm s konečným počtom členov. Z rekurentného vzťahu (9.156) vyplýva, že keď je

$$\varepsilon = 2n + 1$$

potom pre každé  $n$  platí:

$$A_{n+2} = A_{n+4} = A_{n+6} = \dots = 0$$

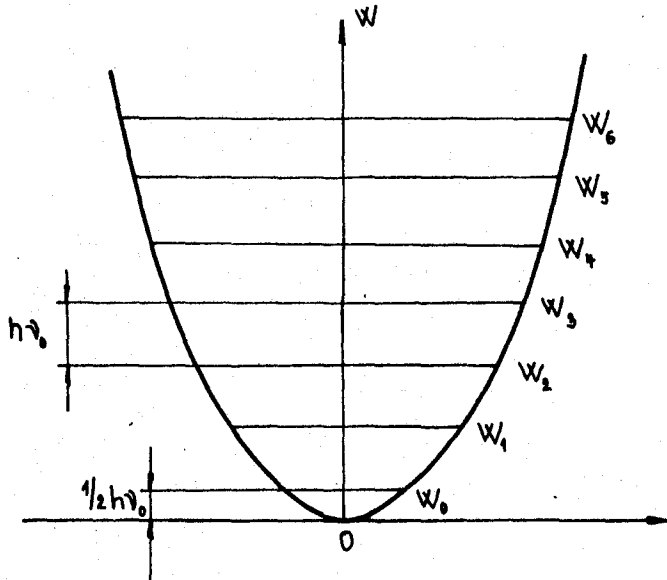
Tým sme si dokázali platnosť tvrdení v bodoch 1 a 2. Vzťah  $\varepsilon = 2n + 1$  je nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby vlnová rovnica (9.147) mala riešenia, ktoré budú vyhovovať požiadavkám, kladeným na vlnovú funkciu  $\psi(y)$ . Pomocou vzťahu pre  $\varepsilon$  (9.146) dostaneme prípustné hodnoty energie pre lineárny oscilátor

$$\varepsilon = \frac{2W}{\hbar \omega_0} = 2n + 1$$

alebo

$$W_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 = \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot h \nu_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.159)$$

$W_n$  sú energetické hladiny harmonického oscilátora. Tieto hladiny sú ekvidistantné, t.j. rozdiel dvoch susedných energetických hladín je konštantný a rovná sa  $h \nu_0$  (obr. 9.26).



Obr. 9.26

V prípade nekonečne hlbkej potenciálovej jamy tento rozdiel medzi dvoma susednými energetickými hladinami stále rastie v závislosti od  $n$  (9.128).

Ďalší zaujímavý poznatok je, že pri  $n = 0$ , častica nemá energiu rovnú nule, ale

$$W_0 = \frac{1}{2} h \nu_0 \quad (9.160)$$

čo je najnižšia možná energia, ktorú oscilátor môže mať. Táto hodnota sa nazýva nulová energia, pretože energia harmonického oscilátora by sa mala s teplotou klesajúcou k 0 K blížiť k  $W_0$ , a nie k  $W = 0$ .

Výraz (9.159) pre hladiny energie, ktorý sme získali, je jeden z najdôležitejších v kvantovej mechanike. Oddôvodňuje Planckov výklad interakcie žiarenia s látkou za predpokladu, že látku môžeme považovať za súbor oscilátorov, z ktorých každý vysiela alebo pohlcuje žiarenie s vlastnou frekvenciou. Výmena energie je potom ohraničená na vlastné hodnoty energie oscilátorov a môže byť len násobkom  $h \nu_0$ , ako to predpokladal Planck vo svojej hypotéze.

Vieme, aké vlastné hodnoty  $W_n$  môže nadobúdať lineárny harmonický oscilátor, čo sme získali z okrajových podmienok (pozri analógiu okrajových podmienok pri strune - stať 7.15), ktorým musí vyhovovať vlnová funkcia. Každéj vlastnej hodnote  $W_n$  odpovedá vlastná vlnová funkcia  $\psi_n(y)$ . Nájsť takéto funkcie nie je jednoduché ani v prípade lineárneho harmonického oscilátora. Na značíme si len postup pri hľadaní takýchto funkcií.

Vlastnej hodnote energie lineárneho oscilátora

$$W_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) h \nu_0$$

odpovedá vlastná funkcia

$$\psi_n(y) = N_n H_n(y) \exp(-y^2/2)$$

ktorú sme napísali na základe predchádzajúcich znalostí o funkcii (9.157).  $H_n(y)$  je polynóm  $n$ -tého stupňa, ktorého koeficienty sú určené rekurentným vzťahom (9.156) pre  $\varepsilon = 2n + 1$ .  $N_n$  je normovacia konštanta, ktorú určíme z podmienky

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = |N_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(y) \exp(-y^2) \frac{dx}{dy} dy = 1 \quad (9.161)$$

Člen

$$H_n(y) = (-1)^n \exp(y^2) \frac{d^n}{dy^n} \exp(-y^2) \quad (9.162)$$

sa nazýva Hermitov polynóm. Pomocou vzťahu (9.161), zámennou  $y$  za  $x$  podľa vzťahu (9.146) a po určení integrálu metódou per partes je

$$N_n = \left( \frac{m \omega_0}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} = \left( \frac{2m \nu_0}{\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \quad (9.163)$$

Vlastné funkcie majú teda tvar

$$\psi_n(x) = \left( \frac{m \omega_0}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y) \exp(-y^2/2) \quad (9.164)$$

kde

$$y = \sqrt{\frac{m \omega_0}{\hbar}} x$$

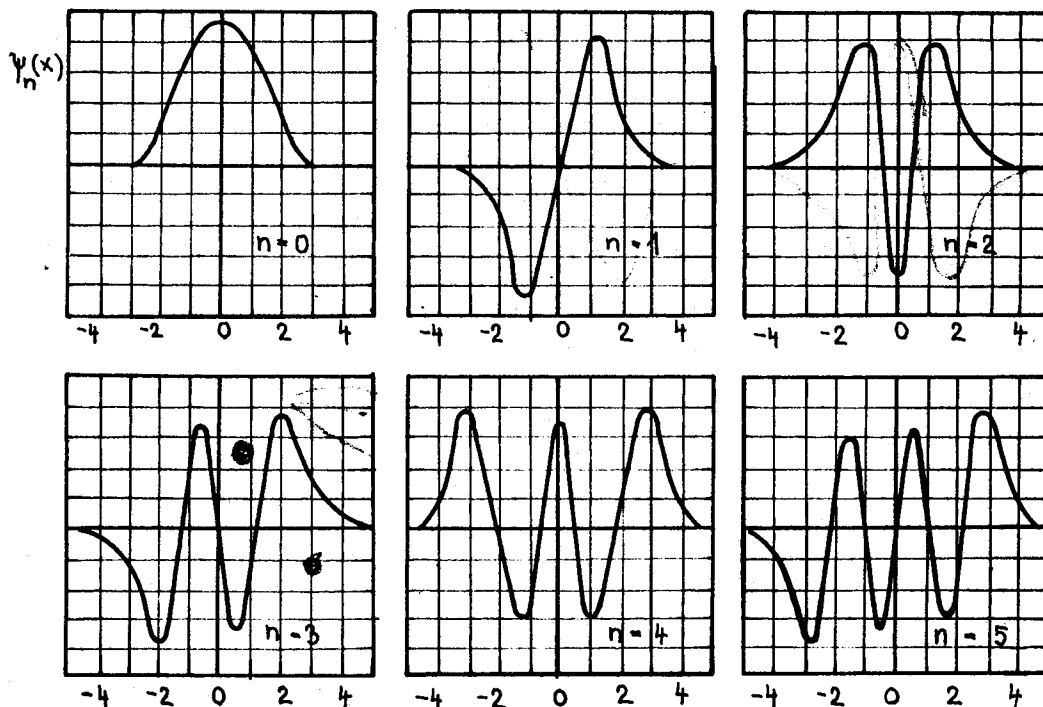
Keď je  $n = 0$  pre tzv. nulový stav, vlastná funkcia je

$$\psi_0(x) = \left( \frac{m \omega_0}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left( - \frac{m \omega_0}{2\hbar} x^2 \right)$$

Priebeh  $\psi_n(x)$ , ako aj rozdelenie hustoty pravdepodobnosti  $|\psi_n(x)|^2$  pre  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  a  $|\psi_{10}(x)|^2$  sú znázornené na obr. 9.27a, b. Hodnota  $a$  na obr. 9.27b (čiarkované priamky) je amplitúda kmitov makroskopického oscilátora. Podľa vzťahu (7.13) vieme, že  $W = \frac{1}{2} (m a^2 \omega_0^2)$ . Ak porovnáme energiu makroskopického oscilátora s kvantovým, dostaneme pre amplitúdu makroskopického oscilátora

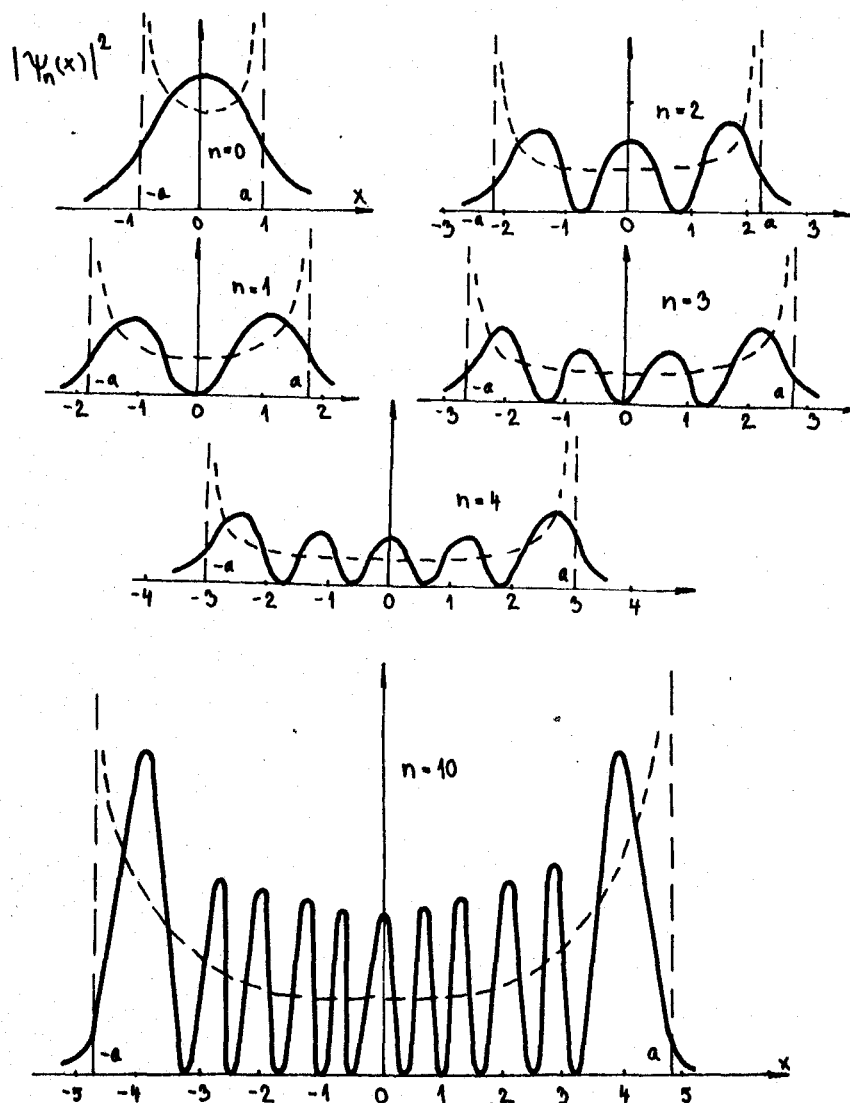
$$a = \sqrt{\frac{2 W_n}{m \omega_0^2}} = \sqrt{\frac{2 W_n}{k}}$$

Je zaujímavé a poučné porovnať hustoty pravdepodobnosti makroskopického (napr. závažie kyvadla) a kvantového oscilátora, ktoré majú rovnaké energie.



Obr. 9.27a

Na obr. 9.27b je hustota pravdepodobnosti klasického oscilátora vynesená čiarkovane. V miestach, kde sa častica pohybuje pomaly, je hustota pravdepodobnosti väčšia ako v miestach, kde sa pohybuje rýchlejšie. Kvantový oscilátor pre malé  $n$  sa správa úplne inak ako makroskopický. Nielenže hustota pravdepodobnosti je iná ako na makroskopickom oscilátore, ale nerovná sa



Obr. 9.27b

male v oblasti, ktorá je pre makroskopickú časticu zakázaná, to znamená, že je konečná pravdepodobnosť výskytu častice v "zakázanej" oblasti (vpravo a vľavo od zvislých čiarkovaných priamok s  $-a$ ,  $+a$ , ktoré vyznačujú oblasť, kde sa pohybuje makroskopický oscilátor), kde potenciálna energia silového poľa je väčšia ako celková energia častice. Čím je však  $n$  väčšie, tým viac sa kvantové rozdelenie pravdepodobnosti výskytu častice približuje ku klasickému. Obzvlášť jasne to vidieť na obr. 9.27b pre  $n = 10$ . Ak vedieme súvislú krivku maximami kvantového rozdelenia, je to krivka približne rovnakého tvaru, aký má klasická krivka. Pri zväčšovaní  $n$  sa maximá ešte viac priblížia k sebe a tvar pravdepodobnostnej krivky (obálka maxim) sa bude čoraz viac blížiť ku klasickému tvaru, ako to vyžaduje princíp korešpondencie.

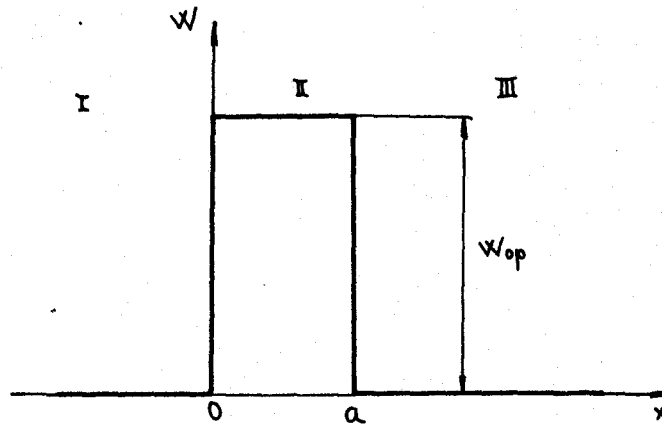
### 9.9.4 Prechod častice cez potenciálovú bariéru

Nech sa častica pohybuje pozdĺž osi  $x$  a jej celková energia nech je  $W$ . Rozloženie potenciálnej energie pozdĺž osi  $x$  je

$$W_p = 0 \quad \text{pre} \quad x < 0 \quad \text{a} \quad x > a$$

$$W_p = W_{op} > 0 \quad \text{pre} \quad 0 \leq x \leq a$$

Skúmame prípad, keď je  $W < W_{op}$  a častica nech dopadá na bariéru zľava (obr. 9.28). Podľa klasickej mechaniky sa častica od bariéry vždy odrazí, lebo jej energia je menšia ako potenciálna energia, ktorú by nadobudla, keby sa dostala do oblasti  $\langle 0, a \rangle$ . Kvantová mechanika pripúšťa, že častica sa s nenulovou pravdepodobnosťou môže dostať cez bariéru, aj keď  $W < W_{op}$ , čo ukážeme ďalej.



Obr. 9.28

Schrödingerova rovnica pre oblasti, kde je  $W_p = 0$ , má tvar

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + W \psi(x) = 0$$

po úprave

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2 \psi(x) = 0; \quad k^2 = \frac{2m W}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} \quad (9.165)$$

Pre oblasť, kde je  $W_p = W_{op} > 0$ , je

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - k_1^2 \psi(x) = 0; \quad k_1^2 = \frac{2m (W_{op} - W)}{\hbar^2} \quad (9.166)$$

Riešenie rovnice (9.165) pre oblasť I  $x < 0$  je

$$\Psi_I(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \quad (9.167)$$

a pre oblasť III  $x > a$  je

$$\Psi_{III}(x) = C \exp(ikx) + D \exp(-ikx) \quad (9.168)$$

Riešenie rovnice (9.166) pre oblasť II  $0 \leq x \leq a$  je

$$\Psi_{II}(x) = E \exp(k_1x) + F \exp(-k_1x) \quad (9.169)$$

Pretože nie je ohraničený pohyb častice pre  $x < 0$  a  $x > a$ , kde energia častice  $W > W_p$ , hovoríme o rozptylovom stave. Z tohto dôvodu riešenie (9.167) až (9.169) nemožno normovať. Pre  $x \rightarrow \pm \infty$  nie je pravdepodobnosť výskytu častice nulová. Rovnice (9.165) a (9.166) sú stacionárne Schrödingerove rovnice. Riešenie príslušnej časovej Schrödingerovej rovnice dostaneme vynásobením riešenia (9.167) až (9.169) faktorom  $\exp(-i W t/\hbar)$ . Pre oblasť I je

$$\psi(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] + B \exp[-i(kx + \omega t)]$$

Prvý člen funkcie je de Broglieho vlna, šíriaca sa v kladnom smere osi  $x$ , a druhý člen je de Broglieho vlna, ktorá sa šíri v zápornom smere osi  $x$ . Podľa toho môžeme usúdiť, že  $|A|^2$  bude úmerné pravdepodobnosti nájsť časticu, pohybovať sa zľava k potenciálovej bariére a  $|B|^2$  bude zase úmerné pravdepodobnosti nájsť časticu, pohybovať sa doľava po odraze na bariére.

Podobne môžeme interpretovať aj koeficienty  $C$  a  $D$ .  $|C|^2$  bude úmerné pravdepodobnosti nájsť časticu, pohybovať sa v kladnom smere bariéry po prechode cez ňu. Keďže nepredpokladáme pohyb častíc, dopadajúcich sprava na bariéru, je  $D = 0$ .

Na základe tejto úvahy môžeme povedať, že

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} \quad R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

$T$  je relatívna pravdepodobnosť prechodu a  $R$  je relatívna pravdepodobnosť odrazu častice do bariéry. Pretože Schrödingerova rovnica je lineárnou rovnicou, môžeme si zvoliť  $A = 1$ , a neovplyvní to výpočet  $T$  a  $R$ . Ak dosadíme riešenia (9.167) až (9.169) do podmienok spojitosti riešenia a jeho prvej derivácie v bodoch  $x = 0$  a  $x = a$ , dostaneme:

$$1 + B = E + F; \quad E \exp(k_1 a) + F \exp(-k_1 a) = C \exp(ika)$$



$$ik(1-B) = k_1(E-F); [E \exp(k_1 a) - F \exp(-k_1 a)] k_1 = \\ = ikC \exp(ika)$$

To sú štyri rovnice pre koeficienty B, C, E, F. Koeficienty prechodu T a odrazu R pre  $W < W_{op}$  sú:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{W_{op}^2 \sinh^2(k_1 a)}{4W(W_{op} - W)}} \quad R = 1 - T \quad (9.170)$$

Pre prípad, že  $W > W_{op}$ , je

$$T = \left[ 1 + \frac{W_{op}^2 \sin^2(k_2 a)}{4W(W_{op} - W)} \right]^{-1} \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (W - W_{op})} \quad (9.171)$$

$$R = 1 - T$$

Podľa kvantovej mechaniky, aj keď je energia častice  $W < W_{op}$ , existuje určitá pravdepodobnosť, určená koeficientom T (9.170), že sa častica dostane cez "vysokú" potenciálovú bariéru akýmsi "tunelom". Preto sa tento jav nazýva tunelový jav.

Ďalší poznatok, cudzí klasickej fyzike, je, že aj keď má častica dostatočnú energiu na to, aby prešla cez bariéru  $W > W_{op}$ , predsa existuje určitá pravdepodobnosť, určená koeficientom R (9.171), že sa na tejto "nízkej" bariére odrazí.

Tunelový jav poslužil na objasnenie energetických spektier a pravdepodobnosti rádioaktívneho  $\alpha$  rozpadu jadier.

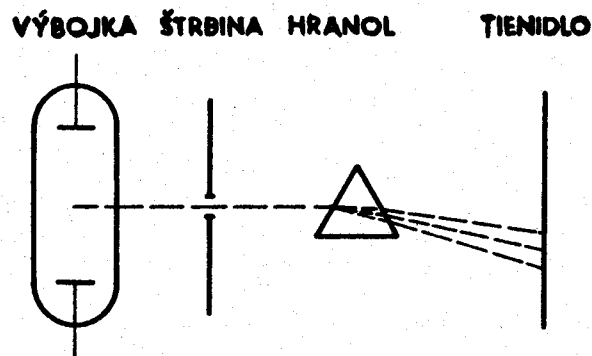
# 10. Základy fyziky atómového obalu a jadrová fyzika

## 10.1 ZÁKLADY TEÓRIE ATÓMOVÉHO OBALU

### 10.1.1 Atómové spektrá

V predchádzajúcej kapitole sme sa dozvedeli, že pevné a kvapalné látky emitujú žiarenie, v ktorom sú spojito zastúpené všetky vlnové dĺžky, ktoré nemusia mať rovnakú spektrálnu hustotu intenzity vyžarovania  $M_{e\lambda}$ . Toto žiarenie nie je charakteristickým prejavom ich jednotlivých atómov, ale skôr množstva atómov navzájom interagujúcich.

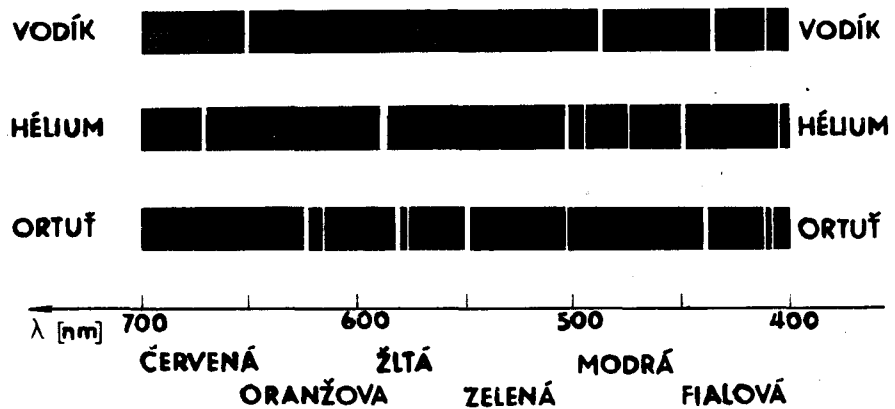
Atómy alebo molekuly dostatočne zriedenej plynnej látky sú od seba tak vzdialené, že na seba vzájomne pôsobia iba pri náhodných zrážkach. Z toho možno usúdiť, že žiarenie vysielané takouto látkou bude charakteristické pre jej atómy alebo molekuly, čo je experimentálne aj potvrdené. Vybudiť takýto zriedený plyn môžeme napr. prechodom elektrického prúdu. Spektrum emitovaného žiarenia obsahuje len určité diskkrétne vlnové dĺžky. Pozorovať ich môžeme pomocou spektrometra, schematicky znázorneného na obr. 10.1. Každý prvok má



Obr. 10.1

svoje charakteristické emisné čiarové spektrum, obr. 10.2, ktoré emituje vybudená vzorka prvku v plynnej fáze. Spektroskopia je účinný nástroj pri určovaní zloženia neznámej látky.

Plynná látka žiarenia nielen emituje, ale aj absorbuje, a to žiarenie práve takých vlnových dĺžok, aké sa nachádzajú v emisnom čiarovom spektre. Na roz-



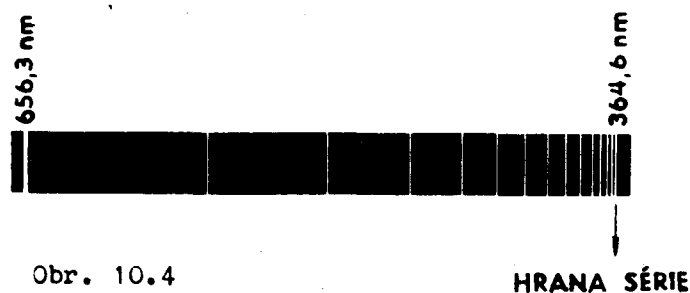
Obr. 10.2

diel od emisišného spektra absorpčné čiarové spektrum sa skladá z jasného pozadia, na ktorom sú tmavé čiary, odpovedajúce chýbajúcim vlnovým dĺžkam, obr. 10.3.



Obr. 10.3

Koncom 19. stor. sa zistilo, že vlnové dĺžky, ktoré sa nachádzajú v atómových spektrách, sa zoskupujú do tzv. spektrálnych sérií. Prvú takúto spektrálnu sériu objavil Balmer (roku 1885) pri štúdiu viditeľnej časti vodíkoveho spektra. V Balmerovej sérii, obr. 10.4, najväčšiu vlnovú dĺžku má čiara 656,3 nm, ďalšia čiara je 486,3 nm atď. Ako postupne klesá vlnová dĺžka,



Obr. 10.4

rozloženie čiar je čoraz hustejšie a ich intenzita slabne až na tzv. hranu série pri vlnovej dĺžke 364,6 nm. Za touto čiarou už nie sú jednotlivé čiary, ale len slabé spojité spektrum. Balmer rozloženie čiar v spektre vyjadril pomocou empirického vzorca

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 3, 4, 5, 6, \dots \quad (10.1)$$

kde  $\lambda$  je vlnová dĺžka,  $R$  je Rydbergova konštanta a má hodnotu  $R = 10\,967\,731\text{ m}^{-1}$ . Prvej čiare (656,3 nm) odpovedá  $n = 3$ , ďalšej  $n = 4$  atď. Číslu  $n \rightarrow \infty$  odpovedá tzv. hrana série, ktorej  $\lambda = 4/R$ , čo je v zhode s experimentom. Po Balmerovi boli objavené v neviditeľnej oblasti vodíkového spektra ďalšie série, Paschen (roku 1909), Lyman (roku 1914), Brackett (roku 1922), Pfund (roku 1924). Tieto série môžeme vyjadriť pomocou vzorcov, ktoré sú analogické ako (10.1):

Lymanova série

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (10.2)$$

Paschenova série

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 4, 5, 6, 7, \dots \quad (10.3)$$

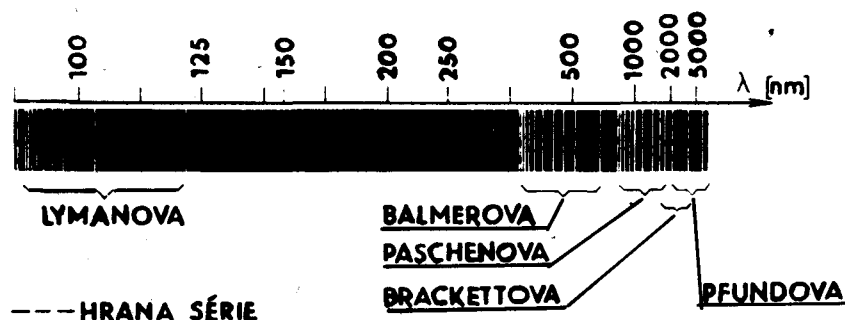
Brackettova série

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 5, 6, 7, 8, \dots \quad (10.4)$$

Pfundova série

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 6, 7, 8, 9, \dots \quad (10.5)$$

Na obr. 10.5 sú spektrálne série vodíka vynesené v závislosti od vlnovej dĺžky. Pravidelnosti rozloženia čiar sa nevyskytujú len vo vodíkovom spektre, ale aj v spektrách zložitejších atómov, a tým sa táto skutočnosť stala testom pre každú teóriu atómovej štruktúry.

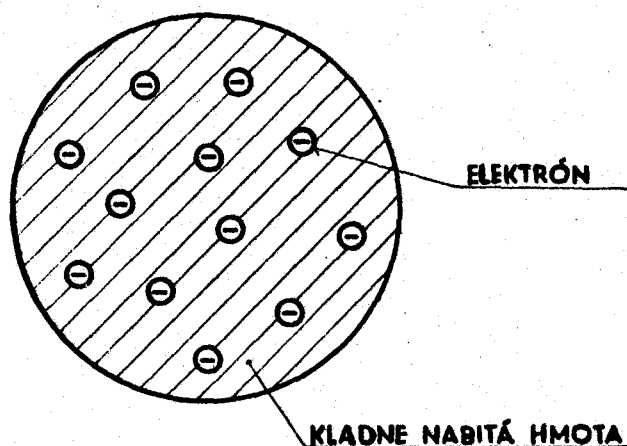


Obr. 10.5

## 10.1.2 Modely atómu

Ľudia už v dávnej minulosti tušili, že hmota má aj pri svojom spojitom vzhľade z hľadiska mikroskopického určitú štruktúru, ktorú nemôžeme sledovať našimi zmyslami. V 19. stor. bola dokázaná existencia atómov a molekúl, bol objavený elektrón, zistilo sa, že atómy majú (obsahujú) elektróny, ktoré majú záporný náboj. Atómy navonok sú elektricky neutrálne, preto atóm musí ešte obsahovať kladne nabitú hmotu na vykompenzovanie záporných nábojov elektrónov. Ďalší poznatok bol o atómových spektrách.

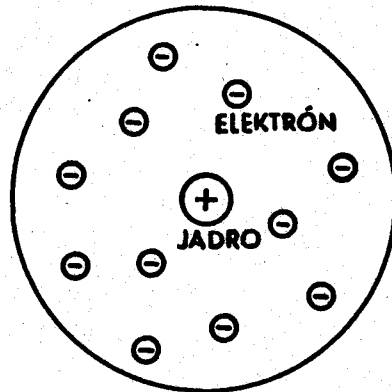
Tieto okolnosti nútili urobiť si predstavu o štruktúre atómu. Prvý sa o to pokúsil Thomson, ktorý si atóm predstavoval ako guľu s rovnomerne vyplneným kladným nábojom, obr. 10.6. Vo vnútri takejto masy sú rozmiestnené záporné elektróny, ktoré robia kmitavé pohyby, čoho dôsledkom je vysielanie elektromagnetického žiarenia.



Obr. 10.6

Rutherford robil pokusy s rozptylom  $\alpha$  žiarenia pri prechode cez kovovú fóliu. Zistil, že  $\alpha$  častica ako kladný ión prenikne podstatne hlbšie (asi 4000-krát) ako neutrálny atóm. Len asi jedna z 20 000  $\alpha$  častíc sa vychýli z pôvodného smeru o viac než  $90^\circ$ . Niektoré častice sú dokonca rozptýlené o  $180^\circ$  od pôvodného smeru. Aby  $\alpha$  častica, ktorá sa pohybuje veľkou rýchlosťou, bola vychýlená o  $180^\circ$ , musia pôsobiť veľké sily elektrického poľa. Rutherford predpokladal, že atómy sú zložené z jadra, ktoré majú kladný náboj a celá hmotnosť atómu je prakticky v ňom sústredená. Thomsonov model nevyhovoval, lebo elektrické pole na povrchu atómu (aj pri zanedbaní vplyvu elektrónov) je veľmi slabé  $\sim 10^{13} \text{ V.m}^{-1}$  na to, aby  $\alpha$  častica bola vychýlená aj o  $180^\circ$ . Ak Rutherfordovo jadro je veľmi malé, potom elektrické pole v blízkosti jeho povrchu sa zväčší asi  $10^8$ -krát vzhľadom na Thomsonov model. Takéto pole je už schopné vychýliť, alebo dokonca obrátiť orientáciu pohybu aj  $\alpha$  častice, hoci má veľkú kinetickú energiu, keď sa pohybuje v tesnej blízkosti jadra.

Elektróny so svojou malou hmotnosťou veľmi neovplyvňujú pohyb  $\alpha$  častíc. Jadro atómu zaberá z celého jeho objemu len veľmi malú časť, takže väčšina  $\alpha$  častíc môže tenkou fóliou prechádzať priamočiara. Rutherfordov model atómu, obr. 10.7, postuluje malé ťažké, kladne nabité jadro, obklopené v pomerne veľkej vzdialenosti dostatočným počtom elektrónov, takže atóm je navonok elektricky neutrálny. Kým v Thomsonovom modeli elektróny, ponorené do kladne nabitej látky, nemusia sa pohybovať (len kmitať), v Rutherfordovom modeli elektróny sa musia pohybovať (krúžiť okolo jadra), aby sa nezrútili na jadro, ktoré ich priťahuje. Elektróny sa pohybujú po dynamicky stabilných



Obr. 10.7

dráhach. Je to analógia pohybu planét okolo Slnka. Tento model ale nevyhovoval elektromagnetickej teórii, podľa ktorej, ak sa náboj pohybuje zrýchleným pohybom, vyžaruje energiu vo forme elektromagnetických vln. Elektróny v Rutherfordovom modeli sa pohybujú s dostredivým zrýchlením, takže musia vyžarovať energiu. Ubúdanie energie elektrónu spôsobuje, že sa nepohybuje po stabilnej dráhe, ale po špirále smerujúcej k jadru. Atómy sú však stabilné, preto tento model atómu tiež nemôže vyhovovať.

Bohr vypracoval ďalší model atómu. Zostal už pri planetárnom Rutherfordovom modeli. Ovplyvnený niektorými javmi (fotoelektrický jav, difrakcia elektrónov), vysvetlenými pomocou kvantových pojmov (Einsteinova a Planckova hypotéza o fotóne), upustil od predpokladov klasickej fyziky a nahradil ich novými predpokladmi, ktoré znamenajú prvú aplikáciu kvantovej fyziky v atómovej teórii. Tieto nové predpoklady sú vyjadrené tromi Bohrovými postulátmi:

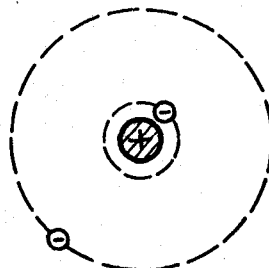
1. Elektrón môže trvale krúžiť okolo jadra len v niektorej dráhe tvaru kružnice, ktorej polomer  $r$  spĺňa podmienku rovnováhy medzi Coulombovou silou a odstredivou silou

$$\frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r_n^2} = \frac{m v^2}{r_n} \quad (10.6)$$

a jednu z podmienok (pre niektoré  $n$ )

$$2\pi r_n m v = n h; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (10.7)$$

kde  $Z$  je počet kladných nábojov v jadre,  $m$ -pokojoová hmotnosť elektrónu,  $v$ -obvodová rýchlosť elektrónu na dráhe polomeru  $r_n$ ,  $\epsilon_0$ -permitivita vákua,  $h$ -Planckova konštanta,  $n$  je celé kladné číslo a nazýva sa hlavné kvantové číslo. Dráhy spĺňajúce tieto podmienky sa nazývajú kvantové dráhy, obr. 10.8.

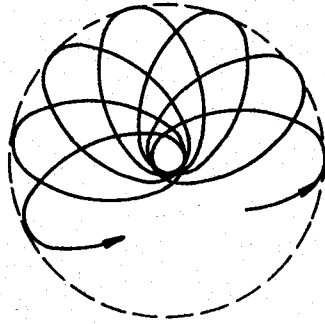


Obr. 10.8

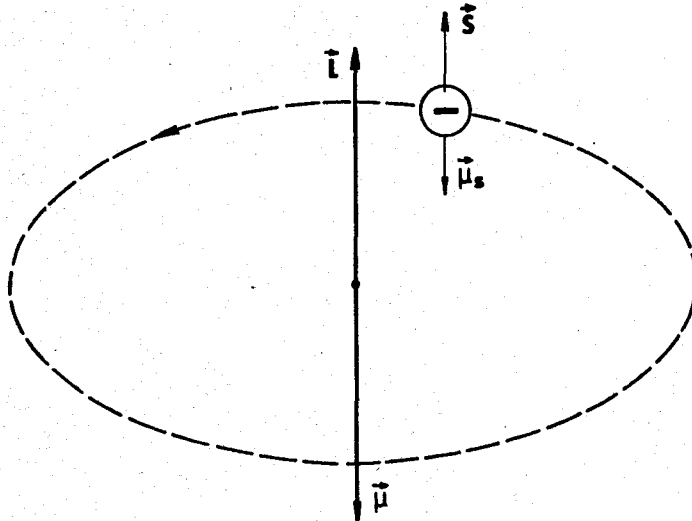
2. Ak elektrón obieha okolo jadra v niektorej z kvantových dráh, atóm nežiari a jeho energia je konštantná.
3. Pri prechode elektrónu na inú kvantovú dráhu, v ktorej má potom menšiu energiu, atóm vyžiari fotón, ktorého energia sa rovná úbytku energie elektrónu. Naopak, pri absorpcii fotónu prejde elektrón na inú kvantovú dráhu, na ktorej má energiu väčšiu o energiu pohlteneho fotónu.

Tieto postuláty vyslovil Bohr roku 1913 a výsledky z nich vyplývajúce sa veľmi dobre zhodovali s pozorovanými spektrálnymi čiarami. Použitím silnejších spektrometrov sa zistilo, že všeobecne každá spektrálna čiara sa skladá z niekoľkých jemnejších čiar veľmi blízkych frekvencií. Vo vodíkovom spektre to boli dvojité čiary, tzv. dublety. Bohrov model to už nedokázal vysvetliť. Pokúsil sa o to Sommerfeld. Najprv predpokladal, že tak ako planéty, aj elektróny sa pohybujú po eliptických dráhach. Urobil aj kvantovanie dráh čo do veľkosti (hlavná polos) a tvaru dráhy (excentricity). To neprinieslo žiadaný výsledok. Až keď použil špeciálnu teóriu relativity na pohyb elektrónov okolo jadra, podarilo sa mu čiastočne vysvetliť jemnú štruktúru spektrálnych čiar. Závislosť hmotnosti elektrónu od rýchlosti spôsobuje, že sa dráhy stáčajú a elektrón vytvára akúsi ružicu, obr. 10.9. Pri prechode elektrónu na rôzne dráhy s rovnakou hodnotou hlavného kvantového čísla (rovnaká hlavná polos) sa vyžarujú fotóny s rôznou energiou. Tento výklad jemnej štruktúry spektrálnych čiar nebol presvedčivý.

Poznatok, že čiara sa štiepi na dve (dublet), priviedol Uhlenbecka a Goudsmita (1925) na myšlienku, že elektróny v atómovom obale sa okrem pohybu po eliptických dráhach ešte otáčajú okolo svojej geometrickej osi. Elektrón má teda okrem orbitálneho momentu hybnosti, tzv. spinový moment hybnosti alebo jednoducho spin. Vektor orbitálneho momentu hybnosti  $\vec{L}$  je kolmý na rovinu obežnej dráhy elektrónu a vektor spinového momentu hybnosti  $\vec{S}$  má smer ro-



Obr. 10.9



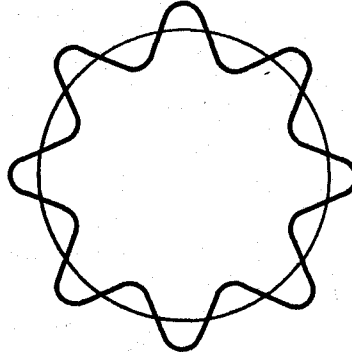
Obr. 10.10

tačnej osi, obr. 10.10. Elektrón je pohybujúci sa náboj, takže jeho obiehanie a rotácia predstavuje uzavretý pohyb náboja a má, tak ako prúdová slučka, istý magnetický moment, a to ako magnetický moment  $\vec{\mu}$ , tak aj spinový magnetický moment  $\vec{\mu}_s$ . Smer vektora  $\vec{\mu}$  je totožný so smerom vektora  $\vec{L}$  a smer vektora  $\vec{\mu}_s$  je totožný so smerom vektora  $\vec{S}$ , ale ich orientácia je opačná. Aby sa vysvetlila dvojitost spektrálnych čiar, Goudsmit a Uhlenbeck vyslovili hypotézu, že spin elektrónu je kolmý na rovinu obežnej dráhy elektrónu a má vždy rovnakú hodnotu. Spinový magnetický moment je teda buď súhlasne, alebo nesúhlasne rovnobežný s vektorom  $\vec{L}$ . Energia elektrónu je rozdielna, aj keď nepatrne, a atóm pri rovnakých kvantových prechodoch potom emituje žiarenie, odpovedajúce rozdielnym čiarom.

Uhlenbeck a Goudsmit si elektróny predstavovali ako rotujúce záporne nabité guľky krúžiace okolo jadra. Elektróny sa správajú aj ako vlny (difrakcia). Hoci časticové vlastnosti vln (fotoelektrický jav) boli objavené už roku 1905 (Einstein, Planck), opačné tvrdenie o vlnových vlastnostiach častíc vyslovil až roku 1924 de Broglie. Elektrón na svojej stabilnej dráhe nevyžaruje energiu, preto dĺžka dráhy musí byť celočíselným násobkom do Broglieho vlnovej dĺžky (analógia s kmitajúcou drôtenou slučkou). Tento de Broglieho mo-



del atómu (obr. 10.11) pokladá elektrón tiež za časticu, ktorá obieha okolo jadra po eliptickej dráhe a je sprevádzaná vlnením, lokalizovaným do priestoru tej dráhy. Ak vzťah pre dĺžku de Broglieho vlny



Obr. 10.11

$$\lambda = \frac{h}{m v}$$

použijeme v podmienke (10.7), dostaneme:

$$2 \pi r_n = n \lambda \tag{10.8}$$

Táto vlnovo mechanická interpretácia názornejšie vysvetľuje Bohrovu podmienku (10.7). Doteraz uvedené modely atómu len čiastočne spĺňajú spektroskopické poznatky. Nevedia logicky vysvetliť tzv. výberové pravidlá, ktorými musia byť tieto teórie doplnené, lebo pripúšťajú aj čiary, ktoré v spektrách atómov vôbec neboli pozorované. Rovnako tieto teórie neposkytujú informácie o intenzitách spektrálnych čiar.

Tieto a iné nedostatky sa nedali vysvetliť použitím takých modelov atómu, ktoré sú analógiou makrokozmu. Pre deje v mikrosvete musela fyzika prejsť od konkrétnych pojmov k abstraktným, už málo názorným. V tomto pomohla vlnová mechanika. Schrödingerova rovnica neposkytuje už klasický opis pohybu častice, ale dáva hustotu pravdepodobnosti výskytu častice v priestore. Na tomto základe Schrödinger a Born založili model atómu, v ktorom sa nepredpokladá, že elektrón obieha okolo jadra na presne definovanej dráhe, ale hľadá sa vlnová funkcia, ktorej druhá mocnina určuje hustotu pravdepodobnosti výskytu elektrónu v priestore okolo jadra. Elektróny už nie sú v atómovom obale lokalizované a ich poloha je vymedzená len štatistickými zákonmi založenými na teórii pravdepodobnosti.

Aj tento model má nedostatky, najmä v tom, že nevysvetľuje jemnú štruktúru ani tak, ako Uhlenbeck - Goudsmitov model atómu. Prínos pre atómovú teóriu je predovšetkým v tom, že pripúšťa stredovo symetrické rozloženie záporného náboja okolo jadra. Takýto "guľový tvar" atómu lepšie vyhovuje experimentálnym poznatkom (i kinetickej teórii plynu) ako "plochý tvar", spojený s predstavou rovinných obežných dráh elektrónu.

Vlnovomechanické ponímanie atómového obalu dalo základy Diracovej teórie, veľmi abstraktnej, ale zároveň veľmi úspešnej. Dirac nahradzuje vlnovú funkciu, ktorá je všeobecne komplexnou skalárnou veličinou (v každom mieste je určená jedným komplexným číslom), súhrnom štyroch komplexných čísel, ktoré definuje tzv. spinor. Používa Einsteinovu relativistickú mechaniku. Elektrónu je priradený spinor, pre ktorý Dirac predpokladá platnosť parciálnej diferenciálnej rovnice, obdobnej Schr. Zavedením spinoru dosiahol všeobecné matematické vyjadrenie spinu elektrónu. Podarilo sa mu vytvoriť úplnú teóriu jemnej štruktúry spektrálnych čiar.

Z Diracovej teórie priamo vyplynula existencia tzv. antičastíc. Ku každej častici existuje antičastica, ktorá sa pri nabitých časticiach líši predovšetkým znamienkom náboja (antielektrón - pozitron, antiprotón, antineutrón). Po niektorých zdokonaleniach Diracova teória je už konečnou fázou fyziky atómového obalu.

### 10.1.3 Bohrov model atómu vodíka

Pri úvahách o Bohrovom modeli použijeme pre názornejšiu predstavu už de Broglieho model atómu. Podľa de Broglieho má vlna priradená elektrónu vlnovú dĺžku (pozri 9.51)

$$\lambda = \frac{h}{m v} \quad (10.9)$$

Na elektrón pri pohybe okolo jadra pôsobí Coulombova sila, ktorá je v rovnováhe s odstredivou silou (10.6). Pre atóm vodíka je  $Z = 1$ , takže

$$\frac{m v^2}{r_n} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r_n^2} \quad (10.10)$$

z toho

$$v = \frac{e}{\sqrt{4 \pi \epsilon_0 m r_n}}$$

Po dosadení (10.10) do vzťahu (10.9) dostaneme:

$$\lambda = \frac{h}{e} \sqrt{\frac{4 \pi \epsilon_0 r_n}{m}} \quad (10.11)$$

Predpokladáme, že elektróny sa pohybujú po kružnici a podmienka elektrónovej dráhy, ktorej dĺžka musí byť celočíselným násobkom de Broglieho vln, je

$$2\pi r_n = n\lambda \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (10.12)$$

Ak vzťah pre vlnovú dĺžku (10.11) dosadíme do podmienky (10.12), dostaneme polomery možných dráh elektrónu

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{4\pi m e^2} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (10.13)$$

Polomer prvej dráhy elektrónu sa nazýva Bohrov polomer atómu vodíka a označuje sa symbolom  $a_0$ :

$$a_0 = r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (10.14)$$

Ostatné môžeme potom vyjadriť

$$r_n = n^2 a_0 \quad (10.15)$$

To znamená, že vzdialenosť medzi susednými dráhami s rastúcim  $n$  sa zväčšuje.

