

Ivan Janiga, Jana Gabková, Milada Omachelová

ŠTATISTICKÉ ANALÝZY

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2017

SPĚKTRUM
STU

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo vydavateľstva.

© doc. RNDr. Ivan Janiga, PhD., RNDr. Jana Gabková, PhD., Mgr. Milada Omachelová, PhD.

Recenzenti: prof. Ing. Rudolf Palenčár, CSc.
Mgr. Monika Kováčová, PhD.

Schválila Vedecká rada Strojníckej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-4704-2

Obsah

Predhovor.....	7
1 Jednoduchá lineárna regresia a korelácia	9
1.1 Empirické modely	9
1.2 Jednoduchá lineárna regresia	10
1.3 Vlastnosti odhadov MNŠ.....	14
1.4 Niekoľko poznámok k použitiu regresie.....	15
1.5 Testovanie hypotéz v jednoduchej lineárnej regresii.....	16
1.5.1 Použitie <i>t</i> -testov	16
1.5.2 Testovanie významnosti regresie pomocou analýzy rozptylu	18
1.6 Intervaly spoľahlivosti	22
1.6.1 Intervaly spoľahlivosti pre smernicu a absolútny člen	22
1.6.2 Intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy	24
1.7 Predikcia nového pozorovania.....	26
1.8 Adekvátnosť regresného modelu	28
1.8.1 Reziduálna analýza	28
1.8.2 Koeficient determinácie (R^2).....	31
1.8.3 Test nezhody	32
1.9 Transformácie na priamku	36
1.10 Korelácia	36
2 Viacrozmerná lineárna regresia a zovšeobecnený lineárny model.....	43
2.1 Viacrozmerný lineárny regresný model.....	43
2.2 Testovanie hypotéz vo viacrozmernej lineárnej regresii	47
2.2.1 Test významnosti regresie.....	47
2.2.2 Testy jednotlivých regresných koeficientov a podmnožiny koeficientov ..	50
2.3 Intervaly spoľahlivosti vo viacrozmernej regresii	55
2.3.1 Intervaly spoľahlivosti pre jednotlivé regresné koeficienty.....	55
2.3.2 Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy	56
2.4 Predikcia nových pozorovaní.....	57
2.5 Overovanie adekvátnosti modelu.....	58
2.5.1 Reziduálna analýza	58
2.5.2 Vplyvné pozorovania	59
2.6 Aspekty viacnásobného regresného modelovania	60
2.6.1 Polynomicke regresné modely	60
2.6.2 Kategorické regresory a indikátorové premenné	62
2.6.3 Výber premenných a stavba modelu.....	63
2.7 Zovšeobecnený lineárny model	68
3 Návrh a analýza jednofaktorových experimentov	73
3.1 Návrh inžinierskych experimentov	73

3.2	Úplne znáhodnený jednofaktorový experiment	73
3.2.1	Príklad na vysvetlenie základných pojmov.....	73
3.2.2	Analýza rozptylu	77
3.2.3	Viacnásobné porovnania použitím metódy ANOVA	82
3.2.4	Viac o viacnásobnom porovnaní.....	84
3.2.5	Reziduálna analýza a overovanie modelu.....	84
3.2.6	Stanovenie rozsahu výberu	86
3.3	Faktor s náhodnými účinkami.....	87
3.4	Znáhodnený úplný blokový návrh	89
4	Návrh viacfaktorových experimentov	97
4.1	Úvod.....	97
4.2	Niektoré aplikácie techník navrhovania experimentov.....	97
4.3	Faktoriálne experimenty	98
4.4	Dvojfaktorové faktoriálne experimenty	101
4.5	Všeobecné faktoriálne experimenty.....	110
4.6	Faktoriálne experimenty s náhodnými faktormi	110
4.7	2^k faktoriálne návrhy	110
4.7.1	2^2 návrh	110
4.7.2	2^k návrh pre $k \geq 3$ faktorov.....	114
4.7.3	Jedna replikácia v 2^k návrhu	117
4.8	Blokovanie a spolupôsobenie v 2^k návrhu	118
4.9	Redukované replikácie v 2^k faktoriálnom návrhu	122
4.9.1	Redukovaná polovica v 2^k návrhu	122
4.9.2	Menšie redukcie: Redukovaný faktoriálny návrh 2^{k-p}	127
5	Neparametrické testy	133
5.1	Znamienkový test.....	133
5.2	Wilcoxonov jednovýberový test	137
5.3	Wilcoxonov dvojvýberový test	140
5.4	Kruskalov-Wallisov test.....	143
5.5	Friedmanov test.....	146
6	Štatistické riadenie kvality	151
6.1	Zlepšovanie kvality a štatistika.....	151
6.2	Štatistické riadenie kvality (SQC)	151
6.3	Štatistické regulácia procesu.....	152
6.4	Úvod k regulačným diagramom.....	155
6.4.1	Základné princípy	155
6.4.2	Návrh regulačného diagramu	159
6.4.3	Logické podskupiny	162
6.4.4	Analýza zoskupení bodov v regulačných diagramoch.....	163
6.5	Regulačné diagramy $\bar{X}$ a R alebo S	165

6.5.1	Regulačné diagramy $\bar{X}$ a R	165
6.5.2	Regulačné diagramy $\bar{X}$ a S	176
6.6	Regulačné diagramy individuálnych meraní	180
6.7	Regulačné diagramy na reguláciu porovnávaním.....	185
6.7.1	Regulačné diagramy podielu nezhodných jednotiek (p -diagramy)	185
6.7.2	Regulačné diagramy počtu nezhodných jednotiek (np -diagramy)	192
6.7.3	Regulačné diagramy nezhôd	193
6.8	Spôsobilosť procesu.....	196
Prílohy		201
Literatúra		227

PREDHOVOR

Milí čitatelia,

skriptá sme napísali pre predmet Aplikovaná štatistika, ktorý sa vyučuje v prvom ročníku inžinierskeho štúdia technického zamerania ako povinne voliteľný predmet.

Základný cieľ, ktorý sme sledovali pri ich písaní, bol oboznámiť vás so základmi regresnej analýzy a tými štatistickými a inžinierskymi metódami, ktoré sa používajú v meraní, monitorovaní, regulovaní a zlepšovaní kvality výrobného procesu.

Do prvej časti skriptu sme preto zahrnuli výklad regresných modelov – Jednoduchá lineárna regresia, Viacrozmerná lineárna regresia a zovšeobecnený lineárny model. Druhá časť skriptu je zasa venovaná kapitolám Návrh jednofaktorových a viacfaktorových experimentov, Neparametrické testy a Štatistické riadenie kvality.

Pri písaní skriptu sme kladli dôraz na to, aby bol text čo najbližší k inžinierskemu mysleniu. Vyhýbali sme sa exaktným matematicky formulovaným definíciám. Nové pojmy sme sa snažili definovať tak, aby boli zrozumiteľnejšie technikom a pritom nestrácali svoju „exaktnosť“.

Skriptá obsahujú okrem teórie aj veľa riešených príkladov a obrázkov, na ktorých sú vysvetlené nielen nové ale aj základné pojmy. Súčasťou skriptu sú aj najpotrebnejšie štatistické tabuľky uvedené na konci v prílohe. Predpokladáme, že kurikulum predmetu Aplikovaná štatistika kladne ovplyvní vzťah študentov k štúdiu aj k samotnej štatistike ako vednej disciplíne.

Hoci sú skriptá primárne určené pre inžinierske štúdium technického zamerania, vhodné sú aj pre študentov doktorandského štúdia. Cenné poznatky však v nich nájdú aj výskumníci a ľudia z technickej praxe pri spracovaní a vyhodnocovaní experimentálnych dát či ďalší záujemcovia o štatistiku bez toho, aby sa vyžadovala inštalácia špeciálneho štatistického softvéru.

Za pripomienky a vypracovanie recenzných posudkov ďakujeme prof. Ing. Rudolfovi Palenčárovi, PhD. a Mgr. Monike Kováčovej, PhD. Ďakujeme aj PhDr. Anne Kucharíkovej, PhD., za odbornú pomoc pri preklade materiálov prebratých z anglických textov.

Autori

1 JEDNODUCHÁ LINEÁRNA REGRESIA A KORELÁCIA

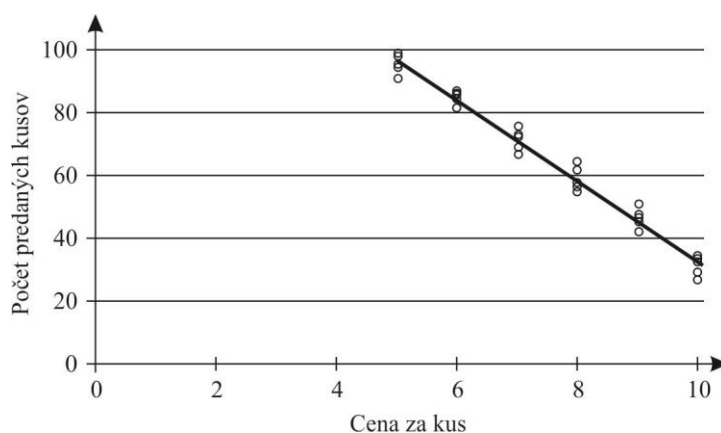
1.1 Empirické modely

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť použitie regresnej analýzy.
- ☐ Vysvetliť termíny *absolútny člen*, *smernica*, *nezávislá premenná*, *závislá premenná* a *náhodná chyba*.
- ☐ Vysvetliť predpoklady jednoduchej lineárnej regresie.

Regresná analýza

Regresná analýza je štatistická technika na modelovanie vzťahu medzi dvoma alebo viacerými premennými, z ktorého možno predikovať hodnotu ozvovej premennej v danej hodnote inej premennej alebo iných premenných.



Obr. 1.1 Korelačný diagram cena verzus predaj preglejky

Jednoduchý lineárny model

Jednoduchý lineárny model, ktorý vysvetľuje lineárny vzťah medzi dvoma premennými je

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (1.1)$$

kde

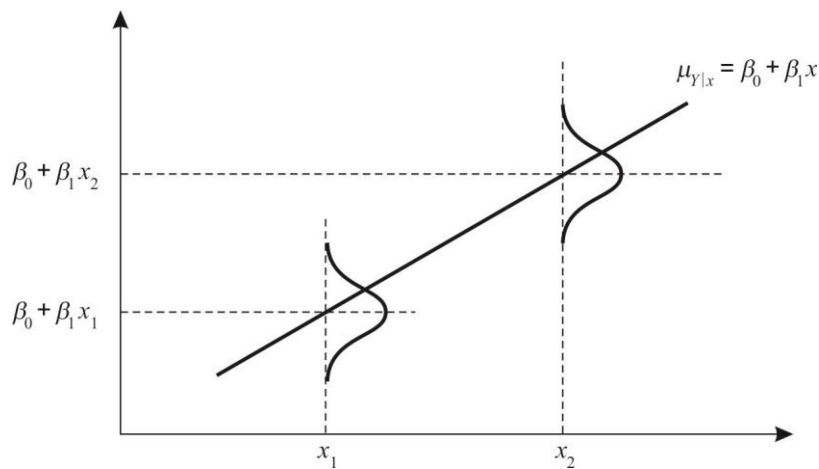
β_0 a β_1 sú **regresné koeficienty**. Koeficient β_0 označuje absolútny člen a koeficient β_1 označuje smernicu regresora.

x je **regresor** (alebo **prediktor**); čo je **nezávislá premenná**, ktorá reprezentuje riadené konštanty (nie náhodné výsledky),

ε je **náhodná chyba** reprezentujúca náhodné kolísanie premennej Y okolo regresnej priamky $\beta_0 + \beta_1 x$. Predpokladá sa, že ε je normálne rozdelená so strednou hodnotou 0 a konštantným rozptylom σ^2 , t. j. $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$,

Y je **závislá premenná (ozva)**; pretože jednotlivé výsledky Y v tej istej hodnote x môžu kolísať náhodne, Y je náhodná premenná s nasledovným rozdelením:

$$Y \sim N(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$$



Obr. 1.2 Variabilita Y v rôznych hodnotách x

1.2 Jednoduchá lineárna regresia

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť metódu najmenších štvorcov.
- ☐ Odhadnúť regresné koeficienty použitím metódy najmenších štvorcov.
- ☐ Vypočítať strednú hodnotu ozvy a rezíduum použitím odhadnutej regresnej priamky.
- ☐ Odhadnúť rozptyl chyby σ^2 .

Jednoduchá lineárna regresia obsahuje jeden **regresor** alebo **prediktor** x a **ozvu** Y , čo je závislá premenná. Predpokladajme, že vzťah medzi Y a x je priamka. Ďalej predpokladajme, že Y v každej úrovni x je náhodná premenná a jej očakávaná (stredná) hodnota je

$$E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

kde absolútny člen β_0 a smernica priamky β_1 sú neznáme **regresné koeficienty**. Predpokladáme, že každé pozorovanie Y možno vyjadriť pomocou modelu takto:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (1.2)$$

kde ε je náhodná chyba zo strednou hodnotou nula a neznámym rozptylom σ^2 . Ďalej predpokladáme, že nehodné chyby zodpovedajúce rôznym pozorovaniam sú nekorelované náhodné premenné.

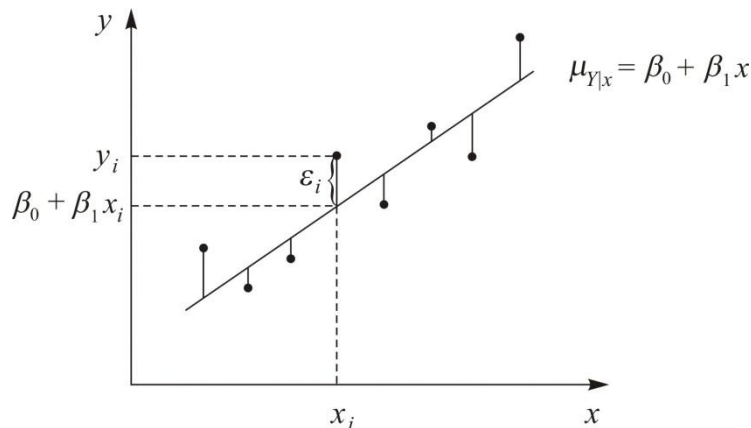
Metóda najmenších štvorcov (MNŠ)

Nemecký vedec Karl Gauss (1777–1855) navrhol „metódu najmenších štvorcov“ na odhadnutie regresných koeficientov lineárneho modelu. Majme n dvojíc pozorovaní (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, ktoré sú modelované pomocou jednoduchého lineárneho modelu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

Pomocou MNŠ nájdeme odhady β_0 a β_1 , ktoré minimalizujú **súčet štvorcov chýb** označovaný SS_E (pozri Obr. 1.3)

$$SS_E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \quad (1.4)$$



Obr. 1.3 Odchýlky (ε_i) dát od regresnej priamky

Derivujeme SS_E podľa β_0 a β_1 :

$$\frac{\partial SS_E}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad n \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\frac{\partial SS_E}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

Vynásobením prvej rovnice členom $\sum_{i=1}^n x_i$ a druhej rovnice počtom meraní n dostaneme

$$n\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$n\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i + n\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = n \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

Odpočítaním druhej rovnice od prvej dostaneme

$$\hat{\beta}_1 \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - n \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

Teda odhad MNS smernice je

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - n \sum_{i=1}^n y_i x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n}} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (1.5)$$

kde

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}{n} = \sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})$$

Nakoniec odhad absolútneho člena sa vypočíta takto:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (1.6)$$

Odhadnutý regresný model

Odhadnutá regresná priamka je daná vzťahom

$$\hat{y} = E(Y|x) = \hat{\mu}_{Y|x} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

Všimnime si, že dvojica pozorovaní vyhovuje vzťahu

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\varepsilon}_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

Rozdiel medzi skutočnou pozorovanou hodnotou ozvy (y_i) a predikciou ozvy v bode x_i ($\hat{y}_i$),

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$

sa nazýva **rezíduum** (označuje sa ako $\hat{\varepsilon}_i$) a je hodnotou odhadu náhodnej chyby ε_i .

Odhadnutie rozptylu chyby (σ^2)

Odhadovanie σ^2 je potrebné, pretože rozptyl chyby σ^2 je vo väčšine prípadov neznámy.

Bodový nevychýlený odhad σ^2 je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{SS_E}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 - \hat{\beta}_1 S_{xy}}{n-2} = \frac{SS_T - \hat{\beta}_1 S_{xy}}{n-2} \quad (1.8)$$

Príklad 1.1

Objemy predaja Y preglejok pri rôznych cenách x sú usporiadané podľa cien v nasledujúcej tabuľke.

	Cena x ; [€]	Objem predaja Y ; [paleta]		Cena x ; [€]	Objem predaja Y ; [paleta]		Cena x ; [€]	Objem predaja Y ; [paleta]
1	5	95	11	7	67	21	9	45
2	5	98	12	7	68	22	9	50
3	5	96	13	7	72	23	9	46
4	5	92	14	7	75	24	9	45
5	5	99	15	7	72	25	9	42
6	6	80	16	8	63	26	10	30
7	6	84	17	8	65	27	10	28
8	6	85	18	8	54	28	10	35
9	6	82	19	8	53	29	10	33
10	6	86	20	8	56	30	10	34

Z tabuľky vypočítame hodnoty

$$n = 30; \sum_{i=1}^n y_i = 1930; \sum_{i=1}^n y_i^2 = 138656; \sum_{i=1}^n x_i = 225; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1775; \sum_{i=1}^n x_i y_i = 13360$$

Predpokladáme, že medzi x a Y je lineárny vzťah.

Odhadovanie regresných koeficientov

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) / n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 / n} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{13360 - 1930 \times 225 / 30}{1775 - 225^2 / 30} = \frac{-1115}{87,5} = -12,743$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1930 - (-12,7) \times 225}{30} = 159,9$$

Odhadnutá regresná priamka pre dáta objem predaja verzus cena je

$$\hat{y} = E(Y|x) = \hat{\mu}_{Y|x} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = 159,9 - 12,743x$$

Výpočet rezídua

Vypočítame rezíduum pre $y = 84$ v bode $x = 6$ €.

Predikovaný objem predaja pri cene $x = 6$ € je

$$\hat{y}(x=6) = \hat{\mu}_{Y|x=6} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = 159,9 - 12,743 \times 6 = 83,442$$

Teda

$$\hat{\varepsilon}(x=6) = y(x=6) - \hat{y}(x=6) = 84 - 83,442 = 0,558$$

Odhadovanie σ^2

$$\begin{aligned} SS_E &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 - \hat{\beta}_1 S_{xy} = 138656 - 30 \times \left(\frac{1930}{30} \right)^2 - (-12,743) \times (-1115) = \\ &= 284,222 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{SS_E}{n-2} = \frac{284,222}{30-2} = 10,15078571 = 3,186029773^2 \end{aligned}$$

1.3 Vlastnosti odhadov MNŠ

Ciele výučby

- ☐ Identifikovať výberové rozdelenia odhadov MNŠ smernice a absolútneho člena.
- ☐ Overte, či odhady $\hat{\beta}_0$ a $\hat{\beta}_1$ sú nevychýlené odhady.

Výberové rozdelenie odhadu smernice ($\hat{\beta}_1$)

Výberové rozdelenie MNŠ odhadu smernice $\hat{\beta}_1$ je

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right) \quad (1.9)$$

Odhad smerodajnej chyby odhadu $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \quad (1.10)$$

Dá sa dokázať, že $\hat{\beta}_1$ je nevychýleným odhadom β_1 .

Výberové rozdelenie odhadu absolútneho člena ($\hat{\beta}_0$)

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]\right) \quad (1.11)$$

Odhad smerodajnej chyby odhadu $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = se(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]} \quad (1.12)$$

Dá sa dokázať, že $\hat{\beta}_0$ je nevychýleným odhadom β_0 .

1.4 Niekoľko poznámok k použitiu regresie

Ciele výučby

- ☐ Identifikovať výberové rozdelenia odhadov MNŠ smernice a absolútneho člena.
- ☐ Overte, či odhady $\hat{\beta}_0$ a $\hat{\beta}_1$ sú nevychýlené odhady.

Praktická účinnosť regresora

Vzťah medzi nezávislou premennou x a závislou premennou Y môže byť štatisticky významný, hoci z praktického hľadiska je závislosť bezvýznamná. Praktická významnosť závislosti medzi premennými by sa preto mala overovať samostatne.

Empirická/teoretická platnosť regresora

Znamienko a/alebo veľkosť regresného koeficienta v modeli môže byť v rozpore zo všeobecných ponímaním vzťahu medzi premennými. Preto by sa malo skontrolovať, či znamienko a veľkosť každého regresného koeficienta sú primerané v porovnaní s predchádzajúcimi zisteniami.

Vzťah príčina a účinok

Signifikantný vzťah medzi regresorom a prediktorom v danom modeli nemusí nutne znamenať vzťah príčina–účinok medzi premennými. Navrhnuté experimenty sú jediný spôsob na určenie vzťahu príčiny a účinku medzi premennými.

Limitovaná zovšeobeciteľnosť modelu

Regresný vzťah medzi premennými je platný iba v obore hodnôt regresora(ov) vyšetrovaných v štúdiu. Na aplikáciu regresného modelu mimo pôvodného rozpätia regresorov sa musí navrhnuť nová štúdia zameraná na extrapoláciu.

1.5 Testovanie hypotéz v jednoduchej lineárnej regresii

1.5.1 Použitie t -testov

Ciele výučby

- Vykonať testy hypotéz β_0 a β_1 .

Indukčné súvislosti o smernici (β_1)

- **Parameter:** β_1
- **Bodový odhad** parametra β_1 : $\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right)$, σ^2 je neznámy
- **Testovacia štatistika** β_1 : $T_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} \sim t(n-2)$

Test hypotézy o β_1 (t -test)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} \quad H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} \sim t(n-2)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$t(n-2, \alpha)$$

Krok 4: **Záver:** nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$|t_0| > t(n-2, \alpha)$$

Významnosť regresie

Testovanie významnosti regresie sa urobí testovaním $H_0 : \beta_1 = 0$ oproti $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

Nezamietnutie $H_0 : \beta_1 = 0$ môže znamenať:

1. Regresor x je malá hodnota na vysvetlenie variability premennej Y .
2. Skutočný vzťah medzi x a Y nie je lineárny.

Zamietnutie $H_0 : \beta_1 = 0$ môže znamenať:

1. Regresor x je veľká hodnota na vysvetlenie variability premennej Y .

2. Jednoduchý lineárny model je adekvátny.
3. Lepší model by sa získal pridaním člena x s vyššou mocninou, kým lineárny účinok x na Y zostáva významný.

Indukčné súvislosti o smernici (β_0)

- **Parameter:** β_0
- **Bodový odhad β_0 :** $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \sim N\left(\beta_0, \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}}\right]\right)$, σ^2 je neznámy
- **Testovacia štatistika β_0 :** $T_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}}\right]}} \sim t(n-2)$

Test hypotézy o β_0 (t-test):

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \beta_0 = \beta_{0,0} \quad H_1: \beta_0 \neq \beta_{0,0}$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}}\right]}} \sim t(n-2)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$t(n-2, \alpha)$$

Krok 4: **Záver:** nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$|t_0| > t(n-2, \alpha)$$

Príklad 1.2

Z dát objemu preglejok (Príklad 1.1) sa vypočítali tieto hodnoty:

$$n = 30; \hat{\sigma}^2 = 3,186^2; \sum_{i=1}^n x_i = 225; S_{xx} = 87,5; \hat{\beta}_1 = -12,743; \hat{\beta}_0 = 159,9$$

Test hypotézy o β_1

Na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ testujeme významnosť regresie (smernice), t. j. $H_0: \beta_1 = 0$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \beta_1 = 0 \quad H_1: \beta_1 \neq 0$$

Krok 2: Stanovenie **hodnoty testovacej štatistiky**.

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} = \frac{-12,743 - 0}{\sqrt{3,186^2 / 87,5}} = -37,41364$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$t(n-2, \alpha) = t(30-2; 0,05) = t(28; 0,05) = 2,04841$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $|t_0| = 37,41364 > t(28, 0,05) = 2,04841$, nulová hypotéza H_0 sa zamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Test hypotézy o β_0

Na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ testujeme významnosť absolútneho člena, t. j. $H_0 : \beta_0 = 0$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \beta_0 = 0 \qquad H_1 : \beta_0 \neq 0$$

Krok 2: Stanovenie **hodnoty testovacej štatistiky**.

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]}} = \frac{159,9 - 0}{\sqrt{3,186^2 \left[\frac{1}{30} + \frac{(225/30)^2}{87,5} \right]}} = 61,03348$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$t(n-2, \alpha) = t(28; 0,05) = 2,04841$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $|t_0| = 61,03348 > t(28, 0,05) = 2,04841$, nulová hypotéza H_0 sa zamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

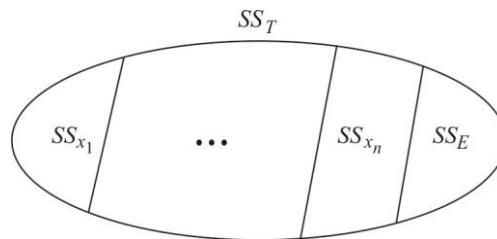
1.5.2 Testovanie významnosti regresie pomocou analýzy rozptylu

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť metódu analýzy rozptylu (ANOVA).
- ☐ Vysvetliť segmentáciu celkovej variability premennej ozvy (SS_T) na súčet štvorcov regresie (SS_R) a súčet štvorcov chýb (SS_E).
- ☐ Vytvoriť tabuľku ANOVA a vykonať test hypotézy o β_1 .

Analýza rozptylu (ANOVA)

Techniky analýzy rozptylu (ANOVA) poskytujú štatistický postup na zhodnotenie prínosu premennej X_i na variabilitu premennej ozvy Y . Ako vidieť na Obr. 1.4, metóda ANOVA rozdelí celkovú variabilitu Y (SS_T) na dané segmenty (SS_{X_i}) vysvetlené premennými X_i a na segment (SS_E) nevysvetlený. Čím je variabilita segmentu väčšia SS_{X_i} , tým viac prispieva X_i k celkovej variabilite Y .



Obr. 1.4 Segmentácia celkovej variability Y (SS_T)

ANOVA v testovaní β_1

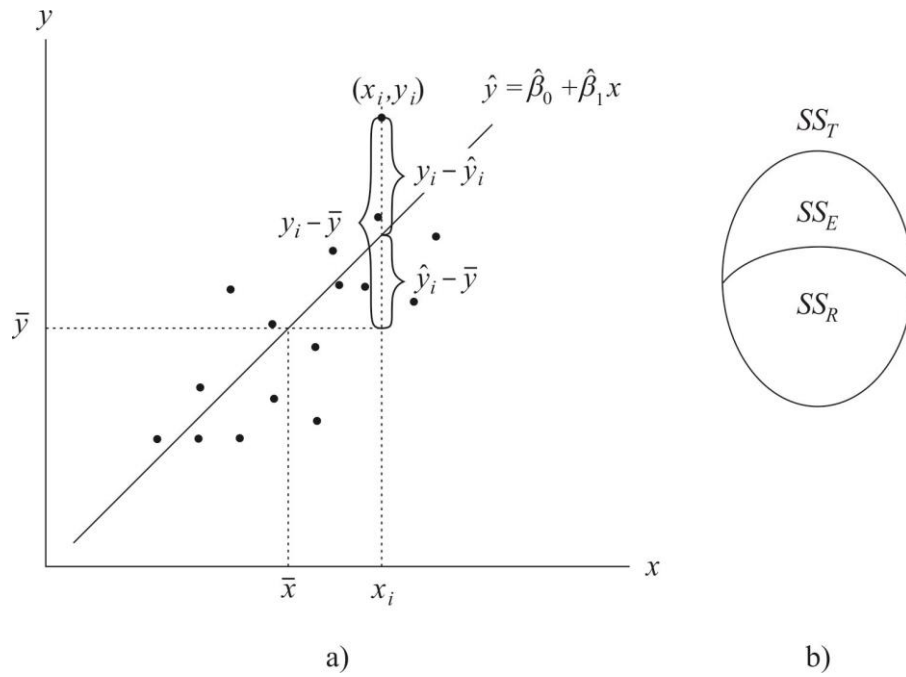
Metódu ANOVA možno použiť na testovanie významnosti regresie ($H_0: \beta_1 = 0$). V jednoduchom lineárnom modeli (pozri Tab. 1.1) celková variabilita Y (SS_T , **celkový súčet štvorcov**; stupne voľnosti $= n - 2$) sa rozdelí na dve zložky:

1. Variabilita vysvetlená regresným modelom (SS_R , **súčet štvorcov regresie**; st. v. $= 1$)
2. Variabilita tvorená náhodnou chybou (SS_E , **súčet štvorcov chýb**; st. v. $= n - 2$)

Tab. 1.1 Rozdelenie celkovej variability v Y (SS_T)

SS_T		SS_R		SS_E
Celkový súčet štvorcov		Súčet štvorcov regresie		Súčet štvorcov chýb
$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	=	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	+	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
St. v. $n - 1$	=	1	+	$n - 2$

Grafická interpretácia veličín ANOVA je na Obr. 1.5.

Obr. 1.5 Rozdelenie celkovej variability Y (SS_T)

$y_i - \bar{y}$ – celková variabilita v bode y_i

$y_i - \hat{y}_i$ – variabilita v bode y_i spôsobená chybou

$\hat{y}_i - \bar{y}$ – variabilita v bode y_i spôsobená regresiou

Odchýlka pozorovania y_i od zodpovedajúceho priemeru $\bar{y}$ sa rozdelí na odchýlku od y_i vysvetlenú regresnou priamkou na odchýlku od y_i spôsobenú chybou. Tieto odchýlky sú umocnené na druhú a vypočítajú sa z nich súčty SS_T , SS_E a SS_R podľa vzťahov:

$$SS_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = SS_T - \hat{\beta}_1 S_{xy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 - \hat{\beta}_1 S_{xy}$$

$$SS_R = SS_T - SS_E = SS_T - (SS_T - \hat{\beta}_1 S_{xy}) = \hat{\beta}_1 S_{xy}$$

Podiel $SS_R/1$ a $SS_E/(n-2)$ má F rozdelenie:

$$F = \frac{SS_R/1}{SS_E/(n-2)} = \frac{MS_R}{MS_E} \sim F(1; n-2)$$

Táto štatistika F sa používa na testovanie $H_0: \beta_1 = 0$, pretože F nadobúda malú hodnotu, keď $\beta_1 = 0$ je správne. Veličiny MS_R (**priemerný štvorec regresie**) a MS_E (**priemerný štvorec chyby**) dostaneme delením SS_R a SS_E ich stupňami voľnosti. Všimnime si, že

$$MS_E = \frac{SS_E}{n-2} = \hat{\sigma}^2$$

Tabuľka ANOVA

V tabuľke ANOVA (Tab. 1.2) sú uvedené dôležité veličiny s variabilitou, pomocou ktorých testujeme významnosť regresie.

Tab. 1.2 ANOVA na testovanie významnosti regresie

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	Testovacia štatistika F_0
Regresia	$SS_R = \hat{\beta}_1 S_{xy}$	1	MS_R	MS_R / MS_E
Chyba	$SS_E = SS_T - SS_R$	$n - 2$	MS_E	
Celková	$SS_T = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2$	$n - 1$		

Test hypotézy o β_1 (F-test)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_R / 1}{SS_E / (n - 2)} = \frac{MS_R}{MS_E} \sim F(1; n - 2)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(1, n - 2; \alpha)$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(1, n - 2; \alpha)$$

Vzťah medzi t-testom a F-testom

Pri testovaní významnosti regresie je test ANOVA ekvivalentný s t-testom, pretože štvorec testovacej štatistiky t je rovný testovacej štatistike F , keď $\beta_1 = 0$. Teda použitie hociktorého z týchto testov vedie k tomu istému záveru o β_1 .

Všimnime si, že t-test je flexibilnejší ako F-test pri testovaní hypotézy o β_1 , pretože t-test má jednostrannú aj dvojstrannú alternatívnu hypotézu, kým F-test má iba dvojstrannú alternatívnu hypotézu. F-test však slúži na vyhodnotenie relatívnych príspevkov viac regresorov na variabilitu Y .

Príklad 1.3 (Testovanie hypotézy o β_1 pomocou nástroja ANOVA)

Z dát objemu preglejok (Príklad 1.1) sa vypočítali tieto hodnoty:

$$n = 30; \sum_{i=1}^n y_i = 1930; \sum_{i=1}^n y_i^2 = 138656; S_{xy} = -1115; \hat{\beta}_1 = -12,743$$

Vytvoríme tabuľku ANOVA a urobíme test hypotézy o β_1 na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

$$SS_T = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = 138656 - 30 \times \left(\frac{1930}{30}\right)^2 = 14492,667$$

$$SS_R = \hat{\beta}_1 S_{xy} = -12,743 \times (-1115) = 14208,445$$

$$SS_E = SS_T - SS_R = 14492,667 - 14208,445 = 284,222$$

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	f_0
Regresia	14208,445	1	14208,445	1399,7
Chyba	284,222	28	10,151	
Celková	14492,667	29		

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Krok 2: Stanovenie **hodnoty testovacej štatistiky**.

$$f_0 = \frac{SS_R / 1}{SS_E / (n - 2)} = \frac{MS_R}{MS_E} = \frac{14208,445}{10,151} = 1399,7$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(1, n - 2; \alpha) = f(1, 28; 0,05) = 4,19599$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $f_0 = 1399,7 > f(1; 28, 0,05) = 4,19599$, nulová hypotéza H_0 sa zamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

1.6 Intervaly spoľahlivosti

1.6.1 Intervaly spoľahlivosti pre smernicu a absolútny člen

Ciele výučby

- Stanoviť intervaly spoľahlivosti pre β_1 a β_0 .

Indukčné súvislosti o smernici (β_1)

- **Parameter:** β_1
- **Bodový odhad β_1 :** $\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right)$, σ^2 je neznámy
- **Odhad smerodajnej chyby $\hat{\beta}_1$** $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}$

Interval spoľahlivosti pre β_1

100(1- α)% interval spoľahlivosti pre β_1 je

$$\hat{\beta}_1 - t(n-2, \alpha) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t(n-2, \alpha) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \quad (1.13)$$

Indukčné súvislosti o smernici (β_0)

- **Parameter:** β_0
- **Bodový odhad β_0 :** $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \sim N\left(\beta_0, \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]\right)$, σ^2 je neznámy
- **Odhad smerodajnej chyby $\hat{\beta}_0$** $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = se(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]}$

Interval spoľahlivosti pre β_0

100(1- α)% interval spoľahlivosti pre β_0 je

$$\hat{\beta}_0 - t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} \quad (1.14)$$

Príklad 1.4

Z dát objemu preglejok (Príklad 1.1) sa vypočítali tieto hodnoty:

$$n=30; \hat{\sigma}^2=3,186^2; \sum_{i=1}^n x_i=225; S_{xx}=87,5; \hat{\beta}_1=-12,743; \hat{\beta}_0=159,9$$

Interval spoľahlivosti pre β_1

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre smernicu.

$$1-\alpha=0,95 \Rightarrow \alpha=0,05$$

95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre β_1 :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 - t(n-2, \alpha) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} &\leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t(n-2, \alpha) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \\ -12,743 - t(30-2; 0,05) \sqrt{\frac{3,186^2}{87,5}} &\leq \beta_1 \leq -12,743 + t(30-2; 0,05) \sqrt{\frac{3,186^2}{87,5}} \\ -12,743 - 2,04841 \times 0,34060 &\leq \beta_1 \leq -12,743 + 2,04841 \times 0,34060 \\ -13,44069 &\leq \beta_1 \leq -12,04531 \\ -13,45 &\leq \beta_1 \leq -12,05\end{aligned}$$

Interval spoľahlivosti pre β_0

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre absolútny člen.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

95 % dvojstranný interval spoľahlivosti pre β_0 :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 - t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]} &\leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]} \\ 159,9 - t(28; 0,05) \sqrt{3,186^2 \left[\frac{1}{30} + \frac{(225/30)^2}{87,5} \right]} &\leq \beta_0 \leq \\ &\leq 159,9 + t(28; 0,05) \sqrt{3,186^2 \left[\frac{1}{30} + \frac{(225/30)^2}{87,5} \right]} \\ 159,9 - 2,04841 \times 2,61987 &\leq \beta_0 \leq 159,9 + 2,04841 \times 2,61987 \\ 159,9 - 5,36657 &\leq \beta_0 \leq 159,9 + 5,36657 \\ 154,53343 &\leq \beta_0 \leq 165,26657 \\ 154,53 &\leq \beta_0 \leq 165,27\end{aligned}$$

1.6.2 Intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy

Ciele výučby

- ☐ Identifikovať výberové rozdelenie odhadu strednej hodnoty ozvy v bode $x = x_0$.
- ☐ Stanoviť interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy v bode $x = x_0$.

Výberové rozdelenie odhadu strednej hodnoty ozvy v bode $x = x_0$ ($\hat{\mu}_{Y|x=x_0}$)

Stredná hodnota ozvy v bode $x = x_0$ je

$$\mu_{Y|x_0} = E(Y|x_0) = E[(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon)|x_0] = \beta_0 + \beta_1 x_0 \quad (1.15)$$

Bodový odhad $\mu_{Y|x_0}$ je

$$\hat{\mu}_{Y|x_0} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \quad (1.16)$$

Výberové rozdelenie $\hat{\mu}_{Y|x_0}$ je

$$\hat{\mu}_{Y|x_0} \sim N\left(\mu_{Y|x_0}, \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]\right) \quad (1.17)$$

Odhad smerodajnej chyby $\hat{\mu}_{Y|x_0}$ je

$$\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right] \quad (1.18)$$

Dá sa dokázať, že $\hat{\mu}_{Y|x_0}$ je nevychýlený odhad $\mu_{Y|x_0}$.

Indukčné súvislosti o strednej hodnote ozvy v bode $x = x_0$

- **Parameter:** $\mu_{Y|x_0}$
- **Bodový odhad $\mu_{Y|x_0}$:** $\hat{\mu}_{Y|x_0} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \sim N\left(\mu_{Y|x_0}, \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]\right)$,
 σ^2 je neznámy

Interval spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$

100(1- α) %-ný interval spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$ je

$$\hat{\mu}_{Y|x_0} - t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} \leq \mu_{Y|x_0} \leq \hat{\mu}_{Y|x_0} + t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} \quad (1.19)$$

Poznámka. Šírka 95 %-ného intervalu spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$ je najmenšia v bode $x = \bar{x}$ a narastá, keď sa $|x_0 - \bar{x}|$ zväčšuje.

Príklad 1.5

Z dát objemu preglejok (Príklad 1.1) sa vypočítali tieto hodnoty:

$$n = 30; \hat{\sigma}^2 = 3,186^2; \sum_{i=1}^n x_i = 225; S_{xx} = 87,5; \hat{\beta}_1 = -12,743; \hat{\beta}_0 = 159,9$$

Interval spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu predaja preglejkového produktu, keď cena je $x = 9$ €.

$$\hat{\mu}_{Y|9} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = 159,9 - 12,743 \times 9 = 45,213$$

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre $\mu_{Y|9}$:

$$\hat{\mu}_{Y|9} - t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} \leq \mu_{Y|9} \leq \hat{\mu}_{Y|9} + t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]}$$

$$45,213 - t(30-2; 0,05) \sqrt{3,186^2 \left[\frac{1}{30} + \frac{(9-225/30)^2}{87,5} \right]} \leq \mu_{Y|9} \leq$$

$$\leq 45,213 + t(30-2; 0,05) \sqrt{3,186^2 \left[\frac{1}{30} + \frac{(9-225/30)^2}{87,5} \right]}$$

$$45,213 - 2,04841 \times 0,77419 \leq \mu_{Y|9} \leq 45,213 + 2,04841 \times 0,77419$$

$$45,213 - 1,58586 \leq \mu_{Y|9} \leq 45,213 + 1,58586$$

$$43,62714 \leq \mu_{Y|9} \leq 46,79886$$

$$43,627 \leq \mu_{Y|9} \leq 46,799$$

1.7 Predikcia nového pozorovania

Ciele výučby

- ☐ Stanoviť predikčný interval pre budúce pozorovanie v bode $x = x_0$.
- ☐ Vysvetliť, prečo predikčný interval pre budúce pozorovanie v bode $x = x_0$ je vždy širší ako zodpovedajúci interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy.

Výberové rozdelenie $\Psi = Y_0 - \hat{Y}_0$

Nové pozorovanie Y_0 v bode $x = x_0$ je

$$Y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0, \text{ kde } \varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2) \text{ a } Y_0 \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_0, \sigma^2) \quad (1.20)$$

Bodový odhad Y_0 je

$$\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \quad (1.21)$$

Výberové rozdelenie odhadu $\hat{Y}_0$ je

$$\hat{Y}_0 \sim N\left(\mu_{Y|x_0}, \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]\right) \quad (1.22)$$

Všimnime si, že $E(\hat{Y}_0) = \mu_{Y|x_0} = \beta_0 + \beta_1 x_0 \neq Y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0$. Pretože nové pozorovanie Y_0 je náhodná premenná a nezávisí od $\hat{Y}_0$, nová náhodná premenná Ψ sa použije pri tvorbe predikčného intervalu pre Y_0 :

$$\Psi = Y_0 - \hat{Y}_0 \sim N\left(0, \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]\right) \quad (1.23)$$

Predikčný interval pre budúce pozorovanie (y_0)

Pretože σ^2 je neznáma,

$$T = \frac{\Psi - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]}} = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]}} \sim t(n-2)$$

Teda $100(1-\alpha)$ %-ný predikčný interval pre budúce pozorovanie y_0 v bode x_0 je

$$\hat{y}_0 - t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} \leq y_0 \leq \hat{y}_0 + t(n-2, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} \quad (1.24)$$

Poznámka. Všimnime si, že ako pri intervale spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$, šírka 95 %-ného predikčného intervalu pre y_0 je najmenšia v bode $x = \bar{x}$ a narastá, keď sa $|x_0 - \bar{x}|$ zväčšuje. Okrem toho, predikčný interval je vždy širší, ako zodpovedajúci interval spoľahlivosti, pretože predikčný interval závisí od chyby odhadovaného regresného modelu a náhodnej chyby (ε) v bode Y , kým interval spoľahlivosti závisí iba od chyby odhadovaného regresného modelu.

Príklad 1.6

Z dát objemu preglejok (Príklad 1.1) sa vypočítali tieto hodnoty:

$$n = 30; \quad \hat{\sigma}^2 = 3,186^2; \quad \sum_{i=1}^n x_i = 225; \quad S_{xx} = 87,5; \quad \hat{\beta}_1 = -12,743; \quad \hat{\beta}_0 = 159,9$$

Predikčný interval pre y_0

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný predikčný interval pre budúce pozorovanie predaja preglejkového produktu, keď cena je $x_0 = 9\text{€}$.

$$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 = 159,9 - 12,743 \times 9 = 45,213$$

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

95 %-ný dvojstranný predikčný interval pre y_0 v bode $x = 9\text{€}$ je

$$\hat{y}_0 - t(30-2, 0,05) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]} \leq y_0 \leq \hat{y}_0 + t(30-2, 0,05) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right]}$$

$$45,213 - 2,04841 \sqrt{3,186^2 \left[1 + \frac{1}{30} + \frac{(9 - \frac{225}{30})^2}{87,5} \right]} \leq y_0 \leq$$

$$\leq 45,213 + 2,04841 \sqrt{3,186^2 \left[1 + \frac{1}{30} + \frac{(9 - \frac{225}{30})^2}{87,5} \right]}$$

$$45,213 - 2,04841 \times 3,278713852 \leq y_0 \leq 45,213 + 2,04841 \times 3,278713852$$

$$45,213 - 6,71615 \leq y_0 \leq 45,213 + 6,71615$$

$$38,49685 \leq y_0 \leq 51,92915$$

$$38,496 \leq y_0 \leq 51,930$$

Poznámka. Všimnime si, že predikčný interval $38,496 \leq y_0 \leq 51,930$ je širší ako zodpovedajúci interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy $43,627 \leq \mu_{y|9} \leq 46,799$ (Príklad 1.5).

1.8 Adekvátnosť regresného modelu

1.8.1 Reziduálna analýza

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť význam reziduálnej analýzy.
- ☐ Interpretovať graf rezíduí.

Reziduálna analýza

Jednoduchý lineárny regresný model spĺňa štyri predpoklady:

1. Linearita medzi x a Y
2. Náhodnosť chyby
3. Konštantný rozptyl chyby
4. Normalita chyby

Tieto štyri predpoklady sa overujú pomocou reziduálnej analýzy ($\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; hodnoty odhadov chýb). Tento postup sa nazýva **posúdenie adekvátnosti modelu**.

Prvé tri predpoklady (linearita, náhodnosť a konštantnosť rozptylu) možno overovať pomocou grafov rezíduí:

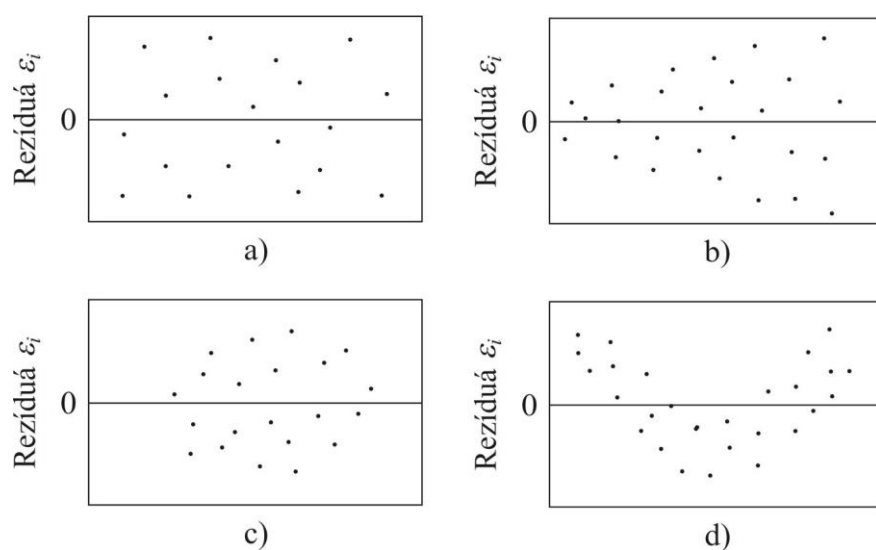
1. $\hat{\varepsilon}_i$ verzus $\hat{y}_i$
2. $\hat{\varepsilon}_i$ verzus x_i
3. $\hat{\varepsilon}_i$ verzus t (keď časová postupnosť je známa)

Normalita chyby sa overuje pomocou jednej z nasledujúcich metód:

1. Histogram rezíduí
2. Graf normality rezíduí
3. Normovanie rezíduí pomocou vzorca

$$d_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.25)$$

Ak rezíduá sú normálne rozdelené, približne 95 % normovaných rezíduí (d_i) sa nachádza v intervale $(-2, 2)$. Rezíduá, ktorých normované hodnoty sú menšie ako -3 alebo väčšie ako 3 , môžu byť odľahlé hodnoty. Všeobecné vzory grafov rezíduí sú uvedené na Obr. 1.6.



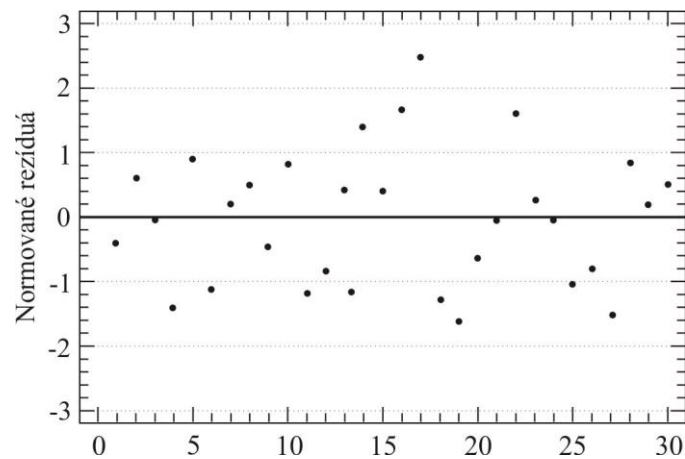
Obr. 1.6 Vzory grafov rezíduí: a) vyhovujúci; b) lievnik; c) dvojité oblúk; d) nelineárny

Vzor a) je ideálny graf rezíduí, ktorý spĺňa všetky tri predpoklady, kým vzory b), c) a d) sú anomálie (odchýlky) nespĺňajúce predpoklady o chybe – rezíduá nie sú náhodné a nemajú konštantný rozptyl. Tieto nežiaduce reziduálne vzory môžu byť v dôsledku nelinearity alebo bezvýznamnosti vzťahu medzi nezávislou premennou x a ozvovou premennou y . K náprave nežiaducich vzorov rezíduí možno použiť tieto metódy:

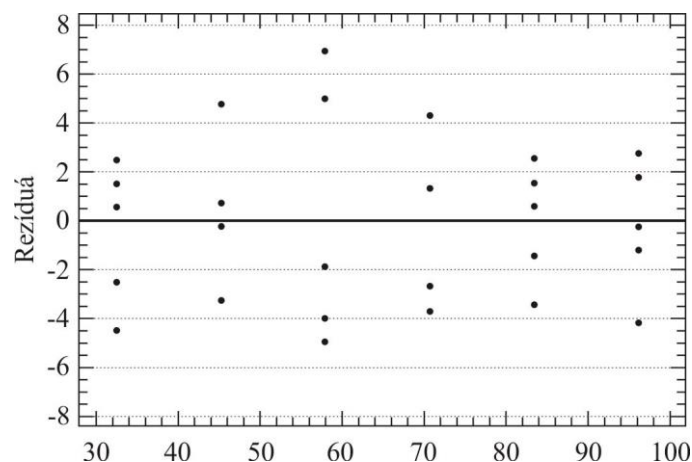
1. Transformácia x alebo y na iný tvar (napr. $1/y$, $\sqrt{y}$, y^2 a $\ln y$)
2. Pridať do modelu člen (členy) vyššieho rádu premennej x
3. Zahrnúť nový(é) regresor(y) do modelu

Príklad 1.7 Reziduálna analýza

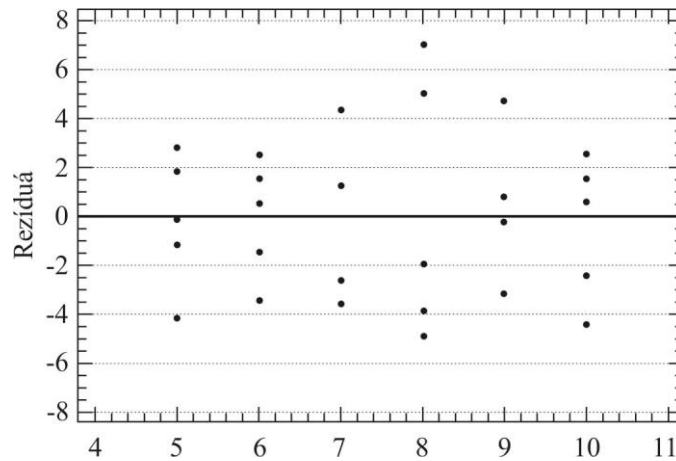
Pre dáta z preglejok cena verzus predaj (Príklad 1.1) sa získali nasledujúce grafy rezíduí z odhadnutého regresného modelu $\hat{y} = 159,9 - 12,743x$:



a) Graf normovaných rezíduí ($\hat{\varepsilon}_i$ verzus t)



b) Graf rezíduí ($\hat{\varepsilon}_i$ verzus $\hat{y}_i$)

c) Graf rezíduí ($\hat{\varepsilon}_i$ verus x_i)

Normálny pravdepodobnostný graf zobrazuje rezíduá ležiace blízko pozdĺž priamky. Okrem toho graf normovaných rezíduí ukazuje, že viac ako 95 % normovaných rezíduí (96,7 %) sa nachádza v intervale $(-2, 2)$. Preto sa dospelo k záveru, že rezíduá majú normálne rozdelenie. Všimnime si, že všetky rezíduá sú vnútri intervalu $(-3, 3)$, teda nie sú žiadne vybočujúce hodnoty z dát cena verus predaj.

Grafy $\hat{\varepsilon}_i$ verus $\hat{y}_i$ a $\hat{\varepsilon}_i$ verus x_i ukazujú, že rezíduá sú náhodné s konštantným rozptylom. Variabilita rezíduí mierne vzrástla v polovici oborov hodnôt y a x . Táto odchýlka od konštantného rozptylu však nie je natoľko závažná, aby sa zamietla adekvátnosť regresného modelu.

1.8.2 Koeficient determinácie (R^2)

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť termín *koeficient determinácie*.
- ☐ Vypočítať koeficient determinácie v regresnom modeli.

Koeficient determinácie (R^2)

Koeficient determinácie R^2 udáva veľkosť variability dát vysvetlenej regresným modelom. Inými slovami povedané, R^2 je podiel z celkovej variability Y , ktorá pochádza z regresného modelu:

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = 1 - \frac{SS_E}{SS_T}, \quad 0 \leq R^2 \leq 1 \quad (1.26)$$

Opatrnosť pri použití R^2

Veľká hodnota R^2 nemusí nutne znamenať adekvátnosť regresného modelu. Pridaním nových regresorov alebo rádovo vyššie členy regresorov do existujúceho modelu sa R^2 vždy zvýši, aj keď nový model je menej vhodný ako súčasný model, pokiaľ ide o jednoduchosť, stabilitu a štatistickú významnosť. Napríklad, na n dátových bodov x a y sa dokonale hodí polynómom stupňa $n-1$ (napr. štyri dátové body môžu byť dokonale fitované polynómom so stupňom tri). Aj keď R^2 -hodnota dokonalého modelu sa rovná jednej, polynóm vyššieho rádu je zložitý na použitie a často nestabilný, ak sa použije iný výber dát. Napokon, ak sa súčet štvorcov chýb (SS_E) nového modelu zníži pomocou priemerného štvorca chyby existujúceho modelu, nový model bude mať väčší priemerný štvorec chyby (MS_E), čo má za následok zníženie úrovne štatistickej významnosti.

Príklad 1.8 (Koefficient determinácie)

Z dát objemu preglejok (Príklad 1.1) sa vypočítali tieto hodnoty:

$$SS_T = 14492,667; \quad SS_R = 14208,445; \quad SS_E = 284,222$$

Vypočítame koeficient determinácie odhadnutého regresného modelu $\hat{y} = 159,9 - 12,743x$.

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = \frac{14208,445}{14492,667} = 0,980388565 = 98 \%$$

Odhadnutý regresný model vysvetľuje 98 % variability v predaji preglejkového produktu.

1.8.3 Test nezhody**Ciele výučby**

- ☐ Vysvetliť význam testu nezhody v regresnom modeli.
- ☐ Vykonať test nezhody na odhadnutom regresnom modeli.

Test nezhody

Test nezhody regresného modelu určuje či úroveň modelu je vhodná. Pre tento test sú potrebné opakované pozorovania Y aspoň v jednom bode x .

ANOVA pre test nezhody

Metóda ANOVA je základom testu nezhody regresného modelu. Predpokladajme, že pozorovania pre m úrovní x sú tieto:

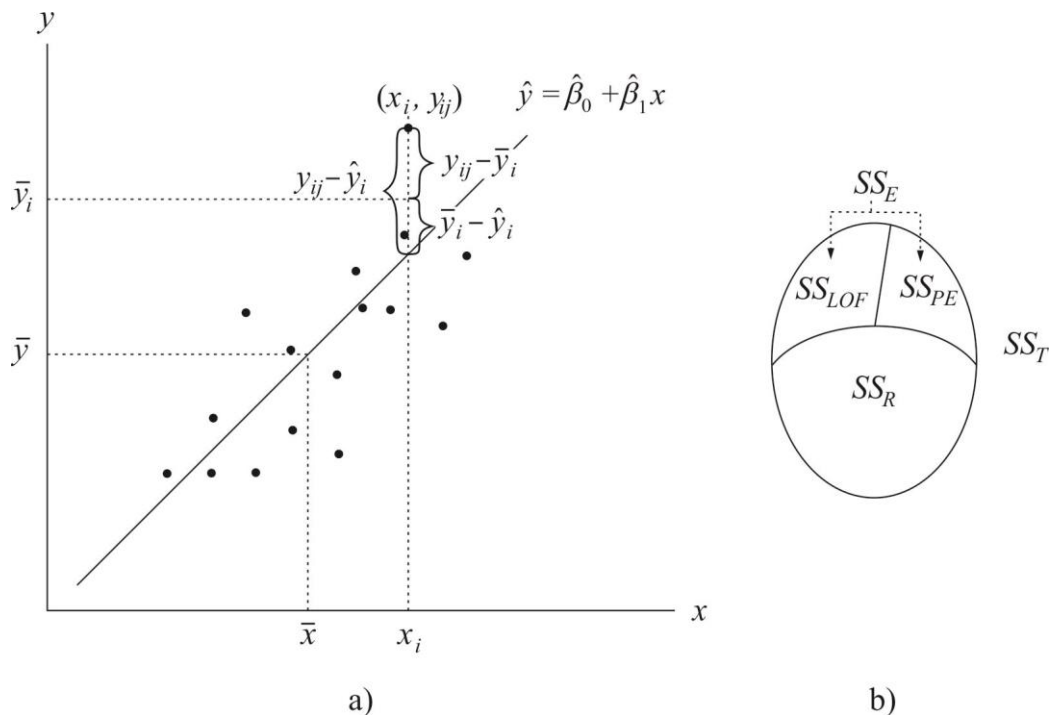
X	Počet opakovaných pozorovaní	Y
x_1	n_1	$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}$
x_2	n_2	$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	n_m	$y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn_m}$

Pri použití ANOVA techniky, ako je uvedené v tabuľke 11.3, súčet štvorcov chýb (SS_E ; stupne voľnosti $= n - 2$; pozri časť 1.5.2) je ďalej rozdelený na dve časti:

1. Variabilita spôsobená čistou chybou (SS_{PE} , súčet štvorcov čistej chyby; stupne voľnosti $= n - m$).
2. Variabilita spôsobená nezhodou modelu (SS_{LOF} , súčet štvorcov nezhody; stupne voľnosti $= m - 2$).

Tab. 1.3 Rozdelenie súčtu štvorcov chýb (SS_E)

SS_E	SS_{PE}	SS_{LOF}
Súčet štvorcov chýb	Súčet štvorcov čistej chyby	Súčet štvorcov nezhody
$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{y}_i)^2$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	$\sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$
St. v. $n - 2$	$n - m$	$m - 2$



Obr. 1.7 Delenie variability premennej y spôsobenej chybou

$y_{ij} - \hat{y}_i$ – variabilita pozorovania y_{ij} spôsobená chybou
 $y_{ij} - \bar{y}_i$ – variabilita pozorovania y_{ij} spôsobená čistou chybou
 $\bar{y}_i - \hat{y}_i$ – variabilita pozorovania y_{ij} spôsobená nezhodou modelu

Grafická interpretácia veličín SS_E , SS_{PE} a SS_{LOF} je na Obr. 1.7. Odchýlka pozorovania y_{ij} od zodpovedajúcej hodnoty odhadu $\hat{y}_i$ v bode x_i sa rozdelí na odchýlku y_{ij} od zodpovedajúceho priemeru $\bar{y}_i$ vysvetlenú čistou chybou a na odchýlku $\bar{y}_i$ od zodpovedajúcej hodnoty odhadu $\hat{y}_i$ vysvetlenú nezhodou modelu. Tieto tri odchýlky sa umocnia na druhú a vypočítajú sa z nich súčty SS_E , SS_{PE} a SS_{LOF} . Chyba v dôsledku nezhody modelu by mohla byť nulová, ak by sa použil model vyššieho rádu.

Podiel $SS_{LOF}/(m-2)$ a $SS_{PE}/(n-m)$ má F rozdelenie:

$$F = \frac{SS_{LOF}/(m-2)}{SS_{PE}/(n-m)} = \frac{MS_{LOF}}{MS_{PE}} \sim F(m-2; n-m) \quad (1.27)$$

Pretože štatistika F nadobúda malú hodnotu, keď rád modelu je vhodný, štatistika F sa používa na testovanie hypotézy H_0 : Rád regresného modelu je správny. Všimnime si, že veličiny MS_{LOF} (**priemerný štvorec nezhody**) a MS_{PE} (**priemerný štvorec čistej chyby**) dostaneme delením SS_{LOF} a SS_{PE} ich stupňami voľnosti.