Elektrón, ktorý sa pohybuje po kruhovej dráhe (predpoklad) okolo jadra (protón), má kinetickú energiu ( $v \ll c$ )

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (10.16)$$

potenciálnu energiu (pozri 2.126)

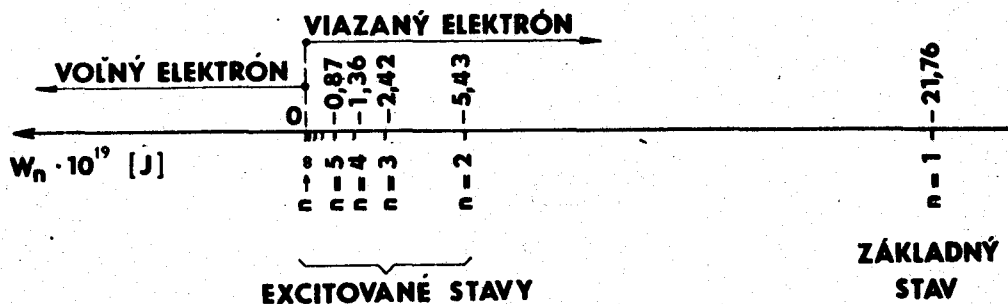
$$W_p = \frac{(-e) \cdot (+e)}{4\pi\epsilon_0 r_n} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \quad (10.17)$$

a celkovú energiu

$$W_n = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} \quad (10.18)$$

keď sme za  $v$  dosadili vzťah (10.10). Rôzne dovolené dráhy znamenajú rôzne energie elektrónu. Po dosadení za  $r_n$  zo vzťahu (10.13) do (10.18) je

$$W_n = - \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (10.19)$$



Obr. 10.12

Energie dané vzťahom (10.19) sa nazývajú energetické hladiny atómu vodíka - obr. 10.12. Tieto hladiny majú záporné znamienko, čo značí, že elektrón nemá dostatok energie, aby sa odpútal od jadra. Je teda viazaný k jadru. Energetická hladina pre  $n = 1$  sa nazýva základný stav atómu, vyššie hladiny sa nazývajú excitované stavy. Pre  $n \rightarrow \infty$  je  $W_n = 0$  a elektrón už nie je viazaný k jadru. Ďalej už elektrón môže nadobúdať akékoľvek kladné hodnoty energie a nemusí teda spĺňať žiadne kvantové podmienky.

Energia základného stavu je

$$W_1 = - \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} = - 2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = - 13,6 \text{ eV} \quad (10.20)$$

Podľa experimentálnych výsledkov vychádza, že na oddelenie elektrónu od jadra (protónu) je potrebná energia 13,6 eV, čo odpovedá väzbovej energii (10.20) - 13,6 eV.

Predpokladajme, že elektrón preskočí z excitovaného stavu do nižšieho stavu. Úbytok jeho energie sa vyžiarí ako jeden fotón.

Takto sa vždy vyžiarí fotón, ak elektrón preskočí z hladiny energeticky vyššej  $W_i$  na hladinu energeticky nižšiu  $W_f$ . Energia fotónu je

$$\epsilon = h\nu = W_i - W_f \quad (10.21)$$

Po dosadení (10.19) dostaneme:

$$\begin{aligned} h\nu = W_i - W_f &= \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left[ \left( -\frac{1}{n_i^2} \right) - \left( -\frac{1}{n_f^2} \right) \right] = \\ &= \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \end{aligned} \quad (10.22)$$

Frekvencia, s ktorou je fotón emitovaný, je

$$\nu = \frac{W_i - W_f}{h} = \frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (10.23)$$

Pretože  $\lambda = c/\nu$ , dostaneme:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 c h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (10.24)$$

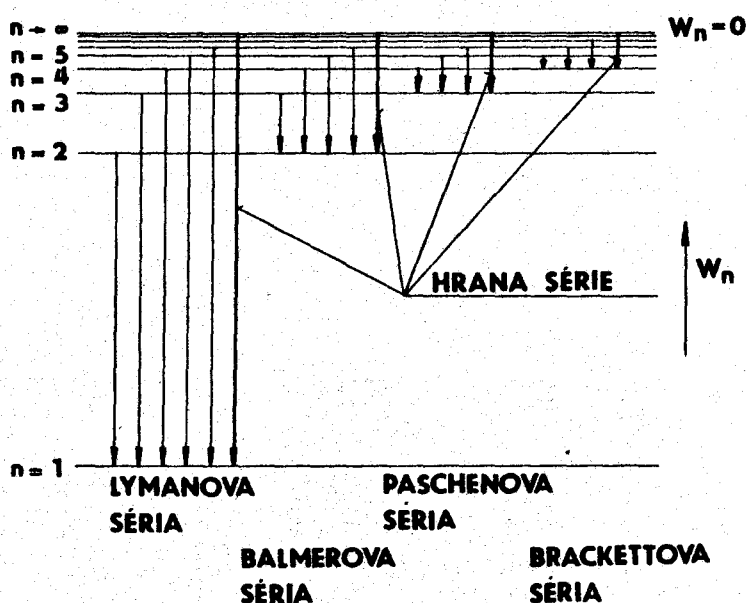
Vo vzťahu (10.24) označme:

$$\frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 c h^3} = R \quad (10.25)$$

Jej hodnota je

$$R = 1,0973731 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (10.26)$$

nazývame ju Rydbergovou konštantou. Súhlasí s experimentálne zistenou hodnotou konštanty  $R$  vo vzťahoch (10.1) až (10.5). Bohom vypracovaná teória kvalitatívne i kvantitatívne súhlasí s experimentom. Na obr. 10.13 je schematicky znázornený súvis spektrálnych čiar s energetickými hladinami.



Obr. 10.13

Bohrova teória spĺňa aj tzv. princíp korešpondencie. Musí dávať rovnaké výsledky ako klasická fyzika v oblastiach, kde podľa údajov experimentov platia klasické zákony. Teda v limite veľkých kvantových čísel dáva rovnaké výsledky ako klasická fyzika.

Pri výklade Bohrovej teórie atómu vodíka sme nebrali do úvahy pohyb protónu. Hoci jeho pokojová hmotnosť je 1836-krát väčšia, musíme pri presnom výpočte brať do úvahy aj jeho pohyb. Sústava protón a elektrón obiehajú okolo spoločného hmotného stredu. Keď túto úvahu aplikujeme na Bohrove kvantové podmienky, dostaneme rovnaké výsledky, ak namiesto hmotnosti elektrónu  $m$  dosadíme tzv. redukovanú hmotnosť elektrónu  $m'$

$$m' = \frac{M}{M + m} m \quad (10.27)$$

kde  $M$  je pokojová hmotnosť protónu.

Deutérium (v jadre má protón a neutrón) má všetky spektrálne čiary trochu posunuté ku kratším vlnovým dĺžkam v porovnaní s obyčajným vodíkom. Napr. čiara deutéria s  $\lambda = 656,1$  nm pri vodíku zodpovedá čiare s  $\lambda = 656,3$  nm. Pojem redukovanej hmotnosti pomohol práve pri objave deutéria. Rydbergova konštanta po uplatnení korekcie má hodnotu

$$R = 1,0967758 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (10.28)$$

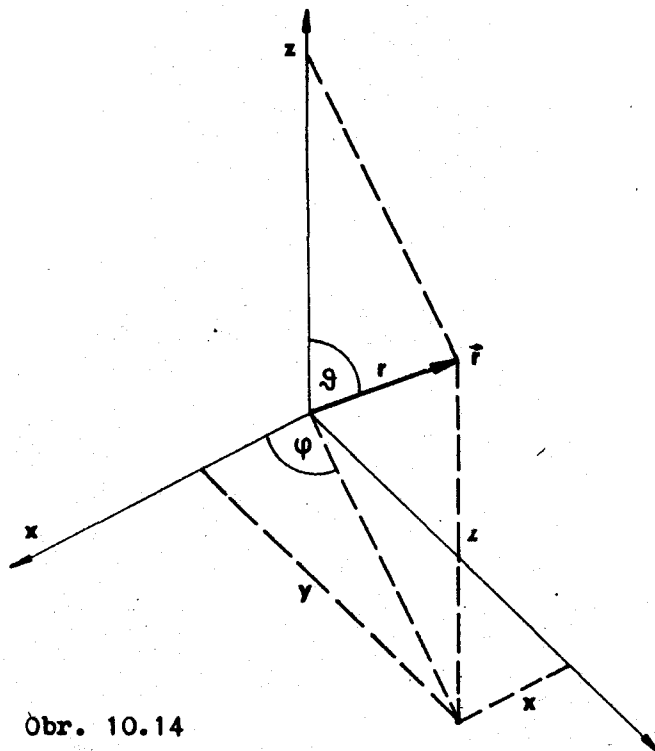
#### 10.1.4 Schrödinger - Bornov model atómu vodíka

Vieme už, že atóm vodíka sa skladá z protónu (+e) a z elektrónu (-e). Predpokladajme, že protón (jadro atómu) je nehybný a v jeho elektrickom poli sa pohybuje elektrón. Korekciu na pohyb protónu možno urobiť podobne ako v Bohrovej teórii pomocou redukovanej hmotnosti.

Elektrón sa pohybuje okolo jadra v priestore, musíme teda preň použiť trojrozmernú SchR v stacionárnom tvare (pozri (9.88))

$$W \psi(\vec{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + W_p \right) \psi(\vec{r}) \quad (10.29)$$

Elektrické pole okolo protónu je guľovo symetrické, preto je výhodnejšie prejsť od kartézskych súradníc k sférickým (obr. 10.14) a vyjadriť SchR (10.29) pomocou nich.



Obr. 10.14

Transformačné vzťahy sú:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned} \tag{10.30}$$

Potenciálna energia elektrónu v elektrickom poli protónu je (10.17)

$$W_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{10.31}$$

Po dosadení vzťahu (10.31) do (10.29), použitím transformačných vzťahov (10.30) a úpravou dostaneme SchR, vyjadrenú vo sférických súradniciach:

$$\begin{aligned} \sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{2m r^2 \sin^2 \vartheta}{\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + W \right) \psi = 0 \end{aligned} \tag{10.32}$$

Vlnová funkcia  $\psi$  je závislá od  $r, \vartheta, \varphi$  a SchR v tvare (10.32), potom môžeme separovať na tri nezávislé rovnice.

Nech teda

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) T(\vartheta) F(\varphi) \quad (10.33)$$

Každá z funkcií  $R(r)$ ,  $T(\vartheta)$ ,  $F(\varphi)$  popisuje priebeh funkcie v závislosti iba od jednej premennej, keď ostatné dve sú konštantné. Parciálne derivácie funkcie  $\psi$  podľa premenných  $r, \vartheta, \varphi$  sú:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = TF \frac{\partial R}{\partial r}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = RF \frac{\partial T}{\partial \vartheta}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = RT \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \quad (10.34)$$

Po dosadení (10.34) do rovnice (10.32) a úprave dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \vartheta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\sin \vartheta}{T} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) + \\ + \frac{2m r^2 \sin^2 \vartheta}{\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} + W \right) = - \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (10.35)$$

Rovnica (10.35) je vtedy platná, ak sa obe strany rovnice rovnajú tej istej konštante, lebo na obidvoch stranách sú funkcie rôznych premenných. Označme túto konštantu  $m_1^2$ . Teda

$$- \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = m_1^2 \quad (10.36)$$

čo je diferenciálna rovnica pre  $F(\varphi)$ .

Keď dosadíme (10.36) späť do rovnice (10.35) a rovnicu delíme  $\sin^2 \vartheta$ , po úprave dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2m r^2}{\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} + W \right) = \\ = \frac{m_1^2}{\sin^2 \vartheta} - \frac{1}{T \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned} \quad (10.37)$$

Dostali sme rovnicu, kde tiež na obidvoch stranách sú funkcie rôznych premenných. Keď je rovnica platná, musia sa obidve strany rovnať tej istej konštante. Označme ju  $l(l+1)$ . Teda

$$\frac{m_1^2}{\sin^2 \vartheta} - \frac{1}{T \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dT}{d\vartheta} \right) = l(l+1) \quad (10.38)$$



$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m r^2}{\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} + W \right) = l(l+1) \quad (10.39)$$

Všetky tri rovnice pre funkcie  $F(\varphi)$ ,  $T(\vartheta)$ ,  $R(r)$  napíšeme ešte raz, ale v obvyklom tvare:

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} + m_1^2 F(\varphi) = 0 \quad (10.40)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dT(\vartheta)}{d\vartheta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m_1^2}{\sin^2 \vartheta} \right] T(\vartheta) = 0 \quad (10.41)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} + W \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (10.42)$$

#### 10.1.5 Kvantové čísla a ich fyzikálny význam

Ďalšou úlohou teórie Schrödinger-Bornovho modelu je nájsť riešenia troch rovníc (10.40), (10.41), (10.42).

Prvá rovnica (10.40) má tvar harmonickej diferenciálnej rovnice, ktorej vyhovuje riešenie (pozri (7.9d))

$$F(\varphi) = A \exp(i m_1 \varphi); \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (10.43)$$

kde  $A$  je integračná konštanta. Tak ako funkcia  $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ , aj funkcia  $F(\varphi)$  musí spĺňať podmienku jednoznačnosti, aby v danom bode priestoru mala funkcia  $F(\varphi)$  jednu jedinú hodnotu. Polohový vektor  $\vec{r}$ , ktorý leží v rovine (poludníkovej), určenej uhlom  $\varphi$  (pri konštantnom  $r$  a  $\vartheta$ ), je ten istý, ako keď je určený uhlom  $\varphi + 2\pi$  alebo  $\varphi - 2\pi$ . To znamená, že

$$A \exp(i m_1 \varphi) = A \exp[i m_1 (\varphi \pm 2\pi)]$$

albo po rozpísaní

$$1 = \exp(\pm i m_1 2\pi) \quad (10.44)$$

Rovnosť (10.44) možno splniť iba vtedy, keď konštanta  $m_1$  nadobúda tieto hodnoty:

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nazývame ju magnetickým kvantovým číslom atómu vodíka.

Ďalšiu diferenciálnu rovnicu pre  $T(\vartheta)$  (10.41) riešime tak, že jej riešenie hľadáme v tvare mocninového radu. Aby riešenie bolo fyzikálne prípustné a vyhovovalo požiadavkám naň kladeným, musí byť funkcia  $T(\vartheta)$  určená pomocou tzv. Legendrových polynómov (podobne ako pri harmonickom oscilátore 9.9.3).

Konštanty  $l$  a  $m_l$  musia spĺňať požiadavku, aby  $l$  bolo celé číslo a bolo rovné alebo väčšie ako absolútna hodnota  $m_l$ . Teda

$$m_l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm l$$

Konštanta  $l$  sa nazýva orbitálne (vedľajšie) kvantové číslo. Rovnicu (10.42) pre funkciu  $R(r)$ , ktorá je radiálnou časťou funkcie  $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ , riešime analogicky ako predchádzajúcu rovnicu pomocou tzv. Laguerrových polynómov. Rovnica má riešenie pre energiu  $W \geq 0$ , ktorá môže nadobúdať akékoľvek hodnoty (ionizovaný atóm vodíka). Pre  $W < 0$  (záporné hodnoty energie  $W$ ) môžu byť len diskkrétne hodnoty (viazaný elektrón) a sú určené vzťahom

$$W_n = - \frac{m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} \right) \quad (10.45)$$

kde  $n$  je celé číslo. To je presne ten istý vzťah, aký vyplýval z Bohrovej teórie (10.19). Ďalšia podmienka, nevyhnutná na riešenie, určuje, že  $n$ , ktoré nazývame hlavným kvantovým číslom, musí byť rovné alebo väčšie ako  $l + 1$ . Teda

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

Vlnovú funkciu  $\psi$  môžeme písať ako

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl} T_{lm_l} F_{m_l}$$

kde indexy pri funkciách  $R$ ,  $T$ ,  $F$  vyznačujú ich závislosť od kvantových čísel  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$ . Kvantové čísla môžu nadobúdať tieto hodnoty:

hlavné kvantové číslo	$n = 1, 2, 3, \dots$	
vedľajšie kvantové číslo	$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$	(10.46)
magnetické kvantové číslo	$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$	

Zo vzťahu (10.45) vyplýva, že hlavné kvantové číslo  $n$  určuje kvantovanie energie elektrónu v atóme vodíka. Keby sme Schrödinger-Bornov model použili na planetárny pohyb; napr. našej Zeme, vyšlo by nám (zo známej, zápornej

potenciálnej energie Zeme) také obrovské číslo, že susedné energetické hladiny by boli pod hranicou rozlíšiteľnosti.

Aká je interpretácia vedľajšieho (orbitálneho) kvantového čísla, ukáže nasledujúca úvaha.

Celková energia elektrónu je súčtom troch členov

$$W = W_0 + W_r + W_p \quad (10.47)$$

kde  $W_p$  je potenciálna energia určená vzťahom (10.17),  $W_0$  je energia odpovedajúca pohybu elektrónu okolo jadra,  $W_r$  je energia odpovedajúca pohybu smerom k jadrú alebo od jadra.

Ak celkovú energiu (10.47) dosadíme do rovnice (10.42) a upravíme ju, dostaneme:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ W_r + W_0 - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right] R = 0 \quad (10.48)$$

Táto rovnica popisuje radiálnu zložku pohybu elektrónu (od jadra alebo k jadrú), a teda v hranatej zátvorke rovnice (10.58) by mala byť len energia  $W_r$ , ktorá odpovedá tejto zložke pohybu. Aby sme to splnili, musí byť

$$W_0 = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \quad (10.49)$$

Hoci použijeme vzťah pre  $W_0$  z klasickej fyziky, výsledok bude rovnaký, keď sme použili kvantovú mechaniku (pozri stať 9.7 a vzťah (9.113)). Teda

$$W_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (10.50)$$

a moment hybnosti elektrónu  $L$  je

$$L = m v_0 r \quad (10.51)$$

Použitím vzťahov (10.50), (10.51) a (10.49) dostaneme:

$$\frac{L^2}{2m r^2} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2}$$

alebo

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (10.52)$$

Zo vzťahu (10.52) vidíme, že podobne ako energia, aj moment hybnosti  $L$  je kvantovaný, pretože  $l$  môže nadobúdať len diskkrétne hodnoty (10.46). Pre jednotlivé stavy momentu hybnosti sa zaužívali písmená, a to:

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \quad (10.53)$$

$$s, p, d, f, g, h, i, \dots$$

Kombinácia hlavného kvantového čísla  $n$  s vedľajším kvantovým číslom  $l$  (reprezentované písmenom) označuje stav atómu vodíka, napr.  $5d$  je  $n = 5$  a  $l = 2$ . Zostáva ešte určiť význam magnetického kvantového čísla  $m_l$ .

Moment hybnosti  $L$  je vektorová veličina, ktorá je určená nielen veľkosťou, ale aj smerom a orientáciou. Elektrón pri obíehaní okolo jadra môžeme nahraďiť prúdovou slučkou. Magnetické pole na takúto prúdovú slučku pôsobí silovým momentom (pozri 6.4.6)

$$\vec{M} = I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

keď  $I$  je elektrický prúd slučky, ktorej plocha je  $S$ . Indukcia magnetického poľa v mieste slučky je  $\vec{B}$ , veličina  $\vec{\mu}$  je vektor magnetického momentu slučky. Pohyb náboja ( $-e$ ) je ekvivalentný prúdu  $-ev$ , kde  $v$  je frekvencia obíehania elektrónu okolo jadra. Magnetický moment elektrónu je

$$\mu = -e v \pi r^2 \quad (10.54)$$

a moment hybnosti

$$L = m v r = m \frac{2\pi r}{T} r = m 2\pi r^2 v \quad (10.55)$$

Porovnaním vzťahov (10.54) a (10.55) dostaneme:

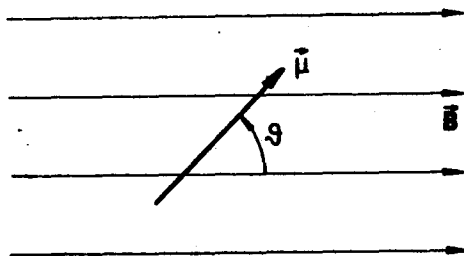
$$\mu = -\frac{e}{2m} L \quad (10.56)$$

Pretože  $e/2m$  je skalárna veličina, môžeme (10.56) písať vo vektorovom tvare

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L} \quad (10.57)$$

Vidíme, že vektory  $\vec{\mu}$  a  $\vec{L}$  sú opačne orientované.

Nech indukcia magnetického poľa  $\vec{B}$  má smer a orientáciu osi  $z$ . Potenciálna energia prúdovej slučky, ktorá sa nachádza v magnetickom poli, je rovná práci vonkajších síl, potrebnej na jej otočenie z uhla  $\psi_0 = 90^\circ$  do uhla  $\psi$  (obr. 10.15):



Obr. 10.15

$$W_{pm} = \int_{90^\circ}^{\psi} M d\psi = \int_{90^\circ}^{\psi} \mu B \sin\psi d\psi = -B\mu \cos\psi = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (10.58)$$

Keď dosadíme vzťah (10.56) do (10.58), magnetická potenciálna energia atómu je

$$W_{pm} = \frac{e}{2m} L B \cos\psi \quad (10.59)$$

$W_{pm}$  je funkcia  $B$  a  $\psi$ . Moment hybnosti elektrónu  $L$  je funkcia vedľajšieho kvantového čísla  $l$  (10.52). Pre jednu hodnotu  $l$  je  $L$  konštantné. V homogénnom magnetickom poli ( $\vec{B} = \text{const}$ ) je  $W_{pm}$  len funkcia  $\psi$ . O energii atómu vieme, že je kvantovaná, teda aj  $W_{pm}$  musí byť kvantovaná. To ale znamená, že uhol  $\psi$  nemôže nadobúdať akékoľvek hodnoty, ale len určité diskkrétne hodnoty. Teda nielen veľkosť momentu hybnosti  $L$  je kvantovaná, ale aj smer vektora  $\vec{L}$  vzhľadom na vonkajšie magnetické pole. Túto skutočnosť nazývame priestorovým kvantovaním.

Súradnica momentu hybnosti  $L$  do smeru osi  $z$  (smer magnetického poľa) je

$$L_z = L \cos\psi = m_l \hbar \quad (10.60)$$

Magnetické kvantové číslo  $m_l$  môže nadobúdať hodnoty podľa (10.46). Vzťah (10.60), ktorý predpokladáme na základe predchádzajúcej úvahy (podľa klasickej fyziky), možno odvodiť priamo použitím kvantovej mechaniky. Príslušný operátor zložky momentu hybnosti elektrónu do smeru osi  $z$  ( $\hat{L}_z$ ) aplikujeme na vlnovú funkciu  $\psi$ :

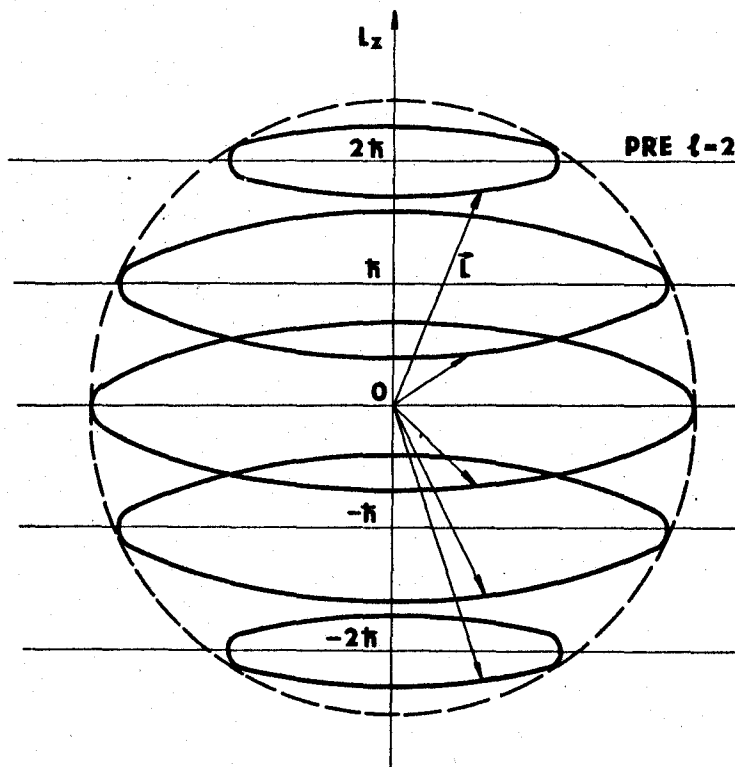
$$\hat{L}_z \psi(r, \varphi, \psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(r, \varphi, \psi) = \frac{\hbar}{i} R(r) T(\psi) \frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi} \quad (10.61)$$

Funkcia  $F(\varphi)$  je určená výrazom (10.43). Po zderivovaní funkcie  $F$  a dosadení do (10.61) dostaneme:

$$\hat{L}_z \psi = \frac{\hbar}{i} i m_l R T F = m_l \hbar \psi \quad (10.62)$$

Vlastné hodnoty operátora  $\hat{L}_z$  sú teda diskkrétne a určené, ako sme už ukázali, vzťahom (10.60).

Súradnice  $L_x$  a  $L_y$  nie sú kvantované, môžu nadobúdať spojité hodnoty. Konštantnú hodnotu  $L_z$  má taký vektor  $\vec{L}$ , ktorý koná precesný pohyb okolo osi  $z$ , obr. 10.16. Príčinou toho, že smer vektora  $\vec{L}$  nie je pevný, ale sa mení,



Obr. 10.16

je princíp neurčitosti. Keby mal vektor  $\vec{L}$  napr. smer osi  $z$ , musel by sa elektrón pohybovať v rovine  $x, y$  a mal by presnú hodnotu súradnice  $z = 0$ , teda neurčitosť  $\Delta z = 0$ . Neurčitosť súradnice hybnosti  $p_z$  by musela byť nekonečne veľká  $\Delta p_z \rightarrow \infty$ . To ale nemôže byť, lebo elektrón je súčasťou atómu vodíka, a teda musí mať konečnú neurčitosť  $\Delta p_z$ . Z toho vyplýva, že elektrón nie je viazaný na jednu rovinu. Hustotu pravdepodobnosti jeho výskytu v okolí jadra určuje kvadrát vlnovej funkcie

$$|\psi|^2 = \psi \psi^* = |R|^2 |T|^2 |F|^2 \quad (10.63)$$

Hustota pravdepodobnosti  $|F|^2$  je mierou pravdepodobnosti výskytu elektrónu v danom uhle  $\varphi$ :

$$|F|^2 = F F^* = A \exp(i m_1 \varphi) \cdot A \exp(-i m_1 \varphi) = A^2 \quad (10.64)$$

To znamená, že hustota pravdepodobnosti výskytu elektrónu je symetrická podľa osi  $z$  a je nezávislá od kvantového stavu elektrónu.

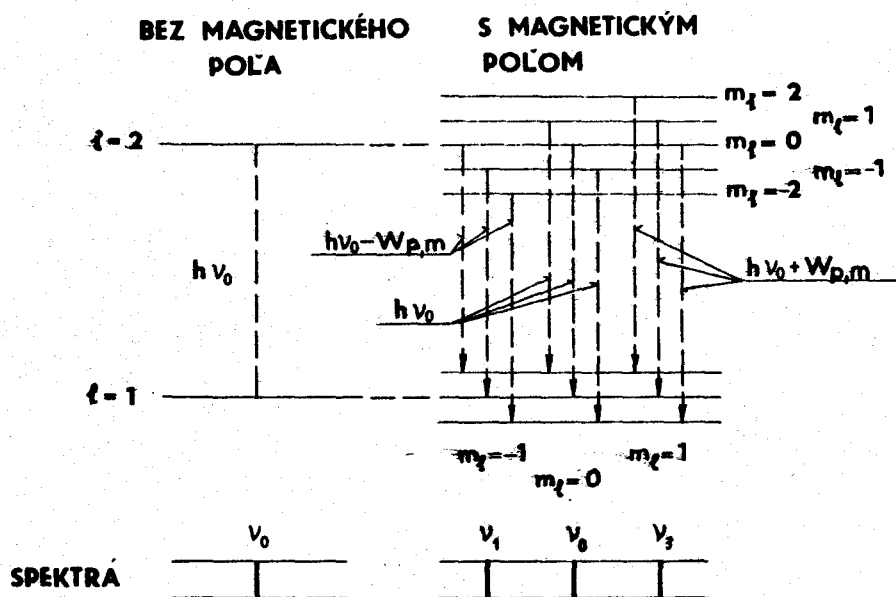
Stredná hodnota súradníc  $L_x, L_y$  je rovná nule, hoci  $L_z = m_l \hbar$  ( $|L_z| = |L|$ ). Hustoty pravdepodobnosti  $|R|^2$  a  $|T|^2$  určíme podobným spôsobom pomocou funkcií  $R$  a  $T$ , ktoré sú riešením rovníc (10.42) a (10.41). Analytický tvar týchto funkcií nie je taký jednoduchý ako funkcie  $F$ , preto sa týmto nebudeme ďalej zaoberať.

Energia určitého atómového stavu nie je teda závislá len od hlavného kvantového čísla  $n$ , ale aj od magnetického kvantového čísla  $m_l$ , keď je atóm v magnetickom poli. Energia  $W_n$  je určená vzťahom (10.45) a magnetická potenciálna energia vzťahom

$$W_{pm} = \frac{e \hbar}{2m} m_l B \quad (10.65)$$

keď sme použili vzťahy (10.59) a (10.60). Atóm v magnetickom poli môže teda mať energiu buď väčšiu, alebo menšiu v porovnaní s jeho energiou, keď nie je v magnetickom poli. Tento jav spôsobuje, že pri vyžarovaní atómu v magnetickom poli sa spektrálne čiary štiepia a vzdialenosť susedných čiar závisí od veľkosti magnetického poľa. Štiepenie spektrálnych čiar v magnetickom poli sa nazýva Zeemanov efekt (normálny).

Kvantové číslo  $m_l$  môže nadobúdať hodnoty od  $-l$  až po  $+l$ , teda celkové môže mať  $2l + 1$  hodnôt. Energetický stav s daným vedľajším kvantovým číslom  $l$  sa v magnetickom poli štiepi na  $2l + 1$  podstavov, ktoré sa navzájom energeticky líšia o hodnotu  $\Delta W_{pm} = (e\hbar/2m) B$ . Zmeny magnetického kvantového čísla sú dovolené iba o  $\Delta m_l = 0, \pm 1$ . Spektrálna čiara, ktorá vznikne pri prechode medzi dvoma stavmi s rôznym  $l$  rozštiepi sa len na tri komponenty, obr. 10.17:



Obr. 10.17

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_0 - \frac{e \hbar}{2m} \frac{B}{h} = \nu_0 - \frac{e}{4\pi m} B \\ \nu_2 &= \nu_0 \\ \nu_3 &= \nu_0 + \frac{e \hbar}{2m} \frac{B}{h} = \nu_0 + \frac{e}{4\pi m} B \end{aligned} \quad (10.66)$$

Zeemanov efekt potvrdzuje priestorové kvantovanie.

### 10.1.6 Spin elektrónu

Pri experimentálnom štúdiu spektier sa zistilo, že mnohé spektrálne čiary sú v skutočnosti dve tesne vedľa seba ležiace čiary. Na potvrdenie tejto jemnej štruktúry je prvá čiara Balmerovej série vodíka, ktorá vzniká pri prechode medzi hladinami  $n = 3$  a  $n = 2$  vodíkových atómov. Podľa predchádzajúcej teórie prislúcha tejto čiare vlnová dĺžka 656,3 nm, ale v skutočnosti sú to dve čiary vzdialené od seba o 0,14 nm.

Ďalší poznatok, ktorý predchádzajúca teória nevie vysvetliť, je pri Zeemanovom efekte. Hoci sa normálny Zeemanov efekt za určitých okolností pozoruje pri niektorých prvkoch, častejšie sa pozoruje namiesto troch, štyri, šesť alebo i viac komponent štiepenia spektrálnej čiary. Aj keď sa vyskytnú tri komponenty, ich vzájomná vzdialenosť nemusí vyhovovať vzťahom (10.66). Tento úkaz sa nazýva anomálny Zeemanov efekt.

Aby sa vysvetlila jemná štruktúra spektrálnych čiar a anomálny Zeemanov efekt, Goudsmit a Uhlenbeck (roku 1925) vyslovili hypotézu, podľa ktorej elektrón má vlastný vnútorný moment hybnosti, nezávislý od jeho orbitálneho momentu hybnosti, a určitý magnetický moment spojený s týmto vnútorným momentom hybnosti. Ako sme už spomenuli elektrón si ešte predstavovali ako záporne nabitú guľku rotujúcu okolo svojej osi. S jeho rotáciou je spojený moment hybnosti  $\vec{S}$  a s nábojom magnetický moment  $\vec{\mu}_s$ , ktorý má smer rovnaký, ale opačnú orientáciu ako  $\vec{S}$ . Pre moment hybnosti  $\vec{S}$  sa používa termín spin elektrónu (anglické sloveso to spin - točiť sa, otáčať sa, víriť), alebo spinový moment hybnosti, a pre  $\vec{\mu}_s$  spinový magnetický moment. Napriek takejto klasickej predstave o elektróne Goudsmit a Uhlenbeck prisúdili správne hodnoty pre spinový moment hybnosti a pre spinový magnetický moment, ako to (roku 1928) ukázal Dirac na základe relativistickej teórie.

Veľkosť spinového momentu hybnosti  $S$  je určená podobne, ako pre moment hybnosti  $L$  (10.52), vzťahom

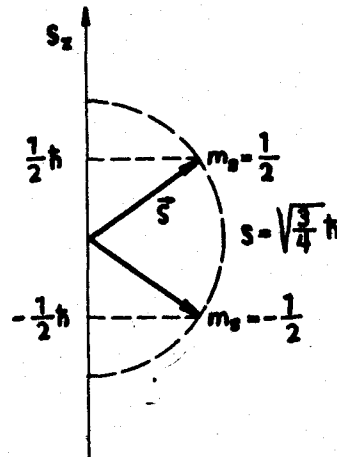


$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad (10.67)$$

kde  $s$  je spinové kvantové číslo. Môže nadobúdať jednu jediná hodnotu  $s = 1/2$ , ktorá priamo vyplýva z Diracovej teórie.

Vieme, že vektor momentu hybnosti elektrónu v magnetickom poli môže mať  $2l + 1$  možných orientácií od  $-l$  do  $+l$  (priestorové kvantovanie). Takisto aj vektor spinového momentu hybnosti  $\vec{S}$  v magnetickom poli môže mať  $2s + 1$  orientácií. Pretože  $s = 1/2$  je  $2s + 1 = 2$ , čiže  $\vec{S}$  môže nadobúdať iba dve orientácie.

Priestorové kvantovanie momentu hybnosti popisujeme magnetickým kvantovým číslom  $m_l$  a kvantovanie spinového momentu hybnosti popisujeme spinovým magnetickým kvantovým číslom  $m_s = \pm 1/2$  (obr. 10.18). Veľkosť súradnice  $S_z$  vektora spinového momentu v magnetickom poli, orientovanom pozdĺž osi  $z$ , je (analógia so vzťahom (10.60))



Obr. 10.18

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (10.68)$$

Medzi spinovým magnetickým momentom a momentom hybnosti elektrónu platí vzťah

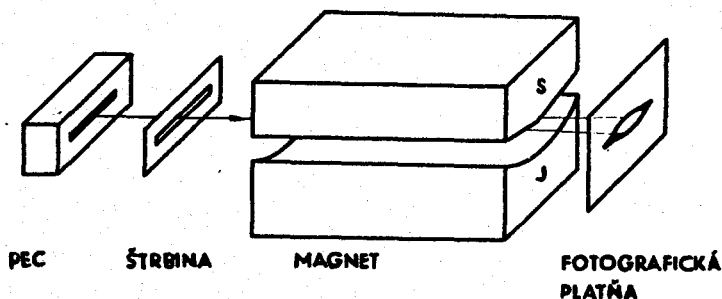
$$\vec{\mu}_s = - \frac{e}{m} \vec{S} \quad (10.69)$$

Teda súradnica vektora spinového magnetického momentu  $\mu_{sz}$  môže nadobúdať dve hodnoty:

$$\mu_{sz} = \pm \frac{e}{m} \frac{\hbar}{2} \quad (10.70)$$

Priestorové kvantovanie spinového momentu priamo pokusom dokázali Stern a Gerlach (roku 1921). Vlastnosťou atómu striebra za normálneho stavu je, že celý jeho magnetický moment je tvorený spinovým magnetickým momentom jedné-

ho z jeho elektrónov. Ak pustíme zväzok neutrálnych atómov striebra, ktoré vychádzajú z pece úzkou štrbinou cez magnetické pole (obr. 10.19) tak, že rýchlosť atómov  $v$  je kolmá na indukciu magnetického poľa  $\vec{B}$ , na fotografickej doske dostaneme určitý obraz tohto zväzku. Homogénne magnetické pole pôsobí na magnetický moment iba točivým momentom a usiluje sa ho otočiť do svojho smeru. Nehomogénne pole pôsobí na magnetický moment nielen točivým momentom, ale aj translačnou silou, lebo na každý "pól" dipólu (analógia s elektrickým dipólom) pôsobia sily, ktoré sú vzájomne odlišné veľkosťou aj



Obr. 10.19

smerom. Takéto dve sily môžeme nahradiť dvojicou síl (točivý moment) a jednou translačnou silou (ktorá má všeobecne iný smer ako  $\vec{B}$ ). Podľa klasickej teórie na fotografickej doske by sme mali dostať plošný obraz, lebo vo zväzku by mali byť zastúpené všetky smery spinového magnetického momentu. V skutočnosti obraz nie je plošný, ale čiarový, čo možno vysvetliť len tým, že pôvodný zväzok atómov, ktorý vystupuje zo štrbiny, sa v magnetickom poli delí na dve časti, ktoré majú opačne orientované spinové magnetické momenty. Jemnú štruktúru spektrálnych čiar vysvetľujeme magnetickou interakciou medzi spinovými a orbitálnymi momentami hybnosti elektrónov v atóme. Ukážeme si to pomocou klasického modelu. Elektrón obieha okolo jadra, ale z jeho vzťažnej sústavy sa zdá, že jadro obieha okolo neho (analógia Zem-Slnko), a teda sa nachádza v magnetickom poli, ktoré je buďené jadrom

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 Q v}{2r} \quad (10.71)$$

kde  $Q$  je náboj jadra;  $v$  - frekvencia obiehania elektróna okolo jadra;  $r$  - polomer dráhy, po ktorej elektrón obieha. Potenciálna energia magnetického dipólu elektrónu s momentom  $\vec{\mu}_s$  je (10.58)

$$W_{pms} = -\mu_s B \cos \vartheta = -\mu_{sz} B \quad (10.72)$$

$\mu_{sz}$  je súradnica vektora  $\vec{\mu}_s$  do smeru magnetického poľa.

Ak dosadíme za  $\mu_{sz}$  zo vzťahu (10.70) a za  $B$  vzťah (10.71) do (10.72), dostaneme:

$$W_{pms} = \pm \frac{e \hbar \mu_0 Q \gamma}{4 \pi r} \quad (10.73)$$

\*V magnetickom poli buzenom jadrom atómu bude energia elektrónu v danom kvantovom stave vyššia alebo nižšia o hodnotu  $W_{pms}$  (10.73), ako je hodnota energie bez spinorbitálnej interakcie. Dôsledkom toho je štiepenie každého kvantového stavu (okrem stavu  $s$ ) na dva podstavy, a teda aj štiepenie každej spektrálnej čiary na dve komponenty.

Vieme, že spin  $\vec{S}$ , ktorý môže mať  $2s + 1$  možných orientácií, má v skutočnosti dve. Teda  $2s + 1 = 2$ . Z toho vyplýva:

$$s = \frac{1}{2}$$

Ak urobíme odhad posuvu vlnovej dĺžky pre atóm vodíka pri prechode elektrónu medzi hladinami  $n = 3$  a  $n = 2$ , vyjde nám energia (pre  $e = Q$ ,  $\gamma \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ,  $r \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ )  $W_{pms} \approx 1,3 \cdot 10^{-22} \text{ J}$ . Takejto zmene energie prislúcha posuv čiary s vlnovou dĺžkou  $656,3 \text{ nm}$  o  $0,26 \text{ nm}$ . Odchýlku od experimentálnej hodnoty  $0,14 \text{ nm}$  možno vysvetliť tým, že sme rátali so základným stavom, kde indukcia magnetického poľa je väčšia ako na vyšších dráhach.

### 10.1.7 Pauliho vylučovací princíp

Born-Schrödingerova teória nevylučuje, aby nemohli byť elektróny atómov v jednom a tom istom kvantovom stave. Podľa toho by elektróny pri zložitejších atómoch krúžili v jednej hromade okolo jadra na tej istej dráhe, a to je málo pravdepodobné. Ďalší argument, ktorý odporuje takémuto tvrdeniu, je, že chemické vlastnosti niektorých prvkov, ktorých atómová štruktúra sa líši len o jeden elektrón, sú podstatne odlišné (napr. fluór, neón, sodík).

Wolfgang Pauli (roku 1925) objavil základný princíp, podľa ktorého sa riadia všetky elektrónové zoskupenia atómov, ktoré majú viac ako jeden elektrón. Tento vylučovací princíp stanovuje, že žiadne dva elektróny v atóme nemôžu existovať v tom istom kvantovom stave. Každý elektrón musí mať rôzny súbor kvantových čísiel  $n, l, m_l, m_s$ . Pauli k tomuto princípu dospel štúdiom spektier atómov. Z nich možno zistiť rôzne kvantové stavy, ktoré v atóme existujú, a k nim sa dajú odvodiť kvantové čísla. V spektrách neboli pozorované také prechody medzi stavmi, ktoré by boli charakterizované rovnakými kvantovými číslami. Napr. nie je pozorovaný prechod v základnom stave  $n = 1, l = 0, m_l = 0$ , kde dva elektróny by mali rovnako orientované spiny,

ale sa pozoruje prechod v tom istom základnom stave, keď obidva elektróny majú opačne orientované spiny ( $m_s = \frac{1}{2}$  a  $m_s = -\frac{1}{2}$ ). Neexistuje teda taký atómový stav, v ktorom by boli dva alebo viac elektrónov s rovnakými kvantovými číslami.

Pauliho princíp má dôsledok aj v kvantovej mechanike. Analogicky ako pri vyjadrovaní úplnej funkcie  $\psi$  pre vodíkový atóm, ktorá je súčinom troch funkcií (10.33), môžeme vyjadriť aj úplnú funkciu zoskupenia  $n$  častíc v tom istom silovom poli, ako súčin vlnových funkcií jednotlivých častíc:

$$\psi(1,2,3,\dots,n) = \psi(1)\psi(2)\psi(3) \dots \psi(n) \quad (10.74)$$

Pre zjednodušenie si vezmeme sústavu dvoch častíc (navzájom nerozlišiteľné), z ktorých jedna nech je v kvantovom stave  $a$  a druhá v kvantovom stave  $b$ . Hustota pravdepodobnosti  $|\psi|^2$  takejto sústavy sa nemôže meniť pri ich vzájomnej výmene. Teda

$$|\psi(1,2)|^2 = |\psi(2,1)|^2 \quad (10.75)$$

Vlnová funkcia  $\psi(2,1)$  charakterizuje obidve častice po ich vzájomnej výmene. Rovnosť (10.75) je splnená, keď je

$$\psi(2,1) = \psi(1,2) \quad (10.76)$$

alebo

$$\psi(2,1) = -\psi(1,2) \quad (10.77)$$

V prvom prípade je vlnová funkcia  $\psi(2,1)$  symetrická, v druhom prípade antisymetrická. Vlnová funkcia môže meniť znamienko, lebo nie je priamo merateľnou veličinou. Také vlnové funkcie, ktoré sa pri výmene častíc nemenia, nazývame symetrické, a také, ktoré menia znamienko pri vzájomnej výmene častíc nazývame antisymetrickými.

Nech vlnová funkcia

$$\psi_I = \psi_a(1) \psi_b(2) \quad (10.78)$$

popisuje sústavu dvoch častíc, keď prvá častica je v stave  $a$  a druhá v stave  $b$ . A naopak, keď prvá častica je v stave  $b$  a druhá častica v stave  $a$ , túto sústavu nech popisuje vlnová funkcia

$$\psi_{II} = \psi_a(2) \psi_b(1) \quad (10.79)$$

Pretože častice sú nerozlišiteľné, nevieme povedať, ktorá funkcia a kedy popisuje danú sústavu častíc, a teda pravdepodobnosť obidvoch funkcií je rovnaká, že sú správnym popisom sústavy častíc. Lineárna kombinácia funkcií  $\psi_I$  a  $\psi_{II}$ , ktorá spĺňa rovnosť (10.75), bude vhodne popisovať sústavu čas-

tíc. Existujú dve takéto lineárne kombinácie:

symetrická

$$\Psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_a(1) \Psi_b(2) + \Psi_a(2) \Psi_b(1)] \quad (10.80)$$

a antisymetrická

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_a(1) \Psi_b(2) - \Psi_a(2) \Psi_b(1)] \quad (10.81)$$

$1/\sqrt{2}$  je normovací faktor. Ak sa v sústave vymenia dve častice,  $\Psi_S$  sa nemení, ale pri  $\Psi_A$  sa mení znamienko. Ktorá funkcia je vhodná na popisovanie sústavy elektrónov, vyplýva z Pauliho princípu, že nemôžu existovať dva alebo viac elektrónov v tom istom kvantovom stave. Symetrická funkcia je nenulová, keď obidve častice sú v tom istom stave  $a = b$ , ale antisymetrická je nulová  $\Psi_A = 0$ , keď  $a = b$ . Sústavu elektrónov môže popisovať taká funkcia, ktorá pri zámene ľubovoľnej dvojice elektrónov mení znamienko - teda antisymetrická.

Elektróny majú spin charakterizovaný spinovým číslom  $s = 1/2$ , môžeme teda predpokladať (čo experimenty potvrdzujú), že všetky častice, ktoré majú taký spin, že  $s = 1/2$ , sú popisované tiež antisymetrickou funkciou. Takéto častice nazývame Fermiho časticami, alebo fermiónmi (napr. protóny a neutróny), a podriaďujú sa štatistickému rozdeľovaciemu zákonu, ktorý objavili Fermi a Dirac:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp(\alpha) \exp(\varepsilon_i/kT) + 1} \quad (10.82)$$

kde  $n_i$  je počet častíc s energiou  $\varepsilon_i$ ,  $g_i$  je počet kvantových stavov, ktoré majú rovnakú energiu  $\varepsilon_i$ ,  $\alpha$  je Lagrangeov multiplikátor,  $k$  je Boltzmannova konštanta a  $T$  je teplota.

Symetrickou funkciou sú popisované častice s nulovým alebo celočíselným spinovým číslom. Takéto častice (napr. fotóny, alfa častice) nespĺňajú Pauliho princíp a nazývajú sa Boseho častice alebo bozóny. Riadia sa podľa štatistického rozdeľovacieho zákona, ktorý objavili Bose a Einstein:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp(\alpha) \exp(\varepsilon_i/kT) - 1} \quad (10.83)$$

Pre fotóny (fotónový plyn) je  $\alpha = 0$ .

### 10.1.8 Periodická sústava prvkov

Elektrónové zoskupenia atómov sa riadia dvoma pravidlami:

1. Keď je celková energia sústavy častíc minimálna, potom je stabilná.
2. V každom jednotlivom kvantovom stave môže v atóme existovať iba jeden elektrón.

Elektróny s rovnakým hlavným kvantovým číslom  $n$  sú približne v rovnakej vzdialenosti od jadra a majú zhruba aj rovnakú energiu, lebo sa v podstate nachádzajú v rovnakom elektrickom poli jadra, s ktorým interagujú. O takýchto elektrónoch hovoríme, že sú v jednej sfére (vrstve). Jednotlivé sféry označujeme podľa tejto schémy:

$$\begin{array}{cccccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & (10.84) \\ & K & L & M & N & O & P & Q \end{array}$$

Energia elektrónov v určitej sfére (vrstve) závisí aj od orbitálneho kvantového čísla  $l$ , aj keď táto závislosť nie je taká veľká ako závislosť od  $n$ . Elektróny, ktoré majú vo sfére rovnaké kvantové číslo  $l$  sa nachádzajú v tzv. podsfére, ktoré označujeme podľa (10.53). Závislosť energie elektrónov v jednej podsfére od kvantových čísel  $m_l$  a  $m_s$  je pomerne malá, takže elektróny v nej majú takmer rovnakú energiu. Pauliho vylučovací princíp vymedzuje počet elektrónov, ktoré môžu obsadiť danú podsféru. Každá podsféra je charakterizovaná hlavným kvantovým číslom  $n$  a orbitálnym kvantovým číslom  $l$  (napr. 4 d je  $n = 4$  a  $l = 2$ ), kde  $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . Pre každé  $l$  existuje  $(2l + 1)$  rôznych hodnôt magnetického kvantového čísla  $m_l$ , lebo  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  a pre každé  $m_l$  zase dve hodnoty spinového magnetického kvantového čísla  $m_s$  ( $+\frac{1}{2}$  a  $-\frac{1}{2}$ ).

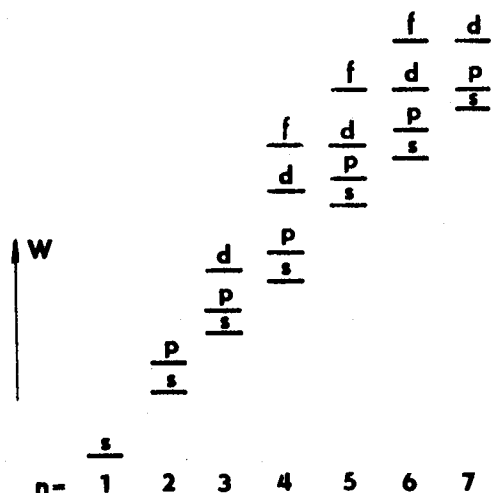
Každá podsféra môže teda obsahovať najviac  $2(2l + 1)$  elektrónov a každá sféra maximálne

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{l=n-1} 2(2l + 1) &= 2 [1 + 3 + 5 + \dots + 2(n-1) + 1] = \\ &= 2n \frac{1}{2} [1 + (2n-1)] = 2n^2 \end{aligned} \quad (10.85)$$

elektrónov. Sféra K má maximálne 2 elektróny, L 8 elektrónov, M 18 elektrónov, N 32 elektrónov atď. Ak sféra alebo podsféra má plný počet elektrónov, hovoríme potom, že je uzavretá. Podsféra s ( $l = 0$ ) môže mať maximálne 2 elektróny, p ( $l = 1$ ) 6 elektrónov, d ( $l = 2$ ) 10 elektrónov, f ( $l = 3$ ) 14 elektrónov atď. Sféra K (pre  $n = 1$  je  $l = 0$ ) nemá podsféru

(alebo sama je aj podsférou s), sféra L (pre  $n = 2$  je  $l = 0$  a  $l = 1$ ) má dve podsféry s a p, sféra M (pre  $n = 3$  je  $l = 0$ ,  $l = 1$  a  $l = 2$ ) má tri podsféry s, p, d, sféra N (pre  $n = 4$  je  $l = 0$ ,  $l = 1$ ,  $l = 2$  a  $l = 3$ ) má štyri podsféry s, p, d, f atď.

Uzatváranie podsfér elektrónmi nie je v poradí 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f atď. akoby sa hádam očakávalo, ale v poradí 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6p, 7s, 5f, 6d, 7p, 6f, 7d, ako je to schematicky znázornené na obr. 10.20.



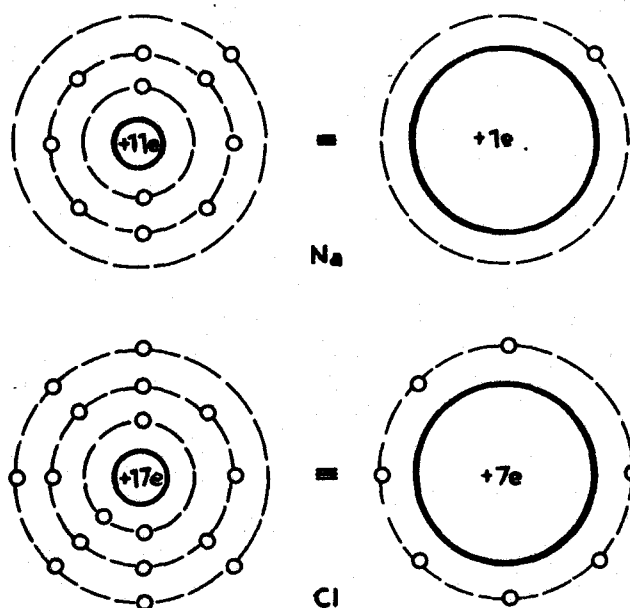
Obr. 10.20

Prvé porušenie očakávaného poradia zaplnenia podsfér elektrónmi je pri draslíku, keď namiesto zaplnenia podsféry 3d sa najprv zaplní podsféra 4s. Vysvetľuje sa to väčšou väzbovou energiou (teda menšou celkovou energiou) elektrónov s menším  $l$ , ktoré sa nachádzajú bližšie k jadrú, ako elektrónov s väčším  $l$ , aj keď sú z nižšej sféry. Podľa toho, aké je obsadenie jednotlivých sfér alebo podsfér atómov, menia sa chemické a fyzikálne vlastnosti prvkov (mólový objem, hustota, viskozita, prevrátané hodnoty teploty topenia, magnetická susceptibilita, refrakcia, ionizačný potenciál, tvrdosť, zlučovacie teploty, formy zlučovania, kryštalický tvar, vlastnosti zlúčenín). Zistilo sa, že tieto vlastnosti sa menia periodicky. O systemizáciu prvkov sa prvý pokusil J.S. Berzelius (roku 1819). Trojice analogických prvkov, tzv. triád, zostavil Döbereiner (Fe, Co, Ni), (Ru, Rh, Pd), (Os, Ir, Pt). Newlands (roku 1864) zostavil prvky podľa narastania ich relatívnej atómovej hmotnosti. Zistil, že každý ôsmy prvok v poradí má podobné chemické a fyzikálne vlastnosti. Svoj poznatok nazval zákonom oktáv. L. Meyer objavil periodicitu mocnenstva. Periodický systém prvkov v dnešnej dobe u nás zaužívaný pochádza od D.I. Mendelejeva (roku 1869). Mendelejevova tabuľka prvkov s úpravami, ktoré navrhol Brauner, a doplnená transuránmi je v tab. 10.1. Prvky sú zostavené do 9 skupín a 7 periód, z ktorých 4., 5., 6. perióda majú ešte po dva rady. V okienku pre každý prvok sú niektoré údaje. Tak napr. okienko

PE- RIODY	RADY	SKUPINY PRVKOV										SFERY							
		I	II	III	IV	V	VI	VII	0	VIII									
1	I	H <sup>1</sup> VODÍK 1,00797												He <sup>2</sup> HELIUM 4,0026	K				
2	II	Li <sup>3</sup> LÍTIUM 6,939	Be <sup>4</sup> BERYLUM 9,0122	5 B <sup>5</sup> BOR 10,81	6 C <sup>6</sup> UHLÍK 12,011	7 N <sup>7</sup> DUSÍK 14,007	8 O <sup>8</sup> KYSLIK 15,9994	9 F <sup>9</sup> FLUOR 18,9984						Ne <sup>10</sup> NEÓN 20,179	L K				
3	III	Na <sup>11</sup> SODÍK 22,9898	Mg <sup>12</sup> MAGNÉZ 24,304	13 Al <sup>13</sup> HLINÍK 26,9815	14 Si <sup>14</sup> KREMIK 28,086	15 P <sup>15</sup> FOSFOR 30,9738	16 S <sup>16</sup> SÍRA 32,064	17 Cl <sup>17</sup> CHLÓR 35,453						Ar <sup>18</sup> ARGÓN 39,948	H L K				
4	IV	K <sup>19</sup> DRASLÍK 39,098	Ca <sup>20</sup> VÁPNIK 40,08	Sc <sup>21</sup> SKANDIUM 44,956	Ti <sup>22</sup> TITAN 47,88	V <sup>23</sup> VANAD 50,942	Cr <sup>24</sup> CHROM 51,996	Mn <sup>25</sup> MANGAN 54,938	Fe <sup>26</sup> ŽELEZO 55,847	Co <sup>27</sup> KOBALT 58,9332	Ni <sup>28</sup> NIKEL 58,71				N H L K				
	V	29 Cu <sup>29</sup> MEĎ 63,546	30 Zn <sup>30</sup> ZINOK 65,38	31 Ga <sup>31</sup> GÁLÍUM 69,72	32 Ge <sup>32</sup> GERMÁNÍUM 72,64	33 As <sup>33</sup> ARZÉN 74,9216	34 Se <sup>34</sup> SELEÉN 78,96	35 Br <sup>35</sup> BRÓM 79,904						Kr <sup>36</sup> KRYPTÓN 83,80	N H L K				
5	VI	Rb <sup>37</sup> RUBÍDIUM 85,47	Sr <sup>38</sup> STRONCIUM 87,62	Y <sup>39</sup> YTRÍUM 88,906	Zr <sup>40</sup> ZIRKÓNÍUM 91,224	Nb <sup>41</sup> NIÓB 92,906	Mo <sup>42</sup> HOLYBDEN 95,94	Tc <sup>43</sup> TECHNECIUM [98]	Ru <sup>44</sup> RUTÉNÍUM 101,07	Rh <sup>45</sup> RÓDIUM 101,07	Pd <sup>46</sup> PALÁDIUM 106,4				O H L K				
	VII	47 Ag <sup>47</sup> STRIEBRO 107,868	48 Cd <sup>48</sup> KADMIUM 112,40	49 In <sup>49</sup> INDIUM 114,82	50 Sn <sup>50</sup> CÍN 118,71	51 Sb <sup>51</sup> ANTIMÓN 121,75	52 Te <sup>52</sup> TELÚR 127,60	53 I <sup>53</sup> JÓD 126,904						Xe <sup>54</sup> XENÓN 131,30	O H L K				
6	VIII	Cs <sup>55</sup> CÉZIUM 132,905	Ba <sup>56</sup> BARIUM 137,34	La <sup>57</sup> LANTAN 138,905	Hf <sup>72</sup> HAFNÍUM 178,49	Ta <sup>73</sup> TANTAL 180,948	W <sup>74</sup> VOLFRÁM 183,85	Re <sup>75</sup> RENIUM 186,2	Os <sup>76</sup> OSMIUM 190,2	Ir <sup>77</sup> IRIDIUM 192,2	Pt <sup>78</sup> PLATINA 195,08				O H L K				
	IX	79 Au <sup>79</sup> ZLATO 196,967	80 Hg <sup>80</sup> ORTUŤ 200,59	81 Tl <sup>81</sup> TALIUM 204,37	82 Pb <sup>82</sup> OLOVO 207,19	83 Bi <sup>83</sup> BIZMUT 208,980	84 Po <sup>84</sup> POLÓNIUM [209]	85 At <sup>85</sup> ASTÁT [209]						Rn <sup>86</sup> RADÓN 222	P O H L K				
7	X	87 Fr <sup>87</sup> FRANCIUM [223]	88 Ra <sup>88</sup> RÁDIUM [226]	89 Ac** AKTÍNIUM [227]	90 Th TÓRIUM [232]	91 Pa PROTAKT. [231]	92 U URÁN 238,03	93 Np NEPTÚM [237]	94 Pu PLUTÓN. [244]	95 Am AMERIC. [243]	96 Cm CURIUM [247]	97 Bk BERKEL. [247]	98 Cf KALIFORN. [251]	99 Es EINSTEIN. [252]	100 Fm FERMIUM [257]	101 Md MENDEL. [258]	102 No NOBELIUM [259]	103 Lr LAWRENC. [260]	P O H L K
* LANTANOIDY 58-71																			
		58 Ce CÉR 140,12	59 Pr PRÁZEODYM [140,907]	60 Nd NEODYM [144,24]	61 Pm PROMETIUM [147]	62 Sm SAMARIUM [150,36]	63 Eu EURÓPIUM [151,96]	64 Gd GADOLINIUM [157,25]	65 Tb TERBIUM [158,925]	66 Dy DYSPROZÍM [162,50]	67 Ho HOLMIUM [164,930]	68 Er ERBÍUM [167,26]	69 Tu TULIUM [168,934]	70 Yb YTERBIUM [173,04]	71 Lu LUTECIUM [174,967]			P O H L K	
** AKTINOIDY 90-103																			
		90 Th TÓRIUM [232]	91 Pa PROTAKT. [231]	92 U URÁN 238,03	93 Np NEPTÚM [237]	94 Pu PLUTÓN. [244]	95 Am AMERIC. [243]	96 Cm CURIUM [247]	97 Bk BERKEL. [247]	98 Cf KALIFORN. [251]	99 Es EINSTEIN. [252]	100 Fm FERMIUM [257]	101 Md MENDEL. [258]	102 No NOBELIUM [259]	103 Lr LAWRENC. [260]			P O H L K	



5. radu a 4. skupiny patrí prvku, ktorý má chemickú značku Ge, germánium je názov prvku, 32 je atómové číslo (počet protónov v jadre), 72,6 je relatívna atómová hmotnosť a čísla na okraji okienka znamenajú obsadenie elektrónových sfér v poradí od spodu K, L, M, N, O, P, Q. Prvky v prvej skupine majú vo valenčnej podsfére jeden elektrón, ktorý je pomerne slabo viazaný k jadrú, lebo ostatné elektróny v nižších podsférach odtienia náboj jadra až na hodnotu  $+e$ , obr. 10.21. Takýto elektrón ľahko strácajú a vznikajú z nich kladné



Obr. 10.21

jednomocné ióny, napr.  $\text{Na}^+$ . Na ľavej strane prvej skupiny sú tzv. alkalické kovy. Čím ľahšie stráca atóm takýto elektrón, tým je viac tzv. chemicky aktívny. Pri alkalických kovoch chemická aktivita narastá s narastaním atómového čísla. Prvky zo siedmej skupiny na pravej strane, tzv. halogény, majú vo valenčnej podsfére po 7 elektrónov. K úplnému zaplneniu tejto podsféry im chýba ešte jeden elektrón, ktorý sa atóm usiluje získať, lebo jadro má efektívny náboj  $+7e$  (elektróny na vnútorných podsférach odtienia náboj jadra len na  $+7e$ ), obr. 10.21. Každý elektrón v tejto podsfére (teda aj ten, ktorý sa atóm usiluje získať) je v elektrickom poli náboja jadra  $+7e$ . Takéto atómy s takto získaným elektrónom sú záporné jednomocné ióny, napr.  $\text{Cl}^-$ . Pri halogénoch schopnosť získať elektrón klesá s narastaním atómového čísla, to znamená, že klesá aj ich chemická aktivita. Prvky z nulte skupiny majú celkom zaplnenú vonkajšiu podsféru a neusilujú sa získať ďalší, ale ani jeden z elektrónov zase stratiť. Elektróny vo valenčnej celkom zaplnenej podsfére sú v poli náboja jadra  $+8e$  a sú teda k jadrú silno viazané. Keby tieto atómy chceli získať elektrón, musel by už obsadzovať ďalšiu podsféru, pre ktorú je však náboj jadra celkom odtienený, teda takýto elektrón nemôže byť vôbec viazaný. Takéto atómy sa neviažu s inými atómami do zlúčenín (okrem výnimiek pri ťažších prvkoch z tejto skupiny, kedy tvoria osobitné zlúčeniny) a nazývame ich inertnými plynmi.

Osmu skupinu tvoria už spomínané tri triády analogických prvkov. V tretej skupine v ôsmom rade je prvok lantán s atómovým číslom 57 a ďalší prvok v rade má už atómové číslo 72. Do toho istého miesta ako lantán patria prvky s atómovými číslami 58 až 71 vrátane, lebo majú spolu s La navzájom prakticky nerozlíšiteľné vlastnosti. Nazývame ich lantanoidmi (alebo vzácnymi zeminami). Podobná skupina sebe príbuzných kovov je v siedmej perióde pri prvku actínium a nazývajú sa aktinoidy.

Prvky, počnúc neptúniom, boli získané umelým spôsobom (voľne v prírode sa nevyskytujú) a nazývajú sa transurány.

### 10.1.9 Celkový moment hybnosti atómu

Pri vysvetľovaní jemnej štruktúry sme hovorili, že príčinou je magnetická interakcia medzi spinovými  $\vec{S}$  a orbitálnymi  $\vec{L}$  momentami hybnosti. Spinový moment hybnosti  $\vec{S}$  a orbitálny moment hybnosti  $\vec{L}$  každého elektrónu v atóme prispievajú k celkovému momentu hybnosti  $\vec{J}$  atómu. Aj tento moment hybnosti je kvantovaný

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad (10.86)$$

A v magnetickom poli ( $\vec{B}$  v smere osi  $z$ ) len súradnica  $J_z$  je kvantovaná

$$J_z = M_J \quad (10.87)$$

$j$  je celkové vnútorné kvantové číslo,  $M_J$  je celkové vnútorné magnetické kvantové číslo. Vlastnosti  $\vec{J}$  si ukážeme na tzv. vektorovom modeli atómu, ktorý je názornejší ako postup kvantovomechanický.

Najprv vyšetříme také atómy, ktorých celkový moment hybnosti  $\vec{J}$  pochádza iba od jedného elektrónu. S takýmto celkovým momentom sú atómy prvkov z prvej skupiny periodickej sústavy - vodík, lítium, sodík, draslík atď., ako aj niektoré ióny  $\text{He}^+$ ,  $\text{Be}^+$ ,  $\text{Mg}^+$  atď., lebo podľa vylučovacieho princípu celkový moment hybnosti a magnetický moment uzavretej podsféry sa rovná nule.

Celkový moment hybnosti  $\vec{J}$  dostaneme vektorovým sčítaním

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (10.88)$$

V prípade jedného elektrónu je

$$\vec{J} = \sqrt{j(j+1)} \hbar$$

a

$$J_z = m_j \hbar$$

(10.89)

Ak platí (10.88), potom môžeme sčítať aj jednotlivé súradnice:

$$J_z = L_z + S_z$$

alebo

$$m_j \hbar = m_l \hbar + m_s \hbar$$

(10.90)

Z toho vyplýva, že vnútorné magnetické kvantové číslo  $m_j$  sa rovná

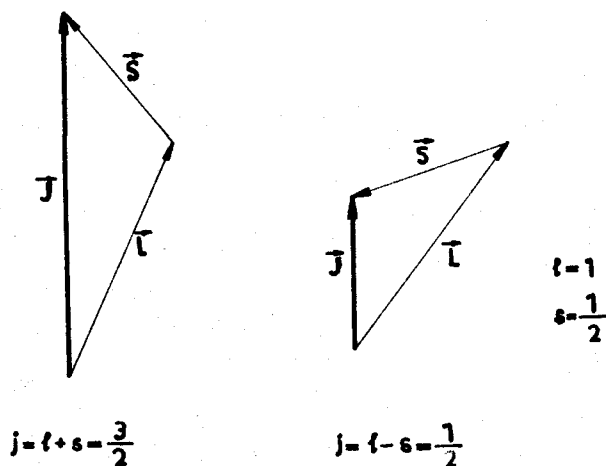
$$m_j = m_l + m_s$$

Kvantové číslo  $m_j$  tiež môže nadobúdať (analógia s  $m_l$ ) hodnoty od  $-j$  cez 0 do  $+j$ . Pre vnútorné kvantové číslo platí:

$$j = l + s$$

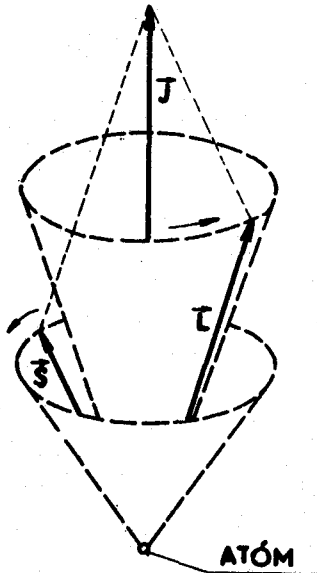
(10.91)

Obidve kvantové čísla  $j$  a  $m_j$  sú poločíselné, lebo  $s = 1/2$ . Momenty hybnosti  $\vec{S}$ ,  $\vec{L}$ ,  $\vec{J}$  sú súčasne kvantované, takže pri vektorovom skladaní nemôžu nadobúdať akékoľvek orientácie, ale len celkom určité. Pre jedoelektrónové atómy sú možné len dve orientácie, jedna je pre  $j = l + s$  a druhá pre  $j = l - s$ . Na obr. 10.22 sú dve možné orientácie pre  $l = 1$  a  $s = 1/2$ .

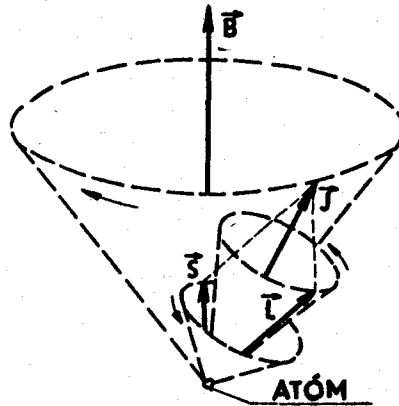


Obr. 10.22

Vieme už, že momenty hybnosti  $\vec{S}$  a  $\vec{L}$  navzájom pôsobia silovým momentom prostredníctvom magnetickej interakcie. Keď atóm nie je vo vonkajšom magnetickom poli, potom celkový moment hybnosti  $\vec{J}$  sa zachováva (nemění svoj smer, orientáciu ani veľkosť) a v dôsledku magnetickej interakcie medzi  $\vec{L}$  a  $\vec{S}$  tieto momenty hybnosti vykonávajú precesný pohyb okolo ich výsledni-



Obr. 10.23



Obr. 10.24

ce  $\vec{J}$  (obr. 10.23). V magnetickom poli aj celkový moment hybnosti  $\vec{J}$  koná precesný pohyb okolo vektora indukcie toho poľa  $\vec{B}$ , obr. 10.24. Vektory  $\vec{S}$  a  $\vec{L}$  konajú naďalej precesný pohyb - ako predtým - okolo vektora  $\vec{J}$ . Priestorové kvantovanie celkového momentu hybnosti ( $\vec{J}$  voči  $\vec{B}$  môže nadobúdať rôzne, ale nie všetky orientácie) vysvetľuje anomálny Zeemanov efekt. Zmena orientácie  $\vec{J}$  voči  $\vec{B}$  znamená aj zmenu energie atómu.

Doteraz pri určovaní celkového momentu hybnosti sme neuvažovali s tým, že aj atómové jadro má vnútorný moment hybnosti a magnetický moment a že tiež, aj keď v malej miere (veľkosť jadrových magnetických momentov je asi tisíckrát menšia ako elektrónových), prispieva k celkovému momentu hybnosti. Takýto malý príspevok vedie k tzv. hyperjemnej štruktúre spektrálnych čiar ( $\Delta\lambda \approx 10^{-3}$  nm a pri jemnej štruktúre  $\Delta\lambda \approx 10^{-1}$  nm).

Ak prispieva k celkovému momentu hybnosti nie jeden, ale viac elektrónov, výslednica  $\vec{J}$  je tiež vektorovým súčtom jednotlivých momentov hybnosti  $\vec{L}_i$  a  $\vec{S}_i$ . Podľa toho, ako sa sčítavajú jednotlivé momenty hybnosti, hovoríme o LS-väzbe alebo jj-väzbe. Okrem najťažších atómov sa orbitálne momenty hybnosti rôznych elektrónov skladajú do výsledného  $\vec{L}$  a podobne  $\vec{S}_i$  do výsledného  $\vec{S}$ . Celkový moment hybnosti  $\vec{J}$  je potom vektorovým súčtom výsledných momentov hybnosti. V takomto prípade hovoríme o LS-väzbe. Jednotlivé  $\vec{L}_i$  sa elektrostaticky viažu a vytvárajú výsledný  $\vec{L}$ , podobne aj  $\vec{S}_i$ .  $\vec{L}$  a  $\vec{S}$  spinorbitálnou väzbou vytvárajú celkový  $\vec{J}$ . Schému LS-väzby môžeme symbolicky zapísať takto:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum \vec{L}_i \\ \vec{S} &= \sum \vec{S}_i \\ \vec{J} &= \vec{L} + \vec{S} \end{aligned} \tag{10.92}$$

Analogicky môžeme napísať vzťahy pre kvantovanie momentov hybnosti:

$$L = \sqrt{\mathcal{L}(\mathcal{L} + 1)} \hbar \quad L_z = M_L \hbar \quad (10.93)$$

$$S = \sqrt{\mathcal{S}(\mathcal{S} + 1)} \hbar \quad S_z = M_S \hbar \quad (10.94)$$

$$J = \sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{J} + 1)} \hbar \quad J_z = M_J \hbar \quad (10.95)$$

Veľkosť elektrostatických síl, ktoré viažu jednotlivé orbitálne momenty hybnosti  $\vec{L}_i$ , je tým väčšia, čím menšia je energia sústavy elektrónov. Najmenšiu energiu má sústava elektrónov, ktorá má najväčšiu hodnotu  $L$ . Najväčšia hodnota  $L$  je, napr. pre dva elektróny, keď obiehajú okolo jadra v rovnakom smere. V opačnom prípade by sa elektróny stretávali častejšie, mali by väčšiu energiu, a tým menšie  $L$ .

Pri ťažkých atómoch je náboj jadra dostatočne veľký, aby sa vytvorila spinorbitálna interakcia veľkosti porovnateľná s elektrostatickou interakciou medzi  $L_i$  a  $S_i$  a LS-väzba prestáva platiť. Taktiež neplatí v silnom magnetickom poli ( $B \approx 10$  T). V takýchto prípadoch spinorbitálna interakcia viaže jednotlivé  $\vec{L}_i$  a  $\vec{S}_i$  do výsledného  $\vec{J}_i$ , ktoré sa skladajú priamo do momentu hybnosti  $\vec{J}$  celého atómu. Takéto skladanie vektorov nazývame jj-väzba. Teda

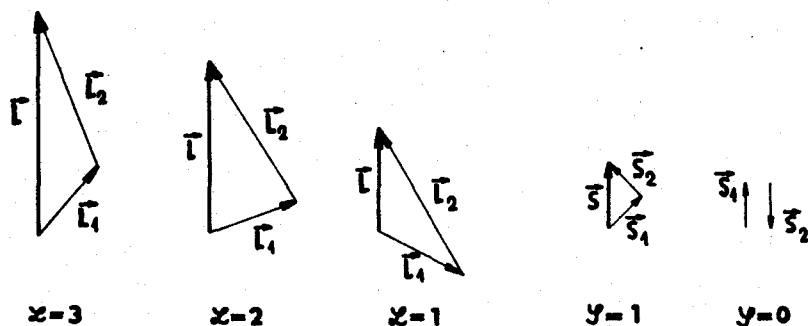
$$\begin{aligned} \vec{J}_i &= \vec{L}_i + \vec{S}_i \\ \vec{J} &= \sum \vec{J}_i \end{aligned} \quad (10.96)$$

Pri atóme s jedným elektrónom sa stavy pre rôzne  $l$  (rôzna veľkosť orbitálneho momentu hybnosti) označujú malými písmenami  $s, p, d, f, \dots$ . Pre atómy s viacerými elektrónmi sa ich stavy označujú veľkými písmenami  $S, P, D, F, \dots$  pre  $\mathcal{L} = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

Počet rôznych hodnôt  $J$  (rôznych orientácií  $\vec{L}$  a  $\vec{S}$ ) v danom stave udáva multiplicita stavu, čo označujeme horným indexom pred písmenom (napr.  ${}^2P$ ). Multiplicita je rovná  $2\mathcal{S} + 1$ , keď je  $\mathcal{L} > \mathcal{S}$ , a je rovná  $2\mathcal{L} + 1$ , keď je  $\mathcal{L} < \mathcal{S}$ . Stavy takto označené multiplicitou sa nazývajú termy. Ak je multiplicita rovná 1, je singletný stav (singlet), ak sa rovná 2-, dublet, ak sa rovná 3-, triplet atď. Kvantové číslo  $\mathcal{J}$  sa píše ako dolný index za písmenom.

Hlavné kvantové číslo sa píše pred označenie, napr.  $3^2P_{3/2}$ . U LS väzby  $J$  môže nadobúdať hodnoty od  $L+S$  do  $L-S$  a pre dvojelektrónový systém  $l_1, l_2$  vektor  $\vec{L}$  môžeme zložiť z  $\vec{L}_1$  a  $\vec{L}_2$  niekoľkými spôsobmi, zároveň aby bol kvantovaný podľa (10.93). Napr. pre  $l_1 = 1$  a  $l_2 = 2$  existujú tri spôsoby zloženia  $\vec{L}$ , obr. 10.25. Hodnoty  $\mathcal{L}$  sú 1, 2, 3, lebo sú možné všetky hodnoty  $\mathcal{L}$  od  $l_2 - l_1$  do  $l_1 + l_2$ . Spinové kvantové číslo je vždy  $s = +\frac{1}{2}$ , takže pre

$\vec{S}_1 + \vec{S}_2$  existujú dve možnosti (obr. 10.25), ktoré odpovedajú  $\mathcal{S} = 0$  a  $\mathcal{S} = 1$ . V našom prípade môže celkové vnútorné kvantové číslo  $\mathcal{J}$  nadobúdať hodnoty 0,1,2,3,4. Pri atómoch, ktorých celkový moment hybnosti je tvorený



Obr. 10.25

nielen jedným, ale viacerými elektrónmi, musíme pri určovaní  $\mathcal{L}, \mathcal{S}, \mathcal{J}$  brať do úvahy Pauliho vylučovací princíp, ktorý obmedzuje súbor možných hodnôt týchto kvantových čísiel.

#### 10.1.10 Elektrónové prechody atómov

Bohr postuloval, že frekvencia fotónu, ktorý je emitovaný atómom pri prechode z jednej energetickej hladiny  $W_m$  na druhú  $W_n$ , sa rovná (pozri (10.21))

$$\gamma = \frac{W_m - W_n}{h}$$

Tento vzťah možno odvodiť pomocou kvantovej teórie atómu. Ak je stredná poloha elektrónu vzhľadom na jadro nezávislá od času, nevyžaruje žiadne žiarenie, ale keď stredná poloha osciluje, nastáva emisia elektromagnetických vln, ktorých frekvencia je rovnaká ako frekvencia oscilácií.

Časová vlnová funkcia  $\phi_n$  elektrónu, ktorý je v stave určenom kvantovým číslom  $n$  s energiou  $W_n$ , je súčinom časovo nezávislej vlnovej funkcie a funkcie času s frekvenciou  $\gamma_n = W_n/h$  (pozri (9.86)). Teda

$$\phi_n = \psi_n \exp(-i W_n t/h) \quad (10.97)$$

a

$$\phi_n^* = \psi_n^* \exp(+i W_n t/h) \quad (10.98)$$

Stredná poloha elektrónu je určená strednou hodnotou jeho súradnice  $x$  (pre jednoduchosť počítame len v smere osi  $x$ ), ktorú určíme zo vzťahu (9.92)

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n^* x \phi_n dx \quad (10.99)$$

Po dosadení (10.97) a (10.98) dostaneme:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* x \psi_n \left[ \exp(i W_n t/\hbar) \cdot \exp(i W_n t/\hbar) \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* x \psi_n dx \end{aligned} \quad (10.100)$$

čo je výraz nezávislý od času. Elektrón nekmitá, a teda atóm v určitom čase nevyžaruje.

Keď elektrón prechádza z jednej energetickej hladiny  $W_m$  na druhú  $W_n$ , funkcia popisujúca tento prechod je superpozíciou vlnových funkcií  $\phi_m$  a  $\phi_n$ , ktoré odpovedajú stavom  $m$  a  $n$ , teda

$$\phi = a \phi_n + b \phi_m \quad (10.101)$$

kde  $aa^*$  je pravdepodobnosť, že elektrón je v stave  $n$  a  $bb^*$  pravdepodobnosť, že je v stave  $m$ . Platí  $aa^* + bb^* = 1$ . V čase  $t = 0$  je  $a = 1$  a  $b = 0$ , keď je v excitovanom stave  $a = 0$ ,  $b = 1$  a po prechode zase späť  $a = 1$ ,  $b = 0$ . Atóm vyžaruje iba vtedy, keď je elektrón medzi stavmi  $m$  a  $n$ , to znamená, že  $a \neq 0$  aj  $b \neq 0$ . Po dosadení funkcie (10.101) do (10.99) postupným riešením dostaneme:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a^* \phi_n^* + b^* \phi_m^*) x (a \phi_n + b \phi_m) dx = \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_n^* \psi_n dx + b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_m^* \psi_m dx + \\ &+ a^* b \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_n^* \psi_n \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (W_m - W_n) t \right] + \right. \\ &\left. + \exp \left[ - \frac{i}{\hbar} (W_m - W_n) t \right] \right\} dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_n^* \psi_n dx + \end{aligned}$$

$$+ b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_m^* \psi_m dx + 2 a^* b \cos 2\pi \nu t \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_n^* \psi_n dx \quad (10.102)$$

keď sme použili, že  $a^*a = a^2$ ;  $b^*b = b^2$ ;  $a^*b = b^*a$ ;  $\psi_n^* \psi_m = \psi_m^* \psi_n$ ;  $\nu = (W_m - W_n)/h$  a vzťahy (10.97) a (10.98). Vidíme, že vyžarované elektromagnetické vlny majú frekvenciu rovnakú akú postuloval aj Bohr.

Treba ešte určiť, ktoré prechody sú dovolené a ktoré zakázané, to znamená určiť tzv. výberové pravidlo pre dovolené prechody. Intenzita žiarenia je úmerná integrálu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_n^* \psi_m dx$$

Prechody, pre ktoré je tento integrál konečný a nenulový, sú dovolené, a pre ktoré je nulový, sú zakázané. Aby sme mohli tieto pravidlá určiť, musíme poznať vlnové funkcie elektrónov v danom atóme. Napr. pre atóm vodíka je

$$\int_{(V)} x \psi_{n,l,m_1} \psi_{n',l',m_1'}^* dV \neq 0 \quad (10.103)$$

podmienkou pre dovolené prechody. Vlnová funkcia  $\psi_{n,l,m_1}$  opisuje konečný stav elektrónu, ktorý je charakterizovaný kvantovými číslami  $n, l, m_1$  a  $n', l', m_1'$  počiatkový stav elektrónu. Podľa (10.33) je

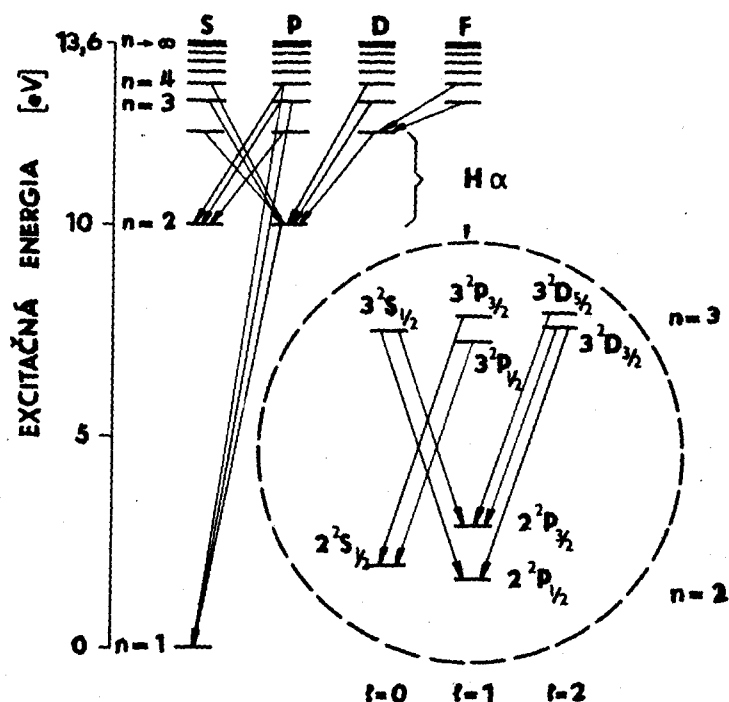
$$\psi_{n,l,m_1}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) T_{l,m_1}(\vartheta) F_{m_1}(\varphi) \quad (10.104)$$

kde indexy pri funkciách  $R, T, F$  vyznačujú ich závislosť od kvantových čísiel  $n, l, m_1$ . Dosadením funkcie (10.104) pre atóm vodíka (funkciu  $F_{m_1}(\varphi)$  určuje vzťah (10.43)) do podmienky (10.103) a jej riešením dostaneme výberové pravidlo pre dovolené prechody:

$$\begin{aligned} \Delta n & \text{ môže byť ľubovoľné} \\ \Delta l & = \pm 1; \quad \Delta j = 0, \pm 1 \\ \Delta m_1 & = 0, \pm 1 \end{aligned} \quad (10.105)$$

Platia nielen pre atóm vodíka, ale aj pre tzv. atómy jednoelektrónové, kde prechody zahrňujú prechod jediného valenčného elektrónu (vo vonkajšej nezaplnenej podvrstve). Valenčný elektrón spolu s jadrom, ktorého náboj je odtienený ostatnými elektrónmi na hodnotu  $+e$ , tvorí jednoelektrónový systém, preto také atómy môžeme riešiť podľa vzoru atómu vodíka.





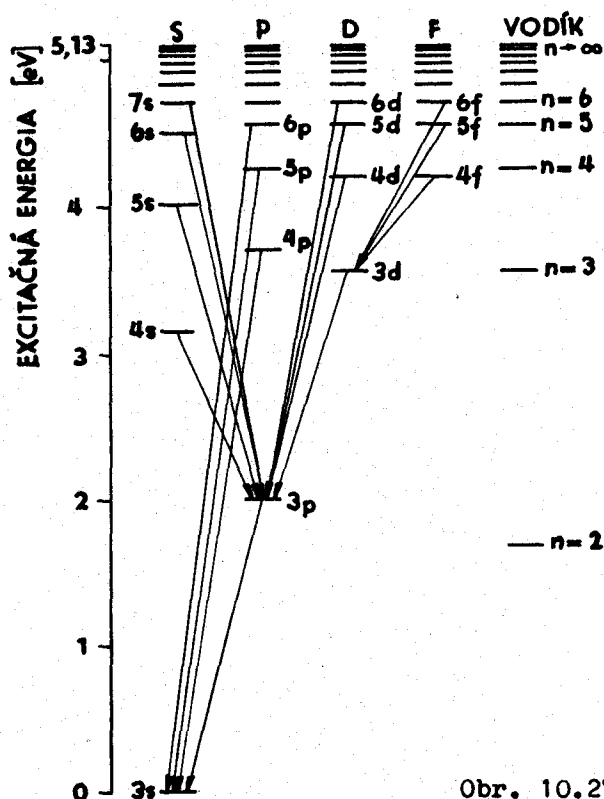
Obr. 10.26

Diagram vodíkových energetických hladín je na obr. 10.26. Pre vodík (jeden valenčný elektrón) platia pre dovolené prechody výberové pravidlá (10.105). Jemnú štruktúru čiary  $H\alpha$  medzi  $n = 3$  a  $n = 2$  vidieť na obr. 10.26 ohraňujú kružnicou. Čiara má 7 blízkych komponent (rozštiepi sa na 7 komponent). Atóm sodíka má tiež jeden valenčný elektrón, takže by sa predpokladalo, že bude mať rovnaké spektrum ako vodík. Na obr. 10.27 je zobrazený diagram energetických hladín sodíka. Rozdiel v ich spektroch zapríčiňuje skutočnosť, že valenčný elektrón, ak je v podsfére, kde sa môže častejšie dostať bližšie k jadrú (pravdepodobnosť výskytu), je menej odtienený od náboja jadra, ako keď je v podsfére, kde sa častejšie vyskytuje ďalej od jadra. Čím je bližšie, tým väčšia stredná hodnota sily naň pôsobí, t.j. tým menšia je jeho celková energia. Z tohto dôvodu sú stavy s malým  $l$  v sodíku posunuté smerom nadol v porovnaní s ekvivalentnými stavmi vo vodíku, preto sú rozdiely v energiách medzi stavmi s tým istým  $n$ , ale rôznym  $l$ .

Pre dvoj- a viacelektrónové atómy (prechody zahrňujú 2 a viac valenčných elektrónov) platia pri LS-väzbe tieto výberové pravidlá:

$$\begin{aligned}
 \Delta n & \text{ môže byť ľubovoľné} \\
 \Delta l & = 0, \pm 1 \\
 \Delta \ell & = 0 \\
 \Delta \gamma & = 0, \pm 1
 \end{aligned}
 \tag{10.106}$$

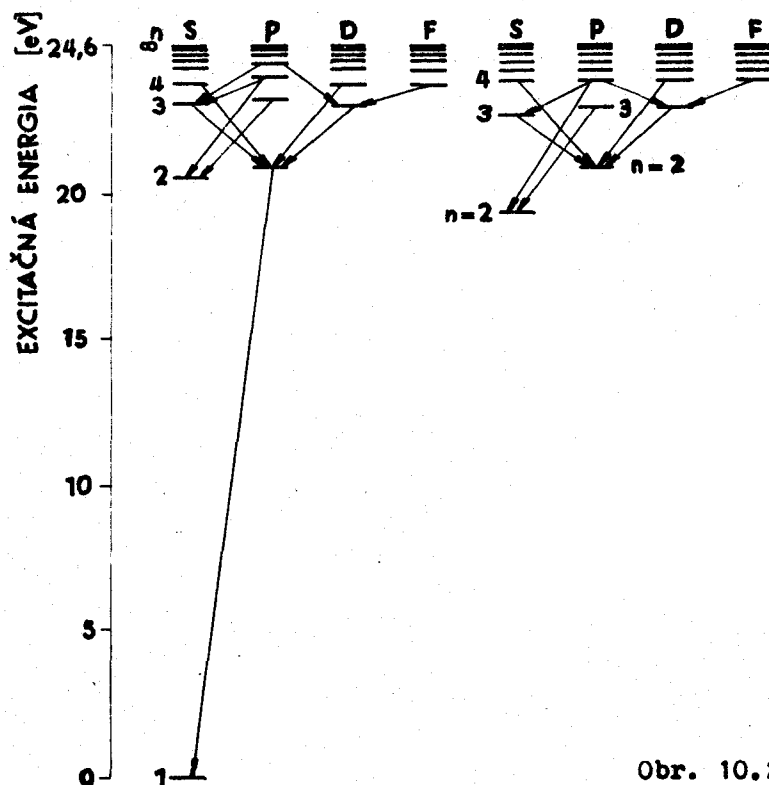
Atóm hélia má dva valenčné elektróny, z ktorých jeden môže byť napr. v základnom stave a druhý v excitovanom stave. Pri dovolených prechodoch už mu-



Obr. 10.27

síme uvažovať s tým, že keď elektrón prechádza z nejakej podsféry do inej podsféry, kde už je ďalší elektrón, musí byť splnený Pauliho princíp. Výberové pravidlá sú potom iné (10.106). Na obr. 10.28 je diagram konfigurácie energetických hladín hélia pre prípad, že jeden atóm je v základnom a druhý v excitovanom stave, ale pretože momenty hybnosti oboch elektrónov sú navzájom zviazané, je výhodné uvažovať hladiny, ako by charakterizovali celý atóm. Medzi týmto diagramom a diagramom pre vodík a sodík sú nápadné tri rozdiely. Po prvé, v diagrame hélia sú singletné ( $\mathcal{P} = 0$ ) a tripletné stavy ( $\mathcal{P} = 1$ ). Pre  $\mathcal{P} = 0$  sú spiny antiparalelné, pre  $\mathcal{P} = 1$  paralelné. Medzi singletnými a tripletnými stavmi je zakázaný prechod, lebo výberové pravidlo  $\Delta\mathcal{P} = 0$  musí byť splnené. Atómy hélia so singletnými stavmi tvoria tzv. parahélium a s tripletnými stavmi ortohélium. Atóm ortohélia môže stratiť svoju excitačnú energiu pri zrážke a premeniť sa na parahélium, ale parahélium pri zrážke môže zase získať excitačnú energiu a premeniť sa na ortohélium. Najnižšie tripletné stavy sa nazývajú metastabilné. Atóm v metastabilnom stave môže v ňom zotrvať pomerne dlho ( $\sim 1$  s) a až pri zrážke (teda nie samovoľne - spontánne) prejde do iného stavu a svoju excitačnú energiu vyžiari.

Druhou zvláštnosťou je, že neexistuje tripletný stav (term)  $1^3S$  (najnižší tripletný stav je  $2^3S$ ), hoci singletný stav je  $1^1S$ . Stav  $1^3S$  nemôže existovať preto, lebo by v ňom museli byť obidva elektróny s rovnobežnými spinmi, čo vylučuje Pauliho princíp.



Obr. 10.28

Tretou zvláštnosťou je, že je veľký energetický rozdiel medzi základným stavom a najnižším excitovaným stavom. Dôsledkom toho potom je silná väzba uzavretej podsféry. Na vytrhnutie elektrónu z valenčnej podsféry (pri héliu je to základný stav) atómu mimo atómu hélia je potrebná práca - ionizačná energia 24,6 eV, čo je najvyššia hodnota zo všetkých prvkov.

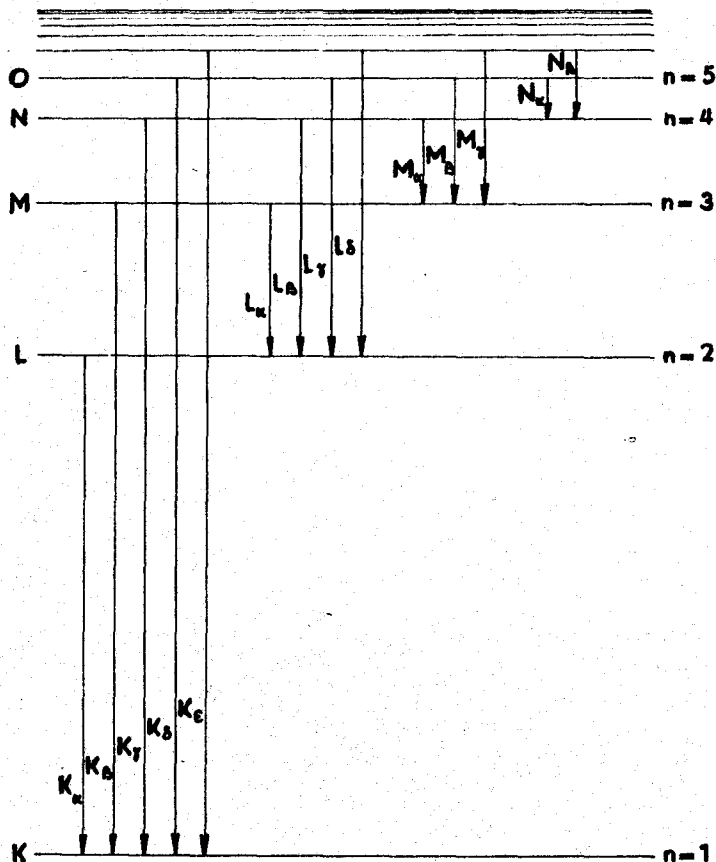
Pri ťažkých prvkoch (napr. ortuť) sa porušuje LS-väzba, čoho dôsledkom sú samovoľné prechody aj z tripletných na singletné stavy. Porušuje sa teda výberové pravidlo (10.106). Aj ortuť má metastabilné stavy (singletné stavy  $^3P_0$  a  $^3P_2$ ).