Tabuľka ANOVA a test nezhody

Hodnota nezhody a čistej chyby sú uvedené v Tab. 1.4 na testovanie adekvátnosti modelu pomocou metódy ANOVA.

Tab. 1.4 ANOVA na testovanie nezhody

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	Testovacia štatistika F_0
Nezhoda	SS_{LOF}	$m-2$	MS_{LOF}	MS_{LOF} / MS_{PE}
Čistá chyba	SS_{PE}	$n-m$	MS_{PE}	
Chyba	SS_E	$n-2$	MS_E	

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

H_0 : Rád modelu je správny. H_1 : Rád modelu nie je správny.

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_{LOF} / (m-2)}{SS_{PE} / (n-m)} = \frac{MS_{LOF}}{MS_{PE}} \sim F(m-2; n-m)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(m-2, n-m; \alpha)$$

Krok 4: **Záver:** nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(m-2, n-m; \alpha)$$

Príklad 1.9 (Test nezhody)

Pre dáta z preglejok cena verzus predaj (Príklad 1.1) sa vypočítali tieto hodnoty:

$$n = 30; \quad m = 6; \quad SS_E = 284,38; \quad SS_{LOF} = \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 = 2,38; \quad SS_{PE} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = 282$$

Urobíme test nezhody pre regresný model $\hat{y} = 159,9 - 12,743x$ na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. Pomocou tabuľky ANOVA testujeme nezgodu regresného modelu:

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	Testovacia štatistika F_0
Nezhoda	2,38	4	0,595	0,051
Čistá chyba	282	24	11,75	
Chyba	284,38	28	10,156	

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \text{Rád modelu je správny.} \quad H_1 : \text{Rád modelu nie je správny.}$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$f_0 = \frac{MS_{LOF}}{MS_{PE}} = \frac{0,595}{11,75} = 0,051$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(m-2, n-m; \alpha) = f(4, 24; 0,05) = 2,77631$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $f_0 = 0,051 < f(4, 24; 0,05) = 2,77631$, nulová hypotéza H_0 sa nezamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. Dospelo sa k záveru, že rád modelu je správny.

1.9 Transformácie na priamku

Ciele výučby

- Vysvetliť vzťah medzi lineárnym modelom a nelineárnym modelom.

Transformácia nelineárneho modelu

Nelineárny vzťah medzi nezávislou premennou x a závislou premennou Y možno transformovať na lineárny model pomocou matematických operácií. Príklady sú uvedené v Tab. 1.5.

Tab. 1.5

Nelineárny model		Lineárny model
$Y = \beta_0 e^{\beta_1 x + \varepsilon}$	$\Rightarrow$	$\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$
$Y = \beta_0 + \beta_1 x^3 + \varepsilon$	$\Rightarrow$	$Y = \beta_0 + \beta_1 z + \varepsilon$, kde $z = x^3$
$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x} + \varepsilon$	$\Rightarrow$	$Y = \beta_0 + \beta_1 z + \varepsilon$, kde $z = \frac{1}{x}$
$Y = \frac{1}{\exp(\beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon)}$	$\Rightarrow$	$Z = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, kde $Z = -\ln Y$

1.10 Korelácia

Ciele výučby

- Vypočítať výberový korelačný koeficient R medzi náhodnými premennými X a Y .
- Skonstruovať interval spoľahlivosti pre korelačný koeficient základného súboru ρ medzi X a Y .
- Testovať hypotézu o ρ .

Korelácia verzus regresia

Úzky vzťah existuje medzi koreláciou náhodných premenných X a Y a regresným modelom nezávislých a závislých premenných x a Y . Pripomeňme, že v regresnom modeli je regresor x matematická premenná, nie náhodná premenná.

Predpokladajme, že X a Y sú náhodné premenné a pozorovania (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ sa získali z dvojrozmerného normálneho rozdelenia. **Korelačný koeficient základného súboru** ρ_{XY} je

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad (1.28)$$

kde σ_X , σ_Y sú smerodajné odchýlky základného súboru a σ_{XY} -kovariancia základného súboru.

Podmienené rozdelenie pravdepodobnosti Y za podmienky $X = x$ je normálne so strednou hodnotou a rozptylom

$$\begin{aligned} E(Y|x) &= \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) = \mu_Y - \mu_X \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} x = \\ &= \beta_0 + \beta_1 x, \text{ kde } \beta_0 = \mu_Y - \mu_X \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \text{ a } \beta_1 = \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \end{aligned}$$

$$D(Y|x) = \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)$$

Zistilo sa teda, že podmienené rozdelenia pravdepodobnosti Y za podmienky $X = x$ je ekvivalentné s rozdelením pravdepodobnosti jednoduchého lineárneho regresného modelu so strednou hodnotou $\beta_0 + \beta_1 x$ a rozptylom σ^2 .

Odhadovanie korelačného koeficienta (ρ_{XY})

Odhad ρ_{XY} sa nazýva **výberový korelačný koeficient** a je daný vzťahom

$$R_{XY} = \frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}, \quad -1 \leq R_{XY} \leq 1 \quad (1.29)$$

Štvorec R_{XY} je **koeficient determinácie** R_{XY}^2 regresného modelu pre Y a X , ktoré majú dvojrozmerné normálne rozdelenie:

$$R_{XY}^2 = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX} S_{YY}} = \frac{SS_R}{SS_T} \quad (1.30)$$

Odvodenie vzťahu $R_{XY}^2 = \frac{SS_R}{SS_T}$

$$\begin{aligned} R_{XY} &= \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}} \Rightarrow R_{XY}^2 = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX} S_{YY}} = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX} SS_T} \text{ pretože } SS_T = S_{YY} \\ &= \frac{\hat{\beta}_1 S_{XY}}{SS_T} \text{ pretože } \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \\ &= \frac{SS_R}{SS_T} \text{ pretože } SS_R = \hat{\beta}_1 S_{XY} \end{aligned}$$

Z predpokladu, že náhodný vektor (X, Y) má dvojrozmerné normálne rozdelenie s korelačným koeficientom ρ_{XY} a kovarianciou $\text{cov}(X, Y) = \sigma_{XY}$, vyplývajú nasledujúce tvrdenia:

- výberový korelačný koeficient R_{XY} je nevychýlený odhad korelačného koeficienta základného súboru ρ_{XY} :

$$E(R_{XY}) = \rho_{XY} \quad (1.31)$$

- výberová kovariancia S_{XY} je asymptoticky nevychýleným odhadom kovariancie základného súboru σ_{XY} :

$$E(S_{XY}) \approx \sigma_{XY}, \text{ ak } n \rightarrow \infty \quad (1.32)$$

- štatistika T , ktorá je funkciou výberového koeficienta korelácie R_{XY} má t -rozdelenie so stupňami voľnosti $n-2$:

$$T = \frac{R_{XY} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{XY}^2}} \sim t(n-2), \text{ ak } \rho = 0 \quad (1.33)$$

- Fisherova štatistika Z (tzv. Z -transformácia) má asymptoticky normálne rozdelenie:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}} \approx N\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}} + \frac{\rho_{XY}}{2(n-1)}, \frac{1}{n-3}\right) \quad (1.34)$$

Predchádzajúce štyri tvrdenia sú základné tvrdenia z oblasti korelačnej analýzy, z ktorých vyplývajú jednotlivé bodové odhady, intervalový odhad a testy pre korelačný koeficient. Dôkaz týchto tvrdení môže čitateľ nájsť napr. v publikácii Lamoš, F., Potocký, R.: Pravdepodobnosť a matematická štatistika – štatistické analýzy. ALFA, Bratislava, 1989. ISBN 80-05-00115-0 a podrobnejšie v publikácii Anderson, T. W.: An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. John Wiley & Sons, Inc., 2003. ISBN 0-471-36091-0.

Ak vo Fisherovej štatistike zanedbáme člen $\rho_{XY} / 2(n-1)$, ktorý je pre väčší počet pozorovaní blízky nule, tak z Fisherovej štatistiky a z vlastností normovanej náhodnej premennej vyplýva, že nasledujúca štatistika má asymptoticky normálne rozdelenie:

$$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_{xy}}{1-\rho_{xy}} \right) \sqrt{n-3} \approx N(0,1) \quad (1.35)$$

Indukčné súvislosti o ρ_{XY}

- **Parameter:** ρ_{XY}
- **Bodový odhad ρ_{XY} :** $R_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}}$

- Testovacia štatistiky pre ρ_{XY}

$$T_0 = \frac{R_{XY} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{XY}^2}} \sim t(n-2), \text{ ak } H_0 : \rho_{XY} = 0$$

$$Z_0 = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+R_{XY}}{1-R_{XY}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_{XY,0}}{1-\rho_{XY,0}} \right) \sqrt{n-3} \text{ pre } H_0 : \rho_{XY} = \rho_{XY,0} (\neq 0), n \geq 25$$

Interval spoľahlivosti pre ρ_{XY}

Aproximácia $100(1-\alpha)\%$ -ného intervalu pre ρ_{XY} je

$$\text{th} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}} - \frac{k_\alpha}{\sqrt{n-3}} \right] \leq \rho_{XY} \leq \text{th} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}} + \frac{k_\alpha}{\sqrt{n-3}} \right] \quad (1.36)$$

kde $\text{th}(a) = (e^a - e^{-a}) / (e^a + e^{-a})$ je hyperbolický tangens k_α je kritická hodnota $N(0,1)$.

Test hypotézy o ρ_{XY} t. j. o β_1 (t-test)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \rho_{XY} = \rho_{XY,0} \quad H_1 : \rho_{XY} \neq \rho_{XY,0}$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$T_0 = \frac{R_{XY} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{XY}^2}} \sim t(n-2), \text{ pre test } H_0 : \rho_{XY} = 0$$

$$Z_0 = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+R_{XY}}{1-R_{XY}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_{XY,0}}{1-\rho_{XY,0}} \right) \sqrt{n-3} \text{ pre test } H_0 : \rho_{XY} = \rho_{XY,0} (\neq 0), n \geq 25$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$t(n-2; \alpha) \text{ pre testovanie } H_0 : \rho_{XY} = 0$$

$$k_\alpha \text{ pre testovanie } H_0 : \rho_{XY} = \rho_{XY,0} (\neq 0), n \geq 25$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$|t_0| > t(n-2; \alpha) \text{ pre test } H_0 : \rho_{XY} = 0$$

$$|z_0| > k_\alpha \text{ pre test } H_0 : \rho_{XY} = \rho_{XY,0} (\neq 0), n \geq 25$$

Príklad 1.10

Vzťah medzi hodnotením predmetov ergonómie (X) a štatistiky (Y) sa študuje. Náhodne sa vybralo 50 študentov, ktorí absolvovali obidva predmety. Z finálneho hodnotenia ergonómie a štatistiky sa vypočítali hodnoty:

$$n = 50; S_{yy} = 6652,5; S_{xx} = 3999,0; S_{xy} = 3303,1$$

Predpokladajme, že hodnotenie ergonómie a štatistiky má dvojrozmerné normálne rozdelenie.

Výberový korelačný koeficient

Vypočítame hodnotu výberového korelačného koeficienta R_{XY} medzi hodnotením predmetov ergonómie (X) a štatistiky (Y).

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{3303,1}{\sqrt{3999,0 \times 6652,5}} = 0,640403325 \approx 0,64$$

Interval spoľahlivosti pre ρ_{XY}

Skonstruujeme 95 %-ný interval spoľahlivosti pre korelačný koeficient základného súboru ρ_{XY} medzi náhodnými premennými X a Y .

$$\begin{aligned} \text{th} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}} - \frac{k_{\alpha}}{\sqrt{n-3}} \right] &\leq \rho_{XY} \leq \text{th} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}} + \frac{k_{\alpha}}{\sqrt{n-3}} \right] \\ \text{th} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+0,64}{1-0,64} - \frac{1,96}{\sqrt{50-3}} \right] &\leq \rho_{XY} \leq \text{th} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+0,64}{1-0,64} + \frac{1,96}{\sqrt{50-3}} \right] \\ \text{th}[0,472278] &\leq \rho_{XY} \leq \text{th}[1,04407] \\ 0,440038 &\leq \rho_{XY} \leq 0,77947 \\ 0,44 &\leq \rho_{XY} \leq 0,78 \end{aligned}$$

Test hypotézy o ρ_{XY} (t. j. β_1)

Testujeme hypotézu $H_0 : \rho_{XY} = 0$ na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \rho_{XY} = 0 \quad H_1 : \rho_{XY} \neq 0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$t_0 = \frac{r_{XY} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{XY}^2}} = \frac{0,64 \sqrt{50-2}}{\sqrt{1-0,64^2}} = 5,770685662 \approx 5,77$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty** pre α .

$$t(n-2; \alpha) = t(50-2; 0,05) = t(48; 0,05) = 2,01$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $|t_0| = 5,78 > t(48; 0,05) = 2,01$, nulová hypotéza H_0 sa zamietá. Dospelo sa k záveru, že medzi hodnotením predmetov ergonómie (X) a štatistiky (Y) je významná závislosť na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

2 VIACROZMERNÁ LINEÁRNA REGRESIA A ZOVŠEOBECNENÝ LINEÁRNY MODEL

2.1 Viacrozmerný lineárny regresný model

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť predpoklady viacrozmerného lineárneho regresného modelu.
- ☐ Transformovať nelineárny model na lineárny model.
- ☐ Vypočítať rezíduá.
- ☐ Odhadnúť rozptyl chyby σ^2 .

Viacrozmerný lineárny model

Rozšírením jednoduchého lineárneho modelu je viacrozmerný lineárny model, ktorý vysvetľuje lineárny vzťah medzi premennou ozvy Y a k (>1) regresormi

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon \quad (2.1)$$

kde

1. $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ sú **regresné koeficienty**. Koeficient β_0 označuje absolútny člen a koeficienty β_j , $j = 1, 2, \dots, k$ označujú smernice regresorov. Každý koeficient β_j meria očakávanú hodnotu zmeny Y pri jednotkovej zmene x_j , pričom ostatné regresory zostávajú konštantné. Koeficienty β_j sa niekedy nazývajú **parciálne regresné koeficienty**.
2. $x_1, x_2, \dots, x_k$ sú **nezávislé premenné (regresory, prediktory)**, ktoré reprezentujú kontrolovateľné konštanty (nie náhodné premenné).
3. ε je **náhodná chyba**, ktorá reprezentuje náhodné kolísanie Y okolo lineárnej krivky $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$. Predpokladá sa, že ε je normálne rozdelená so strednou hodnotou 0 a rozptylom σ^2 t. j.

$$\varepsilon \sim N(0,1) \quad (2.2)$$

4. Y je **závislá (ozvová) premenná**. Pretože výsledky Y v tých istých hodnotách $x_1, x_2, \dots, x_k$ môžu kolísať náhodne, Y je náhodná premenná s normálnym rozdelením

$$Y \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k, \sigma^2) \quad (2.3)$$

Transformácie nelineárneho modelu

Akékoľvek regresné modely s lineárnou kombináciou regresorov možno transformovať na lineárny model. Príklady transformácií nelineárneho modelu:

$$1. \quad Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon \quad \text{transformujeme na}$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon, \quad \text{kde } \beta_3 = \beta_{12} \text{ a } x_3 = x_1 x_2$$

$$2. \quad Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 \frac{1}{x_1} + \beta_4 x_2^3 + \varepsilon \quad \text{transformujeme na}$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon, \quad \text{kde } x_3 = \frac{1}{x_1} \text{ a } x_4 = x_2^3$$

Maticový zápis

Predpokladajme, že n pozorovaní pozostávajúcich z k regresorov a premennej ozvy $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sa modelujú pomocou viacrozmerného regresného modelu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Systém n rovníc je vyjadrený v maticovom tvare takto:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

kde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Zostavovanie modelu

Metódou najmenších štvorcov (MNS) nájdeme hodnoty odhadov regresných koeficientov $\boldsymbol{\beta}$, ktoré minimalizujú súčet štvorcov chýb, t. j. kvadratickú formu:

$$\begin{aligned} SS_E &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

Pri minimalizácii používame deriváciu vektorovej funkcie $SS_E(\boldsymbol{\beta})$, preto si ukážeme dôležité vzťahy:

$$\frac{\partial SS_E(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left[\frac{\partial SS_E(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}, \frac{\partial SS_E(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial SS_E(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right]^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{a}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2 \mathbf{A} \boldsymbol{\beta}$$

Potom derivujeme kvadratickú formu, položíme ju rovnú nule, čím dostaneme systém tzv. normálnych rovníc:

$$\frac{\partial SS_E(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2 \mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2 \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

Z normálnych rovníc ľahko získame odhad $\boldsymbol{\beta}$.

MNŠ odhad $\boldsymbol{\beta}$ je

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.6)$$

Potom **odhadnutý regresný model** je

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.6)$$

Rezíduá a rozptyl chyby

Odhadnutý model má **rezíduá (vektor rezíduí)**

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (2.7)$$

Hodnota odhadu rozptylu chyby σ^2 je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-p} = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}}{n-p} \quad (2.8)$$

kde $p = k + 1$ je počet regresných koeficientov a k je počet regresorov.

Smerodajná chyba regresného koeficienta $\hat{\beta}_j$

Kovariančná matica $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 \mathbf{C}, \quad \text{kde } \mathbf{C} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (2.9)$$

Kovariančná matica je symetrická matica typu $p \times p$, ktorej prvky „ jj “ sú rozptyly a prvky „ ij “ sú kovariancie $\hat{\beta}_i$ a $\hat{\beta}_j$, kde $i, j = 0, 1, \dots, k$; $i \neq j$.

Potom **hodnota odhadu smerodajnej chyby $\hat{\beta}_j$** je

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = se(\hat{\beta}_j) = \hat{\sigma} \sqrt{C_{jj}} \quad (2.10)$$

kde C_{jj} je j -tá diagonálna hodnota matice $\mathbf{C}$. Smerodajná chyba regresného koeficienta je užitočná miera reprezentujúca presnosť odhadovania regresného koeficientu. Čím je menšia smerodajná chyba, tým je presnejšie odhadovanie.

Príklad 2.1

V chemickom závode sa študuje spotreba elektrickej energie meraná každý mesiac. Predpokladá sa, že mesačná spotreba závisí od štyroch faktorov: priemerná teplota prostredia (x_1), počet dní za mesiac (x_2), priemerná čistota produktu (x_3) a objem produkcie (x_4). Zodpovedajúce záznamy v závode v uplynulom roku sú nasledovné:

	Spotreba energie y ; [kW]	Teplota x_1 ; [°F]	Počet dní x_2	Čistota produktu x_3 ; [%]	Objem produkcie x_4 ; [tona]
1	240	25	24	91	100
2	236	31	21	90	95
3	290	45	24	88	110
4	274	60	25	87	88
5	301	65	25	91	94
6	316	72	26	94	99
7	300	80	25	87	97
8	296	84	25	86	96
9	267	75	24	88	110
10	276	60	25	91	105
11	288	50	25	90	100
12	261	38	23	89	98

Pomocou štatistického softvéru získame odhadnutý regresný model spotreby energie, ktorý obsahuje všetky štyri regresory (x_1, x_2, x_3 a x_4) a zodpovedajúci súčet štvorcov chýb (SS_E):

$$\hat{y} = -102,71 + 0,61x_1 + 8,92x_2 + 1,44x_3 + 0,01x_4 \quad \text{a} \quad SS_E = 1699,0$$

Výpočet rezídua

Vypočítame rezíduum hodnoty $y = 301$, keď $x_1 = 65$ °F, $x_2 = 25$ dní, $x_3 = 91$ % a $x_4 = 94$ ton. Hodnota odhadu spotreby energie je

$$\hat{y} = -102,71 + 0,61 \times 65 + 8,92 \times 25 + 1,44 \times 91 + 0,01 \times 94 = 291,8$$

Teda

$$\hat{\varepsilon} = y - \hat{y} = 301 - 291,8 = 9,2$$

Odhadovanie σ^2

Hodnotu odhadu rozptylu σ^2 získame takto:

Pre $n = 12$ a počet regresných koeficientov $p = 5$ je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{m - p} = \frac{1699,0}{12 - 5} = 242,7 = 15,6^2$$

2.2 Testovanie hypotéz vo viacrozmernej lineárnej regresii

2.2.1 Test významnosti regresie

Ciele výučby

- ☐ Testovať významnosť viacrozmernej regresie.
- ☐ Rozlišovať koeficient viacnásobnej determinácie R^2 od upraveného koeficienta determinácie R_{adj}^2 .
- ☐ Vypočítať R^2 a R_{adj}^2 v regresnom modeli.

Významnosť regresie

Test významnosti regresie určí, či existuje aspoň jeden regresor x_j z k regresorov, ktorý má významný lineárny vzťah s ozvovou premennou Y :

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \quad (\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0})$$

$$H_1: \beta_j \neq 0 \quad \text{aspoň pre jedno } j = 1, 2, \dots, k \quad (2.11)$$

Tak ako v jednoduchej regresii aj vo viacrozmernej regresii použijeme metódu ANOVA na testovanie významnosti regresie. Vo viacrozmernom lineárnom modeli (pozri Tab. 2.1) celková variabilita Y (SS_T , **celkový súčet štvorcov**; stupne voľnosti $= n - 2$) sa rozdelí na dve zložky:

1. Variabilita vysvetlená regresným modelom (SS_R , **súčet štvorcov regresie**; st. v. $= k$)
2. Variabilita tvorená náhodnou chybou (SS_E , **súčet štvorcov chýb**; st. v. $= n - k - 1 = n - (k + 1) = n - p$)

Tab. 2.1 Rozdelenie celkovej variability v Y (SS_T)

SS_T		SS_R		SS_E
Celkový súčet štvorcov		Súčet štvorcov regresie		Súčet štvorcov chýb
$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	=	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	+	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
$\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}$	=	$\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}$	+	$\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}$
St. v. $n - 1$	=	k	+	$n - p$

Podiel SS_R/k a $SS_E/(n-p)$ má F rozdelenie:

$$F = \frac{SS_R/k}{SS_E/(n-p)} = \frac{MS_R}{MS_E} \sim F(k; n-p) \quad (2.12)$$

Táto štatistika F sa používa na testovanie $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$, pretože F nadobúda malú hodnotu, keď H_0 je správna. Veličiny MS_R (**priemerný štvorec regresie**) a MS_E (**priemerný štvorec chyby**) dostaneme delením SS_R a SS_E ich stupňami voľnosti. Všimnime si, že

$$MS_E = \frac{SS_E}{n-p} = \hat{\sigma}^2 \quad (2.13)$$

Postup testovania (F test)

V tabuľke ANOVA (Tab. 2.2) sú uvedené dôležité veličiny s variabilitou, pomocou ktorých testujeme významnosť regresie.

Tab. 2.2 ANOVA na testovanie významnosti regresie

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	Testovacia štatistika F_0	P -hodnota
Regresia	SS_R	k	MS_R	MS_R / MS_E	
Chyba	SS_E	$n-p$	MS_E		
Celková	SS_T	$n-1$			

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \quad H_1: \beta_j \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } j = 1, 2, \dots, k$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_R/k}{SS_E/(n-p)} = \frac{MS_R}{MS_E} \sim F(k; n-p)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(k, n-p; \alpha)$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(k, n-p; \alpha)$$

Koeficient viacrozmernej determinácie R^2 verus R_{adj}^2

Koeficient determinácie udáva množstvo variability Y vysvetlenej regresormi $x_1, x_2, \dots, x_k$:

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = 1 - \frac{SS_E}{SS_T}, \quad 0 \leq R^2 \leq 1 \quad (2.14)$$

Veľká hodnota R^2 neznamená nevyhnutne, že regresný model je adekvátny. Keď sa pridá do modelu nový regresor, R^2 vždy vzrastie nezávisle od toho, či je regresor štatisticky významný, alebo nevýznamný. Regresný model, ktorý má veľkú hodnotu R^2 , môže neuspokojiť vo odhadnutí stredné hodnoty oziev alebo predpovedať nové pozorovania.

Lepšia miera, ako koeficient determinácie R^2 , je upravený koeficient determinácie R_{adj}^2 , ktorý získame takto:

$$R_{\text{adj}}^2 = 1 - \frac{SS_E / (n - p)}{SS_T / (n - 1)} = 1 - \frac{n - 1}{n - p} (1 - R^2), \quad 0 \leq R_{\text{adj}}^2 \leq 1 \quad (2.15)$$

Kým R^2 sa zväčší vždy, keď sa pridá ďalší regresor do existujúceho modelu, R_{adj}^2 sa môže v istých prípadoch znížiť.

Príklad 2.2

Z dát spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1) sa získala nasledujúca tabuľka ANOVA:

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	Testovacia štatistika F_0	P-hodnota
Regresia	4957,2	4	1239,3	5,1	0,03
Chyba	1699,0	7	242,7		
Celková	6656,3	11			

Testovanie významnosti regresie

Testujeme významnosť regresie na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \quad H_1: \beta_j \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } j = 1, 2, 3, 4$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$f_0 = \frac{SS_R / k}{SS_E / (n - p)} = \frac{4957,2 / 4}{1699,0 / 7} = \frac{1239,3}{242,7} = 5,1$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(k, n-p; \alpha) = f(4, 7; 0,05) = 4,12$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $f_0 = 5,1 > f(4, 7; 0,05) = 4,12$, nulová hypotéza H_0 sa zamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. To znamená, že aspoň jeden zo štyroch regresorov má významný lineárny vzťah s mesačnou spotrebou elektrickej energie na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Koeficient determinácie R^2 verzus R_{adj}^2

Vypočítajme koeficient determinácie R^2 a upravený koeficient determinácie R_{adj}^2 regresného modelu.

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = \frac{4957,2}{6656,3} = 0,745 = 74,5 \%$$

$$R_{\text{adj}}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p} (1 - R^2) = 1 - \frac{12-1}{12-5} (1 - 0,745) = 0,599 = 59,9 \%$$

Štyri regresory (x_1, x_2, x_3, x_4) vysvetľujú 59,9 % variability v mesačnej spotrebe elektrickej energie Y .

2.2.2 Testy jednotlivých regresných koeficientov a podmnožiny koeficientov

Ciele výučby

- ☐ Testovať významnosť jednotlivých regresorov.
- ☐ Testovať významnosť podmnožiny regresorov.

Významnosť jednotlivých regresorov

Významnosť každého regresora x_j sa vyhodnocuje t -testom.

Indukčné súvislosti o smernici (β_1)

- **Parameter:** β_j
- **Bodový odhad β_j :** $\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma^2 C_{jj})$, σ^2 je neznámy
- **Testovacia štatistika β_j :** $T = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}} \sim t(n-p)$
- **Odhad smerodajnej chyby $\hat{\beta}_j$:** $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$, kde $\hat{\sigma}^2 = MS_E$

Testovanie hypotézy o β_j (t-test)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \beta_j = \beta_{j,0} \quad H_1 : \beta_j \neq \beta_{j,0}$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}} \sim t(n-p)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$t(n-p; \alpha)$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$|t_0| > t(n-p; \alpha)$$

Príklad 2.3 (Testovanie hypotézy o β_j)

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Hodnoty nasledujúcich veličín v regresnej analýze sa získali pre objem výroby (x_4):

$$\hat{\beta}_4 = 0,014, \quad se(\hat{\beta}_4) = 0,734, \quad n = 12, \quad p = k + 1 = 5$$

Testujeme významnosť x_4 na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \beta_4 = 0 \quad H_1 : \beta_4 \neq 0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_4 - \beta_{4,0}}{se(\hat{\beta}_4)} = \frac{0,014 - 0}{0,734} = 0,02$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$t(n-p; \alpha) = t(12-5; 0,05) = t(7; 0,05) = 2,365$$

Krok 4: **Záver**:

pretože $|t_0| = 0,02 < t(7, 0,05) = 2,365$, nulová hypotéza H_0 sa nezamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Významnosť podmnožiny regresorov

Významnosť podmnožiny regresorov $x_1, x_2, \dots, x_r$ ($r < k$) sa testuje pomocou zovšeobecnenej metódy ANOVA. Tento test zisťuje, či existuje aspoň jeden regresor x_j z množiny r regresorov, ktorý má významný lineárny vzťah s ozvovou premennou Y :

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = 0$$

$$H_1: \beta_j \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } j = 1, 2, \dots, r \quad (2.16)$$

Rozdelíme vektor regresných koeficientov β na β_1 pre regresory $x_1, x_2, \dots, x_r$ a β_2 pre ostatné regresory $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_k$:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Nech X_1 a X_2 označujú stĺpce regresorov X prislúchajúce β_1 a β_2 . Potom viacrozmerný lineárny model je

$$y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon \quad (2.17)$$

Súčet štvorcov regresie SS_R a priemerný štvorec chyby MS_E (podkapitola 2.2.1) sú

$$SS_R(\beta) = \hat{\beta}^T X^T y - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \quad \text{a} \quad MS_E = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n - p} \quad (2.18)$$

kde $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$. Všimnime si, že $SS_R(\beta)$ ukazuje príspevok regresorov X k variabilite premennej Y .

Ak chceme zistiť príspevok regresorov X_1 , uvažujeme redukovaný model pre X_2 :

$$y = X_2\beta_2 + \varepsilon$$

MNŠ odhad β_2 je $\hat{\beta}_2 = (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T y$ a zodpovedajúci súčet štvorcov regresie je

$$SS_R(\beta_2) = \hat{\beta}_2^T X_2^T y - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \quad (2.19)$$

Potom súčet štvorcov regresie β_1 za podmienky β_2 je

$$SS_R(\beta_1 | \beta_2) = SS_R(\beta) - SS_R(\beta_2) = \hat{\beta}^T X^T y - \hat{\beta}_2^T X_2^T y \quad (2.20)$$

Inými slovami povedané, $SS_R(\beta_1|\beta_2)$ označuje zvýšenie súčtu štvorcov regresie pridaním regresorov X_1 do redukovaného modelu. Podiel $SS_R(\beta_1|\beta_2)/r$ a $SS_E/(n-p)$ má F rozdelenie

$$F = \frac{SS_R(\beta_1|\beta_2)/r}{SS_E/(n-p)} = \frac{MS_R(\beta_1|\beta_2)}{MS_E} \sim F(r, n-p) \quad (2.21)$$

Štatistika F nadobúda malú hodnotu, keď $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = 0$ je správna.

Postup testovania (F test)

Výsledky metódy ANOVA na testovanie významnosti podmnožiny regresorov β_1 je uvedená v Tab. 2.3.

Tab. 2.3 ANOVA na testovanie významnosti podmnožiny regresorov β_1

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	Testovacia štatistika F_0
Regresia (β)	SS_R	k	MS_R	MS_R / MS_E
β_1	$SS_R(\beta_1 \beta_2)$	r	$MS_R(\beta_1 \beta_2)$	$MS_R(\beta_1 \beta_2) / MS_E$
β_2	$SS_R(\beta_2)$	$k - r$	$MS_R(\beta_2)$	
Chyba	SS_E	$n - p$	MS_E	
Celková	SS_T	$n - 1$		

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \beta_1 = 0 \quad (\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = 0)$$

$$H_1: \beta_1 \neq 0 \quad (\beta_j \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } j=1, 2, \dots, r)$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_R(\beta_1|\beta_2)/r}{SS_E/(n-p)} = \frac{MS_R(\beta_1|\beta_2)}{MS_E} \sim F(r, n-p)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(r, n-p; \alpha)$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(r, n-p; \alpha)$$

Príklad 2.4 (Test o podmnožine regresorov)

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Predpokladáme, že štyri regresory β sú rozdelené na dve kategórie:

1. Nevýrobný regresor β_1 : priemerná teplota prostredia (x_1)
2. Výrobné regresory β_2 : počet dní za mesiac (x_2), priemerná čistota produktu (x_3) a objem produkcie (x_4)

Viacrozmerná regresia je vykonaná zvlášť pre štyri regresory β a pre nevýrobný regresor β_1 pomocou metódy ANOVA.

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	Testovacia štatistika f_0
Regresia (β)	4957,2	4	1239,3	5,1
Chyba	1699,0	7	242,7	
Celková	6656,3	11		
Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	Testovacia štatistika f_0
Regresia (β_1)	3758,9	1	3758,9	13,0
Chyba	2897,3	10	289,7	
Celková	6656,3	11		

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \beta_2 = 0 \quad (\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0)$$

$$H_1: \beta_2 \neq 0 \quad (\beta_j \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } j = 1, 2, 3, 4)$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$SS_R(\beta_2 | \beta_1) = SS_R(\beta) - SS_R(\beta_1) = 4957,2 - 3758,9 = 1198,3$$

$$MS_R(\beta_2 | \beta_1) = \frac{SS_R(\beta_2 | \beta_1)}{r} = \frac{1198,3}{3} = 399,4$$

$$f_0 = \frac{SS_R(\beta_2 | \beta_1) / r}{SS_E / (n - p)} = \frac{MS_R(\beta_2 | \beta_1)}{MS_E} = \frac{399,4}{242,7} = 1,65$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(r, n - p; \alpha) = f(3, 7; 0,05) = 4,35$$

Krok 4: Záver:

pretože $f_0 = 1,65 < f(3, 7; 0,05) = 4,35$, nulová hypotéza H_0 sa nezamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. To znamená, že žiaden z výrobných regresorov nemá významný lineárny vzťah s mesačnou spotrebou elektrickej energie na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

2.3 Intervaly spoľahlivosti vo viacrozmernej regresii

2.3.1 Intervaly spoľahlivosti pre jednotlivé regresné koeficienty

Ciele výučby

- Stanoviť interval spoľahlivosti pre β_j .

Indukčné súvislosti o parametri β_j

- **Testovacia štatistika β_j :**
$$T = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}} \sim t(n-p)$$
- **Odhad smerodajnej chyby $\hat{\beta}_j$:** $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$, kde $\hat{\sigma}^2 = MS_E$

Interval spoľahlivosti pre β_j

$100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre β_j je

$$\hat{\beta}_j - t(n-p; \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + t(n-p; \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \quad (2.22)$$

Príklad 2.5

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Hodnoty nasledujúcich veličín v regresnej analýze sa získali pre objem výroby (x_4):

$$\hat{\beta}_4 = 0,014, \quad se(\hat{\beta}_4) = 0,734, \quad n = 12, \quad p = k + 1 = 5$$

Interval spoľahlivosti pre β_j

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre β_4 .

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre β_4 :

$$\hat{\beta}_4 - t(n-p; \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \leq \beta_4 \leq \hat{\beta}_4 + t(n-p; \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$$

$$0,014 - t(12-5; 0,05) \times 0,734 \leq \beta_4 \leq 0,014 + t(12-5; 0,05) \times 0,734$$

$$0,014 - 2,365 \times 0,734 \leq \beta_4 \leq 0,014 + 2,365 \times 0,734$$

$$-1,72 \leq \beta_4 \leq 1,75$$

2.3.2 Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy

Ciele výučby

- Stanoviť interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy v bode $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Výberové rozdelenie odhadu strednej hodnoty ozvy v bode $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ($\hat{\mu}_{Y|\mathbf{x}_0}$)

Predpokladajme, že vektor $\mathbf{x}_0$ reprezentuje určitý bod s regresormi $x_1, x_2, \dots, x_k$:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0k} \end{bmatrix}$$

Stredná hodnota ozvy v bode $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ je

$$\mu_{Y|\mathbf{x}_0} = E(Y|\mathbf{x}_0) = E(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon|\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^T \boldsymbol{\beta} \quad (2.23)$$

Potom bodový odhad parametra $\mu_{Y|\mathbf{x}_0}$ je

$$\hat{\mu}_{Y|\mathbf{x}_0} = \mathbf{x}_0^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (2.24)$$

Výberové rozdelenie náhodnej premennej $\hat{\mu}_{Y|\mathbf{x}_0}$ je

$$\hat{\mu}_{Y|\mathbf{x}_0} \sim N\left(\mu_{Y|\mathbf{x}_0}, \sigma^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0\right) \quad (2.25)$$

Indukčné súvislosti o strednej hodnote ozvy v bode $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ($\mu_{Y|\mathbf{x}_0}$)

- **Parameter:** $\mu_{Y|\mathbf{x}_0}$
- **Bodový odhad $\mu_{Y|\mathbf{x}_0}$:** $\hat{\mu}_{Y|\mathbf{x}_0} = \mathbf{x}_0^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N\left(\mu_{Y|\mathbf{x}_0}, \sigma^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0\right)$
 σ^2 je neznámy

- **Testovacia štatistika** $\mu_{Y|x_0}$: $T = \frac{\hat{\mu}_{Y|x_0} - \mu_{Y|x_0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}} \sim t(n-p)$
- **Odhad smerodajnej chyby** $\hat{\mu}_{Y|x_0}$: $se(\hat{\mu}_{Y|x_0}) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}$, kde $\hat{\sigma}^2 = MS_E$

Interval spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$

100(1- α) %-ný interval spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$ je

$$\hat{\mu}_{Y|x_0} - t(n-p, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0} \leq \mu_{Y|x_0} \leq \hat{\mu}_{Y|x_0} + t(n-p, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0} \quad (2.26)$$

Príklad 2.6

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Hodnoty nasledujúcich veličín v regresnej analýze sa získali pre strednú hodnotu spotreby elektrickej energie, keď $x_1 = 65^\circ\text{F}$, $x_2 = 25$ dní, $x_3 = 91\%$ a $x_4 = 94$ ton:

$$\hat{\mu}_{Y|x_0} = 291,81, \quad se(\hat{\mu}_{Y|x_0}) = 7,68, \quad n = 12, \quad p = 5$$

Interval spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu ozvy.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre $\mu_{Y|x_0}$:

$$\hat{\mu}_{Y|x_0} - t(n-p, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0} \leq \mu_{Y|x_0} \leq \hat{\mu}_{Y|x_0} + t(n-p, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}$$

$$291,81 - t(12-5, 0,05) \times 7,68 \leq \mu_{Y|x_0} \leq 291,81 + t(12-5, 0,05) \times 7,68$$

$$291,81 - 2,365 \times 7,68 \leq \mu_{Y|x_0} \leq 291,81 + 2,365 \times 7,68$$

$$273,65 \leq \mu_{Y|x_0} \leq 309,97$$

2.4 Predikcia nových pozorovaní

Ciele výučby

- Stanoviť predikčný interval pre budúce pozorovanie y_0 v bode $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Predikčný interval pre budúce pozorovanie y_0

Nech vektor $\mathbf{x}_0^T = [1, x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k}]$ označuje konkrétny bod regresorov $x_1, x_2, \dots, x_k$. Potom hodnota bodového odhadu pre budúce pozorovanie y_0 v bode $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_0^T$ je

$$\hat{y}_0 = \mathbf{x}_0^T \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

100(1- α)-ný predikčný interval pre y_0 v bode $\mathbf{x}_0$ je

$$\hat{y}_0 - t(n-p, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0)} \leq y_0 \leq \hat{y}_0 + t(n-p, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0)} \quad (2.27)$$

Poznámka. Predikčný interval (PI) je vždy širší ako zodpovedajúci interval spoľahlivosti (IS) pre strednú hodnotu ozvy, pretože PI závisí od chyby odhadovaného regresného modelu a prirodzenej variability v náhodnej premennej Y , kým IS závisí iba od chyby odhadovaného regresného modelu.

Príklad 2.7

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Hodnoty nasledujúcich veličín v regresnej analýze sa získali pre budúce pozorovanie hodnoty spotreby elektrickej energie, keď $x_1 = 65^\circ\text{F}$, $x_2 = 25$ dní, $x_3 = 91\%$ a $x_4 = 94$ ton:

$$\hat{y}_0 = 291,81, \quad \hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 = 7,68^2, \quad \hat{\sigma}^2 = 15,58^2, \quad n = 12, \quad p = 5$$

Predikčný interval pre y_0

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný predikčný interval pre budúce meranie spotreby elektrickej energie .

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$$

95 %-ný dvojstranný predikčný interval pre y_0 :

$$\hat{y}_0 - t(n-p, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0)} \leq y_0 \leq \hat{y}_0 + t(n-p, \alpha) \sqrt{\hat{\sigma}^2 (1 + \mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0)}$$

$$291,81 - t(12-5, 0,05) \times \sqrt{7,68^2 + 15,58^2} \leq y_0 \leq$$

$$\leq 291,81 + t(12-5, 0,05) \times \sqrt{7,68^2 + 15,58^2}$$

$$291,81 - 2,365 \times 17,37 \leq y_0 \leq 291,81 + 2,365 \times 17,37$$

$$250,74 \leq y_0 \leq 332,88$$

2.5 Overovanie adekvátnosti modelu

2.5.1 Reziduálna analýza

Ciele výučby

- Vysvetliť význam reziduálnej analýzy.

Reziduálna analýza

Štyri predpoklady pre viacrozmerný lineárny model sú:

1. Linearita medzi regresormi x_j a Y
2. Náhodnosť chyby
3. Konštantný rozptyl chyby
4. Normalita chyby

Tieto štyri predpoklady sa overujú pomocou analýzy rezíduí ($\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; hodnoty odhadov chýb). Tento postup sa nazýva **posúdenie adekvátnosti modelu**.

Prvé tri predpoklady (linearita, náhodnosť a konštantnosť rozptylu) možno overovať pomocou grafov rezíduí:

1. $\hat{\varepsilon}_i$ verzus $\hat{y}_i$
2. $\hat{\varepsilon}_i$ verzus x_{ij} , $j = 1, 2, \dots, k$
3. $\hat{\varepsilon}_i$ verzus t (keď časová postupnosť je známa)

Normalita chyby sa overuje pomocou jednej z nasledujúcich metód:

1. Histogram rezíduí
2. Graf normality rezíduí
3. Normovanie rezíduí: Keď sú reziduá normálne rozdelené, približne 95 % normovaných rezíduí

$$d_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

sa nachádza v intervale $(-2, 2)$. Reziduá, ktorých normované hodnoty sú menšie ako -3 alebo väčšie ako 3 , môžu byť odľahlé hodnoty.

Nežiaduci vzor grafu rezídua môže vzniknúť v dôsledku nenormality alebo nevýznamného vzťahu medzi zodpovedajúcim regresorom a ozvovou premennou (y). Na korigovanie nežiaduceho vzoru grafu rezíduí sa môže použiť vhodná metóda z nasledujúcich:

1. Transformácia x_j alebo y na iný tvar (napr. $1/y$, $\sqrt{y}$, y^2 a $\ln y$)
2. Pridať do modelu rádovo vyšší člen (vyššie členy) premennej x_j
3. Zahnúť nový(é) regresor(y) do modelu

2.5.2 Vplyvné pozorovania

Ciele výučby

- Identifikovať vplyvné pozorovania použitím Cookovej vzdialenosti.

Cookova vzdialenosť (D_i)

Miera Cookova vzdialenosť je štvorec vzdialenosti medzi hodnotou MNŠ odhadu $\hat{\beta}$ založenou na všetkých n pozorovaniach a $\hat{\beta}_{(i)}$ založenou na všetkých dátach okrem i -tého pozorovania:

$$D_i = \frac{(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})^T X^T X (\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})}{p\hat{\sigma}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

Keď i -té pozorovanie nezvyčajne vplyva na určenie hodnôt odhadov regresných koeficientov, D_i sa stáva veľké. Hodnota $D_i > 1$ naznačuje, že bod je vplyvný. Ak dôvodom vplyvného pozorovania je chyba pri experimente, takéto pozorovanie by sa malo vylúčiť z analýzy.

Príklad 2.8 (Vplyvné pozorovanie)

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Cookove vzdialenosti pozorovaní sa vypočítajú použitím softvéru:

	Spotreba energie y ; [kW]	Cookova vzdialenosť; D_i		Spotreba energie y ; [kW]	Cookova vzdialenosť; D_i
1	240	0,43	7	300	0,01
2	236	0,09	8	296	< 0,01
3	290	0,82	9	267	0,65
4	274	0,16	10	276	0,05
5	301	0,03	11	288	0,01
6	316	0,20	12	261	0,01

Skontrolujte, či existujú nejaké vplyvné pozorovania v dátach.

Z predchádzajúcej tabuľky sme zistili, že neexistuje žiadne pozorovanie, ktorého $D_i > 1$.

2.6 Aspekty viacnásobného regresného modelovania

2.6.1 Polynomicke regresné modely

Ciele výučby

- ☐ Stanoviť polynomicke regresný model.
- ☐ Testovať významnosť členov vyššieho stupňa.

Polynomický regresný model

Ak je ozva krivočiara, potom možno použiť polynóm (lineárne kombinácie mocnín jednej alebo viacerých premenných) na fitovanie vo viacnásobnom lineárnom regresnom modeli. Napríklad polynóm druhého stupňa s jednou premennou možno transformovať na lineárny regresný model takto:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2 + \varepsilon \quad (2.30)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon \quad (2.31)$$

kde $x_1 = x$, $x_2 = x^2$ a $\beta_2 = \beta_{11}$

Keď použijeme polynomický model, preferuje sa polynóm s čo možno najnižším stupňom (pozri podkapitolu 2.6.3). Významnosť členov vyššieho stupňa sa testuje pomocou t testu alebo zovšeobecnenej metódy ANOVA (pozri podkapitolu 2.2.2).

Príklad 2.9 (Polynomický model)

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Keď zahrnieme iba teplotu (x_1) do modelu, dostaneme nasledujúci regresný model druhého stupňa:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_1^2 = 162,76 + 3,50x_1 - 0,02x_1^2$$

Zodpovedajúca tabuľka ANOVA je táto:

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	f_0
Regresia (x_1, x_1^2) (SS_R)	4362,8	2	2181,4	8,6
$SS_R(\beta_1 \beta_0)$	3758,8	1	3758,9	13,0
$SS_R(\beta_2 \beta_1, \beta_0)$	603,8	1	603,8	2,4
Chyba (SS_E)	2293,5	9	254,8	
Celková (SS_T)	6656,3	11		

Testujeme hypotézu, že kvadratický člen teploty (x_1^2) je významný na úrovni $\alpha = 0,05$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \beta_2 = 0 \quad H_1 : \beta_2 \neq 0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$f_0 = \frac{MS_R(\beta_2 | \beta_1, \beta_0)}{MS_E} = \frac{603,8}{254,8} = 2,4$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(r, n-p; \alpha) = f(1, 9; 0, 05) = 5,12$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $f_0 = 2,4 < f(1, 9; 0, 05) = 5,12$, nulová hypotéza H_0 sa nezamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. To znamená, že kvadratický člen teploty neprispieva významne do modelu.

2.6.2 Kategorické regresory a indikátorové premenné

Ciele výučby

- Vysvetliť použitie indikátorovej premennej v regresnej analýze.

Indikátorové premenné

Regresné modely prezentované v predchádzajúcich častiach sú založené na spojitých (kvantitatívnych) premenných. Avšak, kategorické (kvalitatívne) premenné, ako je pohlavie a úroveň vzdelania, sú niekedy brané do úvahy v regresnej analýze. Ak chceme zahrnúť kategorické premenné do regresie, použijeme indikátorové premenné. Kategorickú premennú s c úrovňami možno modelovať pomocou $c-1$ indikátorových premenných.

Príklady indikátorových premenných:

1. Pohlavie = {muž, žena}

$$x = \begin{cases} 0 & \text{pre muža} \\ 1 & \text{pre ženu} \end{cases}$$

2. Vzdelanie = {vysokoškolské, stredoškolské, postgraduálne}

Muž x_1	Žena x_2	
0	0	vysokoškolské
1	0	stredoškolské
0	1	postgraduálne

Iná metóda analýzy dát, ktoré obsahujú kategorické informácie, vytvára samostatný regresný model s dátami pre každú kategóriu. V porovnaní s týmto prístupom, prístup s indikátorovou premennou má nasledujúce výhody:

1. **Jeden regresný model:** Jeden regresný model integruje niekoľko regresných modelov pre rôzne kategórie.
2. **Zvýšená štatistická sila testu:** Združovaním dát z rôznych kategórií, chybový člen bude mať menšiu strednú kvadratickú chybu v dôsledku väčšieho počtu stupňov voľ-

nosti $n - p$, čo má za následok zvýšenie sily testu v štatistickom testovaní.

Príklad 2.10 (Indikátorová premenná)

Študuje sa vzťah medzi hmotnosťou pečene y (v [g]) a plochou povrchu tela x_1 (v [m²]). Nasledujúce merania sa získali z 20 mŕtvol (10 mužov a 10 žien; pohlavie: $x_2 = 0$ pre mužov a $x_2 = 1$ pre ženy):

	Hmotnosť pečene y	Plocha povrchu tela x_1	Pohlavie x_2		Hmotnosť pečene y	Plocha povrchu tela x_1	Pohlavie x_2
1	1690,2	1,6	0	11	1201,7	1,8	1
2	1314,1	1,5	0	12	1978,4	1,7	1
3	1530,0	1,6	0	13	1616,9	1,8	1
4	1270,1	1,8	0	14	1388,3	1,4	1
5	1924,7	1,8	0	15	1768,4	1,6	1
6	1016,1	1,5	0	16	1133,3	1,4	1
7	1323,8	1,6	0	17	1453,8	1,5	1
8	1314,1	1,7	0	18	1582,7	1,7	1
9	1760,6	1,7	0	19	923,3	1,5	1
10	1792,8	1,6	0	20	1583,7	1,7	1

Za predpokladu, že interakcia medzi x_1 a x_2 je zanedbateľná, odhad regresného modelu pre dáta hmotnosti pečene sa získa takto:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 = -108,7 + 977,0 x_1 - 1,3 x_2$$

Prediktor	Koeficient	Smerodajná chyba	t_0	P -hodnota
Konštanta	-108,7	829,2	-0,13	0,897
PPT (x_1)	977,0	502,7	1,94	0,069
Pohlavie (x_2)	-1,3	126,7	-0,01	0,992

Prediskutujte vplyv pohlavia (x_2) na hmotnosť pečene (y) na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Pretože P -hodnota pre β_2 je väčšia ako 0,05, pohlavie (x_2) nemá významný vplyv na hmotnosť pečene (y) na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

2.6.3 Výber premenných a stavba modelu

Ciele výučby

- Vysvetliť črty vyhovujúceho regresného modelu.

- ☐ Porovnať techniky výberu premennej medzi sebou: 1. Hodnotenia všetky možných regresíí; 2. Nútený výber/eliminácia; 3. Priamy výber; 4. Spätná eliminácia; 5. Kroková regresia.
- ☐ Určiť množinu najlepších regresorov pomocou techniky vyhodnotenia všetkých možných regresíí.
- ☐ Vybrať podmnožinu regresorov pre stavanie modelu pomocou techniky krokovej regrese.

Výber premennej pre dobrý model

V regresnej analýze medzi vlastnosti „dobrého“ modelu patrí:

1. **Validita:** Model obsahuje regresory, ktoré majú empirickú (inžiniersku alebo praktickú) významnosť, ale aj štatistickú významnosť.
2. **Vyhovujúca výkonnosť:** Model poskytuje odhady ozvy (podmienené regresormi) v rámci prijateľnej presnosti.
3. **Jednoduchosť:** Model obsahuje tak málo regresorov, ako je to možné pre jednoduché použitie.
4. **Stabilita:** Citlivosť modelu sa nemení, keď sa použije iná množina pozorovaní.

V mnohých aplikáciách sú často tieto štyri kritériá v rozpore, preto treba urobiť kompromis a vybrať vhodné regresory do modelu. V procese výberu premennej sú pre vytvorenie uspokojivého modelu dôležité skúsenosti, úsudok, diskusia medzi analytikmi a odborníkmi zapojení do štúdie.

Techniky výberu premennej

Neexistuje žiadna „najlepšia“ technika výberu najlepšej podmnožiny regresorov z k kandidátskych regresorov. Dostupné techniky výberu zahŕňajú:

1. Hodnotenia všetky možných regresíí
2. Nútený výber/eliminácia
3. Priamy výber
4. Spätná eliminácia
5. Kroková regresia

Každý výber techniky ukáže svoj vlastný kompromis medzi efektívnosťou výpočtu a výkonnosťou modelu v konkrétnej aplikácii.

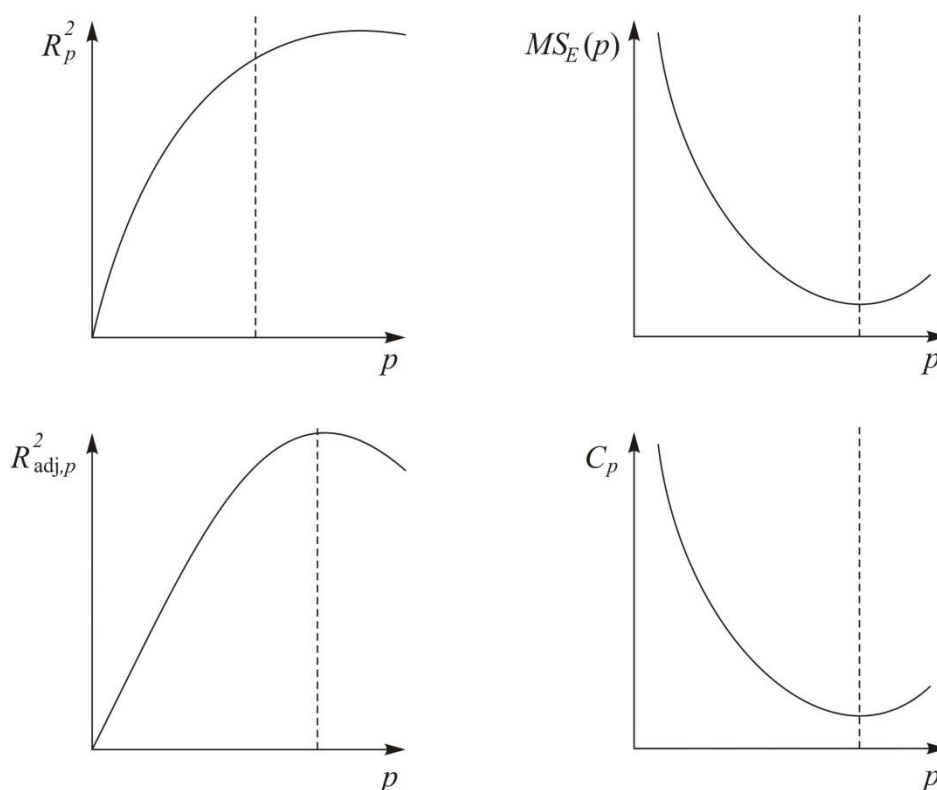
Všetky možné hodnotenia regresie

Technika všetkých možných hodnotení regresie generuje všetky možné regresné rovnice z kombinácií k regresorov a potom vyhodnocuje rovnice použitím vybraného kritéria, ktoré budú uvedené v nasledujúcich odsekoch. Tento prístup hľadá najlepšie regresné rovnice pomocou komplexného vyhľadávania a hodnotenia, avšak počet skúmaných rovníc sa zväčšuje

geometricky, keď sa zväčšuje počet kandidátskych regresorov (napr. keď $k = 3$, existuje $2^3 = 8$ možných rovníc; keď $k = 10$, existuje $2^{10} = 1024$ možných rovníc).

Štyri štatistické kritériá (R_p^2 , $R_{adj,p}^2$, $MS_E(p)$ a C_p ; p je počet regresných koeficientov, $p \leq k+1$) sú k dispozícii na stanovenie podmnožiny regresorov pre najlepší model (Obr. 2.1).

Po prvé, najlepšia množina regresorov sa nájde vtedy, keď nárast R_p^2 (koeficient determinácie) začína byť menší ako hodnota vopred stanovená analytikom. Všimnime si, že R_p^2 sa vždy zväčší, keď sa p zväčší (pozri Časť 2.2.1).



Obr. 2.1 Vybrané kritériá oproti p (počtu regresných koeficientov)

Po druhé, najlepšia množina p regresorov je tá, ktorá maximalizuje $R_{adj,p}^2$. Všimnite si, že $R_{adj,p}^2$ môže klesnúť, keď sa p zvýši. Toto môže nastať vtedy, ak zníženie súčtu štvorcov chýb (SS_E) je väčšie, než je priemerný štvorec chyby (MS_E) súčasného modelu (pozri časť 2.2.1).

Po trete, najlepšia množina p regresorov je tá, ktorá minimalizuje $MS_E(p)$. Toto kritérium $MS_E(p)$ zodpovedá kritériu R_p^2 s tým, že $MS_E(p)$ sa zvýši v prípade, že zníženie SS_E je

menšie ako $MS_E(p-1)$ v dôsledku straty jedného stupňa voľnosti v chybovom člene pridaním nového regresora.

Po štvrté, najlepšia množina p regresorov je tá, ktorá minimalizuje C_p , čo je miera celkovej strednej kvadratickej chyby, alebo C_p je blízko p :

$$C_p = \frac{SS_E(p)}{\hat{\sigma}^2} - n + 2p, \quad \hat{\sigma}^2 = MS_E(k+1) \quad (2.32)$$

Ak p -tý člen regresného modelu má zanedbateľné vychýlenie, hodnota C_p sa nachádza blízko p ; ak je model významne vychýlený, hodnota C_p je významne väčšia ako p .

Príklad 2.11 (Všetky možné hodnotenia regresie)

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Použitím softvéru získame hodnoty R_p^2 , $R_{adj,p}^2$, $MS_E(p)$ a C_p , ako je vidieť nasledujúcej tabuľke:

Počet regresorov v modeli	p	Regresory v modeli	R_p^2 [%]	$R_{adj,p}^2$ [%]	$MS_E(p)$	C_p
1	2	x_2	64,5	60,9	15,4	1,7
1	2	x_1	56,5	52,1	17,0	3,9
1	2	x_3	0,2	< 0,1	25,8	19,4
1	2	x_4	< 0,1	< 0,1	25,8	19,4
2	3	x_1, x_2	73,1	67,2	14,1	1,4
2	3	x_2, x_3	64,6	56,8	16,2	3,7
2	3	x_2, x_4	64,5	56,6	16,2	3,7
2	3	x_1, x_3	64,1	56,2	16,3	3,8
2	3	x_1, x_4	56,5	46,8	17,9	5,9
3	4	x_1, x_2, x_3	74,5	64,9	14,6	3,0
3	4	x_1, x_2, x_4	73,2	63,1	14,9	3,4
3	4	x_2, x_3, x_4	64,7	51,4	17,1	5,7
3	4	x_1, x_3, x_4	64,1	50,7	17,3	5,8
4	5	x_1, x_2, x_3, x_4	74,5	59,9	15,6	5,0

Prediskutujte, ktorý model je vhodnejší pre dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie.

Odporúča sa model s dvoma regresormi x_1 a x_2 , pretože má maximálnu hodnotu $R_{adj,p}^2$ a minimálne hodnoty $MS_E(p)$ a C_p .

Nútený výber/eliminácia

Technika núteného výberu/eliminácie zahŕnie/vylúči regresory navrhnuté analytikom do/z modelu bez ohľadu na ich štatistickú významnosť.

Priamy výber

Technika priameho výberu pridáva k súčasnemu modelu regresor x_i z kandidátskych regresorov (nie sú v modeli), ktorý má najväčšiu čiastkovú F -hodnotu (f_i) a spĺňa vstupné kritérium $f_i > f_{in}$ (zodpovedajúca pravdepodobnosť $p_{in} = 0,10$ alebo $p_{in} = 0,15$; vopred vybratá analytikom):

$$f_i = \frac{SS_R(\beta_i | \beta_{model})}{MS_E(\beta_{model}, \beta_i)} \quad (2.33)$$

Povedané inými slovami, regresory sa pridávajú do modelu tak dlho, kým ich čiastkové F -hodnoty sú väčšie ako f_{in} .

Spätná eliminácia

Technika spätnej eliminácie zahrnie všetky kandidátske regresory do modelu a potom odstráni z modelu regresor x_j , ktorý má najmenšiu čiastkovú F -hodnotu (f_j) a spĺňa kritérium pre odstránenie $f_j < f_{out}$ (zodpovedajúca pravdepodobnosť $p_{out} = 0,15$ alebo $p_{out} = 0,20$; vopred vybratá analytikom):

$$f_j = \frac{SS_R(\beta_j | \beta_{model} \text{ bez } \beta_j)}{MS_E(\beta_{model})} \quad (2.34)$$

Povedané inými slovami, regresory sa odstraňujú z modelu tak dlho, kým ich čiastkové F -hodnoty sú menšie ako f_{out} .