#### 10.1.11 Röntgenové spektrá

Pri štúdiu atómových spektier sme zistili, že ich pôvod je v prechodoch valenčných elektrónov z excitovaných stavov (podvrstiev) do svojho základného stavu (napr. pri sodíku do podsféry 3 s). Energie fotónov, ktoré sú emitované pri týchto prechodoch, môžu dosiahnuť energiu maximálne 24,6 eV (pri héliu), čo odpovedá ionizačnej energii potrebnej na odtrhnutie valenčného elektrónu z atómu. Na odtrhnutie valenčného elektrónu z podsféry 3 a pri sodíku je potrebná ionizačná energia len 5,13 eV, ale pre odtrhnutie každého elektrónu 2 p od atómu treba 31 eV, pre každý elektrón 2 s 63 eV a pre každý elektrón 1 s až 1041 eV.

Vlnová dĺžka fotónu emitovaného pri prechodoch vnútorných elektrónov bude podstatne kratšia, ako pri atómových spektrách. Žiarenie emitované pri týchto prechodoch nazývame röntgenovým žiarením. Existujú dva typy tohto žiarenia. Jednému zodpovedá spojité spektrum (pozri kap. 9.2.2), nazývame ho brzdné žiarenie, druhému zodpovedá čiarové spektrum a nazývame ho charakteristickým. Kým prvé vzniká vyžarovaním elektrónu pri jeho zabrzdení v terči (každý náboj, ktorý nekoná rovnomerný priamočiary pohyb, emituje elektromagnetické žiarenie), druhé, ako sme už spomenuli, je dôsledkom prechodov vnútorných elektrónov v atóme.

Aby mohli vznikáť prechody elektrónov, musia byť uvoľnené miesta v podvrstvách. Možno to dosiahnuť napr. zrážkou atómu s elektrónom, ktorý má veľkú kinetickú energiu a je teda schopný vyraziť elektrón aj z vrstvy K. Na uvoľnené miesto skočí jeden z elektrónov s väčšou energiou (z vyšších vrstiev L, M, ...) a súčasne sa vyžiari fotón, ktorého energia je rovná rozdielu energií týchto dvoch stavov elektrónu. Môžu vznikáť ďalej prechody elektrónov na uvoľnené miesta v tých vrstvách, odkiaľ skočí elektrón do K vrstvy, a tak môže proces pokračovať. Na obr. 10.29 vidíme schematicky znázornené elektrónové prechody, ktoré spĺňajú výberové pravidlá  $\Delta l = \pm 1$  a  $\Delta j = 0, \pm 1$  v prípade dipólového žiarenia, ktorý sme opísali. Existuje aj slabé kvadrupólové žiarenie (elektrón prechádza cez tzv. metastabilné stavy) s výberovými pravidlami



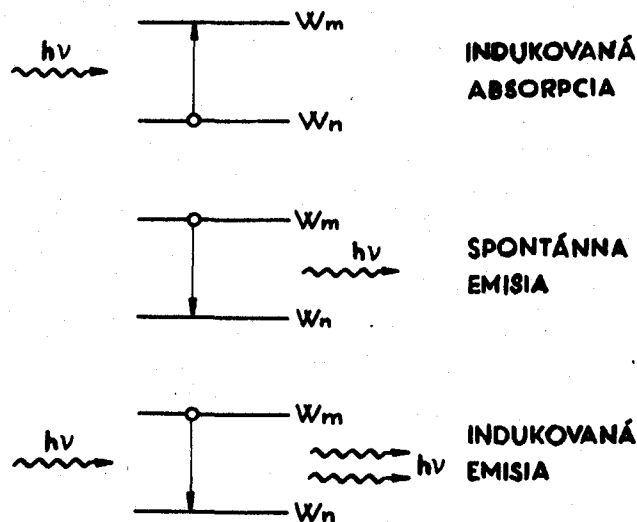
Obr. 10.29

$$\Delta l = \pm 2 \text{ a } \Delta j = 0, \pm 2 \quad (10.107)$$

Atóm s chýbajúcim vnútorným elektrónom môže excitačnú energiu stratiť aj bez vyžiarenia fotónu tzv. Augerovým efektom. Z dvoch vonkajších elektrónov jeden skočí na uvoľnené miesto a druhý súčasne vyletí z atómu a odnáša excitačnú energiu atómu namiesto fotónu. Tieto vyletujúce elektróny sú obvykle pohltené v materiáli terčika, takže nemožno ich zaregistrovať tak ako emitované fotóny.

### 10.1.12 Kvantové zosilňovače a generátory žiarenia

Uvažujeme dve energetické hladiny daného atómu - vyššiu hladinu  $W_m$  a nižšiu hladinu  $W_n$  (obr. 10.30). Keď je atóm v nižšom stave  $W_n$ , do vyššieho stavu  $W_m$  sa môže dostať absorpciou fotónu frekvencie  $\nu = (W_m - W_n)/h$ .

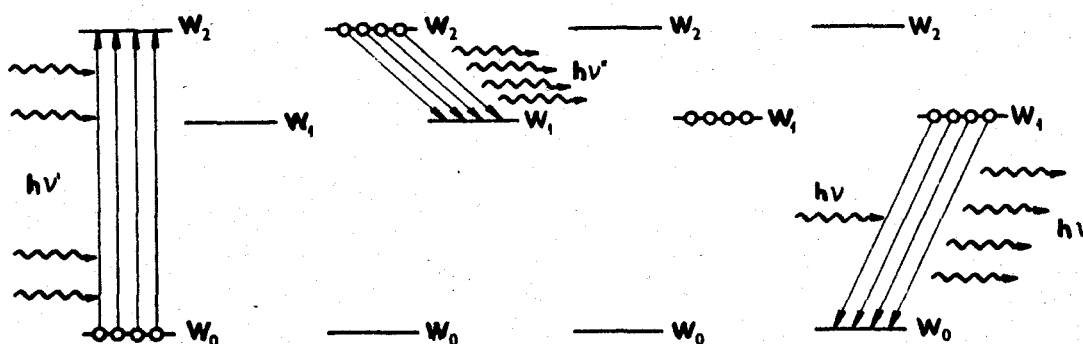


Obr. 10.30

Z vyššieho stavu  $W_m$  do nižšieho stavu  $W_n$  sa môže dostať dvojakým spôsobom: buď indukovanou alebo spontánnou emisiou. Pri indukovanej emisii atóm interaguje s cudzím indukujúcim fotónom frekvencie  $\nu$  tak, že prejde zo stavu  $W_m$  do stavu  $W_n$  a vyžiari fotón tej istej frekvencie, ako má fotón, ktorý podnietil emisiu. Spontánnu emisiu sa uskutočňuje bez podnietenia vonkajším fotónom. Z hľadiska kvantovej mechaniky sa to vysvetľuje tak, že pri skutočných elektromagnetických poliach sa hodnoty  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  menia okolo hodnôt daných klasickou fyzikou. Fluktuácie sa vyskytujú aj vtedy, keď klasická fyzika tvrdí, že  $\vec{E} = 0 = \vec{B}$ . Tieto fluktuácie (nazývame ich fluktuáciami polného vákua) spôsobujú spontánnu emisiu fotónov atómami, keď sú vo vzbudených stavoch.

Väčšina atómových systémov je taká, že pri tepelnej rovnováhe je obsadenie vyšších hladín omnoho menšie ako obsadenie nižších hladín. Dôsledok je, že indukovaná emisia nebude veľká, ale bude prevládať absorpcia fotónov atómom v základnom stave a opätovné vyžiarovanie fotónov tej istej frekvencie. (Časť vybudených atómov bude odovzdávať svoju energiu pri zrážkach.)

Niektoré atómové systémy môžu väčšmi obsadzovať vyššiu hladinu ako základný stav. Tento úkaz sa nazýva inverzia kvantového systému. V takomto prípade má indukovaná emisia prevahu nad absorpciou.

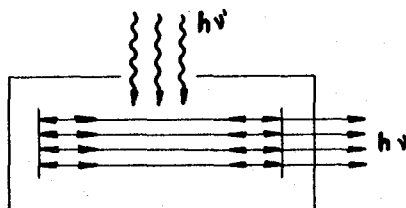


Obr. 10.31

Na obr. 10.31 je znázornený trojhľadný atómový systém (napr. v kryštáli rubína -  $\text{Al}_2\text{O}_3$  sú rozptýlené ióny  $\text{Cr}^{+++}$ ), kde prostredný stav je metastabilný. Keď na systém dopadá žiarenie  $\nu' = (W_2 - W_0)/h$ , atómy zo stavu  $W_0$  sa dostanú do stavu  $W_2$ . V tomto stave  $W_2$  majú dobu života  $\approx 10^{-8}$  s, čo znamená, že atómy prostredníctvom spontánnej emisie (lebo sú dovolené prechody  $W_2 - W_1$  a  $W_2 - W_0$ ) prechádzajú do metastabilného stavu 1 (alebo do základného stavu) takmer okamžite. Metastabilné stavy (prechod  $W_1 \rightarrow W_0$  je zakázaný výberovými pravidlami) môžu mať vzhľadom na spontánnu emisiu dobu života  $\approx 1$  s. Takto môžeme pokračovať v "čerpaní" doľady, kým nie je v stave 1 viac atómov ako v základnom stave. Keď na takýto atómový systém pustíme žiarenie frekvencie  $\nu = (W_1 - W_0)/h$ , prevýši indukovaná emisia fotónov s touto frekvenciou ich absorpciu a výsledok je taký, že intenzita vystupujúceho žiarenia je väčšia ako intenzita privádzaného žiarenia. Na takomto princípe pracujú zariadenia nazývané maser a laser (počiatočné písmená anglických názvov Microwave, resp. Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation - zosilňovanie mikrovln, resp. svetelných vln pomocou stimulovanej (indukovanej) emisie žiarenia).

Pri spontánnej emisii elektromagnetické žiarenie nie je koherentné, lebo atómy nevyžarujú súčasne (nemajú rovnakú fázu ani v priestore ani v čase), neexistuje ich koordinácia. Elektromagnetické vlny vyžiarené pri indukovanej emisii sú koherentné, lebo atómy zo stavu  $W_1$  prechádzajú do základného stavu súčasne. Takéto zariadenie (obr. 10.32) je v podstate plynom (napr. Na, Ar) plnená rúrka, alebo z pevnej látky priehľadný valček so zrkadlami na

oboich koncoch, z ktorých jedno je čiastočne priepustné, aby mohlo von vystúpiť žiarenie vo forme svetelného lúča. Budiace svetlo frekvencie  $\nu$  sa púšťa do aktívneho prostredia stenami rúrky. Časť svetla, ktorá sa odrazí od



Obr. 10.32

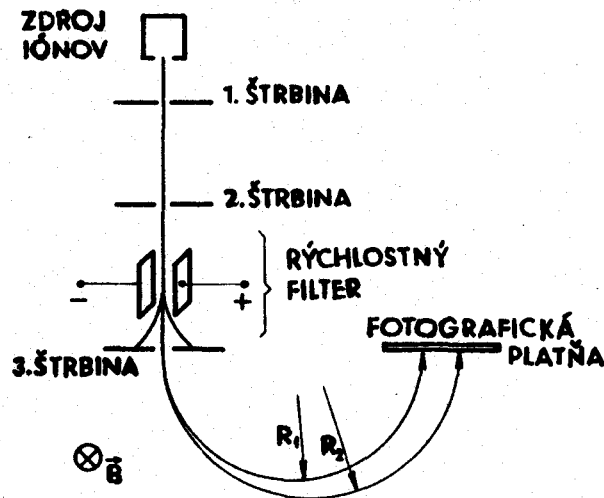
polopriepustného zrkadla pri predchádzajúcej emisii po mnohých odrazoch na zrkadlách, znovu indukuje emisiu s frekvenciou  $\nu$ , a proces sa opakuje.

## 10.2 ZÁKLADY JADROVEJ FYZIKY

### 10.2.1 Zloženie atómového jadra

Hlavné vlastnosti atómov, molekúl a pevných látok sú určované správaním sa atómových elektrónov, a nie atómových jadier. To ale neznamená, že nám neposkytujú žiadne informácie o vlastnostiach mikrosвета. Doteraz sme uvažovali s jadrom ako s objektom, ktorý má také malé rozmery (vzhľadom na rozmery atómu), že ho možno považovať za hmotný bod. Takmer všetka hmotnosť atómu je sústredená práve v jadre. Poznať hmotnosti atómov znamená dozvedieť sa veľa o vlastnostiach jadra.

Na určovanie hmotnosti atómov slúžia rôzne druhy hmotnostných spektrometrov. Principiálna schéma jedného z nich je na obr. 10.33. Zo droja vyletujú ióny, ktoré sú urýchľované elektrickým poľom, až po tzv. rýchlostný filter. Aby sa vymedzil úzky zväzok iónov a takých, ktoré majú rovnakú rýchlosť, musí sa použiť rýchlostný filter a rád štrbín. Princíp rýchlostného filtra spočíva v tomto: Zväzok iónov prechádza cez elektrické pole medzi doskami elektród a súčasne cez magnetické pole, ktoré sú navzájom kolmé ( $\vec{B} \perp \vec{E}$ ). Na ión, ktorý sa pohybuje, pôsobí elektrická sila  $F_e = eE$  (ak ión má náboj  $+e$ ) a magnetická sila  $F_m = evB$ . Pri určitej rýchlosti  $v$  iónov sa obidve sily kompenzujú ( $\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$ ) a dôsledok je taký, že ióny s touto rýchlosťou pokračujú ďalej. Ióny, ktoré majú inú rýchlosť, ako je  $v$ , sú vychyľované a



Obr. 10.33

odvádzané mimo zväzok iónov. Ióny, ktoré pokračujú ďalej, pohybujú sa za štrbinou už len v magnetickom poli (na obrázku je  $\vec{B}$  kolmé na nákresňu a orientované do nákresni), ktoré ich vychyluje po rôznych kružniciach. Polomer kružnice závisí od hmotnosti iónu  $R = (mv)/(eB)$ . Keď poznáme  $R$ ,  $v$ ,  $e$ ,  $B$ , môžeme určiť hmotnosť iónu. Atómové hmotnosti sa vzťahujú na neutrálne atómy, nie na ióny. Na určovanie hmotnosti atómov sa uzákonila v sústave SI jednotiek vedľajšia jednotka hmotnosti s názvom hmotnostná jednotka a značkou  $u$ , pričom  $1 u = 1,66053 \cdot 10^{-27}$  kg (presne). V periodickej sústave prvkov sa udávajú aj stredné hodnoty relatívnych atómových hmotností. Relatívna atómová hmotnosť  $A_r$  je definovaná ako podiel atómovej hmotnosti a 1/12 hmotnosti izotopu uhlíka  $^{12}\text{C}$ :

$$A_r \left( \frac{A}{Z}X \right) = \frac{m_a}{1/12 m_a (^{12}\text{C})} = \frac{m_a}{m_u} \quad (10.108)$$

kde  $m_u$  je (unifikovaná) atómová hmotnostná konštanta, ktorá meraním je určená

$$m_u \in \langle 1,6605654 \pm 0,0000085 \rangle \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (10.109)$$

Rozdiel medzi  $m_u$  a hmotnostnou jednotkou je v tom, že jednotka hmotnosti musí byť určená presne, kým  $m_u$  ako 1/12 hmotnosti izotopu uhlíka  $^{12}\text{C}$  je vždy určená s nejakou chybou, lebo presnú hodnotu nevieme.

Každý prvok môže mať rôzne izotopy (nuklidy), ktoré sú buď stabilné, alebo nestabilné. Nie všetky izotopy sú percentuálne rovnako zastúpené v prvku, ktorý sa vyskytuje v prírode. Relatívna atómová hmotnosť prvku sa potom počíta ako stredná hodnota relatívnych atómových hmotností stabilných izotopov, ale vzhľadom na ich percentuálne zastúpenie. Prvky s ťažkými jadrmi, počnúc 84 Po, nemajú stabilný ani jeden izotop, ich relatívne atómové hmotnosti sú preto v tabuľke periodickej sústavy prvkov označené v hranatej zátvorke.



Existenciu atómového jadra objavil Rutherford (roku 1913) pri pokusoch s rozptylom  $\alpha$ -častic na tenkej zlatej fólii (pozri 10.1.2). Jadro muselo mať kladný náboj, ktorého nosičmi sú protóny, aby viazalo na seba elektróny z obalu atómu. Problém bol vo veľkej hmotnosti jadier, napr. jadro hélia s nábojom  $+ 2 e$  by malo mať len dva protóny, ale jeho hmotnosť je asi 4-krát väčšia ako hmotnosť jadra vodíka. Daný problém bol vyriešený až objavom neutrónu (Bothe a Becker - roku 1932), ktorého hmotnosť je porovnateľná s hmotnosťou protónu a je neutrálny. Jadro podľa súčasnej predstavy sa skladá s protónov a neutrónov, ktoré majú spoločný názov nukleóny.

Na popis jadra sa používajú tieto termíny a symboly:

Z ... atómove (alebo aj protónové) číslo, udáva počet protónov v jadre,

N ... neutrónové číslo - udáva počet neutrónov v jadre,

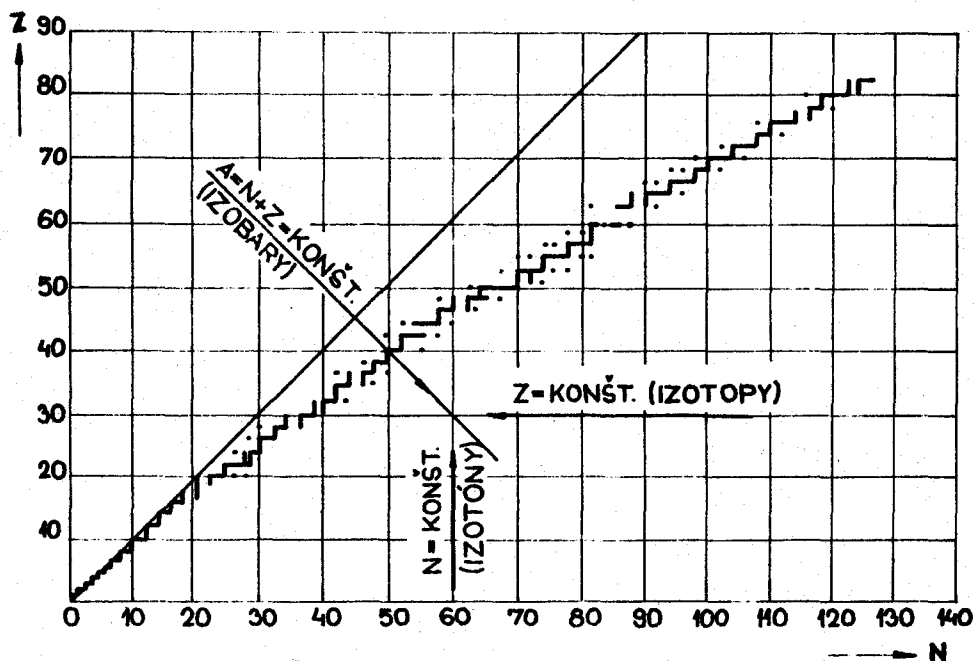
$A = Z + N$  ... hmotnostné (alebo aj nukleónové) číslo, udáva počet nukleónov v jadre.

Nuklidy (izotopy) označujeme podľa tejto schémy:



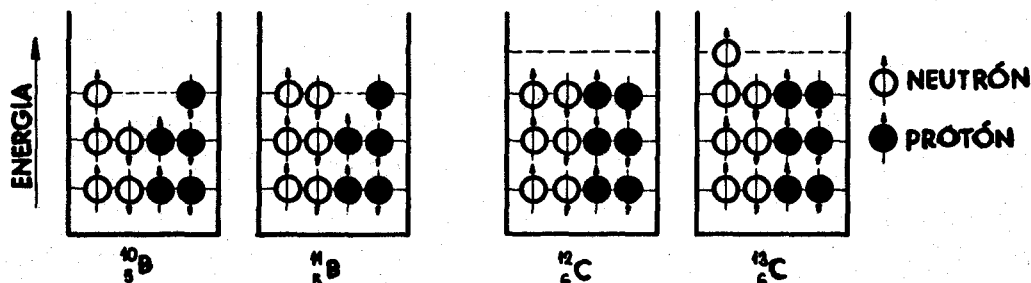
kde X je chemická značka prvku. Charakteristické vlastnosti atómov sú v podstate určované nábojom jadra, preto izotopy (majú rovnaké Z) sa chemicky rovnako správajú a fyzikálne sa líšia len hmotnosťou.

Z experimentálnych pozorovaní vieme, že niektoré izotopy prvkov nie sú stabilné, rozpadajú sa. To znamená, že nie je možná akákoľvek kombinácia nukleónov, aby jadro bolo stabilné. Na obr. 10.34 je vynesené Z v závislosti od N pre stabilné jadro. Pre ľahké jadrá ( $A < 20$ ) je  $Z \approx N$ , ale pre ťažšie jadrá už prevláda v jadre počet neutrónov teda  $N > Z$ .



obr. 10.34

Nukleóny majú spinové číslo  $1/2$  a riadia sa vylučovacím princípom. Energetické hladiny sú obsadzované tak, aby vznikali konfigurácie s minimálnou energiou (maximálnou väzbovou energiou). Podľa zjednodušenej predstavy si obsadzovanie môžeme predstaviť tak, že na jednej hladine môžu byť dva protóny a dva neutróny s opačnými spinmi, lebo toto zloženie má najmenšiu energiu. Keby boli tri neutróny a jeden protón, už by jeden neutrón musel obsadzovať energeticky vyššiu hladinu a celá konfigurácia by už mala väčšiu energiu.



Obr. 10.35

Obr. 10.35 podľa tejto predstavy ukazuje, že nemôže existovať stabilný izotop  $^{12}_5\text{B}$ , ale existuje stabilný izotop  $^{12}_6\text{C}$ . A zase  $^{11}_6\text{C}$  nie je stabilný, ale  $^{11}_5\text{B}$  je stabilný izotop.

Jadrové sily, ktorými sú k sebe pútané nukleóny, majú krátky dosah. Pútané sú k sebe vždy len susedné nukleóny. Aby sa vykompenzovalo coulombovské odpudzovanie protónov, musí byť v jadre prevaha neutrónov. Táto schopnosť neutrónov viazať navzájom nukleóny v jadre je obmedzená a končí pri izotope bizmutu  $^{209}_{83}\text{Bi}$ , ktorý je najťažším stabilným nuklidom. Všetky jadrá, pre ktoré je  $Z > 83$  a  $A > 209$ , sú nestabilné a samovolne sa rozpadávajú na ľahšie jadrá. Rozptyl častíc (elektrónov a neutrónov) pomohol experimentálne zistiť, že objem jadra je priamo úmerný počtu nukleónov, ktoré obsahuje. Teda  $A \sim \sim (4/3) \pi R^3$ . Táto úmernosť sa vyjadruje vo forme vzťahu

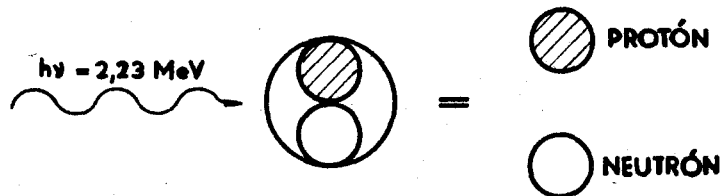
$$R = R_0 A^{1/3} \quad R_0 \in \langle 1,3 \pm 0,1 \rangle \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (10.110)$$

Napr. pre izotop uhlíka  $^{12}\text{C}$  vychádza polomer jadra  $R \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 3 \text{ fm}$  a pre hustotu  $\rho \approx 2 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Táto hustota je v podstate rovnaká pre všetky jadrá.

### 10.2.2 Väzbová energia

Hmotnosť protónu nebolo ťažké určiť pomocou hmotnostných spektrometrov, lebo má elektrický náboj. Horšie je to s určením hmotnosti neutrálneho neutrónu, ktorý nemožno určiť priamo, tak ako hmotnosť protónu. Na určenie hmotnos-

ti sa používa spôsob, ktorým možno určiť aj energiu väzby. Keď deuterón  ${}^2_1\text{H}$  ožarujeme  $\gamma$  kvantom, obr. 10.36, rozštiepi sa na neutrón a atóm vodíka (protón + elektrón). Energii  $\gamma$  kvanta  $h\nu$ , ktorá je potrebná na rozštiepenie, už nie je problém zmerať a musí sa teda rovnať energii väzby medzi dvoma nukleónmi (protón, neutrón). Z experimentálnych údajov vychádza, že väzbová



Obr. 10.36

energia je  $W_{\text{váz}} = W_B \in \langle 2,226 \pm 0,003 \rangle$  MeV. Teraz už môžeme určiť hmotnosť neutrónu, keď vieme, že energia  $W_B$  je ekvivalentná hmotnosti podľa vzťahu (4.22)  $\Delta m = W_B/c^2$ . Súčet hmotnosti deuterónu a  $\Delta m$  (tzv. hmotnostný defekt) sa musí rovnať hmotnosti atómu vodíka a hmotnosti neutrónu

$$m_D + W_B/c^2 = m_H + m_n \quad (10.111)$$

Odtiaľ pre hmotnosť neutrónu vychádza:

$$m_n = m_D + W_B/c^2 - m_H = 1,0086652 \text{ u} = (939,553 \text{ MeV})/c^2$$

Hmotnosť protónu je

$$1,00727661 \text{ u} = (938,259 \text{ MeV})/c^2$$

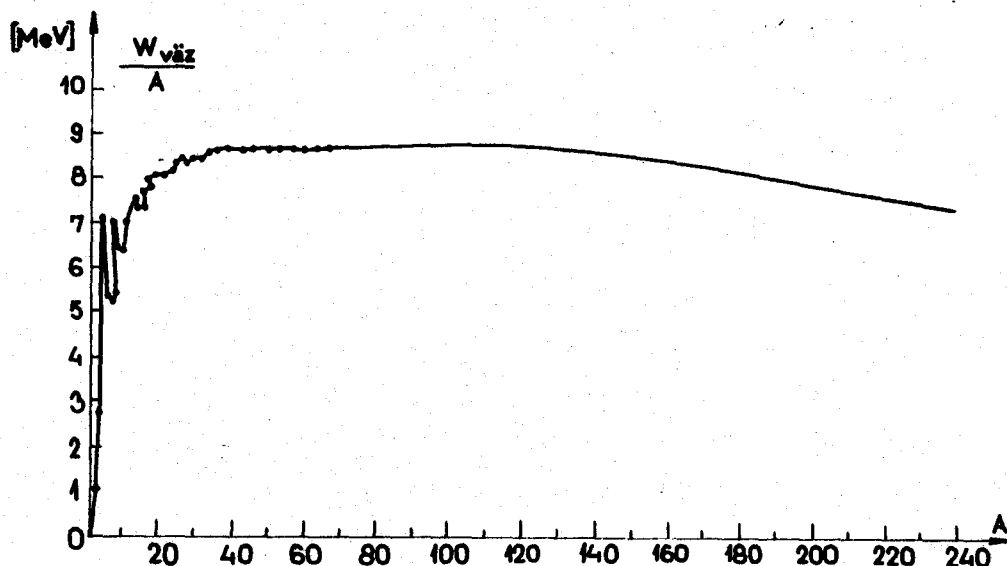
Hmotnosť protónu je teda o niečo menšia ako hmotnosť neutrónu. V atómovej fyzike sa hmotnosť často udáva v ekvivalentnej energii bez predelenia  $c^2$ .

Pre výpočet väzbovej energie akéhokoľvek jadra s počtom protónov  $Z$  a počtom neutrónov  $N$  môžeme zovšeobecniť vzťah (10.111) a napísať:

$$W_B(Z,N) = [Z m_H + N m_n - m_j(Z,N)] c^2 \quad (10.112)$$

kde  $m_j(Z,N)$  je hmotnosť jadra.

Zaujímavou veličinou je väzbová energia prepočítaná na jeden nukleón  $W_B/A$ , ktorú dostaneme, keď celkovú väzbovú energiu predelíme počtom nukleónov, teda hmotnostným číslom. Na obr. 10.37 je vynesená závislosť  $W_B/A$  od hmotnostného čísla  $A$ . Pre ľahké jadrá závislosť prudko stúpa (pre  ${}^2_1\text{H}$  - deuterón je  $W_B/A = 1,113$  MeV, ale pre  ${}^4_2\text{H}$  je už 7 MeV) až dosiahne maximum 8,79 MeV (pre jadro  ${}^{56}\text{Fe}$ ) a potom pomaly takmer lineárne klesá k hmotnosti približne 7,5 MeV pre najväčšie hmotnostné čísla. Najstabilnejšie budú, zrej-



Obr. 10.37

me, jadrá okolo maxima energie, lebo im treba dodať najviac energie, aby sa rozštiepili. Z toho možno usúdiť, že pri štiepení ťažkých jadier na ľahšie by sa mala uvoľňovať energia a zase z druhej strany maxima, pri spojovaní (syntéze) ľahkých jadier na ťažšie, by sa tiež mala uvoľňovať energia. Takéto procesy sú už známe a experimentálne vyskúšané. Takto získaná energia je obrovská. Keď prepočítame väzbovú energiu 7,5 MeV na jeden nukleón k jeho hmotnosti, dostaneme:

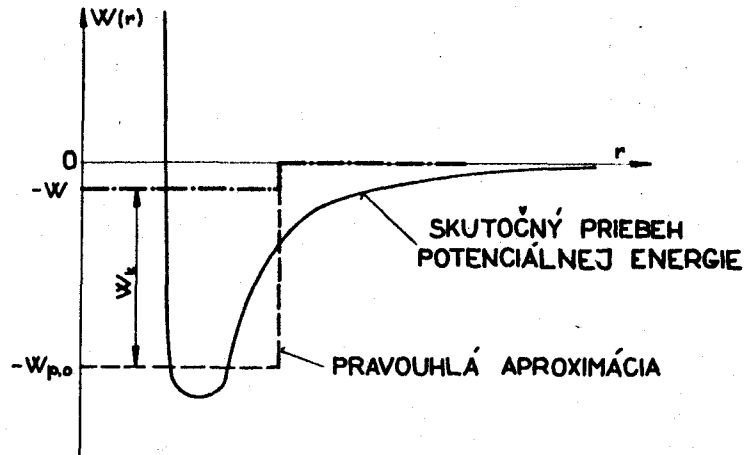
$$\frac{W_B/A}{m_n} = \frac{7,5 \text{ MeV}}{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 7,24 \cdot 10^{14} \text{ J/kg}$$

Táto hodnota je napr.  $\sim 10^7$ -krát väčšia, ako je spálne teplo benzínu.

### 10.2.3 Jadrové sily a modely jadra

Jadrové sily krátkeho dosahu, ktoré zaväzujú nukleóny v jadre, sú doteraz najsilnejšie známe sily. Pochopiť tieto sily je oveľa ťažší problém, ako pochopiť elektrické sily. Z toho dôvodu je štruktúra jadra oveľa menej prebádaná ako atómová štruktúra.

Najjednoduchším jadrom, ktoré obsahuje viac než jeden nukleón, je deuterón, ktorý sa skladá z protónu a neutrónu. Ich väzbová energia je 2,226 MeV. Potenciálna energia jedného nukleónu voči druhému závisí od vzájomnej vzdialenosti ich stredov a pravdepodobný priebeh je znázornený na obr. 10.38 plnou



Obr. 10.38

čiarou. Keď sa nukleóny začnú k sebe približovať, začnú pôsobiť príťažlivé sily až dovtedy, kým ich vzájomná vzdialenosť nie je  $\approx 0,4$  fm. Pri ďalšom približovaní jadrové sily už nie sú príťažlivé, lež odpudivé. Obidva nukleóny zaujímajú takú polohu v jadre, že ich celková energia je najmenšia. Aby sa tento problém dvoch častíc dal riešiť, zavádza sa tzv. pravouhlá aproximácia potenciálnej energie (potenciálu). Nukleóny v jadre okrem potenciálnej energie  $W_p$ , ktorá je záporná, majú kinetickú energiu  $W_k > 0$ . Ich súčet dáva celkovú energiu  $W$ , ktorá je zároveň väzbovou energiou. Keby sme takýto priebeh celkovej energie  $W_k = W - W_p$  (na obr. 10.38 bodkočiarkované) dosadili do SchR v sférických súradniciach (predpokladá sa, že deuterón sa málo odchyľuje od sférickej symetrie), dostali by sme, že potenciálová jama je  $W_{p_0} \approx 35$  MeV a pre polomer deuterónu  $R = 2$  fm.

Priebeh potenciálu na obr. 10.38 nepredpokladá, že nukleóny majú aj svoje vlastné (spinové) momenty hybnosti. Pri deuteróne vzájomná interakcia medzi protónom a neutrónom je taká, že sa viažu iba vtedy, keď ich spiny (vlastné momenty hybnosti) sú rovnobežné a vytvárajú tzv. tripletný stav. Singletný stav, keď sú spiny antiparalelné, nevzniká, zrejme, je slabšia väzba ako pri paralelných spinoch.

Takto možno vysvetliť, prečo neexistuje konfigurácia jadra s dvoma neutrónmi (bineutróny) alebo s dvoma protónmi (biprotóny). Pauliho princíp vylučuje, aby biprotóny, prípadne bineutróny mohli byť v tripletnom stave. Singletný stav má zase slabšiu väzbovú energiu ako tripletný stav, a zrejme, nestačí na to, aby takáto dvojica mohla existovať, lebo biprotóny ani bineutróny neboli pozorované. Spôsob väzby, ktorú spôsobujú jadrové sily, je taký, že od určitej vzdialenosti medzi nukleónmi začne pôsobiť odpudivo, čo sa nepozoruje pri elektromagnetických alebo gravitačných silách. Táto väzba je analogická s väzbou v niektorých molekulách (napr.  $H_2$ ), kde si atómy (protóny pri  $H_2$ ) vymieňajú elektróny. V závislosti od toho, či vlnová funkcia systému je symetrická alebo antisymetrická vzhľadom na výmenu častíc, výmenné sily sú buď príťažlivé, alebo odpudivé.

Po Heisenbergovi (roku 1932), ktorý navrhol ako výmenné častice elektróny a pozitrony (neúspešne, lebo výmenné sily by boli príliš malé) Yukawa (roku 1935) navrhol namiesto elektrónov a pozitronov častice, ktoré sa nazývajú mezóny. Sú ťažšie ako elektróny a výmenné sily pre mezóny majú rádovo správnu veľkosť.

Pri interakcii medzi dvoma neutrónmi a dvoma protónmi výmennou časticou musí byť neutrálny mezón ( $\pi^0$ ). Medzi protónom a neutrónom sa vymieňajú elektricky nabité mezóny ( $\pi^+$  a  $\pi^-$ ). Neutrón emituje mezón  $\pi^-$  a mení sa na protón  $n \rightarrow p + \pi^-$ , protón prijme  $\pi^-$  mezón a mení sa na neutrón  $p + \pi^- \rightarrow n$ . Pri obrátenom procese protón emituje mezón  $\pi^+$  a mení sa na neutrón  $p \rightarrow n + \pi^+$ , neutrón prijme  $\pi^+$  mezón a mení sa na protón  $n + \pi^+ \rightarrow p$ .

Keď nukleóny emitujú  $\pi$  mezóny, mali by sme nájsť také nukleóny, ktoré by mali inú hmotnosť, čo ale v skutočnosti nie je. Možno to vysvetliť princípom neurčitosti:  $\Delta W \Delta t \geq \hbar/2$ . Ak výmena mezónu trvá menej ako  $\Delta t \leq \hbar/2\Delta W$ , takýto proces porušenia zákona zachovania energie nie je zakázaný. Doba  $\Delta t = r/c$ , kde  $r$  je maximálny dosah jadrových síl (asi 1,7 fm),  $c$  - rýchlosť svetla. Zmena energie, ktorá sa nezachová, je  $\Delta E = m_\pi c^2$ . Teda  $(m_\pi c^2)(r/c) \geq \hbar/2$  a z toho pre hmotnosť mezónu vychádza  $m_\pi \geq \hbar/2rc = 9,5 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \approx 100 m_e$ . Tieto  $\pi$  mezóny, napriek už im známym vlastnostiam, boli experimentálne objavené až hodne neskôr (roku 1952).

Aj keď príťažlivosť jadrových síl je veľká, ich dosah je taký krátky, že pôsobia navzájom iba susedné nukleóny. Predpokladajme tzv. kvapkový model jadra:

- a) Keď sú nukleóny v jadre tesne naukladané do guľovitého priestoru, môže jeden nukleón pôsobiť so susednými, ktorých je najviac 12. Medzi dvoma nukleónmi je väzbová energia  $W_B$  a na jeden nukleón pripadá  $W_B/2$ . Na nukleón, ktorý je obklopený dvanástimi susedmi, pripadá potom energia  $W_0 = 12 W_B/2 = 6 W_B$ . Pre jadro, ktoré má  $A$  nukleónov, je energia  $W_0 = 6A W_B$  alebo v tvare

$$W_0 = a_0 A \quad (10.113)$$

Energia  $W_0$  sa nazýva objemová alebo aj kondenzačná energia jadra. V jadre nie sú všetky nukleóny obklopené susedmi. Pre nukleóny, ktoré sú na povrchu, už majú menej susedov a aj energia, ktorá na ne pripadá, bude menšia, čo možno odpočítať od objemovej energie. Počet nukleónov na povrchu musí byť úmerný ploche povrchu jadra  $4\pi R^2 = 4\pi R_0^2 A^{2/3}$ . Použili sme vzťah (10.110). Väzbovú energiu  $W_0$  znižuje potom člen

$$W_s = - a_s A^{2/3} \quad (10.114)$$

ktorý nazývame povrchovou energiou.

Coulombovské odpudzovanie medzi protónmi spôsobuje tiež zmenšenie energie  $W_0$ . Potenciálna energia náboja  $q$  polomeru  $R$  je úmerná  $q^2/R$ . Pretože  $q = Ze$  a  $R = R_0 A^{1/3}$ , musíme odpočítať tzv. coulombovskú energiu

$$W_c = - a_c Z^2 A^{-1/3} \quad (10.115)$$

Jadro, ktoré nemá symetrický počet nukleónov (viacnej neutrónov ako protónov), má také rozloženie, že sa viac neutrónov dostane na povrch, kde ich schopnosť väzby sa znižuje (neutróny sa podieľajú viac na väzbovej energii), ako pri symetrickom jadre (rovnaký počet protónov a neutrónov) s tým istým  $A$ , keď na povrchu je menej neutrónov. Teda energia z asymetrie je

$$W_A = - a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \quad (10.116)$$

Ďalšia energia, tzv. párová energia, sa pripočíta alebo odpočíta podľa toho, či nukleóny sú spárované ( $N$ ,  $Z$  sú čísla párne), keď je silná väzbová energia (tzv.  $ss$  - jadro), a keď sú nespárované ( $N$  a  $Z$  sú nepárne čísla), je väzbová energia slabá (tzv.  $ll$  - jadro). Párová energia je rovná

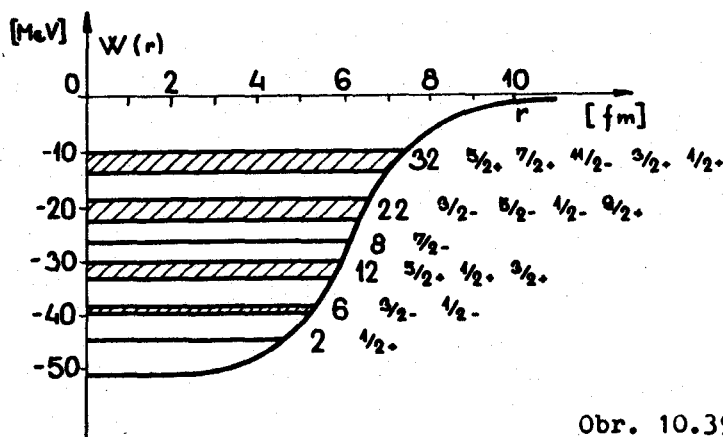
$$W_p = \pm a_p A^{-1/2} \quad (10.117)$$

ale nie je pochopiteľná z kvapkového modelu jadra. Treba ju počítať ako empirickú opravu.

Kvapkový model nepredpokladá nijaké obmedzenie pre vzájomné pôsobenie medzi nukleónmi, uvažuje s nimi ako s molekulami v kvapaline, ktoré interagujú so svojimi susedmi. Aj iná predstava, že nukleóny skôr podliehajú interakcii s nejakým všeobecným silovým poľom než jeden s druhým, je experimentálne podložená. Okrem toho nukleóny sú tak isto ako elektróny Fermiho častice, a teda podliehajú vylučovaciemu princípu. Iný experimentálny výsledok, ktorý kvapkový model nevie vysvetliť, sú tzv. magické čísla. Podobne ako pri atóme, kde elektróny zapíňajú jednotlivé podsféry, aj nukleóny v jadrách budú obsadzovať nejaké energetické vrstvy, lebo atómy s počtom neutrónov alebo protónov 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 sa vyskytujú častejšie, teda budú asi stabilnejšie. Pre takéto atómy je kvadrupólový moment (je mierou odklonu všeobecného rozloženia náboja od guľovo symetrického) jadra nulový, a to musia byť teda jadrá guľovo symetrické, lebo jadro tvaru pretiahnutého elipsoidu má kladný a tvaru plochého elipsoidu záporný kvadrupólový moment.

b) Šupkový (vrstvový, lupinový) model jadra bol vytvorený preto, lebo sa podľa kvapkového modelu nedala vysvetliť existencia magických čísel a niektoré ďalšie vlastnosti jadra. Šupkový model jadra berie do úvahy interakciu jednotlivých nukleónov so silovým poľom od všetkých ostatných nukleónov. Potenciálna energia nukleónu v silovom poli jadra má priebeh funk-

cie, ako je znázornený na obr. 10.39. Od pravouhlej aproximácie potenciálovej jamy, použitej pre deuterón sa líši zaoblenými hranami. Dosadením tohto priebehu energie do SchR dostaneme stacionárne stavy nukleónov charakterizované, podobne ako pri atómových elektrónoch, kvantovými číslami  $n, l, m_l$ .



Obr. 10.39

Neutrón podlieha len jadrovým silám, protón jadrovým aj elektrickým silám, preto bude obsahovať odlišné kvantové stavy. Každý nukleón má orbitálny moment hybnosti  $\vec{L}$ , spinový moment hybnosti  $\vec{S}$  a celkový moment hybnosti  $\vec{J}$ , určený vektorovým súčtom  $\vec{L} + \vec{S}$ . Silná spinorbitálna interakcia spôsobuje, že aj v tomto modeli jadra hovoríme o LS-väzbe, ktorá platí pre najľahšie jadrá, a o jj-väzbe pre veľkú väčšinu jadier.

Z riešenia, ktorého spôsob sme tu navrhli, nám vyjdú možné energetické stavy v jadre, ako je to na obr. 10.39 naznačené pre neutróny izotopu  $^{138}_{58}\text{Ce}$ . Pre každú energetickú vrstvu (šupku) sú celkové kvantové čísla uvedené vedľa. Každá vrstva má hladinu, ktorá sa štiepi na podhladiny v dôsledku spinorbitálnej interakcie. Teda stav s daným  $j$  sa rozštiepi na  $(2j + 1)$  podstavov (podhladín), lebo je  $(2j + 1)$  možných orientácií vektora celkového momentu hybnosti. Postupne podľa rastu energie v každej vrstve je 2, 6, 12, 8, 22, 32 a 44 nukleónov. Jadrá atómov potom obsahujú takýto počet protónov alebo neutrónov, keď majú zaplnené všetky vrstvy: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, čo sú už experimentálne známe magické čísla. Okrem týchto magických čísiel dokáže šupkový model jadra vysvetliť ešte iné javy z oblasti jadra. Každá energetická podhladina môže obsahovať dve častice (protóny majú svoje kvantové stavy a neutróny tiež) s opačnými spinmi. Keď je párny počet neutrónov a protónov (párnopárne jadro), všetky podhladiny sú zaplnené a keď je nepárny počet neutrónov a protónov v jadre, potom sú podhladiny nezaplnené. Jadrá, ktoré majú zaplnené podhladiny, sú stabilné a je ich 160 známych izotopov, kým pri jadrách, ktoré majú nejakú podhladinu nezaplnenú, sú nestabilné okrem výnimiek pri ľahkých jadrách  $^1_1\text{H}$ ,  $^6_3\text{Li}$ ,  $^{10}_5\text{B}$ ,  $^{14}_7\text{N}$ .



Pretože každý model dokáže vysvetliť určité javy a vlastnosti jadier, je úsilie vytvoriť tzv. kolektívny model, ktorý by bral najlepšie prvky z oboch modelov.

#### 10.2.4 P r i r o d z e n ý   r o z p a d j a d i e r

Schopnosť jadier niektorých atómov samovoľne sa rozpadáť a pritom vyžarovať neviditeľné žiarenie, nazývame rádioaktivitou. O prirodzenej rádioaktivite hovoríme vtedy, keď vyžarujúce atómy pred samovoľným rozpadom neboli v takých vonkajších podmienkach, ktoré by tomuto rozpadu napomáhali. Rutheford zistil, že pri rozpadoch jadier existujú tri druhy rádioaktívneho žiarenia:  $\alpha$  žiarenie, keď jadro atómu emituje jadro  ${}^4_2\text{He}$ ,  $\beta$  žiarenie - jadro emituje elektróny,  $\gamma$  žiarenie - jadro emituje fotóny ( $\gamma$  kvantá) energie 0,1 MeV až 5 MeV.

Pri analýze rôznych rozpadov Rutheford a Soddy určili, že úbytok nerozpadnutých jadier prebieha podľa prirodzeného úbytku

$$- dN = \lambda N dt \quad (10.118)$$

kde  $\lambda$  je rozpadová konštanta. V integrálnom tvare pre počet ešte nerozpadnutých jadier atómov v čase  $t$ , keď v čase  $t = 0$  počet nerozpadnutých atómov je  $N_0$ , vzťah (10.118) bude

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (10.119)$$

Z toho vidieť, že tento exponenciálny rozpadový zákon nevystihuje rozpad každého jadra osobitne, ale iba ako celok, ako štatistický súbor častíc. Každý rádioaktívny prvok je charakterizovaný:

- a) energiou (maximálnou) emitovaných častíc,
- b) polčasom rozpadu,
- c) aktivitou.

Polčas rozpadu je čas  $t = T$ , za ktorý sa z pôvodného počtu nerozpadnutých častíc  $N_0$  rozpadne polovica  $N_0/2$ .

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \exp(-\lambda T)$$

a z toho  $\exp(\lambda T) = 2$ . Pre polčas je

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (10.120)$$

Aktivitu  $A$  definujeme vzťahom

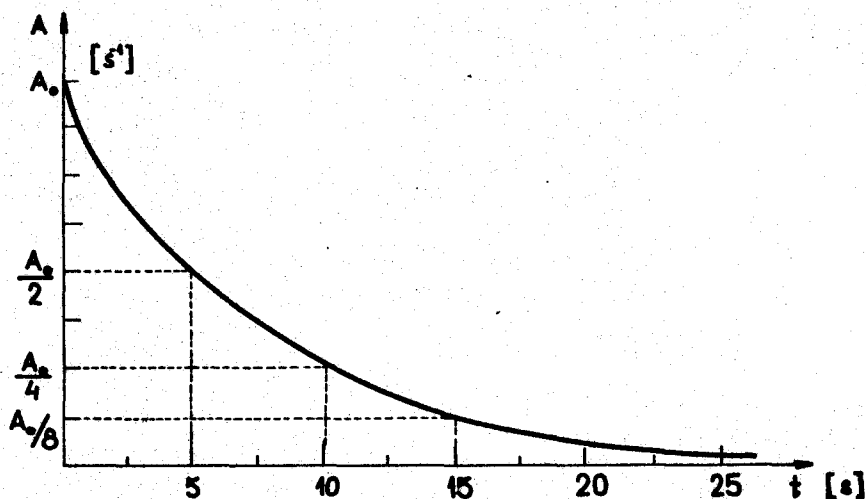
$$A = \frac{dn}{dt} = - \frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (10.121)$$

keď  $dn$  je počet rozpadnutých jadier za čas  $dt$ .

Keď vynásobíme vzťah (10.119) rozpadovou konštantou  $\lambda$ , dostaneme:

$$A = A_0 \exp(-\lambda t) \quad (10.122)$$

$A_0 = \lambda N_0$  je aktivita prvku v čase  $t = 0$ . Na obr. 10.40 je graf tejto funkcie. Z grafu vidieť, že polčas rozpadu je  $T = 5s$ . Za ten čas klesne aktivita



Obr. 10.40

na polovicu  $A_0/2$ . Za ďalších 5s klesne tiež o polovicu, ale z hodnoty  $A_0/2$  na  $A_0/4$  atď. Jednotkou aktivity je becquerel (Bq). Becquerel (Bq) je aktivita telesa z rádioaktívneho nuklidu, v ktorom nastáva 1 jadrový rozpad (premena) za 1 sekundu.

Okrem polčasu definuje sa ešte stredná doba života ako súčet všetkých životných dob jednotlivých častíc, delený celkovým počtom častíc:

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} t \lambda N_0 \exp(-\lambda t) dt}{N_0} = \lambda \int_0^{\infty} t \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \quad (10.123)$$

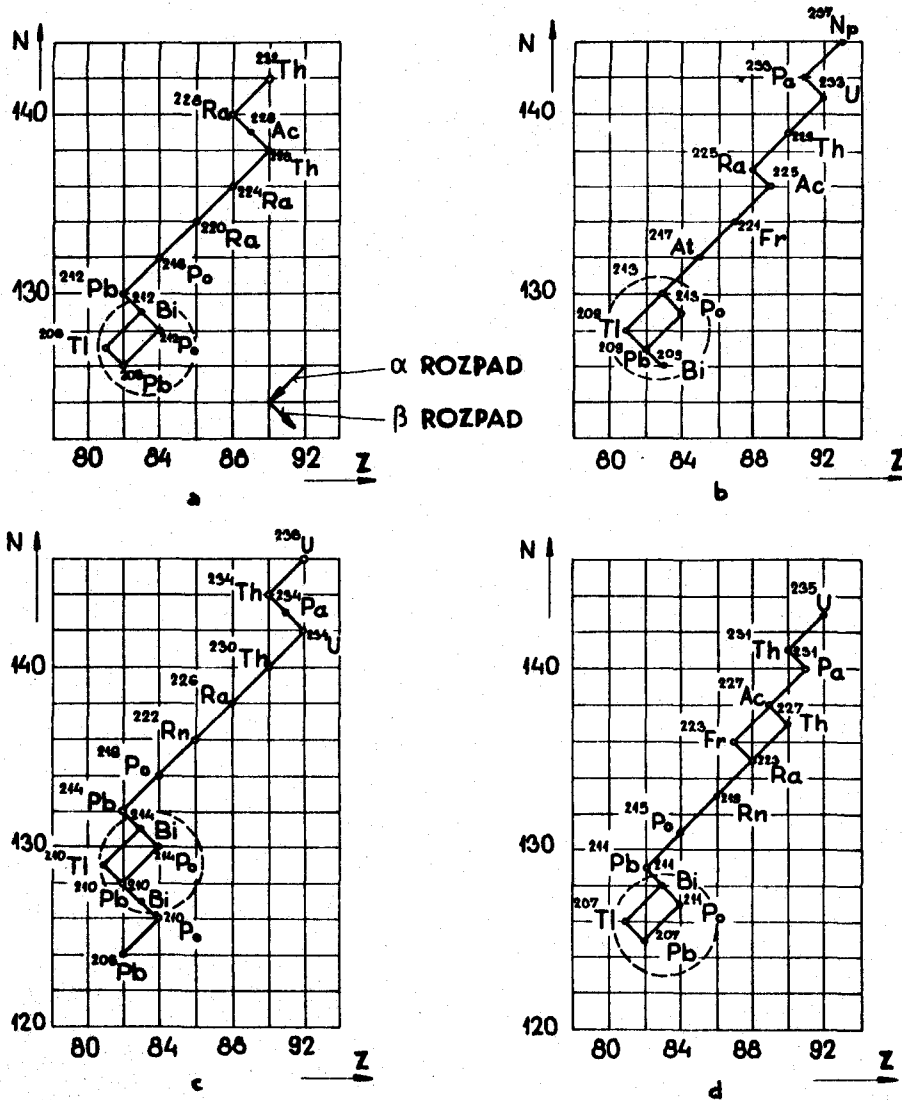
a

$$T = \tau \ln 2$$

Väčšina rádioaktívnych prvkov, ktoré sa vyskytujú v prírode, patria do štyroch rádioaktívnych radov. Každý rad tvorí rozpadové produkty pôvodne odvo-

dené od jedného nuklidu. Pri rozpade, keď je emitovaná  $\alpha$  častica, klesne hmotnostné číslo o 4, to je príčina, prečo sú štyri rady. Hmotnostné čísla izotopov sa menia podľa vzťahu  $A = 4n + a$  kde  $a = 0, 1, 2, 3$  a  $n$  je celé číslo (52 ÷ 58). Každý rad má konečný stabilný produkt. Na obr. 10.41 sú postupné:

- a) toriový rozpadový rad ( $A = 4n$ );
- b) neptúniový ( $A = 4n + 1$ );
- c) uránový ( $A = 4n + 2$ );
- d) aktíniovo-uránový ( $A = 4n + 3$ ).



Obr. 10.41

## 10.2.5 Typy rádioaktívnych rozpadov

Pri rozpade, keď jadrá emitujú  $\alpha$  častice (jadra hélia  ${}^4_2\text{He}$ ), hovoríme o alfa rozpade, keď emitujú elektróny, je to beta rozpad a pri emitovaní  $\gamma$  kvánt jadrami hovoríme o gama rozpade.

### a) Alfa rozpad

Elektrické sily majú neobmedzený dosah, preto vo veľkých jadrách začínajú prevládať tieto sily (pre  $A > 209$ ) nad jadrovými silami, ktoré držia jadro pohromade. Odpudivé elektrostatické sily majú pôvod v kladných protónoch a sú približne úmerné  $Z^2$ , jadrové sily majú pôvod v nukleónoch a sú približne úmerné  $A$ . Na rozpad jadra sa môžeme pozerieť, ako na prechod od nestabilného stavu jadra k stabilnému zmenšovaním svojej veľkosti. Pri samovoľnom rozpade jadra vždy sa pozorovali len častice alfa, ktoré sa skladajú z dvoch protónov a z dvoch neutrónov. Nikdy sa nepozorovali samostatné nukleóny alebo ich kombinácie.

Z hmotnostného defektu môžeme vypočítať, akú energiu (kinetickú) odnáša so sebou emitovaná častica, keď predpokladáme, že jadro ostane nehybné. Je to

$$W_k = (m_i - m_f - m) c^2$$

kde  $m_i$  je hmotnosť pôvodného jadra,  $m_f$  - hmotnosť jadra po emitovaní častice s hmotnosťou  $m$ . Pri emitovaní  $\alpha$  častice z rozpadu  ${}^{232}\text{U}$  je uvoľnená energia 5,4 MeV; keby to mal byť protón, musela by sa z vonkajšieho zdroja dodať energia 6,1 MeV a pri jadre  ${}^3_2\text{He}$  9,6 MeV.

Problémom však je, ako sa  $\alpha$  častica dostane von z jadra, keď na to by potrebovala asi 25 MeV energie. Aj keď pri rozpade získavajú  $\alpha$  častice energiu od 4 MeV do 9 MeV, predsa im ešte chýba 16 až 21 MeV, aby sa dostali z potenciálovej jamy hĺbky 25 MeV.

Kým klasická fyzika nie je schopná tento problém riešiť, kvantová mechanika poskytuje jednoduché vysvetlenie, ktoré sa zakladá na týchto predpokladoch:

1.  $\alpha$  častica môže samostatne existovať vo vnútri ťažkého jadra;
2. častica sa neustále pohybuje a je udržiavaná v jadre potenciálovou bariérou, ktorá ho obklopuje;
3. existuje malá, ale nenulová pravdepodobnosť, že častica môže prejsť touto bariérou vtedy, keď sa s ňou zrazí. Pravdepodobnosť rozpadu  $\lambda$  za jednotku času je daná vzťahom

$$\lambda = \gamma P$$

kde  $\nu$  je počet nárazov  $\alpha$  častice na bariéru jadra za jednotku času a  $P$  je pravdepodobnosť prechodu častice potenciálovou bariérou (tunelový jav). Ako už vieme zo stati 9.9.4, taká pravdepodobnosť nie je nulová a dá sa vypočítať, keď poznáme tvar funkcie potenciálovej bariéry.

b) Beta rozpad

Podobne ako pri  $\alpha$  rozpade, aj pri  $\beta$  rozpade mení jadro svoj pomer  $Z/N$ , aby bolo stabilnejšie. Beta rozpad spôsobil mnoho ťažkostí, kým nebol úplne objasnený. Prvá ťažkosť bola, prečo jadro emituje elektróny, keď proti ich existencii v jadre sú silné argumenty. (Rozmery jadra - elektróny by mali mať energiu 21 MeV, spin jadra - celkové spinové číslo jadra napr. deuterónu je 1, ale keby tam mali byť dva protóny a jeden elektrón, nemôže byť spinové číslo celočíselné, magnetický moment - protón má len asi 0,15 % magnetického momentu elektrónu a tak isto aj jadra, interakcia elektrónov s jadrami - keby v jadre boli viazané s protónmi silnou interakciou, potom aj orbitálne elektróny by sa mohli takto viazať s jadrom.) Táto ťažkosť bola odstránená (roku 1932) objavom neutrónu, ktorý sa samovoľne rozkladá na protón a elektrón. Elektrón opúšťa jadro hneď po svojom vzniku.

Druhá ťažkosť bola v zákonoch zachovania energie, hybnosti a momentu hybnosti, ktoré neboli splnené predpokladaným rozpadom  $n \rightarrow p + e^-$ . Kinetická energia elektrónov pri beta rozpade sa mení spojito od 0 po maximálnu hodnotu  $W_k \text{ max}$ , ktorá je charakteristická pre nuklid. Na obr. 10.42 je energetické spektrum elektrónov emitovaných pri beta rozpade  ${}^{210}_{83}\text{Bi}$ , kde  $W_k \text{ max} = 1,17 \text{ MeV}$ . Kinetická energia elektrónov  $W_k$  je daná vzťahom

$$W_k = (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} - m_0 c^2 \quad (10.124)$$

Maximálna energia, ktorú elektrón odnáša z jadra, je

$$E_{\text{max}} = m_0 c^2 + W_k \text{ max} = (m_i - m_f) c^2$$

čo je rovné energetickému ekvivalentu rozdielu hmotnosti pôvodného a konečného jadra po rozpade. Lenže elektrón z energiou  $W_k \text{ max}$  je pri rozpade zriedkavý.

Pauli (roku 1930) navrhol, že pri beta rozpade je emitovaná ešte jedna častica s malou alebo nulovou hmotnosťou a spinovým číslom 1/2, ktorá unáša energiu rovnú rozdielu ( $W_k \text{ max} - W_k$ ) a má takú hybnosť, ktorá vyrovnáva hybnosť elektrónu a hybnosť jadra, ktoré odskakuje pri emitovaní elektrónu. Neskôr sa zistilo, že existujú dva druhy neutrín, ktoré sa vyskytujú pri beta rozpade - neutríno (označované  $\nu$ ) a antineutríno ( $\bar{\nu}$ ). Pri obyčajnom beta rozpade vzniká antineutríno, teda

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (10.125)$$

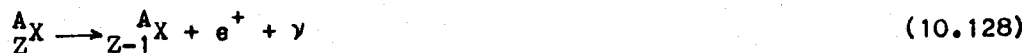
Niektoré jadrá emitujú kladne nabité elektróny (antielektróny) tzv. pozitrony. Pozitron vzniká v jadre rozpadom protónu



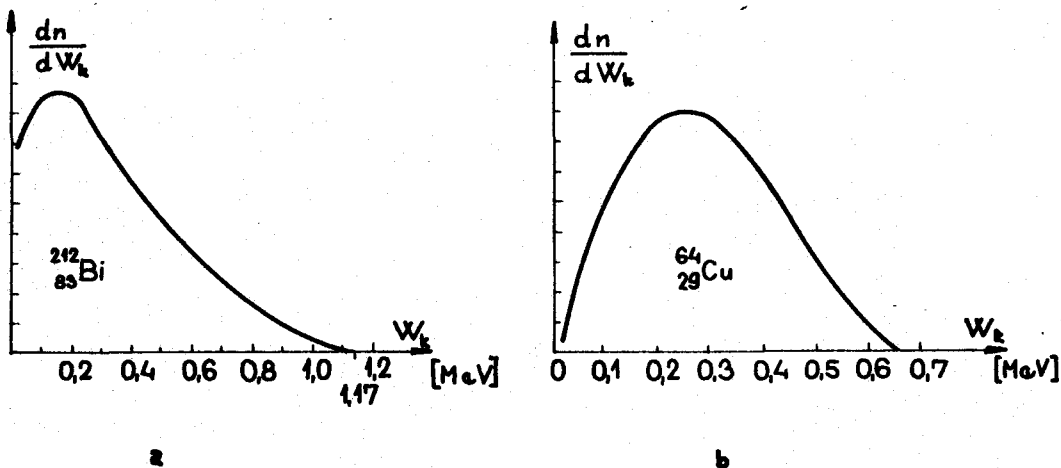
Neutrón sa môže rozpadnúť a premeniť na protón aj mimo jadra, lebo má väčšiu hmotnosť ako protón, ale protón sa môže rozpadom premeniť na neutrón len v jadre. Beta rozpad (záporný) (10.125) môžeme popísať vzťahom



a kladný beta rozpad (emisía pozitronov) vzťahom



Energetické spektrum pozitronov pri rozpade jadra  ${}^{64}_{29}\text{Cu}$  je na obr. 10.42.



Obr. 10.42

Pretože elektrón a pozitron majú opačné náboje, prejaví sa to, ako to aj vidieť z oboch spektier (obr. 10.42), na ich strednej hodnote energie. Elektrón pri emisii z jadra je trochu spomalený kladným nábojom jadra, ktorý ho priťahuje, kým pozitron je zase trochu urýchlený, lebo kladný náboj jadra ho odpudzuje. Stredná hodnota kinetickej energie elektrónov pri beta rozpade je  $\approx 0,3 W_k \text{ max}$  a pozitronov je  $\approx 0,4 W_k \text{ max}$ .

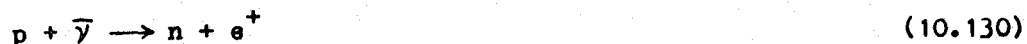
S emisíou pozitronov súvisí tzv. zachytenie elektrónov jadrom z vnútorných podsfér svojho obalu



pri ktorom sa jadrový protón mení na neutrón a emituje sa neutríno. Rozpad (10.129), tzv. zachytenie elektrónov, a rozpad (10.126) - kladný beta roz-

pad, spôsobuje rovnakú premenu jadra. Pri ťažkých prvkoch je väčšia pravdepodobnosť zachytenia elektrónov ako emisia pozitronov, lebo vnútorné podsféry elektrónov sú veľmi blízko k jadrú.

Keď pohltenie elektrónu je ekvivalentné emisii pozitronu, možno predpokladať, že pohltenie antineutrína bude ekvivalentné emisii neutrína. Teda



a túto reakciu nazývame inverzný beta rozpad, ako aj



Tieto reakcie sú dosiaľ jediným známym prípadom interakcie neutrín s látkou, a teda aj metódou overenia ich existencie. Pravdepodobnosť týchto reakcií je veľmi malá, pretože ich hmotnosť je nulová, nemá náboj a nie je elektromagnetickej povahy ako fotón.

Aby bolo neutríno zachytené touto látkou, muselo by prejsť, napr. železom, v pevnej fáze dráhu väčšiu ako 100 svetelných rokov ( $\approx 10^{16}$  m). Táto schopnosť nerušené prechádzať látkou spôsobuje ťažkosť pri overení ich existencie. Preto až roku 1953 sa podarilo dokázať ich existenciu.

### c) Gama rozpad

Vieme, že atómy vyžarujú fotóny, keď prechádzajú z excitovaného stavu do základného. Aj jadrá môžu existovať v rôznych stavoch s určitými energiami (šupkový model jadra) a tiež v excitovaných stavoch, a pri prechode do základného stavu vyžarujú fotóny ( $\gamma$ ), ktorých energia je rovná rozdielu počiatočného a konečného stavu uvažovaného prechodu. Tieto fotóny majú energiu rádovo niekoľko MeV a nazývajú sa lúče (žiarenie) gama. Napr. beta rozpadom prejde nuklid  ${}_{12}^{27}\text{Mg}$  na nuklid  ${}_{12}^{27}\text{Al}^*$ , ktorý je v excitovanom stave (označené hviezdičkou), a ten zase jedným alebo dvoma gama rozpadmi prejde do základného stavu  ${}_{13}^{27}\text{Al}$ . Pri jednom gama rozpade emituje fotón energie 1,015 MeV a pri dvojitom rozpade najprv fotón energie 0,181 MeV a potom ešte fotón energie 0,834 MeV.

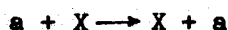
Jadro môže prejsť do základného stavu bez vyžiarenia fotónu tým, že svoju excitačnú energiu odovzdá jednému z okolitých atómových orbitálnych elektrónov (elektrón pohltí jadrový fotón) a ten je potom emitovaný z obalu atómu. Tento jav sa nazýva vnútorná konverzia. Obyčajne polčas gama rozpadu je veľmi malý, avšak niektoré jadrá zotrúvajú dlhšie vo svojich excitovaných stavoch, napr.  ${}_{38}^{87}\text{Sr}^*$  má polčas rozpadu 2,8 h. Excitované jadro s dlhým polčasom rozpadu sa nazýva izomér jadra v základnom stave.

### 10.2.6 J a d r o v é r e a k c i e

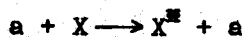
Rutherford pri skúmaní rozptylu častíc objavil vlastne aj prvú jadrovú reakciu. Jadrová reakcia môže nastať len vtedy, keď sa dve jadrové častice natoľko priblížia k sebe, že ich jadrové silové polia sa dostanú do vzájomného silového pôsobenia, teda približne na vzdialenosť  $r \approx 10^{-14}$  m. Keď budeme ostreľovať nejakú terčovú časticu (napr. jadro atómu) veľkým počtom častíc, iba niektoré častice sa dostanú do vzdialenosti  $r \approx 10^{-14}$  m. Takýto dej popisujeme štatisticky a pravdepodobnosť, že ostreľujúca častica sa dostane do uvažovanej vzdialenosti, aby vznikla jadrová reakcia, môžeme udať pomocou účinného prierezu.

Pri vzájomnej interakcii dvoch častíc ostreľujúcej a terčovej X môže dôjsť k niektorým z týchto typov procesov (či už rozptylu alebo reakcie).

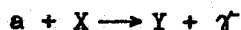
a) Keď sa zmenia len hybnosti častíc, ich smery a ich veľkosti sa nemenia, vzniká elastický rozptyl:



b) Keď sa zmenia veľkosti hybnosti a aj energie častíc, presnejšie, keď vznikajú nové častice, alebo sa mení vnútorný stav častice, hovoríme o neelastickom rozptyle:



c) Keď sa ostreľujúca častica "a" zachytí na terčovej častici, hovoríme o zachytení:



d) Keď sa ostreľujúca častica "a" zachytí na terčovej častici a vyžiari sa iná častica, hovoríme o podvojnnej jadrovej reakcii (podvojný rozklad):



e) Keď sa ostreľujúca častica "a" zachytí na terčovej častici a vyžiaria sa dve alebo viac častíc, hovoríme o zložitejšej jadrovej reakcii (zložitejší rozklad):



Základná veličina, ktorá charakterizuje pravdepodobnosť vzniku niektorého z uvedených procesov, je účinný prierez. Môžeme si ho predstaviť ako plochu, ktorá zobrazuje terčovú časticu X. Každá ostreľujúca častica, ktorá dopadá



na túto plochu, dostane sa do vzájomnej interakcie s terčovou časticou. Čím je teda väčší účinný prierez, tým väčšia je pravdepodobnosť interakcie. Interakčný účinný prierez častice terča závisí od povahy uvažovaného procesu a od energie ostrelujúcej častice. Môže byť väčší alebo menší ako geometrický prierez terčovej častice. Potom hovoríme o účinnom priereze rozptylu -  $\sigma_r$ , zachytenia  $\sigma_a$ , reakcie -  $\sigma_f$ .

Predpokladajme, že máme doštičku z nejakého materiálu, ktorá má plochu  $A$  a hrúbku  $dx$ . Keď daný materiál má objemovú koncentráciu atómov  $n$ , potom v doštičke je  $nAx$  terčových častíc, teda jadier atómov. Každé jadro má pre uvažovaný proces konkrétny interakčný účinný prierez  $\sigma$  a úhrnný účinný prierez všetkých jadier v doštičke je  $nA\sigma dx$ .  $N$  nech je objemová koncentrácia ostrelujúcich častíc vo zväzku, ktorý dopadá na doštičku. Počet častíc, ktoré podliehajú v doštičke vzájomnej interakcii, nech je  $dN$ . Po výstupe z doštičky hrúbky  $dx$  klesne koncentrácia ostrelujúcich častíc na hodnotu  $N - dN$ . So zväčšovaním hrúbky terčovej doštičky bude klesať koncentrácia ostrelujúcich častíc, takže môžeme písať:

$$-\frac{dN}{N} = \frac{nA\sigma dx}{A} = n\sigma dx \quad (10.132)$$

Relatívny úbytok ostrelujúcich častíc -  $dN/N$  je teda úmerný koncentrácii terčových častíc, účinnému prierezu a hrúbke terča. Po integrácii vzťahu (10.132) dostaneme:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\sigma n \int_0^x dx \implies N = N_0 \exp(-n\sigma x) \quad (10.133)$$

Počet častíc, ktoré ešte nepodľahli interakcii v terči, exponenciálne klesá s rastúcou hrúbkou  $x$ .

Keď uvažovaný proces je absorpcia, používa sa veličina  $n\sigma = \kappa$  a nazýva sa absorpčný koeficient materiálu terča. Ďalšia veličina, ktorá charakterizuje proces rozptylu alebo reakcie, je stredná voľná dráha. Je to stredná hodnota vzdialenosti, ktorú môže častica uraziť v materiáli skôr, než podľahne vzájomnej interakcii s jadrom terča. Je určená vzťahom

$$l = 1/n\sigma \quad (10.134)$$

Účinné prierezy pre väčšinu jadrových reakcií závisia od energie ostrelujúcich častíc a pri niektorých energiách majú ostré maximá, ktoré sa nazývajú rezonancie. Je to analógia s akustickou alebo elektrickou rezonanciou. Jadrová reakcia, napr. absorpcia neutrónov jadrom, vznikne s väčšou pravdepodobnosťou vtedy, keď je energia ostrelujúcej častice rovnaká, ako je hodnota tzv. excitovaných energetických hladín. Šírka maxima rezonancie  $\Gamma$  odpo-

vedá šírke hladiny excitovaného stavu. Strednú dobu života takého excitovaného stavu jadra možno určiť zo vzťahu neurčitosti  $\Delta W \Delta t \geq \hbar/2$ . Keď šírka  $\Gamma$  odpovedá neurčitosti  $\Delta W$ ,  $\Delta t$  odpovedá strednej dobe života  $\tau$ . Teda

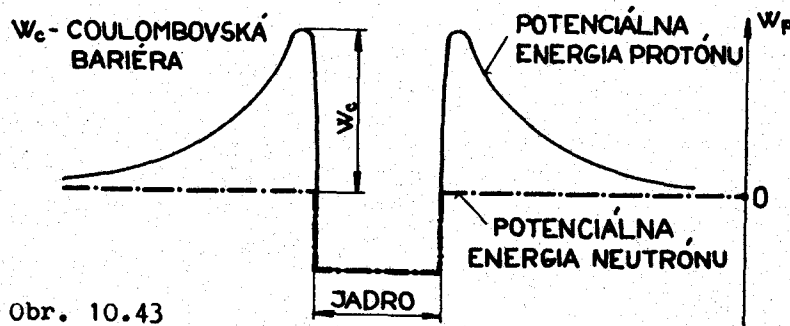
$$\tau \geq \hbar/2\Gamma$$

(10.135)

Jadro je obklopené elektrostatickou potenciálovou bariérou  $W_c$ , ktorá kladie odpor elektrickým nabitým časticiam, keď sa chcú dostať do vnútra alebo von z jadra. Neutrónom, ktoré sú bez elektrického náboja, táto bariéra neprekáža a dnu sa môžu dostať tak, ako keď gúľajúca sa guľka spadne do jamky. Pri emisii neutrónu z jadra potrebuje prekonať potenciálovú bariéru označenú bodkočiarkovane. Keď sa chce protón dostať dnu do jadra, musí mať energiu najmenej  $W_c$  podľa klasickej fyziky. Avšak aj protón s menšou energiou ako  $W_c$  sa môže tzv. tunelovým javom dostať do jadra, ale pravdepodobnosť toho javu je malá. Výška coulombovskej bariéry  $W_c$  predstavuje efektívnu prahovú energiu pre jadrové reakcie, ktoré sú vyvolané protónmi, deuterónmi a alfa časticami. Pre neutróny neexistuje žiadna taká prahová energia. Účinné prierezy procesov, pri ktorých je zachytený protón jadrom, bude preto stúpať so zvyšujúcou sa energiou protónov. Pri neutrónoch zase naopak bude klesať preto, že čím má neutrón väčšiu energiu, tým kratšie zotrúva pri jadre a pravdepodobnosť jeho zachytenia jadrom teda klesá.

Coulombovská bariéra bráni aj emisii nabitých častíc z jadra. Preto je aj väčšia pravdepodobnosť výskytu takých reakcií, pri ktorých vhodne excitované jadro emituje skôr neutrón ako protón.

Ťažké jadrá ( $A \gtrsim 230$ ) sa môžu štiepiť samovoľne alebo získaním nejakej excitačnej energie na dve ľahšie jadrá. Excitačnú energiu môžu získať ostrelovaním fotónmi alebo protónmi, alebo absorpciou neutrónov. Pomocou kvapkového modelu vysvetľujeme štiepenie jadra takto: Jadro si predstavme ako guľku kvapaliny, ktorá môže v dôsledku vybudenia rôzne kmitať. Napr. tak, že sa pretiahne do elipsoidu, potom zase prechádza do gule, ďalej prejde do tvaru plochého elipsoidu, gule, pretiahnutého elipsoidu, gule atď. Povrchové napätie a zotrvačnosť molekúl kvapaliny spôsobuje takéto kmitanie. Podobná situácia je aj pri jadre. Keď je deformácia malá, jadro v excitovanom stave môže



Obr. 10.43

kmitať dovedy, kým nestratí svoju excitačnú energiu gama rozpadom. Pri dostatočne silnej deformácii povrchové napätie už nestačí vrátiť späť k sebe jednotlivé časti jadra a jadro sa štiepi na dve časti.

### 10.2.7 Energetická bilancia jadrových reakcií

Pri jadrových reakciách platí niekoľko fyzikálnych princípov vyjadrených vo forme zákonov zachovania (napr. pre podvojný rozklad).

1. Zákon zachovania počtu nukleónov. Počet nukleónov pred reakciou je taký istý ako po reakcii:

$$A_a + A_x = A_y + A_b$$

2. Zákon zachovania elektrického náboja:

$$Z_a + Z_x = Z_y + Z_b$$

3. Zákon zachovania hybnosti:

$$\vec{p}_a + \vec{p}_x = \vec{p}_y + \vec{p}_b$$

4. Zákon zachovania energie v relativistickom ponímaní. Úhrnná energia nukleónov, ktoré vstupujú do reakcie (vrátane pokojovej energie) sa musí zachovať:

$$m_a c^2 + m_x c^2 = m_y c^2 + m_b c^2$$

Pre reakciu sa definuje reakčná energia ako rozdiel pokojových energií častíc vstupujúcich do reakcie a častíc z reakcie vystupujúcich

$$W_Q = (m_{oa} + m_{ox}) c^2 - (m_{oy} + m_{ob}) c^2$$

Keď je  $W_Q < 0$ , hovoríme, že reakcia je endotermická, keď  $W_Q > 0$ , hovoríme, že reakcia je exotermická. Do reakčnej energie je zahrnutá napr. aj energia gama fotónov (kvánt), ktoré emitujú do okolitého priestoru a neprispievajú k teplu, ktoré vzniká pri reakcii. Využívanie tepla pri exoenergetických reakciách je základom využitia v jadrovej energetike.

Aby sa dala jadrová reakcia využiť na uvoľnenie energie, ktorú by mohol človek využiť, musí byť taký proces, pri ktorom jedna reakcia podmieňuje vznik druhej. Hovoríme tak o reťazovej reakcii. Neutróny vyvolajú reakciu štiepenia jadier, pri ktorej sa emitujú ďalšie neutróny, ktoré vyvolajú ďalšie reakcie atď. Takýto proces môže byť:

- a) podkritický, keď jadrové reakcie produkujú tak málo neutrónov, že tieto nevyvolajú ani toľko reakcií, z ktorých vznikli, reťazová reakcia sa spomaľuje až zanikne;
- b) kritický, keď jadrové reakcie produkujú práve toľko neutrónov, aby vyvolali taký istý počet reakcií - reťazová reakcia sa udržiava na rovnakej úrovni;
- c) nadkritický, keď jadrové reakcie produkujú toľko neutrónov, ktoré dokážu vyvolať ešte väčší počet reakcií, ako z ktorých vznikli - reťazová reakcia narastá, až nastane výbuch.

Prvok na štiepenie je napr. prírodný urán, ktorý obsahuje 0,7 % izotopu  $^{235}_{92}\text{U}$ , ktorý je vhodný na štiepenie. Prírodný urán obsahuje však väčšie množstvo izotopu  $^{238}_{92}\text{U}$ , ktorý zachytí rýchly neutrón a vyžiari iba gama kvánt a neštiepi sa. Má väčší účinný prierez pre rýchle neutróny a má len malý účinný prierez na zachytenie pomalých neutrónov. Rýchle neutróny, ktoré vznikajú pri štiepnej reakcii, treba čo najskôr spomaliť, aby sa znížila pravdepodobnosť ich zachytenia izotopom  $^{238}\text{U}$  a zvýšila sa naopak pravdepodobnosť ich zachytenia izotopom  $^{235}\text{U}$ , ktorý sa štiepi.

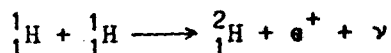
V jadrovom reaktore, ktorý využíva jadrové štiepenie na výrobu energie, sa to robí pomocou moderátorov. Je to látka, ktorá pri zrážkach pohltí energiu rýchlych neutrónov a pritom ich nezachytáva. Ako moderátor slúži tzv. ťažká voda (molekula vody obsahuje namiesto atómov vodíka atómy deutéria  $^2_1\text{H}$ ), ktorá má malý účinný prierez na zachytenie neutrónov. Atóm vodíka má veľký účinný prierez, dobre zachytáva neutróny  $^1_1\text{H} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^2_1\text{H} + \gamma$  a vzniká pritom deuterón. Preto obyčajná voda je ako moderátor nevhodná. Okrem ťažkej vody možno použiť aj uhlík vo forme grafitu, ktorý má tiež malý účinný prierez na zachytenie neutrónov.

Skutočná činnosť jadrového reaktora začína vtedy, keď je štiepny materiál v prítomnosti moderátora. Akýkoľvek, aj náhodný neutrón, ktorý dopadne na jadro  $^{235}_{92}\text{U}$ , spôsobuje štiepenie jadra, pri ktorom sa uvoľnia dva alebo tri ďalšie neutróny. Tieto neutróny sa spomalia pri zrážkach s jadrami moderátora z niekoľkých MeV na energiu menšiu ako 1 MeV, a tak vyvolajú ďalšiu reakciu. Časový interval medzi vznikom neutrónu a jeho neskorším pohltením je menší ako 1 ms. Proces reťazovej reakcie musí byť kritický a musí sa teda udržiavať na rovnakom výkone. Používajú sa na to tyče vyrobené z kadmia alebo bóru, ktorý dokáže absorbovať pomalé neutróny. Zasúvaním týchto tyčí do priestoru jadrovej reakcie alebo vysúvaním z priestoru reakcie môžeme regulovať výkon reťazovej reakcie. Teplo, ktoré vzniká v jadrovom reaktore, sa odvádza vhodným kvapalným alebo plynným chladičom, ktorý cirkuluje vnútrajškom reaktora v uzavretom primárnom okruhu. Ďalší sekundárny okruh už môže byť vodná para, ktorá sa ohrieva primárnym okruhom. Ďalší postup je už taký istý ako pri klasických tepelných elektrárnach. Iný izotop, ktorý je vhodný ako štiepny materiál do jadrových reaktorov, je  $^{239}_{94}\text{Pu}$ , ktorý môžeme vytvoriť v laboratórnych podmienkach ostreľovaním izotopu  $^{238}_{92}\text{U}$  neutrónmi. Keď  $^{238}_{92}\text{U}$  pohl-

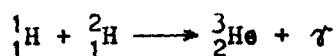
tí neutrón, vznikne izotop  $^{239}_{92}\text{U}$ , ktorý sa beta rozpadom (polčas rozpadu  $T_{1/2} = 23$  min) štípe na  $^{239}_{93}\text{Np}$ . Ten sa ďalej štípe beta rozpadom na izotop  $^{239}_{94}\text{Pu}$  ( $T_{1/2} = 2,3$  dňa). Plutónium prechádza na izotop  $^{235}_{92}\text{U}$  alfa rozpadom ( $T_{1/2} = 24\ 000$  rokov).

Na hviezdach vznikajú také exotermické reakcie, pri ktorých sa vodíkové jadrá zlučujú na jadro hélia. Takýto proces vo vesmíre sa môže uskutočniť dvoma spôsobmi: Jeden z nich je protón - protónový cyklus a druhý uhlíkový cyklus.

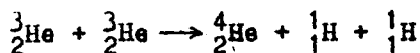
Protón - protónový cyklus začína vznikom deuterónu priamou kombináciou dvoch protónov, pri ktorej je emitovaný pozitron a neutríno:



Deuterón sa môže spojiť s protónom a vzniká jadro  ${}^3_2\text{He}$ :

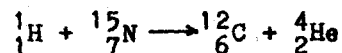
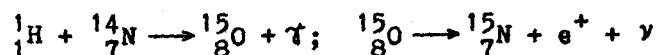
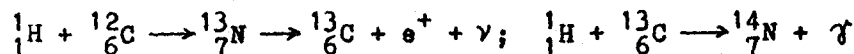


Nakoniec reagujú dve jadrá  ${}^3_2\text{He}$  a vzniká jadro  ${}^4_2\text{He}$  plus dva protóny:



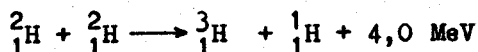
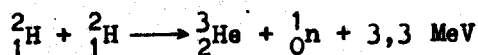
Energia, ktorá sa uvoľní pri tomto cykle, je  $24,7 \text{ MeV} = (\Delta m)c^2$ , kde  $\Delta m$  je hmotnostný rozdiel medzi hmotnosťou štyroch protónov a hmotnosťou častice alfa a dvoch pozitronov.

Uhlíkový cyklus prebieha takto:

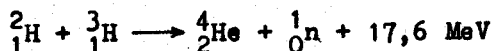


Výsledkom je opäť vznik častice alfa a dvoch pozitronov zo štyroch protónov a uvoľní sa pritom energia  $24,7 \text{ MeV}$ . Izotop  ${}^{12}_6\text{C}$  pôsobí v procese ako katalyzátor, lebo sa opäť objaví na jeho konci. Aby takéto procesy vznikli; musia byť extrémne vysoká teplota a tlak. Uhlíkový cyklus je všeobecne účinnejší pri vyššej teplote a zase protón - protónový cyklus pri nižšej teplote. Na Slnku (kde sa teplota odhaduje na  $2 \cdot 10^6 \text{ K}$ ) je najpravdepodobnejší protón - protónový cyklus. Využiť na Zemi energiu, uvoľnenú pri zlučovaní ľahkých jadier, je úsilím človeka. Takáto energia sa nazýva termojadrová. Obe dva spomínané cykly, či už protón - protónový alebo uhlíkový, neprichádzajú prakticky do úvahy, lebo jednotlivé štádia vyžadujú dlhú dobu. Pretože na Zemi je k dispozícii deuterón, možno využiť také reakcie, pri ktorých

dochádza k priamej kombinácii dvoch deuterónov dvoma spôsobmi:



a priamou kombináciou deuterónu a tritónu na alfa časticu



Využitie týchto reakcií predpokladá lacný zdroj deutéria, ktorý poskytujú oceány a moria, ktoré obsahujú 0,015 % deutéria, t.j. celkom asi  $10^{18}$  kg. Aby sme mohli dve jadrá  ${}^2_1\text{H}$  a  ${}^3_1\text{H}$  priblížiť k sebe, musia mať dostatočnú energiu, aby mohli prekonať vzájomné elektrostatické odpudzovanie. Dosahuje sa to úplne ionizovaným plynom (plazmou), ktorý má vysokú teplotu a obsahuje deutérium alebo zmes deutéria a trícia. Problém je udržať takúto plazmu v nejakej nádobe.

Využíva sa magnetické pole, ktoré udržiava plazmu v priestore bez toho, aby sa dotýkala nejakého materiálu, ktorý by sa mohol roztaviť a vniešť nečistoty do plazmy. Aj keď konštrukcia termojadrových reaktorov kladie väčšie praktické problémy ako pri štiepnych reaktoroch, nakoniec sa termojadrové reakcie podarí riadiť tak, aby ich mohol človek využiť na výrobu energie vhodnej na použitie.

#### 10.2.8 Š t á t i s t i c k ý c h a r a k t e r r á d i o a k t í v n e h o r o z p a d u

Rádioaktívny rozpad jednotlivých jadier atómov má štatistický charakter, preto sa budú namerané hodnoty veličín od ich stredných hodnôt líšiť. Rozpadový zákon (10.119) a (10.122) nevyšetruje rozpad každého jadra osobitne, ale iba ako súbor častíc. Pri experimentálnom určení závislosti počtu ešte nerozpadnutých jadier atómov od času sa vždy dopustíme chyby. Stredná hodnota veličiny (napr.  $N$ ) je určená tým presnejšie, čím viac rozpadov zaznamenáme. Lenže  $N$  závisí od času, preto dobu merania  $\Delta t$  môžeme ľubovoľne predlžovať. Sú to dve protichodné požiadavky, ktoré súčasne nemožno splniť (aby  $N \rightarrow \infty$  a zároveň  $\Delta t \rightarrow 0$ ).

Keď je doba merania  $\Delta t$  oveľa menšia ako je polčas rozpadu  $T$  ( $\Delta t \ll T$ ), potom vzťah (10.118) môžeme napísať v približnom tvare

$$\Delta N = - \lambda N \Delta t \tag{10.136}$$

Keď použijeme vzťah (10.121) a (10.122), dostaneme:

$$\Delta N = - A \Delta t = A_0 \exp(-\lambda t) \Delta t \quad (10.137)$$

alebo pre počet rozpadnutých jadier (rádioaktívnych premien)

$$\Delta n = A \Delta t = A_0 \exp(-\lambda t) \Delta t = \lambda N_0 \exp(-\lambda t) \Delta t \quad (10.138)$$

$N_0$  je počet nerozpadnutých jadier atómov v čase  $t = 0$ .

Pravdepodobnosť  $p$ , že sa určité jadro atómu rozpadne počas doby  $\Delta t$ , je daná vzťahom

$$p = - \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{\Delta n}{N_0} = \lambda \Delta t \exp(-\lambda t) \quad (10.139)$$

a že sa určitý atóm počas doby  $\Delta t$  nerozpadne je  $(1-p)$ .

Aby sme sa dozvedeli, koľko jadier sa rozpadne, musíme to nejakým spôsobom zaregistrovať. Rozpad jadra je sprevádzaný emisiou fotónu, elektrónu alebo  $\alpha$  častice. Registrácia týchto produktov rozpadu nám dáva informáciu o počte rozpadnutých jadier. Uvažujme ideálny prípad, že každý rozpad jadra dokážeme zaregistrovať. Potom pravdepodobnosť, že počas doby  $\Delta t$  nameriame (zaregistrujeme)  $K$  rozpadov jadier, je podľa teórie pravdepodobnosti daná vzťahom

$$P_{(K)} = \frac{N_0!}{(N_0 - K)! K!} p^K (1-p)^{(N_0 - K)} = \binom{N_0}{K} p^K (1-p)^{(N_0 - K)} \quad (10.140)$$

Pravdepodobnosť, že sa počas doby  $\Delta t$  nerozpadne ani jedno jadro atómu ( $K = 0$ ), je

$$P_{(0)} = 1 \cdot p^0 \cdot (1-p)^{N_0} = (1-p)^{N_0}$$

Keď takto postupne vyjadríme pravdepodobnosti pre  $K = 0$  až pre  $K = N_0$  a sčítame ich, dostaneme istotu. To znamená, že

$$\sum_{K=0}^{N_0} P_{(K)} = 1 \quad (10.141)$$

teda

$$1 = \binom{N_0}{0} p^0 (1-p)^{N_0} + \binom{N_0}{1} p^1 (1-p)^{N_0-1} + \dots + \binom{N_0}{N_0} p^{N_0} (1-p)^0 \quad (10.142)$$

Vzťah (10.142) sa nazýva binomické rozdelenie pravdepodobnosti. Stredná hodnota počtu rozpadov jadier počas  $\Delta t$  je

$$\bar{K} = \sum_{K=0}^{N_0} K P_{(K)} \quad (10.143)$$

Veličina, ktorá najvhodnejšie charakterizuje rozptyl nameraných hodnôt od strednej hodnoty, je stredná kvadratická odchýlka (chyba)  $\delta$ . Štvorec kvadratickej odchýlky je definovaný vzťahom  $\delta^2 = (K - \bar{K})^2$ . Použitím vzťahu (10.143) a predchádzajúcich vzťahov dostaneme  $\delta^2 = (1 - p) \bar{K}$ . Pre veľmi malé  $\Delta t$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) je  $p$  tiež veľmi malé ( $p \rightarrow 0$ ), takže  $\delta^2 = \bar{K}$ . Stredná kvadratická odchýlka potom je

$$\delta \approx \sqrt{\bar{K}} \quad (10.144)$$

Okrem strednej kvadratickej odchýlky je ešte definovaná aj relatívna stredná kvadratická odchýlka vzťahom

$$\varrho = \frac{\delta}{\bar{K}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}}} \quad (10.145)$$

S binomickým rozdelením pravdepodobnosti sú ťažkosti pri vyčísľovaní, preto pri dostatočne veľkom  $N_0$  ( $N_0 \rightarrow \infty$ ) a dostatočne malom  $\Delta t$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) vzťah (10.140) prechádza v limitnom prípade na vzťah

$$P(k) = \frac{(\bar{K})^k \exp(-\bar{K})}{k!} \quad (10.146)$$

ktorý je spojitou funkciou a nazýva sa Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti. V tomto prípade je  $\bar{K}$  nahradené veličinou  $\bar{k}$ , ktorá môže nadobúdať akékoľvek hodnoty z oboru racionálnych čísiel, a  $K$  je nahradené spojitou funkciou  $k$ .

Pri registrácii nie všetky častice (či už fotóny, elektróny alebo  $\alpha$  častice) dokážeme zaznamenať. Zariadenie (napr. G - M počítač), ktoré registruje častice, nerozlíši dve častice, ktoré idú za sebou v takom časovom odstupe, ktorý je menší ako tzv. mŕtvy čas. Táto skutočnosť pozmeňuje funkciu rozdelenia pravdepodobnosti.

Doteraz sme uvažovali jednoduchý rozpad, keď v rádioaktívnej látke sú atómy len jedného druhu, ktoré sa po rozpade už ďalej nerozpadávajú. V prírode sú omnoho častejšie zložené rozpady, ktoré môžu byť buď paralelné, alebo sériové (postupné), prípadne kombinácie všetkých typov rozpadov.

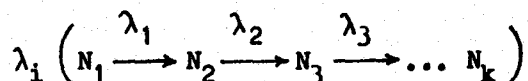


Pri paralelnom rozpade (keď v látke je viacero druhov atómov, ktoré sa premieňajú jednoduchým rozpadom, teda produkt je už nestabilný) celkový počet ešte nerozpadnutých jadier atómov je

$$N = N_{01} e^{-\lambda_1 t} + N_{02} e^{-\lambda_2 t} + \dots = \sum_{i=1}^k N_{0i} e^{-\lambda_i t} \quad (10.147)$$

kde  $N_{01}, N_{02}, \dots$  je počet jadier jednotlivých druhov pri  $t = 0$  a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  sú ich príslušné konštanty.