Kroková regresia

Technika krokovej regresie je kombinácia techník priameho výberu a spätnej eliminácie. Táto kombinácia výberu premenných sa veľmi používa. Postup pri krokovej regresii je takýto:

Krok 1: Z kandidátskych regresorov sa pridá do modelu regresor x_i s najväčšou čiastkovou F -hodnotou (f_i), ktorý spĺňa vstupné kritérium $f_i > f_{in}$ (zodpovedajúca pravdepodobnosť $p_{in} = 0,10$ alebo $p_{in} = 0,15$; vopred vybratá analytikom).

Krok 2: Z regresorov obsiahnutých v modeli sa odstráni regresor x_j , ktorý má najmenšiu čiastkovú F -hodnotu (f_j) a spĺňa kritérium odstránenia $f_j < f_{out}$ (zodpovedajúca pravdepodobnosť $p_{out} = 0,15$ alebo $p_{out} = 0,20$; vopred vybratá analytikom; $p_{in} \leq p_{out}$).

Krok 3: Opakujte kroky 1 a 2 dovtedy, kým žiadne ďalšie regresory nie sú pridané alebo odstránené z modelu.

Príklad 2.12 (Kroková regresia)

Zoberme do úvahy dáta z mesačnej spotreby elektrickej energie (Príklad 2.1). Zo štyroch regresorov (x_1, x_2, x_3, x_4) vyberieme pomocou krokovej regresie vhodnú množinu regresorov na zostavenie regresného modelu. Použijeme softvér s $p_{in} = p_{out} = 0,15$ (čo je ekvivalentné s $f_{in} = f_{out} = f(1, 12 - p) = 2,5$).

Dva regresory x_1 a x_2 sú vybrané na zostavenie modelu.

2.7 Zovšeobecnený lineárny model

V praxi existuje veľa technických problémov, ktoré sa matematicky modelujú ako **Model 1**

$$Y_i = Y(x_i) = a_1 f_1(x_i) + a_2 f_2(x_i) + \dots + a_k f_k(x_i) + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.35)$$

kde Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sú náhodné premenné, ktorých realizácie $y_1, y_2, \dots, y_n$ sú výsledky merania. Tieto výsledky závisia od funkcie $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x)$, známych nenáhodných vplyvov $x_1, x_2, \dots, x_n$ a k parametrov $a_1, a_2, \dots, a_k$, ktorých hodnoty nepoznáme; e_i je náhodná chyba i -tého merania. Model 1 sa nazýva **lineárny model** (lineárny v parametroch).

Uvedieme dva príklady z praxe:

1. Z teórie je známe, že v určitej oblasti teplôt x je predĺženie y medenej trubky lineárnou funkciou teploty prechádzajúcej počiatkom. Merania v tejto oblasti môžeme opísať lineárnym modelom

$$Y_i = a_1 x_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Spotreba paliva v určitej oblasti rýchlosti automobilu je kvadratickou funkciou rýchlosti. Preto merania rýchlosti x v tejto oblasti môžeme opísať lineárnym modelom

$$Y_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Zovšeobecnený lineárny model (ZLM)

Model 1 môžeme zovšeobecniť a vyjadriť v maticovom tvare. Predpokladajme, že

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T \quad (2.36)$$

je vektor náhodných chýb, o ktorom predpokladáme, že má n -rozmerné normálne rozdelenie s nulovými strednými hodnotami

$$E(e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a

$$\Sigma_e = \Sigma_Y = \sigma^2 \mathbf{H}$$

je symetrická matica typu $n \times n$, ktorá sa nazýva kovariančná matica. Matica $\mathbf{H}$ je tzv. matica váh s prvkami h_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, pričom $\sigma^2 h_{ii} = \text{cov}(Y_i, Y_i) = \sigma_i^2$ je rozptyl náhodnej premennej Y_i a $\sigma^2 h_{ij} = \text{cov}(Y_i, Y_j)$, $i \neq j$ je kovariancia medzi premennými Y_i a Y_j . Teraz môžeme zovšeobecnený lineárny model (ZLM) napísať v maticovom tvare ako **Model 2** takto:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}, \quad \Sigma_Y = \sigma^2 \mathbf{H} \quad (2.37)$$

kde $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ je známy vektor meraní,

$\mathbf{A}$ je známa matica plánu typu $n \times k$,

$\boldsymbol{\beta} = (a_1, a_2, \dots, a_k)^T$ je vektor parametrov, ktoré sú neznáme,

$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ je vektor náhodných chýb a

Σ_Y je kovariančná matica.

Model 2 možno zapísať ako usporiadanú trojicu

$$(\mathbf{Y}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{H}) \quad (2.38)$$

Bodové odhady v ZLM

Odhad $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ vektora parametrov $\boldsymbol{\beta}$ získame zovšeobecnenou metódou najmenších štvorcov (ZMNŠ) ako minimum kvadratickej formy

$$\mathbf{e}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) = f(\boldsymbol{\beta})$$

Kvadratickú formu upravíme na tvar $f(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$, derivujeme použitím vzťahov v kapitole 2.1, čím dostaneme $\frac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Y} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$. Táto de-

rivácia sa rovná nulovému vektoru práve vtedy, keď $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Y}$.

Dá sa dokázať, že **bodový odhad**

$$\hat{\beta} = (A^T H^{-1} A)^{-1} A^T H^{-1} Y \quad (2.39)$$

je najlepší nevychýlený odhad každej zložky a_i vektora parametrov β . Ďalej sa dá dokázať, že **kovariančná matica odhadu** $\hat{\beta}$ je daná vzťahom

$$\Sigma_{\hat{\beta}} = \sigma^2 (A^T H^{-1} A)^{-1} \quad (2.40)$$

a nevychýlený odhad rozptylu σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - A\hat{\beta})^T H^{-1} (Y - A\hat{\beta})}{n - k} \quad (2.41)$$

Keď do vzťahu pre kovariančnú maticu dosadíme namiesto σ^2 jeho odhad $\hat{\sigma}^2$, dostaneme **odhad kovariančnej matice odhadu** $\hat{\beta}$

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2 (A^T H^{-1} A)^{-1} \quad (2.42)$$

Často je potrebné odhadovať rôzne lineárne kombinácie vektora parametrov, ktoré nazývame **parametrické funkcie** a zapisujeme v maticovom tvare

$$p^T \beta = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_k a_k \quad (2.43)$$

kde $p^T = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ a $\beta^T = (a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Uvažujme lineárny model $(Y, A\beta, \sigma^2 H)$ a parametrickú funkciu $p^T \beta$. Dá sa dokázať, že najlepší nevychýlený odhad parametrickej funkcie je

$$p^T \hat{\beta} = p^T (A^T H^{-1} A)^{-1} A^T H^{-1} Y \quad (2.44)$$

a rozptyl odhadu parametrickej funkcie je

$$D(p^T \hat{\beta}) = \sigma^2 p^T (A^T H^{-1} A)^{-1} p \quad (2.45)$$

Keď do predchádzajúceho vzťahu dosadíme namiesto σ^2 jeho odhad $\hat{\sigma}^2$ uvedený vyššie, dostaneme odhad rozptylu odhadu parametrickej funkcie

$$D(p^T \hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 p^T (A^T H^{-1} A)^{-1} p \quad (2.46)$$

Predpokladajme, že vektor Y v lineárnom modeli $(Y, A\beta, \sigma^2 H)$ má n -rozmerné normálne rozdelenie, potom platí:

$$\frac{p^T \hat{\beta} - p^T \beta}{\sqrt{\sigma^2 p^T (A^T H^{-1} A)^{-1} p}} \sim N(0, 1) \quad (2.47)$$

$$\sigma^{-2} (Y - A\hat{\beta})^T H^{-1} (Y - A\hat{\beta}) \sim \chi^2(n - k) \quad (2.48)$$

Dá sa ukázať, že tieto dve náhodné premenné sú nezávislé. Potom z definície t -rozdelenia a vzťahu pre odhad rozptylu vyplýva, že

$$\frac{\mathbf{p}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{p}^T \boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{p}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{p}}} \sim t(n-k) \quad (2.49)$$

Z posledného tvrdenia možno odvodiť intervalové odhady.

Intervalové odhady v ZLM

Platí, že $100(1-\alpha)\%$ obojstranný interval spoľahlivosti pre parametrickú funkciu $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\beta}$ je

$$\mathbf{p}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t(n-k, \alpha) \sqrt{\frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{n-k} \mathbf{p}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{p}} \quad (2.50)$$

Pomocou tohto vzťahu možno určiť intervalový odhad ľubovoľného parametra (napr. $a_1 = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\beta}$, kde $\mathbf{p}^T = (1, 0, \dots, 0)$) a funkčnej hodnoty v ľubovoľnom bode.

Keď vypočítame odhady funkčnej hodnoty vo viacerých bodoch dostaneme tzv. pás spoľahlivosti okolo (teoretickej) funkcie $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x)$. Tento pás však nemôžeme interpretovať tak, že s pravdepodobnosťou $1-\alpha$ pokrýva celú teoretickú funkciu.

Pás spoľahlivosti pre celú funkciu $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x)$ pokrývajúci túto funkciu s pravdepodobnosťou $1-\alpha$ je určený vzťahom

$$\mathbf{p}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \pm \sqrt{kF(k, n-k, \alpha)} \sqrt{\frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{n-k} \mathbf{p}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{p}} \quad (2.51)$$

kde $F(k, n-k, \alpha)$ je kritická hodnota F -rozdelenia so stupňami voľnosti k a $n-k$.

Testy hypotéz v ZLM

Predpokladajme, že chceme testovať hypotézu H_0 , že skutočná hodnota parametrickej funkcie sa rovná reálnemu číslu q oproti alternatíve H_1 , že sa nerovná tomuto číslu. Formálny zápis hypotéz je

$$H_0 : \mathbf{p}^T \boldsymbol{\beta} = q \quad \text{oproti} \quad H_1 : \mathbf{p}^T \boldsymbol{\beta} \neq q \quad (2.52)$$

Testovacia štatistika, ktorá za platnosti hypotézy H_0 má t -rozdelenie so stupňami voľnosti $n-k$, je daná vzťahom

$$T = \frac{\mathbf{p}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - q}{\sqrt{\frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{n-k} \mathbf{p}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{p}}} \quad (2.53)$$

Hypotézu zamietame na úrovni významnosti α , keď

$$|T| > t(n-k, \alpha) \quad (2.54)$$

Tieto testy môžeme použiť na testovanie ľubovoľného koeficienta vektora parametrov, funkčnej hodnoty v ľubovoľnom bode a pod. Často sa využíva na testovanie štatistickej významnosti jednotlivých regresných koeficientov. V takomto prípade sa testuje hypotéza

$$H_0: a_i = 0 \quad (2.55)$$

3 NÁVRH A ANALÝZA JEDNOFAKTOROVÝCH EXPERIMENTOV

3.1 Návrh inžinierskych experimentov

Ciele výučby

- Vysvetliť charakteristický postup navrhovania experimentu.

Návrh experimentu

Experiment má kľúčovú úlohu v oblasti strojárstva a prírodných vied. Na základe výsledkov experimentov boli vyvinuté účinné technické riešenia pre optimalizáciu dizajnu, kvalitu výrobkov a výrobný postup.

Štatistické metódy prispievajú k účinnosti a vedeckej objektivite v experimentálnom procese. Pri použití správneho dizajnu pre ciele experimentu môže analytik efektívne využívať zdroje a udržiavať vedeckú prísnosť vo vyvodzovaní záverov.

Typický postup v experimentálnej štúdii zahŕňa:

1. **Dohad:** Stanoviť hypotézu skúmanú v štúdii.
2. **Experiment:** Vybrať vhodný návrh experimentu a vykonať experiment na skúmanie dohady.
3. **Analýza:** Vykonať štatistickú analýzu dát získaných z experimentu.
4. **Záver:** Vyvodiť závery na základe výsledkov analýzy.

3.2 Úplne znáhodnený jednofaktorový experiment

3.2.1 Príklad na vysvetlenie základných pojmov

Ciele výučby

- Identifikovať závislé, nezávislé a vedľajšie premenné v experimente.
- Vysvetliť termíny *úroveň faktora (pokús)* a *replikácia*.
- Porovnať nasledujúce dvojice pojmov: fixné účinky oproti náhodným účinkom faktorov; kontrolovateľné premenné oproti nekontrolovateľným premenným; vyvážený návrh oproti nevyváženému návrhu; úplná náhodnosť oproti obmedzenej náhodnosti.
- Vysvetliť zmysel náhodnosti.

Experiment – Pevnosť v ťahu výrobku

Základnú terminológiu z navrhovania experimentu vysvetlíme na príklade pevnosti v ťahu výrobku. Predpokladajme, že výrobca papiera má záujem o zlepšenie pevnosti v ťahu výrobku. Výrobca si želá zistiť, či pevnosť v ťahu je ovplyvnená koncentráciou tvrdého dreva v buničine použitej na výrobu papiera. Záujem je o rozsah koncentrácie tvrdého dreva medzi 5 a 20 %; v uvedenom rozsahu sú skúmané štyri úrovne ($a = 4$) koncentrácie tvrdého dreva v buničine: 5, 10, 15 a 20 %. Na každej úrovni koncentrácie sú tri vzorky ($n_i = 3$, $i = 1, 2, \dots, a$) testované v laboratóriu. Merania (y_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, a$) tohto experimentu možno zhrnúť v tabuľkovom formáte, ako v Tab. 3.1.

Tab. 3.1 Štruktúra dát jednofaktorového experimentu

Úrovně faktora							
Replikácia	1	2	...	i	...	a	
1	y_{11}	y_{21}	...	y_{i1}	...	y_{a1}	
2	y_{12}	y_{22}	...	y_{i2}	...	y_{a2}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	
j	y_{1j}	y_{2j}	...	y_{ij}	...	y_{aj}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	
n_i	y_{1n_1}	y_{2n_2}	...	y_{in_i}	...	y_{an_a}	
Súčty	$y_{1.}$	$y_{2.}$	...	$y_{i.}$	...	$y_{a.}$	$y_{..}$
Priemery	$\bar{y}_{1.}$	$\bar{y}_{2.}$	...	$\bar{y}_{i.}$	...	$\bar{y}_{a.}$	$\bar{y}_{..}$

Typy premenných

V experimente existujú tri kategórie premenných:

1. **Ozovová (závislá) premenná:** výsledok (ozva), ktorý nás zaujíma (napr. pevnosť v ťahu)
2. **Nezávislá premenná (faktor):** premenná, ktorej vplyv na ozvovú premennú sa študuje (napr. koncentrácia tvrdého dreva)
3. **Vedľajšia premenná (problémový faktor):** premenná, ktorej vplyv na ozvu sa ne-uvažuje, avšak môže mať vplyv na ozvovú premennú (napr. rozdiel medzi vzorkami, teplota, atď.)

Úroveň faktora (pokús)

Úroveň faktora zodpovedá individuálnemu stavu faktora. Napríklad pevnosť v ťahu experiment má štyri úrovne faktora: 5, 10, 15 a 20 %.

Fixné účinky oproti náhodným účinkom faktorov

Dva typy faktorov sú definované v závislosti od spôsobu výberu úrovní faktorov: fixné účinky faktorov a náhodné účinky faktorov. Kým úrovne faktora s fixnými účinkami sú špeciálne vybrané experimentátorom, úrovne faktora s náhodných účinkami sú vybrané náhodným mechanizmom zo súboru úrovní faktora. Výsledky experimentu s fixnými účinkami faktora sa nemôžu rozšíriť nad vybrané úrovne faktora, zatiaľ čo experiment s náhodnými účinkami faktorov sa môže rozšíriť na všetky úrovne faktora. Napríklad v experimente s pevnosťou v ťahu je koncentrácia tvrdého dreva s fixnými účinkami faktora, pretože štyri úrovne faktora sú konkrétne (nie náhodne) vybrané experimentátorom; tak zodpovedajúci záver je obmedzený na štyri skúmané koncentrácie tvrdého dreva.

Kontrolovateľné premenné oproti nekontrolovateľným premenným

Vonkajšia premenná môže byť klasifikovaná ako kontrolovateľná alebo nekontrolovateľná premenná podľa toho, či stav premennej môže byť riadený experimentátorom s prijateľným kolísaním. Napríklad v prípade, že pevnosť v ťahu experiment sa vykonáva v laboratóriu, kde jeho teplota je pod kontrolou, teplota je kontrolovateľná premenná.

Replikácia

Termín replikácia sa týka opakovaných meraní za rovnakých experimentálnych podmienok. Napríklad pevnosť v ťahu experiment má šesť replikácií pre každú úroveň faktora (každý pokus).

Vyvážený návrh oproti nevyváženému návrhu

Návrh experimentu je buď vyvážený, alebo nevyvážený v závislosti od rovnosti replikácií. Vyvážený návrh má rovnaký počet opakovaní medzi úrovňami faktora, zatiaľ čo nevyvážený návrh nemá rovnaký počet opakovaní. Napríklad experiment pevnosti v ťahu je vyvážený návrh.

Blok

Pripomeňme, že párový t -test sa používa na zablokovanie účinku heterogenity medzi vzorkami (experimentálnymi jednotkami), ako je uvedené v publikácii [10], v podkapitole 8.3. Táto heterogénnosť medzi experimentálnymi jednotkami sa stáva problémovým faktorom a každá experimentálna jednotka sa nazýva blok.

Úplná náhodnosť oproti obmedzenej náhodnosti

Náhodnosť znamená, že poradie skúšok je určené náhodným mechanizmom (ako sú tabuľky náhodných čísel a generátor náhodných čísel) a dva typy náhodnosti sú definované v súlade s obmedzením v náhodnosti:

1. Úplná náhodnosť: Všetky skúšky sú randomizované (Tab. 3.2 b).
2. Obmedzená náhodnosť: Skúšky sú randomizované vnútri každého bloku (Tab. 3.2 c).

Náhodnosť vyvažuje účinky vonkajších premenných na ozvu. Napríklad, v pevnosti v ťahu experimente predpokladáme, že zariadenie na meranie pevnosti v ťahu má zahrievací účinok. Tab. 3.2 ukazuje chyby v meraní spôsobené tepelným účinkom pre rôzne typy vykonávaných skúšok; náhodnosťou sa tepelný účinok stáva vyvážený (v rozpätí [30, 48] v sekvenčnom experimente, [34, 44] v úplnej náhodnosti a [34, 42] v obmedzenej náhodnosti).

Tab. 3.2 Chyby spôsobené zahrievacími účinkami

a) Sekvenčné poradie

Koncentrácia tvrdého dreva (%) (poradie skúšky)				
Replikácia	5	10	15	20
1	2 (1)	4 (2)	6 (3)	8 (4)
2	10 (5)	12 (6)	14 (7)	16 (8)
3	18 (9)	20 (10)	22 (11)	24 (12)
Súčet	30	36	42	48

b) Úplná náhodnosť

Koncentrácia tvrdého dreva (%) (poradie skúšky)				
Replikácia	5	10	15	20
1	20 (10)	4 (2)	2 (1)	18 (9)
2	6 (3)	24 (12)	10 (5)	14 (7)
3	12 (6)	16 (8)	22 (11)	8 (4)
Súčet	38	44	34	40

c) Obmedzená náhodnosť

Koncentrácia tvrdého dreva (%) (poradie skúšky)				
Replikácia	5	10	15	20
1	12 (6)	10 (5)	16 (8)	14 (7)
2	2 (1)	6 (3)	8 (4)	4 (2)
3	20 (10)	24 (12)	18 (9)	22 (11)
Súčet	34	40	42	40

3.2.2 Analýza rozptylu

Ciele výučby

- Testovať významnosť faktora s fixnými účinkami v úplne náhodnom návrhu.
- Stanoviť $100(1-\alpha) \%$ interval spoľahlivosti pre μ_i a $\mu_i - \mu_j$.

Kontext

1. Faktor: Faktor s fixnými účinkami a a úrovňami
2. Blokovanie: Nie sú definované žiadne bloky
3. Opakovanie: n replík pre každú úroveň faktora (vyvážený dizajn).
Celkový počet pozorovaní je $N = n \times a$
4. Náhodnosť: Úplná náhodnosť

Model

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} i=1, 2, \dots, a \\ j=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.1)$$

kde

- μ – celková stredná hodnota
- τ_i – účinok i -tej úrovne faktora
- μ_i – stredná hodnota i -tej úrovne faktora
- ε_{ij} – náhodná chyba $\sim NID(0, \sigma^2)$

Poznámka. 1. $Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$

2. V modeli s fixnými účinkami, účinky úrovne faktora (τ_i) sú definované ako odchýlky od celkového priemeru. To znamená, že súčet všetkých τ_i je nula.

MNŠ odhady

Metóda najmenších štvorcov nájde odhad parametrov μ a τ_i ($i=1, 2, \dots, a$), ktoré minimalizujú súčet štvorcov chýb (SS_E)

$$SS_E = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n [y_{ij} - (\mu + \tau_i)]^2 \quad (3.2)$$

Parciálnymi deriváciami SS_E podľa μ a τ_i ($i=1, 2, \dots, a$) získame odhady parametrov:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} \quad (3.3)$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}, \quad i=1, 2, \dots, a \quad (3.4)$$

$$\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.}, \quad i=1, 2, \dots, a \quad (3.5)$$

ANOVA

Metóda ANOVA sa používa na testovanie významnosti faktora, ktorý nás zaujíma. Tak ako v jednoduchom regresnom modeli, celková variabilita Y (SS_T , **celkový súčet štvorcov**; stupne voľnosti $= N - 1$) sa rozdelí na dve zložky (Tab. 3.3):

1. Variabilita vysvetlená faktorom (SS_{UF} , **súčet štvorcov úrovní faktora**; st. v. $= a - 1$)
2. Variabilita tvorená náhodnou chybou (SS_E , **súčet štvorcov chýb**; st. v. $= N - a$)

Tab. 3.3 Delenie celkovej variability v Y (SS_T)

SS_T		SS_{UF}		SS_E
$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	=	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	+	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$
$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{1}{N} y_{..}^2$	=	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 - \frac{1}{N} y_{..}^2$	+	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2$
St. voľ. $N - 1$	=	$a - 1$	+	$N - a$

Pomer štatistiky $SS_{UF} / (a - 1)$ ku štatistike $SS_E / (N - a)$ má F rozdelenie:

$$F = \frac{SS_{UF} / (a - 1)}{SS_E / (N - a)} = \frac{MS_{UF}}{MS_E} \sim F(a - 1, N - a) \quad (3.6)$$

Táto štatistika F sa používa na testovanie $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$, pretože F nadobúda malú hodnotu, keď účinok faktora je nevýznamný. Všimnime si, že

$$MS_E = \frac{SS_E}{N - a} = \hat{\sigma}^2 \quad (3.7)$$

Kolísave veličiny z analýzy ANOVA sú zhrnuté v tabuľke 3.4 na testovanie významnosti uvažovaného faktora.

Tab. 3.4 ANOVA na testovanie významnosti faktora: Úplne randomizovaný návrh

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	F_0
Úrovně faktora	SS_{UF}	$a - 1$	MS_{UF}	MS_{UF} / MS_E
Chyba	SS_E	$N - a$	MS_E	
Celková	SS_T	$N - 1$		

Testovanie hypotézy (F -test)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$$

$$H_1: \tau_i \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } i = 1, 2, \dots, a$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_{UF}/(a-1)}{SS_E/(N-a)} = \frac{MS_{UF}}{MS_E} \sim F(a-1, N-a)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(a-1, N-a; \alpha)$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(a-1, N-a; \alpha)$$

Nevyvážený návrh

Tá istá metóda ANOVA, ktorá sa použila pri vyváženom návrhu, sa s menšími úpravami môže použiť pri nevyváženom návrhu. Ak n_i označuje počet pozorovaní pri i -tej úrovni faktora (i -tom pokuse), celkový počet pozorovaní je

$$N = \sum_{i=1}^a n_i \quad (3.8)$$

Potom súčty štvorcov nevyváženého návrhu sú

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{1}{N} y_{..}^2 \quad (3.9)$$

$$SS_{UF} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{1}{N} y_{..}^2 \quad (3.10)$$

$$SS_E = SS_T - SS_{UF} \quad (3.11)$$

Vyvážený návrh má dve výhody oproti nevyváženému návrhu:

1. **Robustnosť**: Testovací postup vyváženého návrhu je menej citlivý na malé odchýlky od predpokladaného rovnakého rozptylu chyby (σ^2).
2. **Sila testu**: Sila testu vyváženého návrhu je väčšia pri rovnakých rozsahoch dvoch návrhov.

Interval spoľahlivosti pre μ_i

$100(1-\alpha)$ %-ný interval spoľahlivosti pre μ_i je

$$\bar{y}_i - t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{MS_E}{n}} \leq \mu_i \leq \bar{y}_i + t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{MS_E}{n}} \quad (3.12)$$

Interval spoľahlivosti pre $\mu_i - \mu_j$

100(1- α) %-ný interval spoľahlivosti pre $\mu_i - \mu_j$ je

$$\bar{y}_i - \bar{y}_j - t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{y}_i - \bar{y}_j + t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{n}} \quad (3.13)$$

Príklad 3.1

Výrobca papiera skúma, či pevnosť v ťahu papierového výrobku je ovplyvnená koncentráciou tvrdého dreva buničiny použitej pre tento výrobok. Štyri koncentrácie tvrdého dreva (5, 10, 15 a 20 %; $a = 4$) vybral analytik a päť skúšobných vzoriek ($n = 5$) sa skúšalo pre každú koncentráciu na pevnosť v ťahu. Výsledky sú uvedené nasledovnej tabuľke:

Koncentrácia tvrdého dreva (%; i)					
Replikácia	5 (1)	10 (2)	15 (3)	20 (4)	
1	7	12	14	19	
2	8	17	18	25	
3	15	13	19	22	
4	11	18	17	23	
5	9	19	16	18	
Súčet	50	79	84	107	320
Priemer	10,0	15,8	16,8	21,4	16,0

Nasledujúce veličiny sa získali z predošlej tabuľky dát s pevnosťou v ťahu:

$$N = 20, \quad \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 = 5,576, \quad \sum_{i=1}^a y_i^2 = 27,246$$

Test významnosti fixných účinkov faktora; úplný náhodný návrh

Pomocou analýzy rozptylu testujeme, či existuje významný rozdiel v pevnosti v ťahu medzi jednotlivými koncentraciami tvrdého dreva na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Z analýzy rozptylu pre dáta pevnosti v ťahu dostaneme:

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{1}{N} y_{..}^2 = 5576 - \frac{320^2}{20} = 456,0$$

$$SS_{UF} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 - \frac{1}{N} y_{..}^2 = 5449,2 - \frac{320^2}{20} = 329,2$$

$$SS_E = SS_T - SS_{UF} = 456,0 - 329,2 = 126,8$$

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	f_0
Koncentrácia tvrdého dreva	329,2	3	109,7	13,8
Chyba	126,8	16	7,9	
Celková	456,0	19		

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$$

$$H_1: \tau_i \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } i = 1, 2, 3, 4$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$f_0 = \frac{SS_{UF} / (a-1)}{SS_E / (N-a)} = \frac{MS_{UF}}{MS_E} = \frac{109,7}{7,9} = 13,8$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(a-1, N-a; \alpha) = f(4-1, 20-4; 0,05) = f(3,16; 0,05) = 3,24$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $f_0 = 13,8 > f(a-1, N-a; \alpha) = 3,24$, nulová hypotéza H_0 sa zamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Interval spoľahlivosti pre μ_i

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre μ_2 (strednú hodnotu pevnosti v ťahu pri 10 %-nej koncentrácii tvrdého dreva).

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

95 %-ný dvojstranný IS pre μ_2 :

$$\bar{y}_2 - t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{MS_E}{n}} \leq \mu_2 \leq \bar{y}_2 + t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

$$15,8 - t(20-4; 0,05) \sqrt{\frac{7,9}{5}} \leq \mu_2 \leq 15,8 + t(20-4; 0,05) \sqrt{\frac{7,9}{5}}$$

$$15,8 - 2,120 \times 1,257 \leq \mu_2 \leq 15,8 + 2,120 \times 1,257$$

$$13,1 \leq \mu_2 \leq 18,5$$

Interval spoľahlivosti pre $\mu_i - \mu_j$

Stanovíme 95 %-ný dvojstranný interval spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

95 %-ný dvojstranný IS pre $\mu_1 - \mu_2$:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 - \bar{y}_2 - t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{n}} &\leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{n}} \\ 10,0 - 15,8 - t(20-4, 0,05) \sqrt{\frac{2 \times 7,9}{5}} &\leq \mu_1 - \mu_2 \leq 10,0 - 15,8 + t(20-4, 0,05) \sqrt{\frac{2 \times 7,9}{5}} \\ -5,8 - 2,120 \times 1,778 &\leq \mu_1 - \mu_2 \leq -5,8 + 2,120 \times 1,778 \\ -9,6 &\leq \mu_1 - \mu_2 \leq -2,0 \end{aligned}$$

3.2.3 Viacnásobné porovnania použitím metódy ANOVA

Ciele výučby

- ☐ Vykonať viacnásobné porovnanie podľa Fisherovej metódy najmenšieho významného rozdielu (LSD).

Metódy viacnásobného porovnania

Niekoľko metód je k dispozícii pre určenie, ktoré stredné hodnoty úrovní faktora sa navzájom od seba líšia:

1. Scheffeho ortogonálne kontrasty
2. Fisherov najmenší významný rozdiel (LSD)
3. Duncanov viacnásobný test rozpätí
4. Tukeyov-Kramerov test

V tejto časti použijeme iba LSD metódu.

Metóda najmenšieho významného rozdielu (LSD)

Fisherova metóda najmenšieho významného rozdielu (LSD) sa používa na porovnanie všetkých možných dvojíc stredných hodnôt úrovní faktora. Testujú sa nasledovné nulové hypotézy

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \text{ pre všetky } i \neq j, i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, a \quad (3.14)$$

Každá nulová hypotéza $H_0 : \mu_i = \mu_j$ sa zamietne, ak

$$|t_0| > t(N-a, \alpha)$$

Inak vyjadrené:

$$|t_0| = \frac{|\bar{y}_i - \bar{y}_j|}{\sqrt{2\hat{\sigma}^2/n}} = \frac{|\bar{y}_i - \bar{y}_j|}{\sqrt{2MS_E/n}} > t(N-a, \alpha)$$

$$|\bar{y}_i - \bar{y}_j| > t(N-a, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{n}} = LSD \quad (3.15)$$

Ako je uvedené vyššie, dvojica μ_i a μ_j sa považuje za významne odlišnú, ak absolútna hodnota rozdielu zodpovedajúcich výberových priemerov je väčšia ako LSD. Všimnime si, že pre nevyvážený návrh je LSD definovaný takto:

$$LSD = t(N-a, \alpha) \sqrt{MS_E \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \quad (3.16)$$

Postup metódy LSD je nasledovný:

- Krok 1: Stanovenie **LSD** pre α .
- Krok 2: Usporiadanie priemerov a úrovní faktora **zostupne**.
- Krok 3: Porovnanie rozdielu medzi **najväčším** a **najmenším** priemerom s LSD. Pokračujeme porovnávaním s **ďalším najmenším** priemerom tak dlho, až kým rozdiel je väčší ako LSD.
- Krok 4: Pokračovanie predchádzajúcim krokom (Krok 3) pre **ďalší najväčší** priemer dotedy, kým táto iterácia dosiahne **druhý najmenší** priemer.
- Krok 5: Zhrnutie výsledkov párového porovnania usporiadaním a úrovní faktora v poradí podľa priemeru a potom **podčiarknutím** úrovní, ktorých priemery sa **významne neodlišujú**.

Príklad 3.2 (Metóda najmenšieho významného rozdielu)

Uvažujme dáta pevnosti v ťahu papierového výrobku (Príklad 3.1). Nasledovné veličiny sa získali z analýzy rozptylu:

$$a = 4, \quad n = 5, \quad N = 20, \quad MS_E = 7,9$$

$$\bar{y}_1 = 10,0, \quad \bar{y}_2 = 15,8, \quad \bar{y}_3 = 16,8, \quad \bar{y}_4 = 21,4$$

Porovnáme priemery štyroch úrovní faktora pomocou Fisherovej LSD metódy. Použijeme $\alpha = 0,05$.

Krok 1: Stanovenie **LSD** pre α .

$$LSD = t(N - a, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{n}} = t(20 - 4, 0,05) \sqrt{\frac{2 \times 7,9}{5}} = 2,120 \times 1,778 = 3,8$$

Krok 2: Usporiadanie priemerov a úrovní faktora **zostupne**.

$$\bar{y}_4 = 21,4; \bar{y}_3 = 16,8; \bar{y}_2 = 15,8; \bar{y}_1 = 10,0$$

Krok 3: Porovnanie rozdielu medzi **najväčším** a **najmenším** priemerom s LSD. Pokračujeme porovnávaním s **d'alším najmenším** priemerom tak dlho, až kým rozdiel je väčší ako LSD.

$$4 \text{ verus } 1 = 21,4 - 10,0 = 11,4 > 3,8$$

$$4 \text{ verus } 2 = 21,4 - 15,8 = 5,6 > 3,8$$

$$4 \text{ verus } 3 = 21,4 - 16,8 = 4,6 > 3,8$$

Krok 4: Pokračovanie predchádzajúcim krokom (Krok 3) pre **d'alší najväčší** priemer do-
vtedy, kým táto iterácia dosiahne **druhý najmenší** priemer.

$$3 \text{ verus } 1 = 16,8 - 10,0 = 6,8 > 3,8$$

$$3 \text{ verus } 2 = 16,8 - 15,8 = 1,0 < 3,8$$

$$2 \text{ verus } 1 = 15,8 - 10,0 = 5,8 > 3,8$$

Krok 5: Zhrnutie výsledkov párového porovnania usporiadaním a úrovní faktora v pora-
dí podľa priemeru a potom **podčiarknutím** úrovní, ktorých priemery sa **výz-
namne neodlišujú**.

$$4 \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad 1$$

3.2.4 Viac o viacnásobnom porovnaní

Ako už bolo uvedené v predchádzajúcich podkapitolách, existuje mnoho spôsobov vyšetrova-
nia stredných hodnôt úrovní faktora nasledujúce odmietnutím nulovej hypotézy pomocou
metódy ANOVA. Táto metóda Fisher LSD je jednoduchá a veľmi široko používaná. V tejto
podkapitole sa nebudeme zaoberať ďalšími tromi metódami, ktoré sú: *grafické porovnávanie
stredných hodnôt*, *ortogonálne* a *Tukeyová metóda*. Tieto metódy budú uvedené v knihe „Ap-
likovaná pravdepodobnosť a štatistika pre inžinierov. Štatistické analýzy 2. diel.

3.2.5 Reziduálna analýza a overovanie modelu

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť zmysel reziduálnej analýzy v analýze rozptylu.
- ☐ Vypočítať reziduá.

Reziduálna analýza

Jednofaktorový ANOVA model (podkapitola 3.2.2) má tri predpoklady na chybový člen:

1. normalita
2. konštantný rozptyl
3. náhodnosť

Tieto predpoklady sa dajú overovať pomocou reziduálnej analýzy ($\hat{\varepsilon}_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_i$).

Tento postup sa nazýva **posúdenie adekvátnosti modelu**.

Normalita chyby sa overuje pomocou jednej z nasledujúcich metód:

1. Histogram rezíduí
2. Graf normality rezíduí
3. Normovanie rezíduí pomocou vzorca

$$d_{ij} = \frac{\hat{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} = \frac{\hat{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{MS_E}}, \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

Ak reziduá sú normálne rozdelené, približne 95 % normovaných rezíduí (d_{ij}) sa nachádza v intervale $(-2, 2)$. Reziduá, ktorých normované hodnoty sú menšie ako -3 alebo väčšie ako 3 , môžu byť odľahlé hodnoty.

Konštantnosť rozptylu a náhodnosť možno overovať pomocou grafov rezíduí:

1. $\hat{\varepsilon}_{ij}$ verzus úroveň faktora i , $i = 1, 2, \dots, a$
2. $\hat{\varepsilon}_{ij}$ verzus $\bar{y}_i$
3. $\hat{\varepsilon}_{ij}$ verzus t (keď časová postupnosť je známa)

Nežiaduce reziduálne vzory (Podkapitola 1.8.1; Obr. 1.6) v grafe rezíduí môžu byť opravené transformáciou premennej ozvy (y) na inú formu, ako sú $\sqrt{y}$ alebo $\log y$.

Príklad 3.3 (Výpočet rezídua)

Uvažujme dáta pevnosti v ťahu papierového výrobku (Príklad 3.1). Nasledovné veličiny sa získali z analýzy rozptylu:

$$\bar{y}_1 = 10,0, \quad \bar{y}_2 = 15,8, \quad \bar{y}_3 = 16,8, \quad \bar{y}_4 = 21,4$$

Vypočítame rezíduum hodnoty $y_{12} = 8$.

$$\hat{\varepsilon}_{12} = y_{12} - \hat{y}_{12} = y_{12} - \bar{y}_1 = 8 - 10 = -2 \quad (\text{nadhodnotený})$$

3.2.6 Stanovenie rozsahu výberu

Ciele výučby

- Určiť rozsahu výberu v jednofaktorovom experimente pomocou vhodnej krivky operatívnej charakteristiky (OC).

Krivka operatívnej charakteristiky (OC)

V prílohe uvedená krivka operatívnej charakteristiky (OC) zobrazuje požadovaný rozsah výberu n pre experiment s fixnými účinkami faktora pre rôzne úrovne parametrov α , β , Φ , ν_1 a ν_2 . Teda

$$n = f(\alpha, \beta, \Phi, \nu_1, \nu_2) \quad (3.18)$$

kde $\Phi = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^a \tau_i^2}{a\sigma^2}}$, $\nu_1 = a - 1$ a $\nu_2 = a(n - 1)$.

Poznámky.

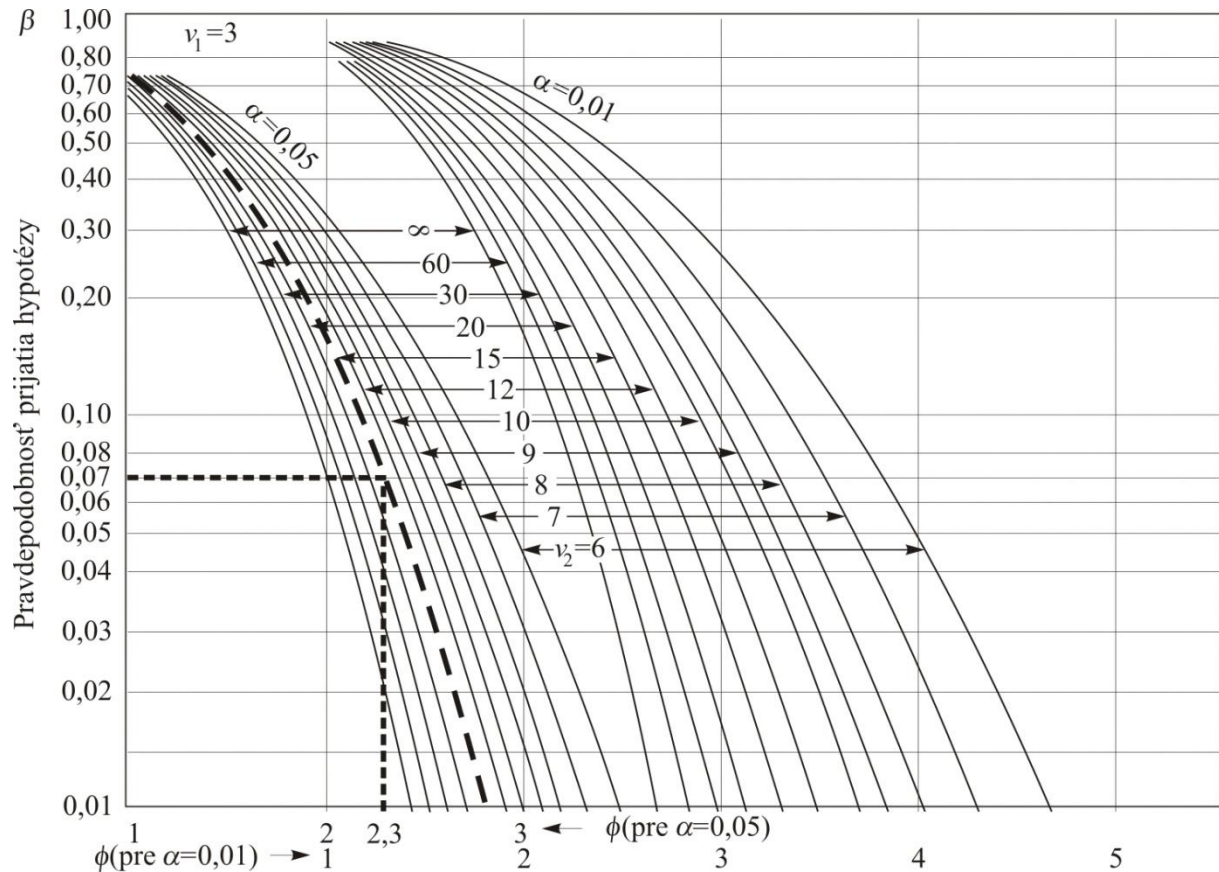
1. Keď je rozptyl chyby σ^2 neznámy, hodnota odhadu σ^2 (ako je MS_E , konvenčná hodnota a subjektívna hodnota odhadu) sa môže použiť.
2. Analytik môže definovať pomer $\sum_{i=1}^a \tau_i^2 / \sigma^2$ (alebo σ_τ^2 / σ^2) pri určovaní rozsahu výberu.
3. Rozsah výberu vyžaduje zvýšenie, ak α , β a $\sum_{i=1}^a \tau_i^2$ (alebo σ_τ^2) poklesnú a σ sa zväčší.

Príklad 3.4 (určovanie rozsahu výberu; faktor s fixnými účinkami)

Uvažujme experiment pevnosti v ťahu papierového výrobku (Príklad 3.1). Štyri koncentrácie tvrdého dreva ($a = 4$) sa vybrali a ich stredné hodnoty pevnosti v ťahu sa testovali na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. Predpokladajme, že štyri normálne rozdelené základné súbory majú spoločný rozptyl $\sigma^2 = 3^2$ a stredné hodnoty $\mu_1 = 12$, $\mu_2 = 15$, $\mu_3 = 18$ a $\mu_4 = 20$ (t. j. $\sum_{i=1}^a \tau_i^2 / \sigma^2 = 4,1$). Určíme počet opakovaní v každej úrovni faktora, ktoré sú potrebné na zamietnutie hypotézy o rovnosti stredných hodnôt so silou testu aspoň 0,90 ($= 1 - \beta$).

Použijeme krivku OC (Prílohy) pre faktor s fixnými účinkami s $\nu_1 = 3$ ($= a - 1 = 4 - 1$), v ktorej je uvedená sila testu pre $n = 4$ a 5.

n	Φ	$\nu_2 = a(n - 1)$	β	Sila testu ($1 - \beta$)
4	2,0	12	0,17	0,83
5	2,3	16	0,07	0,93



Teda aspoň $n = 15$ opakovaní je potrebné urobiť, aby sa dosiahla navrhnutá sila testu.

3.3 Faktor s náhodnými účinkami

Ciele výučby

- ☐ Testovať významnosť faktora s náhodnými účinkami v úplne náhodnom návrhu..
- ☐ Odhadnúť rozptyl chyby σ^2 , účinku úrovně faktora σ_{τ}^2 a premennej ozvy $D(Y_{ij})$.

Kontext

1. Faktor: Faktor s náhodnými účinkami a a úrovnami
2. Blokovanie: Nie sú definované žiadne bloky
3. Opakovanie: n replík pre každú úroveň faktora (vyvážený dizajn).

Celkový počet pozorovaní je $N = n \times a$

4. Náhodnosť: Úplná náhodnosť

Model

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} i=1, 2, \dots, a \\ j=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.19)$$

kde

μ – celková stredná hodnota

τ_i – účinok i -tej úrovne faktora $\sim NID(0, \sigma_\tau^2)$

μ_i – stredná hodnota i -tej úrovne faktora

ε_{ij} – náhodná chyba $\sim NID(0, \sigma^2)$

- Poznámka.** 1. Predpokladá sa, že náhodné premenné τ_i a ε_{ij} sú vzájomne nezávislé.
2. $Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_\tau^2 + \sigma^2)$
3. V modeli s náhodnými účinkami, testovanie účinkov jednotlivých úrovní faktora (τ_i) je bezvýznamné, pretože úrovne faktora sú vybrané náhodne.

ANOVA

Postup analýzy rozptylu pre model s fixnými účinkami platí aj pre model s náhodnými účinkami.

Avšak, záver ANOVA pre model s náhodnými účinkami sa môže rozšíriť na celý základný súbor úrovní faktora v experimente.

Zložky rozptylu (σ_τ^2 a σ^2) modelu s náhodnými účinkami možno odhadnúť pomocou MS_{UF} a MS_E :

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E = \frac{SS_E}{N-a} \quad \text{a} \quad \hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{UF} - MS_E}{n} \quad (3.20)$$

Teda odhad rozptylu premennej Y_{ij} je

$$\hat{D}(Y_{ij}) = \hat{\sigma}_\tau^2 + \hat{\sigma}^2 \quad (3.21)$$

Testovanie hypotézy (F-test)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \sigma_\tau^2 \neq 0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_{UF} / (a-1)}{SS_E / (N-a)} = \frac{MS_{UF}}{MS_E} \sim F(a-1, N-a)$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(a-1, N-a; \alpha)$$

Krok 4: **Záver:** nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(a-1, N-a; \alpha)$$

Príklad 3.5 (Odhad zložiek rozptylu)

Uvažujme dáta pevnosti v ťahu papierového výrobku (Príklad 3.1). Predpokladajme, že sa vybrali náhodne štyri koncentrácie tvrdého dreva. Nasledovné veličiny sa získali z analýzy rozptylu:

$$n = 5, \quad MS_{UF} = 109,7, \quad MS_E = 7,9$$

Odhadneme

1. variabilitu pevnosti v ťahu spôsobenú náhodnou chybou (σ^2),
2. variabilitu pevnosti v ťahu spôsobenú koncentráciou tvrdého dreva (σ_τ^2),
3. celkovú variabilitu pevnosti v ťahu ($D(Y_{ij})$)

a interpretujeme výsledky odhadov variability.

1. $\hat{\sigma}^2 = MS_E = 7,9$
2. $\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{UF} - MS_E}{n} = \frac{109,7 - 7,9}{5} = 20,4$
3. $\hat{D}(Y_{ij}) = \hat{\sigma}_\tau^2 + \hat{\sigma}^2 = 20,4 + 7,9 = 28,3$

Tieto odhady rozptylu ukazujú, že asi 72 % z celkovej variability pevnosti v ťahu možno pripísať koncentrácii tvrdého dreva.

3.4 Znáhodnený úplný blokový návrh

Ciele výučby

- ☐ Rozlišovať medzi úplným blokovým návrhom a neúplným blokovým návrhom.
- ☐ Vysvetliť účinok blokovania na chybu.
- ☐ Testovať významnosť faktora s fixnými účinkami v znáhodnenom úplnom blokovom návrhu.
- ☐ Vykonať viacnásobné porovnanie podľa Fisherovej metódy najmenšieho významného rozdielu (LSD).

Úplný verzus neúplný blokový návrh

Úplný blokový návrh obsahuje všetky úrovne faktora v každom bloku (pozri Tab. 3.5), kým neúplný blokový návrh môže vynechať jednu alebo viac úrovní faktora v každom bloku. Pri-
pomeňme, že blokovanie sa používa na vyrovnanie účinku problémového faktora na ozvu.

Tab. 3.5 Dátová štruktúra úplného blokového návrhu

Úrovně faktora								
Bloky	1	2	...	i	...	a	Súčty	Priemery
1	y_{11}	y_{21}	...	y_{i1}	...	y_{a1}	$y_{.1}$	$\bar{y}_{.1}$
2	y_{12}	y_{22}	...	y_{i2}	...	y_{a2}	$y_{.2}$	$\bar{y}_{.2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	y_{1j}	y_{2j}	...	y_{ij}	...	y_{aj}	$y_{.j}$	$\bar{y}_{.j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b	y_{1b}	y_{2b}	...	y_{ib}	...	y_{ab}	$y_{.b}$	$\bar{y}_{.b}$
Súčty	$y_{.1}$	$y_{.2}$	...	$y_{.i}$	...	$y_{.a}$	$y_{..}$	
Priemery	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	...	$\bar{y}_{.i}$	...	$\bar{y}_{.a}$		$\bar{y}_{..}$

Kontext

1. Faktor: Faktor s fixnými účinkami a a úrovňami
2. Blokované: Úplný blokový návrh s b blokmi s fixnými účinkami
3. Opakovanie: Jedno pozorovanie pre každú kombináciu úrovni faktora a bloky
Celkový počet pozorovaní je $N = a \times b \times 1$
4. Náhodnosť: Obmedzená náhodnosť (náhodnosť vnútri každého bloku)

Model

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} = \mu_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} i=1,2,\dots,a \\ j=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (3.22)$$

kde

μ – celková stredná hodnota

τ_i – účinok i -tej úrovne faktora, $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$

β_j – účinok j -teho bloku, $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$

μ_i – stredná hodnota i -tej úrovne faktora

ε_{ij} – náhodná chyba $\sim NID(0, \sigma^2)$

Poznámka. 1. $Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$

2. Predpokladá sa, že úrovne faktora a bloky sú vzájomne nezávislé (neexistujú interakcie).
3. Pretože úrovne faktora a bloky sú faktory s fixnými účinkami v modeli, účinky úrovní faktora (τ_i) a účinky blokov (β_j) sú definované ako odchýlky od celkovej strednej hodnoty; teda súčty τ_i a súčty β_j sú nulové.

ANOVA

Metóda analýzy rozptylu sa používa na testovanie významnosti faktora v znáhodnenom úplnom blokovom návrhu. Celková variabilita Y (SS_T , **celkový súčet štvorcov**; stupne voľnosti $= N - 1$) sa rozdelí na tri zložky:

1. Variabilita vysvetlená faktorom (SS_{UF} , **súčet štvorcov úrovní faktora**; st. v. $= a - 1$)
2. Variabilita vysvetlená blokmi (SS_{Blok} , **súčet štvorcov blokov**; st. v. $= b - 1$)
3. Variabilita tvorená náhodnou chybou (SS_E , **súčet štvorcov chýb**; st. v. $= (a - 1)(b - 1)$)

Inak vyjadrené:

$$SS_T = SS_{UF} + SS_{Blok} + SS_E$$

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

$$\text{St. voľ. } N - 1 = a - 1 + b - 1 + (a - 1)(b - 1)$$

kde

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{\bar{y}_{..}^2}{ab}$$

$$SS_{UF} = b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 - \frac{\bar{y}_{..}^2}{ab}$$

$$SS_{Blok} = a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^b y_{.j}^2 - \frac{\bar{y}_{..}^2}{ab}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{UF} - SS_{Blok}$$

Podiel $SS_{UF} / (a - 1)$ a $SS_E / (a - 1)(b - 1)$ má F rozdelenie:

$$F = \frac{SS_{UF} / (a - 1)}{SS_E / (a - 1)(b - 1)} = \frac{MS_{UF}}{MS_E} \sim F(a - 1, (a - 1)(b - 1)) \quad (3.23)$$

Táto štatistika F sa používa na testovanie hypotézy $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$, pretože F nadobúda malú hodnotu, keď účinok faktora je nevýznamný. Veličiny MS_{UF} (**priemerný štvorec úrovni faktora**), MS_{Blok} (**priemerný štvorec blokov**) a MS_E (**priemerný štvorec chyby**) vydelia zodpovedajúcimi stupňami voľnosti. Všimnime si, že

$$MS_E = \frac{SS_E}{(a-1)(b-1)} = \hat{\sigma}^2 \quad (3.24)$$

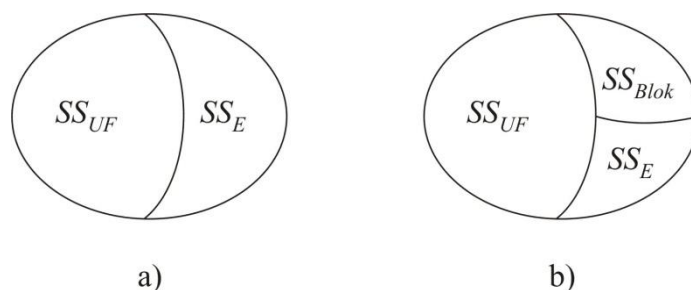
Kolísave veličiny z analýzy ANOVA sú zhrnuté v tabuľke 3.6 na testovanie významnosti uvažovaného faktora.

Tab. 3.6 ANOVA na testovanie významnosti faktora:
znáhodnený úplný blokový návrh

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	F_0
Úrovně faktora	SS_{UF}	$a-1$	MS_{UF}	MS_{UF} / MS_E
Bloky	SS_{Blok}	$b-1$	MS_{Blok}	
Chyba	SS_E	$(a-1)(b-1)$	MS_E	
Celková	SS_T	$N-1$		

Účinnosť blokovania

V porovnaní s úplne znáhodneným návrhom uvedeným v podkapitole 3.2.2, znáhodnený úplný blokový návrh znižuje súčet štvorcov a stupne voľnosti pre chybu. V blokovanom návrhu súčet štvorcov chýb a zodpovedajúce stupne voľnosti sú znížené o hodnoty SS_{Blok} a $b-1$ ($= (N-a) - (a-1)(b-1)$; $N = ab$).



Obr. 3.1 Účinok blokovania súčet štvorcov chýb (SS_E):

- a) úplne znáhodnený návrh
- b) znáhodnený úplný blokový návrh

Účinnosť blokovania závisí od významnosti účinkov blokov. Ak je účinok blokov významný, úplný blokový návrh bude dávať menší priemerný štvorec chyby (MS_E) než úplne znáhodnený návrh, ktorý robí test citlivejší na detekciu účinku úrovni faktora.

Všeobecne platí, že keď významnosť účinkov blokov je neistá, použite blokovanie a overte, či existujú účinky blokov. Bola by tam mierna strata stupňov voľnosti pre chybu, čo môže byť zanedbateľné v teste, ak počet pokusov je veľmi malý.

Testovanie hypotézy (F-test)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$$

$$H_1: \tau_i \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } i = 1, 2, \dots, a$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_{UF} / (a-1)}{SS_E / (a-1)(b-1)} = \frac{MS_{UF}}{MS_E} \sim F(a-1, (a-1)(b-1))$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(a-1, (a-1)(b-1); \alpha)$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(a-1, (a-1)(b-1); \alpha)$$

Metódy viacnásobného porovnania

Metódy viacnásobného porovnávania pre úplne znáhodnený návrh (pozri podkapitolu 3.2.3) sú aplikovateľné v úplnom blokovom návrhu. V tomto prípade hodnota Fisherovej LSD je

$$LSD = t((a-1)(b-1), \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{b}} \quad (3.25)$$

Reziduálna analýza

Model úplného blokového návrhu má tri predpoklady na chybový člen:

1. normalita
2. konštantný rozptyl
3. náhodnosť

Tieto predpoklady sa dajú overovať pomocou reziduálnej analýzy

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - (\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) \quad (3.26)$$

Tieto rezíduá sa analyzujú metódami posúdenia adekvátnosti modelu, vysvetlené v kapitole 3.2.5.

Príklad 3.6

Študuje sa vplyv uhla uchopenia na maximálnu silu zovretia (jednotka: kg). Tri uhly uchopenia ($a = 3$; 20° , 50° a 80° z horizontálnej polohy) vybral experimentátor. Päť účastníkov sa prijalo do experimentu. Každý účastník vynaloží svoju maximálnu silu pri troch rôznych uhloch uchopenia prezentovaných v náhodnom poradí. Merania sily zovretia sú nasledovné:

Uhol uchopenia					
Účastník	1 (20°)	2 (50°)	3 (80°)	Súčty	Priemery
1	45	53	50	148	49,3
2	64	75	71	210	70,0
3	54	59	52	165	55,0
4	72	80	79	231	77,0
5	62	71	65	198	66,0
Súčty	297	338	317	952	
Priemery	59,4	67,6	63,4		63,5

Nasledujúce súhrnné veličiny sa získali z dát sily zovretia:

$$N = 15, \quad \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 = 62,132, \quad \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 = 302,942, \quad \sum_{j=1}^b y_{.j}^2 = 185,794$$

Test významnosti faktora s fixnými účinkami; úplný blokový návrh

Pomocou analýzy rozptylu testujeme, či existuje významný rozdiel v maximálnej sile zovretia pri rôznych uhloch uchopenie na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Z analýzy rozptylu pre dáta sily zovretia dostaneme:

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{\bar{y}_{..}^2}{ab} = 62,132 - \frac{952^2}{15} = 1711,7$$

$$SS_{UF} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 - \frac{\bar{y}_{..}^2}{ab} = \frac{302,942}{5} - \frac{952^2}{15} = 168,1$$

$$SS_{Blok} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^b y_{.j}^2 - \frac{\bar{y}_{..}^2}{ab} = \frac{185,794}{3} - \frac{952^2}{15} = 1511,1$$

$$SS_E = SS_T - SS_{UF} - SS_{Blok} = 1711,7 - 168,1 - 1511,1 = 32,5$$

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	F_0
Uhol uchopenia	168,1	2	84,1	20,7
Účastník	1511,1	4	377,8	
Chyba	32,5	8	4,1	
Celková	1711,7	14		

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

$$H_1: \tau_i \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } i = 1, 2, 3$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$f_0 = \frac{SS_{UF}/(a-1)}{SS_E/(a-1)(b-1)} = \frac{SS_{UF}/(3-1)}{SS_E/(3-1)(5-1)} = \frac{MS_{UF}}{MS_E} = \frac{84,1}{4,1} = 20,7$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(a-1, (a-1)(b-1); \alpha) = f(3-1, (3-1)(5-1); 0,05) = f(2, 8; 0,05) = 4,46$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $f_0 > f(a-1, (a-1)(b-1); \alpha) = f(2, 8; 0,05) = 4,46$, nulová hypotéza H_0 sa zamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Metóda viacnásobného porovnania

Porovnáme tieto tri stredné hodnoty úrovní faktora pomocou Fisherovej metódy LSD na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Krok 1: Stanovenie **LSD** pre α .

$$LSD = t((a-1)(b-1), \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{b}} = t(8, 0,05) \sqrt{\frac{2 \times 4,1}{5}} = 2,306 \times 1,281 = 3,0$$

Krok 2: Usporiadanie priemerov a úrovní faktora **zostupne**.

$$\bar{y}_2 = 67,6; \bar{y}_3 = 63,4; \bar{y}_1 = 59,4$$

Krok 3: Porovnanie rozdielu medzi **najväčším a najmenším** priemerom s LSD. Pokračujeme porovnávaním s **d ďalším najmenším** priemerom tak dlho, až kým rozdiel je väčší ako LSD.

$$2 \text{ verzus } 1 = 67,6 - 59,4 = 8,2 > 3,0$$

$$2 \text{ verzus } 3 = 67,6 - 63,4 = 4,2 > 3,0$$

Krok 4: Pokračovanie predchádzajúcim krokom (Krok 3) pre **d'alší najväčší** priemer do-
vtedy, kým táto iterácia dosiahne **druhý najmenší** priemer.

$$3 \text{ verus } 1 = 63,4 - 59,4 = 4,0 > 3,0$$

Krok 5: Zhrnutie výsledkov párového porovnania.

$$2 \quad 3 \quad 1 \text{ (významné rozdiely)}$$

Výpočet rezídua

Vypočítame rezíduum pre $y_{34} = 79$.

$$\hat{\varepsilon}_{34} = y_{34} - \hat{y}_{34} = y_{34} - (\bar{y}_{3.} + \bar{y}_{.4} - \bar{y}_{..}) = 79 - (63,4 + 77,0 - 63,5) = 2,1$$

4 NÁVRH VIACFAKTOROVÝCH EXPERIMENTOV

4.1 Úvod

Táto kapitola uvádza štatistické pojmy a metódy, ako navrhnuť experiment s viacerými faktormi a analyzovať dáta získané z experimentu. Väčšina techník prezentovaných v kapitole 3 pre jednofaktorové experimenty sa rozšírila na tento viacfaktorový experiment.