Pri postupnom rozpade (keď jadro atómu sa postupne rozpadá - produkt môže byť nestabilný, napr. pri prirodzených rozpadových radoch vznikajú postupnosti nestabilných jadier, ktoré vznikajú jedno z druhého) aktivity v určitej čase  $t$  určíme na základe nasledujúcej úvahy:  $i$ -tý člen rozpadovej postupnosti obsahuje  $N_i$  aktívnych jadier s rozpadovými konštantami



Časová zmena  $N_i$  je daná vzťahom

$$\frac{d N_i}{dt} = \lambda_{i-1} N_{i-1} - \lambda_i N_i \quad (10.148)$$

kde prvý člen je prírastok počtu druhotných jadier a druhý člen predstavuje úbytok prvotných ( $i$ -tých) jadier. Rovnica (10.148) predstavuje systém diferenciálnych rovníc, pre ktorý predpokladáme toto riešenie:

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11} e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 &= C_{21} e^{-\lambda_1 t} + C_{22} e^{-\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ N_k &= C_{k1} e^{-\lambda_1 t} + C_{k2} e^{-\lambda_2 t} + \dots + C_{kk} e^{-\lambda_k t} \end{aligned} \quad (10.149)$$

Na základe tohto predpokladu dostaneme rekurentný vzorec pre  $i \neq j$

$$C_{ij} = C_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (10.150)$$

a pre  $i=j$  dostaneme koeficienty z okrajových podmienok pre  $t=0$

$$N_{0i} = C_{i1} + C_{i2} + \dots + C_{ii} \quad (10.151)$$

Napr. pre  $k = 2$  z rovníc (10.149) je

$$N_1 = C_{11} \exp(-\lambda_1 t) \quad \text{a} \quad N_2 = C_{21} \exp(-\lambda_1 t) + C_{22} \exp(-\lambda_2 t)$$

z rekurentného vzťahu (10.150) dostaneme

$$C_{21} = C_{11} \lambda_1 / (\lambda_2 - \lambda_1)$$

a z podmienky pre  $t = 0$  (10.151), keď druhotné jadrá ešte neexistujú, je

$$N_{02} = C_{21} + C_{22} = 0$$

a z toho

$$C_{22} = -C_{21}$$

Vieme, že  $C_{11} = N_{01}$ . Teda riešenie je

$$N_2 = N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right)$$

Aktivita v čase  $t$  je daná vzťahom  $A(t) = N_1 \lambda_1 + N_2 \lambda_2$ , teda

$$A(t) = N_{01} \lambda_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ 1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} \right] \quad (10.152)$$

kde  $N_{01} \lambda_1 = A_{01}$  je aktivita v čase  $t = 0$ .

Postupný rozpad sa využíva napr. aj pri určovaní geologických dôb (polčas rozpadu prvotného jadra v tóriovom rozpadovom rade  $^{232}\text{Th}$  je  $1,39 \cdot 10^{10}$  rokov, vek Zeme je touto metódou stanovený na  $4,6 \cdot 10^9$  rokov). Pri určovaní archeologických dôb (približne do 30 000 rokov) organických materiálov sa využíva izotop  $^{14}\text{C}$  ( $T = 5730$  rokov).

#### 10.2.9 Prechod ionizujúceho žiarenia prostredím. Radiačná ochrana. Dozimetria

Ionizujúce žiarenie akéhokoľvek druhu prenáša energiu, ktorú pri prechode prostredím mu ju určitým spôsobom odovzdáva. Hodnota absorbovanej energie môže byť preto mierou množstva ionizujúceho žiarenia v danom prostredí. Fyzikálna veličina, ktorá to charakterizuje, sa nazýva dávka  $D$  a je definovaná ako podiel absorbovanej energie  $\Delta W$  a hmotnosti  $\Delta m$ , v ktorej bola

táto energia absorbovaná. Teda  $D = \Delta W / \Delta m$ . Jednotkou absorbovanej dávky je gray (značka Gy). Gray je dávka absorbovaná telesom s hmotnosťou 1 kilogramu, zodpovedajúca absorbovanej energii ionizujúceho žiarenia, ktorá sa rovná 1 joulu.

Častica žiarenia prechodom prostredie ionizuje, preto aj pomocou tohto účinku možno merať množstvo žiarenia. Fyzikálna veličina, ktorá to charakterizuje, sa nazýva ožiarenie (expozícia)  $X = \Delta Q / \Delta m$ . Jednotkou je coulomb na kilogram (značka  $C \text{ kg}^{-1}$ ). Coulomb na kilogram je ožiarenie, pri ktorom stredná hodnota súčtu nábojov iónov jedného znamienka ( $\Delta Q$ ), uvoľnených za určených podmienok ( $t = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $p = 101325 \text{ Pa}$ ) fotónmi v objemovom elemente suchého vzduchu s hmotnosťou 1 kilogramu ( $\Delta m$ ), je 1 coulomb. Používanie tejto jednotky sa postupne zanecháva, preto nemá ani špeciálny názov. Po dôslednom zavedení SI jednotiek bude nahradená jednotkou dávky.

Áká je interakcia žiarenia s prostredím, závisí nielen od druhu prostredia (látky), ale aj od druhu ionizujúceho žiarenia. Stručne si popíšeme javy, ktoré vznikajú pri prechode  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  žiarenia prostredím.

Alfa žiarenie:  $\alpha$  častica, ktorá sa pohybuje prostredím, postupne stráca svoju energiu tým, že ju odovzdáva okolitým atómom. Silovo pôsobí na elektróny v obale atómu tak, že ich buď vytrháva z nich a vznikajú ióny, alebo sa elektróny dostávajú na vyššie energetické hladiny, z ktorých sa späť dostávajú vyžiarením fotónu. Pri tejto interakcii  $\alpha$  častica postupuje prostredím prakticky priamočiaro. Keď sa ale  $\alpha$  častica dostane blízko k jadrú, navzájom na seba pôsobia tak, že  $\alpha$  častica sa vychýli z pôvodného smeru a atóm sa dostane do pohybu, ktorý závisí od druhu prostredia a od hmotnosti atómu. Vzniká pružná zrážka, pri ktorej vznikajú aj elektromagnetické vlny, ak zmena rýchlosti nabitej alfa častice je väčšia. Takéto žiarenie, ako už vieme, sa nazýva brzdné žiarenie. Pravdepodobnosť odovzdávania energie pružnou zrážkou, a tým aj vychyľovanie častice je veľmi malá, a okrem toho úbytok energie  $\alpha$  častice je v porovnaní s úbytkom pri odovzdaní energie elektrónom v obale atómu zanedbateľne malý.

Pri prechode  $\alpha$  častic pevnými látkami sa menia aj ich niektoré vlastnosti, ako napr. elektrická vodivosť, zmena štruktúry kryštalickej látky a iné. V plynných látkach strácajú častice svoju energiu väčšinou ionizáciou. Zrážkami postupne klesá ich rýchlosť a pri energiách menších ako 1 MeV je už dost veľká pravdepodobnosť, že  $\alpha$  častica si podrží jeden elektrón, a tak vzniká helión, ktorý pri niektorej ďalšej interakcii si priberie druhý elektrón a vzniká neutrálny atóm hélia. Atóm hélia ďalšími zrážkami stráca kinetickú energiu dovtedy, kým sa rýchlosť hélia nevyrovná rýchlosti atómu hélia, ktorú má pri tej istej teplote, ako je teplota prostredia. Neutrálny atóm hélia už nemá také ionizačné účinky ako helión jeden alebo dvakrát ionizovaný, preto ubehnutú dráhu v prostredí môžeme prakticky určiť len do bodu, kedy sa  $\alpha$  častica stane neutrálnym atómom hélia. Dĺžku ionizačnej dráhy častice v da-

nom prostredí nazývame jej dobehom v tomto prostredí. Pre všetky monoenergetické častice je dobeh takmer rovnaký, okrem štatistického rozptylu okolo tzv. stredného dobehu, čo je extrém funkcie  $dI/dr$  pre dané  $r = R_g$ , alebo teda je to hodnota pre dané  $r$ , kde má funkciu  $I(r)$  inflexný bod.  $I$  je hustota častíc a je  $I = N v$ , kde  $N$  je objemová koncentrácia a  $v$  rýchlosť častíc,  $r$  je hrúbka absorpčnej vrstvy prostredia.

Geiger a Nuttall na základe experimentálnych výsledkov stanovili empirický vzťah medzi rozpadovou konštantou  $\lambda$  a stredným dobehom  $R_g$  určitého žiariča:

$$\ln \lambda = A + B \ln R_g \quad (10.153)$$

kde  $B$  je konštanta a  $A$  je konštanta pre určitý rádioaktívny rad, do ktorého daný žiarič patrí.

Medzi stredným dobehom a energiou  $\alpha$  častice platí empirický vzťah

$$R_g = k W^{3/2} \quad (10.154)$$

kde  $k$  je konštanta pre daný žiarič.

Dobeh  $\alpha$  častíc v pevných a kvapalných látkach je menší ako 0,1 mm, preto sa ich interakcia s prostredím študuje obvykle v plynach, najčastejšie vo vzduchu. Keď na vytvorenie páru iónov vo vzduchu je potrebná energia 32,5 eV, častica vytvorí na svojej dráhe až  $10^5$  iónových párov. Ich dobeh vo vzduchu je asi (3 ÷ 6) cm.

Beta žiarenie: Podobne ako  $\alpha$  častica, aj elektróny, prípadne pozitrony, čo je beta žiarenie, spôsobujú prechodom cez prostredie jeho ionizáciu, alebo excitáciu elektrónov v obale atómov prostredia. Častice beta žiarenia majú vzhľadom na  $\alpha$  časticu malú hmotnosť a pri rovnakých energiách majú potom omnoho väčšiu rýchlosť. Treba ich brať ako relativistické častice. Pri zrážkach s jadrami sú oveľa viac vychyľované zo svojho pôvodného smeru ako častice. Brzdné žiarenie beta častíc s maximálnou energiou asi 1 MeV je preto podstatne prenikavejšie (fotóny majú väčšiu energiu) ako pri alfa časticách, prípadne pri röntgenovom žiarení, ktoré je vyvolané elektrónmi asi  $10^4$  eV. Aj ich dobeh je omnoho väčší, lebo úbytok energie ionizáciou alebo excitáciou v závislosti od dráhy je menší, pretože beta častica má väčšiu rýchlosť v porovnaní s  $\alpha$  časticou, a teda menšiu pravdepodobnosť interakcie s atómami prostredia. Pri nižších energiách beta častíc prevláda úbytok kinetickej energie ionizáciou, prípadne excitáciou, pri vyšších zase straty energie spôsobené brzdým žiarením. Keď označíme  $dW/dx$  ako mernú stratu energie, čo je zmena energie pripadajúca na jednotku dĺžky dráhy beta častice, potom pre podiel mernej straty energie žiarením k mernej strate energie ionizáciou, prípadne excitáciou platí približný vzťah

$$\frac{(dW/dx)_z}{(dW/dx)_i} \approx \frac{W Z}{1600 m_0 c^2} \quad (10.155)$$

kde  $W$  je energia beta častice,  $Z$  - protónové číslo atómov prostredia,  $m_0$  - pokojová hmotnosť elektrónu a  $c$  je rýchlosť svetla vo vákuu. Keď je podiel merných strát rovný jednej, takú hodnotu energie beta častice nazývame kritickou a platí

$$W_{kr} \approx (1600 m_0 c^2) / Z$$

napr. pre vzduch a vodu je  $W_{kr} = 150$  MeV, pre hliník 60 MeV a pre olovo 10 MeV.

Pri  $\alpha$  žiarení je dobeh pre všetky častice takmer rovnaký okrem štatistického rozptylu okolo stredného dobehu, alebo pri beta časticiach v dôsledku veľkého rozptylu na jadrách aj pre monoenergetické žiarenie (z urýchľovačov) nie je dobeh beta častíc ani približne rovnaký. Pri prirodzenom beta rozpade elektróny či pozitrony majú rôznu energiu až do hodnoty  $W_{max}$ , čo ešte viac ovplyvňuje ich dobeh.

Závislosť hustoty toku častíc prirodzeného beta žiarenia  $I$  na vzdialenosti  $x$  od žiariča (pozri (10.132) a (10.133)), z ktorého vychádzajú rovnobežné zväzky elektrónov, je daná vzťahom

$$I = I_0 \exp(-\alpha x) = I_0 \exp(-n \delta x) \quad (10.156)$$

kde  $I_0$  je hustota toku častíc v mieste  $x = 0$ ,  $\alpha$  je absorpčný súčiniteľ materiálu prostredia,  $n$  je hustota rozptyľujúcich častíc prostredia,  $\delta$  je účinný prierez.

Pre bodový žiarič s aktivitou  $A$  môžeme hustotu toku častíc vo vzdialenosti  $r$  od neho vyjadriť vzťahom

$$I = \frac{A}{4 \pi r^2} \exp(-\alpha r) \quad (10.157)$$

Pri pozitronovom žiarení, keď pozitrony majú už malú rýchlosť, nastáva anihilácia pri ich interakcii s elektrónmi, kedy súčasne vznikajú najčastejšie dva fotóny.

Gama žiarenie: Aj gama žiarenie prechodom cez prostredie je ním absorbované. Keď neuvažujeme rezonančný záchyt alebo rozptyl fotónu, k absorpcii fotónov dochádza iba tromi spôsobmi:

1. fotoefekt (pozri 9.2.1),
2. Comptonov jav (pozri 9.2.2.2),
3. vznik páru elektrón-pozitron (pozri 10.2.10).

Pre hustotu toku fotónov, ktoré postupujú rovnobežne v prostredí, platí absorpčný zákon:

$$I = I_0 \exp(-\kappa x) = I_0 \exp(-n \delta x)$$

kde účinný prierez prostredia  $\delta$  je súčtom účinných prierezov pre fotoefekt  $\delta_f$ , Comptonov jav  $\delta_c$  a vznik páru elektrón-pozitrón  $\delta_p$ ,

$$\delta = \delta_f + \delta_c + \delta_p$$

Čím je energia fotónu väčšia, tým menší je účinný prierez  $\delta_f$ , podobne aj pre  $\delta_c$ , len jeho hodnota klesá pomalšie v závislosti od zväčšujúcej sa energie. Do energie fotónu 1,02 MeV je  $\delta_p$  nulový, ale potom s rastúcou energiou fotónu už len rastie. Preto pre rôzne energie fotónu je  $\delta$  všeobecne rôzne a pre žiarenie, ktoré sa skladá z viacerých monoenergetických zložiek, absorpčný zákon je

$$I = I_{01} \exp(-n \delta_1 x) + I_{02} \exp(-n \delta_2 x) + \dots \quad (10.158)$$

V praxi sa používa pojem polhrúbka a je definovaná vzťahom

$$I = 1/2 I_0 = I_0 \exp(-n \delta d_{1/2}) \quad (10.159)$$

z ktorého vyplýva  $d_{1/2} = (\ln 2)/n\delta$ . Polhrúbka zníži hustotu toku fotónov na polovicu, dve polhrúbky na štvrtinu a  $k$  polhrúbok zoslabí žiarenie  $2^k$ -krát. Žiarenie alfa aj beta možno úplne odtieniť okrem ich brzdného žiarenia (pri alfa aj beta žiarení sa častice dostanú po tzv. maximálny dobeh, ktorý má konečné rozmery pre dané prostredie), ale  $\gamma$  žiarenie úplne odtieniť nejakým absorbátorom nemožno. Najvhodnejším absorbátorom  $\gamma$  žiarenia je olovo.

Pri využívaní zdrojov ionizujúceho žiarenia (napr. rádionuklidy, urýchľovače častíc, jadrové reaktory, röntgenové prístroje, kozmické žiarenie) prichádza človek do styku so žiarením, pri ktorom nastáva ožiarenie. Jednotkou ožiarenia je  $C \text{ kg}^{-1}$ . Táto jednotka, ako vyplýva z definície, je počítaná pre ožiarenie vzduchu fotónmi. Keď počítame, že na jeden pár iónov vzduchu je potrebná energia  $W_i = 32,5 \text{ eV}$ , ktorú fotón odovzdá do vzduchu, potom na vytvorenie  $n_i$  iónov rovnakého znamienka v 1 kg, ktorých súčet nábojov je rovný 1 coulombu, je potrebná energia

$$\begin{aligned} W &= n_i W_i = [(1 \text{ C/kg}) / 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}] 32,5 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \\ &= 32,5 \text{ J kg}^{-1} \end{aligned}$$

V 1 kg vzduchu za normálnych podmienok pri ožiarení fotónmi 1 C/kg je teda absorbovaná dávka 32,5 Gy. Pri ožarovaní tkaniva človeka tým istým žiarením (fotónmi) spôsobí v tkanive už dávku 38,76  $\text{J kg}^{-1}$ . Vzťahuje sa to na fotóny.

Aby sme mohli porovnávať účinky iných druhov žiarenia na človeka, zavádza sa fyzikálna veličina dávkový ekvivalent (ekvivalentná dávka) H, ktorého jednotkou je sievert (značka Sv), čo je taká dávka akéhokoľvek žiarenia, ktorá má rovnaké biologické účinky ako ožiarenie  $1 \text{ C kg}^{-1}$  fotónmi (do 3 MeV).  $1 \text{ Sv} = 1 \text{ J kg}^{-1}$ . Relatívna biologická účinnosť rôznych druhov žiarenia, tzv. akostný faktor  $a_F$ , sa mení od 1 (pre röntgenové a  $\gamma$  žiarenie do 3 MeV, žiarenie beta do 3 MeV) do 20 (pre rýchle ťažké nabité častice alebo neutróny vyše 10 MeV). Vzťah medzi dávkou D a dávkovým ekvivalentom H je  $H = a_F \cdot D$ . Ak napr. určité množstvo rýchlych neutrónov vyše 10 MeV spôsobí v 1 kg vzduchu dávku 1 Gy, potom dávkový ekvivalent v 1 kg tkanive človeka, vyvolaný tým istým množstvom neutrónového žiarenia, bude 20 Sv.

Ochranou jednotlivcov, ich potomkov a ľudstva ako celku sa zaoberá radiačná ochrana. Pri ochrane sa ráta s nevyhnutnými činnosťami, pri ktorých môže nastať ožiarenie. Škodlivé účinky, vyvolané žiarením, sú buď somatické (postihujú priamo exponovaného jedinca), alebo genetické (postihujú potomstvo exponovaného jedinca). Škodlivé účinky sa môžu prejaviť okamžite (včasné účinky žiarenia) alebo až po uplynutí nejakého času (neskoré účinky žiarenia). Včasné somatické účinky sa vyskytujú iba výnimočne, najčastejšie pri nehodách a haváriách na zariadeniach, využívajúcich zdroje žiarenia. Príkladom včasných účinkov žiarenia je akútna choroba z ožiarenia, ktorá v závislosti od dávky končí buď smrťou, alebo prechádza do štádia reštitúcie a normalizácie porušených funkcií, ktoré môže trvať aj niekoľko mesiacov. Smrteľná ekvivalentná dávka je 6,0 Sv. Neskoré účinky žiarenia sa delia na stochastické a nestochastické. Stochastické účinky sú také, pri ktorých so zvyšujúcou sa dávkou žiarenia vzrastá pravdepodobnosť, že škodlivý účinok nastane. Výskyt týchto účinkov nemožno vylúčiť ani pri veľmi malých dávkach žiarenia. Medzi stochastické účinky patria genetické i niektoré somatické účinky, z ktorých vyvolanie rakoviny považujeme za hlavné riziko z ožiarenia nízkymi dávkami.

Nestochastické účinky sú také, pri ktorých sa závažnosť účinku zvyšuje s dávkou a ktoré preto môžu mať prahovú dávku, pod ktorou sa už neprejavujú účinky. K nestochastickým účinkom žiarenia patrí napr. zákal očnej šošovky, nemaligné poškodenie kože, útlm tvorby krvi, zníženie plodnosti.

Najvyššie prípustné (ročné) dávky pre pracovníkov so zdrojmi ionizujúceho žiarenia je od 0,05 Sv do 0,75 Sv podľa oblasti na tele človeka. Pre jednotlivcov z obyvateľstva sú medzné dávky 10-krát menšie ako u pracovníkov so zdrojmi žiarenia.

Ochrana pred  $\alpha$  žiarením je veľmi jednoduchá, lebo maximálny dobeh v pevných a kvapalných látkach je  $\sim 0,1 \text{ nm}$ , to znamená, že sa dá úplne odtieniť. Aj brzdné žiarenie, ktoré vzniká pri rozptyle častíc  $\alpha$ , nie je také tvrdé (fotóny nemajú veľkú energiu), aby boli problémy s odtienením na prípustnú

hodnotu. Horšie účinky spôsobí  $\alpha$  žiarenie, keď sa čo aj malé množstvo dostane do tela človeka.

Ochrana pred  $\beta$  žiarením je podobná ako pri  $\alpha$  žiarení, lebo tiež sa dá úplne odtieniť pomerne tenkou stenou (niekoľko mm, prípadne cm). Energia brzdného žiarenia, ktoré vzniká v absorbatore, rastie s jeho protónovým číslom, preto tieniacu stenu robíme z materiálu s malým protónovým číslom (napr. hliník, polyetylén, plexisklo a pod.).

Práca so žiarením gama je z hľadiska bezpečnosti pracovníkov náročnejšia ako pri alfa alebo beta žiarení, lebo sú ťažkosti pri jeho tienení. Na odtienenie sa najčastejšie používa olovo.

Veľmi nebezpečné je neutrónové žiarenie, pretože vyvoláva indukovanú rádioaktivitu. Čím vyššiu energiu majú neutróny, tým sú nebezpečnejšie. Najväčší účinný prierez pre rýchle neutróny majú atómy s malým protónovým číslom. Tienenie proti neutrónom musí spĺňať tieto tri funkcie:

1. spomaliť neutróny,
2. absorbovať tepelné neutróny,
3. chrániť proti vznikajúcemu sekundárnemu žiareniu, ktoré vzniká pri pohltení neutrónu jadrom, najmä proti  $\gamma$  žiareniu.

Na spomalenie sa používajú izotop  $^{10}\text{B}$ ,  $^6\text{Li}$ , vodík, voda, parafín, polyetylén a rôzne organické látky. Na absorpciu tepelných neutrónov sa používa kadmium.

Meraním ionizujúceho žiarenia sa zaoberá dozimetria. Cieľom dozimetrie je merať aktivitu rádioaktívnych látok - radiometria, určovať dávky ionizujúceho žiarenia všetkých druhov (röntgenové,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , neutrónové, protónové, deuterónové a i.) - röntgenometria.

Na meranie malých aktivít sa používajú fotografické emulzie, Wilsonova hmlová komora - to sú priame metódy. Nepriame metódy sú väčšinou založené na ionizačných účinkoch žiarenia daného žiaríča, alebo podľa absorbovanej dávky. Na určenie počtu častíc sa používajú: impulzná ionizačná komora, proporcionálny počítač, Geiger - Müllerov počítač, iskrový počítač, scintilačný počítač, Čerenkovov počítač, Wilsonova hmlová komora, bublinková komora, fotografická emulzia, špeciálne detektory. Integrálne metódy (meriame množstvo absorbovanej energie väčšieho počtu častíc) používajú zariadenia, ktoré sa nazývajú dozimetre: ionizačná komora, kalorimeter, fotografická emulzia, scintilačný počítač, termoluminiscenčný počítač, polovodičový počítač, špeciálne chemické reakcie.

Na zisťovanie malých dávok (do 10 mGy) sa najčastejšie používajú metódy na určenie počtu častíc. Stredné dávky (1 mGy ÷ 100 Gy) sa obvykle zisťujú in-



tegrálnymi metódami a na určenie veľkých dávok sa takmer výlučne používajú chemické dozimetre.

Osobné dávky pracovníkov, zapodievajúcich sa s ionizujúcim žiarením, sa zisťujú pomocou filmových dozimetrov. Princíp týchto dozimetrov spočíva v zázname žiarenia na film, uložený v malej kazete. Film je rozdelený na niekoľko políčok, ktoré sú odtienené filtrami s rôznou hrúbkou. Podľa sčernenia jednotlivých políčok vieme určiť nielen dávku, ale odhadnúť aj prenikavosť (energiu častíc) žiarenia.

#### 10.2.10 Elementárne častice a rezonancie

Najjednoduchšie materiálne celky, ktoré sa správajú ako samostatné fyzikálne objekty, nazývame elementárnymi časticami. V súčasnosti poznáme okolo 220 rôznych elementárnych častíc a rezonancií. Z historického hľadiska štúdium elementárnych častíc malo tri obdobia. Prvé - bolo objavených šesť častíc - fotón, elektrón, neutrón, pozitrón a neutríno. Druhé ( $\sim$  po roku 1945) - boli objavené  $\mu$  a  $\pi$  mezóny, hyperóny a K mezóny. Tretie ( $\sim$  po roku 1960) - boli objavené častice s veľmi krátkou dobou života ( $\tau \approx 10^{-21}$  s až  $10^{-27}$  s), ktoré sa nazývajú rezonancie. Toto obdobie trvá dodnes.

Zo všetkých možných elementárnych častíc jedine elektrón má uspokojivú teóriu, podľa ktorej môžeme popísať jeho správanie. Túto teóriu vypracoval Dirac (roku 1928), ktorý ukázal, že relativistický vzťah pre energiu častice (elektrónu)

$$E = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

je správny pre obidve hodnoty, kladnú aj zápornú. Kladné hodnoty môže častica nadobúdať od  $+m_0 c^2$  (pokojoová energia) až po  $+\infty$  a záporné od  $-m_0 c^2$  až po  $-\infty$ . Elektrón môže teda nadobúdať aj záporné hodnoty energie. Prechod od kladného energetického stavu do záporného a naopak je možný vyžiarením alebo pohltením fotónu. V záporných energetických stavoch môže prejsť k ešte nižším záporným stavom vyžiarením fotónu. To by ale znamenalo, že všetky elektróny by nakoniec zaujali najmenšiu energiu  $-\infty$ , pretože každý systém vývojom smeruje ku konfigurácii s minimálnou energiou. Aby sa Dirac tomu vyhýbal, navrhol myšlienku, podľa ktorej všetky záporné stavy sú už obsadené a Pauliho princíp bráni elektrónom s kladnou energiou obsadzovať ďalej záporné stavy. Svet elektrónov so zápornou energiou podľa Diraca nie je priamo pozorovateľný. Ak nejakým spôsobom získa elektrón zo "záporného sveta" dostatočnú energiu na to, aby ho opustil, zanechá za sebou "dieru". Pretože diera

reprezentuje neprítomnosť častice so zápornou hmotnosťou a zápornou kinetickou energiou, prejavuje sa potom ako častica s kladnou hmotnosťou a kladnou kinetickou energiou. V elektrickom a magnetickom poli sa správa ako kladne nabitá častica. Táto Diracova myšlienka sa stala reálnou až roku 1932, keď boli skutočne objavené kladné elektróny v kozmickom žiarení. Tieto kladné elektróny sa nazývajú pozitrony. Pozitron ako častica zo "záporného sveta" (antisveta) sa aj nazýva antičastica elektrónu. Aby sa elektrón so zápornou energiou dostal do stavu s kladnou energiou, musí dostať energiu minimálne  $2 m_0 c^2$  (1,02 MeV) - vtedy prechádza zo stavu  $- m_0 c^2$  do stavu  $+ m_0 c^2$ . So vznikom pozitronu (diera v antisvete) vzniká zároveň aj elektrón. Vznik (kreácia) tohto páru potvrdzuje Einsteinov vzťah ekvivalencie hmotnosti a energie. Pri prechode elektrónu s kladnou energiou na uvoľnené miesto (dieru) - so zápornou energiou zaniká pár (anihilácia) elektrón - pozitron a vyžiaria sa dva fotóny gama, ktorých smery sú také, aby sa zachovala hybnosť a energia. Pri kreácii páru je potrebná prítomnosť pomerne ťažkého jadra, ale pri anihilácii nie je potrebné ani jadro ani iná častica.

Okrem fotónu a mezónov  $\pi^0$  a  $\eta^0$  všetky známe elementárne častice majú svoje príslušné antičastice. Fotón a uvedené mezóny sú zároveň aj svojimi antičasticami. Antičastica príslušnej častice má rovnakú hmotnosť, spinový moment hybnosti a dobu života (ak je nestabilná), ale jej náboj (pri elektricky nabitých) má opačné znamienko, a vzájomná orientácia jej vektora spinového momentu hybnosti  $\vec{S}$  a vektora spinového magnetického momentu  $\vec{\mu}_s$  je opačná ( $\vec{\mu}_s = -(e/m) \vec{S}$ ). Pri anihilácii napr. antiprotónu s protónom či neutránom alebo antineutránom s neutránom či protónom nevznikajú fotóny gama, ale vzniká niekoľko neutrálnych ( $\pi^0$ ) a nabitých ( $\pi^+$  a  $\pi^-$ ) mezónov. To ukazuje, že  $\pi$  mezóny môžeme pokladať za kvantá jadrového silového poľa, tak ako fotóny za kvantá elektromagnetického poľa.  $\pi$  mezóny sa rozpadávajú. Nabité  $\pi$  mezóny sa takmer vždy rozpadávajú na tzv.  $\mu$  mezóny a neutrína:  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ ;  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ . Tieto neutrína sú odlišné od neutrín pri beta rozpade (označované  $\nu_e$ ). Neutrálny  $\pi^0$  mezón sa rozpadá na dva gama fotóny:  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ .

Aj  $\mu$  mezóny sa ďalej rozpadávajú:  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ ;  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ . Mezón  $\mu$  sa okrem hmotnosti a nestability nelíši od elektrónu, čo vedie k hypotéze, že  $\mu$  mezón je odrodou "ťažkého elektrónu", a nie samostatnou časticou.

Okrem  $\pi$  a  $\mu$  mezónov bol objavený ďalší druh mezónov, mezóny K ( $K^-, K^+, K_1^0, K_2^0$ ), ktoré sa môžu rozpadat rôznymi spôsobmi na  $\pi$ , a  $\mu$  mezóny a neutrína (mezónové). Elementárne častice ťažšie ako protóny sa nazývajú hyperóny. Sú štyri kategórie hyperónov:  $\Lambda, \Sigma, \Xi, \Omega$  (lambda, sigma, ksi, omega). Všetky sú nestabilné.

Elementárne častice, ktorých doba života často prevyšuje dobu, ktorú potrebuje svetlo na prekonanie vzdialenosti, rovnajúcu sa "priemeru" elementárnej častice ( $\approx 10^{-15}$  m), sú relatívne stabilné ( $\tau \gtrsim 10^{-18}$  s).

Tabuľka 10.2

NÁZVY ČASTÍC	ZNAČKA		m [m <sub>e</sub> ]	T [s]	s	Q [e]	P	B	L	M	I	I <sub>p</sub>	S	Y	SAMOVOENÝ ROZPAD A RELAT. PRAVDEPODOBNOŠŤ ROZPADU (%)	
	CASTICA	ANTICAST.														
CASTICE POJA	FOTÓN	γ	0	∞	1	0										
	(GRAVITÓN)		0	∞	2											
LEPTONY	NEUTRINO	ν <sub>μ</sub>	0	∞	1/2	0	-1	0	0	+1			0	0		
		ν <sub>e</sub>	0	∞			-1	0	+1	0			0	0		
	ELEKTRÓN	e <sup>-</sup>	1	∞	1/2	+1	-1	0	+1	0			0	0		
	MION	μ <sup>-</sup>	206,7	2,20 · 10 <sup>-8</sup>	1/2	-1	+1	0	0	+1			0	0	→ e <sup>-</sup> · ν <sub>μ</sub> + ν <sub>e</sub> (100) → e <sup>-</sup> · ν <sub>μ</sub> + ν <sub>e</sub> (100)	
MEZONY	PIONY	π <sup>0</sup>	264,1	0,80 · 10 <sup>-8</sup>	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	→ γ + γ (99) → γ + e <sup>-</sup> + e <sup>+</sup> (1) → μ <sup>+</sup> · ν <sub>μ</sub> (100) → μ <sup>-</sup> · ν <sub>μ</sub> (100)	
		π <sup>+</sup>	273,1	2,60 · 10 <sup>-8</sup>	0	+1	-1	0	0	0	1	+1	0	0		
		π <sup>-</sup>	273,1	2,60 · 10 <sup>-8</sup>	0	-1	+1	0	0	0	1	-1	0	0		
		K <sup>+</sup>	966,4	(24 · 10 <sup>-8</sup> )	0	+1	-1	-1	0	0	0	1/2	+1	-1	-1	→ μ <sup>+</sup> · ν <sub>μ</sub> (69) → K <sup>+</sup> · π <sup>0</sup> (21) → π <sup>+</sup> · π <sup>0</sup> · π <sup>0</sup> · π <sup>0</sup> (6) → e <sup>+</sup> · π <sup>+</sup> · ν <sub>e</sub> (5) → μ <sup>+</sup> · π <sup>+</sup> · ν <sub>μ</sub> (9) → π <sup>+</sup> · π <sup>0</sup> · π <sup>0</sup> · π <sup>0</sup> (2)
		K <sup>0</sup>	974,1	6,60 · 10 <sup>-8</sup>	0	0	-1	-1	0	0	0	1/2	-1/2	+1	+1	→ π <sup>+</sup> · π <sup>-</sup> (69) → 2π <sup>0</sup> (34) → π <sup>+</sup> · π <sup>-</sup> (69) → 2π <sup>0</sup> (34)
		K <sup>-</sup>	974,1	6,60 · 10 <sup>-8</sup>	0	0	+1	+1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	-1	→ π <sup>+</sup> · e <sup>+</sup> + γ (39) → π <sup>+</sup> · π <sup>0</sup> + ν <sub>μ</sub> (27) → π <sup>+</sup> · π <sup>0</sup> + ν <sub>μ</sub> (27)
MEZÓN γ		γ <sup>0</sup>	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	→ 2γ (99) → 3π <sup>0</sup> (90) → π <sup>+</sup> · π <sup>-</sup> · π <sup>0</sup> (24)	
			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
NUKLEONY	PROTON	p	1836,1	∞	1/2	+1	-1	+1	0	0	1/2	+1/2	0	+1	→ p + e <sup>-</sup> · ν <sub>e</sub> (100) → p + e <sup>-</sup> · ν <sub>e</sub> (100)	
	NEUTRON	n	1839,6	952	1/2	0	+1	+1	0	0	1/2	+1/2	0	+1	→ p + π <sup>-</sup> (65) → n + π <sup>0</sup> (35) → p + π <sup>-</sup> (65) → π <sup>+</sup> · π <sup>-</sup> (35)	
BARONY	LAMBDA	Λ <sup>0</sup>	2183,1	2,64 · 10 <sup>-10</sup>	1/2	0	+1	-1	0	0	0	0	-1	0	→ p + π <sup>0</sup> (52) → n + π <sup>0</sup> (48) → p + π <sup>0</sup> (52) → n + π <sup>0</sup> (48)	
	SIGMA	Σ <sup>+</sup>	2327,6	6,10 · 10 <sup>-10</sup>	1/2	+1	-1	+1	0	0	1	0	+1	0	0	→ Λ <sup>+</sup> · γ (100) → Λ <sup>+</sup> · γ (100)
		Σ <sup>0</sup>	2333,6	< 10 <sup>-10</sup>	1/2	0	+1	+1	0	0	0	0	-1	0	0	→ n + π <sup>0</sup> (100) → n + π <sup>0</sup> (100)
		Σ <sup>-</sup>	2344,1	148 · 10 <sup>-10</sup>	1/2	-1	+1	+1	0	0	0	0	-1	0	0	→ Λ <sup>0</sup> · γ (100) → Λ <sup>0</sup> · γ (100)
	KSI	Ξ <sup>0</sup>	2572,6	3,0 · 10 <sup>-10</sup>	1/2	0	+1	-1	+1	0	0	1/2	+1/2	-1	-1	→ Λ <sup>0</sup> · π <sup>0</sup> (100) → Λ <sup>0</sup> · π <sup>0</sup> (100)
		Ξ <sup>-</sup>	2595,6	4,7 · 10 <sup>-10</sup>	1/2	-1	+1	+1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	-1	→ Λ <sup>0</sup> · π <sup>0</sup> (100) → Λ <sup>0</sup> · π <sup>0</sup> (100)
OMEGA	Ω <sup>0</sup>	3273,0	1,5 · 10 <sup>-10</sup>	3/2	-1	+1	+1	0	0	0	0	0	-1	-2	→ Ξ <sup>+</sup> · π <sup>-</sup> (100) → Λ <sup>0</sup> · K <sup>-</sup> (100) → Ξ <sup>+</sup> · π <sup>-</sup> (100) → Λ <sup>0</sup> · K <sup>-</sup> (100)	

V tab. 10.2 sú uvedené vlastnosti takýchto relatívne stabilných a stabilných častíc. Parametre, ktoré charakterizujú a triedia elementárne častice, sú: hmotnosť -  $m$ , elektrický náboj -  $Q$ , spinové číslo -  $s$ , doba života -  $\tau$ , parita (priestorová) -  $P$ , baryónové číslo -  $B$ , leptónové čísla -  $L$  a  $M$ , izospin -  $I$  a  $I_3$ , podivnosť -  $S$  a hypernáboj -  $Y$  ( $Y = S + B$ ).

Okrem už uvedených elementárnych častíc v tab. 10.2 existuje oveľa viac častíc, ktorých polčas rozpadu je  $\approx 10^{-23}$  s a ktoré nazývame rezonanciou. Tieto častice nemožno priamo pozorovať pri rozpade v bublinkovej komore. Pri interakcii napr.  $\pi^+$  mezónu a protónu vznikajú nové častice podľa schémy  $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ .

Vznikajú teda ešte ďalšie tri  $\pi$  mezóny. Keď vynesieme do grafu počet pozorovaných reakcií v závislosti od celkovej energie nových troch mezónov (pokojová energia + kinetická energia vzťahovaná vždy na spoločné ťažisko), zistíme dve maximá. Jedno je pri energii 758 MeV (silné maximum) a druhé pri energii 548 MeV (slabšie maximum). Môžeme povedať, že daná reakcia najčastejšie prebieha pri energiách 785 MeV a 548 MeV, alebo že pri týchto energiách vykazuje rezonanciu. Tento jav možno interpretovať aj tak, že vzniká dočasne nová elementárna častica, ktorej hmotnosť je ekvivalentná 785 MeV ( $\omega$  mezón) alebo 584 MeV ( $\eta$  mezón). Podľa princípu neurčitosti možno zo šírky maxima v jeho polovici -  $\Delta E$  (neurčitosť v určení energie) určiť strednú dobu života ( $\tau \approx h/2\Delta E$ ). Doba života  $\eta$  mezónu je pomerne dlhá, preto je uvedený v tab. 10.2 ako relatívne stabilná častica.

Pri ostreľovaní ťažkých častíc (hadronov) veľmi rýchlymi elektrónmi (približne 20 GeV) sa zistilo, že majú určitú štruktúru, teda skladajú sa z nejakých ešte jednoduchších častíc. Jedna z teórií, ktorá vysvetľuje štruktúru hadronov (mezóny a baryóny) predpokladá, že existujú tri tzv. kvarky,  $q_1, q_2, q_3$ , a tri antikvarky,  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$  určitých vlastností. Najnovšie výsledky ukazujú, že má byť šesť kvarkov a šesť antikvarkov. K parametrom, ktoré sú uvedené v tab. 10.2, pristupujú ešte ďalšie dva, tzv. "šarm" a "krása". Tieto dve veličiny (kvantové čísla) sa zachovávajú pri rozpade niektorých hadronov, keď sú ostreľované elektrónmi s energiou  $> 1$  GeV. Z kvarkov možno zostaviť všetky známe hadrony. Experimentálne sa ešte nepodarilo potvrdiť existenciu kvarkov.

#### 10.2.11 Symetrie a zákony zachovania

V elementárnych časticiach a pri ich vzájomnom pôsobení sa uplatňujú štyri druhy interakcií - gravitačná, slabá, elektromagnetická, silná. Gravitačná interakcia existuje vo všetkých časticiach. Fotón interaguje iba elektromag-

neticky. Leptóny interagujú navzájom a s inými časticami slabo a tie, ktoré majú elektrický náboj, aj elektromagneticky. Hadróny interagujú silno, slabo aj elektromagneticky, ale prevláda silná interakcia.

Vlastnosti elementárnych častíc sú späté s interakciami, ktoré sa pri nich uplatňujú, a s vlastnosťami symetrie priestoru a času. Tieto sa vo vlastnostiach častíc presadzujú pomocou zákonov zachovania určitých fyzikálnych veličín. Každé transformácii (podľa Noetherovej vety), pri ktorej sú pohybové rovnice daného fyzikálneho systému invariantné, prislúcha určitá veličina, pre ktorú platí zákon zachovania.

Keď máme dva súradné systémy a tie sa navzájom v homogénnom priestore posunú (translácia), potom invariantnosť vzhľadom na túto operáciu symetrie znamená nezávislosť fyzikálnych zákonov od voľby počiatku súradného systému. Možno dokázať, že z invariantnosti popisu prírody vzhľadom na priestorovú transláciu vyplýva zákon zachovania hybnosti.

Invariantnosť vzhľadom na rotáciu súradného systému voči inému súradnému systému v izotropnom priestore znamená nezávislosť fyzikálnych zákonov od orientácie súradného systému, z čoho možno dokázať platnosť zákona zachovania momentu hybnosti.

Ďalšou operáciou symetrie je translácia súradného systému v čase, čo znamená nezávislosť fyzikálnych zákonov od voľby  $t = 0$ , a z toho vyplýva zákon zachovania energie.

Invariantnosť vzhľadom na transformáciu metriky, čo znamená posunutie nulových hodnôt skalárneho  $V$  a vektorového  $\vec{A}$  elektromagnetického potenciálu ( $\vec{E} = -\nabla V$  a  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ), vedie k zákonu zachovania elektrického náboja.

Invariantnosť vzhľadom na Lorentzove transformácie znamená izotropnosť časopriestoru, z čoho vyplýva zákon zachovania rýchlosti ťažiska izolovanej sústavy.

Zámena identických častíc v sústave je ďalšia operácia symetrie, ktorá vedie k zákonu zachovania charakteru vlnovej funkcie sústavy. Vlnová funkcia môže byť vzhľadom na takúto zámenu symetrická - neplatí Pauliho princíp a sústava sa riadi Bose-Einsteinovou štatistikou, alebo antisymetrická - pre častice platí Pauliho princíp a sústava sa riadi Fermi-Diracovou štatistikou. Tento zákon sa nazýva aj zákon zachovania typu štatistiky (napr. jadrá s párnym hmotnostným číslom  $A$  sú Boseho a s nepárnym  $A$  sú Fermiho častice. Pri jadrových reakciách sa typ štatistiky musí zachovávať, pozri obr. 10.41).

Zákony zachovania baryónového čísla  $B$  a leptónových čísel  $L$  a  $M$  sú jediné so základných zákonov zachovania, s ktorými nie je spojená žiadna známa operácia symetrie. Baryónové číslo  $B = 1$  majú všetky baryóny,  $B = -1$  an-

leptony a  $B = 0$  všetky ostatné častice. Leptónové číslo  $L = 1$  majú elektrón a neutríno ( $\nu_e$ ),  $L = -1$  ich antičastice a  $L = 0$  všetky ostatné častice. Leptónovo číslo  $M = 1$  majú  $\mu$  mezón a neutríno ( $\nu_\mu$ ),  $M = -1$  ich antičastice a  $M = 0$  všetky ostatné častice.

Ďalšou operáciou symetrie je inverzia v priestore, t.j. zámena  $-x$  za  $x$ ;  $-y$  za  $y$  a  $-z$  za  $z$ . Z invariantnosti vzhľadom na túto operáciu vyplýva zákon zachovania parity. O vlnovej funkcii  $\psi(x,y,z)$ , ktorá pri priestorovej inverzii nemení znamienko  $\psi(x,y,z) = \psi(-x,-y,-z)$  hovoríme, že má párnú paritu  $P = +1$ , a ktorá mení znamienko, má nepárnu paritu  $P = -1$  (napr.  $\sin x = -\sin(-x)$ , teda  $P = -1$ , ale  $\cos x = \cos(-x)$  má  $P = +1$ ). Každá elementárna častica má svoju paritu a parita sústavy, napr. atóm, je súčinom parity vlnovej funkcie, ktorá popisuje súradnice častíc sústavy a vlastných parít samotných častíc. Zachovanie parity je výrazom symetrie priestoru vzhľadom na inverziu, čo znamená nezávislosť fyzikálnych zákonov od toho, či prírodné javy popisujeme v ľavotočivom alebo pravotočivom súradnom systéme. Zákon zachovania parity platí len pre silnú a elektromagnetickú interakciu, neplatí pre slabú interakciu (dôkaz neplatnosti, že neutrína majú len ľavotočivý spinový moment hybnosti a antineutrína majú len pravotočivý moment hybnosti).

Okrem priestorovej parity existujú ešte dve iné parity - časová parita  $T$  a nábojová parita  $C$ , ktoré charakterizujú vlnovú funkciu pri zámene  $t$  za  $-t$ , resp. častice za antičasticu. Zámena  $t$  za  $-t$  je inverzia času a tomu odpovedá zachovanie časovej parity, čo znamená, že ak platí symetria vzhľadom na inverziu času, nemožno pozorovaním stanoviť, či pohybový obraz udalosti plynie dopredu alebo späť. Aj pri časovej parite bolo dokázané porušenie jej zachovania (rozpad  $K_2^0$  mezónu na  $K^+$  a  $K^-$  mezóny).

Operácia symetrie, ktorá odpovedá zachovaniu nábojovej parity  $C$ , je nábojové združenie, čo je zámena každej častice za jej antičasticu. Ani táto parita, podobne ako priestorová, sa nezachováva pri slabých interakciách.

Hoci každá zo spomínaných parít,  $C$ ,  $P$ ,  $T$ , nemá všeobecnú platnosť zachovania, existujú dôvody, že ich súčin  $CPT$  sa vždy zachováva. Zákon zachovania  $CPT$  znamená, že ku každému procesu existuje zrkadlovo prevrátený proces vo svete antihmoty, ktorý má obrátený časový priebeh.

S nábojovým združením ako operáciou symetrie súvisí aj zákon zachovania podivnosti  $S$ . Veličina podivnosť bola zavedená na vysvetlenie niektorých vlastností elementárnych častíc: niektoré ťažké elementárne častice sa rozpadávajú na ľahšie s emisiou gama fotónov, kým niektoré iné častice nepodliehajú rozpadom zdanlivo rovnako dobre možným, niektoré častice (tzv. podivné častice) porušujú všeobecný poznatok, že prírodné fyzikálne procesy, ktoré uvoľňujú veľké množstvá energie, prebiehajú rýchlejšie ako procesy,

ktoré uvoľňujú malé množstvo energie, podivné častice nikdy nevznikajú jednotlivito, ale vždy po dve alebo viac naraz. V tab. 10.2 je ku každej častici uvedená hodnota podivnosti. Podivnosť sa nezachováva pri slabých interakciách, ale môže sa meniť len o  $\Delta S = \pm 1$ . Súčet podivnosti  $S$  a baryónového čísla  $B$  dáva ďalšiu veličinu - hypernáboj  $Y = S + B$ .