4.2 Niektoré aplikácie techník navrhovania experimentov

Navrhovanie experimentov je veľmi dôležitý nástroj pre inžinierov a vedcov, ktorí majú záujem o zlepšenie výkonnosti výrobného procesu. Má tiež rozsiahle uplatnenie pri vývoji nových procesov a v novom návrhu produktu. Teraz uvedieme niekoľko príkladov.

Charakterizácia procesu experimentu

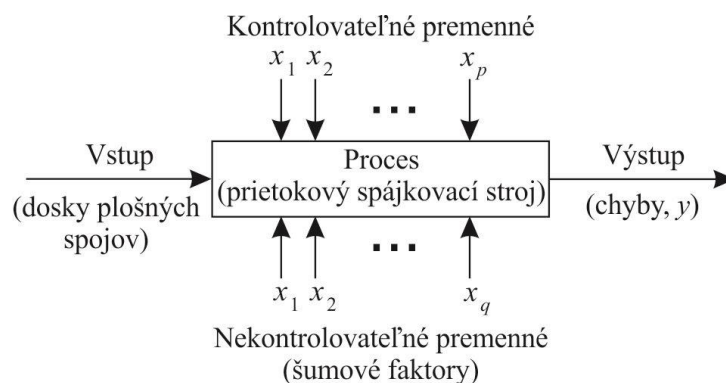
Tím vývojových inžinierov pracuje na novej metóde spájkovanie elektronických súčiastok na doskách plošných spojov. Konkrétne, tím pracuje s novým typom prietokového spájkovacieho stroja, ktorý by mal znížiť počet chybných spájkovaných spojov. (Prietokový spájkovací stroj predhrieva dosky plošných spojov a potom ich presunie do kontaktu s vlnou tekutej spájky. Tento stroj vyrobí všetky elektrické a väčšinu mechanických spojov zložiek na doske s plošnými spojmi. Spájkovacie chyby vyžadujú opraviť alebo prepracovať, čo zvyšuje náklady a často poškodzuje spoje.) Tento proces bude mať niekoľko (možno veľa) premenných, z nich nie všetky sú rovnako dôležité. Pôvodný zoznam kandidátskych premenných, ktoré majú byť zahrnuté do experimentu je konštruovaný kombináciou vedomostí a informácií o procese od všetkých členov tímu. V tomto príklade inžinieri vykonali **brainstorming** a pozvali výrobný personál so skúsenosťami s použitím rôznych typov prietokových spájkovacích zariadení k účasti. Tím zistil, že prietokový spájkovací stroj má niekoľko premenných, ktoré sa môžu regulovať. Sú to:

1. teplota spájky
2. predhrievacia teplota
3. rýchlosť dopravníka
4. typ prúdenia
5. špecifická hmotnosť prúdenia
6. hĺbková spájkovacia vlna
7. uhol dopravníka

Okrem týchto kontrolovateľných premenných existuje niekoľko ďalších premenných, ktoré nemožno kontrolovať, len čo stroj začne pracovať. Sú to:

1. hrúbka dosky s plošnými spojmi
2. typy komponentov použité na doske
3. rozloženie komponentov na doske
4. operátor
5. environmentálne faktory
6. rýchlosť produkcie

Niekedy nazývame nekontrolovateľné premenné *faktory šumu*. Schematické znázornenie tohto postupu je uvedený na obr. 4.1.



Obr. 4.1 Experiment prietoku spájky

V tejto situácii je inžinierov záujem **charakterizovať** prietok spájkovacieho stroja; t. j. zistiť, ktoré faktory (kontrolovateľné a nekontrolovateľné) majú vplyv na výskyt chýb na doskách plošných spojov. Ak chcete určiť tieto faktory, môžete navrhnúť experiment, ktorý umožní odhadnúť veľkosť a smer účinkov faktora. Niekedy tento experiment nazývame **screening experiment**. Informácie z tejto štúdie môžu pomôcť určiť rozhodujúce premenné procesu a riadiť nastavenia faktorov tak, aby sa znížil počet poškodených jednotiek. Tiež to môže pomáhať pri určovaní premenných procesu, ktoré by mali byť pozorne regulované počas výroby, aby sa zabránilo vysokej úrovni chybovosti a nepravidelnej výkonnosti procesu.

4.3 Faktoriálne experimenty

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť termíny *faktoriálny návrh*.
- ☐ Rozlíšiť hlavné účinky a interakčné účinky.
- ☐ Vysvetliť, prečo informácie o interakciách medzi faktory majú väčší význam, ako tie z hlavných účinkov, keď sú interakcie významné.

Faktoriálny návrh

Faktoriálny návrh je návrh experimentu, pri ktorom sú všetky uvažované kombinácie úrovní faktora skúšané pre každú replikáciu. Napríklad, keď faktor A má dve a faktor B tri úrovne, faktoriálny návrh A a B sa spustí pre šesť ($= 2 \times 3$) kombinácia úrovní pre každé opakovanie.

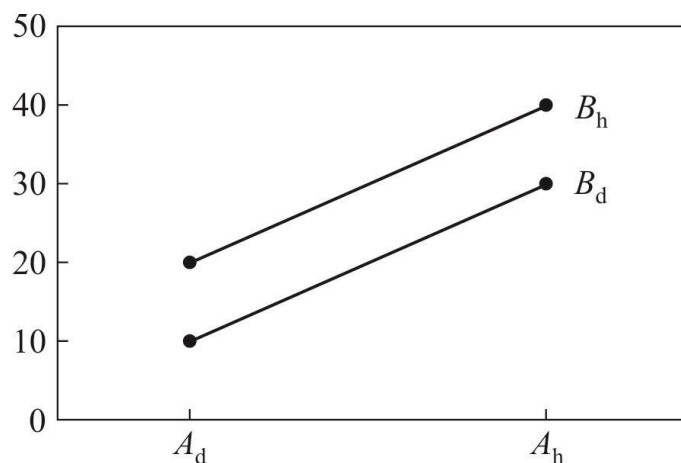
Hlavné účinky verzus interakčné účinky

Účinok faktora označuje zmenu ozvy spôsobenú zmenou úrovne faktora. Dva typy účinkov faktora sú definované:

1. Hlavný účinok: Samotný účinok faktora.
2. Interakčný účinok: Účinok interakcie medzi faktormi. Interakcia existuje medzi faktormi, ak účinok jedného faktora závisí od stavu druhého faktora.

Tab. 4.1 Dvojfaktorový faktoriálny experiment: bez interakcie

		Faktor A		Súčty	Priemery
		A_d	A_h		
Faktor B	B_d	10	30	40	20
	B_h	20	40	60	30
Súčty		30	70	100	
Priemery		15	35		25



Obr. 4.2 Dvojfaktorový faktoriálny experiment: bez interakcie

Tab. 4.1 aj Obr. 4.2 ukazujú, že hlavný účinok faktora A nezávisí od úrovne faktora B a naopak. To naznačuje, že neexistuje interakcia medzi A a B . Inými slovami, hlavné účinky A pri nízkej alebo vysokej úrovni B sa rovnajú 20 ($30 - 10 = 20$ – nízka úroveň B a $40 - 20 = 20$ – vysoká úroveň B). Podobne hlavné účinky B pri nízkej alebo vysokej úrovni

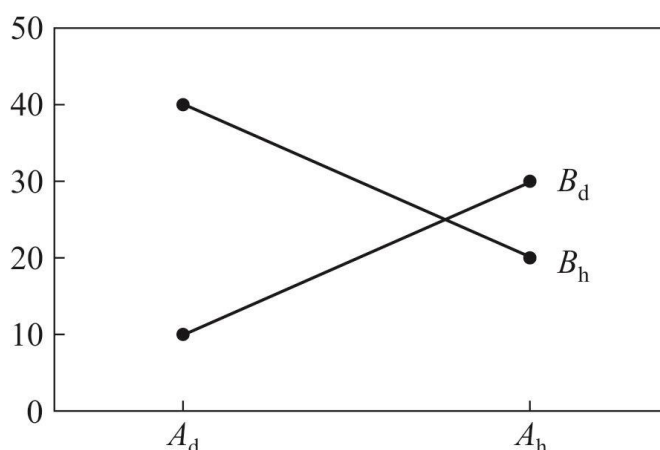
ni A sa rovnajú 10. Táto nevýznamná interakcia AB sa dá identifikovať vypočítaním rozdielu diagonálnych priemerov:

$$AB = \frac{A_h B_h + A_d B_d}{2} - \frac{A_d B_h + A_h B_d}{2} = \frac{40+10}{2} - \frac{20+30}{2} = 0$$

Všimnite si, že priamky B_h a B_d na obrázku sú navzájom rovnobežné, keď interakcia A a B je neprítomná.

Tab. 4.2 Dvojfaktorový faktoriálny experiment: s interakciou

		Faktor A		Súčty	Priemery
		A_d	A_h		
Faktor B	B_d	10	30	40	20
	B_h	40	20	60	30
	Súčty	50	50	100	
	Priemery	25	25		25



Obr. 4.3 Dvojfaktorový faktoriálny experiment: s interakciou

Na druhej strane, Tab. 4.2 aj Obr. 4.3 ukazujú, že hlavný účinok faktora A (alebo B) sa mení v závislosti od úrovne druhého faktora, čo ukazuje, že je prítomná interakcia medzi A a B . Hlavné účinky A pri nízkej alebo vysokej úrovni B sa rovnajú 20 ($=30-10$) alebo -20 ($=20-40$), čo má za následok priemer nula ako hlavný účinok A . Podobne hlavné účinky B pri nízkej alebo vysokej úrovni A sa rovnajú 30 ($=40-10$) alebo -10 ($=20-30$), čo má za následok priemer 10 ako hlavný účinok B . Táto významná interakcia AB sa dá identifikovať pomocou nenulovej hodnoty rozdielu diagonálnych priemerov:

$$AB = \frac{A_h B_h + A_d B_d}{2} - \frac{A_d B_h + A_h B_d}{2} = \frac{20+10}{2} - \frac{40+30}{2} = -20$$

Všimnite si, že priamky B_h a B_d na obrázku nie sú rovnobežné, keď interakcia medzi A a B je prítomná.

Na Obr. 4.3 je znázornené, ako významná interakcia zakrýva význam hlavných účinkov. Z toho vyplýva, že ak je prítomná interakcia, informácie z hlavných účinkov nie sú zmysluplné, pretože hlavný účinok faktora závisí od podmienok iného faktora alebo iných faktorov.

Nevyhnutnosť faktoriálneho návrhu

Factoriálny návrh je jediný návrh experimentu, ktorý kontroluje (monitoruje) interakcie medzi faktormi. Ak existujú významné interakcie medzi faktormi, experimentovanie s jedným faktorom v nejakom čase môže viesť k nevhodným výsledkom. Napríklad v tabuľke 4.2 aj na obrázku 4.2 je vidieť, že maximálna ozva sa získa pri $A = A_h$ a $B = B_h$ experimentovaním všetkých kombinácií postupov A a B . Ale keby experiment bol navrhnutý ako prvý pre A pri $B = B_d$ a potom pre B v nejakom čase, maximálna ozva by bola uzavretá pre $A = A_h$ a $B = B_d$ takto:

1. Prvá maximálna ozva pre $B = B_d$ bude k dispozícii na adrese $A = A_h$.
2. Potom experimentovaním B v $A = A_h$, maximálna ozva by sa dosiahla v $B = B_d$.

Faktoriálny návrh by sa mal použiť iba ak absencia interakcie je istá, ak sa chceme vyhnúť tomuto druhu nesprávneho záveru v jednofaktorovom časovom návrhu.

4.4 Dvojfaktorové faktoriálne experimenty

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť model faktoriálneho návrhu s dvomi faktormi s fixnými účinkami.
- ☐ Testovať významnosť hlavných účinkov a interakčných účinkov v dvojfaktorovom faktoriálnom návrhu.
- ☐ Porovnať navzájom stredné hodnoty jednotlivých úrovní faktorov pomocou Fisherovej metódy najmenšieho významného rozdielu (LSD).
- ☐ Vypočítať rezíduá v dvojfaktorovom faktoriálnom návrhu.
- ☐ Vysvetliť metódu na analyzovanie dvojfaktorového faktoriálneho návrhu s jedinou replikáciou.

Kontext

1. **Faktor:** Dva faktory s náhodnými účinkami (A s a a B s b úrovňami)
2. **Opakovanie:** n replík pre každú ab úroveň kombinácie;
 N (celkový počet pozorovaní) $= nab$ (vyvážený návrh; pozri Tab. 4.1).
3. **Náhodnosť:** Úplná náhodnosť

Model

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.1)$$

kde

μ – celková stredná hodnota

τ_i – účinok i -tej úrovne faktora A , $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$

β_j – účinok j -tej úrovne faktora B , $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$

$(\tau\beta)_{ij}$ – účinok interakcie medzi faktormi A a B ,

$$\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ pre } j = 1, 2, \dots, b, \quad \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ pre } i = 1, 2, \dots, a$$

ε_{ijk} – náhodná chyba $\sim NID(0, \sigma^2)$

Poznámka. 1. $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$

2. V modeli s fixnými účinkami, účinky úrovní faktorov τ_i , β_j a $(\tau\beta)_{ij}$ sú definované ako odchýlky od celkového priemeru. To znamená, že súčet všetkých τ_i , β_j a $(\tau\beta)_{ij}$ sa rovná nule.

Tab. 4.3 Štruktúra dát v dvojfaktorovom faktoriálnom návrhu

Faktor A							
		1	2	...	a	Súčty	Priemery
Faktor B	1	y_{111}	y_{211}	...	y_{a11}	$y_{.1.}$	$\bar{y}_{.1.}$
		y_{112}	y_{212}		y_{a12}		
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
		y_{11n}	y_{21n}		y_{a1n}		
	2	y_{121}	y_{221}	...	y_{a21}	$y_{.2.}$	$\bar{y}_{.2.}$
		y_{122}	y_{222}		y_{a22}		
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
		y_{12n}	y_{22n}		y_{a2n}		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	b	y_{1b1}	y_{2b1}	...	y_{ab1}	$y_{.b.}$	$\bar{y}_{.b.}$
		y_{1b2}	y_{2b2}		y_{ab2}		
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
		y_{1bn}	y_{2bn}		y_{abn}		
	Súčty	$y_{1..}$	$y_{2..}$	...	$y_{a..}$	$y_{...}$	
	Priemery	$\bar{y}_{1..}$	$\bar{y}_{2..}$	...	$\bar{y}_{a..}$		$\bar{y}_{...}$

ANOVA

V dvojfaktorovom faktoriálnom návrhu analýza rozptylu rozdelí celkovú variabilitu Y (SS_T , **celkový súčet štvorcov**; stupne voľnosti $= N - 1$) na štyri zložky:

1. Variabilita spôsobená faktorom A (SS_A ; **súčet štvorcov faktora A**; st. v. $= a - 1$)
2. Variabilita spôsobená faktorom B (SS_B ; **súčet štvorcov faktora B**; st. v. $= b - 1$)
3. Variabilita spôsobená interakciou AB (SS_{AB} ; **súčet štvorcov interakcie**; st. v. $= (a - 1)(b - 1)$)
4. Variabilita tvorená náhodnou chybou (SS_E , **súčet štvorcov chýb**; st. v. $= ab(n - 1) = N - ab$)

Teda

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E \quad (4.2)$$

kde

$$\begin{aligned}
 SS_T &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N} \\
 SS_A &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{N} \\
 SS_B &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{N} \\
 SS_{AB} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{N} - SS_A - SS_B \\
 SS_E &= SS_T - (SS_A + SS_B + SS_{AB})
 \end{aligned}$$

Keď vydelíme súčty štvorcov príslušnými stupňami voľnosti, dostaneme priemerné štvorce A , B , AB a chyby:

$$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}; \quad MS_B = \frac{SS_B}{b-1}; \quad MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}; \quad MS_E = \frac{SS_E}{N-ab}$$

Očakávané hodnoty týchto priemerných štvorcov sú

$$\begin{aligned}
 E(MS_A) &= E\left(\frac{SS_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn \sum_{i=1}^a \tau_i^2}{a-1} \\
 E(MS_B) &= E\left(\frac{SS_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b-1} \\
 E(MS_{AB}) &= E\left(\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n \sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} \\
 E(MS_E) &= E\left(\frac{SS_E}{N-ab}\right) = \sigma^2; \quad MS_E \text{ je nevychýlený odhad } \sigma^2.
 \end{aligned}$$

Podiely MS_A / MS_E , MS_B / MS_E a MS_{AB} / MS_E majú F rozdelenie:

$$F = \frac{MS_A}{MS_E} \sim F(a-1, N-ab) \quad (4.3)$$

$$F = \frac{MS_B}{MS_E} \sim F(b-1, N-ab) \quad (4.4)$$

$$F = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F((a-1)(b-1), N-ab) \quad (4.5)$$

Tieto F hodnoty sú malé, keď účinky A , B a AB sú nevýznamné (t. j. nulové hypotézy $H_0: \tau_i = 0$, $i=1,2,\dots,a$, $H_0: \beta_j = 0$, $j=1,2,\dots,b$ a $H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0$, $i=1,\dots,a$, $j=1,\dots,b$ sú správne). Výsledky ANOVA fixného faktoriálneho návrhu sú zhrnuté v Tab. 4.4, aby testovali významnosť účinkov.

Tab. 4.4 ANOVA pre dvojfaktorový faktoriálny návrh: fixné účinky

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	F_0
A	SS_A	$a-1$	MS_A	MS_A / MS_E
B	SS_B	$b-1$	MS_B	MS_B / MS_E
AB	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	MS_{AB}	MS_{AB} / MS_E
Chyba	SS_E	$N-ab$	MS_E	
Celková	SS_T	$N-1$		

Testovanie hypotézy (F -test)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \tau_i = 0 \text{ pre } i=1,2,\dots,a \quad H_1: \tau_i \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } i \quad \text{pre } A$$

$$H_0: \beta_j = 0 \text{ pre } j=1,2,\dots,b \quad H_1: \beta_j \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } j \quad \text{pre } B$$

$$H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ pre všetky kombinácie } i \text{ a } j$$

$$H_1: (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \text{ aspoň pre jednu kombináciu } i \text{ a } j \quad \text{pre } AB$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_A / (a-1)}{SS_E / (N-ab)} = \frac{MS_A}{MS_E} \sim F(a-1, N-ab) \quad \text{pre } A$$

$$F_0 = \frac{SS_B / (b-1)}{SS_E / (N-ab)} = \frac{MS_B}{MS_E} \sim F(b-1, N-ab) \quad \text{pre } B$$

$$F_0 = \frac{SS_{AB} / ((a-1)(b-1))}{SS_E / (N-ab)} = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F((a-1)(b-1), N-ab) \quad \text{pre } AB$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(a-1, N-ab; \alpha) \quad \text{pre } A$$

$$f(b-1, N-ab; \alpha) \quad \text{pre } B$$

$$f((a-1)(b-1), N-ab; \alpha) \quad \text{pre } AB$$

Krok 4: **Záver:** nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(a-1, N-ab; \alpha) \text{ pre } A$$

$$f_0 > f(b-1, N-ab; \alpha) \text{ pre } B$$

$$f_0 > f((a-1)(b-1), N-ab; \alpha) \text{ pre } AB$$

Odporúča sa, aby test na interakciu bol vykonaný najprv, pred nasledujúcimi testami pre hlavné účinky. Ak interakcia je nevýznamná, testy na hlavné účinky sú zmysluplné; inak sú testy na hlavné účinky nevýznamné, pretože účinok nejakého faktora podlieha okolnostiam iného(ých) faktora(ov).

Viacnásobné porovnania

U významných fixných faktorov stredné hodnoty individuálnych úrovní sú porovnávané s viacnásobnou porovnávacou metódou, akou je Fisherova metóda najmenšieho významného rozdielu (LSD) uvedená v podkapitole 3.2.3. Keď interakcia AB je nevýznamná, stredné hodnoty každého významného hlavného účinku sa porovnávajú. Keď interakcia AB je významná, stredná hodnota jedného faktora (povedzme A) sa porovná s druhým faktorom (povedzme B) na určitej úrovni. Pre fixný dvojfaktorový faktoriálny návrh sa LSD stanovuje takto:

$$LSD = t(N-ab, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{bn}} \text{ pre } A \quad (4.6)$$

$$LSD = t(N-ab, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{an}} \text{ pre } B \quad (4.7)$$

$$LSD = t(N-ab, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{n}} \text{ pre } AB \quad (4.8)$$

Reziduálna analýza

Rovnako ako v prípade jednofaktorového modelu (uvedeného v podkapitole 3.2.2), dvojfaktorový faktoriálny model má tri predpoklady o chybe: 1. normálnosť, 2. konštantná variabilita, 3. náhodnosti. Tieto predpoklady možno skontrolovať pomocou reziduálnej analýzy ako je uvedené v podkapitole 3.2.5 ($e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}$).

Faktoriálny návrh s jedinou replikáciou

Niekedy dvojfaktorový faktoriálny experiment má iba jedno pozorovanie pre každú kombináciu úrovní faktorov. V tomto prípade sa stupne voľnosti chyby rovnajú nule ($= N-ab = nab-ab$ pre $n=1$) a tým aj stredná kvadratická chyba nie je k dispozícii.

V tomto nereplikovanom návrhu suma štvorcov interakcie môže byť použitá ako stredná kvadratická chyba za predpokladu, že účinok interakcie je zanedbateľný. Avšak tento predpoklad bez interakcie môže priniesť nesprávny záver v prípade, že interakcia je významná; teda dáta a reziduály by sa mali starostlivo skúmať, aby sa overil význam interakcie.

Príklad 4.1

Inžinier má podozrenie, že povrchová úprava (Y) kovových častí je ovplyvnená časom sušenia (A) a typom náteru (B). Trikrát časy sušenia ($a = 3$; 20, 25, 30) a dva druhy náteru ($b = 2$) sú špeciálne vybrané inžinierom a tri časti ($n = 3$) sú testované pre každú kombináciu časov sušenia a typov náterov, čím sa získa nasledovná tabuľka.

Čas sušenia (A; jednotka: min)						
		20 (1)	25 (2)	30 (3)	Súčty	Priemery
Typ náteru (B)	1	74	73	78	621	69,0
		64	61	85		
		50	44	92		
	2	92	98	66	701	77,9
		86	73	45		
		68	88	85		
Súčty		434	437	451	1322	
Priemery		72,3	72,8	75,2		73,4

Pre dáta povrchovej úpravy je tiež k dispozícii nasledujúci prehľad veličín:

$$N = 18, \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 = 101598, \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 = 582726, \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 = 877042, \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij.}^2 = 298066$$

Test významnosti hlavných účinkov a účinkov interakcie; dvojfaktorový faktoriálny návrh

Testujeme analýzou rozptylu, či účinky A , B a AB sú významné každý na úrovni $\alpha = 0,05$.

Z analýzy rozptylu pre dáta povrchovej úpravy dostaneme:

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N} = 101598 - \frac{1322^2}{18} = 4504,4$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{N} = \frac{582726}{6} - \frac{1322^2}{18} = 27,4$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{N} = \frac{877042}{9} - \frac{1322^2}{18} = 355,6$$

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{N} - SS_A - SS_B =$$

$$= \frac{298066}{3} - \frac{1322^2}{18} - 27,4 - 355,6 = 1878,8$$

$$SS_E = SS_T - (SS_A + SS_B + SS_{AB}) =$$

$$= 4504,4 - (27,4 + 355,6 + 1878,8) = 2242,7$$

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	f_0
Čas sušenia (A)	27,4	2	13,7	0,07
Typ náteru (B)	355,6	1	355,6	1,90
Interakcia (AB)	1878,8	2	939,4	5,03
Chyba	2242,7	12	186,9	
Celková	4504,4	17		

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \tau_i = 0 \text{ pre } i=1,2,3 \quad H_1: \tau_i \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } i \text{ pre } A$$

$$H_0: \beta_j = 0 \text{ pre } j=1,2 \quad H_1: \beta_j \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } j \text{ pre } B$$

$$H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ pre všetky kombinácie } i \text{ a } j$$

$$H_1: (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \text{ aspoň pre jednu kombináciu } i \text{ a } j \text{ pre } AB$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$f_0 = \frac{SS_A / (a-1)}{SS_E / (N-ab)} = \frac{MS_A}{MS_E} = \frac{13,7}{186,9} = 0,07 \quad \text{pre } A$$

$$f_0 = \frac{SS_B / (b-1)}{SS_E / (N-ab)} = \frac{MS_B}{MS_E} = \frac{355,6}{186,9} = 1,90 \quad \text{pre } B$$

$$f_0 = \frac{SS_{AB} / ((a-1)(b-1))}{SS_E / (N-ab)} = \frac{MS_{AB}}{MS_E} = \frac{939,4}{186,9} = 5,03 \quad \text{pre } AB$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(a-1, N-ab; \alpha) = f(3-1, 18-6; 0,05) = f(2, 12; 0,05) = 3,89 \quad \text{pre } A$$

$$f(b-1, N-ab; \alpha) = f(2-1, 18-6; 0,05) = f(1, 12; 0,05) = 4,75 \quad \text{pre } B$$

$$f((a-1)(b-1), N-ab; \alpha) = f((3-1)(2-1), 18-6; 0,05) = f(2, 12; 0,05) = 3,89 \quad \text{pre } AB$$

Krok 4: **Záver:**

pretože $f_0 = 5,03 > f((a-1)(b-1), N-ab; \alpha) = 3,89$, nulová hypotéza H_0 sa zamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ pre AB . Vzhľadom na významnú interakciu, testy hlavných účinkov A a B sú bezvýznamné.

Viacnásobné porovnania

Porovnajte strednú hodnotu povrchovej úpravy pre tri časy sušenia pre typ náteru 1. Zodpovedajúce odhady stredných hodnôt povrchových úprav sú

$$\bar{y}_{11.} = 62,7, \quad \bar{y}_{21.} = 59,3, \quad \bar{y}_{31.} = 85,0$$

Krok 1: Stanovenie **LSD** pre α .

$$LSD = t(N-ab, \alpha) \sqrt{\frac{2MS_E}{n}} = t(18-3 \times 2, 0,05) \sqrt{\frac{2 \times 186,9}{5}} = 2,179 \times 11,16 = 24,32$$

Krok 2: Usporiadanie priemerov a úrovní faktora **zostupne**.

$$\bar{y}_{31.} = 85,0; \quad \bar{y}_{11.} = 62,7; \quad \bar{y}_{21.} = 59,3$$

Krok 3: Porovnanie rozdielu medzi **najväčším** a **najmenším** priemerom s LSD. Pokračujeme porovnávaním s **d'alším najmenším** priemerom tak dlho, až kým rozdiel je väčší ako LSD.

$$3 \text{ verus } 2 = 85,0 - 59,3 = 25,7 > 24,32$$

$$3 \text{ verus } 1 = 85,0 - 62,7 = 22,3 < 24,32$$

Krok 4: Pokračovanie predchádzajúcim krokom (Krok 3) pre **d'alší najväčší** priemer dotedy, kým táto iterácia dosiahne **druhý najmenší** priemer.

$$1 \text{ verus } 2 = 62,7 - 59,3 = 3,40 < 24,32$$

Krok 5: Zhrnutie výsledkov párového porovnania usporiadaním a úrovní faktora v poradí podľa priemeru a potom **podčiarknutím** úrovní, ktorých priemery sa **významne neodlišujú**.

$$3 \quad \underline{1} \quad 2$$

Výpočet rezídua

Vypočítame rezíduum pre $y_{313} = 92$.

$$e_{313} = y_{313} - \hat{y}_{313} = y_{313} - \bar{y}_{31.} = 92 - 85 = 7 \quad (\text{podhodnotený})$$

4.5 Všeobecné faktoriálne experimenty

Faktoriálny návrh s viac ako dvoma faktormi

Experiment môže obsahovať viac než dva faktory. Postup analýzy rozptylu na tomto všeobecnom faktoriálnom experimente je len rozšírenie dvojfaktorového faktoriálneho návrhu, avšak vyžaduje nudné počítanie; teda sa väčšinou používa na analýzu počítačový softvér.

4.6 Faktoriálne experimenty s náhodnými faktormi

V tejto kapitole sa uvažujú situácie, v ktorých jeden alebo viac faktorov vo faktoriálnom experimente sú náhodné. V tomto texte sa s nimi nebudeme zaoberať, budú uvedené v učebnici.

4.7 2^k faktoriálne návrhy

4.7.1 2^2 návrh

Ciele výučby

- ☐ Identifikovať ortogonálne kontrasty v 2^2 návrhu.
- ☐ Odhadnúť hlavné účinky a interakčné účinky v 2^2 faktoriálnom návrhu.
- ☐ Testovať významnosť hlavných účinkov a interakčných účinkov v 2^2 faktoriálnom návrhu.

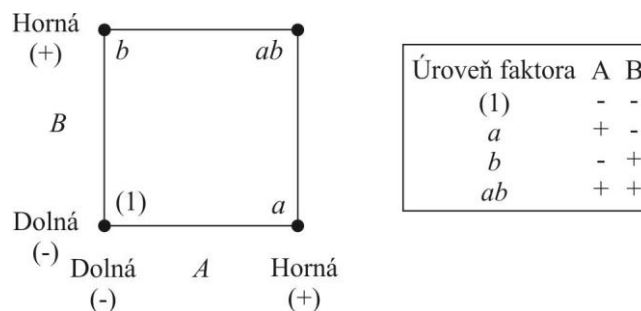
2^k návrh

2^k faktoriálny návrh je faktoriálny návrh s k faktormi, z ktorých každý má dve úrovne. Nízke a vysoké úrovne jednotlivých faktorov sú označené – (alebo „-1“) a + (alebo „1“). Kompletná replikácia tohto riešenia vyžaduje 2^k pozorovaní, čo je najmenší počet pozorovaní pri úplnom faktoriálnom návrhu s k faktormi.

Vzhľadom k minimálnemu počtu behov, 2^k návrh je obzvlášť užitočný pre experiment s mnohými faktormi pre účely skríningu. Dve dávky sú vybrané pre každý faktor tým, že prevezme linearity odozvy v danom rozmedzí úrovní faktora.

ANOVA pre 2^2 návrh

Všetky kombinácie úrovní faktorov vo 2^2 návrhu (2^k návrh, kde je $k = 2$ faktorov) sú označené radom znakov: (1), a, b, ab (pozri Obr. 4.4). Prítomnosť (neprítomnosť) znaku naznačuje, že zodpovedajúci faktor je na vysokej (nízkej) úrovni v kombinácii úrovní faktorov. Napríklad, písmeno a naznačuje, že faktor A je na vysokej úrovni a faktor B je na nízkej úrovni.



Obr. 4.4 Faktoriálny návrh 2^2

Hlavné účinky A a B a interakcia AB s n replikáciami sa odhadnú takto:

$$A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{a + ab}{2n} - \frac{b + (1)}{2n} = \frac{a + ab - b - (1)}{2n}$$

$$B = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{b + ab}{2n} - \frac{a + (1)}{2n} = \frac{b + ab - a - (1)}{2n}$$

$$AB = \frac{\bar{y}_{A+B+} + \bar{y}_{A-B-}}{2} - \frac{\bar{y}_{A+B-} + \bar{y}_{A-B+}}{2} = \frac{ab + (1)}{2n} - \frac{a + b}{2n} = \frac{ab + (1) - a - b}{2n}$$

Lineárne kombinácie čitateľov rovníc pre hlavné účinky a interakcie sa nazývajú **ortogonálne kontrasty** (označované ako C), ak spĺňajú dve vlastnosti:

1. Každá lineárna kombinácia má koeficienty $\{c_i\}$, ktorých súčet sa rovná nule ($\sum_i c_i = 0$)
2. Akékoľvek dva kontrasty s koeficientmi $\{c_i\}$ a $\{d_i\}$ majú súčet súčinov koeficientov, ktorý sa rovná nule ($\sum_i c_i d_i = 0$).

Súčet štvorcov pre A , B a AB sa vypočíta pomocou ortogonálnych kontrastov:

$$SS_A = \frac{C_A^2}{n2^k} = \frac{[a + ab - b - (1)]^2}{4n} \quad (4.9)$$

$$SS_B = \frac{C_B^2}{n2^k} = \frac{[b + ab - a - (1)]^2}{4n} \quad (4.10)$$

$$SS_{AB} = \frac{C_{AB}^2}{n2^k} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n} \quad (4.11)$$

Všimnime si, že celkový súčet štvorcov a súčet štvorcov chyby sa vypočíta takto:

$$SS_T = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N} \quad (4.12)$$

$$SS_E = SS_T - (SS_A + SS_B + SS_{AB}) \quad (4.13)$$

Vzhľadom nato, že každý súčet štvorcov kontrastu má jeden stupeň voľnosti, priemerné štvorce A , B a AB sa rovnajú zodpovedajúcim súčtom štvorcov. Priemerný štvorec chyby je

$$MS_E = \frac{SS_E}{4(n-1)} = \frac{SS_E}{N-4} \quad (4.14)$$

Podiely MS_A / MS_E , MS_B / MS_E a MS_{AB} / MS_E majú F rozdelenie:

$$F = \frac{MS_A}{MS_E} \sim F(1; 4(n-1)) \quad (4.15)$$

$$F = \frac{MS_B}{MS_E} \sim F(1; 4(n-1)) \quad (4.16)$$

$$F = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F(1; 4(n-1)) \quad (4.17)$$

Hodnoty F sú malé, ak účinky faktorov A , B a interakcie AB sú nevýznamné (t. j. $H_0 : \tau_i = 0$, $H_0 : \beta_j = 0$ a $H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$ sú správne. Veličiny variability z ANOVA sú zosumari-zované v nasledovnej tabuľke:

Tab. 4.5 ANOVA pre faktoriálny návrh 2^2

Zdroj variability	Súčet štvorcov	Stupne voľnosti	Priemerný štvorec	F_0
A	SS_A	1	MS_A	MS_A / MS_E
B	SS_B	1	MS_B	MS_B / MS_E
AB	SS_{AB}	1	MS_{AB}	MS_{AB} / MS_E
Chyba	SS_E	$N - 4$	MS_E	
Celková	SS_T	$N - 1$		

Test hypotézy

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \tau_i = 0 \text{ pre } i = 1, 2 \quad H_1: \tau_i \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } i \quad \text{pre } A$$

$$H_0: \beta_j = 0 \text{ pre } j = 1, 2 \quad H_1: \beta_j \neq 0 \text{ aspoň pre jedno } j \quad \text{pre } B$$

$$H_0: (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ pre všetky kombinácie } i \text{ a } j$$

$$H_1: (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \text{ aspoň pre jednu kombináciu } i \text{ a } j \quad \text{pre } AB$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$F_0 = \frac{SS_A / 1}{SS_E / 4(n-1)} = \frac{MS_A}{MS_E} \sim F(1, 4(n-1)) \quad \text{pre } A$$

$$F_0 = \frac{SS_B / 1}{SS_E / 4(n-1)} = \frac{MS_B}{MS_E} \sim F(1, 4(n-1)) \quad \text{pre } B$$

$$F_0 = \frac{SS_{AB} / 1}{SS_E / 4(n-1)} = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F(1, 4(n-1)) \quad \text{pre } AB$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$f(1, 4(n-1); \alpha) \quad \text{pre } A, B \text{ a } AB$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$f_0 > f(1, 4(n-1); \alpha) \quad \text{pre } A, B \text{ a } AB$$

Príklad 4.2 (Výpočet účinkov a súčtu štvorcov; 2^2 návrh)

Zoberme do úvahy dáta povrchovej úpravy z príkladu 4.1. Predpokladajme, že iba dva časy sušenia (20 a 30 min; $a = 2$) a dva typy náterov (boli testované $b = 2$) sa skúšali. Nasledujúci prehľad veličín poskytovaný pre dáta povrchové úpravy je tento:

$$n = 3, (1) = 188, a = 255, b = 246 \text{ a } ab = 196$$

Odhadneme účinky A, B, AB a vypočítame zodpovedajúce sumy štvorcov.

Ortogonálne kontrasty návrhov 2^2 pre dáta povrchové úpravy sú

$$C_A = a + ab - b - (1) = 255 + 196 - 246 - 188 = 17$$

$$C_B = b + ab - a - (1) = 246 + 196 - 255 - 188 = -1$$

$$C_{AB} = ab + (1) - a - b = 196 + 188 - 255 - 246 = -117$$

To znamená, že odhady hlavných účinkov a účinkov interakcie sú tieto:

$$A = \frac{C_A}{n2^{k-1}} = \frac{17}{3 \times 2^{2-1}} = 2,8$$

$$B = \frac{C_B}{n2^{k-1}} = \frac{-1}{3 \times 2^{2-1}} = -0,2$$

$$AB = \frac{C_{AB}}{n2^{k-1}} = \frac{-117}{3 \times 2^{2-1}} = -19,5$$

Zodpovedajúce sumy štvorcov sú potom tieto:

$$SS_A = \frac{C_A^2}{n2^k} = \frac{17^2}{3 \times 2^2} = 24,1$$

$$SS_B = \frac{C_B^2}{n2^k} = \frac{(-1)^2}{3 \times 2^2} = 0,1$$

$$SS_{AB} = \frac{C_{AB}^2}{n2^k} = \frac{(-117)^2}{3 \times 2^2} = 1140,8$$

4.7.2 2^k návrh pre $k \geq 3$ faktorov

Ciele výučby

- ☐ Identifikovať ortogonálne kontrasty v 2^k návrhu.
- ☐ Odhadnúť hlavné účinky a interakčné účinky v 2^k faktoriálnom návrhu.

Ortogonalne kontrasty 2^k návrhu

Ako sa uvádza v analýze rozptylu pre 2^2 návrh, ortogonálne kontrasty sú užitočné aj v analýze 2^k návrhu. Účinky faktorov, ich interakcií a zodpovedajúcich súm štvorcov možno vypočítať pomocou ortogonálnych kontrastov:

$$\text{Účinok} = \frac{\text{Kontrast}}{n2^{k-1}} \quad (4.18)$$

$$SS = \frac{(\text{Kontrast})^2}{n2^k} \quad (4.19)$$

Pre stanovenie ortogonálnych kontrastov 2^k návrhu systematickým spôsobom sa použije tabuľka plus a mínus znakov (pozri Tab. 4.6 pre 2^3 návrh). Táto tabuľka zahŕňa stĺpce kombinácie úrovní faktorov, identít, hlavné účinky a interakcie. V stĺpci hlavného účinku znak plus (mínus) naznačuje vysokú (nízku) úroveň zodpovedajúceho faktora pre stav spracovania, napr. v stĺpci hlavného účinku A plus je priradený ku kombinácii úrovne faktora ac, pretože úroveň A je vysoká. Hneď, ako sú znaky hlavných účinkov stanovené, znaky každého stĺpca interakcie sa určia vynásobením súvisiacich stĺpcov riadok po riadku (napr. $AB = A \times B$). Okrem stĺpca identity každý stĺpec obsahuje rovnaký počet plus a mínus znakov.

Hlavné účinky, účinky interakcií a ich súčty štvorcov sa vypočítajú pomocou znakov v tabuľke. Napríklad v Tab. 4.6, keď $n = 2$ hlavný účinok A a zodpovedajúci súčet štvorcov sa stanovujú takto:

$$A = \frac{C_A}{n2^{k-1}} = \frac{a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc}{2 \times 2^{3-1}} \quad (4.20)$$

$$SS_A = \frac{C_A^2}{n2^k} = \frac{[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]^2}{2 \times 2^3} \quad (4.21)$$

Tab. 4.6 Znaky pre ortogonálne kontrasty v 2^3 návrhu

Kombinácie úrovní faktora	Účinky							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	−	−	+	−	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	+	−	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	−	+	+	−	−
bc	+	−	+	−	+	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Príklad 4.3 (Výpočet účinkov a súčtu štvorcov; 2^k návrh)

Sila stisku rukoväti sa meria tak, že na rukoväti skúmajú účinky troch faktorov návrhu rukoväte: priemer (A), uhol (B) a hmotnosť (C). Dve úrovne sú vybrané pre každý faktor a jedna replikácia ($n = 1$). Merania sily stisku (jednotka: kg) sú tieto:

Kombinácie úrovní faktorov							
(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc
35	40	31	33	36	42	30	34

Odhadneme hlavné účinky a účinky interakcií tohto 2^3 návrhu a vypočítame zodpovedajúce sumy štvorcov.

Ortogonálne kontrasty návrhu 2^3 pre dáta sily stisku sú

$$\begin{aligned} C_A &= a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc = \\ &= 40 + 33 + 42 + 34 - 35 - 31 - 36 - 30 = 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_B &= b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac = \\ &= 31 + 33 + 30 + 34 - 35 - 40 - 36 - 42 = -25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{AB} &= (1) + ab + c + abc - a - b - ac - bc = \\ &= 35 + 33 + 36 + 34 - 40 - 31 - 42 - 30 = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_C &= c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab = \\ &= 36 + 42 + 30 + 34 - 35 - 40 - 31 - 33 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{AC} &= (1) + b + ac + abc - a - ab - c - bc = \\ &= 35 + 31 + 42 + 34 - 40 - 33 - 36 - 30 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{BC} &= (1) + a + bc + abc - b - ab - c - ac = \\ &= 35 + 40 + 30 + 34 - 31 - 33 - 36 - 42 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{ABC} &= a + b + c + abc - (1) - ab - ac - bc = \\ &= 40 + 31 + 36 + 34 - 35 - 33 - 42 - 30 = 1 \end{aligned}$$

To znamená, že odhady hlavných účinkov a účinkov interakcie sú tieto:

$$A = \frac{C_A}{n2^{k-1}} = \frac{17}{1 \times 2^{3-1}} = 4,25 \quad B = \frac{C_B}{n2^{k-1}} = \frac{-25}{1 \times 2^{3-1}} = -6,25$$

$$C = \frac{C_C}{n2^{k-1}} = \frac{3}{1 \times 2^{3-1}} = 0,75 \quad AB = \frac{C_{AB}}{n2^{k-1}} = \frac{-5}{1 \times 2^{3-1}} = -1,25$$

$$AC = \frac{C_{AC}}{n2^{k-1}} = \frac{3}{1 \times 2^{3-1}} = 0,75 \quad BC = \frac{C_{BC}}{n2^{k-1}} = \frac{-3}{1 \times 2^{3-1}} = -0,75$$

$$ABC = \frac{C_{ABC}}{n2^{k-1}} = \frac{1}{1 \times 2^{3-1}} = 0,25$$

Zodpovedajúce sumy štvorcov sú potom tieto:

$$SS_A = \frac{C_A^2}{n2^k} = \frac{17^2}{1 \times 2^3} = 36,13 \quad SS_B = \frac{C_B^2}{n2^k} = \frac{(-25)^2}{1 \times 2^3} = 78,13$$

$$SS_C = \frac{C_C^2}{n2^k} = \frac{3^2}{1 \times 2^3} = 1,13 \quad SS_{AB} = \frac{C_{AB}^2}{n2^k} = \frac{(-5)^2}{1 \times 2^3} = 3,13$$

$$SS_{AC} = \frac{C_{AC}^2}{n2^k} = \frac{3^2}{1 \times 2^3} = 1,13 \quad SS_{BC} = \frac{C_{BC}^2}{n2^k} = \frac{(-3)^2}{1 \times 2^3} = 1,13$$

$$SS_{ABC} = \frac{C_{ABC}^2}{n2^k} = \frac{1^2}{1 \times 2^3} = 0,13$$

4.7.3 Jedna replikácia v 2^k návrhu

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť metódu na analyzovanie dvojfaktorového faktoriálneho návrhu s jedinou replikáciou.
- ☐ Identifikovať významnosť interakcií vyšších rádov v 2^k návrhu pomocou normálneho pravdepodobnostného grafu.

2^k návrh s jednou replikáciou

Rovnako ako faktoriálny návrh s jednou replikáciou (uvedené v podkapitole 4.4), predpoklad je potrebný pre nereplikovaných 2^k návrh, aby mal súčet štvorcov chyby. Interakcie vyššie ako interakcie druhého rádu sa často predpokladajú zanedbateľné a použijú sa ako súčet štvorcov chyby. Opatrnosť je potrebné uplatniť pri skontrolovaní, či je interakcia použitá pre chybu je významná.

Významné vysoké poradia interakcií môžu byť identifikované tým, že skonštruujeme normálny pravdepodobnostný graf hlavných účinkov a účinkov interakcií. Zanedbateľné účinky budú normálne rozdelené so strednou hodnotou nula a rozptylom σ^2 , a preto ležia pozdĺž priamky normálneho pravdepodobnostného grafu, zatiaľ čo významné účinky sa budú odchyľovať od priamky.

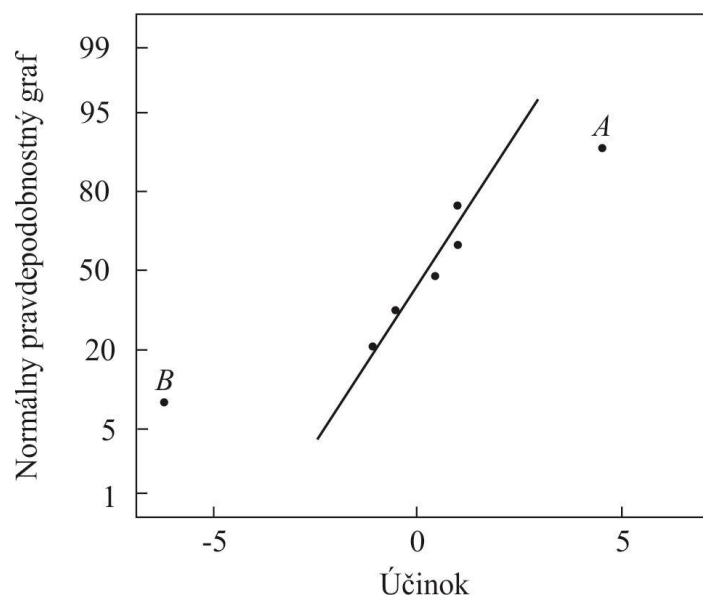
Príklad 4.4 (Normálny pravdepodobnostný graf účinkov)

Zoberme do úvahy experiment pre silu stisku s jednou replikáciou v príklade 4.3. Odhady účinkov hlavných a interakcií sú tieto:

$$A = 4,25 \quad B = -6,25 \quad C = 0,75 \quad AB = -1,25 \quad AC = 0,75 \quad BC = -0,75 \quad ABC = 0,25$$

Skonštruujeme normálny pravdepodobnostný graf týchto účinkov a overíme či interakcia tretieho rádu ABC je významne dôležitá.

Normálny pravdepodobnostný graf hlavných účinkov a účinkov interakcií naznačuje, že interakcie druhého a tretieho rádu sú nevýznamné. Takto ABC môže byť použitý ako chybový člen pre testovanie významnosti hlavného účinku a ďalších účinkov interakcií druhého rádu.



4.8 Blokovanie a spolupôsobenie v 2^k návrhu

Ciele výučby

- ☐ Konštruovať 2^p blokov pre 2^k návrh.
- ☐ Odhadnúť hlavné účinky a interakčné účinky v 2^k návrhu s 2^p blokmi.

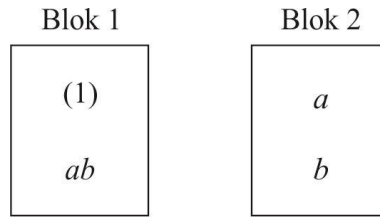
2^k blokový návrh a spolupôsobenie

Niekedy sa všetky kombinácie úrovní faktorov nedajú spustiť za homogénnych podmienok pre rôzne dôvody. Predpokladajme napríklad, že 2^2 návrh (zo 4 kombináciami úrovní faktorov) vyžaduje celkom 16 hodín (4 hodiny pre každú kombináciu) na spustenie jednej replikácie. Tento experiment sa vykonáva v dvoch dňoch (blokoch) a randomizácia je obmedzená v každom bloku. Takýto druh faktoriálneho návrhu sa nazýva **2^k návrh s 2^p blokmi**, kde $p < k$.

Niektoré účinky spolupôsobia s blokmi v 2^k blokovom návrhu. Ako príklad Obr. 4.4 zobrazuje 2^2 blokový návrh s interakciou AB , ktorá spolupôsobí s blokmi. V tomto blokovom návrhu kontrasty (C) na odhadnutie účinkov A , B a AB sú

$$C_A = ab + a - b - (1) \quad C_B = ab + b - a - (1) \quad C_{AB} = ab + (1) - a - b$$

Kontrast AB je však rovnaký ako blokový účinok a tak AB spolupôsobí s blokmi.



Obr. 4.5 2^2 blokový návrh

Konštrukcia blokov

Po prvé, ak chceme konštruovať 2^k návrh s 2^p blokmi, p účinkov by malo byť vybraných pre spolupôsobenie. Všeobecne sú interakcie vyššieho rádu zvolené tak, aby spolupôsobili s blokmi; hlavné účinky a účinky interakcií nižšieho rádu sú menej pravdepodobné, že budú vybrané vzhľadom na ich dôležitosť. Okrem p účinkov, $2^p - p - 1$ účinkov (interakcie p účinkov nazývané **zovšeobecnené interakcie**) spolupôsobí s blokmi. Napríklad v 2^3 návrhu s 2^2 blokmi, ak AB a BC sú vybrané pre spolupôsobenie, ich všeobecná interakcia AC ($= AB \times BC = AB^2C$ pretože $B^2 = I$) je tiež spolupôsobiaci. Je potrebné dbať na to, aby sa nepoplietli účinky, ktoré sú predmetom záujmu.

Po druhé, na základe p vybraných účinkov **definujúce kontrasty** (L) sú formulované takto:

$$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k$$

kde

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{ak } i\text{-tý faktor nemá zmiešaný účinok} \\ 1, & \text{ak } i\text{-tý faktor má zmiešaný účinok} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{ak } i\text{-tý faktor nie je v kombinácii úrovní faktorov} \\ 1, & \text{ak } i\text{-tý faktor je v kombinácii úrovní faktorov} \end{cases}$$

Napríklad v prípade, že AB a BC sú vybrané pre spolupôsobenie v 2^3 návrhu s 2^2 blokmi, dva definujúce kontrasty sú stanovené z AB a BC takto:

$$L_1 = x_1 + x_2 \quad \text{a} \quad L_2 = x_2 + x_3$$

kde

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{ak } i\text{-tý faktor nie je v kombinácii úrovní faktorov} \\ 1, & \text{ak } i\text{-tý faktor je v kombinácii úrovní faktorov} \end{cases}$$

A konečne, kombinácia úrovní faktorov, ktoré majú rovnaké hodnoty $L \pmod{2}$ budú umiestnené v rovnakom bloku. Napríklad pre 2^3 blokový návrh s $L_1 = x_1 + x_2$ a $L_2 = x_2 + x_3$, štyri bloky kombinácií úrovní faktorov sa stanoví podľa hodnôt $L_1 \pmod{2}$ a $L_2 \pmod{2}$ takto:

Kombinácie úrovní faktora	L_1 (modul 2) [$x_1 + x_2$ (modul 2)]	L_2 (modul 2) [$x_1 + x_2$ (modul 2)]	Blok č.
(1)	(0+0) (modul 2) = 0	(0+0) (modul 2) = 0	1
a	(1+0) (modul 2) = 1	(0+0) (modul 2) = 0	2
b	(0+1) (modul 2) = 1	(1+0) (modul 2) = 1	3
ab	(1+1) (modul 2) = 0	(1+0) (modul 2) = 1	4
c	(0+0) (modul 2) = 0	(0+1) (modul 2) = 1	4
ac	(1+0) (modul 2) = 1	(0+1) (modul 2) = 1	3
bc	(0+1) (modul 2) = 1	(1+1) (modul 2) = 0	2
abc	(1+1) (modul 2) = 0	(1+1) (modul 2) = 0	1

ANOVA

Analýza rozptylu za použitia ortogonálnych kontrastov uvedená v podkapitole 4.7.2 je aplikovateľná na 2^k blokový návrh s výnimkou spracovania spolupôsobiacich účinkov. Spolupôsobiace účinky sú znova definované ako blokové účinky a význam blokových účinkov sa môže testovať porovnaním s priemerným štvorcom chyby. Pripomeňme, že v prípade experimentu s jednou replikáciou interakcie vyššieho rádu sa môžu použiť ako priemerný štvorec chyby.

Príklad 4.5

Skúmajú sa účinky uhla operadla (A) a umiestnenie bedrovej opierky chrbtice (B) na tlak na platničku (jednotka: N) v dolnej časti chrbta. Dva uhly operadla (90° a 120°) a dve bedrové opierky chrbtice (1 a 5 cm) sa vybrali v experimente.

Konštrukcia blokov; 2^k blokový návrh

Predpokladajme, že štyri kombinácie úrovní faktorov nemôžu byť skúmané za rovnakých podmienok. Vytvoríme dva bloky s AB spolupôsobiacim pre návrh 2^2 .

Určujúci kontrast je vyrobený z AB :

$$L_1 = x_1 + x_2$$

kde

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{ak } i\text{-tý faktor nie je v kombinácii úrovní faktorov} \\ 1, & \text{ak } i\text{-tý faktor je v kombinácii úrovní faktorov} \end{cases}$$

Štyri kombinácie úrovní faktorov sú priradené do dvoch blokov podľa hodnoty L takto:

Kombinácie úrovní faktora	L (modul 2) [$x_1 + x_2$ (modul 2)]	Blok č.
(1)	(0+0) (modul 2) = 0	1
a	(1+0) (modul 2) = 1	2
b	(0+1) (modul 2) = 1	2
ab	(1+1) (modul 2) = 0	1

Výpočet účinkov a súčtu štvorcov

Nasledujúce dáta tlaku na platničku sú tieto:

$$(1) = 620, \quad a = 320, \quad b = 380 \quad a \quad ab = 155$$

Vypočítame sumy štvorcov pre blokový návrh 2^2 s AB spolupôsobiacim.

Ortogonalne kontrasty návrhu 2^2 pre dáta tlaku na platničku sú

$$C_A = a + ab - b - (1) = 320 + 155 - 380 - 620 = -525$$

$$C_B = b + ab - a - (1) = 380 + 155 - 320 - 620 = -405$$

$$C_{AB} = ab + (1) - a - b = 155 + 620 - 320 - 380 = 75$$

Odhady účinkov sú:

$$A = \frac{C_A}{n2^{k-1}} = \frac{-525}{2^{2-1}} = -262,5$$

$$B = \frac{C_B}{n2^{k-1}} = \frac{-405}{2^{2-1}} = -202,5$$

$$\text{Účinok bloku} = AB = \frac{C_{AB}}{n2^{k-1}} = \frac{75}{2^{2-1}} = 37,5$$

Zodpovedajúce sumy štvorcov sú tieto:

$$SS_A = \frac{C_A^2}{n2^k} = \frac{(-525)^2}{1 \times 2^2} = 68906,3$$

$$SS_B = \frac{C_B^2}{n2^k} = \frac{(-405)^2}{1 \times 2^2} = 41006,3$$

$$SS_{\text{Blok}} = SS_A = \frac{C_{AB}^2}{n2^k} = \frac{75^2}{1 \times 2^2} = 1406,3$$

4.9 Redukované replikácie v 2^k faktoriálnom návrhu

4.9.1 Redukovaná polovica v 2^k návrhu

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť použitie redukovaného faktoriálneho návrhu.
- ☐ Vysvetliť termíny *generátor*, *určujúci vzťah*, *hlavná redukcia*, *alternatívna redukcia*, *zmiešanie* a *oddelenie*.
- ☐ Konštruovať 2^{k-1} návrh.
- ☐ Odhadnúť hlavné účinky a interakčné účinky v 2^{k-1} návrhu.
- ☐ Identifikovať zmiešanú štruktúru v 2^{k-1} návrhu.

Redukovaný faktoriálny návrh 2^{k-p}

Redukcia $1/2^p$ ($p < k$) návrh 2^k (označená ako 2^{k-p}) môže bežať, ak interakcie vyššieho rádu sú zanedbateľné. Keď sa počet faktorov ($= k$) zvyšuje, počet behov rastie geometrickým radom, avšak veľká časť behov sa použije na odhad interakcií vyššieho rádu, ktoré sú často zanedbateľné. Napríklad 2^5 návrh ($k =$ päť faktorov), ktorý vyžaduje 32 behov, z 31 stupňov voľnosti sa použije 5, 10 a 16 stupňov voľnosti na odhadnutie hlavných účinkov dvojfaktorových interakcií a interakcií trojfaktorových a vyšších rádov. Keď interakcie trojfaktorové a vyšších rádov sú zanedbateľné, 2^{5-1} redukovaný faktoriálny návrh (ktorý vyžaduje 16 behov) môže byť použitý na analýzu hlavných účinkov a interakcií nižšieho rádu z piatich faktorov.

Konštrukcia 2^{k-1} návrhu

Návrh 2^{k-1} je konštruovaný pomocou vybraných kombinácií úrovní faktorov, ktoré majú rovnaké znaky (napr. plus) v zvolenom stĺpci účinkov (tzv. **generátor**) v tabuľke znakov pre 2^k návrh. Napríklad 2^{3-1} návrh môže byť vytvorený vybraním štyroch kombinácií úrovní faktorov (a , b , c a abc), ktoré majú znak plus v stĺpci ABC v tabuľke znakov návrhu 2^3 (Tab. 4.7). Redukcia so znamienkom plus sa nazýva **hlavná redukcia** a iná redukcia sa nazýva **alternatívna redukcia**.

Pretože stĺpec rovnosti má všetky znamienka plus, 2^{k-1} návrh má nasledujúce vzťahy (tzv. **určujúce vzťahy**) medzi stĺpcom rovnosti a stĺpcom generátora: znaky stĺpca generátora sú rovnaké ako znaky stĺpca rovnosti pre hlavnú redukciu, naopak je to pre alternatívnu redukciu. Napríklad 2^{3-1} návrh s generátorom ABC má určujúci vzťah $I = ABC$ pre hlavnú redukciu a $I = -ABC$ pre alternatívnu redukciu.

Tab. 4.7 Znaký pre 2^3 návrh

Kombinácie úrovní faktora	Účinky							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	−	−	+	−	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	+	−	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	−	+	+	−	−
bc	+	−	+	−	+	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Ďalšou metódou pre konštrukciu 2^{k-1} návrhu je táto:

Krok 1: Pripravte tabuľku znakov faktoriálneho návrhu s $k-1$ faktormi (tzv. **základný návrh**). Napr. pre 2^{3-1} návrh v Tab. 4.8 základný návrh začína s dvoma faktormi (A a B).

Krok 2: Pridajte k -tý faktor a identifikujte zodpovedajúce interakciu pomocou definujúceho vzťahu redukovaného návrhu.

$$\text{Např. } I = ABC \text{ z Tab. 4.8} \Rightarrow CI = ABC^2 \Rightarrow C = AB \text{ (pre } C^2 = I)$$

Krok 3: Určite znaky interakcie pre stĺpec k -tého faktora.

Krok 4: Identifikujte kombinácie úrovní faktorov 2^{k-1} návrhu riadok po riadku.

Tab. 4.8 Konštrukcia 2^{3-1} návrh s $I = ABC$

Beh	Základný návrh kombinácie úrovní faktora	A	B	$C = AB$	Redukovaný návrh kombinácie úrovní faktora
1	(1)	−	−	+	c
2	a	+	−	−	a
3	b	−	+	−	b
4	ab	+	+	+	abc

Odhadovanie účinkov

V 2^{3-1} návrhu s $I = ABC$ (hlavná redukcia z Tab. 4.7), lineárne kombinácie, ktoré sa použijú na odhadnutie hlavných účinkov a interakcií, majú tieto vzťahy:

$$l_A = \frac{1}{2}[a - b - c + abc] = l_{BC}$$

$$l_B = \frac{1}{2}[-a + b - c + abc] = l_{AC}$$

$$l_C = \frac{1}{2}[-a - b + c + abc] = l_{AB}$$

Tieto vzťahy ukazujú, že každá lineárna kombinácia odhaduje hlavný účinok aj interakcie:

$$l_A = A + BC$$

$$l_B = B + AC$$

$$l_C = C + AB$$

Na rozdiel od 2^{3-1} návrhu s $I = -ABC$ (alternatívna redukcia z Tab. 4.7) produkuje nasledujúce odhady hlavných účinkov a interakcií:

$$l'_A = \frac{1}{2}[-(1) + ab + ac - bc] = A - BC$$

$$l'_B = \frac{1}{2}[-(1) + ab - ac + bc] = B - AC$$

$$l'_C = \frac{1}{2}[-(1) - ab + ac + bc] = C - AB$$

Nie je možné rozlišovať medzi A a BC , B a AC , C a AB . Teda za predpokladu, že interakcie druhého rádu sú zanedbateľné, lineárne kombinácie l_A (alebo l'_A), l_B (alebo l'_B) a l_C (alebo l'_C) sa použijú na odhadnutie hlavných účinkov.

Normálny pravdepodobnostný graf môže byť použitý na identifikáciu významných interakcií (pozri podkapitolu 4.7.3). Zanedbateľné interakcie budú ležať na priamke v normálnom pravdepodobnostnom grafe, zatiaľ čo významné interakcie sa budú odchyľovať od priamky.

Zmiešanie účinkov (Aliasing)

V redukovanom faktoriálnom návrhu niektoré účinky nemožno odhadnúť samostatne a tieto účinky sa nazývajú **zmiešané účinky** (aliases). Napríklad v 2^{3-1} návrhu s určujúcim vzťahom $I = ABC$ sú A a BC , B a AC , C a AB zmiešané účinky (aliased) medzi sebou.

Zmiešanie účinku sa zistí vynásobením určujúceho vzťahu účinkom. Napríklad 2^{3-1} návrh s určujúcim vzťahom $I = ABC$ má takúto zmiešanú (alias) štruktúru:

$$A = A \cdot I = A \cdot ABC = A^2BC = BC \quad \text{pre} \quad A^2 = I$$

$$B = B \cdot I = B \cdot ABC = AB^2C = AC \quad \text{pre} \quad B^2 = I$$

$$C = C \cdot I = C \cdot ABC = ABC^2 = AB \quad \text{pre} \quad C^2 = I$$

Je to bežná prax pre vytvorenie redukovaného faktoriálneho návrhu, ktorý zmiešava (aliases) hlavné účinky a interakcie nižšieho rádu s interakciami vyššieho rádu (ktoré sú väčšinou zanedbateľné).

Oddelenie účinkov (Dealiasing)

Postupnosti redukovaných faktoriálnych návrhov môžu byť vykonané na identifikáciu podrobnejších informácií o interakciách. Napríklad 2^{3-1} návrh s určujúcim vzťahom $I = ABC$ zmiešava (aliases) hlavné účinky s dvojfaktorovými interakcií za predpokladu, že tieto interakcie sú zanedbateľné. Avšak ak tento predpoklad je neistý, alternatívna redukcia môže bežať po spustení hlavnej redukcie.

Pomocou dát z hlavnej redukcie a alternatívnej redukcie môžu byť odhadnuté hlavné účinky a interakcie separátne (tzv. **oddelenie účinkov (dealiasing)**) takto:

$$\frac{1}{2}(l_A + l'_A) = \frac{1}{2}(A + BC + A - BC) = A \quad \frac{1}{2}(l_A - l'_A) = BC$$

$$\frac{1}{2}(l_B + l'_B) = \frac{1}{2}(B + AC + B - AC) = B \quad \frac{1}{2}(l_B - l'_B) = AC$$

$$\frac{1}{2}(l_C + l'_C) = \frac{1}{2}(C + AB + C - AB) = C \quad \frac{1}{2}(l_C - l'_C) = AB$$

Projektovania 2^{k-1} návrhu

Ak je jeden alebo viac faktorov z 2^{k-1} návrhu vylúčených kvôli ich nedostatočnému významu, bude redukovaný návrh premietnutý do úplného faktoriálneho návrhu na podrobné preskúmanie aktívnych faktorov. Napríklad 2^{3-1} návrh bude premietnutý do 2^2 návrhu, keď jeden faktor je zrušený.

Príklad 4.6

Štúdia skúma účinky štyroch faktorov na maximálnu prípustnú hmotnosť (MPH; jednotka: kg) pri zdvíhu: šírka objektu (A), zdvíhacie úrovně (B), zdvíhacie vzdialenosti (C) a zdvíhacie frekvencie (D). Návrh 2^{4-1} s určujúcim vzťahom $I = ABCD$ sa použil na získanie týchto dát:

Beh	A	B	C	$D = ABC$	Kombinácie úrovní faktora	MPH
1	–	–	–	–	(1)	24
2	+	–	–	+	ad	32
3	–	+	–	+	bd	24
4	+	+	–	–	ab	16
5	–	–	+	+	cd	37
6	+	–	+	–	ac	15
7	–	+	+	–	bc	17
8	+	+	+	+	$abcd$	18

Zmiešaná (Alias) štruktúra; 2^{k-1} návrh

Určite zmiešanú (alias) štruktúru tohto 2^{4-1} návrhu s určujúcim vzťahom $I = ABCD$.

Návrh 2^{4-1} s určujúcim vzťahom $I = ABCD$ má tieto zmiešané (alias) vzťahy:

$$A = A \cdot ABCD = A^2BCD = BCD$$

$$B = B \cdot ABCD = AB^2CD = ACD$$

$$C = C \cdot ABCD = ABC^2D = ABD$$

$$D = D \cdot ABCD = ABCD^2 = ABC$$

$$AB = AB \cdot ABCD = A^2B^2CD = CD$$

$$AC = AC \cdot ABCD = A^2BC^2D = BD$$

$$AD = AD \cdot ABCD = A^2BCD^2 = BC$$

Odhadovanie účinkov

Odhadnime účinky faktorov. Ktoré účinky sú veľké?

Hlavné účinky a interakcie sú odhadnuté takto:

$$l_A = A + BCD = \frac{1}{4}(-24 + 32 - 24 + 16 - 37 + 15 - 17 + 18) = -5,25$$

$$l_B = B + ACD = \frac{1}{4}(-24 - 32 + 24 + 16 - 37 - 15 + 17 + 18) = -8,25$$

$$l_C = C + ABD = \frac{1}{4}(-24 - 32 - 24 - 16 + 37 + 15 + 17 + 18) = -2,25$$

$$l_D = D + ABC = \frac{1}{4}(-24 + 32 + 24 - 16 + 37 - 15 - 17 + 18) = 9,75$$

$$l_{AB} = AB + CD = \frac{1}{4}(24 - 32 - 24 + 16 + 37 - 15 - 17 + 18) = 1,75$$

$$l_{AC} = AC + BD = \frac{1}{4}(24 - 32 + 24 - 16 - 37 + 15 - 17 + 18) = -5,25$$

$$l_{AD} = AD + BC = \frac{1}{4}(24 + 32 - 24 - 16 - 37 - 15 + 17 + 18) = -0,25$$

Všimnime si, že interakcie sa odhadujú vytvorením stĺpcov AB , AC a AD v tabuľke znakov.

Účinky A , B , D a AC sú pomerne veľké.

4.9.2 Menšie redukcie: Redukovaný faktoriálny návrh 2^{k-p}

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť podmienky návrhov rozhodnutí III, IV a V v redukovanom faktoriálnom návrhu.
- ☐ Konštruovať 2^{k-p} redukovaný faktoriálny návrh s určeným návrhom rozhodnutia.
- ☐ Identifikovať zmiešanú štruktúru v redukovanom faktoriálnom návrhu.

Návrh rozhodnutia (riešenia)

Termín *návrh rozhodnutia (riešenia)* naznačuje vzor zmiešaných účinkov (aliases) v redukovanom faktoriálnom návrhu. Vzory zmiešaných účinkov (alias) rozhodnutí III, IV a V sa vzájomne porovnávajú v Tab. 4.9. Rozhodnutie návrhu III (ako je 2^{3-1} návrh s určujúcim vzťahom $I = ABC$) nemá žiadne zmiešané (alias) hlavné účinky s ostatnými hlavnými účinkami, ale zmiešanie (aliases) hlavných účinkov s dvojfaktorovými interakciami a niektoré dvojfaktorové interakcie medzi sebou. Ďalej, rozhodnutie návrhu IV (ako je 2^{4-1} návrh s určujúcim vzťahom $I = ABCD$) nemá žiadne zmiešanie (alias) hlavných účinkov s inými hlavnými účinkami alebo dvojfaktorovými interakciami, ale zmiešané (aliases) dvojfaktorové interakcie s inými dvojfaktorovými interakciami. Napokon, rozhodnutie návrhu V (ako je 2^{5-1} návrh s určujúcim vzťahom $I = ABCDE$) nemá žiadne zmiešanie (alias) hlavných účinkov a dvojfaktorových interakcií s inými hlavnými účinkami a dvojfaktorovými interakciami. Rozhodnutie redukovaného faktoriálneho návrhu sa uvádza s indexom (napr. 2^{3-1}_{III} označuje 2^{3-1} návrh s rozhodnutím III).

Keď návrh rozhodnutia sa stáva vyšší, produkuje ďalšie informácie o interakcii. Napríklad rozhodnutie návrhu III poskytuje informácie len o hlavných účinkoch, zatiaľ čo rozhodnutie návrhu IV poskytuje informácie o dvojfaktorových interakciách aj o hlavných účinkoch. Rozhodnutia návrhov III a IV sa často používajú v experimentoch na monitorovanie faktorov.

Tab. 4.9 Zmiešanie (Alias) vzorov rozhodnutí III, IV a V návrhov
(×: nie sú zmiešané (alias); O: sú zmiešané (aliased))

	Hlavné účinky	Dvojfaktorové interakcie
Hlavné účinky	× (III)	O (III)
	× (IV)	× (IV)
	× (V)	× (V)
Dvojfaktorové interakcie	O (III)	O (III)
	× (IV)	O (IV)
	× (V)	× (V)

Konštrukcia 2^{k-p} návrhu

Na dosiahnutie určeného rozhodnutia pre redukovaný návrh s k faktormi by sa mal vybrať vhodný súbor p generátorov. Tabuľka 14-29 v [20] poskytuje odporúčané generátory pre rôzne 2^{k-p} návrhy ($k \leq 15$), návrh rozhodnutí (III, IV a V) a behov ($n \leq 128$). Napríklad tabuľka odporúča dva návrhy generátorov ($D = AB$ a $E = AC$, ktoré sú ekvivalentné s navrhnutým vzťahom $I = ABD = ACE$) pre 2_{III}^{5-2} návrh s $n = 8$ behmi.

S odporúčanými generátormi redukovaného návrhu je určený **kompletný určujúci vzťah**. Kompletný určujúci vzťah je formulovaný začlenením zovšeobecnených interakcií generátorov (identifikovateľných vynásobením generátorov navzájom; $2^p - p - 1$ zovšeobecnené interakcie sú vyrobené pomocou p generátorov). Napríklad dva ($p = 2$) odporúčané generátory, ABD a ACE , návrhu 2_{III}^{5-2} vytvára jednu ($= 2^p - p - 1 = 2^2 - 2 - 1$) zovšeobecnenú interakciu:

$$ABD \cdot ACE = A^2 BCDE = BCDE$$

Teda kompletné definovanie vzťahu pre návrh 2_{III}^{5-2} je

$$I = ABD = ACE = BCDE$$

Ako v prípade konštrukcie 2^{k-1} návrhu je konštrukcia 2^{k-p} návrhu takáto (pozri Tab. 4.10):

Krok 1: Pripravte tabuľku znakov faktoriálneho návrhu s $k - p$ faktormi (základný návrh).

Krok 2: Pridajte p stĺpcov pre odporúčané návrhy generátorov.

Krok 3: Určite znaky p stĺpcov s navrhnutými generátormi.

Krok 4: Identifikujte kombinácie úrovni faktorov 2^{k-p} návrhu riadok po riadku.

Tab. 4.10 Konštrukcia 2_{III}^{5-2} návrhu s $I = ABD = ACE = BCDE$

Beh	A	B	C	$D = AB$	$E = AC$	Redukovaný návrh kombinácie úrovni faktora
1	–	–	–	+	+	<i>de</i>
2	+	–	–	–	–	<i>a</i>
3	–	+	–	–	+	<i>be</i>
4	+	+	–	+	–	<i>abd</i>
5	–	–	+	+	–	<i>cd</i>
6	+	–	+	–	+	<i>ace</i>
7	–	+	+	–	–	<i>bc</i>
8	+	+	+	+	+	<i>abcde</i>

Zmiešaná (Alias) štruktúra 2^{k-p} návrhu

Zmiešaná (Alias) štruktúra 2^{k-p} návrhu sa nájde vynásobením každého účinku s úplným definujúcim vzťahom. Napríklad 2_{III}^{5-2} návrh s $I = ABD = ACE = BCDE$ má tieto zmiešané (alias) štruktúry:

$$A = BD = CE = ABCDE$$

$$BC = ACD = ABE = DE$$

$$B = AD = ABCE = CDE$$

$$CD = ABC = ADE = BE$$

$$C = ABCD = AE = BDE$$

$$D = AB = ACDE = BCE$$

$$E = ABDE = AC = BCD$$

Keď počet uvažovaných faktorov je veľký (povedzme $k \geq 5$), interakcie vyššieho rádu (povedzme tretieho alebo vyššieho rádu) sa považujú za zanedbateľné, čo značne zjednodušuje zmiešanú (alias) štruktúru. Napríklad zmiešaná (alias) štruktúra 2_{III}^{5-2} návrhu s určujúcimi vzťahmi $I = ABD = ACE = BCDE$ sa dá takto zjednodušiť za predpokladu, že interakcie obsahujúce viac ako tri faktory sa považujú za zanedbateľné:

$$A = BD = CE \qquad BC = ACD = ABE = DE$$

$$B = AD = CDE \qquad CD = ABC = ADE = BE$$

$$C = AE = BDE$$

$$D = AB = BCE$$

$$E = AC = BCD$$

Príklad 4.7 (Konštrukcia 2^{k-p} návrhu)

Konštrukcia 2_{IV}^{6-2} redukovaného faktoriálneho návrhu

Generátory 2_{IV}^{6-2} návrhu $E = ABC$ a $F = BCD$ dajú určujúci vzťah $I = ABCE = BCDF$. Dva generátory produkujú jednu zovšeobecnenú interakciu:

$$ABCE \cdot BCDF = AB^2C^2DEF = ADEF$$

Teda kompletne definovanie 2_{IV}^{6-2} návrhu je

$$I = ABCE = BCDF = ADEF$$

Pomocou dvoch návrhov generátorov sa 2_{IV}^{6-2} návrh s $I = ABCE = BCDF = ADEF$ stanoví takto:

Beh	A	B	C	D	$E = ABC$	$F = BCD$	Redukovaný návrh kombinácie úrovni faktora
1	–	–	–	–	–	–	(1)
2	+	–	–	–	+	–	<i>ae</i>
3	–	+	–	–	+	+	<i>bef</i>
4	+	+	–	–	–	+	<i>abf</i>
5	–	–	+	–	+	+	<i>cef</i>
6	+	–	+	–	–	+	<i>acf</i>
7	–	+	+	–	–	–	<i>bc</i>
8	+	+	+	–	+	–	<i>abce</i>
9	–	–	–	+	–	+	<i>df</i>
10	+	–	–	+	+	+	<i>adef</i>
11	–	+	–	+	+	–	<i>bde</i>
12	+	+	–	+	–	–	<i>abd</i>
13	–	–	+	+	+	–	<i>cde</i>
14	+	–	+	+	–	–	<i>acd</i>
15	–	+	+	+	–	+	<i>bcdf</i>
16	+	+	+	+	+	+	<i>abcdef</i>

Zmiešaná (Alias) štruktúra

Identifikujeme zmiešania (aliases) redukovaného návrhu za predpokladu, že interakcie z viac ako tromi faktormi sa zanedbajú.

Za predpokladu, že štvorfaktorové alebo vyššieho rádu interakcie sa zanedbajú, nasledujúce zmiešania (aliases) možno nájsť vynásobením každého účinku s úplným určujúcim vzťahom 2_{IV}^{6-2} návrhu:

$$A = BCE = DEF$$

$$B = ACE = CDF$$

$$C = ABE = BDF$$

$$D = BCF = AEF$$

$$E = ABC = ADF$$

$$F = BCD = ADE$$

$$AB = CE$$

$$AC = BE$$

$$AD = EF$$

$$AE = BC = DF$$

$$AF = DE$$

$$BD = CF$$

$$BF = CD$$

5 NEPARAMETRICKÉ TESTY

V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali testovaním hypotéz o parametroch normálnych rozdelení. Predpokladali sme, že máme náhodný výber z normálneho rozdelenia, ktoré obsahuje jeden alebo dva neznáme parametre, a na základe tohto výberu sme vykonali test hypotézy. Takéto testy sa nazývajú *parametrické testy*.

Neparametrické testy nie sú založené na predpoklade daného tvaru rozdelenia, ale na všeobecnejších predpokladoch. Často sa iba predpokladá, že náhodný výber (jeho hodnoty sú namerané hodnoty) pochádza zo spojitého rozdelenia.

Vo veľkej skupine neparametrických testov sa namerané hodnoty nahrádzajú ich poradím. Predpokladajme, že namerané dáta $x_1, x_2, \dots, x_k$ sú realizácie náhodného výberu $X_1, X_2, \dots, X_n$ zo základného súboru so spojitým rozdelením. Každéj hodnote x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ možno priradiť *poradie* R_i t. j. poradové číslo v usporiadanom súbore nameraných dát. Niekedy sa môže stať (najčastejšie vplyvom zaokrúhľovania výsledkov meraní), že dve alebo viacej výberových hodnôt je rovnakých a vytvárajú tzv. *zhody*. Hodnotám, ktoré sú rovnaké priradíme ich priemerné poradie. Napríklad číslam 9, 6, 5, 9, 6, 7, 9, 2, 11 určíme poradie takto: $R_1 = 7$, $R_2 = 3,5$, $R_3 = 2$, $R_4 = 7$, $R_5 = 3,5$, $R_6 = 5$, $R_7 = 7$, $R_8 = 1$, $R_9 = 9$.

5.1 Znamienkový test

Predpokladajme, že namerané dáta $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú realizácie náhodného výberu $X_1, X_2, \dots, X_n$ zo spojitého rozdelenia. Nech $\tilde{x}$ medián tohto rozdelenia, potom platí

$$P(X_i < \tilde{x}) = P(X_i > \tilde{x}) = 1/2$$

Chceme testovať nulovú hypotézu $H_0: \tilde{x} = x_0$ proti alternatíve $H_1: \tilde{x} \neq x_0$, kde x_0 je dané číslo. Najskôr sa vytvoria rozdiely $X_1 - x_0$, $X_2 - x_0, \dots, X_n - x_0$. Ak je niektorý z rozdielov nulový, tak sa vynechá. Počet rozdielov s kladným znamienkom označme Y .

Ak platí hypotéza H_0 , náhodná premenná

$$Y - \text{počet kladných rozdielov} \quad (5.1)$$

má binomické rozdelenie s parametrami n a $1/2$, čo zapisujeme $Bi(n, 1/2)$. Ďalej postupujeme podľa toho, aký veľký je rozsah výberu.

Malý rozsah výberu ($n < 20$)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \tilde{x} = x_0 \qquad H_1 : \tilde{x} \neq x_0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

Y = počet rozdielov $X_i - x_0$ s kladným znamienkom

Krok 3: Stanovenie **kritických hodnôt pre α** .

$$k_1 : P(Y \leq k_1) \leq \alpha/2 \quad \text{a} \quad k_2 : P(Y \geq k_2) \leq \alpha/2$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$Y \leq k_1 \quad \text{alebo} \quad Y \geq k_2$$

Kritické hodnoty k_1, k_2 sú v Prílohe a platí pre ne vzťah $k_1 + k_2 = n$.

Veľký rozsah výberu ($n \geq 20$)

V tomto prípade môžeme použiť centrálnu limitnú vetu na štatistiku

$$U = \frac{2Y - n}{\sqrt{n}} \qquad (5.2)$$

ktorá má za platnosti nulovej hypotézy H_0 asymptotické (približné) normálne rozdelenie $N(0,1)$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \tilde{x} = x_0 \qquad H_1 : \tilde{x} \neq x_0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$U = \frac{2Y - n}{\sqrt{n}}$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$k_\alpha$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$|U| > k_\alpha$$

k_α je kritická hodnota rozdelenia $N(0,1)$.

Jednostranné testy sa konštruujú analogicky.

So znamienkovým testom sa často stretávame ako s párovým testom, t. j. namiesto náhodného výberu $X_1, X_2, \dots, X_n$ pracujeme s náhodným výberom $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$. Postupu-

jeme tak, že vytvoríme rozdiely $Z_i = X_i - Y_i$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ a ďalej postupujeme opísaným spôsobom.

Tab. 5.1 Znamienkové testy o mediáne

Rozsah	Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$n < 20$	$H_0: \tilde{x} = x_0 \quad H_1: \tilde{x} \neq x_0$	Y	$Y \leq k_1$ alebo $Y \geq k_2$
	$H_0: \tilde{x} = x_0 \quad H_1: \tilde{x} < x_0$		$Y < k: P(Y \leq k) \leq \alpha$
	$H_0: \tilde{x} = x_0 \quad H_1: \tilde{x} > x_0$		$Y \geq n - k$
$n \geq 20$	$H_0: \tilde{x} = x_0 \quad H_1: \tilde{x} \neq x_0$	$U = \frac{2Y - n}{\sqrt{n}}$	$ U > k_\alpha$
	$H_0: \tilde{x} = x_0 \quad H_1: \tilde{x} < x_0$		$U < -k_{2\alpha}$
	$H_0: \tilde{x} = x_0 \quad H_1: \tilde{x} > x_0$		$U > k_{2\alpha}$

Príklad 5.1

U ôsmich osôb bol nameraný krvný tlak pred pokusom a po pokuse. Dáta sú uvedené v tabuľke:

Osoba								
Tlak pred pokusom	130	185	162	136	147	181	138	139
Tlak po pokuse	139	190	175	135	155	175	158	149
Rozdiely	9	5	13	-1	8	-6	20	10

Pýtame sa, či pravdepodobnosť zvýšenia krvného tlaku po pokuse je rovnaká, ako pravdepodobnosť jeho zníženia. V tomto prípade máme $n = 8$, $Y = 6$. V Prílohe pre $n = 8$ a pre $\alpha = 0,05$ máme hodnoty $k_1 = 0$, $k_2 = 8$. Pretože Y leží medzi nimi, nemôžeme pomocou znamienkového testu na základe uvedených dát zamietnuť hypotézu, že zvýšenie krvného tlaku je rovnako pravdepodobné, ako jeho zníženie.

Teraz ukážeme postup testovania v krokoch.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: \tilde{x} = x_0 \quad H_1: \tilde{x} \neq x_0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$Y = 6$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre $\alpha = 0,05$** .

$$k_1 = 0: P(Y \leq k_1 = 0) \leq 0,025 \quad \text{a} \quad k_2 = 8: P(Y \geq k_2 = 8) \leq 0,025$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa nezamietame, lebo

$$Y = 6 \in (k_1 = 0, k_2 = 8)$$

Príklad 5.2

V psychologickom výskume sa testoval vplyv vážnej hudby na koncentráciu žiakov. Každý z deviatich žiakov spravil 5 testov v úplne tichom prostredí a 5 testov, pri ktorých hrala vážna hudba. Priemerný počet dosiahnutých bodov z piatich testov spolu s ďalšími výpočtami je uvedený v tabuľke.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	10,4	9,2	7,1	10,8	7,2	4,9	8,2	4,2	10,1
y_i	6,3	5,2	5,8	1,5	6,8	7,2	5,3	5,4	7,9
z_i	4,1	4,0	1,3	9,3	0,4	-2,3	2,9	-1,2	2,2

x_i – označuje priemerný počet bodov, ktorý dosiahol i -ty žiak v úplne tichom prostredí;

y_i – označuje priemerný počet bodov, ktorý dosiahol i -ty žiak pri počúvaní hudby;

$$z_i = x_i - y_i$$

Pozorovanými znakmi sú znaky X , Y , kde X označuje priemerný počet bodov z testov písaných v tichom prostredí a Y označuje priemerný počet bodov z testov písaných pri počúvaní hudby. Budeme testovať hypotézu H_0 o rovnosti mediánov pozorovaných znakov X , Y oproti dvojstrannej alternatívnej hypotéze na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. Počet rozdielov s kladnými znamienkami je 7. Podľa tabuliek kritických hodnôt znamienkového testu (pozri Prílohy) pre $n = 9$ a $\alpha = 0,05$ je $k_1 = 1$ a $k_2 = 8$. Keďže počet rozdielov s kladnými znamienkami je z intervalu $(k_1, k_2) = (1, 8)$, testovanú hypotézu H_0 nemôžeme zamietnuť. Nepotvrdilo sa, že by vážna hudba mala vplyv na koncentráciu žiakov. Pozorované rozdiely nie sú štatisticky významné.

Teraz ukážeme postup testovania v krokoch.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \tilde{x} = x_0 \qquad H_1 : \tilde{x} \neq x_0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$Y = 7$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$k_1 = 1: P(Y \leq k_1 = 1) \leq 0,025 \quad \text{a} \quad k_2 = 8: P(Y \geq k_2 = 8) \leq 0,025$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa nezamietne, lebo

$$Y = 7 \in (k_1 = 0, k_2 = 8)$$

5.2 Wilcoxonov jednovýberový test

Wilcoxonov jednovýberový test je poradový test, ktorý sa používa na testovanie hypotézy o mediáne symetrického rozdelenia. Tento test je neparametrickou verziou jednovýberového t testu. Dá sa použiť aj pre dva závislé výbery – párové hodnoty. Postupuje sa tak, že z párových hodnôt urobíme rozdiely a tak pretransformujeme úlohu na jednovýberovú.

Predpokladajme, že základný súbor má spojité symetrické rozdelenie s distribučnou funkciou $F(x)$. Chceme testovať hypotézu H_0 , že toto rozdelenie je symetrické okolo hodnoty mediánu $\tilde{x}_0$. Pre párové hodnoty je medián $\tilde{x}_0 = 0$.

Nech dáta $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú realizácie náhodného výberu $X_1, X_2, \dots, X_n$ zo spojitého rozdelenia symetrického podľa mediánu $\tilde{x}_0$. Vypočítame rozdiely $d_i = x_i - \tilde{x}_0$, $i = 1, 2, \dots, n$ a ich absolútne hodnoty $|d_i| = |x_i - \tilde{x}_0|$ usporiadame podľa veľkosti od najmenej hodnoty po najväčšiu a priradíme im poradové čísla od 1 do n . Hodnote d_i priradíme poradové číslo hodnoty $|d_i|$, ktoré označme R_i .

Najprv vypočítame súčty poradí rozdielov

$$W_+ = \sum_{d_i \geq 0} R_i - \text{kladných} \quad \text{a} \quad W_- = \sum_{d_i < 0} R_i - \text{záporných} \quad (5.3)$$

a potom testovaciu štatistiku v prípade malého rozsahu výberu, pre ktorú platí:

$$W = \min\{W_+, W_-\} \quad (5.4)$$

Malý rozsah výberu ($n \leq 20$)

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} \neq x_0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$W = \min\{W_+, W_-\}$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$w_n(\alpha)$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$W \leq w_n(\alpha)$$

Veľký rozsah výberu ($n > 20$)

Testovacia štatistika

$$U = \frac{W_+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \quad (5.5)$$

má za platnosti hypotézy H_0 asymptotické normálne rozdelenie $N(0,1)$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} \neq x_0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$U$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$k_\alpha$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$|U| > k_\alpha$$

Tab. 5.2 Wilcoxonove jednovýberové testy

Rozsah	Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$n \leq 20$	$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} \neq x_0$	W	$W \leq w_n(\alpha)$
	$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} < x_0$		$W \leq w_n(2\alpha)$
	$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} > x_0$		$W \leq w_n(2\alpha)$
$n > 20$	$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} \neq x_0$	U	$ U > k_\alpha$
	$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} < x_0$		$U < -k_{2\alpha}$
	$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} > x_0$		$U > k_{2\alpha}$

Príklad 5.3

V psychologickom výskume sa testoval vplyv vážnej hudby na koncentráciu žiakov. Každý z deviatich žiakov spravil 5 testov v úplne tichom prostredí a 5 testov, pri ktorých hrala vážna hudba. Priemerný počet dosiahnutých bodov z piatich testov spolu s ďalšími výpočtami je uvedený v tabuľke.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	10,4	9,2	7,1	10,8	7,2	4,9	8,2	4,2	10,1
y_i	6,3	5,2	5,8	1,5	6,8	7,2	5,3	5,4	7,9
d_i	4,1	4,0	1,3	9,3	0,4	-2,3	2,9	-1,2	2,2
R_i	8	7	3	9	1	5	6	2	4

x_i – označuje priemerný počet bodov, ktorý dosiahol i -tý žiak v úplne tichom prostredí;

y_i – označuje priemerný počet bodov, ktorý dosiahol i -tý žiak pri počúvaní hudby;

$d_i = x_i - y_i$; R_i označuje poradie hodnoty $|d_i|$.

Pozorovanými znakmi sú znaky X, Y , kde X označuje priemerný počet bodov z testov písaných v tichom prostredí a Y označuje priemerný počet bodov z testov písaných pri počúvaní hudby. Budeme testovať hypotézu H_0 , že mediány pozorovaných znakov X, Y sa rovnajú oproti alternatívnej hypotéze H_1 , že sú rôzne. Pomocou výsledkov uvedených v tabuľke vypočítame hodnoty charakteristík W_+, W_- :

$$W_+ = 8 + 7 + 3 + 9 + 1 + 6 + 4 = 38 \quad W_- = 5 + 2 = 7$$

Hodnota testovacieho kritéria $W = \min\{W_+, W_-\} = 7$. Ku zvolenej úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ a počtu nenulových rozdielov $n = 9$ vyhľadáme v tabuľke v Prílohách kritickú hodnotu $w_9(0,05) = 5$. Keďže $W = 7 > 5 = w_9(0,05)$, testovanú hypotézu H_0 nemôžeme zamietnuť. Nepotvrdilo sa, že by vážna hudba mala vplyv na koncentráciu žiakov.

Teraz ukážeme postup testovania v krokoch.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad H_1 : \tilde{x} \neq x_0$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$W = \min\{W_+, W_-\} = 7$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre $\alpha = 0,05$** .

$$w_9(0,05) = 5$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa nezamietne, lebo

$$W = \min\{W_+, W_-\} = 7 > w_9(0,05) = 5$$

5.3 Wilcoxonov dvojvýberový test

Wilcoxonov dvojvýberový test sa používa na testovanie zhodnosti dvoch rozdelení. Tento test je neparametrickou verziou dvojvýberového t testu.

Predpokladajme, že dva základné súbory majú spojité rozdelenia s distribučnými funkciami $F_1(x)$ a $F_2(x)$. Chceme testovať hypotézu H_0 , že tieto rozdelenie sú rovnaké.

Nech namerané dáta $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ a $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$ sú realizácie dvoch navzájom nezávislých náhodných výberov. Všetkých $n_1 + n_2$ hodnôt usporiadame podľa veľkosti od najmenšej po najväčšiu. Každý hodnote priradíme prirodzené číslo – jej poradie, pričom rovnako veľkým hodnotám priradíme rovnaké priemerné poradie (pozri začiatok tejto kapitoly). Nech poradové čísla hodnôt prvého výberu sú $R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1n_1}$ a poradové čísla hodnôt druhého výberu sú $R_{21}, R_{22}, \dots, R_{2n_2}$. Zistíme súčet poradí T_1 hodnôt $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ a súčet poradí T_2 hodnôt $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$, teda

$$T_1 = R_{11} + R_{12} + \dots + R_{1n_1} \quad \text{a} \quad T_2 = R_{21} + R_{22} + \dots + R_{2n_2}$$

Ďalej postupujeme podľa toho, aké veľké sú rozsahy jednotlivých výberov.

Malý rozsah výberu

Ak platí, že $\min\{n_1, n_2\} < 20$ a $\max\{n_1, n_2\} < 30$, potom považujeme súbory za malé a postupujeme nasledovne.

Najskôr vypočítame

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - T_1 \quad \text{a} \quad U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - T_2 \quad (5.6)$$

a pokračujeme stanovením testovacej štatistiky, pre ktorú platí:

$$W = \min\{U_1, U_2\} \quad (5.7)$$

Ešte treba pripomenúť, že platí vzťah $U_1 + U_2 = n_1 \cdot n_2$, ktorý môže poslúžiť na kontrolu výpočtu.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) \quad H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$W = \min\{U_1, U_2\}$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$W_{n_1, n_2}(\alpha)$$

Krok 4: **Záver:** nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$W \leq W_{n_1, n_2}(\alpha)$$

Kritickú hodnotu dvojvýberového Wilcoxonovho testu $W_{n_1, n_2}(\alpha)$ nájdeme v prílohe.

Veľký rozsah výberu

Ak platí, že $\min\{n_1, n_2\} > 20$ a $\max\{n_1, n_2\} > 30$, potom považujeme súbory za dostatočne veľké. Ďalej postupujeme štandardne.

Testovacia štatistika

$$U_0 = \frac{U_1 - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{12} (n_1 + n_2 + 1)}} \quad (5.8)$$

má za platnosti hypotézy H_0 asymptotické normálne rozdelenie $N(0,1)$.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) \quad H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$U_0$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre α** .

$$k_\alpha$$

Krok 4: **Záver:** nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$|U_0| \geq k_\alpha$$

V prehľadnej tabuľke 5.3 sú uvedené tieto testy pre malé i veľké rozsahy súborov.

Tab. 5.3 Wilcoxonove dvojvýberové testy

Rozsah výberu	Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$\min\{n_1, n_2\} < 20$ $\max\{n_1, n_2\} < 30$	$H_0: F_1(x) = F_2(x)$ $H_0: F_1(x) = F_2(x)$	$W = \min\{U_1, U_2\}$	$W \leq W_{n_1, n_2}(\alpha)$
$\min\{n_1, n_2\} > 20$ $\max\{n_1, n_2\} > 30$	$H_0: F_1(x) = F_2(x)$ $H_0: F_1(x) = F_2(x)$	$U_0 = \frac{U_1 - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{12} (n_1 + n_2 + 1)}}$	$ U_0 > k_\alpha$

Príklad 5.4

V rámci ekologického výskumu sa sledovalo množstvo olova v dvoch vodných tokoch. Z prvého vodného toku bolo odobratých 6 vzoriek vody a z druhého vodného toku 5 vzoriek vody s týmito nameranými hodnotami olova (v $\mu\text{g/l}$) v 1. vodnom toku: 0,62; 0,54; 0,55; 0,60; 0,53; 0,58 a s týmito nameranými hodnotami olova (v $\mu\text{g/l}$) v 2. vodnom toku: 0,52; 0,56; 0,49; 0,50; 0,51. Treba porovnať množstvo olova v týchto dvoch vodných tokoch.

Uvedené hodnoty sú realizáciami dvoch nezávislých náhodných výberov z dvoch spojitých rozdelení. Budeme testovať hypotézu H_0 , že distribučné funkcie oboch rozdelení sú rovnaké.

Združený výber	Poradia združeného výberu	Poradia 1. výberu	Poradia 2. výberu
0,49	1	–	1
0,50	2	–	2
0,51	3	–	3
0,52	4	–	4
0,53	5	5	–
0,54	6	6	–
0,55	7	7	–
0,56	8	–	8
0,58	9	9	–
0,60	10	10	–
0,62	11	11	–

Namerané hodnoty oboch združených výberov sme usporiadali do neklesajúcej postupnosti a priradili sme im poradia ako vidieť v tabuľke. Určíme súčty T_1 a T_2 poradí hodnôt prvého a druhého výberu:

$$T_1 = 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11 = 48 \quad T_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 8 = 18$$

Vypočítame hodnoty charakteristík U_1 , U_2 :

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1 = 6 \cdot 5 + \frac{6 \cdot 7}{2} - 48 = 3$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2 = 6 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 6}{2} - 18 = 27$$

Pre kontrolu, $U_1 + U_2 = 6 \cdot 5 = 30 = n_1 \cdot n_2$.

Hodnota testovacej štatistiky je $W = \min\{U_1, U_2\} = 3$. V tabuľke v Prílohách nájdeme pre $n_1 = 6$, $n_2 = 5$ a $\alpha = 0,01$ kritickú hodnotu $W_{n_1, n_2}(0,01) = 1$. Keďže pre hodnotu testovacej štatistiky platí $W = \min\{U_1, U_2\} > 1$, testovanú hypotézu H_0 nemôžeme na úrovni výz-

namnosti $\alpha = 0,01$ zamietnuť. To znamená, že množstvo olova v sledovaných vodných to-
koch nie je rozdielne. Pozorované rozdiely nie sú štatisticky významné.

Teraz ukážeme postup testovania v krokoch.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) \quad H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$W = \min\{U_1, U_2\} = 3$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre $\alpha = 0,01$** .

$$W_{n_1, n_2}(0,01) = 1$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa nezamietne, lebo

$$W = 3 > W_{6,5}(0,01) = 1$$

5.4 Kruskalov-Wallisov test

Kruskalov-Wallisov test je neparametrickou obdobou jednoduchého triedenia analýzy rozptylu. Je zovšeobecnením Wilcoxonovho dvojvýberového testu pre prípad k nezávislých náhodných výberov ($k \geq 3$). Používa sa namiesto jednofaktorovej analýzy rozptylu vtedy, keď jednotlivé výbery nepochádzajú z normálnych rozdelení.

Chceme testovať hypotézu H_0 , že tieto rozdelenia sú rovnaké oproti alternatíve H_1 , že aspoň jedno z nich sa líši od ostatných. Hypotézy sa formálne zapisujú takto:

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_k(x) \quad H_1: \text{aspoň jedno sa líši od ostatných} \quad (5.9)$$

Nech namerané dáta $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \dots, x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k}$ sú realizácie k navzájom nezávislých náhodných výberov. Všetkých $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ hodnôt usporiadame podľa veľkosti od najmenej po najväčšiu. Každý hodnote priradíme prirodzené číslo – jej poradie, pričom rovnako veľkým hodnotám priradíme rovnaké priemerné poradie (pozri úvodnú časť kap. 5.). Nech poradové čísla hodnôt jednotlivých výberov od prvého až po k -tý sú:

$$R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1n_1}, R_{21}, R_{22}, \dots, R_{2n_2}, \dots, R_{k1}, R_{k2}, \dots, R_{kn_k}$$

Zistíme súčet poradí T_i , $i = 1, 2, \dots, k$ pre jednotlivé výbery:

$$T_i = R_{i1} + R_{i2} + \dots + R_{in_i}$$

$$T_2 = R_{21} + R_{22} + \dots + R_{2n_2} \quad (5.10)$$

.....

$$T_k = R_{k1} + R_{k2} + \dots + R_{kn_k}$$

Testovacia štatistika

$$Q = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(N+1) \text{ pričom } N = \sum_{i=1}^k n_i \quad (5.11)$$

má za platnosti H_0 rozdelenie chí-kvadrát (χ^2 -rozdelenie) so stupňami voľnosti $k-1$.

Na kontrolu správnosti výpočtu môžeme použiť vzťah $\sum_{i=1}^k T_i = N(N+1)/2$.

Nulovú hypotézu H_0 zamietame na úrovni významnosti α , ak

$$Q \geq \chi^2(k-1, \alpha) \quad (5.12)$$

kde $\chi^2(k-1, \alpha)$ je kritická hodnota rozdelenia chí-kvadrát so stupňami voľnosti $k-1$.

Neményiho metóda viacnásobného porovnávania

V prípade zamietnutia nulovej hypotézy tvrdíme, že všetky výbery nepochádzajú z toho istého rozdelenia. Zvyčajne sa ďalej pýtame, ktoré výbery (súbory) sa od seba významne líšia. V prípade, že všetky výbery majú rovnaký rozsah, t. j. ak platí $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$, môžeme Kruskalov-Wallisov test doplniť Neményiho metódou viacnásobného porovnávania.

Chceme porovnať i -tý výber s j -tým výberom. Teda chceme testovať hypotézu H_0 , že i -tý a j -tý výber pochádzajú z toho istého rozdelenia oproti alternatíve H_1 , že nepochádzajú z toho istého rozdelenia. Hypotézy sa formálne zapíšu takto:

$$H_0: F_i(x) = F_j(x) \text{ oproti } H_1: F_i(x) \neq F_j(x) \quad (5.13)$$

Vypočítame hodnoty testovacích štatistík

$$|T_i - T_j| \quad (5.14)$$

kde T_i, T_j sú uvedené v (5.10).

Nulovú hypotézu H_0 zamietame na úrovni významnosti α , ak

$$|T_i - T_j| \geq N(n, k; \alpha) \quad (5.15)$$

kde $N(n, k; \alpha)$ je kritická hodnota Neményiho metódy. Pre $n \leq 25$ a $k \leq 10$ sú kritické hodnoty Neményiho metódy $N(n, k; \alpha)$ uvedené v Prílohách.

Príklad 5.5

Sledovalo sa percento niklu v tavnej analýze legovanej ocele. Analýza sa vykonala pri 4 peciach. Z každej pece sa odobralo 5 vzoriek. Chceme zistiť, či percento niklu je vo všetkých peciach rovnaké alebo či existujú pece, ktorých percento niklu sa líši od ostatných. Dáta sú uvedené v ľavej časti tabuľky. V pravej časti stĺpca sú uvedené poradia R_i .

1. pec		2. pec		3. pec		4. pec	
X_i	R_i	X_i	R_i	X_i	R_i	X_i	R_i
4,15	2	4,38	14	4,23	5	4,41	17
4,26	8	4,40	16	4,16	3	4,31	12
4,10	1	4,29	10	4,20	4	4,42	18
4,30	11	4,39	15	4,24	6	4,37	13
4,25	7	4,45	20	4,27	9	4,43	19
T_i	29	75		27		79	

Máme teda $k = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 5$, $N = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Z (5.11) dostaneme

$$Q = \frac{12}{20 \cdot 21} \left(\frac{29^2}{5} + \frac{75^2}{5} + \frac{27^2}{5} + \frac{79^2}{5} \right) - 3 \cdot 21 = 13,78$$

Pretože $Q = 13,78 \geq \chi^2(3; 0,05) = 7,82$, zamietame nulovú hypotézu, že percento niklu je vo všetkých peciach rovnaké.

Teraz ukážeme postup testovania v krokoch.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) = F_4(x) \quad H_1: \text{aspoň jedno sa líši od ostatných}$$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$Q = 13,78$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre $\alpha = 0,05$** .

$$\chi^2(3; 0,05) = 7,82$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietá, pretože

$$Q = 13,78 \geq \chi^2(3; 0,05) = 7,82$$

Neményiho metóda

Pre ďalší rozbor problému najskôr zostavíme tabuľku hodnôt $|T_i - T_j|$ pre všetky $i < j$:

i	j		
	2	3	4
1	46	2	50*
2		48	4
3			52*

V Prílohách nájdeme kritickú hodnotu viacnásobného porovnávania $N(5, 4; 0, 05) = 48,1$. V tabuľke označíme symbolom * tie hodnoty, ktoré sú na úrovni významnosti 5 % významné. Neményiho metóda teda ukazuje významný rozdiel v percente niklu medzi 1. a 4. pecou a medzi 3. a 4. pecou.

5.5 Friedmanov test

Friedmanov test je obdobou analýzy rozptylu dvojného triedenia s jedným pozorovaním v každej podtriede.

Nech X_{ij} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$) sú nezávislé náhodné premenné so spojitými distribučnými funkciami. Chceme testovať hypotézu H_0 , že distribučné funkcie náhodných premenných $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}$ sú totožné, čo formálne zapíšeme takto:

$$H_0: F_{i1}(x) = F_{i2}(x) = \dots = F_{ik}(x) \quad H_1: \text{aspoň jedno sa líši od ostatných} \quad (5.16)$$

kde $i = 1, \dots, n$.

V praxi ide o tzv. *model náhodných blokov*. Skúma sa vplyv k ošetrení, ktoré sú aplikované na n blokoch. Treba rozhodnúť, či všetky ošetrenia prinášajú rovnaký účinok. Ak nemajú rovnaký účinok, treba ďalej určiť, ktoré ošetrenia sa od seba líšia.

Friedmanov test spočíva v tom, že sa pozorovania v každom bloku usporiadajú zvlášť a určí sa poradie T_{ij} hodnoty x_{ij} v rámci i -tého bloku. Platí vzťah $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k T_{ij} = \frac{nk(k+1)}{2}$, ktorý môže slúžiť ako kontrola výpočtu. Ako testovaciu štatistiku použijeme

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n T_{ij} \right)^2 - 3n(k+1) \quad (5.17)$$

ktorá má za platnosti hypotézy H_0 asymptoticky χ^2 – rozdelenie s $k-1$ stupňami voľnosti.

Testovanú hypotézu H_0 zamietame na úrovni významnosti α , ak platí:

$$Q \geq \chi^2(k-1, \alpha) \quad (5.18)$$

kde $\chi^2(k-1, \alpha)$ sú kritické hodnoty χ^2 – rozdelenia s $k-1$ stupňami voľnosti a sú uvedené v Prílohách.

Neményiho metóda viacnásobného porovnávania

Ak zamietneme H_0 , ostáva nezodpovedaná otázka, ktoré súbory sa od seba štatisticky významne líšia. Na porovnanie rozdielov medzi jednotlivými súbormi opäť použijeme Neményiho metódu viacnásobného porovnávania.

Chceme testovať hypotézu

$$H_0: F_{\cdot j}(x) = F_{\cdot m}(x) \text{ proti } H_1: F_{\cdot j}(x) \neq F_{\cdot m}(x) \quad (5.19)$$

Označme $\sum_{i=1}^n T_{ij} = T_{\cdot j}$ pre $j = 1, \dots, k$. Vypočítame hodnoty testovacích štatistík

$$|T_{\cdot j} - T_{\cdot m}| \quad (5.20)$$

pre všetky $j < m$.

Nulovú hypotézu H_0 zamietame na úrovni významnosti α , ak

$$|T_{\cdot j} - T_{\cdot m}| \geq N_{bn}(\alpha) \quad (5.21)$$

kde $N_b(n, k; \alpha)$ je kritickej hodnote Neményiho metódy pre náhodné bloky. Pre $n \leq 25$ a $k \leq 10$ sú kritické hodnoty Neményiho metódy pre náhodné bloky $N_b(n, k; \alpha)$ uvedené v Prílohách.

Príklad 5.6

Sledoval sa vplyv troch preparátov na zrážanlivosť krvi. Okrem iných ukazovateľov sa zisťoval tzv. trombinový čas. Každý osobe sa stanovil najprv kontrolný údaj (K), ktorý udáva trombitový čas pred zahájením pokusu. Potom boli aplikované preparáty A, B, C, každý po odznení účinku predchádzajúcich. Dáta o 10 sledovaných osobách sú uvedené v tabuľke a); v tabuľke b) sú uvedené poradie vzťahujúce sa vždy k danej osobe (t. j. „bloku“).

a) Trombitový čas

Osoba	Preparát			
	K	A	B	C
A	11,3	11,2	11,4	11,0
B	11,9	12,1	11,8	9,5
C	11,8	13,2	12,0	11,1
D	12,1	12,8	12,0	12,5
E	11,2	13,5	11,5	8,4
F	11,3	12,5	11,5	9,0
G	10,8	10,7	10,9	9,7
H	12,0	13,8	11,6	12,2
I	11,5	12,9	11,3	10,3
J	11,7	11,9	11,3	8,2

b) Poradie T_{ij}

Osoba	Preparát			
	K	A	B	C
A	3	2	4	1
B	3	4	2	1
C	2	4	3	1
D	2	4	1	3
E	2	4	3	1
F	2	4	3	1
G	3	2	4	1
H	2	4	1	3
I	3	4	2	1
J	3	4	2	1
Σ	25	36	25	14

Podľa vzorca (5.17) vypočítame

$$Q = \frac{12}{10 \cdot 4 \cdot 5} (25^2 + 36^2 + 25^2 + 14^2) - 3 \cdot 10 \cdot 5 = 14,52$$

Pretože $Q = 14,52 \geq \chi^2(3; 0,05) = 7,82$, zamietame nulovú hypotézu, že trombinový čas nezávisí od K, A, B, C.

Teraz ukážeme postup testovania v krokoch.

Krok 1: Určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1 .

$$H_0: F_{i1}(x) = F_{i2}(x) = F_{i3}(x) = F_{i4}(x) \quad H_1: \text{aspoň jedno sa líši od ostatných}$$

kde $i = 1, 2, 3, 4$

Krok 2: Stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**.

$$Q = 14,52$$

Krok 3: Stanovenie **kritickej hodnoty pre $\alpha = 0,05$** .

$$\chi^2(3; 0,05) = 7,82$$

Krok 4: **Záver**: nulová hypotéza H_0 sa zamietá, pretože

$$Q = 14,52 \geq \chi^2(3; 0,05) = 7,82$$

Neményiho metóda viacnásobného porovnávania

Na zistenie, ktoré z preparátov K , A , B , C sa od seba líšia, sú v nasledovnej tabuľke hodnoty testovacích štatistík $|T_{.j} - T_{.m}|$.

j	m		
	2	3	4
1	11	0	11
2		11	22*
3			11

V Prílohách nájdeme, že kritická hodnota absolútnych hodnôt rozdielov $|T_{.j} - T_{.m}|$ pre $\alpha = 0,05$ je 14,8. Z toho vyplýva, že hypotézu o zhodnom účinku preparátov č. 2 a č. 4 (t. j. A a C) zamietame na úrovni významnosti 5 %. Významnú odlišnosť iných dvojíc preparátov sa nedá preukázať na základe zistených výsledkov pomocou Neményiho metódy.

6 ŠTATISTICKÉ RIADENIE KVALITY

6.1 Zlepšovanie kvality a štatistika

Ciele výučby

- Vysvetliť aplikácie štatistických metód v zlepšovaní kvality.

Štatistické metódy majú významnú úlohu pri zlepšovaní kvality. Uvedieme niektoré aplikácie.

1. Pri navrhovaní a vývoji produktu sa dajú použiť štatistické metódy obsahujúce navrhovanie experimentov pri porovnávaní rôznych materiálov, súčiastok (komponentov, konštrukčných prvkov) alebo zložiek. Môžu pomôcť pri určení tolerancií systému aj zložiek. Ich aplikácia môže významne znížiť náklady a čas na vývoj.
2. Štatistické metódy možno použiť na zistenie spôsobilosti výrobného procesu. Štatistickú reguláciu procesu (SPC) možno použiť na systematické zlepšovanie procesu znižovaním variability.
3. Metódy navrhovania experimentov (DOE) môžu pomôcť pri zisťovaní zlepšenia procesu. Toto zlepšenie môže viesť k vyšším výnosom a nižším výrobným nákladom.
4. Skúška (test) životnosti poskytuje spoľahlivosť a ďalšie údaje o výkonnosti produktu. Toto môže viesť k novým a zlepšeným návrhom a k produktom ktoré majú dlhšiu užitočnú životnosť a nižšie náklady na prevádzku a údržbu.

6.2 Štatistické riadenie kvality (SQC)

Ciele výučby

- Uviesť historický prehľad vzniku a použitia metód SQC.

Oblasť SQC možno všeobecne definovať ako tie štatistické a inžinierske metódy, ktoré sa používajú v meraní, monitorovaní, regulovaní a zlepšovaní kvality. SQC začalo v 20. rokoch 20. storočia. Dr. Walter A. Shewhart z Bell Telephone Laboratories bol jeden z prvých (pionierov) priekopníkov v tejto oblasti. V roku 1924 napísal dokument, v ktorom predstavil moderný regulačný diagram ako jeden zo základných nástrojov štatistickej regulácie procesu (SPC). Harold F. Dodge a Harry G. Romig, dvaja iní zamestnanci Bell Tel. Lab., poskytli vedeniu výberové a kontrolné metódy založené na štatistických metódach. Práca týchto troch mužov tvorila väčšiu časť základov v modernej oblasti SQC. V druhej svetovej vojne sa tieto

metódy zaviedli do U.S priemyslu. Dr. W. Edwards Deming a Dr. Joseph M. sa podieľali na rozširovaní metód SQC počas 2. svetovej vojny.

Japonci sú obzvlášť úspešní v dislokovaní metód SQC a používajú štatistické metódy na získavanie výhody oproti konkurentom. V 70. rokoch minulého storočia americký priemysel značne utrpel v konkurencii s Japonskom (a inými krajinami). To viedlo k obnoveniu záujmu o metódy SQC v USA. Záujem sa sústreďuje najmä na SPC a DOE. Veľa amerických firiem naštartovalo rozsiahle programy na implementáciu týchto metód do výrobných, inžinierskych a iných podnikateľských organizácií.

6.3 Štatistická regulácia procesu

Ciele výučby

- ☐ Vysvetliť termín *štatistická regulácia procesu*.
- ☐ Uviesť vlastnosti hlavných nástrojov SPC.

Štatistická regulácia procesu je výkonný nástroj na dosiahnutie stability procesov a zlepšenie spôsobilosti prostredníctvom zníženie variability.

Je obvyklé, že **štatistickú reguláciu procesu (SPC)** vnímame ako súbor nástrojov na riešenie problémov, ktoré môžu byť použité pre akýkoľvek proces. Hlavné nástroje SPC sú:

1. Kontrolný list
2. Histogram
3. Paretov diagram
4. Diagram príčiny a následku (Ishikawa diagram)
5. Vývojový diagram procesu
6. Regulačný diagram
7. Bodový diagram

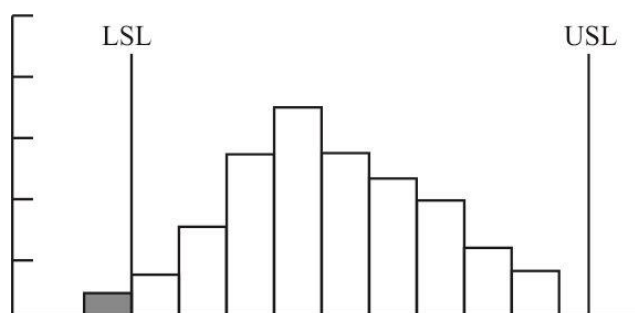
Aj keď sú tieto nástroje dôležitou súčasťou SPC, obsahujú len technickú stránku veci. Nemenej dôležitým prvkom SPC je stanovisko – túžba všetkých jednotlivcov v organizácii pre kontinuálne zlepšovanie kvality a produktivity prostredníctvom systematického znižovania variability. Regulačný diagram je najsilnejší z SPC nástrojov.

Hlavné nástroje SPC

Kontrolný list

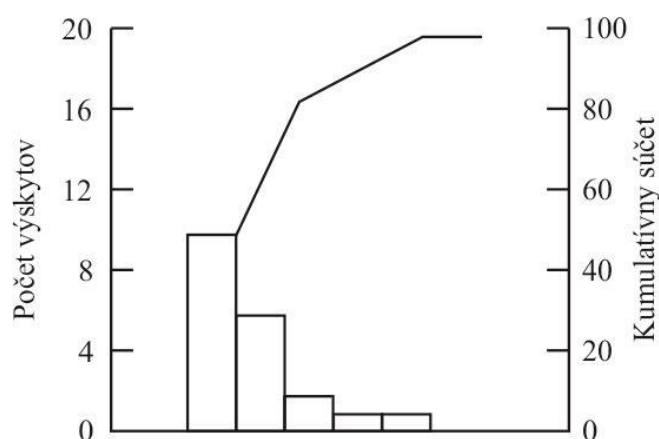
A							
B	##						
C	##	##	##				
D	##	##	##	##			
E	##	##					
F	##						

Histogram



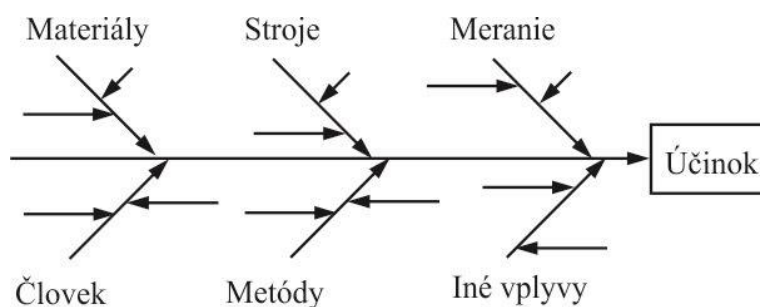
- Tvar ukazuje prirodzenú vlastnosť rozdelenia dát.
- Centrálna tendencia (priemer) a variabilita sú ľahko viditeľné.
- Špecifikačné hranice možno použiť na zobrazenie spôsobilosti procesu.

Pareto diagram



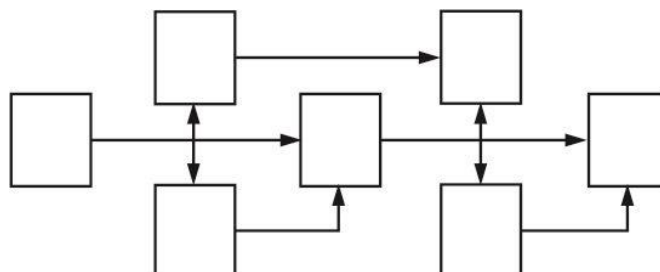
- Identifikuje najvýznamnejšie problémy, ktoré majú byť vybavené ako prvé.
- Z histórie vieme, že 80 % problémov spôsobuje 20 % faktorov.

Diagram príčin a následkov



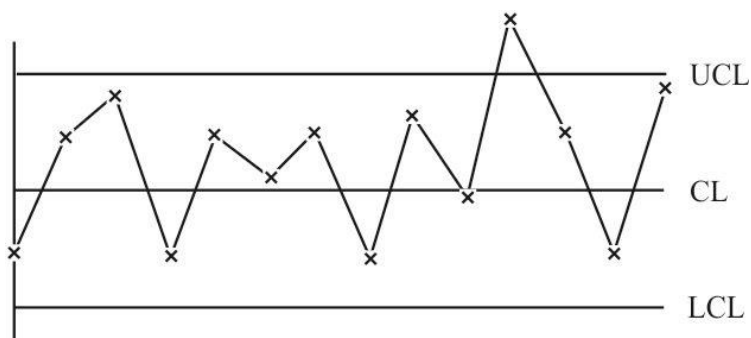
- Zobrazia sa všetky prispievajúce faktory a ich vzájomné vzťahy.
- Identifikuje problémové oblasti, v ktorých sa môžu dáta zhromažďovať a analyzovať.

Vývojový diagram procesu



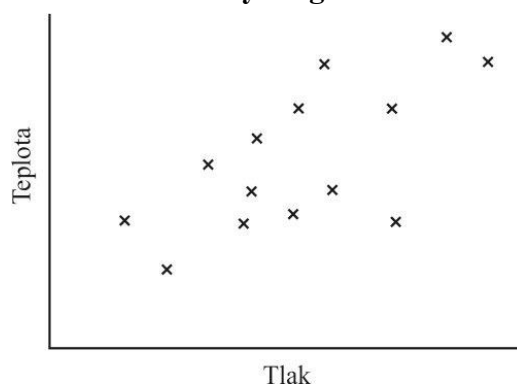
- Vyjadruje detailnú znalosť celého procesu.
- Identifikuje tok procesu a interakciu medzi krokmi procesu.
- Identifikuje potenciálne kontrolné body.

Regulačný diagram



- Pomáha znižovať variabilitu.
- Sleduje výkonosť v priebehu času.
- Identifikuje potenciálne kontrolné body.

Bodový diagram



6.4 Úvod k regulačným diagramom

6.4.1 Základné princípy

Ciele výučby

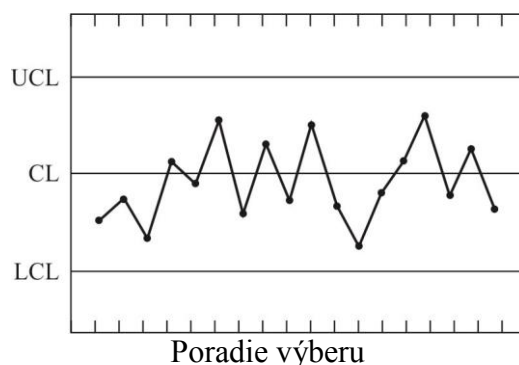
- ☐ Definovať pojmy *náhodná príčina* a *zistiteľná príčina*.
- ☐ Definovať pojmy centrálna priamka (CL), horná regulačná hranica (UCL) a dolná regulačná hranica (LCL).
- ☐ Uviesť postup zlepšovania procesu pomocou regulačného diagramu.
- ☐ Rozlíšiť regulačné diagramy na reguláciu meraním a reguláciu porovnávaním.