Ďalšia veličina, ktorá sa zavádza na rozlíšenie elementárnych častíc vo vnútri samotných skupín, je tzv. izotopický spin alebo len izospin  $I$ . V tab. 10.2 sú skupiny častíc, ktoré majú takmer rovnakú hmotnosť a interakčné vlastnosti. Tieto skupiny sa nazývajú multiplety (napr. pióny tvoria triplet  $\pi^-, \pi^0, \pi^+$ , nukleóny tvoria dublet  $p, n$ ). Zložky multipletu možno chápať tak, ako keby reprezentovali rôzne nábojové stavy jednej základnej častice. Izospin  $I$  charakterizuje multiplet podľa počtu nábojových stavov tak, že multiplicita je rovná  $2I + 1$ . Pre singlet je izospin ( $2I + 1 = 1$ )  $I = 0$ , pre dublet ( $2I + 1 = 2$ )  $I = 1/2$ , pre triplet ( $2I + 1 = 3$ )  $I = 1$ . Matematická analógia so štiepením stavov momentu hybnosti (priestorové kvantovanie) s kvantovým číslom  $l$  na  $2l + 1$  podstavov viedla k nesprávnemu názvu. V zhode s touto analógiou môžeme si izospin predstaviť ako vektor  $\vec{I}$  v priestore izotopických spinov, ktorého priemet do osi náboja označujeme  $I_p$ . Hodnoty  $I_p$  sú  $-I, -(I-1), \dots, 0, \dots, (I-1), I$  (napr. pre  $I = 1$  je  $I_p = -1, 0, 1$ , pre  $I = 1/2$  je  $I_p = 1/2, -1/2$  pre  $I = 0$  je  $I_p = 0$ ). Náboj mezónu a baryónu vypočítame podľa vzťahu

$$Q = e \left[ I_p + (1/2) B + (1/2) S \right] \quad (10.160)$$

Pre protón je  $I_p = 1/2$  a  $Q = e \left[ 1/2 + (1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot 0 \right] = e$ . Pre neutrón je  $I_p = -1/2$ , takže  $Q = 0$ . Zákon zachovania izospinu  $I$  platí len pri silných interakciách. Operáciou symetrie, z ktorej vyplýva tento zákon, je elektrický náboj, lebo nábojová nezávislosť silnej interakcie znamená nezávislosť tejto interakcie od orientácie  $\vec{I}$  v priestore izotopických spinov.

Zákon zachovania priemetu izospinu  $I_p$  platí pri silných a elektromagnetických interakciách. Tento zákon súvisí s nábojovým združením ako operáciou symetrie.

# 11. Fyzika pevných látok

## 11.1 ŠTRUKTÚRA PEVNÝCH LÁTOK

Na rozdiel od kvapalín a plynov v pevných látkach stavebné prvky (atómy, ióny a molekuly) nemenia svoje vzájomné vzdialenosti (ak neberieme do úvahy ich kmitanie okolo rovnovážnej polohy). Príčinou toho je väčšia väzbová energia (menšia potenciálna energia), ako je kinetická energia jednotlivých stavebných prvkov.

Väčšina pevných látok sú látky kryštalické, ich atómy, ióny alebo molekuly vytvárajú pravidelné, periodicky sa opakujúce útvary. Hovoríme, že tieto látky majú ďalekodosahové usporiadanie (usporiadanie na veľkú vzdialenosť). Niektoré látky, ako je napr. sklo, asfalt a väčšina plastických látok, nemajú usporiadanie na veľkú vzdialenosť, ale iba na malú a nazývame ich amorfnými látkami. Možno ich chápať ako podchladené kvapaliny, ktorých tuhosť je dôsledkom veľmi veľkej viskozity. Kysličník boritý ( $B_2O_3$ ) môže existovať s usporiadaním na veľkú vzdialenosť - kryštalická forma alebo s usporiadaním na krátku vzdialenosť - amorfná forma.

Kvapaliny sa obvykle považujú za bližšie plynom ako pevným látkam. Majú však aj dosť spoločných vlastností s pevnými látkami, ako je napr. hustota, nestlačiteľnosť. Na základe difrakcie röntgenových lúčov sa ukázalo, že kvapaliny, tak ako amorfné látky majú krátkodosahové usporiadanie (napr. pri vode tesne nad  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Existujú aj tzv. kvapalné kryštály (napr. p - azoxyanizol pri teplotách nad bodom tavenia -  $116\text{ }^{\circ}\text{C}$  do  $135\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; jeho pretiahnuté molekuly, aj keď sa môžu voľne pohybovať, zostávajú navzájom rovnobežné a vytvárajú tak anizotropnú kvapalinu), pri ktorých sa pozoruje tzv. dvojlom, tak ako pri kryštalických látkach.

Pri ochladzovaní kvapaliny sa pri určitej teplote začínajú vyskytovať malé kryštáliky - jadrá (zárodky), ktoré sa stále zväčšujú, až sa celá kvapalina premení na kryštalickú látku. Zárodky sa môžu objavovať samovoľne, alebo ich funkciu môžu prebrať drobné nečistoty. Za určitých podmienok, ak je kvapalina čistá, možno ju podchladiť pod bod tuhnutia bez toho, aby kryštalizovala. Takáto kvapalina je nestabilná a bude kryštalizovať na akýkoľvek malý vnútorný popud, ale v niektorých prípadoch začne tuhnúť ako látka s krátkodosahovým usporiadaním, lebo viskozita pri zníženej teplote je taká veľká, že molekuly sa už nemôžu premiestňovať, aby vytvárali kryštalickú látku. Takáto amorfná látka je teda metastabilná, lebo jej vnútorná energia (potenciálna)



by sa znížila, keby látka pri tejto teplote kryštalizovala. Z takého metastabilného stavu sa látka do stavu kryštalického dostáva tak pomaly, že prakticky vôbec nekryštalizuje. Pri zachovalých starých predmetoch zo skla sa zistilo, že sklo kryštalizovalo.

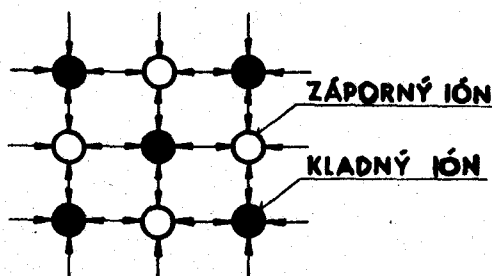
Bod tuhnutia kryštalických látok je veľmi ostrý a prechod od kryštalickej látky ku kvapalnej prebieha hromadným rozrušením väzieb na rozdiel od amorfných, kde fázový prechod nie je pri určitej teplote, ale v dosť širokom teplotnom intervale. Z hľadiska mikroskopického sa to vysvetľuje tak, že pri kryštalických látkach všetky väzbové sily (ich veľkosť) medzi atómami, iónmi alebo molekulami sú takmer rovnaké, ale pri amorfných látkach sú väzbové sily rôzne. Pri zahrievaní amorfných látok sa najprv rozrušujú najslabšie väzby a ďalšie postupne so zvyšovaním teploty zahrievania.

## 11.2 VÄZBY V PEVNÝCH LÁTKACH

V pevných látkach sú jednotlivé atómy, ióny alebo molekuly navzájom viazané. Väzby sú elektrónového pôvodu. Podľa usporiadania elektrónov okolo stavebných prvkov látky rozoznávame rôzne druhy väzby.

### a) Iónová väzba

Takáto väzba (obr. 11.1) vzniká pri interakcii atómov s malou ionizačnou energiou s atómami, ktoré majú veľkú elektrónovú afinitu (to je energia, ktorá sa uvoľní, keď sa pridá jeden elektrón k danému atómu prvku; je tým väčšia, čím silnejšie je viazaný tento pridaný elektrón). Teda atómy z prvej skupiny s atómami siedmej skupiny periodickej sústavy prvkov vytvárajú molekuly touto väzbou. Vyskytuje sa v molekulách medzi atómami (iónmi), ale aj



Obr. 11.1

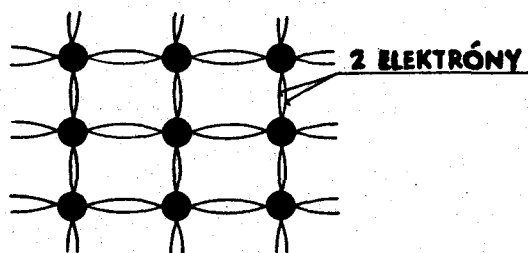
medzi iónmi v kryštalických látkach. Atómy prvého typu odovzdávajú elektróny atómom druhého typu. Takto vznikajú kladné, resp. záporné ióny, ktoré sa na-

vzájom elektrostatičky priťahujú. Typickým príkladom iónového kryštálu je NaCl. Iónové pevné látky sa vyznačujú veľkou tvrdosťou, majú vysoký bod tavenia, sú rozpustné v polárnych kvapalinách, ako je voda.

Energia väzby medzi iónmi v kryštáli je väčšia (ión v kryštáli interaguje so všetkými ostatnými iónmi a nielen s jedným iónom opačnej polarít), ako je energia väzby medzi iónmi, ktoré tvoria molekulu. Pri kryštáli NaCl je energia väzby prepočítaná na jeden atóm  $W_v = 3,22 \text{ eV/atóm}$  a u molekuly  $W_v = 2,1 \text{ eV/atóm}$ .

#### b) Kovalentná väzba

Väzba medzi dvoma atómami je sprostredkovaná dvoma elektrónmi, ktoré sú v priestore medzi nimi (obr. 11.2). Na rozdiel od iónovej väzby, kde elektrón je viazaný jedným z atómov, pri kovalentnej väzbe každý atóm prispieva



Obr. 11.2

k väzbe s iným atómom jedným elektrónom. Tento elektrón spolu s elektrónom od druhého atómu je súčasne viazaný na oba atómy. Typickým predstaviteľom kovalentného kryštálu je diamant. Tu sa atóm uhlíka usiluje zaplniť valenčnú podsféru (2p) pribatím štyroch elektrónov k svojim dvom. Kovalentné kryštály sú veľmi tvrdé (diamant je najtvrdšia známa látka), majú vysoký bod tavenia, sú nerozpustné takmer vo všetkých rozpúšťadlách. Energia väzby pre diamant je  $W_v = 7,4 \text{ eV/atóm}$ .

Niektoré pevné látky majú väzby zmiešaného typu - kovalentnú aj iónovú.

#### c) Väzba Van der Waalsovými silami

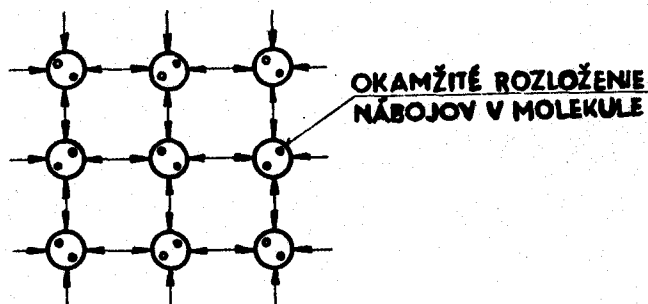
Všetky atómy aj molekuly (vrátane inertných plynov) majú schopnosť navzájom sa priťahovať. Toto vzájomné priťahovanie je krátkeho dosahu a pomerne slabé. Jeho príčinou sú Van der Waalove sily, ktoré sú zodpovedné za kondenzáciu plynov na kvapaliny, tuhnutie kvapalín na pevné látky, ako aj trenie, povrchové napätie, viskozitu, adhéziu, súdržnosť a iné.

Van der Waalove sily sa prejavujú iba vtedy, keď sú dve molekuly veľmi blízko seba (veľkosť sily je úmerná  $r^{-7}$ , keď vzdialenosť molekúl je  $r$ ). Polár-

ne molekuly, napr. voda, majú stály elektrický dipólový moment a priťahujú sa navzájom vždy opačnými koncami dipólu. Polárna molekula môže priťahovať aj molekuly nepolárne tým, že elektrické pole polárnej molekuly indukuje v nepolárnej molekule elektrický dipólový moment s rovnakou orientáciou a výsledkom je príťažlivá sila medzi nimi. Van der Waalsove sily pôsobia medzi všetkými molekulami, teda aj medzi tými, ktoré nemajú dipólový moment v izolovanom stave. Vysvetľuje sa to tým, že v každom okamihu rozloženie elektrónov je nesymetrické (aj keď v priemere symetrické je) a má teda dipólový moment, ktorý sa mení tak, že stredná hodnota  $\vec{p}_e = 0$ . Stredná hodnota štvorca elektrického dipólového momentu  $\overline{p^2}$  nie je však nula, ale má konečnú hodnotu.

Polarizovateľnosť  $\alpha$  vo vzťahu  $\vec{p}_e = \alpha \vec{E}$  (pozri 6.2.4) a  $\overline{p^2}$  majú porovnateľné hodnoty pre väčšinu molekúl. Tým možno vysvetliť, prečo hustota a výparné teploty kvapalín majú hodnoty nie veľmi odlišné.

Kryštály viazané Van der Waalsovými silami - molekulárne kryštály (obr. 11.3) majú všeobecne nízky bod tavenia a varu, malú mechanickú pevnosť a sú rozpustné v kovalentných kvapalinách (napr. benzín). Predstaviteľom takého kryštálu je napr.  $\text{CH}_4$  - metán. Jeho väzbová energia je  $W_v = 0,1$  eV/atóm, bod tavenia - 183 °C.

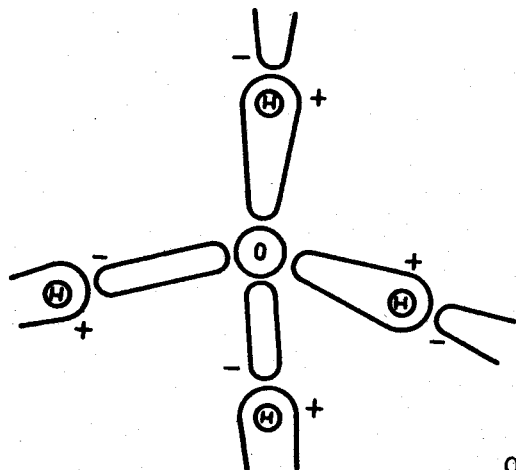


Obr. 11.3

#### d) Vodíková väzba

Niektoré zlúčeniny, predovšetkým voda, majú napriek očakávaniu omnoho vyšší bod varu a bod tavenia ako zlúčeniny podobného typu. Sily medzi molekulami  $\text{H}_2\text{O}$  (aj  $\text{NH}_3$ ,  $\text{HF}$ ) sú väčšie ako Van der Waalsove, ale slabšie ako v iónovej alebo kovalentnej väzbe a sú dôsledkom tzv. vodíkovej väzby. Napr. pri vode kyslík viaže na seba vodík tak, že valenčný elektrón vodíka patrí takmer výlučne jemu, kým jadro vodíka (protón) zostáva takmer netienené (holé). Štyri valenčné elektróny kyslíka sú usporiadané tak, že dva z nich sprostredkujú väzbu s dvoma atómami vodíka (spolu tvoria molekulu  $\text{H}_2\text{O}$ ) a ďalšie dva zase viažu jadrá atómov vodíka iných dvoch molekúl vody (obr. 11.4). Takisto zase dva elektróny (presnejšie povedané: ich orbity, t.j. priestor výskytu elektrónu, popísaný jeho vlnovou funkciou) iných dvoch molekúl vody sa na-

viažu na dve jadrá atómov vodíka. Molekula vody môže teda tvoriť vodíkové väzby s inými štyrmi molekulami vody. V kvapalnom stave sú tieto väzby ustavične rušené a vytvárané zase nové v dôsledku tepelného pohybu molekúl. Napriek tomu sa molekuly v každom okamihu združujú do malých skupiniek (krátkodosahové usporiadanie). V pevnej fáze sa tieto skupinky rozrastajú na veľké a stabilné útvary, ktoré tvoria ľadové kryštály.

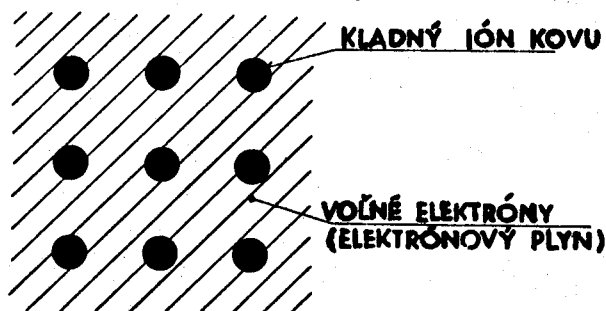


Obr. 11.4

Pretože v kvapalnom stave sú molekulové skupinky menšie, lebo sú menej stabilné a molekuly sú viac natesnené ako v pevnom stave, hustota vody je väčšia ako hustota ľadu. Hustota vody rastie do  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , kedy sa skupinky molekúl dobia na menšie a zaberajú menší priestor. Až pri vyše  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$  sa začína prejavovať normálna teplotná rozpínavosť a hustota vody klesá s rastúcou teplotou.

#### e) Kovová väzba

Teória väzby v kovoch medzi stavebnými jednotkami spočíva v predstave, že valenčné elektróny sú spoločné pre všetky atómy v kryštáli (obr. 11.5). Voľné



Obr. 11.5

elektróny vo forme elektrónového plynu vypĺňajú priestor medzi kladnými iónmi a interakciou s nimi vytvárajú veľké súdržné sily. Prítomnosť voľných elektrónov dobre vysvetľuje elektrickú vodivosť, vedenie tepla, nepriehľadnosť,

povrchový lesk a iné vlastnosti kovov. Elektróny sú voľné len do určitej miery, lebo ich pohyb vo vnútri je ovplyvňovaný ostatnými prítomnými časticami.

Atómy kovov môžu tvoriť vzájomnou väzbou kryštály neohraničených rozmerov, lebo na kovovú väzbu sa môžeme pozerat ako na kovalentnú nenasýtenú väzbu. Napr. pri molekule vodíka  $H_2$  je kovalentná väzba, lebo obidva elektróny sú spoločné len obidvom atómom vodíka, pretože v základnej sfére  $1s$  môžu byť len dva elektróny s opačnými spinmi; takto si atómy vodíka navzájom vypomáhajú pri zaplnení sféry. Ďalší elektrón už podľa Pauliho princípu nemôže byť vo sfére  $1s$  a hovoríme, že väzba je nasýtená. Najbližšia podsféra  $2s$  je už energeticky dosť vzdialená ( $\sim 10$  eV) a elektrón v tejto podsfére k jadrú už nie je viazaný. Molekula  $H_3$  nemôže teda vzniknúť. Pri lítiu, ktoré je tiež v prvej skupine periodickej sústavy prvkov (má jeden valenčný elektrón v podsfére  $2s$ ), je situácia iná. Energetický rozdiel medzi podsférami  $2s$  a  $2p$  je malý, takže môže vzniknúť aj molekula  $Li_3$ , ktorá je tiež stabilná, lebo ďalší tretí elektrón je síce v inej podsfére (lepšie povedané všetky tri elektróny zaplňajú podsféru  $1s$  a časť podsféry  $2s$ , kde môže byť až 6 elektrónov), ale v tej istej sfére  $L$ . Atómy lítia sa môžu spájať v kryštály v neobmedzenom počte, lebo ich vzájomná väzba nie je nasýtená, tak ako aj v ostatných kovoch.

Jedným z dôsledkov nenasýtenej povahy kovovej väzby je malá pevnosť kovov v porovnaní s kryštálmi, ktoré majú nasýtenú iónovú alebo kovalentnú väzbu. Dajú sa dobre deformovať, pretože kovy nemajú určité lokalizované väzby medzi susednými atómami (iónmi), aké sú v kovalentných kryštáloch, ani striedanie kladných a záporných iónov. Možno teda meniť polohové usporiadanie atómov kovu bez toho, aby sa kryštál porušil. Z tohto dôvodu vlastnosti zmesi rôznych kovových atómov veľmi nezávisia od ich pomerného zastúpenia (ak atómy majú zhruba rovnaké rozmery) ako pri iónových alebo kovalentných pevných látkach.

Tak ako pri všetkých pevných látkach, aj v kovoch držia atómy pohromade preto, že ich celková energia je menšia, keď sú viazané, ako keď sú samostatné, voľné. Zníženie celkovej energie je spôsobené tým, že ióny sú v kryštáli blízko seba, a tým aj valenčné elektróny sú bližšie k jadrú a majú menšiu potenciálnu energiu, čoho dôsledkom je kovová väzba medzi atómami.

Kým potenciálna energia elektrónov v kryštáli je menšia, ich kinetická energia je zase väčšia ako v samostatných atómoch. Voľné elektróny v kove tvoria jednotný systém, pre ktorý tiež platí Pauliho princíp. Každý elektrón z tohto systému voľných elektrónov musí byť v inom kvantovom stave a najviac dva elektróny môžu byť na jednej energetickej hladine. Keby mali elektróny obsadzovať energetické hladiny tak ako v izolovanom atóme, ich potenciálna energia by sa zvyšovala, až by sa rozpadla celá kryštalická štruktúra. Samozrejme, že skutočnosť je iná, lebo vzájomné interakcie atómov v kryštáli pozme-

nia ich valenčné energetické hladiny tak, že vzniká takmer spojitý pás energií, lebo sa skladá z toľkých energetických hladín, koľko je valenčných energetických hladín vo všetkých atómov v kryštáli. Voľné elektróny majú podľa toho kinetickú energiu od nuly až po určitú maximálnu hodnotu  $\epsilon_F$ , ktorú nazývame Fermiho energiou. Napr. pri lítiu je  $\epsilon_F = 4,72$  eV a stredná hodnota kinetickej energie voľných elektrónov je 2,8 eV. Rozdelenie energie voľných elektrónov v kove môžeme popisovať Fermi-Diracovou rozdeľovacou funkciou (10.8?).

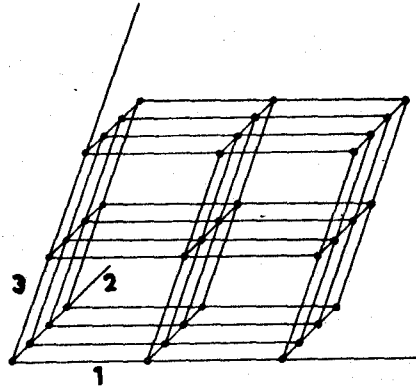
V pevných látkach sa môže vyskytovať aj viac typov väzieb súčasne. Stavebná jednotka môže byť spojená jedným typom väzieb a iný typ drží pohromade stavebné jednotky, ktoré vytvárajú pevnú látku. Pri uhlíku (grafit) sú napr. jednotlivé vrstvy ako stavebné jednotky spájané slabými Van der Waalsovými silami, ale vo vnútri vrstvy je silná väzba, čiastočne kovalentná, čiastočne kovová. Vrstvy grafitu sa môžu preto navzájom ľahko posúvať, ľahko sa odlupujú, čo spôsobuje, že grafit má výborné mazacie vlastnosti. Stavebnú jednotku metánu  $\text{CH}_4$  drží spolu kovalentná väzba, ale jednotlivé molekuly sú spájané Van der Waalsovými silami.

### 11.3 KRYŠTALICKÁ ŠTRUKTÚRA

Vieme, že pevné látky môžu mať kryštalickú alebo amorfnú formu. Väčšina pevných látok kryštalickej povahy je tvorená zhlukom drobných kryštálov, ktoré majú periodicky usporiadané atómy. Takéto látky nazývame polykryštalickými. Keď je kryštalická látka tvorená jedným kryštálom, hovoríme o monokryštáli. Vlastnosti polykryštalických látok nemusia byť rovnaké ako pri monokryštáloch, aj keď majú rovnaké stavebné jednotky.

Každý typ kryštálu môžeme poskladať pomocou tzv. elementárnej bunky jej opakovanou transláciou v trojrozmernom priestore, obr. 11.6, pozdĺž kryštalografických osí 1, 2, 3. Elementárne bunky delíme do 14 kategórií, ktoré odpovedajú 14 rôznym priestorovým Bravaisovým mriežkam, obr. 11.7. Podľa usporiadania stavebných jednotiek v elementárnej bunke rozoznávame sedem kryštalografických sústav (niekedy sa trigonálna a hexagonálna kryštalografická sústava vyšetruje spoločne ako jedna).

Pre každú elementárnu bunku existuje rad periodických usporiadaní rôznej symetrie. Počet možností usporiadania len podľa symetrie je 230. Z týchto možností sa v kryštáloch vyskytujú iba niektoré.



Obr. 11.6

Takéto usporiadania môžu splniť len dokonalé kryštály, ktoré sa v prírode ani nevyskytujú. Samotné stavebné jednotky kmitajú okolo rovnovážnej polohy (tepelné kmity), a tým sa menia vzájomné vzdialenosti. Túto poruchu v kryštáli možno popísať a jej vplyv obmedziť, takže rovnovážne polohy môžeme popisovať pomocou dokonalej mriežky. Horšie sú tzv. bodové poruchy a čiarové poruchy. Bodové poruchy delíme na tri základné druhy: vakancie (v uzloch kryštalickej mriežky chýbajú niektoré atómy), interstície (niektoré atómy sa nachádzajú v polohe medzi uzlami mriežky) a nečistoty (obsadenie uzlov v mriežke cudzím atómom). Uzlom sa myslí pravidelný bod mriežky. V iónových kryštáloch bodové poruchy musia byť také, aby bol kryštál elektricky neutrálny. Keď sa v iónovom kryštáli súčasne vyskytuje vakancia kladného aj záporného iónu, takú poruchu nazývame Schottkyho poruchou. Keď je súčasný výskyt kladného iónu v intersticiálnej (medziuzlovej) polohe a vakancia na mieste záporného iónu - je to Frenkelova porucha.

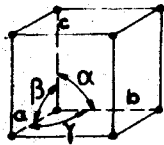
Iná možnosť bodovej poruchy interstícia - vakancia, ktorá zachováva neutralitu, je záporný ión v medziuzlovej polohe, ale táto sa vyskytuje len zriedka, pretože záporné ióny bývajú obyčajne väčšie ako kladné ióny, a tým je menšia pravdepodobnosť ich výskytu medzi uzlami. Porucha páru kladný - záporný ión v intersticiálnej polohe sa v podstate nevyskytuje.

Dislokácie, patriace pod čiarové poruchy, delíme na dva základné typy:

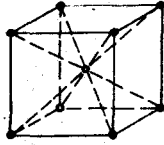
- a) hranová dislokácia, ktorú si možno predstaviť ako výsledok odstránenia časti jednej vrstvy atómov a nasledujúceho prispôsobenia sa kryštálu;
- b) skrutková dislokácia - môžeme si ju predstaviť tak, ako keby sme urobili rez dokonalého kryštálu do určitej hĺbky a potom celú mriežku na jednej strane rezu posunuli voči druhej strane. Atómy sa okolo takejto dislokácie špirálovite vinú.

Okrem bodových a čiarových porúch sa v reálnych kryštalických látkach vyskytujú trojrozmerné (objemové) poruchy, ktoré často nadobúdajú rozmery, značne prevyšujúce medziatómovú vzdialenosť v mriežke. Patria sem predovšetkým precipitáty - zlúčeniny, vznikajúce vďaka prítomnosti nečistôt, resp. prímiesí,

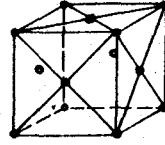
**KUBICKÁ**  $a=b=c$   $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$



**JEDNODUCHÁ**



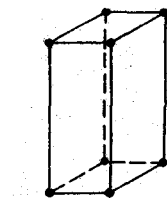
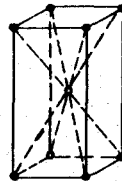
**PRIESTOROVO  
CENTROVANÁ**



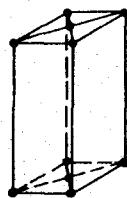
**PLOŠNE  
CENTROVANÁ**



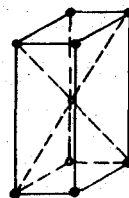
**TETRAGONÁLNA**  
 $a=b \neq c$   
 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$



**JEDNODUCHÁ**



**BAZÁLNE  
CENTROVANÁ**

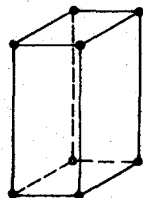


**PRIESTOROVO  
CENTROVANÁ**



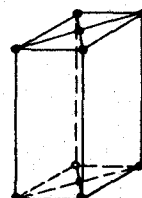
**PLOŠNE  
CENTROVANÁ**

**ROMBICKÁ**  $a \neq b \neq c$   $\alpha=\beta=\gamma \neq 90^\circ$

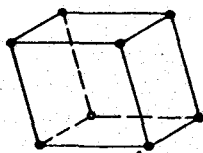


**JEDNODUCHÁ**

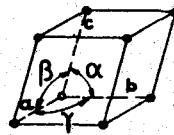
**MONOKLINICKÁ**  
 $a \neq b \neq c$   
 $90^\circ = \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$



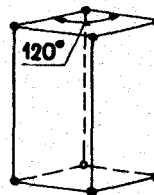
**BAZÁLNE CENTROVANÁ**



**TRIKLINICKÁ**  
 $a \neq b \neq c$   
 $\alpha \neq \beta \neq \gamma$



**TRIGONÁLNA**  
 $a=b \neq c$   $\alpha=\beta \neq \gamma \neq 90^\circ$



**HEXAGONÁLNA**  
 $a=b \neq c$   $90^\circ = \alpha = \beta \neq \gamma = 120^\circ$

Obr. 11.7



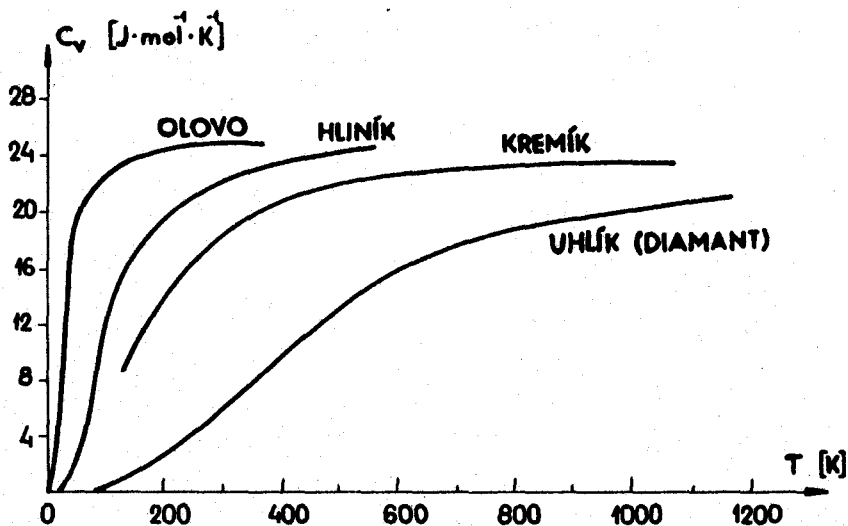
prípadne oblasti inej fázy, tvoriacej sa v materiáli; vtrúseniny, ktoré sa dostanú do materiálu pri tuhnutí a zhľuku vakancií, vytvárajúce póry.

#### 11.4 MÓLOVÉ TEPLÁ PEVNÝCH LÁTOK

Pri výklade mólových tepiel na základe molekulárno-kinetickej teórie (pozri 5.6) sme prišli k záveru, že mólové teplo pevných látok (pri konštantnom objeme) je

$$C_V = 3 R \quad (11.1)$$

To skutočne platí pre väčšinu pevných látok pri izbovej alebo vyššej teplote. Pri teplote blízkej 0 K vo všetkých pevných látkach (v niektorých aj pri izbovej teplote) je mólové teplo menšie ako 3 R a je funkciou teploty (obr. 11.8). Vzťah (11.1) nie je teda všeobecný, preto treba nájsť takú funkčnú závislosť  $C_V(T)$ , ktorá by platila všeobecne pre všetky pevné látky pri akejkoľvek teplote.



Obr. 11.8

Už Einstein (roku 1907) zistil, že pri odvodení vzťahu (11.1) sa robí chyba, keď sa uvažuje s tým, že stredná energia na jeden oscilátor v pevnej látke je  $kT$ . Tá istá chyba spôsobila, že Rayleigh-Jeansov zákon (9.25b) tiež neplatí v celej oblasti teplôt. Bolo treba predpokladať, že energia oscilátora nie je spojité spektrum, ale kvantované po kvantách  $h\nu$ . Stredná energia kvantového oscilátora je určená vzťahom (9.30)

$$\bar{W}(T) = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (11.2)$$

\* nie  $\bar{W} = kT$  ako predpokladá klasická fyzika.

Atóm môže kmitať v pevnej látke tak, že jeho kmity môžeme rozložiť do troch kartézskych osí, teda môže byť reprezentovaný tromi harmonickými kvantovými oscilátormi. Vnútoraná energia pevnej látky látkového množstva  $n$  potom je

$$U(T) = 3 n \bar{W}(T) = \frac{3 n h \nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (11.3)$$

Mólové teplo je podľa definičného vzťahu

$$C_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad (11.4)$$

Keď do vzťahu (11.4) dosadíme vzťah (11.3), dostaneme tzv. Einsteinov vzťah pre mólové teplo

$$C_v(T) = 3 R \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^2} \quad (11.5)$$

Podľa tohto vzťahu  $C_v \rightarrow 0$  pre  $T \rightarrow 0$ , čo je v zhode s experimentálnymi výsledkami a pre vysoké teploty je  $C_v = 3 R$ . Neplatí celkom presne pre najnižšie teploty. Einstein predpokladal, že kmity atómov sú rovnaké v celej pevnej látke a nie sú ovplyvňované inými - susednými atómami. Aby sa započítala aj interakcia so susednými atómami, Debye (roku 1912) považuje pevnú látku za spojité elastické teleso. Vnútoraná energia pevnej látky potom spočíva v stojatých elastických vlnách s frekvenciou  $\nu = 0$  až po maximálnu hodnotu  $\nu_{\max}$ , ktorá nie je nekonečná, aby látka nemala nekonečne veľkú vnútornú energiu, lebo by sa musela rozpadnúť. Nemá zmysel uvažovať aj tie vlny, ktorých vlnová dĺžka je menšia, ako je medziatómová vzdialenosť. Aj tieto elastické vlny podobne, ako elektromagnetické vlny v dutine, majú kvantovanú energiu. Kvantum vibračnej energie v pevnej látke sa nazýva fonón a pohybuje sa s rýchlosťou zvuku, lebo zvukové vlny sú v podstate vlny elastické. V pevnej látke môžu existovať dva druhy elastických vln: pozdĺžne, ktoré sa pohybujú rýchlosťou  $v_l$ , a priečne s rýchlosťou  $v_t$ . Debye na základe takejto predstavy dostal vzťah pre mólové teplo

$$C_V(T) = 9 R \left[ 4 \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} - \left( \frac{\Theta}{T} \right) \frac{1}{\exp(\Theta/T) - 1} \right] \quad (11.6)$$

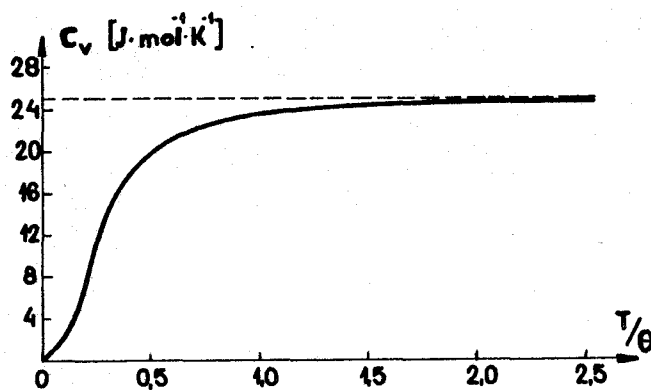
kde  $\Theta$  je Debyeova (charakteristická) teplota

$$\Theta = \frac{h \nu_{\max}}{k} \quad (11.7)$$

$\nu_{\max}$  už spomínaná maximálna frekvencia a  $x$  bezrozmerná veličina

$$\nu_{\max} = \left[ \frac{9 n N_A}{4 \pi V (1/v_l^3 + 2/v_t^3)} \right]^{1/3}; \quad x = \frac{h\nu}{kT} \quad (11.8)$$

$R$  je mólová plynová konštanta,  $T$  - teplota,  $h$  - Planckova konštanta,  $k$  - Boltzmannova konštanta,  $\nu$  - frekvencia elastických vln,  $N_A$  - Avogadrova konštanta,  $n$  - látkové množstvo a  $V$  - objem pevnej látky.



Obr. 11.9

Na obr. 11.9 je znázornený priebeh funkcie  $C_V$  (11.6) v závislosti od  $(T/\Theta)$ . Pri hodnote  $(T/\Theta) \approx 1$  sa krivka začína vyrovnávať a hodnota pre  $(T/\Theta) = 1$  je  $C_V = 23,764 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , čo je približne 95 % z maximálnej hodnoty  $24,957 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  pri  $(T/\Theta) \rightarrow \infty$ . Pre  $T > \Theta$  sa pevná látka správa podľa predpokladov klasickej fyziky a má mólové teplo  $C_V \approx 3 R$ , čo je v zhode so vzťahom (11.1). Príčinou prechodu od klasickeho ku kvantovému charakteru je, že rozdiel medzi dovolenými energiami  $h\nu$  je malý v porovnaní s  $kT$ , takže spektrum vyžiarenej energie vo forme fonónov je spojité. Pri nízkych teplotách, kde  $h\nu$  je veľké v porovnaní s  $kT$ , je znemožňovaný výskyt fonónov s energiou väčšou, ako je tzv. nulová energia (pozri 9.160)  $W_0 = h\nu/2$ . Táto nulová energia (čo je základný stav každého kvantového oscilátora) neovplyvňuje mólové teplo, lebo keď pridáme konštantný člen  $U_0 = N h\nu/2$  ku vnútornej energii  $U$ , pri parciálnej derivácii  $\partial U/\partial T$  vypadne.

Hoci Debyeova teória má svoje prednosti, predsa nemá všeobecnú platnosť (napr. reálne spektrum nemá ostrý zlom pri frekvencii  $\nu_{\max}$  ako v Debyeovej teórii), lebo neuvažuje okrem iných efektov, že stavebnými jednotkami kryštalickej štruktúry môžu byť nielen atómy, ale aj molekuly. Atómy v týchto molekulách tiež kmitajú, a to treba zahrnúť do výpočtu vnútornej energie.

Aj Einstein aj Debye neuvažujú prítomnosť voľných elektrónov, ktoré by tiež mali prispievať k vnútornej energii. Keď voľné elektróny uvažujeme ako elektrónový plyn, podobný plynu s molekulami, má každý elektrón energiu  $(3/2)kT$ . Príspevok k vnútornej energii od elektrónov, keď napr. každý atóm prispieva jedným voľným elektrónom, je  $U_e = (3/2) N kT$  a mólové elektrónové teplo by malo byť  $(3/2)R$ . Teda pre celú pevnú látku by to malo byť  $C_v = 3R + (3/2)R$ . Toto však odporuje skutočnosti. Voľné elektróny teda neprispievajú k mólovému teplu pevnej látky. Elektróny nemôžeme brať ako molekuly, ale musíme použiť pre ne Fermi-Diracovu štatistiku.

Fermi-Diracov rozdeľovací zákon (10.82) použijeme v tvare pre spojité rozdelenie energie elektrónov (čo je prakticky splnené)

$$n(\epsilon) d\epsilon = \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{\exp(\alpha) \exp(\epsilon/kT) + 1} \quad (11.9)$$

$g(\epsilon) d\epsilon$  je počet možných kvantových stavov, ktoré majú elektróny k dispozícii (počet elektrónov je  $n(\epsilon) d\epsilon$  s energiou medzi  $\epsilon$  a  $\epsilon + d\epsilon$ ). Pri 0 K elektróny v pevnej látke obsadzujú podstatne najnižšie energetické hladiny (vždy dva elektróny na jednej energetickej hladine), až posledný elektrón musí obsadiť tú najvyššiu energetickú hladinu, ktorú nazývame Fermiho energetickou hladinou alebo Fermiho energiou. Použitím funkcie (11.9) môžeme zistiť, že Fermiho energia  $\epsilon_F$  je určená vzťahom

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{2 m_e} \left( \frac{3N}{8 \pi V} \right)^{2/3} = \frac{h^2}{2 m_e} \left( \frac{3}{8 \pi} n \right)^{2/3} \quad (11.10)$$

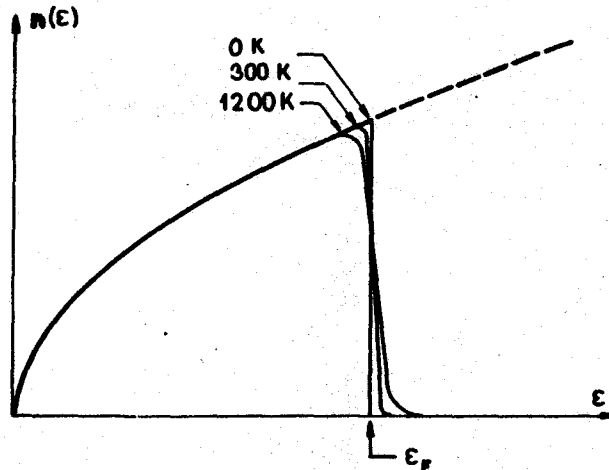
kde  $N$  je počet voľných elektrónov v celom objeme  $V$  pevného telesa (kovu). Podiel  $N/V$  je hustota voľných elektrónov -  $n$ ,  $m_e$  je hmotnosť elektrónu.

Na rozdiel od molekúl v ideálnom plyne, ktoré by pri 0 K všetky mali energiu rovnú nule, elektróny nemajú všetky nulovú energiu, ale majú postupne vyššiu a vyššiu energiu až do hodnoty  $\epsilon_F$  (napr. pre meď je  $\epsilon_F = 7,04$  eV).

Určením  $g(\epsilon) d\epsilon$ , dosadením do vzťahu (11.9) a použitím vzťahu (11.10) dostaneme:

$$n(\epsilon) d\epsilon = \frac{(3/2) N \epsilon_F^{-3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon}{\exp [(\epsilon - \epsilon_F)/kT] + 1} \quad (11.11)$$

čo je spomínané rozdelenie energie elektrónov v kove. Na obr. 11.10 je graficky znázornený priebeh funkcie (11.11).



Obr. 11.10

Teraz si už môžeme vysvetliť, prečo voľné elektróny viditeľne neprispievajú k mólovému teplu kovu. Hodnota  $kT$  pri izbovej teplote je 0,025 eV a pri 1000 K tiež len 0,086 eV. Elektróny, ktoré majú energiu nižšiu, napr. o 0,5 eV, ako je Fermiho energia, majú malú pravdepodobnosť, aby mohli absorbovať energiu a prechádzať na vyššie energetické hladiny, lebo tie hladiny, na ktoré by sa mohli dostať, sú obsadené. Pauliho princíp už vylučuje prítomnosť ďalších elektrónov na úplne obsadené hladiny. Pri nahrievaní pevnej látky získavajú energiu len tie elektróny, ktoré sú hneď pod Fermiho hladinou.

Keď na základe takejto úvahy urobíme výpočet príspevku voľných elektrónov k mólovému teplu látky, dostaneme:

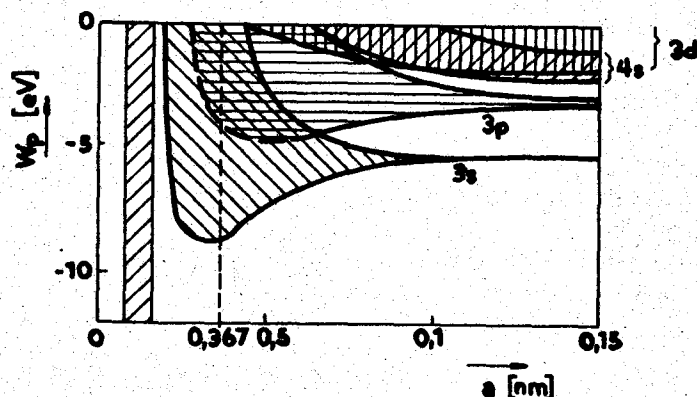
$$C_{ve} = \frac{1}{2} \pi^2 \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) R \quad (11.12)$$

Príspevok tohto elektrónového mólového tepla je zanedbateľný v širokom rozsahu teplôt. Uplatní sa však pri veľmi nízkych a pri veľmi vysokých teplotách, kde  $C_V$  je už konštantné, zatiaľ čo  $C_{ve}$  s teplotou stále rastie.

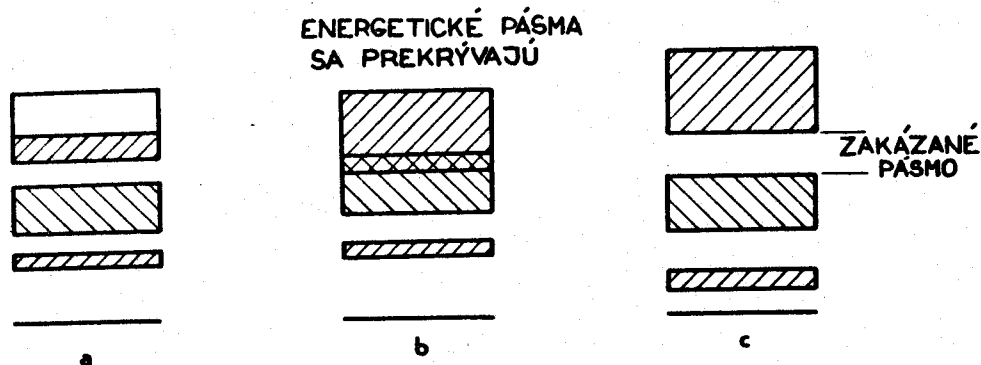
### 11.5 PÁSMOVÁ TEÓRIA PEVNÝCH LÁTOK

V izolovanom atóme sú energetické hladiny všetkých jeho elektrónov, teda aj valenčných, diskrétné. V kryštalickej látke sú atómy tesne vedľa seba a navzájom sa tak ovplyvňujú, že energetické hladiny elektrónov jednotlivých atómov nie sú také isté ako izolovaného atómu. Kryštalickú látku chápeme ako jeden celok, pre ktorý tiež platí Pauliho princíp. Elektróny, ktoré majú v izolovaných atómoch (napr. sodík) rovnaké energie (sú na rovnakých energetických hladinách), v kryštalickej látke už nemôžu mať rovnakú energiu, lebo v dôsledku vzájomnej interakcie medzi atómami sa "energetická hladina štiepi" a vzniká energetické pásmo. Keď napr. v podsfére 3s izolovaného atómu je jedna energetická hladina s dvoma elektrónmi s opačnými spinmi, v kryštalickej látke sa táto energetická hladina "rozštiepi" na toľko podhladin, koľko je atómov v tejto látke a vzniká energetické pásmo. Keď začneme atómy sodíka, ktoré tvoria kryštalickú látku, postupne k sebe približovať z izolovaného stavu, hladina sa začne rozširovať (obr. 11.11) do pásma. Medziatómová vzdialenosť pre kryštalický sodík je 0,367 nm. Čím je podsféra bližšie k jadrú, tým menej je ovplyvňovaná ostatnými atómami, a tým užšie je energetické pásmo jej elektrónov. Medzi pásmami dovolených energií sú tzv. zakázané pásma (obr. 11.12). V niektorých pevných látkach sa môžu energetické pásma prekrývať (obr. 11.12b). Energetické pásma nemusia byť vždy úplne zaplnené (obr. 11.12a). Kryštál sodíka má energetické pásmo 3s len čiastočne zaplnené valenčnými elektrónmi, lebo každý atóm má jeden valenčný elektrón na hladine 3s, hoci tam môžu byť dva.