V každom výrobnom procese, bez ohľadu na to, ako je dobre navrhnutý a starostlivo udržiavaný, určité množstvo prirodzenej variability bude vždy existovať. Prirodzená variabilita alebo „šum na pozadí“ je kumulatívny účinok mnohých malých v podstate nepredvídateľných príčin. Keď šum pozadia v procese je relatívne malý, zvyčajne sa úroveň výkonnosti procesu považuje za prijateľnú. Proces, ktorý pracuje iba s **náhodnou príčinou** kolísania, je stabilný proces, štatisticky regulovaný proces, alebo že je v štatisticky zvládnutom stave. Inými slovami, náhodné príčiny sú neoddeliteľnou súčasťou tohto procesu.

Iné druhy variability môžu byť občas prítomné vo výstupe procesu. Táto variabilita v kľúčových charakteristikách kvality obvykle vzniká z troch zdrojov: *nesprávne nastavené stroje*, *chyby obsluhy* alebo *chybné základné suroviny*. Takáto variabilita je všeobecne väčšia v porovnaní so šumom na pozadí a zvyčajne znamená neprijateľnú úroveň výkonu procesu. Tieto zdroje variability sú **zistiteľné príčiny**. Proces, ktorý pracuje za prítomnosti zistiteľných príčin je nestabilný proces, štatisticky neregulovaný proces alebo sa hovorí aj, že je v štatisticky nezvládnutom stave.

Produkčné procesy budú často pracovať v štatisticky zvládnutom stave, pričom vyrábajú prijateľný produkt pomerne dlhú dobu. Občas sa však vyskytnú zistiteľné príčiny, zdanlivo náhodné, čo vedie k „posunu“ na štatisticky nezvládnutý stav, kde veľká časť výstupu z procesu nie je v súlade s požiadavkami. Hlavným cieľom štatistickej regulácie procesu je rýchlo detegovať výskyt zistiteľných príčin alebo posun procesu tak, aby vyšetrovanie procesu a nápravné opatrenie mohli byť vykonané pred mnohými vyrábanými nezhodnými jednotkami.

Typický regulačný diagram je znázornený na Obr. 6.1, čo je grafické zobrazenie znaku (charakteristiky) kvality, ktorý bol nameraný a vypočítaný z výberu, verzus číslo výberovej jednotky alebo času. Často sú výbery robené v pravidelných časových intervaloch, napr. každú hodinu.



Obr. 6.1 Typický regulačný diagram

Diagram obsahuje centrálnu priamku (CL – *central line*), ktorá reprezentuje strednú hodnotu znaku kvality zodpovedajúcu štatisticky zvládnutému stavu. Ďalšie dve horizontálne priamky s názvom horná regulačná hranica (UCL – *upper control limit*) a dolná regulačná hranica (LCL – *lower control limit*) sú tiež zobrazené v diagrame. Tieto regulačné hranice sú vybrané tak, aby takmer všetky body z výberu sa nachádzali medzi nimi v prípade, že proces je stabilný (v štatisticky zvládnutom stave). Všeobecne platí, že ak sa body pozorovania nachádzajú vnútri regulačných hraníc predpokladáme, že proces je stabilný a žiadne opatrenie nie je potrebné. Avšak bod, ktorý sa zobrazí mimo regulačných hraníc, sa interpretuje ako dôkaz, že proces je nestabilný (v štatisticky nezvládnutom stave). Následne sa musí urobiť vyšetrenie a nápravné opatrenia z cieľom nájsť a odstrániť zistiteľné príčiny alebo príčiny spôsobujúce toto správanie. Body z výberu v regulačnom diagrame sú zvyčajne spojené s úsečkami tak, že je ľahšie predstaviť si, ako sa postupnosť bodov vyvíja s časom.

Aj keď všetky zakreslené body sú vnútri regulačných medzí, ak sa body správajú systematicky alebo nenáhodne, je to signalizácia toho, že proces je nestabilný. Napríklad, ak 18 z posledných 20 bodov je zakreslených nad centrálnou priamkou, avšak pod hornou regulačnou hranicou, a iba dva z týchto bodov zakreslených pod centrálnou priamkou, avšak nad dolnou regulačnou hranicou, budeme veľmi podozrievavi, že niečo nie je v poriadku. V prípade, že proces je stabilný, všetky zakreslené body by mali mať v podstate náhodný charakter. Metódy navrhnuté tak, aby našli nenáhodné vzory bodov, možno použiť v regulačných diagramoch na detegovanie podmienok nestability. Z nejakého dôvodu sa na regulačných diagramoch zvyčajne objavujú nenáhodné vzory bodov, ak tento dôvod možno nájsť a odstrániť, efektívnosť procesu sa môže zlepšiť.

Existuje úzka súvislosť medzi regulačnými diagramami a testovaním hypotéz. V podstate regulačný diagram je opakované testovanie hypotézy, že tento proces je v štatisticky zvládnutom stave. Bod zakreslený vnútri regulačných hraníc zodpovedá nezamietnutiu hypotézy, že proces je v štatisticky zvládnutom stave, a bod zakreslený mimo regulačných hraníc zodpovedá zamietnutiu hypotézy, že proces je v štatisticky zvládnutom stave.

Dáme všeobecný *model* pre regulačný diagram. Nech W je výberová štatistika, ktorá meria nejaký znak kvality (charakteristiku kvality), ktorý je predmetom nášho záujmu. Predpokladajme, že stredná hodnota W je μ_w a smerodajná odchýlka W je σ_w . (Všimnite si, že

„sigma“ sa vzťahuje na smerodajnú odchýlku štatistiky vynesenej v diagrame (t. j. σ_w) a nie na smerodajnú odchýlku znaku kvality (charakteristiky kvality). Centrálnu priamku, hornú regulačnú hranicu a dolnú regulačnú hranicu možno potom všeobecne stanoviť takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_w + k\sigma_w \\ \text{CL} &= \mu_w \\ \text{LCL} &= \mu_w - k\sigma_w \end{aligned} \quad (6.1)$$

kde k je „vzdialenosť“ regulačných hraníc od centrálnej priamky vyjadrená v smerodajných odchýlkach. Bežný výber je $k = 3$. Túto všeobecnú teóriu regulačných diagramov prvý navrhol Dr. Walter A. Shewhart, preto sa regulačné diagramy vyvinuté podľa týchto zásad často nazývajú **Shewhartove regulačné diagramy**.

Regulačný diagram je nástroj, ktorý objasňuje, čo sa presne myslí pod štatistickou reguláciou; ako taký sa môže použiť rôznym spôsobom. V mnohých aplikáciách sa používa na on-line monitorovanie procesov, t. j. dáta z výberu sa zhromažďujú a použijú na zostrojenie regulačného diagramu. Keď sa hodnoty výberových priemerov $\bar{x}$ nachádzajú vnútri regulačných hraníc a nevykazujú žiaden systematický vzor, potom hovoríme, že proces je stabilný (v štatisticky zvládnutom stave) na úrovni indikovanej v regulačnom diagrame. Všimnite si, že tu môžeme mať záujem určiť dve veci, či minulé dáta pochádzajú zo stabilného procesu a či budúce výbery z tohto procesu indikujú štatistickú reguláciu.

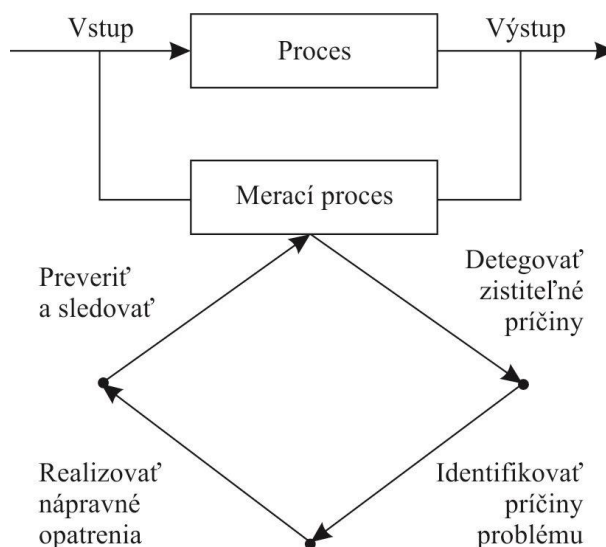
Najdôležitejšie použitie regulačného diagramu je na *zlepšenie* procesu. Zistilo sa, že všeobecne platí:

1. Väčšina procesov nepracuje v stave štatistickej regulácie.
2. Rutinné a pozorné používanie regulačných diagramov bude identifikovať zistiteľné príčiny. Ak sa tieto príčiny odstránia z procesu, tak variabilita sa zníži a proces sa zlepší.
3. Regulačný diagram bude detegovať iba zistiteľné príčiny. Manažment, operátor a inžinierska činnosť sú zvyčajne potrebné na odstránenie zistiteľných príčin. Akčný plán s cieľom reagovať na signály z regulačného diagramu je životne dôležitý.

Pri identifikácii a odstraňovaní zistiteľných príčin je dôležité nájsť základný **koreň príčiny** problému a napadnúť ho. Vývoj efektívneho systému pre prijatie nápravných opatrení je nevyhnutnou súčasťou implementácie účinného SPC.

Regulačný diagram môžeme tiež použiť na odhadovanie. To znamená, že z regulačného diagramu, ktorý je v štatisticky zvládnutom stave, môžeme odhadnúť určité parametre procesu, ako je napríklad stredná hodnota, smerodajná odchýlka, podiel nevyhovujúcich (nezhodných) atď. Tieto odhady sa potom môžu použiť na určenie *spôsobilosti* procesu vyrábať akceptovateľné produkty. Takéto **štúdie spôsobilosti procesu** majú značný vplyv na mnoho problémov rozhodovania manažmentu, ktoré sa vyskytujú v priebehu cyklu výroby, vrátane rozhodnutí o výrobe alebo kúpe, zlepšovaní prevádzky a procesov, ktoré znižujú variabilitu

procesu a zmluvné dojednania so zákazníkmi alebo dodávateľmi, pokiaľ ide o kvalitu výrobku.



Obr. 6.2 Zlepšovanie procesu pomocou regulačného diagramu

Regulačné diagramy možno rozdeliť do dvoch všeobecných typov. Keď je znak kvality merateľná veličina a chceme ju regulovať na základe meraní v spojitaj stupnici meraní, potom príslušné regulačné diagramy sa nazývajú **regulačné diagramy na reguláciu meraním (variables control chart)**. Diagram $\bar{X}$ je najrozšírenejší diagram na monitorovanie (reguláciu) centrálneho trendu, zatiaľ čo diagramy založené na výberovom rozpätí alebo výberovej smerodajnej odchýlke sa používajú na reguláciu variability procesu. Keď je znak kvality nemeľateľná veličina alebo spojitú veličinu chceme regulovať len vzhľadom na súlad jej hodnôt s nejakým etalónom (rozoznávame len dva stavy: „zhodný“ a „nezhodný“), príslušné regulačné diagramy sa nazývajú **regulačné diagramy na reguláciu porovnávaním (attributes control chart)**.

Regulačné diagramy majú za sebou dlhú históriu používania v priemysle. Existuje prajmenšom päť dôvodov ich popularity:

1. Regulačné diagramy sú osvedčené techniky na zlepšenie produktivity.

Úspešný program regulácie zredukuje odpad a prepracovanie, ktoré sú primárnymi zabijakmi produktivity v akejkolvek činnosti. Ak sa zredukuje odpad a prepracovanie, zvýši sa produktivita, znížia sa náklady a výrobná kapacita (meraná v počte dobrých dielcov za hodinu) sa zvýši.

2. Regulačné diagramy sú účinné v prevencii chýb.

Regulačný diagram pomáha udržať proces v stabilite (regulovaní), ktoré je v súlade s filozofiou „urob to správne na prvýkrát“. Nikdy nie je lacnejšie vytriediť neskôr „dobré“ jednotky od „zlých“, ako ich vytvárať správne od začiatku. Ak nemáte účinnú reguláciu procesu, „zaplatíte to“ výrobou nezhodných produktov.

3. Regulačné diagramy zabraňujú zbytočným nastaveniam procesu.

Regulačný diagram môže rozlišovať medzi prirodzenou variabilitou (šumom na pozadí) a abnormálnym kolísaním; žiadne iné zariadenie, vrátane ľudského operátora, nie je také účinné v tomto rozlišovaní. Ak operátori procesu nastavujú proces založený na pravidelných skúškach nesúvisiacich s programom regulácie, budú často prehnane reagovať na prirodzenú variabilitu (šum na pozadí) a urobia nepotrebné nastavenie procesu. Tieto zbytočné nastavenia môžu mať za následok zhoršenie výkonnosti procesu. Inými slovami, regulačný diagram je v súlade s filozofiou „pokiaľ to nie je pokazené, nenastavuj to“.

4. Regulačné diagramy poskytujú diagnostické informácie.

Často bude vzor bodov na regulačnom diagrame obsahovať informácie, ktoré sú diagnostické hodnoty pre skúseného operátora alebo inžiniera. Táto informácia umožňuje operátorovi urobiť zmeny v procese, ktoré zlepšia jeho výkon.

5. Regulačné diagramy poskytujú informácie o spôsobilosti procesu.

Regulačný diagram poskytuje informácie o hodnote dôležitých parametrov procesu a ich stabilite v priebehu času. To umožňuje odhad spôsobilosti procesu, ktorý sa má vykonávať. Táto informácia má veľké použitie pre výroby a postupy návrhárov.

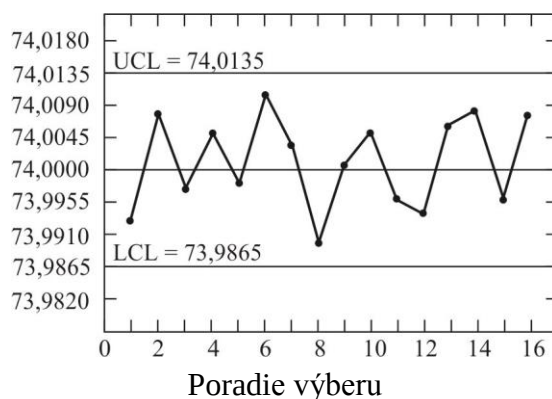
Regulačné diagramy patria medzi najviac účinné nástroje kontroly pre manažment a sú rovnako dôležité ako kontroly nákladov a kontroly materiálov. Moderné počítačové technológie umožňujú ľahko implementovať regulačné diagramy v akomkoľvek type procesu, pretože zber a analýza dát môže byť vykonaná na mikropočítači alebo na termináli lokálnej siete v reálnom čase na pracovisku.

6.4.2 Návrh regulačného diagramu

Ciele výučby

- ☐ Ilustrovať regulačný diagram $\bar{X}$ na dátach vnútorného priemeru piestných krúžkov automobilového motora.
- ☐ Špecifikovať pojmy *rozsah výberu*, *frekvencia výberu* a *priemerná dĺžka priebehu* (ARL).

Na ilustráciu uvedieme jednoduchý príklad regulačného diagramu. Pri výrobe piestných krúžkov automobilového motora je vnútorný priemer krúžkov rozhodujúca charakteristika kvality (znak kvality). Výrobný proces má strednú hodnotu vnútorného priemeru krúžku (menovitý rozmer), ktorá sa rovná 74 mm a smerodajnú odchýlku vnútorného priemeru krúžku, ktorá sa rovná 0,01 mm. Regulačný diagram priemeru pre vnútorný priemer krúžku je na nasledujúcom obrázku.

Obr. 6.3 $\bar{X}$ regulačný diagram priemeru piestneho krúžku

Každú hodinu sa náhodne vyberie päť piestnych krúžkov, ich hodnoty (x_i , $i = 1, 2, \dots, 5$) sa zaznamenajú a z nich sa vypočíta priemer ($\bar{x}$), ktorý sa zakreslí v diagrame. Tento regulačný diagram používa výberový priemer $\bar{X}$ na monitorovanie strednej hodnoty procesu, preto sa nazýva regulačný diagram priemerov ($\bar{X}$ -diagram). Všimnite si, že všetky body sú vnútri regulačných hraníc, takže diagram ukazuje, že tento proces je stabilný (v štatisticky zvládnutom stave).

Zvážte, ako boli stanovené regulačné hranice. Priemer procesu je 74 mm a smerodajná odchýlka je $\sigma = 0,01$ mm. Keď rozsah výberov je $n = 5$, smerodajná odchýlka výberového priemeru $\bar{X}$ je

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,01}{\sqrt{5}} = 0,0045$$

Teda v prípade, že proces je regulovaný so strednou hodnotou vnútorného priemeru 74 mm, podľa centrálnej limitnej vety predpokladáme, že $\bar{X}$ má približne normálne rozdelenie. V tom prípade by sme očakávali, že približne $100(1 - \alpha) \%$ výberových priemerov $\bar{X}$ sa bude nachádzať medzi $74 - k_{\alpha} \times 0,0045$ a $74 + k_{\alpha} \times 0,0045$. Zvyčajne sa zvolí $k_{\alpha} = 3$. Potom dolná regulačná hranica je

$$LCL = 74 - 3 \times 0,0045 = 73,9865$$

a horná regulačná hranica je

$$UCL = 74 + 3 \times 0,0045 = 74,0135$$

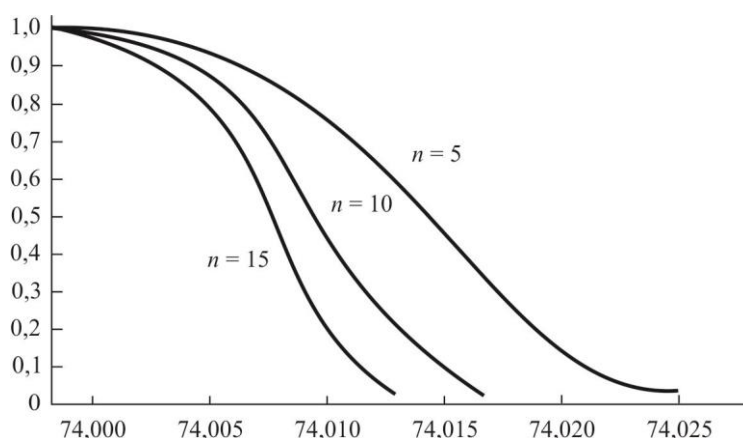
Toto sú 3-sigma regulačné hranice, z ktorých vyplýva, že $\alpha = 0,0027$. Teda pravdepodobnosť, že bod zakreslený v regulačnom diagrame je mimo regulačných hraníc, sa rovná 0,0027. Šírka regulačných hraníc je nepriamo úmerná rozsahu výberu n pri danom násobku sigma (σ). Voľba regulačných hraníc je ekvivalentná s nastavením kritickej oblasti pre testovanie nulovej hypotézy

$$H_0 : \mu = 74 \quad \text{verzus} \quad H_1 : \mu \neq 74$$

kde $\sigma=0,01$ je známe. V podstate regulačný diagram testuje túto hypotézu opakovane v rôznych bodoch časového sledu.

Pri navrhovaní regulačného diagramu musíme ešte špecifikovať **rozsah výberu** a **frekvenciu výberu**. Všeobecne platí, že čím je väčší rozsah výberu, tým ľahšie regulačný diagram zistí aj malý posun regulovanej veličiny, čo je zmena príslušného parametra jej rozdelenia pravdepodobnosti. Pri výbere rozsahu výberu musíme mať na pamäti veľkosť posunu, ktorý sa snažíme zistiť. Keď nás zaujímajú len pomerne veľké posuny regulovanej veličiny, budeme používať menšie rozsahy výberu, ako tie, ktoré by sa použili v prípade relatívne malého posunu v procese. Rozhodnúť sa môžeme na základe operatívnej charakteristiky príslušného testu pre rôzne rozsahy (pozri [10]).

V našom príklade by napríklad grafy operatívnej charakteristiky testu pre $n = 5$, $n = 10$ a $n = 15$ vyzerali tak, ako je uvedené na Obr. 6.4.



Obr. 6.4 Krivky operatívnych charakteristík (OC)

Čo sa týka frekvencie výberov, najlepšie je samozrejme realizovať výbery čo najčastejšie. To však nie je prijateľné z ekonomického hľadiska. Zvyčajne sa treba rozhodnúť medzi väčšími výbermi s menšou frekvenciou a menšími výbermi s väčšou frekvenciou.

V procese rozhodovania o rozsahu a frekvencii výberov možno použiť tzv. **priemerná dĺžka priebehu (ARL – average run length)** regulačného diagramu. ARL je priemerný počet výberov realizovaných predtým, ako dostaneme signál o narušení stability procesu. Pre Shewhartov regulačný diagram možno ARL stabilného procesu vypočítať podľa vzťahu:

$$ARL = \frac{1}{\alpha}$$

kde α je riziko zbytočného signálu. V 3σ regulačnom diagrame priemerov je potom $\alpha = 0,0027$ a

$$ARL = \frac{1}{0,0027} \approx 370$$

je hodnota priemernej dĺžky priebehu regulačného diagramu priemerov, keď je proces stabilný. To znamená, že keď je proces v štatisticky zvládnutom stave, signál o narušení stability sa

v priemere objaví po 370 výberoch. V našom prípade uvažujeme každú hodinu jeden výber, čo znamená, že zbytočný signál sa deteguje v priemere raz za 370 hodín.

Možno vypočítať aj ARL nestabilného procesu. Predpokladajme, že v našom príklade sa stredná hodnota posunula na hodnotu 74,015. Nech rozsah výberu je $n = 5$. Z krivky OC na Obr. 6.4 nájdeme približnú hodnotu $\beta \approx 0,5$. Potom riziko chýbajúceho signálu alebo pravdepodobnosť toho, že stabilita procesu je narušená a príslušný bod bude ležať vnútri regulačných hraníc (regulačný diagram nebude indikovať narušenie stability), je približne 0,5. ARL môžeme potom vypočítať takto:

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - 0,5} \approx 2$$

Predpokladajme, že regulačný diagram, ktorý potrebuje v priemere 2 výbery na to, aby identifikoval posun strednej hodnoty procesu o 0,015 mm, je vzhľadom na naše požiadavky „málo citlivý“. Keď napríklad zväčšíme rozsah výberu na $n = 10$, pričom posun strednej hodnoty procesu zostáva na hodnote 74,015, z krivky OC nájdeme hodnotu $\beta \approx 0,1$ a ARL bude

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - 0,1} = \frac{1}{0,9} \approx 1,11$$

Vidíme, že väčší rozsah výberu umožnil takmer dvakrát rýchlejšiu identifikáciu posunu. Keď chceme, aby regulačný diagram signalizoval narušenie stability v prvej hodine, ktorá nasleduje po jej vzniku, možno uvažovať o dvoch návrhoch s podobnou účinnosťou:

Výber	Návrh 1	Návrh 2
rozsah	$n = 5$	$n = 10$
frekvencia	0,5 hod	1 hod

V našich doterajších úvahách sme sa pokúsili naznačiť len základné vzťahy medzi rozsahom výberu, frekvenciou výberu a rizikami α a β . Existuje množstvo iných prístupov, ktoré umožňujú optimalizovať alebo približne optimalizovať veľkosť uvedených parametrov regulácie pomocou ekonomických návrhov.

6.4.3 Logické podskupiny

Ciele výučby

- Vysvetliť pojem *logická podskupina*.

Základný predpoklad aplikácie regulačných diagramov je rešpektovanie princípu tvorby logických podskupín v procese realizácie výberov. **Logická podskupina** všeobecne je taká skupina, v rámci ktorej možno predpokladať pôsobenie len náhodných príčin variability. Vo výrobnom procese je bázou tvorby logických podskupín časová postupnosť výroby. Všeobecne možno vymedziť dva základné prístupy k tvorbe logických podskupín:

1. Každý výber sa skladá z jednotiek vyrobených v tom istom čase (alebo v čo najkratšom časovom úseku). Tento prístup sa používa vtedy, keď je základnou úlohou aplikácie regulačného diagramu detekcia posunov regulovaného parametra. Minimalizuje možnosť zistenia variability vnútri výberu a maximalizuje šancu zistenia variability medzi výbermi v prípade prítomnosti zistiteľných príčin variability.
2. Každý výber sa skladá z jednotiek produktu, ktoré reprezentujú všetky jednotky vyrobené po realizácii posledného výberu. V podstate každá podskupina je náhodný výber zo všetkých hodnôt procesu na intervale výberu. Tento spôsob logických podskupín sa často používa, keď má regulačný diagram slúžiť na rozhodovanie o prijatí všetkých jednotiek výrobku, ktoré boli vyrobené po poslednom výbere. V skutočnosti ak sa proces presúva do nestabilného stavu a potom späť do stabilného stavu medzi výbermi, tak prvá metóda logických podskupín bude neúčinná proti týmto typom posunov a musí sa použiť druhá metóda.

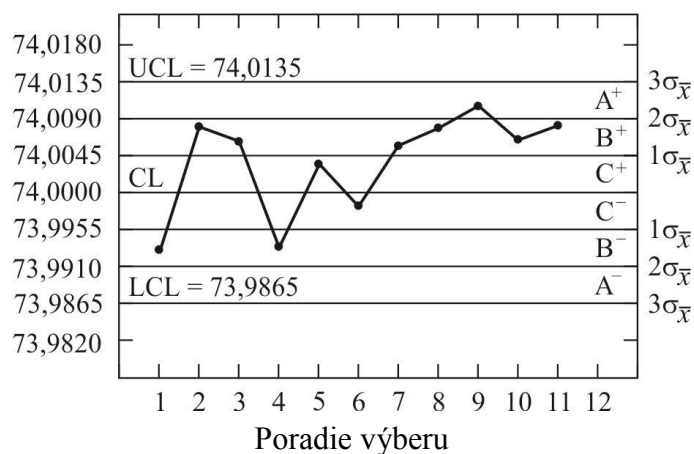
Existujú samozrejme aj iné prístupy k tvorbe logických podskupín. Výber vhodného prístupu závisí od charakteru konkrétneho procesu, ktorý chceme regulovať. Nevyhnutné je proces analyzovať s cieľom získať čo najviac informácií užitočných na výber vhodného prístupu k tvorbe logických podskupín.

6.4.4 Analýza zoskupení bodov v regulačných diagramoch

Ciele výučby

- Vysvetliť pojem *výstražné hranice*.

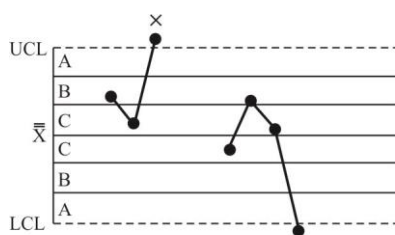
Horné a dolné regulačné hranice sú lokalizované vo vzdialenosti 3σ nad a pod centrálnou priamkou. Citlivosť regulačného diagramu sa zvýši pomocou tzv. **výstražných hraníc**, ktoré rozdelia regulačný diagram na šesť podoblastí (zón), z ktorých každá má šírku 1σ . Jednotlivé podoblasti sú označené A^+ , B^+ , C^+ , C^- , B^- , A^- , tak, ako je uvedené na Obr. 6.5.



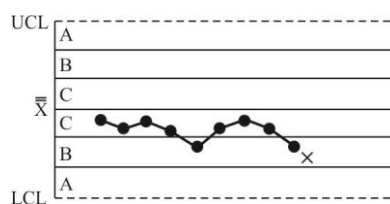
Obr. 6.5 Regulačný diagram s výstražnými hranicami

Keď je bod mimo regulačných hraníc, regulačný diagram deteguje možnosť prítomnosti zistiteľných príčin v procese. Užitočné je však sledovať a registrovať aj niektoré typické zoskupenia bodov, z ktorých ani jeden nie je mimo regulačných hraníc. Tieto zoskupenia bodov môžu naznačovať prítomnosť zistiteľných príčin.

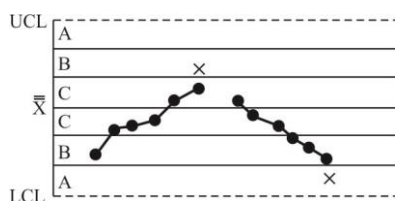
V STN ISO 8258 sa uvádza osem typických postupností bodov (Western Electric Handbook (1956)), ktoré môžu naznačovať prítomnosť zistiteľných príčin. Na Obr. 6.6 je schematicky znázornená skupina ôsmich doplnkových testov použitých na interpretáciu určitých zoskupení v Shewhartových diagramoch. Tieto testy by sa mali považovať za jednoduché praktické pravidlá pre zásah, kedykoľvek sa ukazuje prítomnosť zistiteľných príčin.



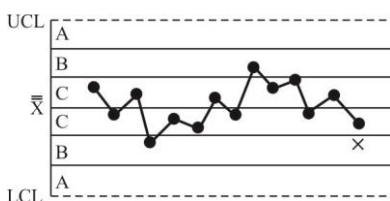
Test 1: Jeden bod leží za zónou A



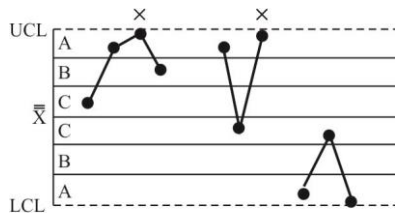
Test 2: Deväť bodov v rade za sebou leží v zóne C, alebo za ňou



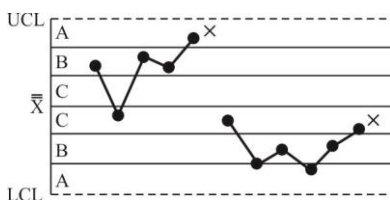
Test 3: Šesť bodov v rade za sebou stúpa, alebo klesá



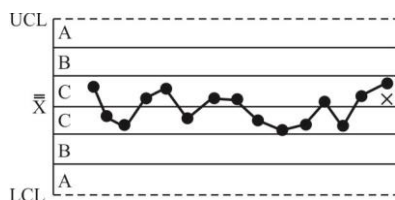
Test 4: Štrnásť bodov v rade za sebou pravidelne kolíše hore a dolu, ale žiaden neleží v zóne A



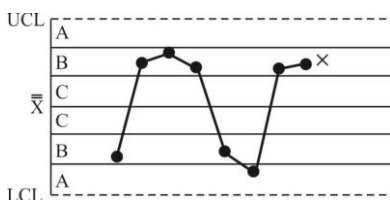
Test 5: Dva z troch bodov v rade za sebou ležia v zóne A, alebo mimo nej



Test 6: Štyri z piatich bodov za sebou leží v zóne B, alebo nad ňou



Test 7: Pätnásť bodov v rade za sebou leží v zóne C (nad a pod centrálnou priamkou)



Test 8: Osem bodov v rade za sebou leží na oboch stranách od centrálny priamky, ale žiaden neleží v zóne C

Obr. 6.6 Testy zistiteľných príčin

6.5 Regulačné diagramy $\bar{X}$ a R alebo S

6.5.1 Regulačné diagramy $\bar{X}$ a R

Ciele výučby

- ☐ Odvodiť vzorce pre výpočet parametrov diagramov $\bar{X}$ a R z nameraných dát.
- ☐ Odhadnúť spôsobilosť procesu.
- ☐ Definovať pojmy *regulačné*, *špecifikačné* a *prirodzené tolerančné hranice*.
- ☐ Odvodiť vzorce pre výpočet parametrov diagramov $\bar{X}$ a R založených na stanovených hodnotách.

Keď regulujeme znak (charakteristiku) kvality, ktorý je merateľný, musíme monitorovať hodnotu priemeru aj variability.

Predpokladajme, že stredná hodnota μ a smerodajná odchýlka σ procesu sú známe a znak kvality má normálne rozdelenie. Uvažujme o diagrame $\bar{X}$. Môžeme použiť μ ako centrálnu priamku CL regulačného diagramu a pridať $\pm 3\sigma/\sqrt{n}$, čím dostaneme hornú a dolnú regulačnú hranicu:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu + 3\sigma/\sqrt{n} \\ \text{CL} &= \mu \\ \text{LCL} &= \mu - 3\sigma/\sqrt{n} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Keď sú parametre μ a σ neznáme, odhadneme ich z predbežných výberov za predpokladu, že proces je stabilný. Odporúča sa použiť 20 až 25 predbežných výberov. Predpokladajme, že máme k dispozícii m predbežných výberov, každý rozsahu n . Zvyčajne sa n rovná 4, 5 alebo 6. Nech výberové priemery m výberov sú $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$. Označme $\hat{\mu}$ bodový odhad strednej hodnoty μ . Strednú hodnotu základného súboru μ odhadneme pomocou **výberového celkového priemeru** $\bar{\bar{X}}$ a z m výberov rozsahu n možno vypočítať podľa vzťahu:

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \tag{6.3}$$

Celkový priemer $\bar{\bar{X}}$ možno použiť ako centrálnu priamku v regulačnom diagrame priemerov.

Bude nás zaujímať bodový odhad parametra σ , ktorý možno získať z výberových smerodajných odchýlok alebo z rozpätí m výberov.

Vieme, že $R = X_{\max} - X_{\min}$ je náhodná premenná, potom veličina $W = R/\sigma$, ktorá sa nazýva *relatívne rozpätie*, je tiež náhodná premenná. Parametre rozdelenia náhodnej premennej W sú funkciou rozsahu výberu n . Ak strednú hodnotu náhodnej premennej W označíme d_2 , potom platí, že

$$d_2 = E(W) = E\left(\frac{R}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(R) \quad \text{a} \quad \sigma = \frac{E(R)}{d_2}$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej W označíme ako d_3 . Hodnoty d_2 a d_3 pre rôzne n sú v Prílohách. Vieme, že $R = \sigma W$, preto

$$\mu_R = d_2 \sigma \quad \text{a} \quad \sigma_R = d_3 \sigma \quad (6.4)$$

Nech $R_1, R_2, \dots, R_m$ sú rozpätia z m výberov, potom

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i \quad (6.5)$$

je priemer rozpätí. Vieme, že $\bar{R}$ je odhad parametra μ_R , potom zo vzťahu (6.4) vyplýva, že nevychýlený odhad parametra σ je daný vzťahom:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (6.6)$$

Pre malé výbery je odhad (6.6) veľmi dobrý.

Keď použijeme $\bar{\bar{X}}$ ako bodový odhad μ a $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ ako bodový odhad σ , možno parametre regulačného diagramu $\bar{X}$ vypočítať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} \\ \text{CL} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{LCL} &= \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Definujme veličinu

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$$

ktorá závisí len od rozsahu výberu n , možno vzťahy (6.7) prepísať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ \text{CL} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{LCL} &= \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Hodnoty A_2 sú uvedené pre rôzne hodnoty n v Prílohách.

Všimnime si teraz regulačné diagramy rozpätí (R -diagramy). Centrálna priamka je zrejme $\bar{R}$. Na stanovenie regulačných hraníc potrebujeme odhadnúť σ_R , čo je smerodajná odchýlka

náhodnej premennej R . Ak opäť predpokladáme, že proces je stabilný, rozdelenie relatívneho rozpätia W je užitočné. Odhad σ_R môžeme získať zo vzťahu (6.4) a (6.6) takto:

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \hat{\sigma} = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (6.9)$$

Parametre regulačného diagramu R možno vypočítať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{R} + 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} \\ \text{CL} &= \bar{R} \\ \text{LCL} &= \bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Keď položíme $D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$ a $D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$, možno vzťahy (6.10) prepísať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= D_4 \bar{R} \\ \text{CL} &= \bar{R} \\ \text{LCL} &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \quad (6.11)$$

kde $\bar{R}$ je priemeru rozpätí a hodnoty D_3 a D_4 sú uvedené pre rôzne n v Prílohách. LCL môže nadobudnúť zápornú hodnotu, v tom prípade LCL sa rovná nule.

Keď sa predbežné výbery použijú na výpočet parametrov uvedených typov regulačných diagramov pri zavádzaní štatistickej regulácie, potom sa tieto parametre zvyčajne považujú za predbežné hodnoty. Keď sa m hodnôt výberových priemerov a výberových rozpätí nanesie do regulačných diagramov a niektoré body sú mimo regulačných hraníc, je potrebné zistiť a odstrániť prípadné zistiteľné príčiny variability. Potom sa podľa vzťahov (6.8) a (6.11) vypočítajú nové parametre regulačných diagramov.

Vyšetruje sa najskôr regulačný diagram R , pretože ak variabilita procesu nie je konštantná v čase, regulačné medze regulačného diagramu $\bar{X}$ môžu byť zavádzajúce.

Príklad 6.1

Piestne krúžky automobilového motora sa produkujú vo výrobnom procese. Chceme zaviesť štatistickú reguláciu vnútorného priemeru krúžkov vyrobených v procese pomocou regulačných diagramov $\bar{X}$ a R . Dvadsať päť výberov rozsahu päť sa vybralo, keď sme považovali proces v štatisticky zvládnutom stave. Dáta z merania vnútorného priemeru sú v Tab. 6.1 spolu s hodnotami výberových priemerov a výberových rozpätí.

Tab. 6.1 Merania vnútorného priemeru

Výber číslo i	Pozorovania					$\bar{x}_i$	r_i
1	74,030	74,002	74,019	73,992	74,008	74,010	0,038
2	73,995	73,992	74,001	74,011	74,004	74,001	0,019
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002	74,008	0,036
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009	74,003	0,022
5	73,992	74,007	74,015	73,989	74,014	74,003	0,026
6	74,009	73,994	73,997	73,985	73,993	73,996	0,024
7	73,995	74,006	73,994	74,000	74,005	74,000	0,012
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988	73,997	0,030
9	74,008	73,995	74,009	74,005	74,004	74,004	0,014
10	73,998	74,000	73,990	74,007	73,995	73,998	0,017
11	73,994	73,998	73,994	73,995	73,990	73,994	0,008
12	74,004	74,000	74,007	74,000	73,996	74,001	0,011
13	73,983	74,002	73,998	73,997	74,012	73,998	0,029
14	74,006	73,967	73,994	74,000	73,984	73,990	0,039
15	74,012	74,014	73,998	73,999	74,007	74,006	0,016
16	74,000	73,984	74,005	73,998	73,996	73,997	0,021
17	73,994	74,012	73,986	74,005	74,007	74,001	0,026
18	74,006	74,010	74,018	74,003	74,000	74,007	0,018
19	73,984	74,002	74,003	74,005	73,997	73,998	0,021
20	74,000	74,010	74,013	74,020	74,003	74,009	0,020
21	73,988	74,001	74,009	74,005	73,996	74,000	0,021
22	74,004	73,999	73,990	74,006	74,009	74,002	0,019
23	74,010	73,989	73,990	74,009	74,014	74,002	0,025
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010	74,005	0,022
25	73,982	73,984	73,995	74,017	74,013	73,998	0,035

Z tabuľkových dát vypočítame centrálnu priamku pre R regulačný diagram:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{25} r_i}{25} = \frac{0,581}{25} = 0,023$$

Pre výbery o rozsahoch $n = 5$ nájdeme v Prílohách hodnoty $D_3 = 0$ a $D_4 = 2,115$. Teraz môžeme vypočítať regulačné hranice diagramu rozpätí:

$$LCL = \bar{r} D_3 = 0,023 \times 0 = 0$$

$$UCL = \bar{r} D_4 = 0,023 \times 2,115 = 0,049$$

Regulačný diagram R je na Obr. 6.7, kde je 25 výberových rozpätí zakreslených, pričom žiadny nie je mimo regulačných hraníc.

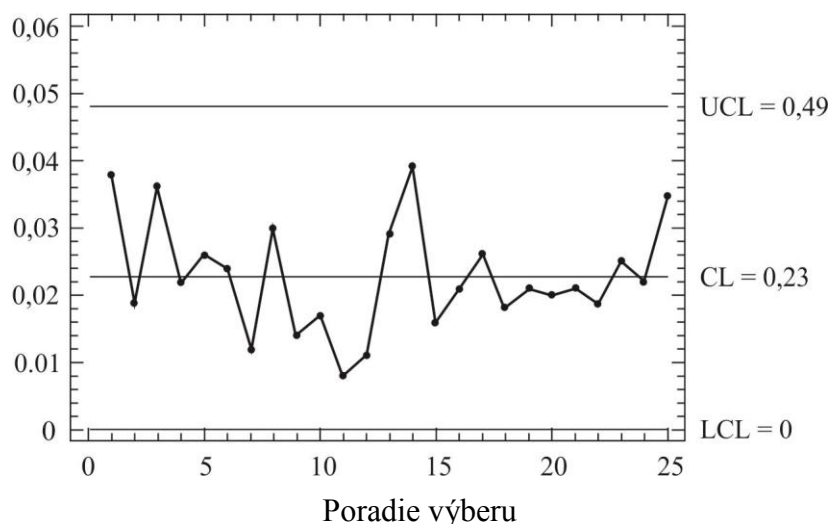
Pretože regulačný diagram R naznačuje, že variabilita procesu je v štatisticky zvládnutom stave (stabilná), môžeme konštruovať regulačný diagram $\bar{X}$, ktorého centrálna priamka je

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = \frac{1850,028}{25} = 74,001$$

Regulačné hranice pre regulačný diagram $\bar{X}$ vypočítame použitím hodnoty $A_2 = 0,577$, ktorú nájdeme v Prílohách pre rozsahy výberov $n = 5$. Použitím vzťahov (6.8) dostaneme:

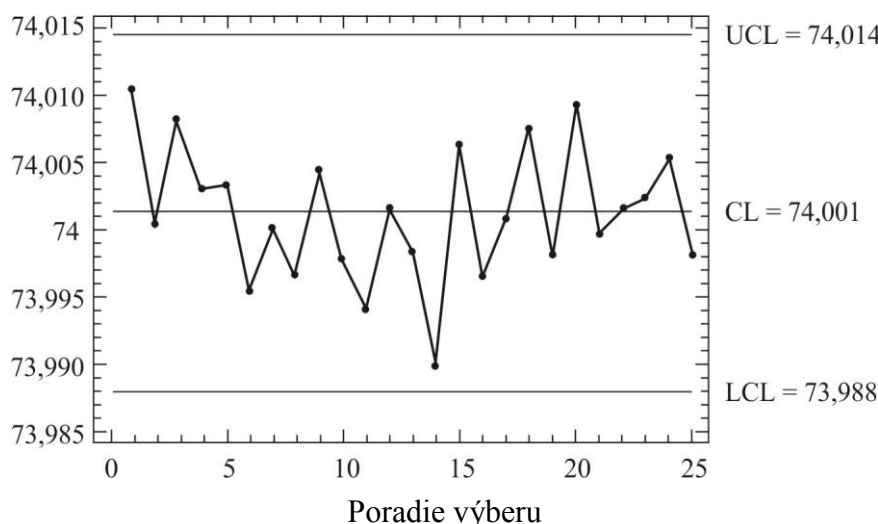
$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{r} = 74,001 + 0,577 \times 0,023 = 74,014$$

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{r} = 74,001 - 0,577 \times 0,023 = 73,988$$



Obr. 6.7 Diagram R (príklad 6.1)

Regulačný diagram $\bar{X}$ je na Obr. 6.8, kde predbežné výberové priemery nevykazujú žiadnu nestabilitu. Teda regulačné hranice regulačných diagramov $\bar{X}$ a R možno použiť na štatistickú reguláciu procesu.

Obr. 6.8 Diagram $\bar{X}$ (príklad 6.1)

Odhad spôsobilosti procesu

Regulačné diagramy $\bar{X}$ a R poskytujú aj informáciu o *spôsobilosti procesu*. Z regulačného diagramu $\bar{X}$ sme odhadli strednú hodnotu $\bar{\bar{x}} = 74,001$ mm piestnych krúžkov automobilového motora. Smerodajnú odchýlku procesu možno odhadnúť použitím vzťahu (6.6) takto:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{r}}{d_2} = \frac{0,023}{2,326} = 0,0099$$

kde hodnotu d_2 možno pre $n = 5$ nájsť v Prílohách.

Predpokladajme, že priemer piestnych krúžkov, čo je regulovaná veličina X , má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 74,001$ a smerodajnou odchýlkou $\sigma = 0,0099$ (parametre, ktoré sme odhadli). Špecifikačné hranice piestnych krúžkov sú $74 \pm 0,05$ mm. Na základe toho možno odhadnúť podiel produkovaných nezhodných piestnych krúžkov takto:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= P(X < 73,950) + P(X > 74,050) = \\ &= \phi\left(\frac{73,950 - 74,001}{0,0099}\right) + 1 - \phi\left(\frac{74,050 - 74,001}{0,0099}\right) = \\ &= \phi(-5,15) + 1 - \phi(4,04) \approx 0 + 1 - 0,99998 \approx 0,00002 \end{aligned}$$

To znamená, že približne 0,002 % vyrobených piestnych krúžkov má vnútorný priemer mimo špecifikačných hraníc, a teda sú nezhodné.

Pravidelná kontrola regulačných hraníc a centrálnej priamky

Efektívne využívanie každého regulačného diagramu všeobecne vyžaduje pravidelnú kontrolu a prípadnú úpravu regulačných hraníc a centrálnej priamky. Niekedy sa v praxi pevne stanoví interval pravidelnej kontroly centrálnej priamky a regulačných hraníc, napríklad každý týždeň, každý mesiac alebo každých 25, 50 alebo 100 výberov.

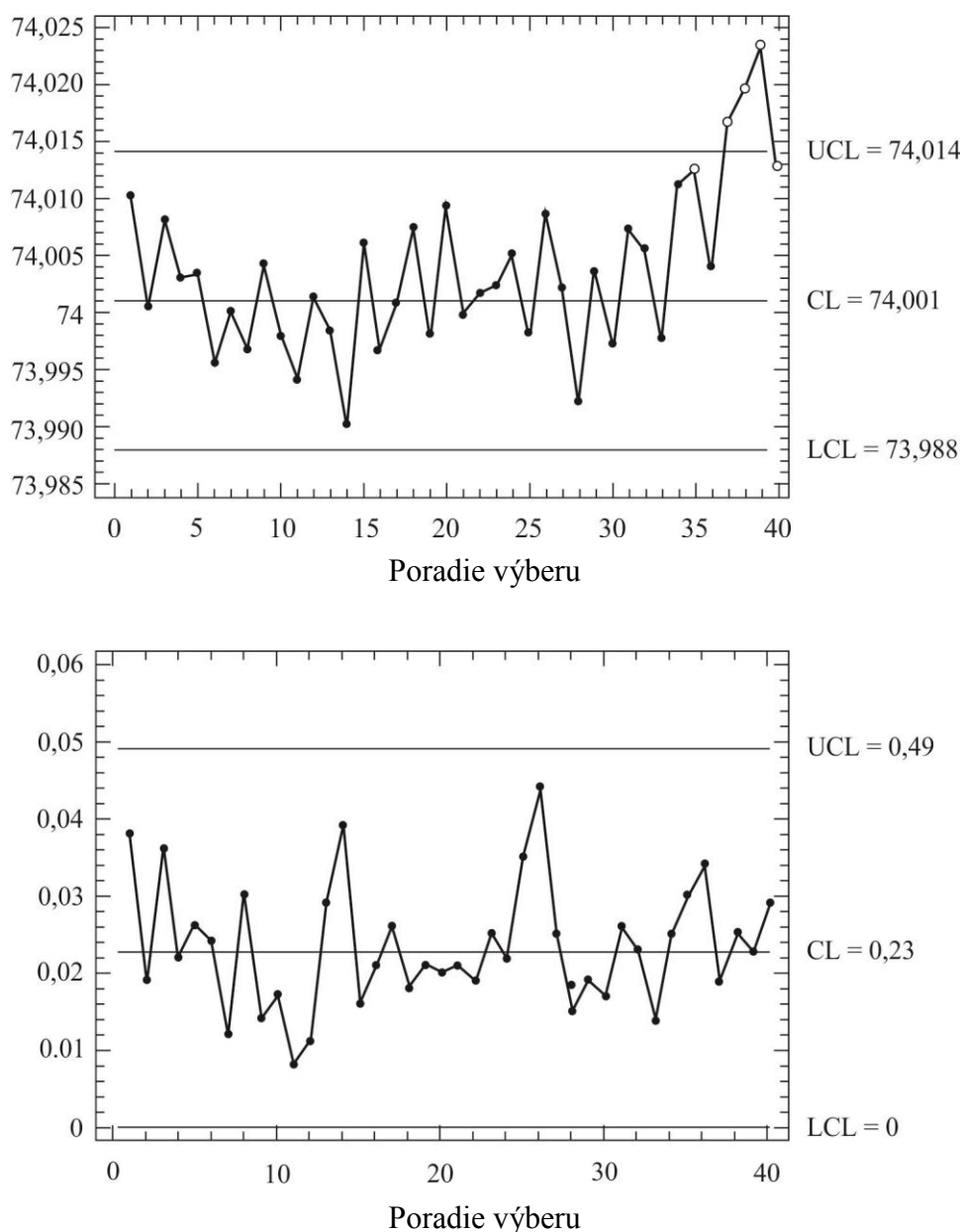
Keď sa v diagrame R objavia body nestability zvyčajne sa eliminujú a vypočíta sa nová hodnota $\bar{R}$. Táto nová hodnota sa potom použije na výpočet nových centrálnych priamok a nových regulačných hraníc diagramov R a $\bar{X}$. Tento postup môže zlepšiť regulačné hranice v oboch regulačných diagramoch v tom zmysle, že budú konzistentné so smerodajnou odchýlkou σ a konzistentné s revidovanou hodnotou $\bar{R}$ vo vzťahu $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$, s ktorého sa vypočíta hodnota odhadu σ . Túto hodnotu odhadu σ možno využiť v predbežnej analýze spôsobilosti procesu.

Pokračovanie v regulačných diagramoch $\bar{X}$ a R

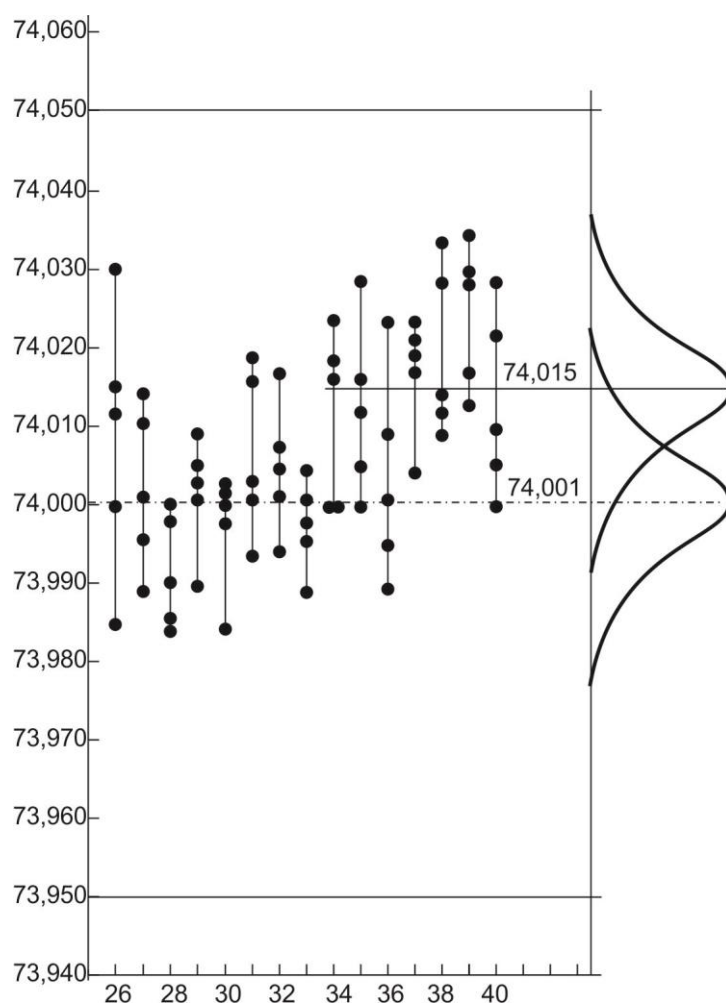
Ďalších pätnásť výberov sa urobilo vo výrobnom procese piestnych krúžkov, potom čo regulačné diagramy boli stanovené. Dáta z týchto nových výberov sú v Tab. 6.2 a pokračovanie regulačných diagramov na Obr. 6.9.

Tab. 6.2 Merania z ďalších výberov (pokračovanie príkladu 6.1)

Výber číslo i	Pozorovania					$\bar{x}_i$	r_i
26	74,012	74,015	74,030	73,986	74,000	74,009	0,044
27	73,995	74,010	73,990	74,015	74,001	74,002	0,025
28	73,987	73,999	73,985	74,000	73,990	73,992	0,015
29	74,008	74,010	74,003	73,991	74,006	74,004	0,019
30	74,003	74,000	74,001	73,986	73,997	73,997	0,017
31	73,994	74,003	74,015	74,020	74,004	74,007	0,026
32	74,008	74,002	74,018	73,995	74,005	74,006	0,023
33	74,001	74,004	73,990	73,996	73,998	73,998	0,014
34	74,015	74,000	74,016	74,025	74,000	74,011	0,025
35	74,030	74,005	74,000	74,016	74,012	74,013	0,030
36	74,001	73,990	73,995	74,010	74,024	74,004	0,034
37	74,015	74,020	74,024	74,005	74,019	74,017	0,019
38	74,035	74,010	74,012	74,015	74,026	74,020	0,025
39	74,017	74,013	74,036	74,025	74,026	74,023	0,023
40	74,010	74,005	74,029	74,000	74,020	74,013	0,029


Obr. 6.9 Pokračovanie diagram $\bar{X}$ a R (príklad 6.1)

Regulačné diagramy ukazujú, že proces je v štatisticky nezvládnutom stave, pretože hodnota $\bar{x}$ od 37. výberu po 39. výber sú nad hornou regulačnou hranicou. Ďalej diagram $\bar{X}$ od 34. výberovej hodnoty ukazuje posun strednej hodnoty procesu nahor. Priemer týchto výberových hodnôt sa rovná 74,015 mm a je spolu so špecifikačnými hranicami $74 \pm 0,05$ mm zakreslený na Obr. 6.10. V tejto časti proces vyrába nezhodné produkty (približne 0,021 %).

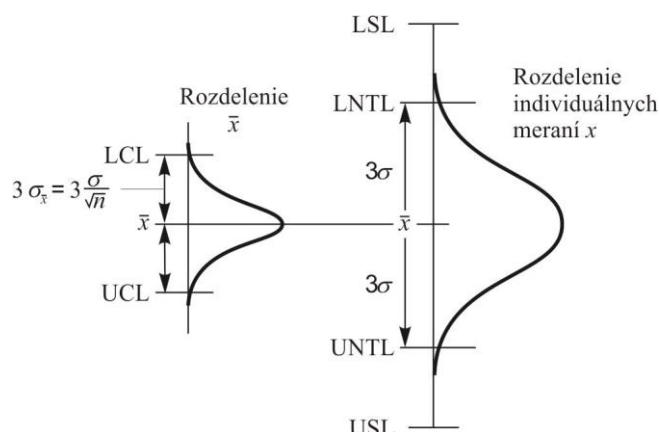


Obr. 6.10 Graf individuálnych pozorovaní zo špecifikačnými hranicami

Pátranie po príčine tohto posunu v priemere musí byť vykonané. Často operátori, výrobní technici, vedenie podniku a technickí kvalitatári musia nájsť a odstrániť zistiteľné príčiny.

Regulačné, špecifikačné a prirodzené tolerančné hranice

Všeobecne neexistuje vzťah medzi regulačnými hranicami v uvedených regulačných diagramoch a medzi špecifikačnými hranicami. Regulačné hranice vychádzajú s prirodzenej (inherentnej) variability procesu (meranej smerodajnou odchýlkou σ), to znamená z *prirodzených tolerančných hraníc* procesu. Obyčajne sa *horná prirodzená tolerančná hranica* UNTL a *dolná prirodzená tolerančná hranica* LNTL definuje ako 3σ nad a pod strednou hodnotou procesu. Špecifikačné hranice sú externe stanovené. Zvyčajne ich navrhujú návrhári, projektanti, konštruktéri alebo technológovia. Z hľadiska štatistiky alebo všeobecne matematiky neexistuje vzťah medzi *regulačnými hranicami* a *špecifikačnými hranicami*. Táto situácia je zhrnutá na Obr. 6.11. Zakresľovať do regulačného diagramu priemerov aj špecifikačné hranice je nesprávne. Naopak v grafe *individuálnych pozorovaní*, ako na Obr. 6.10, je užitočné zakresľovať aj špecifikačné hranice.



Obr. 6.11 Vzťah medzi regulačnými, špecifikačnými a prirodzenými tolerančnými hranicami

Logické podskupiny

Rešpektovanie princípu tvorby logických podskupín je veľmi dôležité aj pri aplikácii regulačných diagramov $\bar{X}$ a R . Dôsledné chápanie funkcie každého z uvedených regulačných diagramov môže uľahčiť rozhodovanie v praxi. Regulačný diagram $\bar{X}$ monitoruje strednú úroveň kvality v procese. Preto by sa mali výbery realizovať tak, aby sa maximalizovala šanca, že posun strednej hodnoty procesu sa vyskytne medzi výbermi a v regulačnom diagrame $\bar{X}$ sa prejaví ako zistiteľná príčina. Naopak, regulačný diagram R monitoruje variabilitu vnútri výberu. Preto by sa mali výbery realizovať tak, aby variabilita vnútri výberov bola spôsobená len náhodnými príčinami (nie zistiteľnými). Teda regulačný diagram $\bar{X}$ monitoruje variabilitu *medzi* výbermi a regulačný diagram R monitoruje variabilitu *vnútri* výberov.

Dôležitým aspektom problému je výpočet regulačných hraníc v regulačných diagramoch $\bar{X}$ a R na základe dát z minulosti. Pri výpočte regulačných hraníc sa musí vychádzať len z variability vnútri výberov. Bodový odhad smerodajnej odchýlky procesu σ , ktorý sa používa pri konštrukcii regulačných hraníc, meria variabilitu *vnútri* výberov (napr. odhad $\bar{R}/d_2$). Nie je správne odhadovať σ pomocou

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2}{mn-1}}$$

kde X_{ij} je j -té pozorovanie v i -tom výbere. Tento odhad meria *celkovú* variabilitu, teda variabilitu vnútri výberov plus variabilitu medzi výbermi. V dôsledku toho by veľkosť hodnoty odhadu smerodajnej odchýlky bola nadhodnotená.

Regulačné diagramy založené na stanovených hodnotách

Keď poznáme strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku procesu, môžeme tieto hodnoty použiť na konštrukciu regulačných diagramov bez toho, aby sme analyzovali dáta z minulosti.

Predpokladajme, že máme stanovené hodnoty μ_0 a σ_0 . Parametre regulačného diagramu $\bar{X}$ možno vypočítať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \\ \text{CL} &= \mu_0 \\ \text{LCL} &= \mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Veličina $A = 3/\sqrt{n}$ je funkcia n a jej hodnoty sú uvedené pre rôzne hodnoty n v Prílohách. Vzťahy (6.12) možno teda upraviť do konečnej formy:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + A\sigma_0 \\ \text{CL} &= \mu_0 \\ \text{LCL} &= \mu_0 - A\sigma_0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Pri konštrukcii regulačného diagramu R so smerodajnou odchýlkou σ vieme, že $\sigma = \frac{R}{d_2}$,

kde d_2 je stredná hodnota rozdelenia relatívneho rozpätia $W = \frac{R}{\sigma}$. Okrem toho smerodajná odchýlka R je $\sigma_R = d_3\sigma$, kde d_3 je smerodajná odchýlka rozdelenia relatívneho rozpätia. Teda parametre regulačného diagramu R možno napísať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= d_2\sigma_0 + 3d_3\sigma_0 \\ \text{CL} &= d_2\sigma_0 \\ \text{LCL} &= d_2\sigma_0 - 3d_3\sigma_0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Možno definovať konštanty

$$D_1 = d_2 - 3d_3 \quad \text{a} \quad D_2 = d_2 + 3d_3$$

Hodnoty D_1 a D_2 sú uvedené pre rôzne hodnoty n v Prílohách. Nakoniec možno vzťahy na výpočet parametrov regulačného diagramu R napísať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= D_2\sigma_0 \\ \text{CL} &= d_2\sigma_0 \\ \text{LCL} &= D_1\sigma_0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

V prípade, že hodnoty μ_0 a σ_0 sú stanovené, treba byť veľmi opatrný, pretože tieto hodnoty nemusia byť na proces reálne aplikovateľné. Regulačné diagramy môžu v dôsledku toho dá-

vať veľmi veľa signálov o narušení stability procesu. Proces môže byť v skutočnosti stabilný, avšak s inou strednou hodnotou a smerodajnou odchýlkou.

Smerodajná odchýlka σ_0 robí viac problémov ako hodnota μ_0 . V procesoch, kde sa stredná hodnota znaku kvality reguluje pri nastavovaní výrobného zariadenia, stanovená hodnota μ_0 môže byť niekedy užitočná na dosiahnutie cieľov pokiaľ ide o výkonnosť procesu.

6.5.2 Regulačné diagramy $\bar{X}$ a S

Ciele výučby

- Odvodiť vzorce pre výpočet parametrov diagramov $\bar{X}$ a S z nameraných dát.
- Odhadnúť smerodajnú odchýlku procesu.

Regulačné diagramy $\bar{X}$ a R sa v praxi používajú najčastejšie. Niekedy je užitočné použiť regulačný diagram priemerov spolu s regulačným diagramom výberových smerodajných odchýlok (S -diagram). Je to predovšetkým vtedy, keď:

1. rozsah výberu n je väčší ako 10,
2. rozsah výberu n sa mení.

Keď σ^2 je neznámy rozptyl normálneho rozdelenia pravdepodobnosti, potom nevychýlený odhad σ^2 je výberový rozptyl

$$S^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n-1}$$

Vieme, že S je vychýlený odhad smerodajnej odchýlky σ . Keď má náhodná premenná X normálne rozdelenie, potom:

$$\mu_S = c_4 \sigma \quad \text{a} \quad \sigma_S = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$$

kde μ_S a σ_S sú stredná hodnota a smerodajná odchýlka náhodnej premennej S . Veličina

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n-1/2)}$$

je funkcia rozsahu výberu n a jej hodnoty sú pre rôzne n uvedené v Prílohách.

Teraz možno vzťahy na výpočet regulačných hraníc a strednú priamku vypočítať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= c_4 \sigma + 3\sigma \sqrt{1 - c_4^2} \\ \text{CL} &= c_4 \sigma \\ \text{LCL} &= c_4 \sigma - 3\sigma \sqrt{1 - c_4^2} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Možno definovať konštanty

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1-c_4^2} \quad \text{a} \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1-c_4^2}$$

Po dosadení do predchádzajúcich vzťahov dostaneme

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= B_6 \sigma \\ \text{CL} &= c_4 \sigma \\ \text{LCL} &= B_5 \sigma \end{aligned} \tag{6.17}$$

kde B_5 a B_6 sú pre rôzne hodnoty n uvedené v Prílohách.

Keď hodnota σ je neznáma, musíme ju odhadnúť z dát. Predpokladajme, že máme m výberov, každý rozsahu n . Nech S_i je výberová smerodajná odchýlka i -tého výberu. Možno vypočítať výberový (aritmetický) priemer m výberových smerodajných odchýlok

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \tag{6.18}$$

Pretože $E(\bar{S}) = c_4 \sigma$, nevychýlený odhad parametra σ je:

$$\hat{\sigma} = \bar{S} / c_4 \tag{6.19}$$

Keď $\bar{S}$ je hodnota priemeru výberových smerodajných odchýlok m výberov, možno parametre 3σ -regulačného diagramu výberových smerodajných odchýlok vypočítať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1-c_4^2} \\ \text{CL} &= \bar{S} \\ \text{LCL} &= \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1-c_4^2} \end{aligned} \tag{6.20}$$

Definujme

$$B_3 = \frac{B_5}{c_4} = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1-c_4^2} \quad \text{a} \quad B_4 = \frac{B_6}{c_4} = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1-c_4^2}$$

a vzťahy na výpočet parametrov regulačného diagramu výberových smerodajných odchýlok zapíšeme v tvare:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= B_4 \bar{S} \\ \text{CL} &= \bar{S} \\ \text{LCL} &= B_3 \frac{\bar{S}}{c_4} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Hodnoty B_3 a B_4 sú pre rôzne n uvedené v Prílohách.

Keď použijeme $\hat{\sigma} = \bar{S} / c_4$ ako bodový odhad σ , parametre zodpovedajúceho regulačného diagramu priemerov vypočítame takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} \\ \text{CL} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{LCL} &= \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Nech

$$A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$$

potom parametre 3σ -regulačného diagramu možno vypočítať podľa vzťahov

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} \\ \text{CL} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{LCL} &= \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Hodnoty A_3 sú pre rôzne n uvedené v Prílohách.

Treba pripomenúť, že regulačné diagramy rozpätí sú málo citlivé na pomerne malé zmeny variability. V prípade, že je potrebné zachytiť tieto malé zmeny variability, musí sa zvoliť väčší rozsah výberu a namiesto regulačného diagramu rozpätí použiť spolu s regulačným diagramom priemerov regulačný diagram výberových smerodajných odchýlok.

Príklad 6.2

Budeme ilustrovať konštrukciu regulačných diagramov $\bar{X}$ a S na meraniach vnútorného priemeru piestnych krúžkov automobilového motora (pozri Tab. 6.2). Celkové priemery z hodnôt výberových priemerov a z hodnôt výberových smerodajných odchýlok sa vypočítajú takto:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{X}} &= \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i = \frac{1}{25} \times 1850,028 = 74,001 \\ \bar{S} &= \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} s_i = \frac{1}{25} \times 0,2238 = 0,009 \end{aligned}$$

Teda parametre pre regulačný diagram $\bar{X}$ sú

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} = 74,001 + 1,427 \times 0,009 = 74,014$$

$$CL = \bar{\bar{x}} = 74,001$$

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s} = 74,001 - 1,427 \times 0,009 = 73,988$$

Tab. 6.3 Merania vnútorného priemeru

Výber číslo i	Pozorovania					$\bar{x}_i$	s_i
1	74,030	74,002	74,019	73,992	74,008	74,010	0,0148
2	73,995	73,992	74,001	74,011	74,004	74,001	0,0072
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002	74,008	0,0106
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009	74,003	0,0091
5	73,992	74,007	74,015	73,989	74,014	74,003	0,0122
6	74,009	73,994	73,997	73,985	73,993	73,996	0,0087
7	73,995	74,006	73,994	74,000	74,005	74,000	0,0055
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988	73,997	0,0123
9	74,008	73,995	74,009	74,005	74,004	74,004	0,0055
10	73,998	74,000	73,990	74,007	73,995	73,998	0,0063
11	73,994	73,998	73,994	73,995	73,990	73,994	0,0029
12	74,004	74,000	74,007	74,000	73,996	74,001	0,0042
13	73,983	74,002	73,998	73,997	74,012	73,998	0,0105
14	74,006	73,967	73,994	74,000	73,984	73,990	0,0153
15	74,012	74,014	73,998	73,999	74,007	74,006	0,0073
16	74,000	73,984	74,005	73,998	73,996	73,997	0,0078
17	73,994	74,012	73,986	74,005	74,007	74,001	0,0106
18	74,006	74,010	74,018	74,003	74,000	74,007	0,0070
19	73,984	74,002	74,003	74,005	73,997	73,998	0,0085
20	74,000	74,010	74,013	74,020	74,003	74,009	0,0080
21	73,988	74,001	74,009	74,005	73,996	74,000	0,0053
22	74,004	73,999	73,990	74,006	74,009	74,002	0,0074
23	74,010	73,989	73,990	74,009	74,014	74,002	0,0119
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010	74,005	0,0087
25	73,982	73,984	73,995	74,017	74,013	73,998	0,0162

a pre regulačný diagram S

$$UCL = B_4\bar{s} = 2,089 \times 0,009 = 0,019$$

$$CL = \bar{s} = 0,009$$

$$LCL = B_3\bar{s} = 0 \times 0,009 = 0$$

Regulačné diagramy sú na Obr. 6.12.

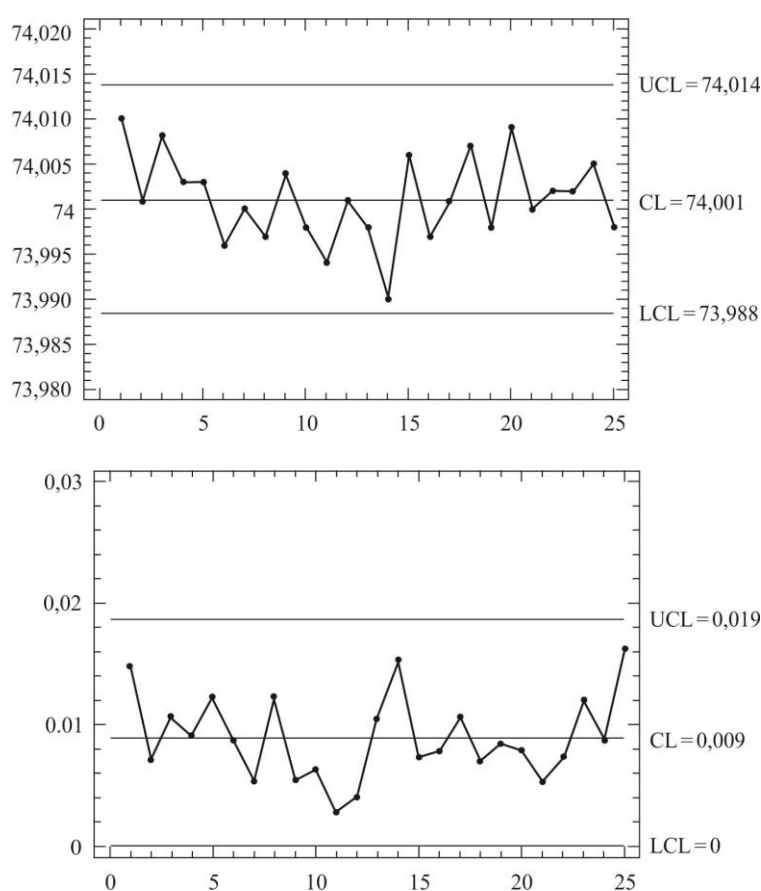
Všimnime si, že regulačné hranice pre regulačný diagram $\bar{X}$ založené na $\bar{S}$ sú identické s tými, ktoré sú založené na $\bar{R}$. Nebude to vždy takto. Všeobecne platí, že regulačné hranice regulačného diagramu $\bar{X}$ založené na $\bar{S}$ sa budú mierne líšiť od tých, ktoré sú založené na $\bar{R}$.

Odhad smerodajnej odchýlky procesu σ

Smerodajnú odchýlku procesu možno odhadnúť zo vzťahu (6.15), kde $c_4 = 0,9400$, takto:

$$\hat{\sigma} = \bar{s} / c_4 = 0,0090 / 0,9400 = 0,0096$$

Tento odhad je veľmi podobný tomu, ktorý je založený $\bar{R}$.



Obr. 6.12 Regulačné diagramy $\bar{X}$ a S

6.6 Regulačné diagramy individuálnych meraní

Ciele výučby

- ☐ Definovať pojem *kľzavé rozpätie*.
- ☐ Stanoviť parametre regulačných diagramov kľzavých rozpätí a individuálnych hodnôt.
- ☐ Interpretovať regulačný diagram individuálnych hodnôt a kľzavých rozpätí.

Existuje mnoho situácií, keď je užitočné zvoliť rozsah výberu $n = 1$. Príklady niektorých situácií sú tieto:

1. V procese sa používa automatická kontrola a meranie, pričom každá vyrobená jednotka sa meria a analyzuje.
2. Výrobný cyklus je veľmi pomalý a nie je vhodné čakať, kým sa akumuluje výber s rozsahom $n > 1$.
3. Opakované merania v procese sa líšia len preto, že chyby nastali v laboratóriu alebo analýze, rovnako ako v mnohých chemických procesoch.
4. V kontinuálnej výrobe plošných produktov, napríklad pri výrobe papiera, textílie a podobne, sa môžu hodnoty nejakého parametra, napríklad hrúbky papiera meranej naprieč pásom, len veľmi málo líšiť a poskytovať oveľa menšie hodnoty smerodajnej odchýlky, ako hodnoty hrúbky papiera meranej pozdĺž pásu.

V takýchto situáciách sú užitočné regulačné diagramy individuálnych meraní. Regulačná procedúra používa na odhad variability v procese kľzavé rozpätie dvoch bezprostredne nasledujúcich pozorovaní. Kľzavé rozpätie je definované ako $MR_i = |X_i - X_{i-1}|$.

Nech MR_i , $i = 1, 2, \dots, m$ sú hodnoty kľzavých rozpätí m výberov. Priemer kľzavých rozpätí je

$$\overline{MR} = \frac{MR_1 + MR_2 + \dots + MR_m}{m}$$

Nevychýlený bodový odhad smerodajnej odchýlky σ možno využitím priemeru kľzavých rozpätí formulovať takto:

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{d_2} = \frac{\overline{MR}}{1,128} \quad (6.24)$$

pretože $d_2 = 1,128$, keď dve bezprostredne nasledujúce pozorovania sa použijú pri výpočte kľzavého rozpätia. Možno je vytvoriť aj regulačný diagram kľzavého rozpätia pomocou D_3 a D_4 pre $n = 2$.

Keď použijeme $\bar{\bar{x}}$ ako bodový odhad strednej hodnoty μ a (6.24) ako bodový odhad smerodajnej odchýlky σ , potom parametre regulačného diagramu individuálnych hodnôt sú

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} = \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\overline{MR}}{1,128} \\ \text{CL} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{LCL} &= \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} = \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\overline{MR}}{1,128} \end{aligned} \quad (6.25)$$

a parametre regulačného diagramu kľzavých rozpätí

$$\begin{aligned}
 UCL &= D_4 \times \overline{MR} = 3,267 \overline{MR} \\
 CL &= \overline{MR} \\
 LCL &= D_3 \times \overline{MR} = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

kde $\overline{MR}$ je hodnota priemeru kĺzavých rozpätí.

Príklad 6.3

Viskozita základného náteru lietadla je dôležitá charakteristika kvality. Tento produkt sa vyrába v dávkach, pričom výroba každej dávky trvá niekoľko hodín. Rýchlosť výroby je príliš malá, aby rozsah výberu bol väčší ako jedna. Hodnoty viskozity 15 dávok sú v Tab. 6.4.

Tab. 6.4 Viskozita základného náteru lietadla

Dávka číslo	Viskozita x	Kĺzavé Rozpätie MR
1	33,75	
2	33,05	0,70
3	34,00	0,95
4	33,81	0,19
5	33,46	0,35
6	34,02	0,56
7	33,68	0,34
8	33,27	0,41
9	33,49	0,22
10	33,20	0,29
11	33,62	0,42
12	33,00	0,62
13	33,54	0,54
14	33,12	0,42
15	33,84	0,72

Na stanovenie parametrov regulačného diagramu individuálnych hodnôt a regulačného diagramu kĺzavých rozpätí sme z 15 hodnôt viskozity (Tab. 6.4) vypočítali hodnotu výberového priemeru $\bar{x} = 33,52$ a hodnotu priemeru kĺzavých rozpätí $\overline{MR} = 0,48$.

Vieme, že regulačný diagram kĺzavých rozpätí pre $n = 2$ má hodnoty $D_3 = 0$ a $D_4 = 3,267$. Potom parametre regulačného diagramu kĺzavých rozpätí sa vypočítajú takto:

$$\begin{aligned}
 UCL &= D_4 \times \overline{MR} = 3,267 \times 0,48 = 1,57 \\
 CL &= \overline{MR} = 0,48 \\
 LCL &= D_3 \times \overline{MR} = 0
 \end{aligned}$$

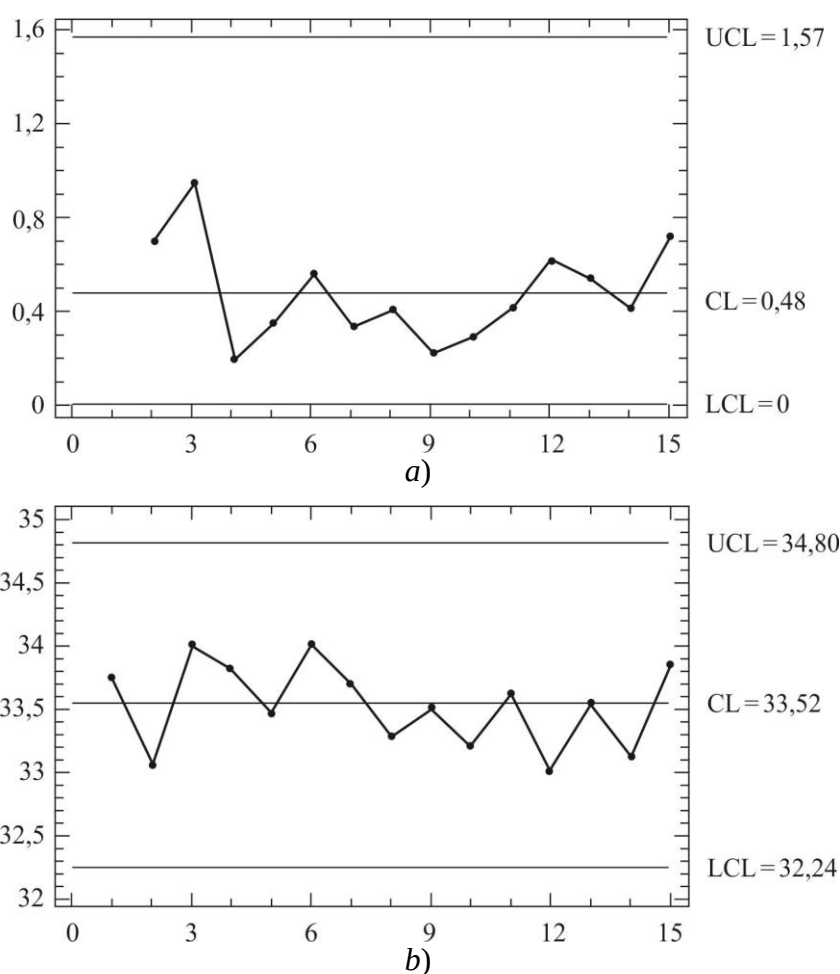
Regulačný diagram je na obrázku Obr. 6.13a. Pretože žiadny bod nie je nad hornou regulačnou hranicou, môžeme vypočítať parametre regulačného diagramu individuálnych hodnôt viskozity takto:

$$UCL = \bar{x} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} = 33,52 + 3 \times \frac{0,48}{1,128} = 34,80$$

$$CL = \bar{x} = 32,52$$

$$LCL = \bar{x} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} = \bar{x} - 3 \times \frac{0,48}{1,128} = 32,24$$

Regulačný diagram individuálnych hodnôt viskozity je na obrázku Obr. 6.13b. Neexistuje žiadny náznak nestability procesu (štatisticky nezvládnutého stavu).



Obr. 6.13 Regulačné diagramy: a) kľavých rozpätí, b) individuálnych hodnôt

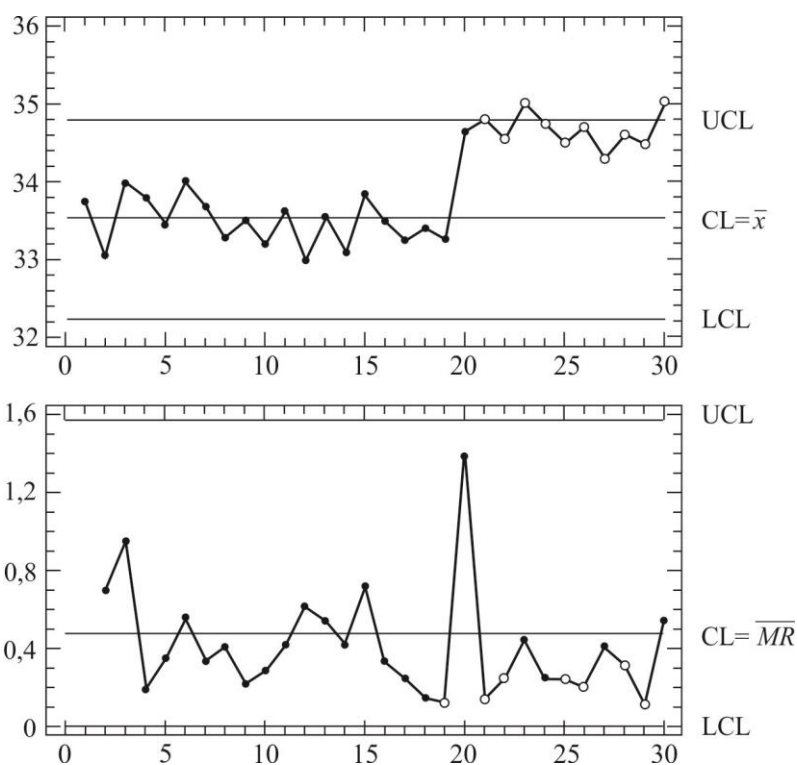
Interpretácia regulačného diagramu

Regulačný diagram individuálnych hodnôt možno interpretovať v podstate ako regulačný diagram priemerov $\bar{X}$. Posun v procese priemeru bude mať za následok buď bod (alebo body) mimo regulačných hraníc, alebo obrazec skladajúci sa z behu na jednej strane centrálnej priamky.

Tab. 6.5 obsahuje dáta z viskozity základného náteru lietadla pre dávky 16 až 30. Tieto dáta sú zakreslené na Obr. 6.14 na regulačnom diagrame individuálnych hodnôt a regulačnom diagrame kľzavých rozpätí spolu s dátami s Tab. 6.4.

Tab. 6.5 Viskozita základného náteru lietadla (dávky 16 až 30)

Dávka číslo	Viskozita x	Kľzavé rozpätie MR
16	33,50	0,34
17	33,25	0,25
18	33,40	0,15
19	33,27	0,13
20	34,65	1,38
21	34,80	0,15
22	34,55	0,25
23	35,00	0,45
24	34,75	0,25
25	34,50	0,25
26	34,70	0,20
27	34,29	0,41
28	34,61	0,32
29	34,49	0,12
30	35,03	0,54



Obr. 6.14 Pokračovanie regulačného diagramu individuálnych hodnôt a kľzavých rozpätí s pridanými dátami (príklad 6.4)

Z obrázka vidieť, že posun v regulačnom diagrame strednej hodnoty viskozity smerom nahor nastal v bode 20. Všimnime si, že regulačný diagram kľavých rozpätí tiež reaguje na tento posun v bode 20.

6.7 Regulačné diagramy na reguláciu porovnávaním

Niekedy je užitočné posudzovať jednotku len z hľadiska jej zhody alebo nezhody s definovanou špecifikáciou ukazovateľa kvality. Z hľadiska danej špecifikácie potom rozoznávame iba dva stavy jednotky: „zhodná“ a „nezhodná“. Vtedy hovoríme o štatistickej regulácii porovnávaním.

6.7.1 Regulačné diagramy podielu nezhodných jednotiek (*p*-diagramy)

Ciele výučby

- ☐ Definovať binomické rozdelenie.
- ☐ Stanoviť výberový podiel nezhodných jednotiek.
- ☐ Stanoviť parametre diagramu pre podiel nezhodných jednotiek v prípade konštantného rozsahu výberov a premenlivého rozsahu výberov.

Ak vo výrobnom procese každá jednotka, ktorá je monitorovaná, je označená buď ako zhodná alebo nezhodná, vyhovujúca alebo nevyhovujúca, dobrá alebo zlá (aj keď určitá jednotka obsahuje niekoľko zistiteľných nezhôd, je chápaná iba ako jediná nezhodná jednotka), na monitorovanie a riadenie takého procesu sa používa *p*-diagram resp. *np*-diagram. Diagram *p* sa nazýva aj diagram podielu nezhodných jednotiek, ktorý udáva podiel nezhodných jednotiek v monitorovanej dávke. V podskupinách sledujeme počet nezhodných jednotiek. Diagram *p* je založený na binomickom rozdelení, preto tu stačí jeden diagram, lebo predpokladané rozdelenie má len jeden nezávislý parameter, priemernú hodnotu počtu nezhodných jednotiek v podskupinách.

Nech *D* je počet nezhodných jednotiek v náhodnom výbere (ďalej výbere) rozsahu *n*. Predpokladáme, že *D* je binomická náhodná premenná s neznámym parametrom *p*. Potom jej rozdelenie je

$$P(D = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n$$

Výberový podiel nezhodných jednotiek, ktorý je definovaný ako podiel nezhodných jednotiek *D* a rozsahu výberu *n*, je daný takto:

$$\hat{p} = \frac{D}{n} \quad (6.27)$$

Z teórie vieme, že stredná hodnota a rozptyl štatistiky $\hat{P}$ sú

$$\mu = p \quad (6.28)$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (6.29)$$

Teraz ukážeme, ako túto teóriu možno aplikovať na konštrukciu regulačného diagramu podielu nezhodných jednotiek.

Teda p -diagram pre podiel nezhodných jednotiek možno konštruovať pomocou p ako centrálnej priamky a regulačných hraníc

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ \text{CL} &= p \\ \text{LCL} &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Skutočný podiel nezhodných jednotiek v procese je takmer vždy neznámy, preto sa musí odhadnúť z dát predbežných výberov.

Konštantný rozsah výberov

Predpokladajme, že máme k dispozícii m náhodných výberov, každý rozsahu n . Nech D_i je počet nezhodných jednotiek v i -tom výbere. Potom podiel nezhodných v i -tom výbere je

$$\hat{P}_i = \frac{D_i}{n} \quad x = 0, 1, \dots, m \quad (6.31)$$

Priemer výberových podielov

$$\bar{P} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{P}_i = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m D_i \quad (6.32)$$

je bodový odhad podielu p nezhodných jednotiek. Bežne sa realizuje m predbežných výberov, každý o rozsahu n . Odporúča sa počet výberov 20 až 25. Potom sa vypočítajú hodnoty p_i a $\bar{p}$ náhodných premenných $\hat{P}_i$ a $\bar{P}$:

$$p_i = \frac{d_i}{n} \quad x = 0, 1, \dots, m \quad \text{a} \quad \bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{m} \quad (6.33)$$

Vzťahy na výpočet regulačných hraníc a centrálnej priamky možno vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned}
 UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\
 CL &= \bar{p} \\
 LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}
 \end{aligned}
 \tag{6.34}$$

Príklad 6.4

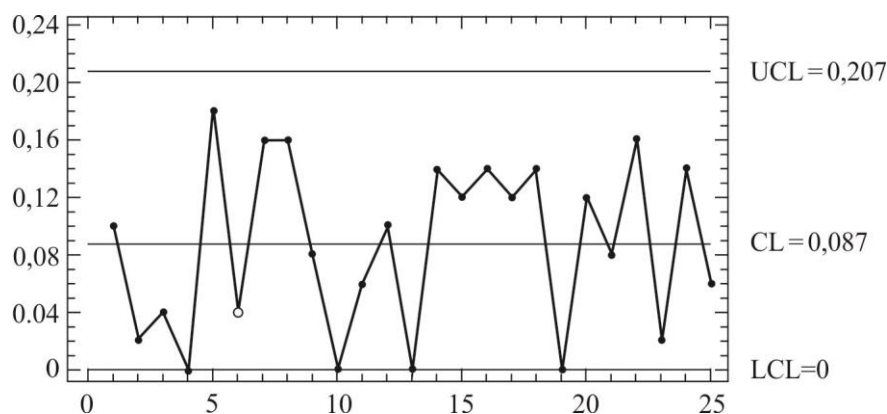
Výrobca počítačových čipov používa elektrické testy na kontrolovanie elektrických obvodov v čipoch. Čip je hodnotený buď ako zhodný (dobrý), alebo nezahodný (nepodarok). Na monitorovanie a reguláciu podielu nezahodných čipov sa používa regulačný diagram podielu nezahodných jednotiek. Manažment rozhodol, že sa bude kontrolovať 50 čipov v 6-hodinových intervaloch.

V nasledujúcej tabuľke sú prezentované dáta z 25 výberov o rozsahu 50 vybraných počas 150 hodín. Každých 6 hodín 50 čipov bolo vybraných z montážnej linky a testovaných. Počet nezahodných z jednotlivých výberov a percentuálny podiel nezahodných je v nasledujúcej tabuľke.

Číslo výberu i	Počet nezahodných	Podiel nezahodných p	Číslo výberu i	Počet nezahodných	Podiel nezahodných p
1	5	0,10	14	7	0,14
2	1	0,02	15	6	0,12
3	2	0,04	16	7	0,14
4	0	0,00	17	6	0,12
5	9	0,18	18	7	0,14
6	2	0,04	19	0	0,00
7	8	0,16	20	6	0,12
8	8	0,16	21	4	0,08
9	4	0,08	22	8	0,16
10	0	0,00	23	1	0,02
11	3	0,06	24	7	0,14
12	5	0,10	25	3	0,06
13	0	0,00			

Zo vzťahu (6.28) vypočítame priemerný podiel nezahodných jednotiek je $\bar{p} = 0,087$. Potom parametre regulačného diagramu podielu nezahodných jednotiek sú

$$UCL = 0,087 + 3 \times \sqrt{\frac{0,087 \times (1 - 0,087)}{50}} = 0,207 \quad CL = 0,087 \quad LCL = 0$$



Obr. 6.15 Regulačný diagram čipov

Z diagramu vidno, že všetky body ležia vnútri regulačných hraníc. Na základe tohto možno prijať predpoklad, že výbery boli realizované v podmienkach stability procesu.

Premenlivý rozsah výberov

Predpokladajme, že máme m náhodných výberov, pričom každý z výberov má iný rozsah. Rozsah i -tého výberu je n_i . Nech D_i je počet nezhodných jednotiek v i -tom výbere, potom podiel nezhodných v i -tom výbere je $\hat{P}_i = D_i / n_i$. Priemerný podiel nezhodných jednotiek sa vypočíta zo vzťahu

$$\bar{P} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{P}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{D_i}{n_i} \quad (6.35)$$

Vzťahy na výpočet regulačných hraníc a centrálnej priamky možno vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}} \\ \text{CL} &= \bar{p} \\ \text{LCL} &= \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

kde $\bar{p} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{n_i}$ je pozorovaná hodnota priemerného podielu nezhodných jednotiek.

Pri zmene n (rozsahu podskupiny) sa menia aj regulačné medze (UCL, LCL), preto je potrebné pre každú podskupinu vypočítať revidované regulačné medze. Z praktických dôvodov sa regulačné medze niekedy vypočítajú pre priemernú hodnotu rozsahov podskupín ($\bar{n}$).

Príklad 6.5

Firma vyrába vysoko kvalitný alkoholický nápoj k príležitostným oslavám v limitovanom množstve. Každá fľaša nápoja je kontrolovaná, či neobsahuje trhliny, praskliny alebo iné poruchy. Ak fľaša obsahuje chybu, považuje sa za nezhodnú a je vyradená z plniaceho procesu. Manažment firmy chce mať proces vyrábania fliaš pod kontrolou, preto sa rozhodne zostrojiť

p -diagram, na základe nameraných dát, ktoré sú uvedené v nasledujúcej tabuľke. Rozsah výberu je premenlivý a je identický s počtom vyrábaných fliaš. V tabuľke je uvedený počet vyrobených a vyraďených fliaš, počas posledných 20 dní.

Deň i	Vyrob. flaše	Nezhod. flaše	Podiel p	Deň i	Vyrob. flaše	Nezhod. flaše	Podiel p
1	109	8	0,073	11	966	56	0,060
2	405	12	0,030	12	254	13	0,051
3	581	17	0,029	13	474	11	0,023
4	969	45	0,046	14	842	42	0,050
5	446	28	0,063	15	865	26	0,030
6	264	8	0,030	16	272	16	0,059
7	574	29	0,051	17	425	12	0,028
8	779	23	0,030	18	492	23	0,047
9	970	60	0,062	19	508	14	0,028
10	725	42	0,058	20	402	16	0,040

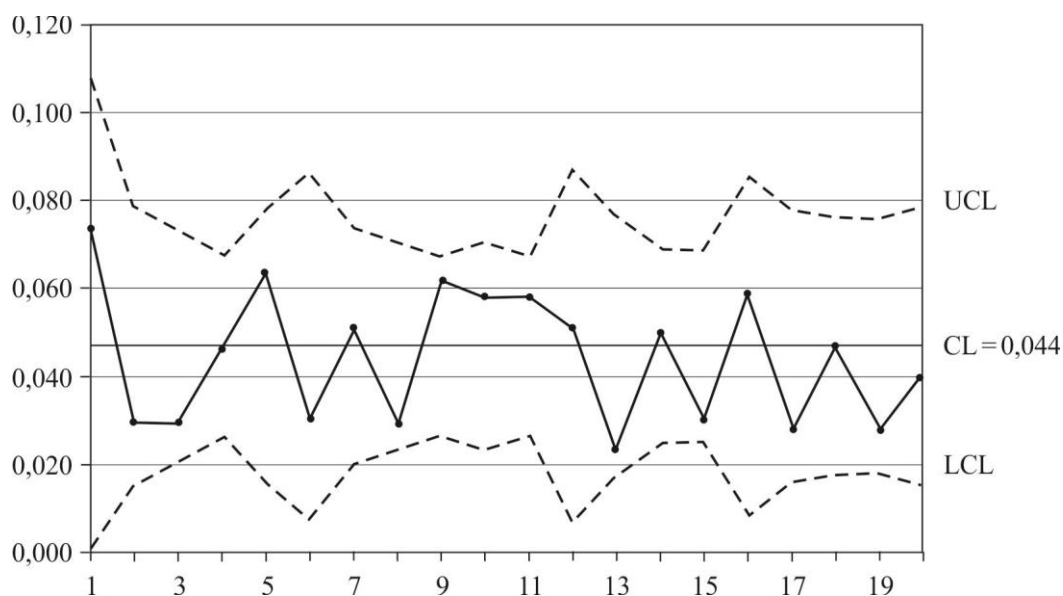
Celkový počet vyrábaných fliaš je 11 322.

Centrálna priamka:

$$CL = \frac{(0,073 \cdot 109 + 0,030 \cdot 405 + 0,029 \cdot 581 + \dots + 0,040 \cdot 402)}{11322} = 0,044$$

Regulačné hranice:

$$UCL = 0,047 + 3 \sqrt{\frac{0,047(1-0,047)}{n_i}} \quad LCL = 0,047 - 3 \sqrt{\frac{0,047(1-0,047)}{n_i}}$$



Obr. 6.16 Regulačný diagram podielu nezhodných fliaš

Tabuľka vypočítaných parametrov

Výber i	Početnosť	Nezhodné p	Podiel	UCL	LCL
1	109	8	0,073	0,105	0
2	405	12	0,030	0,076	0,013
3	581	17	0,029	0,071	0,018
4	969	45	0,046	0,065	0,024
5	446	28	0,063	0,074	0,014
6	264	8	0,030	0,083	0,005
7	574	29	0,051	0,071	0,018
8	779	23	0,030	0,067	0,022
9	970	60	0,062	0,065	0,024
10	725	42	0,058	0,068	0,021
11	966	56	0,060	0,065	0,024
12	254	13	0,051	0,084	0,004
13	474	11	0,023	0,073	0,015
14	842	42	0,050	0,066	0,022
15	865	26	0,030	0,066	0,023
16	272	16	0,059	0,083	0,006
17	425	12	0,028	0,075	0,013
18	492	23	0,047	0,073	0,016
19	508	14	0,028	0,072	0,016
20	402	16	0,040	0,076	0,013

Z diagramu vidno, že všetky body ležia vnútri regulačných hraníc. Na základe tohto možno prijať predpoklad, že proces vyrábania fliaš je v štatisticky zvládnutom stave.

Parametre regulácie pomocou p -diagramu

Bude nás zaujímať rozsah a frekvencia výberov. Často je užitočné realizovať 100 %-nú kontrolu produkcie v nejakých vhodných časových úsekoch, napríklad vo vybraných dňoch. V tomto prípade sú rozsah aj frekvencia výberov zrejmé.

Keď sa realizuje výber z produkcie, je nevyhnutné zvoliť rozsah výberu n . Keď je p veľmi malé, odporúča sa voliť pomerne veľké n , aby bola veľká pravdepodobnosť toho, že vo výbere nájdeme aspoň jednu nezhodnú jednotku. Inak sa môže stať, že nenájdeme také regulačné hranice, pri ktorých prítomnosť jedinej nezhodnej jednotky vo výbere bude indikovať narušenie stability procesu.

Všimnime si nasledujúci príklad. Nech $p = 0,01$ a $n = 8$, potom $UCL = 0,1155$. Keď je vo výbere jediná nezhodná jednotka, potom $\hat{p} = 1/8 = 0,1250$, čo je bod nad hornou regulačnou hranicou, teda signalizuje nestabilitu procesu. Vzhľadom na to, že pre ľubovoľné $p > 0$ je pravdepodobnosť výskytu nezhodnej jednotky vo výbere nenulová, je spravidla nereálne prijať predpoklad o narušení stability procesu vtedy, keď sa vo výbere objaví jediná nezhodná jednotka.

Duncan (1974) navrhol nasledujúci postup, ktorý umožňuje pomerne uspokojivo riešiť tento problém. Predpokladajme, že chceme, aby p -diagram s pravdepodobnosťou 0,5 signalizoval narušenie stability pri zväčšení podielu nezhodných jednotiek z p_0 na podiel $p = UCL$. Predpokladajme, že rozdelenie pravdepodobnosti výberového podielu P je približne normálne (rozsah výberu n je veľký).

Testujeme nasledujúcu dvojicu jednoduchých hypotéz:

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : p = UCL$$

Zrejme $\beta = P(P < UCL | H_1) = 0,5$. Potom aj $(1 - \beta)$ – pravdepodobnosť toho, že p -diagram deteguje posun podielu nezhodných jednotiek z p_0 na UCL – sa rovná 0,5.

Vieme, že

$$UCL = p_0 + 3 \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

Označme

$$\Delta = 3 \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \quad (6.37)$$

Zo (6.32) po jednoduchých úpravách dostaneme

$$n = \left(\frac{3}{\Delta} \right)^2 p_0(1-p_0) \quad (6.38)$$

Rozsah výberu n závisí od veľkosti zmeny podielu nezhodných jednotiek Δ , ktoré chceme detegovať pomocou p -diagramu s pravdepodobnosťou 0,5.

Vypočítajme napríklad rozsah výberu, ktorý je potrebný na to, aby 3σ -regulačný diagram podielu nezhodných jednotiek s pravdepodobnosťou detegoval posun podielu nezhodných jednotiek z 0,01 na 0,05:

$$n = \left(\frac{3}{0,05 - 0,01} \right)^2 0,01 \times (1 - 0,01) = 56$$

Keď je p malé, možno pri hľadaní vhodného rozsahu výberu n využiť napríklad požiadavku, aby

$$LCL = p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} > 0$$

z čoho dostaneme

$$n > \frac{1-p}{p} \cdot 3^2 \quad (6.39)$$

V procese hľadania parametrov regulácie pomocou p -diagramov možno využiť grafy operatívnej charakteristiky testu a hodnoty ARL podobne, ako pri regulačných diagramoch priemerov. Vieme, že riziko chýbajúceho signálu β , čo je pravdepodobnosť chyby 2. druhu regulačného diagramu podielu nezhodných jednotiek, možno vypočítať podľa vzťahu:

$$\begin{aligned}\beta &= P(LCL \leq P < UCL | p = p_1 \neq p_0) = \\ &= P(P < UCL | p = p_1 \neq p_0) - P(P \leq LCL | p = p_1 \neq p_0) = \\ &= P(D < nUCL | p = p_1 \neq p_0) - P(D \leq nLCL | p = p_1 \neq p_0)\end{aligned}$$

kde D je binomická náhodná premenná s parametrami n a p .

6.7.2 Regulačné diagramy počtu nezhodných jednotiek (np -diagramy)

Ciele výučby

- ☐ Definovať počet nezhodných jednotiek pomocou aproximácie binomického rozdelenie normálnym rozdelením.
- ☐ Stanoviť parametre diagramu pre počet nezhodných jednotiek v prípade neznámeho podielu p a známeho podielu $p = p_0$.

Alternatívne možno založiť regulačné diagramy na počte nezhodných jednotiek, nie na ich podiele. Majme náhodnú premennú D – počet nezhodných jednotiek vo výbere rozsahu n s binomickým rozdelením pravdepodobnosti, s parametrami n a p .

Je známe, že pre veľké n možno binomické rozdelenie aproximovať normálnym. Môžeme teda prijať predpoklad (pre veľké n), že náhodná premenná D má približne normálne rozdelenie s parametrami:

$$\mu_D = np \quad \text{a} \quad \sigma_D = \sqrt{np(1-p)}$$

Podobným postupom, ako pri hľadaní regulačných hraníc pre p -diagram, získame nasledujúce vzťahy na výpočet centrálnej priamky a regulačných hraníc:

$$\begin{aligned}UCL &= np + 3\sqrt{np(1-p)} \\ CL &= np \\ LCL &= np - 3\sqrt{np(1-p)}\end{aligned} \tag{6.40}$$

Keď je podiel p stanovený na úrovni $p = p_0$, možno parametre regulačného diagramu vypočítať takto:

$$\begin{aligned}UCL &= np_0 + 3\sqrt{np_0(1-p_0)} \\ CL &= np_0\end{aligned} \tag{6.41}$$

$$LCL = np_0 - 3\sqrt{np_0(1-p_0)}$$

Keď hodnota p nie je stanovená, odhadujeme ju na báze dát z minulosti pomocou bodového odhadu $\bar{p}$ a parametre regulačného diagramu budú takéto:

$$\begin{aligned} UCL &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ CL &= n\bar{p} \\ LCL &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \end{aligned} \quad (6.42)$$

6.7.3 Regulačné diagramy nezhôd

Ciele výučby

- ☐ Definovať Poissonovo rozdelenie.
- ☐ Stanoviť parametre diagramu pre počet nezhôd v prípade známeho $c = c_0$.
- ☐ Stanoviť parametre diagramu pre priemerný počet nezhôd $\bar{c}$ na kontrolnej jednotke.
- ☐ Stanoviť parametre regulačného diagramu počtu nezhôd na jednotku (u -diagram).

Nezhodný objekt je definovaná jednotka produktu, ktorá nevyhovuje jednej alebo viacerým daným špecifikáciám. Každý špecifický bod, v ktorom nie je dodržaná špecifikácia, sa nazýva *nezhoda*. Nezhodný objekt tak obsahuje aspoň jednu nezhodu. To, čo budeme považovať za nezhodný objekt, však závisí od našej definície. Objekt, ktorý obsahuje viacero nezhôd, nemusí byť v zmysle danej definície nezhodného objektu nezhodný.

Predpokladajme napríklad, že vyrábame schránky na monitor z plastu. Každá schránka, obsahujúca niekoľko miniatúrnych trhlín, ktoré však relevantným spôsobom neovplyvnia jej funkčnosť, môže byť klasifikovaná ako zhodná. Keď je však trhlín viac, ako stanovený prípustný počet, je možné, že to zákazník zaregistruje, čo môže mať negatívny vplyv na predajnosť produktu. Schránku je nevyhnutné klasifikovať ako nezhodnú.

Existuje mnoho situácií, v ktorých je vhodnejšie pracovať s počtom nezhôd, ako s podielom nezhodných jednotiek. Možno formulovať regulačné diagramy počtu nezhôd (uvažuje sa počet nezhôd na jednotke) a regulačné diagramy počtu nezhôd na jednotku (uvažuje sa počet nezhôd pripadajúci na jednotku). Objavenie sa nezhôd vo výberoch konštantného rozsahu sa obyčajne modeluje Poissonovým rozdelením. To predpokladá, že počet potenciálnych umiestnení nezhôd je nekonečne veľký a pravdepodobnosť toho, že sa nezhoda objaví na definovanom mieste, je konštantná a blízka nule. Okrem toho sa pre každý výber predpokladá rovnaká *kontrolná jednotka*. To znamená, že každá kontrolná jednotka musí reprezentovať rovnaký „priestor“ na objavenie nezhôd. Na jednej kontrolnej jednotke možno všeobecne spočítavať nezhody viacerých druhov.

Všeobecne budeme kontrolnou jednotkou chápať ľubovoľný objekt, v ktorom chceme sledovať počet nezhôd. Môže napríklad ísť o jeden produkt, o súbor viacerých produktov, o presne definovanú časť produktu (napr. o 1 meter kontinuálne vyrábaného pásu látky) atď.

Regulačné diagramy počtu nezhôd (c-diagramy)

Predpokladajme, že nezhody sa vyskytujú na kontrolnej jednotke podľa Poissonovho rozdelenia

$$f(x) = \frac{e^{-c} c^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

kde x je počet nezhôd a $c > 0$ je parameter Poissonovho rozdelenia. Vieme, že stredná hodnota a rozptyl Poissonovho rozdelenia je parameter c .

Predpokladajme, že stanovíme hodnotu c na $c = c_0$. Potom parametre 3σ -regulačného diagramu počtu nezhôd možno vyjadriť takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= c_0 + 3\sqrt{c_0} \\ \text{CL} &= c_0 \\ \text{LCL} &= c_0 - 3\sqrt{c_0} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Keď hodnota LCL je negatívna, potom uvažujeme $\text{LCL} = 0$.

V prípade, že hodnota c je neznáma, odhadne sa na základe dát z výberu m kontrolných jednotiek priemerným počtom nezhôd $\bar{c}$ na kontrolnej jednotke. Potom možno vzťahy na výpočet parametrov c-diagramu formulovať takto:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ \text{CL} &= \bar{c} \\ \text{LCL} &= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \end{aligned} \quad (6.44)$$

kde $\bar{c}$ je hodnota výberového priemeru $\bar{C}$ – priemerného počtu nezhôd na jednej kontrolnej jednotke.

Príklad 6.6

Urobili sme 26 výberov 100 dosiek plošných spojov (kontrolná jednotka je 100 kusov). Výbery obsahovali celkovo 516 nezhôd. Treba vypočítať parametre 3σ -regulačného diagramu počtu nezhôd.

Najskôr odhadneme c . Hodnota odhadu je

$$\bar{c} = \frac{516}{26} = 19,85$$

Teraz vypočítame parametre 3σ -regulačného diagramu počtu nezhôd.

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 19,85 + 3\sqrt{19,85} = 33,22$$

$$CL = \bar{c} = 19,85$$

$$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 19,85 - 3\sqrt{19,85} = 6,48$$

Regulačné diagramy počtu nezhôd na jednotku (*u*-diagramy)

Predpokladajme, že pri produkcii tkaniny je potrebné kontrolovať počet nezhôd na každý meter alebo pri montáži krídla lietadla počet chýbajúcich nitov. V týchto situáciách možno použiť regulačný diagram počtu nezhôd na jednotku – *u*-diagram. V mnohých situáciách možno počet nezhôd na jednotku modelovať Poissonovým rozdelením.

Nech každý výber obsahuje n jednotiek a celkový počet nezhôd vo výbere je C . Potom priemerný počet nezhôd na jednotku je

$$U = \frac{C}{n}$$

Pre tieto dáta možno konštruovať *u*-diagram.

Keď počet nezhôd v jednotke C je Poissonova náhodná premenná s parametrom λ , stredná hodnota aj rozptyl tohto rozdelenia je λ . Každý bod v *u*-diagrame je priemerný počet nezhôd na jednotku z výberu n jednotiek. Teda stredná hodnota U je λ a rozptyl U je λ/n . Potom regulačné hranice vypočítame takto:

$$UCL = \lambda + 3\sqrt{\frac{\lambda}{n}} \quad \text{a} \quad LCL = \lambda - 3\sqrt{\frac{\lambda}{n}} \quad (6.45)$$

Majme m predbežných výberov, každý s počtom nezhôd na jednotku $U_1, U_2, \dots, U_m$. Odhad priemerného počtu nezhôd na jednotku dostaneme takto:

$$\bar{U} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m U_i \quad (6.46)$$

Parametre *u*-diagramu vypočítame takto:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}} \\ CL &= \bar{U} \\ LCL &= \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Príklad 6.7

Výrobca osobných počítačov chce zaviesť regulačný diagram počtu nezhôd na jednotku na finálnej montážnej linke. Realizovalo sa 20 výberov, každý s rozsahom 5 počítačov.

Na základe dát sme odhadli priemerný počet nezhôd na jednotku: $\bar{u} = 1,93$. Vypočítajme parametre u -diagramu:

$$UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 1,93 + 3\sqrt{\frac{1,93}{5}} = 3,79$$

$$CL = \bar{u} = 1,93$$

$$LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 1,93 - 3\sqrt{\frac{1,93}{5}} = 0,07$$

6.8 Spôsobilosť procesu

Ciele výučby

- ☐ Definovať indexy C_p , C_{pl} , C_{pu} , C_{pk} a K .
- ☐ Definovať six sigma proces a dovolený posun strednej hodnoty procesu.

Niekedy je potrebné získať nejaké informácie o **spôsobilosti procesu** pokiaľ ide o výkonnosť procesu, keď proces je stabilný. Dve grafické metódy, **tolerančný diagram** a **histogram**, sú užitočné pri hodnotení spôsobilosti procesu. Výhodou použitia týchto dvoch metód na odhad spôsobilosti procesu je možnosť získať okamžitú vizuálnu predstavu o nej.

Iný spôsob vyjadrenia spôsobilosti procesu je pomocou tzv. indexov, ktorých je definovaných niekoľko. My sa budeme zaoberať z indexmi C_p , C_{pl} , C_{pu} , C_{pk} a K , ktoré sa všeobecne považujú za indexy spôsobilosti prvej generácie.

Index spôsobilosti procesu C_p (niekedy sa označuje CPI, niekedy aj PCR) je

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (6.48)$$

kde USL je horná špecifikačná hranica, LSL dolná špecifikačná hranica a σ je smerodajná odchýlka procesu.

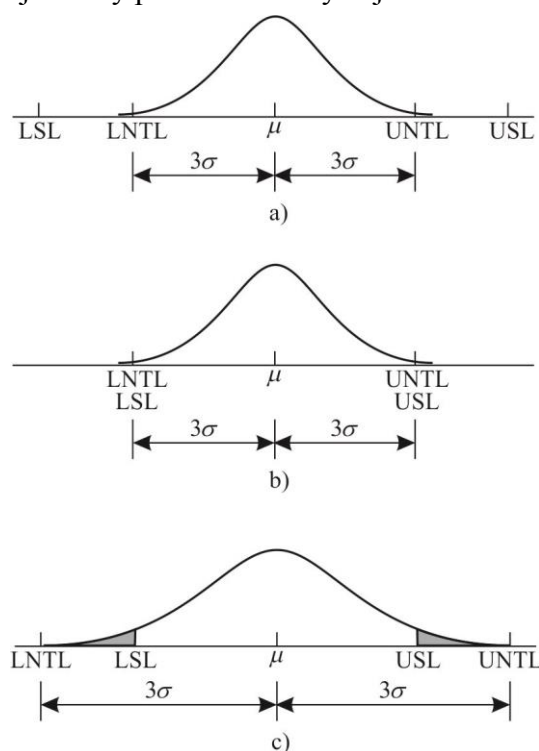
Čitateľ indexu C_p predstavuje **špecifikačné rozpätie** ($USL - LSL$). Hranice 3σ na každej strane od strednej hodnoty procesu sa nazývajú **prirodzené tolerančné hranice**. Potom menovateľ C_p , ktorý sa rovná 6σ , predstavuje **prirodzené tolerančné rozpätie**, čo je vlastne šírka procesu.

Napríklad pre piestne krúžky automobilového motora s rozsahom výberu 5 sme odhadli σ ako $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0,023}{2,326} = 0,0099$ (Príklad 6.1). Ďalej vieme, že **špecifikačné hranice** sú $74,000 \pm 0,05$ mm. Teda odhad C_p je

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{74,050 - 73,950}{6 \times 0,0099} = 1,68$$

C_p má prirodzenú interpretáciu: $\left(\frac{1}{C_p}\right) \times 100\%$ je v percentách vyjadrená šírka špecifikačného rozpätia použitá v procese. Teda proces výroby piestnych krúžkov automobilového motora použije približne $\left(\frac{1}{1,68}\right) \times 100 = 59,5\%$ špecifikačného rozpätia.

Na Obr. 6.17a je vidieť proces, v ktorom index C_p je väčší ako 1. Pretože prirodzené tolerančné hranice procesu ležia vnútri špecifikačného rozpätia, proces bude produkovať veľmi málo nezhodných jednotiek. Ak $C_p = 1$, ako ukazuje Obr. 6.17b, podiel nezhodných jednotiek je 0,27 %, čo predstavuje 2700 jednotiek z milióna. Nakoniec, keď C_p je menší ako 1, ako na Obr. 6.17c, proces produkuje veľký počet nezhodných jednotiek.



Obr. 6.17 Indexy spôsobilosti v rôznych situáciách

Definícia C_p daná v (6.48) samozrejme predpokladá, že proces je centrovaný na menovitý rozmer. Keď proces beží mimo centra, jeho **skutočná spôsobilosť** bude menšia, akú ukazuje C_p . Vtedy je vhodné uvažovať o C_p ako o miere **potenciálnej spôsobilosti**, teda spôsobilosti ako pri centrovanom procese.

Keď proces nie je centrovaný, mierou skutočnej spôsobilosti je index C_{pk} , ktorý je definovaný takto:

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} \quad (6.49)$$

kde $C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}$ je **horný index spôsobilosti** a $C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}$ je **dolný index spôsobilosti**.

Na rozdiel od indexu C_p , ktorý je ukazovateľom potenciálnej spôsobilosti procesu, index C_{pk} je ukazovateľom aktuálnej spôsobilosti procesu. Parametre μ a σ obvykle nepoznáme, preto je potrebné ich odhadnúť. Hodnoty bodových odhadov, $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}}$ a $\hat{\sigma}$, sa použijú na výpočet odhadu C_{pk} , ktorý je takýto:

$$\hat{C}_{pk} = \min \{ \hat{C}_{pu}, \hat{C}_{pl} \} = \min \left\{ \frac{USL - \bar{\bar{x}}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\bar{\bar{x}} - LSL}{3\hat{\sigma}} \right\} \quad (6.50)$$

Posledným indexom prvej generácie je index K , ktorý sa niekedy nazýva **ukazovateľ presnosti nastavenia** a je definovaný vzťahom:

$$K = \frac{|T - \mu|}{\frac{USL - LSL}{2}} \quad (6.51)$$

Ked' definujeme **stred špecifikačného intervalu**

$$MSL = \frac{1}{2}(USL + LSL) \quad (6.52)$$

potom keď:

1. $T = MSL$ – index K zachytáva odchýlku strednej hodnoty od stredu špecifikačného intervalu,
2. $T \neq MSL$ – index K zachytáva odchýlku strednej hodnoty od požadovanej hodnoty.

Obor hodnôt indexu K je $[0, \infty)$. Ked':

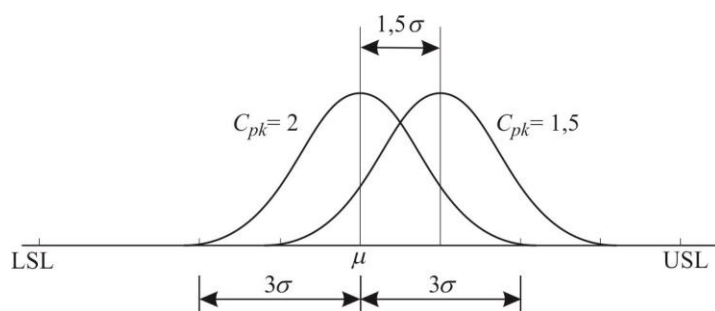
1. $K = 0$, potom $\mu = T$.
2. $0 < K < 1$, potom μ sa nachádza medzi LSL a USL.
3. $K > 1$, potom μ sa nachádza mimo špecifikačných hraníc.

Pretože index K nevyjadruje vzťah veľkosti prirodzeného tolerančného rozpätia k predpísanému špecifikačnému rozpätiu, je vhodné ho používať spolu s indexom C_{pk} .

Montgomery (2001) vypracoval návod na vhodné hodnoty C_p a tabuľku pre normálne rozdelený proces v štatistickom riadení hodnoty C_p . Mnoho spoločností využíva $C_p = 1,33$ ako minimálnu prijateľnú cieľovú hodnotu a $C_p = 1,66$ ako minimálny cieľ pre pevnosť, bezpečnosť alebo kritické znaky (charakteristiky). Niektoré spoločnosti vyžadujú, aby vnútorné procesy a dodávatelia dosahovali $C_{pk} = 2,0$.

Na Obr. 6.18 je zobrazený proces s $C_p = C_{pk} = 2,0$. Za predpokladu normálneho rozdelenia, vypočítaná hodnota pre tento proces je 0,0018 ppm (podiel jednotiek z milióna). Proces,

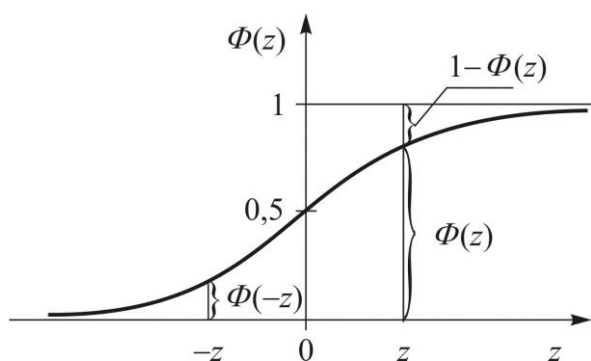
ktorý má $C_{pk} = 2,0$, sa nazýva **six sigma proces**, pretože vzdialenosť od strednej hodnoty procesu k najbližšej špecifikačnej hranici sa rovná šesť smerodajných odchýlok. Dôvod, že tak veľká spôsobilosť procesu je často potrebná, je ten, že je neľahké udržať strednú hodnotu procesu v strede špecifikácií po dlhý časový úsek. Spoločný model, ktorý sa používa na opodstatnenie významu procesu six sigma je ilustrovaný na Obr. 6.18. Keď stredná hodnota procesu sa posunie z centra na hodnotu $1,5$ smerodajných odchýlok, hodnota C_{pk} poklesne na hodnotu $4,5\sigma/3\sigma = 1,5$. Za predpokladu, že proces má normálne rozdelenie, hodnota posunu procesu je **3,4 ppm (jednotiek z milióna)**. Teda stredná hodnota procesu 6-sigma sa môže posunúť na hodnotu $1,5\sigma$ od stredu špecifikácií a stále udržiavať hodnotu na 3,4 ppm.