Ak kryštál sodíka vložíme do elektrického poľa, elektróny v pásme 3s zvýšia svoju kinetickú energiu, a to stačí na to, aby mohli prechádzať na vyššie energetické hladiny, ale vždy v rámci daného pásma 3s (obr. 11.12a). V skutočnosti to znamená, že elektróny môžu preskakovať od jedného atómu k druhému



Obr. 11.11



Obr. 11.12

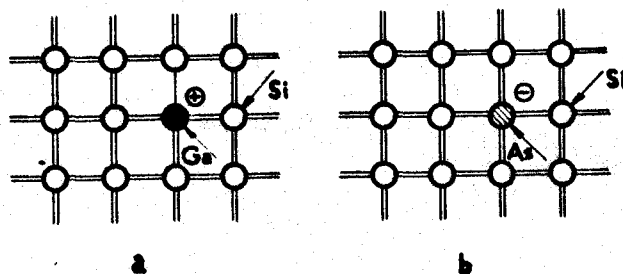
a takto putovať v kryštáli, pričom dochádza k prenosu elektrického náboja. Z tohto dôvodu je sodík dobrým vodičom elektrického prúdu.

Konfigurácia energetických pásiem diamantu (uhlíka) je podobná, ako je schematicky znázornené na obr. 11.12c. Šírka zakázaného pásma medzi valenčným pásmom 2s, ktoré je celkom zaplnené, a vodivostným pásmom 3s, ktoré je úplne prázdne, je približne 6 eV. Vo valenčnom pásme sa elektróny nemôžu pohybovať, lebo ani jedna energetická hladina nie je voľná. Ak sa chcú dostať do vodivostného pásma, musia získať energiu najmenej 6 eV. Elektrón, ktorý sa pohybuje v kryštáli, nie je úplne voľný a na svojom putovaní sa zráža tak, že v priemere sa raz zrazí na dráhe  $\sim 10^{-8}$  m. Teda na takejto vzdialenosti musí byť potenciálny rozdiel 6 V, čo zodpovedá intenzite elektrického poľa  $6 \cdot 10^8$  V/m. To je hodnota, ktorá je  $\sim 10^{10}$ -krát väčšia ako hodnota intenzity poľa, potrebná na vyvolanie pozorovateľného elektrického prúdu v sodíku. Diamant je zlý vodič elektrického prúdu a patrí medzi izolanty.

Sú také kryštalické látky (Ca, Mg, Zn a iné), ktoré majú síce úplne zaplnené valenčné pásmo (napr. pri Zn je to 4s), ale sa prekrýva s prázdny vodivostným pásmom (obr. 11.12b), a tak vytvárajú jedno vodivostné pásmo, kde sa elektróny môžu pohybovať a prispievať k elektrickému prúdu.

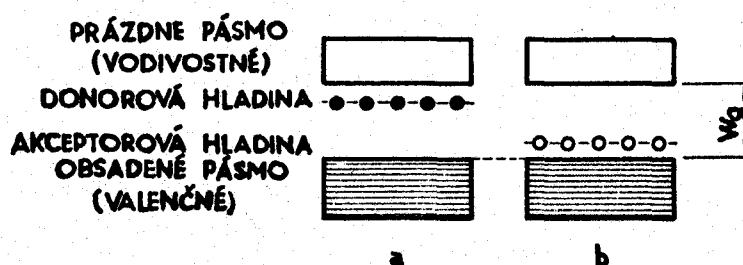
Niektoré kryštalické látky majú podobné usporiadanie pásiem ako diamant (obr. 11.12c), ale šírka zakázaného pásma je menšia, asi 1 eV, napr. pri Ge je 0,76 eV, pri Si je 1,1 eV, pri B 0,9 eV, pri Se 0,8 eV, pri zlúčeninách PbS je (-0,5 až 1) eV, pri CuO2 je 1,4 eV. Takúto skupinu látok nazývame vlastnými polovodičmi. Pri nízkych teplotách sú polovodiče len o niečo lepšie vodiče ako napr. diamant, ale pri izbových teplotách je kinetická energia tepelného pôvodu niektorých elektrónov už taká veľká, že môžu preskočiť zakázané pásmo, dostať sa do vodivostného pásma a prispieť k vzniku malého elektrického prúdu. Polovodiče majú elektrický odpor čo do veľkosti medzi vodičmi a izolantmi.

Odpor polovodičov môžeme ovplyvniť rôznymi nečistotami, ktoré zavedieme do kryštalickej štruktúry, napr. do kryštálu kremíka atómy prvkov z piatej skupi-



Obr. 11.13

ny periodickej sústavy prvkov (na obr. 11.13b sú to atómy arzenu). Tieto atómy (patrí sem aj fosfor, antimón) majú vo svojich vonkajších podsférach päť elektrónov. Atóm kremíka má len štyri elektróny ( $3s^2, 3p^2$ ) a je v kryštáli viazaný kovalentnou väzbou. Ak namiesto atómu kremíka dáme atóm arzenu, jeho päť elektrónov ( $4s^2, 4p^2$ ) sa rozdelí tak, že štyri budú viazané kovalentnou väzbou a piaty bude len slabo (slabšie ako v izolovanom atóme) viazaný k materskému atómu (arzenu). Energetické hladiny takýchto "prebytočných" elektrónov padnú do zakázaného pásma tesne pod vodivostné pásmo kryštálu Si a nazývame ich donorové hladiny (obr. 11.14a). Elektróny môžu preskočiť do vodivostného pásma pri získaní už pomerne malej energie ( $\sim 0,02$  eV) a stať sa nositeľmi elektrického prúdu. Kryštalická látka, znečistená donormi, sa nazýva polovodič typu n (nositeľom prúdu je negatívny náboj).

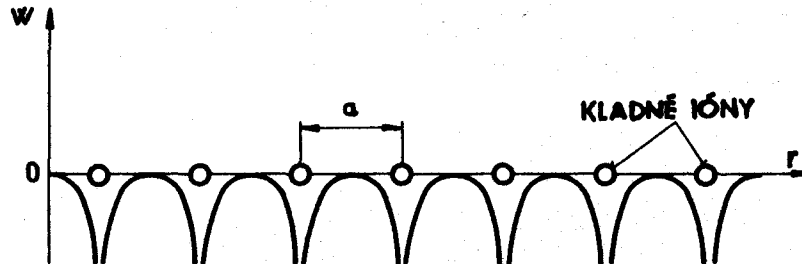


Obr. 11.14

Pri znečistení kryštálu kremíka atómami prvkov z tretej skupiny periodickej sústavy prvkov (na obr. 11.13a sú to atómy gália) - tzv. akceptory (Al, Ga, In) v zakázanom pásme nad valenčným pásom vzniknú akceptorové hladiny (obr. 11.14b). Akceptory majú len tri elektróny vo vonkajších podsférach (napr. Ga  $4s^2, 4p^1$ ). Do kovalentnej väzby im chýba ešte jeden elektrón, po ktorom zostáva diera. Elektróny, ktoré sú vo valenčnom pásme, teraz už môžu po získaní pomerne malej energie opustiť ho a preskočiť na akceptorovú hladinu. Elektróny na akceptorových hladinách k elektrickému prúdu neprispievajú, ale prispievajú k nemu tie elektróny, ktoré vo valenčnom pásme preskakujú z diery do diery a približujú sa k anóde. Na tento proces sa môžeme pozerat' aj tak, že nie elektróny, ale diery vo valenčnom pásme sú pohyblivé a sú príčinou elektrického prúdu. Kryštalická látka, znečistená akceptormi, sa nazýva polovodič typu p (nositeľom prúdu je pozitívny náboj diery).



Na vznik dovolených a zakázaných pásiem sa môžeme pozerat' aj z iného hľadiska, ktoré je v teórii pevných látok uprednostňované. Pohyb elektrónu v kryštáli nie je pod účinkom konštantného, ale periodického potenciálu (obr. 11.15). Vieme, že potenciálna energia elektrónu je tým väčšia, čím ďalej je od jadra (najväčšia je mimo dosah jadra a je nulová). Voľný elektrón s hybnosťou  $p$  má podľa de Broglieho vlnovú dĺžku  $\lambda = h/p$ .

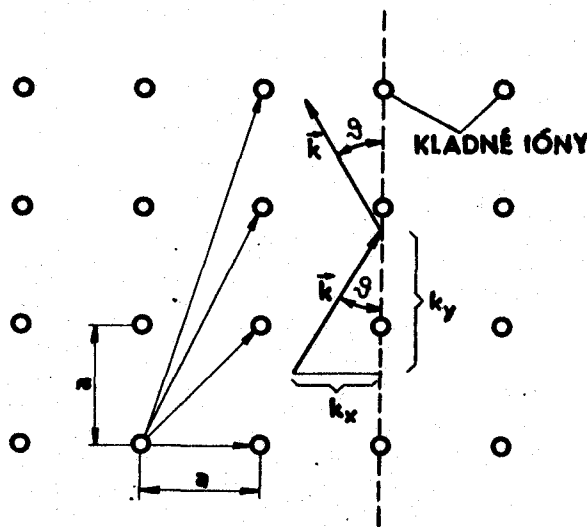


Obr. 11.15

Ak elektrón putuje kryštalickou mriežkou, jeho vlnová dĺžka je porovnateľná s medziatómovou vzdialenosťou (mriežkovou konštantou) a interaguje s atómami, podlieha difrakcii ako röntgenové lúče (pozri (9.41)) alebo ako elektrónový zväzok, ktorý dopadá zvonku na kryštál (pozri (9.56)).

Na rovine, zloženej z atómov kubického kryštálu (obr. 11.16), vzniká difrakcia elektrónov, pre ktoré platí:

$$n \lambda = 2 a \sin \vartheta \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.13)$$



Obr. 11.16

Vzťah (11.13) môžeme vyjadriť pomocou veľkosti vlnového vektora  $k = 2\pi/\lambda$ .

Teda

$$k = \frac{n\pi}{a \sin \vartheta} \quad (11.14)$$

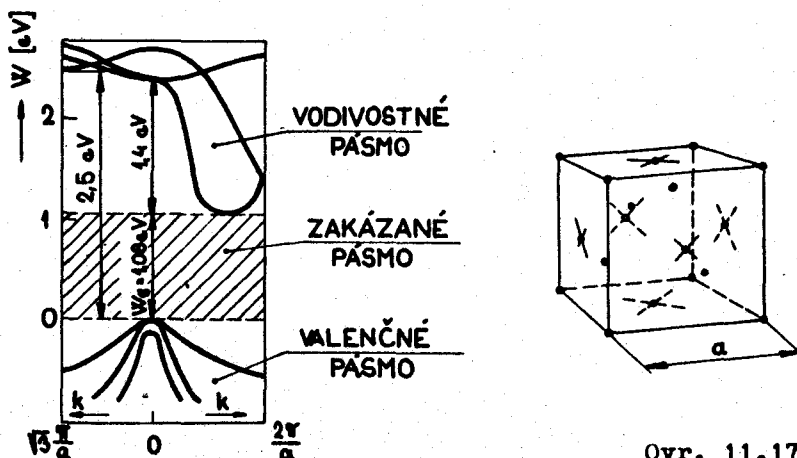
Elektrón sa od zvislej roviny odrazí vtedy, keď je  $k_x = n (\pi/a)$  a od ostatných rovín, keď je  $k_y = n (\pi/a)$  a  $k_z = n (\pi/a)$ . Keď je  $k$  menšie ako  $(\pi/a)$  (vlnová dĺžka  $\lambda > a$ ), elektrón sa neodráža a voľne prechádza kryštálom. V súradnom systéme  $k_x, k_y, k_z$  množina koncových bodov vlnového vektora  $\vec{k}$ , ak platí  $\pi/a > |\vec{k}| > 0$ , tvorí tzv. prvú Brillouinovú zónu. Elektróny z tejto zóny nepodliehajú difrakcii. Druhá zóna je množina bodov vektora  $\vec{k}$ , ak platí  $\pi/a \leq |\vec{k}| < 2\pi/a$ , atď.

Energia elektrónu z prvej zóny je

$$W = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2 k^2}{8\pi^2 m} \quad (11.15)$$

taká ako pre voľný elektrón. Elektróny z ostatných zón už podliehajú difrakcií, teda nie sú voľné a vzťah (11.15) pre ne neplatí.

Pri pôsobení vonkajšej sily elektrón nereaguje na ňu rovnako. Kým jeho energia je taká, že jeho vlnová dĺžka je väčšia ako mriežkova konštanta  $a$ , elektrón z prvej zóny sa správa ako voľný. Na hranici zón sa správa tak, ako keby mal nulovú hmotnosť, nikde neputuje (alebo inak povedané: elektrónové vlny sú stojaté, a nie postupné). Medzi dvoma zónami vzniká v  $k_x, k_y, k_z$  systéme priestor, ktorý je pre elektróny zakázaný, čo odpovedá zakázanému energetickému pásmu. Kryštál látky nemusí byť len kubický a smery  $(k_x, k_y, k_z)$  v kryštáli všeobecne nie sú ekvivalentné. V jednom smere pre to isté  $k$  môže byť zakázaný priestor, v inom smere dovolený, v takomto prípade sa energetické pásma môžu prekrývať. Na obr. 11.7 je mriežková a pásmová štruktúra kremíka pre rôzne smery v kryštáli. Vidíme, že existuje určitá energetická oblasť



Ovr. 11.17

(zakázané pásmo), v ktorých nie je možná reálna hodnota  $k$ . Šírka tohto pásma je  $W_g = 1,08 \text{ eV}$ .

Zakrivenie pásmovej štruktúry  $d^2W/dk^2$  určuje efektívnu hmotnosť

$$m_{ef} = \frac{h^2}{4\pi^2} \left( \frac{d^2W}{dk^2} \right)^{-1} \quad (11.16)$$

V pásmovej štruktúre sa vyskytujú viaceré minimá s odlišným zakrivením, a preto v určitom pásme sa môžu nachádzať nosiče náboja s rozdielnou efektívnou hmotnosťou. Záporná efektívna hmotnosť elektrónu sa vyskytuje vtedy, keď elektrón má vlnové číslo, ktoré ho umiestňuje blízko vonkajšej hranice Brillouinovej zóny (v pásmovej teórii je to horná časť valenčného pásma). Zväčšenie energie elektrónu potom znamená zväčšenie hybnosti odovzdanej iónom mriežky (elektrónové vlny podliehajú Braggovmu odrazu, aj keď nie úplnému ako na hraniciach zóny) a jeho hybnosť sa zmenší, čo zodpovedá zápornej efektívnej hmotnosti. Elektrón s kladnou efektívnou hmotnosťou je zo spodnej časti vodivostného pásma. Látky s takmer zaplneným valenčným pásmom vedú elektrický prúd, hoci elektróny v tejto časti pásma majú zápornú efektívnu hmotnosť. Možno to vysvetliť tak, že nositeľmi elektrického prúdu sú diery, ktoré sa správajú tak ako kladné častice s kladnou hmotnosťou.

Aj v teórii voľných elektrónov kovov získané výsledky budú viac odpovedať skutočnosti, keď zavedieme strednú efektívnu hmotnosť na Fermiho hladine. Fermiho energia potom je

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2 m_{ef}} \left( \frac{3 N}{8 \pi^3 V} \right)^{2/3} \quad (11.17)$$

Podiel  $m_{ef}/m$  je rôzny pre jednotlivé kovy. Napr. pre nikel je rovný 28, pre meď 1,01 a pod. Elektrónové mólové teplo (11.12) je priamo úmerné  $m_{ef}$ , a teda pre nikel (tiež platina, kobalt) jeho hodnota je na rozdiel od medi veľká.

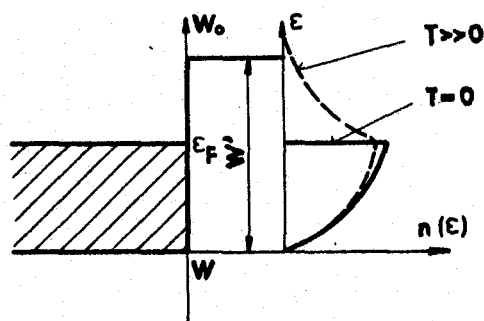
## 11.6 POHYB NOSIČOV ELEKTRICKÉHO NÁBOJA

System nosičov náboja je v pevnej látke bez pôsobenia vonkajšieho vplyvu v tepelnej rovnováhe, pri ktorej sa nastaví určité rovnovážne rozdelenie nosičov elektrického náboja. V tomto stave sa navonok neprejavuje žiaden výsledný prenos nábojov. Pôsobením vonkajších rušivých vplyvov, ako je napr.

pôsobenie elektrického a magnetického poľa, teplotný gradient, ožiarenie, mechanické namáhanie, sa rozdelenie nábojov poruší a získame porušenú rozdeľovaciu funkciu. S porušeným rozdelením nosičov náboja sú spojené niektoré charakteristické prípady.

### 11.6.1 Fyzikálne javy na povrchu a rozhraní pevných látok

Povrch kryštalickej látky je silné porušenie pravidelnosti stavby kryštalickej mriežky tejto látky. Povrchovému atómu chýba jeden susedný atóm a jeden z jeho valenčných elektrónov (pri kovalentných kryštáloch) neprispieva k väzbe, je viazaný voľnejšie k svojmu atómu, ktorý sa usiluje vytvoriť chýbajúcu väzbu a prijať do nej elektrón chýbajúceho suseda. Dôsledkom toho je, že povrchový atóm vytvorí vo svojej blízkosti energetickú hladinu, ktorá môže byť obsadená elektrónom. Na povrchu takto vzniknú mimoriadne energetické hladiny (Tammove hladiny), ktoré padnú do zakázaného pásma tesne pod povrch vodivostného pásma. Niektoré elektróny, ktoré sa v kryštáli pohybujú vo vodivostnom pásme, klesnú do povrchových hladín, odkiaľ už nie sú schopné sa dostať do vnútra kryštálu. Takto sa na povrchu zvýši hustota elektrónov, ktoré tvoria jednoatómovú vrstvu. Pod ňou sa v dôsledku odpudzovania zníži koncentrácia elektrónov a vznikne druhá vrstva kladných nábojov, ktorá je podstatne širšia. Táto elektrická dvojvrstva predstavuje pre elektróny vo vnútri kryštálu potenciálovú bariéru. Na prekonanie tejto povrchovej potenciálovej bariéry musí elektrón, keď sa má dostať mimo pevnú látku, mať energiu  $W_0$  (obr. 11.18). Aby ktorýkoľvek elektrón z vodivostného pásma opustil látku a prešiel bariéru, potrebuje získať energiu  $W' = W_0 - W$ , kde  $W$  je najnižšia energetická hladina vodivostného pásma.



Obr. 11.18

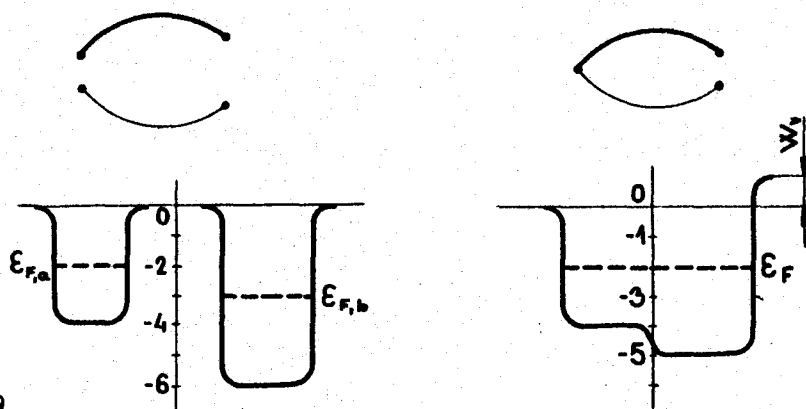
Pre teplotu  $T = 0 \text{ K}$  je v látke najvyššou obsadenou hladinou Fermiho hladina  $E_F$ . Elektróny vo vodivostnom pásme majú maximálnu kinetickú energiu  $W_{\max} = E_F - W$  a zvýšením teploty sa kinetická energia ešte zvýši, lebo

Fermiho hladina sa tiež posunie vyššie. Elektróny, ktoré opustia látku, musia k svojej kinetickej energii získať ešte energiu  $W_v = W' - W_{max}$ . Veličina  $W_v/e = V_k$  sa nazýva kontaktný potenciál, kde  $e$  je náboj elektrónu.

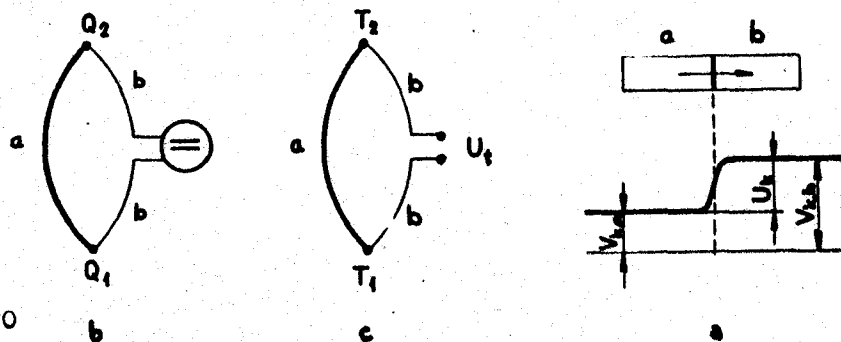
Energiu elektrónov, ktorú potrebujú na výstup z látky, môžeme dodať rôznym spôsobom:

- Zvyšovaním teploty, lebo pri teplote  $T > 0\text{ K}$  je určitá pravdepodobnosť, že sa nájdu nejaké elektróny, ktoré získajú takú energiu, že sú schopné opustiť látku. Tento jav nazývame termoelektrónovou emisiou.
- Ožiarení, keď energia fotónu  $h\nu \geq W$ , ktorú získa elektrón, je postačujúca na opustenie látky. Tento jav nazývame fotoelektrónovou emisiou (pozri 9.2.1).
- Rýchlými elektrónmi, ktoré prenikajú do látky a pri zrážke odovzdajú svoju energiu elektrónom látky, ktoré takto získajú dostatočnú energiu na tzv. studenú emisiu.

Doteraz sme hovorili o styku látky s vakuom a o spôsobe odovzdania potrebných energií na emisiu (výstup) elektrónu z látky do vákua. Rozoberme si teraz prípad styku dvoch pevných látok. V takomto prípade elektróny prechádzajú z látky, ktorej kontaktný potenciál  $W_{k2} = W_{w2}/e$  je väčší ako kontaktný potenciál látky, do ktorej vstupujú  $V_{k2} > V_{k1}$ . Na obr. 11.19 a obr. 11.20a je schematicky znázornené spojenie dvoch látok (napr. kovov) a a b.



Obr. 11.19



Obr. 11.20

Tieto dve látky tvoria teraz jeden systém, takže po ustálení (po prechode elektrónov z látky a do látky b) Fermiho energetické hladiny oboch látok budú na rovnakej hodnote. Rozdiel Fermiho hladín pred spojením oboch látok bude  $\varepsilon_{Fa} - \varepsilon_{Fb} = W_v$  a podiel  $W_v/e = U_k$  je kontaktné napätie medzi dvoma látkami. Z obr. 11.19, 11.20a a z predchádzajúcej úvahy vyplýva, že  $U_k = V_{ka} - V_{kb}$ . Keď spojíme viacero látok tak, že spolu tvoria uzavretý okruh, je súčet rozdielov kontaktných potenciálov jednotlivých spojov rovný nule. Teda v takomto okruhu (keď sú látky v tepelnej rovnováhe) netečie elektrický prúd.

### 11.6.2 V e d e n i e e l e k t r i c k é h o p r ú d u v p e v n ý c h l á t k a c h

Postupný (driftový) pohyb nosičov náboja môže spôsobiť okrem iných príčin elektrické pole, ktoré pôsobí na náboje elektrostatickými silami.

a) V kovoch môžeme elektrickú vodivosť charakterizovať niektorými vlastnosťami:

- hustota prúdu v ustálenom stave je podľa Ohmovho zákona úmerná intenzite elektrického poľa (pozri časť 6.3.3) podľa vzťahu (6.60) a (6.61);
- merný odpor pri izbovej teplote pre väčšinu kovov je  $\rho \approx 10^{-3} \Omega \text{ m}$ ;
- nad Debayovou teplotou  $T > \Theta$  merný odpor kovu rastie lineárne s teplotou

$$\rho(T) \sim \text{const} \cdot T \quad (11.18)$$

- pri teplotách  $20 \text{ K} < T < \Theta$  je merný odpor pre väčšinu kovov úmerný piatej mocnine teploty

$$\rho(T) \sim \text{const} \cdot T^5 \quad (11.19)$$

- merný odpor kovov s malým množstvom prímiesí možno vyjadriť (Matthiessenovo pravidlo) vzťahom

$$\rho = \rho_0 + \rho(T)$$

kde  $\rho_0$  je konštanta, ktorá rastie s množstvom prímiesí, a  $\rho(T)$  závisí len od teploty;

- vo väčšine kovov merný odpor rastie so zvyšujúcim sa tlakom;
- nad Debyeovou teplotou  $T > \Theta$  je podiel mernej tepelnej a mernej elektrickej vodivosti úmerný teplote, pričom konštanta úmernosti je približne rovnaká pre všetky kovy (Wiedemann-Franzov zákon):

$$\frac{\lambda}{\tau} = L T \quad (11.20)$$

kde  $L$  je Lorenzova konštanta a podľa elektrónovej teórie pre všetky kovy je

$$L = \frac{k^2}{3} \left( \frac{k}{e} \right)^2 = 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ v}^2 \text{ K}^{-2}$$

- pri teplotách blízkyh 0 K sa v niektorých kovoch objavuje supravodivosť, t.j. ich merný odpor je nulový.

b) Vieme už, že polovodiče môžu byť typu  $n$ , kde hlavnými (majoritnými) nosičmi prúdu sú voľné elektróny a ich koncentrácia je omnoho väčšia ako koncentrácia voľných dier (minoritné nosiče prúdu). V polovodičoch typu  $p$  je opačná prevaha nosičov náboja, majoritné nosiče sú voľné diery a minoritné sú voľné elektróny. Elektrické pole pôsobí na elektróny i na diery silou  $F = e E$  a udeľuje im zrýchlenie  $a = (e E)/m_{ef}$ .

Diery ako kladné nosiče náboja sa usilujú pohybovať v smere vektora intenzity poľa a elektróny v opačnom smere. Elektróny aj diery vykonávajú všeobecne neusporiadaný pohyb a pri tepelnej rovnováhe bez účinku vonkajších síl je výslednica vektorov rýchlosti elektrónov aj dier nulová. Keď je látka v elektrickom poli, stredná hodnota zložky vektorov rýchlosti elektrónov a dier do smeru poľa nebude nulová. Túto zložku rýchlosti nazývame driftovou rýchlosťou (alebo postupnou, transportnou rýchlosťou). Driftová rýchlosť pre elektróny a diery je

$$v_n = u_n E \quad v_p = u_p E \quad (11.21)$$

kde  $u_n$  je pohyblivosť elektrónov a  $u_p$  pohyblivosť dier. Jednotkou pohyblivosti je  $\text{m}^2/\text{Vs}$ . Ak sa nosiče nábojov pohybujú, tečie elektrický prúd. Hustota elektrického prúdu elektrónov a dier je

$$i_n = e n v_n = e n u_n E; \quad i_p = e p v_p = e p u_p E$$

Celková hustota elektrického prúdu je

$$i = i_n + i_p = e (n u_n + p u_p) E \quad (11.22)$$

kde  $n$  je koncentrácia voľných elektrónov a  $p$  koncentrácia voľných dier. Použitím vzťahu (6.60) pre Ohmov zákon  $i = \tau E$  dostaneme celkovú mernú vodivosť

$$\tau = e (n u_n + p u_p) = \tau_n + \tau_p \quad (11.23)$$

Merný odpor je

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_n + \gamma_p} = \frac{1}{e(n u_n + p u_p)} \quad (11.24)$$

Pre vodivosť typu n, keď zanedbáme príspevok dier k celkovému elektrickému prúdu, platí:

$$\rho_n = \frac{1}{\gamma_n} = \frac{1}{e n u_n} \quad (11.25)$$

a pre polovodič typu p (zanedbávame zasa príspevok od elektrónov)

$$\rho_p = \frac{1}{\gamma_p} = \frac{1}{e p u_p}$$

Koncentrácia nosičov prúdu, aj ich pohyblivosť závisia od teploty. Pri vlastných polovodičoch merný odpor so stúpajúcou teplotou veľmi rýchlo klesá. Pri nevlastných polovodičoch pozorujeme i pokles merného odporu pri zvýšení teploty, ale nie taký výrazný ako pri vlastných. Môže sa stať, že merný odpor neklesá, ale aj stúpa. Tento jav nastáva vtedy, keď koncentrácia majoritných nosičov náboja je takmer stála (všetky prímеси sú ionizované) a ich pohyblivosť vtedy klesá.

### 11.6.3 Fyzikálne javy v pevných látkach

Ďalším rušiacim vplyvom je teplotný gradient v pevných látkach a rozličné javy, ktoré vznikajú týmto vplyvom, nazývame termoelektrickými. Patrí sem Seebeckov, Peltierov a Thomsonov jav.

#### a) Seebeckov jav

Keď v pevnej látke medzi dvoma miestami budeme udržiavať teplotný rozdiel, vznikne aj elektrický potenciálový rozdiel. Predpokladáme, že pri takýchto hodnotách teplôt sú v látke voľné nosiče nábojov. Seebeck (1822) pozoroval, že v uzavretom okruhu (obr. 11.20c), ktorý je zložený z dvoch vodičov, vzniká elektrický prúd, ak spojené konce majú rôzne teploty. V tomto prípade ide o objemové, ale aj kontaktné elektromotorické napätie. Kontaktný potenciál závisí od teploty látky, lebo pri vyššej teplote elektróny potrebujú menej energie na prekonanie povrchovej potenciálovej bariéry. Kontaktné napätia oboch spojov, ktoré nemajú rovnakú teplotu, sú rôzne a ich rozdiel - kontak-



tové elektromotorické napätie - prispieva k celkovému elektromotorickému napätiu.

Objemové elektromotorické napätie vzniká v objeme látky tým, že elektróny, ktoré sú na mieste s vyššou teplotou, majú väčšiu kinetickú energiu a putujú na miesta s vyššou teplotou, kde potom vzniká väčšia koncentrácia elektrónov. Takto rozmiestnené náboje vytvárajú objemové elektromotorické napätie, ktoré už bráni ďalšiemu rozmiestňovaniu nábojov, a vzniká ustálený stav.

Elektromotorické napätie (celkové) je výslednicou kontaktného a objemového elektromotorického napätia. Zmena EMN je úmerná zmene teplôt oboch spojov

$$dU_e = \alpha dT \quad (11.27)$$

kde  $\alpha$  je Seebeckov koeficient. Pre kovy je  $\alpha \approx 10 \mu\text{V/K}$ . Keď spojíme dva polovodiče opačných typov, Seebeckov koeficient bude omnoho väčší  $\alpha \approx 1 \text{ mV/K}$ . Takéto termočlánky možno už použiť pri premene tepla na elektrickú energiu.

#### b) Peltierov jav

Ak v uzavretom okruhu, ktorý je vytvorený z dvoch vodičov, prípadne polovodičov (obr. 11.20b), tečie elektrický prúd, obidva spoje budú mať rôznu teplotu. Jeden spoj je chladnejší ako okolie a odoberá teplo  $Q_2$  z okolia, druhý je teplejší a odovzdáva teplo  $Q_1$  okoliu. Zmena tepla, ktoré spoj pohlcuje alebo odovzdáva za čas  $dt$  prechodom elektrického prúdu  $I$ , je daná vzťahom

$$dQ = \Pi I dt \quad (11.28)$$

kde  $\Pi$  je Peltierov koeficient a so Seebeckovým koeficientom súvisí vzťahom  $\Pi = \alpha T$ . Príčina tohto javu je v nerovnakej strednej hodnote energie nosičov náboja oboch látok, ktoré sa dotýkajú. Keď vonkajšie elektrické pole núti nosiče náboja prechádzať z oblasti s vyššou strednou hodnotou energie elektrónov do oblasti s nižšou strednou hodnotou energie, časť energie nosiče nábojov odovzdajú vo forme tepelných kvánt - fonónov - prostrediu, ktorého teplota sa takto zvyšuje. Na druhom spoji je proces opačný, prechádzajúce nosiče nábojov prijímajú časť energie z prostredia, aby si vyrovnali energetickú diferenciu a jeho teplota teda klesá.

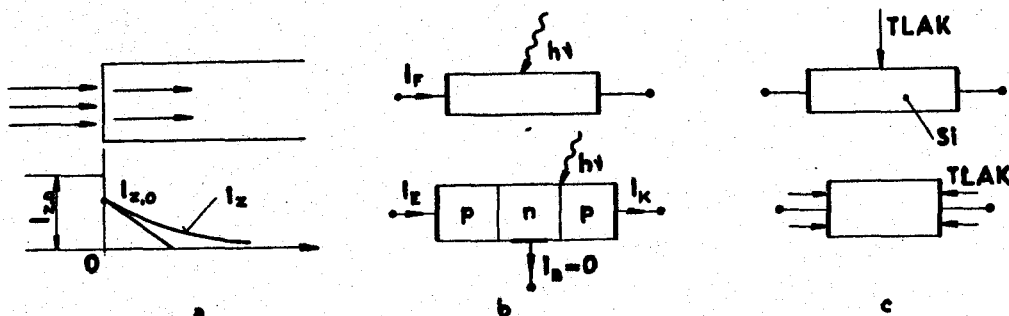
#### c) Thomsonov jav

Vodič alebo polovodič, ktorým tečie elektrický prúd a súčasne sa pozdĺž neho mení teplota, odovzdáva alebo prijíma teplo. Ak vodičom tečie prúd  $I$  a medzi kontaktami je teplotný rozdiel  $dT$ , potom sa za čas  $dt$  vyvinie alebo prijme teplo

$$d^2Q = \mu I dT dt \quad (11.29)$$

kde  $\mu$  je Thomsonov koeficient. Príčina vzniku Thomsonovho javu je v podstate rovnaká ako v Peltierovom jave.

Iný rušiaci vplyv je ožiarenie látky. Javy týmto vyvolané nazývame fotoelektrickými (obr. 11.21a,b). Delíme ich na fotoelektrický jav vonkajší, vnútorný a fotovoltický.



Obr. 11.21

a) Vonkajší fotoelektrický jav

Tento jav (pozri 9.2.1) vzniká pri pohltení fotónov, ktorých energia je  $\varepsilon = h\nu$ , elektrónmi. Pohltením fotónu získa elektrón energiu, čo mu umožní prekonať potenciálovú bariéru - vystúpi z látky. Treba pamätať, že nestačí pohltiť fotón, aby sa elektrón dostal von z látky, ale aj jeho okamžitá rýchlosť musí byť nasmerovaná na povrch v čase absorpcie fotónu.

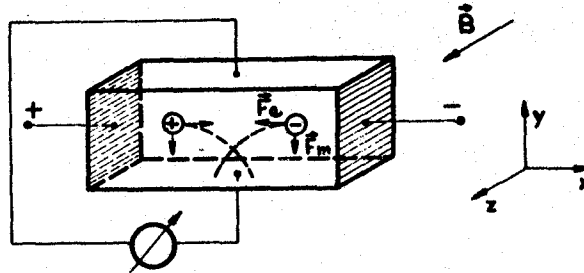
b) Vnútorný fotoelektrický jav

Vnútorný fotoelektrický jav vzniká vtedy, keď elektróny pohltnú fotóny, ktorých energia nestačí elektrónu na prekonanie povrchovej bariéry. V takomto prípade elektrón neopustí látku, ale môže sa dostať do vodivostného pásma a prispieť k vedeniu elektrického prúdu. Vodivosť látky sa takto zväčší.

c) Fotovoltický jav

Tento jav sa prejavuje vznikom elektromotorického napätia pri ožiarení, tzv. fotoelektromotorické napätie. Môže vzniknúť na styku kov - polovodič, polovodič (n) - polovodič (p) alebo aj v samotnom polovodiči. V poslednom prípade vzniká v dôsledku nerovnomerného ožiarenia, čím sa dosiahne zmena koncentrácie nosičov náboja. Ožiarenie rozhrania polovodič polovodič spôsobí, že sa súčasne uvoľnia elektrón aj diera. Keď je napr. elektrón minoritným nosičom, ľahko môže prejsť cez bariéru, ale pre diery, ktorá je majoritným nosičom, je prechod cez bariéru zakázaný. Takto sa zhromažďuje jeden druh nosičov náboja na jednej strane a druhý druh na strane druhej, čím vzniká napätie.

Ďalším rušiacim vplyvom je vonkajšie magnetické pole. Najdôležitejším z rôznych javov, ktoré vznikajú za účinku magnetického poľa, je Hallov jav (obr. 11.22). Indukcia magnetického poľa je v smere osi  $+z$  a intenzita vonkajšieho elektrického poľa je v smere osi  $+x$ .



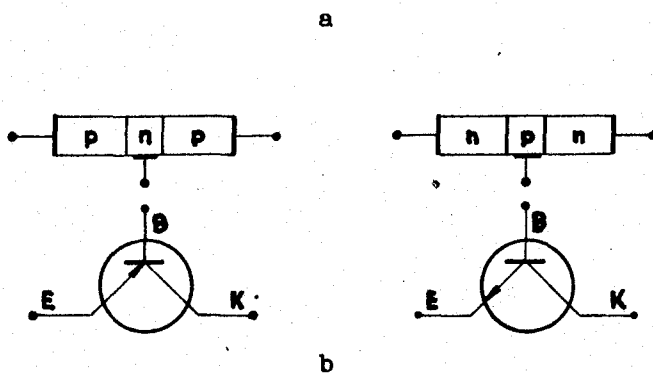
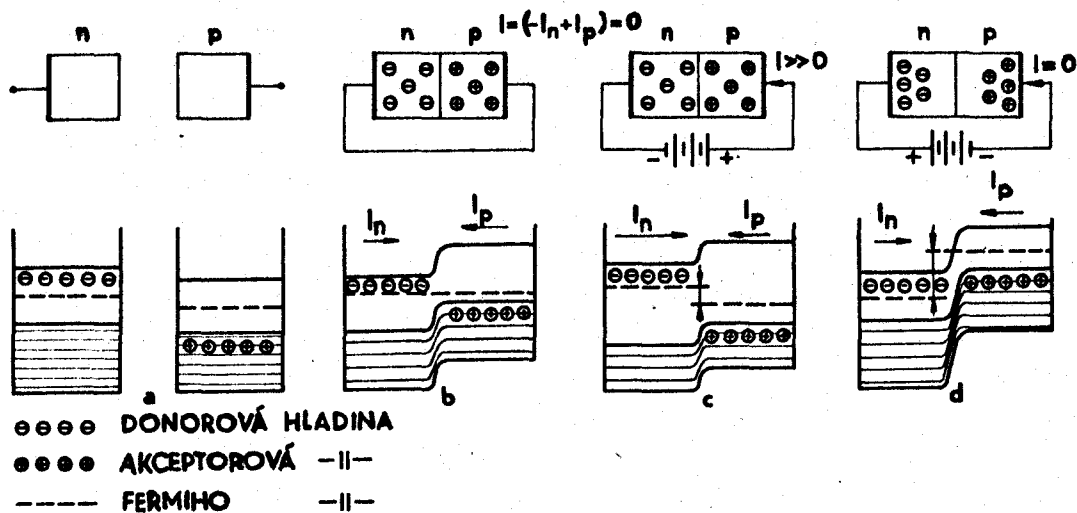
Obr. 11.22

Na nosiče nábojov (elektróny a diery) pôsobí magnetické pole silou  $\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B})$  a elektrické pole silou  $\vec{F}_e = Q\vec{E} = Q\vec{E}_x$ . Sila  $\vec{F}_e$  náboje urýchľuje a sila  $\vec{F}_m$  ich stáča tak, že sa zhromažďujú na spodnej stene vzorky. V smere osi  $y$  vznikne medzi doľnou a hornou stenou elektrické pole  $E_y = F_y/e = \pm (B i)/(n e)$ , kde  $i$  je hustota elektrického prúdu,  $n$  - koncentrácia voľných nosičov náboja, znamienko  $+$  je pre diery a  $-$  pre elektróny. Zo smeru  $E_y$  môžeme napr. určiť typ polovodiča. Okrem tejto vlastnosti môžeme pomocou Hallovho javu určiť aj ďalšie mikroskopické vlastnosti látok.

Rušivý vplyv môžu mať aj rôzne kombinácie doteraz spomenutých vplyvov. Ďalej sem napr. patrí plastická deformácia, pri ktorej vzniká tzv. piezoelektrický jav (obr. 11.21c). Účinkom tlaku sa zmení štruktúra látky, čím sa zmení aj celkový elektrický moment. Na povrchu kryštálu sa objaví elektrický náboj, čím vznikne potenciálový rozdiel (napätie) medzi tými rovinami kryštalickej vzorky, na ktoré pôsobia vonkajšie sily. Opačným postupom, keď na kryštalickej vzorku priložíme striedavé napätie, vzorka začne kmitať. Tento jav sa využíva pri generovaní ultrazvukových vln.

#### 11.6.4 F y z i k á l n e j a v y v p - n p r i e c h o d o c h

Spojením dvoch polovodičov opačných typov vzniká  $p - n$  priedchod. Na obr. 11.23 je schematicky znázornené takéto spojenie. Ak teraz tieto polovodiče spojíme elektricky (ich opačné konce), začnú tiecť tzv. difúzne prúdy  $I_n$  a  $I_p$ , spôsobené rôznou koncentráciou voľných nosičov náboja, dovtedy, kým nenaštane rovnováha. Fermiho hladiny sú spojené a vznikne kontaktné napätie. Toto napätie (potenciálová bariéra) bráni prechodu majoritných nosičov, ale pri



Obr. 11.23

prechode bariérou podporuje minoritné nosiče. Kontaktné napätie sa usiluje vtlačiť elektróny hlbšie do oblasti n a diery zasa do oblasti p. Táto priechodová vrstva má elektrický odpor oveľa menší ako zvyšok kryštálu, lebo má malú koncentráciu voľných nábojov (obr. 11.23a). Ak takýto priechod bude pod vplyvom vonkajšieho poľa, poruší sa pôvodné usporiadanie a Fermiho hladiny sú už na rôznej energetickej úrovni. Keď vonkajšie elektrické pole bude opačne orientované ako kontaktné napätie, zúži sa šírka stykovej oblasti, a tým aj jej elektrický odpor. Narastá prúd majoritných nosičov náboja (elektróny idú do oblasti p a diery do oblasti n), to znamená, že priechodom tečie veľký prúd. Hovoríme, že p - n priechod je orientovaný v priestupnom smere. V opačnom prípade, keď je vonkajšie pole súhlasné s kontaktným napätím, šírka priechodovej vrstvy sa zväčšuje, jej elektrický odpor rastie a priechodom tečie iba veľmi malý prúd. Hovoríme, že priechod je orientovaný v závernom smere. Priechod p - n má teda usmerňovacie účinky a takýto prvok sa nazýva dióda. Keď spojíme tri polovodiče tak, že vytvorí kombináciu npn alebo pnp, dostaneme tzv. tranzistor, ktorý má zosilňovací účinok (obr. 11.23b). Princíp tohto zosilňovacieho účinku spočíva vo zväčšovaní koncentrácie minoritných nosičov náboja v oblasti výstupného priechodu. V pnp tranzistore zdrojom dodatočných nositeľov je jeden priechod p - n.

Napätové zosilnenie musí byť na najvyššom možnom odpore, lebo na ňom sa najviac prejavuje vzrast prúdu. Prvý priedchod p - n musí byť zapojený tak, aby injektoval minoritné nosiče a nazýva sa emitor. Priedchod p - n, v ktorom vzniká napätové zosilnenie, sa nazýva kolektor. Oblasť, do ktorej sa vstrekujú minoritné nosiče nábojov, sa volá báza.

Súčasná elektronika používa rôzne polovodičové prvky, ktoré využívajú spomínané javy. Je to napr.: Peltierov článok, termočlánok, termistor - termoelektrické javy, Hallov generátor, magnetoodporník - galvanicko-magnetické javy, fotoodpor, slnečná batéria, fotodióda, fototranzistor - fotoelektrické javy, piezoelektrický menič - piezoelektrický jav, tunelová dióda - tunelový jav atď. V súčasnosti sa už celé zložité obvody integrujú do jedného prvku a vzniká integrovaný obvod. Uplatnenie polovodičovej elektroniky je veľmi široké, lebo jej technický triumf je založený najmä na vysokej spoľahlivosti, malých rozmeroch a hmotnosti, malej energetickej spotrebe, vysokej pracovnej rýchlosti, nízkych nákladoch a mnohostrannosti realizovaných funkcií.

## Literatúra

- Ilkovič, D.: Fyzika I., Alfa Bratislava, 4. vydanie 1968
- Ilkovič, D.: Fyzika II., Alfa Bratislava, 4. vydanie 1970
- Horák, Z. - Krupka, F.: Fyzika SNTL/Alfa, 1976
- Hajko, V. - Szabo, J.: Všeobecná fyzika I. Edičné stredisko UPJŠ, Košice, 1974
- Hajko, V. - Szabo, J.: Všeobecná fyzika II. Edičné stredisko UPJŠ, Košice, 1975
- Soška, F. a kol.: Fyzika, 1973
- Slavíček, E. - Wagner, J.: Fyzika pro chemiky, SNTL/Alfa, 1. vydanie 1971
- Alonso, M. - Finn, E.J.: Fundamental University Physics I - III. Addison - Westley Publishing Co, 1969
- Beiser, A.: Úvod do moderní fyziky. Academia Praha, 1975
- Rákoš, M. - Vulgan, R.: Fyzika pre technikov II., Alfa Bratislava, 1976
- Mayer - Kuckuk, T.: Fyzika atomového jadra, SNTL Praha, 1979
- Vanovič, J.: Atómová fyzika, Alfa Bratislava, 1980
- Pišút, J. - Gomolčák, L.: Úvod do kvantovej mechaniky, Alfa Bratislava, 1975
- Kittel, Ch.: Kvantová teória tuhých látok, Alfa Bratislava, 1977