Obr. 6.18 Posun strednej hodnoty procesu šesť sigma o $1,5$ smerodajnej odchýlky

PRÍLOHY

DISTRIBUČNÁ FUNKCIA NORMOVANÉHO NORMÁLNEHO ROZDELENIA



$$F(x) = \Phi(z), \text{ kde } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

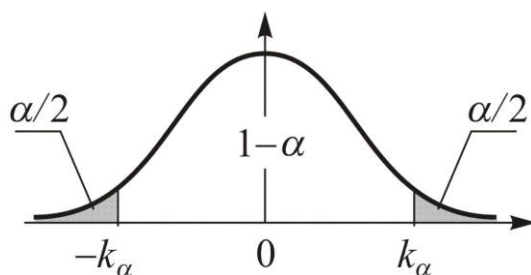
$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

z	φ[z]	z	φ[z]	z	φ[z]	z	φ[z]	z	φ[z]
0.	0.50000	0.3	0.61791	0.6	0.72575	0.9	0.81594	1.2	0.88493
0.01	0.50399	0.31	0.62172	0.61	0.72907	0.91	0.81859	1.21	0.88686
0.02	0.50798	0.32	0.62552	0.62	0.73237	0.92	0.82121	1.22	0.88877
0.03	0.51197	0.33	0.62930	0.63	0.73565	0.93	0.82381	1.23	0.89065
0.04	0.51595	0.34	0.63307	0.64	0.73891	0.94	0.82639	1.24	0.89251
0.05	0.51994	0.35	0.63683	0.65	0.74215	0.95	0.82894	1.25	0.89435
0.06	0.52392	0.36	0.64058	0.66	0.74537	0.96	0.83147	1.26	0.89617
0.07	0.52790	0.37	0.64431	0.67	0.74857	0.97	0.83398	1.27	0.89796
0.08	0.53188	0.38	0.64803	0.68	0.75175	0.98	0.83646	1.28	0.89973
0.09	0.53586	0.39	0.65173	0.69	0.75490	0.99	0.83891	1.29	0.90147
0.1	0.53983	0.4	0.65542	0.7	0.75804	1.	0.84134	1.3	0.90320
0.11	0.54380	0.41	0.65910	0.71	0.76115	1.01	0.84375	1.31	0.90490
0.12	0.54776	0.42	0.66276	0.72	0.76424	1.02	0.84614	1.32	0.90658
0.13	0.55172	0.43	0.66640	0.73	0.76730	1.03	0.84849	1.33	0.90824
0.14	0.55567	0.44	0.67003	0.74	0.77035	1.04	0.85083	1.34	0.90988
0.15	0.55962	0.45	0.67364	0.75	0.77337	1.05	0.85314	1.35	0.91149
0.16	0.56356	0.46	0.67724	0.76	0.77637	1.06	0.85543	1.36	0.91309
0.17	0.56749	0.47	0.68082	0.77	0.77935	1.07	0.85769	1.37	0.91466
0.18	0.57142	0.48	0.68439	0.78	0.78230	1.08	0.85993	1.38	0.91621
0.19	0.57535	0.49	0.68793	0.79	0.78524	1.09	0.86214	1.39	0.91774
0.2	0.57926	0.5	0.69146	0.8	0.78814	1.1	0.86433	1.4	0.91924
0.21	0.58317	0.51	0.69497	0.81	0.79103	1.11	0.86650	1.41	0.92073
0.22	0.58706	0.52	0.69847	0.82	0.79389	1.12	0.86864	1.42	0.92220
0.23	0.59095	0.53	0.70194	0.83	0.79673	1.13	0.87076	1.43	0.92364
0.24	0.59483	0.54	0.70540	0.84	0.79955	1.14	0.87286	1.44	0.92507
0.25	0.59871	0.55	0.70884	0.85	0.80234	1.15	0.87493	1.45	0.92647
0.26	0.60257	0.56	0.71226	0.86	0.80511	1.16	0.87698	1.46	0.92785
0.27	0.60642	0.57	0.71566	0.87	0.80785	1.17	0.87900	1.47	0.92922
0.28	0.61026	0.58	0.71904	0.88	0.81057	1.18	0.88100	1.48	0.93056
0.29	0.61409	0.59	0.72240	0.89	0.81327	1.19	0.88298	1.49	0.93189

z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$
1.5	0.93319	1.8	0.96407	2.1	0.98214	2.4	0.99180	2.7	0.99653
1.51	0.93448	1.81	0.96485	2.11	0.98257	2.41	0.99202	2.71	0.99664
1.52	0.93574	1.82	0.96562	2.12	0.98300	2.42	0.99224	2.72	0.99674
1.53	0.93699	1.83	0.96638	2.13	0.98341	2.43	0.99245	2.73	0.99683
1.54	0.93822	1.84	0.96712	2.14	0.98382	2.44	0.99266	2.74	0.99693
1.55	0.93943	1.85	0.96784	2.15	0.98422	2.45	0.99286	2.75	0.99702
1.56	0.94062	1.86	0.96856	2.16	0.98461	2.46	0.99305	2.76	0.99711
1.57	0.94179	1.87	0.96926	2.17	0.98500	2.47	0.99324	2.77	0.99720
1.58	0.94295	1.88	0.96995	2.18	0.98537	2.48	0.99343	2.78	0.99728
1.59	0.94408	1.89	0.97062	2.19	0.98574	2.49	0.99361	2.79	0.99736
1.6	0.94520	1.9	0.97128	2.2	0.98610	2.5	0.99379	2.8	0.99744
1.61	0.94630	1.91	0.97193	2.21	0.98645	2.51	0.99396	2.81	0.99752
1.62	0.94738	1.92	0.97257	2.22	0.98679	2.52	0.99413	2.82	0.99760
1.63	0.94845	1.93	0.97320	2.23	0.98713	2.53	0.99430	2.83	0.99767
1.64	0.94950	1.94	0.97381	2.24	0.98745	2.54	0.99446	2.84	0.99774
1.65	0.95053	1.95	0.97441	2.25	0.98778	2.55	0.99461	2.85	0.99781
1.66	0.95154	1.96	0.97500	2.26	0.98809	2.56	0.99477	2.86	0.99788
1.67	0.95254	1.97	0.97558	2.27	0.98840	2.57	0.99492	2.87	0.99795
1.68	0.95352	1.98	0.97615	2.28	0.98870	2.58	0.99506	2.88	0.99801
1.69	0.95449	1.99	0.97670	2.29	0.98899	2.59	0.99520	2.89	0.99807
1.7	0.95543	2.	0.97725	2.3	0.98928	2.6	0.99534	2.9	0.99813
1.71	0.95637	2.01	0.97778	2.31	0.98956	2.61	0.99547	2.91	0.99819
1.72	0.95728	2.02	0.97831	2.32	0.98983	2.62	0.99560	2.92	0.99825
1.73	0.95818	2.03	0.97882	2.33	0.99010	2.63	0.99573	2.93	0.99831
1.74	0.95907	2.04	0.97932	2.34	0.99036	2.64	0.99585	2.94	0.99836
1.75	0.95994	2.05	0.97982	2.35	0.99061	2.65	0.99598	2.95	0.99841
1.76	0.96080	2.06	0.98030	2.36	0.99086	2.66	0.99609	2.96	0.99846
1.77	0.96164	2.07	0.98077	2.37	0.99111	2.67	0.99621	2.97	0.99851
1.78	0.96246	2.08	0.98124	2.38	0.99134	2.68	0.99632	2.98	0.99856
1.79	0.96327	2.09	0.98169	2.39	0.99158	2.69	0.99643	2.99	0.99861

z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$
3.	0.99865	3.5	0.99977	4.	0.99996833	4.5	0.99999660	5.	0.99999971
3.1	0.99903	3.6	0.99984	4.1	0.99997934	4.6	0.99999789	5.1	0.99999983
3.2	0.99931	3.7	0.99989	4.2	0.99998665	4.7	0.99999870	5.2	0.99999990
3.3	0.99952	3.8	0.99993	4.3	0.99999146	4.8	0.99999921	5.3	0.99999994
3.4	0.99966	3.9	0.99995	4.4	0.99999459	4.9	0.99999952	5.4	0.99999997
3.5	0.99977	4.	0.99997	4.5	0.99999660	5.	0.99999971	5.5	0.99999998

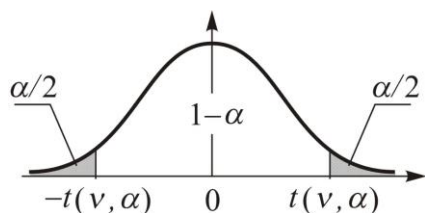
KRITICKÉ HODNOTY NORMÁLNEHO ROZDELENIA



$$P(|X| > k_{\alpha}) = \alpha$$

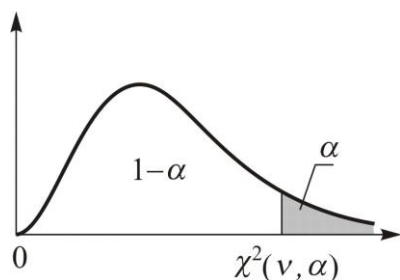
α	k_{α}	α	k_{α}	α	k_{α}
0,002	3,090	0,042	2,034	0,082	1,739
0,004	2,878	0,044	2,014	0,084	1,728
0,006	2,748	0,046	2,995	0,086	1,717
0,008	2,652	0,048	1,977	0,088	1,706
0,010	2,576	0,050	1,960	0,090	1,695
0,012	2,512	0,052	1,943	0,092	1,685
0,014	2,457	0,054	1,927	0,094	1,675
0,016	2,409	0,056	1,911	0,096	1,665
0,018	2,366	0,058	1,896	0,098	1,655
0,020	2,326	0,060	1,881	0,100	1,645
0,022	2,290	0,062	1,866	0,110	1,598
0,024	2,257	0,064	1,852	0,120	1,555
0,026	2,226	0,066	1,838	0,130	1,514
0,028	2,197	0,068	1,825	0,140	1,476
0,030	2,170	0,070	1,812	0,150	1,440
0,032	2,144	0,072	1,799	0,160	1,405
0,034	2,120	0,074	1,787	0,170	1,372
0,036	2,097	0,076	1,774	0,180	1,341
0,038	2,075	0,078	1,762	0,190	1,311
0,040	2,054	0,080	1,751	0,200	1,282

KRITICKÉ HODNOTY t -ROZDELENIA (Studentovho)



$$P(|T| > t(v, \alpha)) = \alpha$$

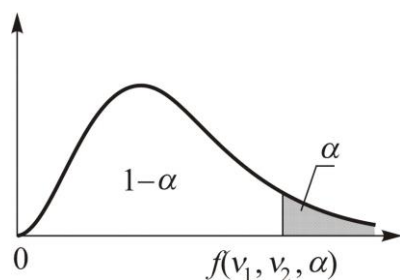
ν	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$
1	3,080	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	6,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,426	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

KRITICKÉ HODNOTY χ^2 -ROZDELENIA

$$P(X^2 > \chi^2(v, \alpha)) = \alpha$$

$\alpha \backslash v$	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1		0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1030	0,2110	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,1150	0,2160	0,3250	0,5840	6,25	7,82	9,35	11,30	12,80
4	0,2070	0,2970	0,4840	0,7110	1,0600	7,78	9,49	11,10	13,30	14,90
5	0,4120	0,5540	0,8310	1,1500	1,6100	9,24	11,10	12,80	15,10	16,70
6	0,6760	0,8720	1,2400	1,6400	2,2000	10,60	12,60	14,40	16,80	18,50
7	0,9890	1,2400	1,6900	2,1700	2,8300	12,00	14,10	16,00	18,50	20,30
8	1,3400	1,6500	2,1800	2,7300	3,4900	13,40	15,50	17,50	20,10	22,00
9	1,7300	2,0900	2,7000	3,3300	4,1700	14,70	16,90	19,00	21,70	23,60
10	2,1600	2,5600	3,2500	3,9400	4,8700	16,00	18,30	20,50	23,20	25,20
11	2,6000	3,0500	3,8200	4,5700	5,5800	17,30	19,70	21,90	24,70	26,80
12	3,0700	3,5700	4,4000	5,2300	6,3000	18,50	21,00	23,30	26,20	28,30
13	3,5700	4,1100	5,0100	5,8900	7,0400	19,80	22,40	24,70	27,70	29,80
14	4,0700	4,6600	5,6300	6,5700	7,7900	21,10	23,70	26,10	29,10	31,30
15	4,6000	5,2300	6,2600	7,2600	8,5500	22,30	25,00	27,50	30,60	32,80
16	5,1400	5,8100	6,9100	7,9600	9,3100	23,50	26,30	28,80	32,00	34,30
17	5,7000	6,4100	7,6500	8,6700	10,1000	24,80	27,60	30,20	33,40	35,70
18	6,2600	7,0100	8,2300	9,3900	10,9000	26,00	28,90	31,50	34,80	37,20
19	6,8400	7,6300	8,9100	10,1000	11,7000	27,20	30,10	32,90	36,20	38,60
20	7,4300	8,2600	9,5900	10,9000	12,4000	28,40	31,40	34,20	37,60	40,00
21	8,0300	8,9000	10,3000	11,6000	13,2000	29,60	32,70	35,50	38,90	41,40
22	8,6400	9,5400	11,0000	12,3000	14,0000	30,80	33,90	36,80	40,30	42,80
23	9,2600	10,2000	11,7000	13,1000	14,8000	32,00	35,20	38,10	41,60	44,20
24	9,8900	10,9000	12,4000	13,8000	15,7000	33,20	36,40	39,40	43,00	45,60
25	10,5000	11,5000	13,1000	14,6000	16,5000	34,40	37,70	40,60	44,30	46,90
26	11,2000	12,2000	13,8000	15,4000	17,3000	35,50	38,90	41,90	45,60	48,30
27	11,8000	12,9000	14,6000	16,2000	18,1000	36,70	40,10	43,20	47,00	49,60
28	12,5000	13,6000	15,3000	16,9000	18,9000	37,90	41,30	44,50	48,30	51,00
29	13,1000	14,3000	16,0000	17,7000	19,8000	39,10	42,60	45,70	49,60	52,30
30	13,8000	15,0000	16,8000	18,5000	20,6000	40,30	43,80	47,00	50,90	53,70

KRITICKÉ HODNOTY F -ROZDELENIA (Fisherovho-Snedecorovho)



$$P(F > f(v_1, v_2, \alpha)) = \alpha$$

$\alpha = 0,01$									
$v_1 \backslash v_2$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	15,97702	15,52186	15,20686	14,97576	14,79889	14,65913	14,54590	14,45228	14,37359
5	11,39193	10,96702	10,67225	10,45551	10,28931	10,15776	10,05102	9,96265	9,88828
6	9,14830	8,74590	8,46613	8,25600	8,10165	7,97612	7,87412	7,78957	7,71833
7	7,84665	7,46044	7,19141	6,99283	6,84005	6,71875	6,62006	6,53817	6,46909
8	7,00608	6,63183	6,37068	6,17762	6,02887	5,91062	5,81429	5,73428	5,66672
9	6,42209	6,05694	5,80177	5,61287	5,46712	5,35113	5,25654	5,17789	5,11143
10	5,99434	5,63633	5,38581	5,20012	5,05669	4,94242	4,84915	4,77152	4,70587
11	5,66830	5,31601	5,06921	4,88607	4,74447	4,63154	4,53928	4,46244	4,39740
12	5,41195	5,06434	4,82057	4,63950	4,49937	4,38751	4,29605	4,21982	4,15526
13	5,20533	4,86162	4,62036	4,44100	4,30206	4,19108	4,10027	4,02452	3,96033
14	5,03538	4,69496	4,45582	4,27788	4,13995	4,02968	3,93940	3,86404	3,80014
15	4,89321	4,55561	4,31827	4,14155	4,00445	3,89479	3,80494	3,72990	3,66624
16	4,77258	4,43742	4,20163	4,02595	3,88957	3,78042	3,69093	3,61616	3,55269
17	4,66897	4,33594	4,10151	3,92672	3,79096	3,68224	3,59307	3,51851	3,45520
18	4,57904	4,24788	4,01464	3,84064	3,70542	3,59707	3,50816	3,43379	3,37061
19	4,50026	4,17077	3,93857	3,76527	3,63053	3,52250	3,43382	3,35961	3,29653
20	4,43069	4,10269	3,87143	3,69874	3,56441	3,45668	3,36819	3,29411	3,23112
21	4,36882	4,04214	3,81173	3,63959	3,50563	3,39815	3,30983	3,23587	3,17295
22	4,31343	3,98796	3,75830	3,58666	3,45303	3,34577	3,25761	3,18374	3,12089
23	4,26357	3,93920	3,71022	3,53902	3,40570	3,29863	3,21060	3,13682	3,07403
24	4,21845	3,89507	3,66672	3,49593	3,36287	3,25599	3,16807	3,09437	3,03162
25	4,17742	3,85496	3,62717	3,45675	3,32394	3,21722	3,12941	3,05577	2,99306
26	4,13996	3,81834	3,59108	3,42099	3,28840	3,18182	3,09411	3,02053	2,95785
27	4,10562	3,78477	3,55799	3,38822	3,25583	3,14939	3,06175	2,98823	2,92557
28	4,07403	3,75390	3,52756	3,35807	3,22587	3,11955	3,03199	2,95851	2,89588
29	4,04487	3,72540	3,49948	3,33025	3,19822	3,09201	3,00452	2,93108	2,86847
30	4,01788	3,69902	3,47348	3,30450	3,17262	3,06652	2,97909	2,90569	2,84310

$\alpha = 0,01$									
$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
31	3,99281	3,67453	3,44934	3,28059	3,14886	3,04285	2,95548	2,88211	2,81953
32	3,96948	3,65173	3,42688	3,25834	3,12675	3,02082	2,93351	2,86016	2,79760
33	3,94770	3,63046	3,40591	3,23757	3,10611	3,00026	2,91300	2,83968	2,77712
34	3,92733	3,61056	3,38631	3,21815	3,08681	2,98103	2,89381	2,82052	2,75797
35	3,90824	3,59191	3,36794	3,19995	3,06872	2,96301	2,87583	2,80256	2,74002
36	3,89031	3,57440	3,35068	3,18286	3,05173	2,94609	2,85895	2,78569	2,72316
37	3,87343	3,55792	3,33444	3,16677	3,03574	2,93016	2,84305	2,76982	2,70728
38	3,85752	3,54238	3,31913	3,15161	3,02067	2,91515	2,82807	2,75485	2,69232
39	3,84250	3,52771	3,30468	3,13730	3,00644	2,90097	2,81393	2,74072	2,67819
40	3,82829	3,51384	3,29101	3,12376	2,99298	2,88756	2,80055	2,72735	2,66483
41	3,81484	3,50070	3,27807	3,11093	2,98023	2,87486	2,78787	2,71469	2,65217
42	3,80207	3,48824	3,26579	3,09877	2,96814	2,86281	2,77585	2,70268	2,64016
43	3,78994	3,47640	3,25413	3,08722	2,95666	2,85137	2,76443	2,69127	2,62875
44	3,77841	3,46514	3,24303	3,07623	2,94574	2,84049	2,75357	2,68042	2,61790
45	3,76743	3,45442	3,23247	3,06577	2,93534	2,83013	2,74323	2,67008	2,60756
46	3,75696	3,44420	3,22240	3,05580	2,92543	2,82025	2,73337	2,66023	2,59771
47	3,74696	3,43444	3,21280	3,04628	2,91597	2,81082	2,72396	2,65083	2,58831
48	3,73742	3,42512	3,20362	3,03719	2,90693	2,80182	2,71497	2,64185	2,57932
49	3,72829	3,41621	3,19484	3,02849	2,89828	2,79320	2,70637	2,63325	2,57073
50	3,71955	3,40768	3,18643	3,02017	2,89001	2,78496	2,69814	2,62503	2,56250
55	3,68090	3,36996	3,14928	2,98337	2,85342	2,74850	2,66174	2,58865	2,52611
60	3,64905	3,33888	3,11867	2,95305	2,82328	2,71845	2,63175	2,55867	2,49612
65	3,62235	3,31284	3,09302	2,92764	2,79802	2,69327	2,60661	2,53354	2,47097
70	3,59965	3,29069	3,07121	2,90603	2,77653	2,67186	2,58523	2,51216	2,44958
75	3,58011	3,27163	3,05244	2,88744	2,75804	2,65343	2,56682	2,49376	2,43116
80	3,56311	3,25505	3,03611	2,87127	2,74196	2,63740	2,55081	2,47775	2,41514
85	3,54819	3,24050	3,02178	2,85707	2,72785	2,62333	2,53676	2,46370	2,40107
90	3,53499	3,22763	3,00911	2,84452	2,71536	2,61088	2,52433	2,45126	2,38862
95	3,52323	3,21616	2,99781	2,83333	2,70424	2,59979	2,51325	2,44018	2,37753
100	3,51268	3,20587	2,98768	2,82330	2,69426	2,58984	2,50331	2,43024	2,36758
105	3,50317	3,19660	2,97855	2,81425	2,68527	2,58087	2,49435	2,42128	2,35861
110	3,49456	3,18819	2,97028	2,80605	2,67712	2,57274	2,48623	2,41316	2,35048
115	3,48671	3,18054	2,96274	2,79859	2,66969	2,56534	2,47884	2,40576	2,34307
120	3,47953	3,17355	2,95585	2,79176	2,66291	2,55857	2,47208	2,39900	2,33630
125	3,47295	3,16712	2,94953	2,78550	2,65668	2,55236	2,46587	2,39279	2,33008
129	3,46805	3,16235	2,94484	2,78085	2,65205	2,54775	2,46126	2,38818	2,32547

$\alpha = 0,01$									
$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$	15	20	24	30	40	50	60	80	100
4	14,19820	14,01961	13,92906	13,83766	13,74538	13,68958	13,65220	13,60526	13,57699
5	9,72222	9,55265	9,46647	9,37933	9,29119	9,23781	9,20202	9,15703	9,12991
6	7,55899	7,39583	7,31272	7,22853	7,14322	7,09148	7,05674	7,01304	6,98667
7	6,31433	6,15544	6,07432	5,99201	5,90845	5,85768	5,82357	5,78061	5,75466
8	5,51513	5,35910	5,27926	5,19813	5,11561	5,06540	5,03162	4,98904	4,96330
9	4,96208	4,80800	4,72900	4,64858	4,56665	4,51672	4,48309	4,44066	4,41498
10	4,55814	4,40540	4,32693	4,24693	4,16529	4,11545	4,08186	4,03942	4,01372
11	4,25087	4,09905	4,02091	3,94113	3,85957	3,80972	3,77607	3,73353	3,70774
12	4,00962	3,85843	3,78049	3,70079	3,61918	3,56922	3,53547	3,49276	3,46685
13	3,81537	3,66461	3,58675	3,50704	3,42529	3,37518	3,34129	3,29836	3,27228
14	3,65570	3,50522	3,42739	3,34760	3,26564	3,21533	3,18127	3,13809	3,11184
15	3,52219	3,37189	3,29403	3,21411	3,13191	3,08137	3,04714	3,00368	2,97724
16	3,40895	3,25874	3,18081	3,10073	3,01825	2,96748	2,93305	2,88931	2,86267
17	3,31169	3,16152	3,08350	3,00324	2,92046	2,86944	2,83481	2,79077	2,76393
18	3,22729	3,07710	2,99897	2,91852	2,83542	2,78414	2,74931	2,70498	2,67793
19	3,15334	3,00311	2,92487	2,84420	2,76079	2,70925	2,67421	2,62958	2,60232
20	3,08804	2,93774	2,85936	2,77849	2,69475	2,64295	2,60771	2,56277	2,53531
21	3,02995	2,87956	2,80105	2,71996	2,63590	2,58384	2,54839	2,50316	2,47549
22	2,97795	2,82745	2,74880	2,66749	2,58311	2,53080	2,49515	2,44962	2,42175
23	2,93112	2,78050	2,70172	2,62019	2,53550	2,48294	2,44708	2,40126	2,37318
24	2,88873	2,73800	2,65907	2,57733	2,49232	2,43951	2,40346	2,35735	2,32908
25	2,85019	2,69933	2,62026	2,53831	2,45299	2,39994	2,36369	2,31730	2,28883
26	2,81498	2,66399	2,58479	2,50262	2,41701	2,36372	2,32728	2,28060	2,25194
27	2,78270	2,63158	2,55224	2,46987	2,38396	2,33043	2,29381	2,24686	2,21801
28	2,75300	2,60174	2,52227	2,43970	2,35350	2,29975	2,26294	2,21572	2,18668
29	2,72558	2,57419	2,49458	2,41182	2,32534	2,27136	2,23437	2,18689	2,15767
30	2,70018	2,54866	2,46892	2,38597	2,29921	2,24501	2,20785	2,16011	2,13071
31	2,67659	2,52494	2,44508	2,36194	2,27491	2,22050	2,18317	2,13518	2,10560
32	2,65463	2,50285	2,42286	2,33954	2,25225	2,19763	2,16014	2,11190	2,08214
33	2,63413	2,48222	2,40211	2,31861	2,23107	2,17625	2,13859	2,09011	2,06018
34	2,61495	2,46292	2,38269	2,29902	2,21123	2,15620	2,11838	2,06966	2,03957
35	2,59697	2,44481	2,36447	2,28063	2,19260	2,13738	2,09940	2,05045	2,02020
36	2,58007	2,42779	2,34734	2,26333	2,17507	2,11966	2,08153	2,03235	2,00194
37	2,56417	2,41177	2,33121	2,24704	2,15855	2,10296	2,06468	2,01528	1,98471
38	2,54918	2,39666	2,31599	2,23167	2,14295	2,08718	2,04876	1,99914	1,96841
39	2,53501	2,38239	2,30161	2,21714	2,12820	2,07226	2,03369	1,98386	1,95298
40	2,52162	2,36888	2,28800	2,20338	2,11423	2,05811	2,01941	1,96937	1,93834

$\alpha = 0,01$									
$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$	15	20	24	30	40	50	60	80	100
41	2,50892	2,35607	2,27510	2,19034	2,10098	2,04470	2,00586	1,95561	1,92444
42	2,49688	2,34392	2,26285	2,17795	2,08839	2,03194	1,99297	1,94253	1,91121
43	2,48544	2,33238	2,25121	2,16618	2,07642	2,01981	1,98071	1,93007	1,89861
44	2,47455	2,32139	2,24013	2,15497	2,06502	2,00826	1,96903	1,91819	1,88660
45	2,46419	2,31093	2,22958	2,14429	2,05415	1,99723	1,95788	1,90686	1,87513
46	2,45430	2,30095	2,21951	2,13409	2,04378	1,98671	1,94724	1,89603	1,86417
47	2,44486	2,29141	2,20990	2,12435	2,03386	1,97665	1,93706	1,88567	1,85368
48	2,43585	2,28231	2,20071	2,11504	2,02438	1,96702	1,92732	1,87575	1,84363
49	2,42722	2,27359	2,19191	2,10613	2,01530	1,95780	1,91798	1,86624	1,83400
50	2,41896	2,26524	2,18349	2,09759	2,00659	1,94896	1,90903	1,85712	1,82475
55	2,38243	2,22830	2,14618	2,05976	1,96799	1,90973	1,86927	1,81656	1,78361
60	2,35230	2,19781	2,11536	2,02848	1,93602	1,87719	1,83626	1,78282	1,74933
65	2,32702	2,17221	2,08948	2,00218	1,90910	1,84975	1,80840	1,75429	1,72031
70	2,30552	2,15041	2,06743	1,97975	1,88612	1,82630	1,78456	1,72984	1,69540
75	2,28700	2,13163	2,04841	1,96040	1,86626	1,80602	1,76392	1,70864	1,67378
80	2,27088	2,11527	2,03185	1,94353	1,84893	1,78831	1,74588	1,69007	1,65482
85	2,25673	2,10090	2,01729	1,92869	1,83368	1,77270	1,72996	1,67368	1,63806
90	2,24420	2,08818	2,00439	1,91554	1,82014	1,75883	1,71582	1,65909	1,62313
95	2,23303	2,07683	1,99288	1,90380	1,80805	1,74644	1,70317	1,64602	1,60975
100	2,22302	2,06665	1,98256	1,89325	1,79718	1,73529	1,69178	1,63424	1,59767
105	2,21398	2,05746	1,97323	1,88373	1,78736	1,72521	1,68147	1,62357	1,58672
110	2,20579	2,04913	1,96478	1,87509	1,77844	1,71605	1,67210	1,61386	1,57674
115	2,19833	2,04153	1,95707	1,86722	1,77030	1,70768	1,66354	1,60498	1,56761
120	2,19150	2,03459	1,95002	1,86001	1,76285	1,70002	1,65569	1,59683	1,55923
125	2,18524	2,02821	1,94354	1,85338	1,75600	1,69297	1,64847	1,58932	1,55150
129	2,18059	2,02347	1,93873	1,84845	1,75090	1,68772	1,64309	1,58373	1,54573

$\alpha = 0,05$									
$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	6,38823	6,25606	6,16313	6,09421	6,04104	5,99878	5,96437	5,93581	5,91173
5	5,19217	5,05033	4,95029	4,87587	4,81832	4,77247	4,73506	4,70397	4,67770
6	4,53368	4,38737	4,28387	4,20666	4,14680	4,09902	4,05996	4,02744	3,99994
7	4,12031	3,97152	3,86597	3,78704	3,72573	3,67668	3,63652	3,60304	3,57468
8	3,83785	3,68750	3,58058	3,50046	3,43810	3,38813	3,34716	3,31295	3,28394
9	3,63309	3,48166	3,37375	3,29275	3,22958	3,17889	3,13728	3,10249	3,07295
10	3,47805	3,32584	3,21718	3,13547	3,07166	3,02038	2,97824	2,94296	2,91298
11	3,35669	3,20387	3,09461	3,01233	2,94799	2,89622	2,85363	2,81793	2,78757
12	3,25917	3,10588	2,99612	2,91336	2,84857	2,79638	2,75339	2,71733	2,68664
13	3,17912	3,02544	2,91527	2,83210	2,76691	2,71436	2,67102	2,63465	2,60366
14	3,11225	2,95825	2,84773	2,76420	2,69867	2,64579	2,60216	2,56550	2,53424
15	3,05557	2,90130	2,79047	2,70663	2,64080	2,58763	2,54372	2,50681	2,47531
16	3,00692	2,85241	2,74131	2,65720	2,59110	2,53767	2,49351	2,45637	2,42466
17	2,96471	2,81000	2,69866	2,61430	2,54796	2,49429	2,44992	2,41256	2,38065
18	2,92774	2,77285	2,66131	2,57672	2,51016	2,45628	2,41170	2,37416	2,34207
19	2,89511	2,74006	2,62832	2,54353	2,47677	2,42270	2,37793	2,34021	2,30795
20	2,86608	2,71089	2,59898	2,51401	2,44706	2,39281	2,34788	2,30999	2,27758
21	2,84010	2,68478	2,57271	2,48758	2,42046	2,36605	2,32095	2,28292	2,25036
22	2,81671	2,66127	2,54906	2,46377	2,39650	2,34194	2,29670	2,25852	2,22583
23	2,79554	2,64000	2,52766	2,44223	2,37481	2,32011	2,27473	2,23642	2,20361
24	2,77629	2,62065	2,50819	2,42263	2,35508	2,30024	2,25474	2,21631	2,18338
25	2,75871	2,60299	2,49041	2,40473	2,33706	2,28210	2,23647	2,19793	2,16489
26	2,74259	2,58679	2,47411	2,38831	2,32053	2,26545	2,21972	2,18107	2,14793
27	2,72777	2,57189	2,45911	2,37321	2,30531	2,25013	2,20429	2,16554	2,13230
28	2,71408	2,55813	2,44526	2,35926	2,29126	2,23598	2,19004	2,15120	2,11787
29	2,70140	2,54539	2,43243	2,34634	2,27825	2,22287	2,17684	2,13791	2,10449
30	2,68963	2,53356	2,42052	2,33434	2,26616	2,21070	2,16458	2,12556	2,09206
31	2,67867	2,52254	2,40943	2,32317	2,25491	2,19936	2,15316	2,11405	2,08048
32	2,66844	2,51226	2,39908	2,31274	2,24440	2,18877	2,14249	2,10331	2,06967
33	2,65887	2,50264	2,38939	2,30298	2,23456	2,17886	2,13250	2,09325	2,05954
34	2,64989	2,49362	2,38031	2,29383	2,22534	2,16956	2,12314	2,08382	2,05004
35	2,64147	2,48514	2,37178	2,28524	2,21668	2,16083	2,11430	2,07496	2,04111
36	2,63353	2,47717	2,36375	2,27714	2,20852	2,15261	2,10605	2,06661	2,03270
37	2,62605	2,46965	2,35618	2,26951	2,20083	2,14485	2,09824	2,05873	2,02477
38	2,61899	2,46255	2,34903	2,26230	2,19356	2,13753	2,09086	2,05129	2,01728
39	2,61231	2,45583	2,34226	2,25549	2,18669	2,13060	2,08387	2,04425	2,01018
40	2,60598	2,44947	2,33585	2,24902	2,18011	2,12403	2,07725	2,03758	2,00346

$\alpha = 0,05$									
$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
41	2,599969	2,443429	2,329771	2,242894	2,173989	2,117797	2,070965	2,031247	1,997078
42	2,594263	2,437693	2,323994	2,237070	2,168117	2,111875	2,064994	2,025229	1,991013
43	2,588836	2,432236	2,318498	2,231530	2,162530	2,106241	2,059313	2,019502	1,985242
44	2,583667	2,427040	2,313264	2,226253	2,157208	2,100873	2,053901	2,014046	1,979743
45	2,578739	2,422085	2,308273	2,221221	2,152133	2,095755	2,048739	2,008842	1,974498
46	2,574035	2,417356	2,303509	2,216417	2,147288	2,090868	2,043811	2,003873	1,969490
47	2,569540	2,412837	2,298956	2,211827	2,142658	2,086198	2,039101	1,999124	1,964702
48	2,565241	2,408514	2,294601	2,207436	2,138229	2,081730	2,034595	1,994580	1,960121
49	2,561124	2,404375	2,290432	2,203232	2,133988	2,077452	2,030279	1,990228	1,955734
50	2,557179	2,400409	2,286436	2,199202	2,129923	2,073351	2,026143	1,986056	1,951528
55	2,539689	2,382823	2,268717	2,181333	2,111894	2,055161	2,007792	1,967547	1,932863
60	2,525215	2,368270	2,254053	2,166541	2,096968	2,040098	1,992592	1,952212	1,917396
65	2,513040	2,356028	2,241716	2,154095	2,084407	2,027419	1,979796	1,939300	1,904370
70	2,502656	2,345586	2,231192	2,143478	2,073690	2,016601	1,968875	1,928278	1,893248
75	2,493696	2,336576	2,222110	2,134314	2,064439	2,007260	1,959445	1,918759	1,883642
80	2,485885	2,328721	2,214193	2,126324	2,056373	1,999115	1,951220	1,910456	1,875262
85	2,479015	2,321812	2,207229	2,119296	2,049276	1,991949	1,943984	1,903149	1,867886
90	2,472927	2,315689	2,201056	2,113067	2,042986	1,985595	1,937567	1,896669	1,861344
95	2,467494	2,310225	2,195548	2,107506	2,037370	1,979923	1,931838	1,890884	1,855503
100	2,462615	2,305318	2,190601	2,102513	2,032328	1,974829	1,926692	1,885687	1,850255
105	2,458210	2,300888	2,186134	2,098005	2,027774	1,970229	1,922045	1,880993	1,845515
110	2,454213	2,296868	2,182082	2,093913	2,023641	1,966054	1,917827	1,876732	1,841212
115	2,450571	2,293205	2,178387	2,090184	2,019874	1,962247	1,913982	1,872847	1,837288
120	2,447237	2,289851	2,175006	2,086770	2,016426	1,958763	1,910461	1,869290	1,833695
125	2,444174	2,286771	2,171900	2,083634	2,013257	1,955562	1,907226	1,866022	1,830394
129	2,441897	2,284481	2,169591	2,081303	2,010902	1,953182	1,904821	1,863592	1,827939

$\alpha = 0,05$									
$\nu_1 \backslash \nu_2$	15	20	24	30	40	50	60	80	100
4	5,857805	5,802542	5,774389	5,745877	5,716998	5,699492	5,687744	5,672973	5,664064
5	4,618759	4,558131	4,527153	4,495712	4,463793	4,444406	4,431380	4,414982	4,405081
6	3,938058	3,874189	3,841457	3,808164	3,774286	3,753668	3,739797	3,722314	3,711745
7	3,510740	3,444525	3,410494	3,375808	3,340430	3,318856	3,304323	3,285983	3,274885
8	3,218406	3,150324	3,115240	3,079406	3,042778	3,020398	3,005303	2,986230	2,974674
9	3,006102	2,936455	2,900474	2,863652	2,825933	2,802843	2,787249	2,767522	2,755557
10	2,845017	2,774016	2,737248	2,699551	2,660855	2,637124	2,621077	2,600753	2,588412
11	2,718640	2,646445	2,608974	2,570489	2,530905	2,506587	2,490123	2,469246	2,456555
12	2,616851	2,543588	2,505482	2,466279	2,425880	2,401018	2,384166	2,362772	2,349753
13	2,533110	2,458882	2,420196	2,380334	2,339180	2,313811	2,296596	2,274716	2,261387
14	2,463003	2,387896	2,348678	2,308207	2,266350	2,240507	2,222950	2,200611	2,186988
15	2,403447	2,327535	2,287826	2,246789	2,204276	2,177985	2,160105	2,137331	2,123428
16	2,352223	2,275570	2,235405	2,193841	2,150711	2,123999	2,105813	2,082625	2,068455
17	2,307693	2,230354	2,189766	2,147708	2,103998	2,076888	2,058411	2,034828	2,020401
18	2,268622	2,190648	2,149665	2,107143	2,062885	2,035397	2,016643	1,992682	1,978010
19	2,234063	2,155497	2,114143	2,071186	2,026410	1,998561	1,979544	1,955221	1,940314
20	2,203274	2,124155	2,082454	2,039086	1,993819	1,965628	1,946358	1,921689	1,906554
21	2,175670	2,096033	2,054004	2,010248	1,964515	1,935997	1,916486	1,891483	1,876131
22	2,150778	2,070656	2,028319	1,984195	1,938018	1,909188	1,889445	1,864123	1,848559
23	2,128217	2,047638	2,005009	1,960537	1,913938	1,884809	1,864844	1,839213	1,823446
24	2,107673	2,026664	1,983760	1,938957	1,891955	1,862539	1,842360	1,816432	1,800468
25	2,088887	2,007471	1,964306	1,919188	1,871801	1,842111	1,821727	1,795512	1,779357
26	2,071642	1,989842	1,946428	1,901010	1,853255	1,823301	1,802719	1,776228	1,759888
27	2,055755	1,973590	1,929940	1,884236	1,836129	1,805922	1,785149	1,75839	1,741871
28	2,041071	1,958561	1,914686	1,868709	1,820263	1,789813	1,768857	1,741838	1,725146
29	2,027458	1,944620	1,900531	1,854293	1,805523	1,774838	1,753704	1,726435	1,709574
30	2,014804	1,931653	1,887360	1,840872	1,791790	1,760879	1,739574	1,712062	1,695037
31	2,003009	1,919561	1,875073	1,828345	1,778964	1,747835	1,726363	1,698616	1,681432
32	1,991990	1,908258	1,863582	1,816625	1,766956	1,735616	1,713984	1,686009	1,668670
33	1,981671	1,897669	1,852814	1,805636	1,755689	1,724147	1,702359	1,674162	1,656673
34	1,971988	1,887727	1,842701	1,795311	1,745097	1,713358	1,691420	1,663007	1,645371
35	1,962884	1,878375	1,833184	1,785591	1,735119	1,703190	1,681106	1,652484	1,634706
36	1,954308	1,869562	1,824213	1,776424	1,725703	1,693590	1,671365	1,642539	1,624621
37	1,946216	1,861242	1,815742	1,767764	1,716803	1,684511	1,662149	1,633125	1,615072
38	1,938568	1,853375	1,807729	1,759569	1,708376	1,675911	1,653416	1,624200	1,606014
39	1,931327	1,845925	1,800138	1,751803	1,700385	1,667753	1,645128	1,615724	1,597409
40	1,924463	1,838859	1,792937	1,744432	1,692797	1,660003	1,637252	1,607666	1,589224

$\alpha = 0,05$									
$\nu_1 \backslash \nu_2$	15	20	24	30	40	50	60	80	100
41	1,91795	1,83215	1,78610	1,73743	1,68558	1,65263	1,62976	1,59999	1,58143
42	1,91175	1,82577	1,77959	1,73076	1,67871	1,64561	1,62262	1,59268	1,57399
43	1,90586	1,81969	1,77339	1,72441	1,67217	1,63891	1,61580	1,58570	1,56689
44	1,90024	1,81390	1,76748	1,71835	1,66592	1,63252	1,60930	1,57902	1,56011
45	1,89488	1,80837	1,76184	1,71257	1,65995	1,62641	1,60308	1,57264	1,55361
46	1,88976	1,80309	1,75645	1,70704	1,65424	1,62056	1,59712	1,56653	1,54739
47	1,88486	1,79804	1,75129	1,70175	1,64877	1,61496	1,59142	1,56067	1,54143
48	1,88018	1,79320	1,74635	1,69668	1,64353	1,60959	1,58595	1,55505	1,53570
49	1,87569	1,78857	1,74162	1,69182	1,63851	1,60444	1,58070	1,54966	1,53020
50	1,87138	1,78413	1,73708	1,68716	1,63368	1,59950	1,57565	1,54447	1,52491
55	1,85228	1,76438	1,71689	1,66641	1,61219	1,57744	1,55314	1,52129	1,50125
60	1,83644	1,74798	1,70012	1,64914	1,59427	1,55901	1,53431	1,50185	1,48139
65	1,82309	1,73415	1,68595	1,63454	1,57910	1,54339	1,51833	1,48532	1,46446
70	1,81168	1,72233	1,67383	1,62204	1,56608	1,52996	1,50457	1,47106	1,44984
75	1,80183	1,71210	1,66334	1,61121	1,55478	1,51830	1,49261	1,45865	1,43709
80	1,79322	1,70316	1,65417	1,60173	1,54489	1,50807	1,48211	1,44773	1,42586
85	1,78565	1,69529	1,64608	1,59337	1,53615	1,49903	1,47282	1,43805	1,41590
90	1,77893	1,68830	1,63890	1,58594	1,52837	1,49097	1,46453	1,42940	1,40699
95	1,77292	1,68205	1,63248	1,57929	1,52140	1,48375	1,45710	1,42164	1,39897
100	1,76753	1,67643	1,62671	1,57330	1,51513	1,47723	1,45039	1,41462	1,39172
105	1,76266	1,67136	1,62149	1,56789	1,50944	1,47133	1,44430	1,40824	1,38513
110	1,75823	1,66674	1,61674	1,56296	1,50427	1,46595	1,43875	1,40243	1,37911
115	1,75419	1,66254	1,61241	1,55847	1,49954	1,46103	1,43368	1,39710	1,37359
120	1,75050	1,65868	1,60844	1,55434	1,49520	1,45652	1,42901	1,39220	1,36850
125	1,74710	1,65514	1,60479	1,55055	1,49121	1,45236	1,42471	1,38768	1,36381
129	1,74457	1,65250	1,60207	1,54773	1,48823	1,44926	1,42151	1,38430	1,36030

Kritické hodnoty k_1 a k_2 pre **znamienkový test** $P(Y \leq k_1) \leq \alpha/2$, $P(Y \geq k_2) \leq \alpha/2$

n	$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,01$		n	$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,01$	
	k_1	k_2	k_1	k_2		k_1	k_2	k_1	k_2
6	0	6	–	–	46	15	31	13	33
7	0	7	–	–	47	16	31	14	33
8	0	8	0	8	48	16	32	14	34
9	1	8	0	9	49	17	32	15	34
10	1	9	0	10	50	17	33	15	35
11	1	10	0	11	51	18	33	15	36
12	2	10	1	11	52	18	34	16	36
13	2	11	1	12	53	18	35	16	37
14	2	12	1	13	54	19	35	17	37
15	3	12	2	13	55	19	36	17	38
16	3	13	2	14	56	20	36	17	39
17	4	13	2	15	57	20	37	18	39
18	4	14	3	15	58	21	37	18	40
19	4	15	3	16	59	21	38	19	40
20	5	15	3	17	60	21	39	19	41
21	5	16	4	17	61	22	39	20	41
22	5	17	4	18	62	22	40	20	42
23	6	17	4	19	63	23	40	20	43
24	6	18	5	19	64	23	41	21	43
25	7	18	5	20	65	24	41	21	44
26	7	19	6	20	66	24	42	22	44
27	7	20	6	21	67	25	42	22	45
28	8	20	6	22	68	25	43	22	46
29	8	21	7	22	69	25	44	23	46
30	9	21	7	23	70	26	44	23	47
31	9	22	7	24	71	26	45	24	47
32	9	23	8	24	72	27	45	24	48
33	10	23	8	25	73	27	46	25	48
34	10	24	9	25	74	28	46	25	49
35	11	24	9	26	75	28	47	25	50
36	11	25	9	27	76	28	48	26	50
37	12	25	10	27	77	29	48	26	51
38	12	26	10	28	78	29	49	27	51
39	12	27	11	28	79	30	49	27	52
40	13	27	11	29	80	30	50	28	52
41	13	28	11	30	85	32	53	30	55
42	14	28	12	30	90	35	55	32	58
43	14	29	12	31	95	37	58	34	61
44	15	29	13	31	100	39	61	36	64
45	15	30	13	32					

Kritické hodnoty *jednovýberového Wilcoxonovho testu* pri jednostrannej alternatívnej hypotéze

<i>n</i>	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,05$
5				0
6			0	2
7		0	2	3
8	0	2	4	5
9	2	3	6	8
10	3	5	8	10
11	5	7	11	13
12	7	10	14	17
13	10	13	17	21
14	13	16	21	25
15	16	20	25	30
16	20	24	30	35
17	23	28	35	41
18	28	33	40	47
19	32	38	46	53
20	38	43	52	60
21	43	49	59	67
22	49	56	66	75
23	55	62	73	83
24	61	69	81	91
25	68	77	89	100

Kritické hodnoty $w_n(\alpha)$ *jednovýberového Wilcoxonovho testu*;

$$P\{\min(S^+, S^-)\} \leq w_n(\alpha) \leq \alpha$$

n	$w_n(\alpha = 0,01)$	$w_n(\alpha = 0,05)$	n	$w_n(\alpha = 0,01)$	$w_n(\alpha = 0,05)$
6	–	0	36	171	208
7	–	2	37	182	221
8	0	3	38	194	235
9	1	5	39	207	249
10	3	8	40	220	264
11	5	10	41	233	279
12	7	13	42	247	294
13	9	17	43	261	310
14	12	21	44	276	327
15	15	25	45	291	343
16	19	29	46	307	361
17	23	34	47	322	378
18	27	40	48	339	396
19	32	46	49	355	415
20	37	52	50	373	434
21	42	58	51	390	453
22	48	65	52	408	473
23	54	73	53	427	494
24	61	81	54	445	514
25	68	89	55	465	536
26	75	98	56	484	557
27	83	107	57	504	579
28	91	116	58	525	602
29	100	126	59	546	625
30	109	137	60	567	648
31	118	147	61	589	672
32	128	159	62	611	697
33	138	170	63	634	721
34	148	182	64	657	747
35	159	195	65	681	772

Kritické hodnoty $W(0,05)$ pre dvojvýberový Wilcoxonov test; $P\{\min(U_1, U_2)\} \leq W(0,05) \leq 0,05$

$\alpha = 0,05$																				
n	k																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
4			0																	
5		0	1	2																
6		1	2	3	5															
7		1	3	5	6	8														
8	0	2	4	6	8	10	13													
9	0	2	4	7	10	12	15	17												
10	0	3	5	8	11	14	17	20	23											
11	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30										
12	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37									
13	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45								
14	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55							
15	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64						
16	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75					
17	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87				
18	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	75	80	86	93	99			
19	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113		
20	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127	
21	3	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119	126	134	
22	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141	
23	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132	140	149	
24	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138	147	156	
25	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145	154	163	
26	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151	161	171	
27	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158	168	178	
28	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164	175	186	
29	4	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171	182	193	
30	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177	189	200	

Kritické hodnoty $W(0,01)$ pre dvojvýberový Wilcoxonov test; $P\{\min(U_1, U_2)\} \leq W(0,01) \leq 0,01$

$\alpha = 0,01$																				
n	k																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
5				0																
6			0	1	2															
7			0	1	3	4														
8			1	2	4	6	7													
9		0	1	3	5	7	9	11												
10		0	2	4	6	9	11	13	16											
11		0	2	5	7	10	13	16	18	21										
12		1	3	6	9	12	15	18	21	24	27									
13		1	3	7	10	13	17	20	24	27	31	34								
14		1	4	7	11	15	18	22	26	0	34	38	42							
15		2	5	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51						
16		2	5	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60					
17		2	6	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70				
18		2	6	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81			
19	0	3	7	12	17	22	28	33	39	45	51	57	63	69	74	81	87	93		
20	0	3	8	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92	99	105	
21	0	3	8	14	19	25	32	38	44	51	58	64	71	78	84	91	98	105	112	
22	0	4	9	14	21	27	34	40	47	54	61	68	75	82	89	96	104	111	118	
23	0	4	9	15	22	29	35	43	50	57	64	72	79	87	94	102	109	117	123	
24	0	4	10	16	23	30	37	45	52	60	68	75	83	91	99	107	115	123	131	
25	0	5	10	17	24	32	39	47	55	63	71	79	87	96	104	112	121	129	138	
26	0	5	11	18	25	33	41	49	58	66	74	83	92	100	109	118	127	135	144	
27	1	5	12	19	27	35	43	52	60	69	78	87	96	105	114	123	132	142	151	
28	1	5	12	20	28	36	45	54	63	72	81	91	100	109	119	128	138	148	157	
29	1	6	13	21	29	38	47	56	66	75	85	94	104	114	124	134	144	154	164	
30	1	6	13	22	30	40	49	58	68	78	88	98	108	119	129	139	150	160	170	

Kritické hodnoty **Friedmanovho testu**(vľavo hore sú exaktné hodnoty pre $\alpha \leq 0,05$ ostatné hodnoty sú aproximované pre $\alpha = 0,05$)

$\alpha = 0,05$														
n	k													
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
3	6	7,40	8,53	9,86	11,24	12,57	13,88	15,19	16,48	12	13	14	15	
4	6,5	7,80	8,8	10,24	11,63	12,99	14,34	15,67	16,98	17,76	19,02	20,27	21,53	
5	6,4	7,80	8,99	10,43	11,84	13,23	14,59	15,93	17,27	18,3	19,6	20,9	22,1	
6	7	7,60	9,08	10,54	11,97	13,38	14,76	16,12	17,4	18,6	19,9	21,2	22,4	
7	7,143	7,80	9,11	10,62	12,07	13,48	14,87	16,23	17,6	18,8	20,1	21,4	22,7	
8	6,25	7,65	9,19	10,68	12,14	13,56	14,95	16,32	17,7	18,9	20,2	21,5	22,8	
9	6,222	7,66	9,22	10,73	12,19	13,61	15,02	16,4	17,7	19	20,3	21,6	22,9	
10	6,2	7,67	9,25	10,76	12,23	11,66	15,07	16,44	17,8	19,1	20,4	21,7	23	
11	6,545	7,68	9,27	10,79	12,27	13,7	15,11	16,48	17,9	19,2	20,5	21,8	23,1	
12	6,167	7,70	9,29	10,81	12,29	13,73	15,15	16,53	17,9	19,2	20,5	21,8	23,1	
13	6	7,70	9,3	10,83	12,32	13,76	15,17	16,56	17,9	19,3	20,6	21,9	23,2	
14	6,143	7,71	9,32	10,85	12,34	13,78	15,19	16,58	17,9	19,3	20,6	21,9	23,2	
15	6,4	7,72	9,33	10,87	12,35	13,8	15,2	16,6	18	19,3	20,6	21,9	23,2	
16	5,99	7,73	9,34	10,88	12,37	13,81	15,23	16,6	18	19,3	20,6	21,9	23,2	
17	5,99	7,73	9,34	10,89	12,38	13,83	15,2	16,6	18	19,3	20,7	22	23,2	
18	5,99	7,73	9,36	10,89	12,39	13,83	15,2	16,6	18	19,3	20,7	22	23,3	
19	5,99	7,74	9,36	10,91	12,4	13,8	15,3	16,7	18	19,4	20,7	22	23,3	
20	5,99	7,74	9,37	10,92	12,41	13,8	15,3	16,7	18	19,4	20,7	22	23,3	
∞	5,99	7,82	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31	19,4	20,7	22	23,3	

Kritické hodnoty **Friedmanovho testu**(vľavo hore sú exaktné hodnoty pre $\alpha \leq 0,01$ ostatné hodnoty sú aproximované pre $\alpha = 0,01$)

$\alpha = 0,01$														
n	k													
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
3	–	9	10,13	11,76	13,26	14,78	16,28	17,74	19,19	21,61	22	23,38	24,76	
4	8	9,6	11,2	12,59	14,19	15,75	17,28	18,77	20,24	21,7	23,1	24,5	26,9	
5	8,4	9,96	11,43	13,11	14,74	16,32	17,86	19,37	20,86	22,3	23,7	25,2	26,6	
6	9	10,2	11,75	13,45	15,1	16,69	18,25	19,77	21,3	22,7	24,2	25,6	27	
7	8,86	10,37	11,97	13,69	15,35	16,95	18,95	20,04	21,5	23	24,4	25,9	27,3	
8	9	10,35	12,14	13,87	15,53	17,15	18,71	20,24	21,8	23,2	24,7	26,1	27,5	
9	8,67	10,44	12,27	14,01	15,68	17,29	18,87	20,42	21,9	23,4	24,95	26,3	27,7	
10	9,6	10,53	12,38	14,12	15,79	17,41	19	20,53	22	23,5	25	26,4	27,9	
11	9,46	10,6	12,46	14,21	15,89	17,52	19,1	20,64	22,1	23,6	25,1	26,6	28	
12	9,5	10,68	12,53	14,28	15,96	17,59	19,19	20,73	22,2	23,7	25,2	26,7	28	
13	9,39	10,72	12,58	14,34	16,03	17,67	19,25	20,8	22,3	23,8	25,3	26,7	28,1	
14	9	10,76	12,64	14,4	16,09	17,72	19,31	20,86	22,4	23,9	25,3	26,8	28,2	
15	8,93	10,8	12,68	14,44	16,14	17,78	19,35	20,9	22,4	23,9	25,4	26,8	28,2	
16	8,79	10,84	12,72	14,48	16,18	17,81	19,4	20,9	22,5	24	25,4	26,9	28,3	
17	17	8,81	10,87	12,74	14,52	16,22	17,85	19,5	21	24	25,4	26,9	28,3	
18	18	8,84	10,9	12,78	14,56	16,25	17,87	19,5	21,1	24,1	25,5	26,9	28,3	
19	19	8,86	10,92	12,81	14,58	16,27	17,9	19,5	21,1	24,1	25,5	27	28,4	
20	8,87	10,94	12,83	14,6	16,3	18	19,5	21,1	22,6	24,1	25,5	27	28,4	
∞	9,21	11,35	13,28	15,09	16,81	18,48	20,09	21,67	23,21	24,73	26,22	27,69	29,14	

Kritické hodnoty pre mnohonásobné porovnávanie nezávislých výberov pomocou poradia

$\alpha = 0,01$								$\alpha = 0,05$									
k								N	k								
3	4	5	6	7	8	9	10		3	4	5	6	7	8	9	10	
3,3	4,7	6,1	7,5	9	10,5	12	13,5	1	4,1	5,7	7,3	8,9	10,5	12,2	13,9	15,6	
8,8	12,6	16,5	20,5	24,7	28,9	33,1	37,4	2	10,9	15,3	19,7	24,3	28,9	33,6	38,3	43,1	
15,7	22,7	29,9	37,3	44,8	52,5	60,3	68,2	3	19,5	27,5	35,7	44	52,5	61,1	69,8	78,6	
23,9	34,6	45,6	57	68,6	80,4	92,4	104,6	4	29,7	41,9	54,5	67,3	80,3	93,6	107	120,6	
33,1	48,1	63,5	79,3	95,5	112	128,8	145,8	5	41,2	58,2	75,8	93,6	111,9	130,4	149,1	168,1	
43,3	62,9	83,2	104	125,3	147	169,1	191,4	6	53,9	76,3	99,3	122,8	146,7	171	195,7	220,6	
54,4	79,1	104,6	130,8	157,6	184,9	212,8	240,9	7	67,6	95,8	124,8	154,4	184,6	215,2	246,3	277,7	
66,3	96,4	127,6	159,6	192,4	225,7	259,7	294,1	8	82,4	116,8	152,2	188,4	225,2	262,6	300,6	339	
78,9	114,8	152	190,2	229,3	269,1	309,6	350,6	9	98,1	139,2	181,4	224,5	268,5	313,1	358,4	404,2	
92,3	134,3	177,8	222,6	268,4	315	362,4	410,5	10	114,7	162,8	212,2	262,7	314,2	366,5	419,5	473,1	
106,3	154,8	205	256,6	309,4	363,2	417,9	473,3	11	132,1	187,6	244,6	302,9	362,2	422,6	483,7	545,6	
120,9	176,2	233,4	292,2	352,4	413,6	476	539,1	12	150,4	213,5	278,5	344,9	412,5	481,2	551	621,4	
136,2	198,5	263	329,3	397,1	466,2	536,5	607,7	13	169,4	240,6	313,8	388,7	464,9	542,4	621	700,5	
152,1	221,7	293,8	367,8	443,6	520,8	599,4	679	14	189,1	268,7	350,5	434,2	519,4	606	693,8	782,6	
168,6	245,7	325,7	407,8	491,9	577,4	664,6	752,8	15	209,6	297,8	388,5	481,3	575,8	671,9	769,3	867,7	
185,6	270,6	358,6	449,1	541,7	635,9	732	829,2	16	230,7	327,9	427,9	530,1	634,2	740	847,3	955,7	
203,1	296,2	392,6	491,7	593,1	696,3	801,5	907,9	17	252,5	359	468,4	580,3	694,4	810,2	927,8	1046,5	
221,2	322,6	427,6	535,5	646,1	758,5	873,1	989	18	275	391	510,2	632,1	756,4	882,6	1010,6	1140	
239,8	349,7	463,6	580,6	700,5	822,4	946,7	1072,4	19	298,1	423,8	553,1	685,4	820,1	957	1095,8	1236,2	
258,8	377,6	500,5	626,9	756,4	888,1	1022,3	1158,1	20	321,8	457,6	597,2	740	885,5	1033,3	1183,3	1334,9	
278,4	406,1	538,4	674,4	813,7	955,4	1099,8	1245,9	21	346,1	492,2	642,4	796	952,6	1111,6	1273	1436	
298,4	435,3	577,2	723	872,3	1024,3	1179,1	1335,7	22	371	527,6	688,7	853,4	1021,3	1191,8	1364,8	1539,7	
318,9	465,2	616,9	772,7	932,4	1094,8	1260,3	1427,7	23	396,4	563,8	736	912,1	1091,5	1273,8	1458,8	1645,7	
339,8	495,8	657,4	823,5	993,7	1166,8	1343,2	1521,7	24	422,4	600,9	784,4	972,1	1163,4	1357,6	1554,8	1754	
361,1	527	698,8	875,4	1056,3	1240,4	1427,9	1617,6	25	449	638,7	833,8	1033,3	1236,7	1443,2	1652,8	1864,6	

Kritické hodnoty pre mnohonásobné porovnávanie pomocou poradia v modeli náhodných blokov

$\alpha = 0,01$										$\alpha = 0,05$									
k										k									
N										N									
3	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5	6	7	8	9	10				
4,1	5,7	7,3	8,9	10,5	12,2	13,9	15,6	1	3,3	4,7	6,1	7,5	9	10,5	12	13,5			
5,8	8	10,3	12,6	14,9	17,3	19,7	22,1	2	4,7	6,6	8,6	10,7	12,7	14,8	17	19,2			
7,1	9,8	12,6	15,4	18,3	21,2	24,1	27	3	5,7	8,1	10,6	13,1	15,6	18,2	20,8	23,5			
8,2	11,4	14,6	17,8	21,1	24,4	27,8	31,2	4	6,6	9,4	12,2	15,1	18	21	24	27,1			
9,2	12,7	16,3	19,9	23,6	27,3	31,1	34,9	5	7,4	10,5	13,6	16,9	20,1	23,5	26,9	30,3			
10,1	13,9	17,8	21,8	25,8	29,9	34,1	38,2	6	8,1	11,5	14,9	18,5	22,1	25,7	29,4	33,2			
10,9	15	19,3	23,5	27,9	32,3	36,8	41,3	7	8,8	12,4	16,1	19,9	23,9	27,8	31,8	35,8			
11,7	16,1	20,6	25,2	29,8	34,6	39,3	44,2	8	9,4	13,3	17,3	21,3	25,5	29,7	34	38,3			
12,4	17,1	21,8	26,7	31,6	36,6	41,7	46,8	9	9,9	14,1	18,3	22,6	27	31,5	36	40,6			
13	18	23	28,1	33,4	38,6	44	49,4	10	10,5	14,8	19,3	23,8	28,5	33,2	38	42,8			
13,7	18,9	24,1	29,5	35	40,5	46,1	51,8	11	11	15,6	20,2	25	29,9	34,8	39,8	44,9			
14,3	19,7	25,2	30,8	36,5	42,3	48,2	54,1	12	11,5	16,2	21,1	26,1	31,2	36,4	41,6	46,9			
14,9	20,5	26,2	32,1	38	44	50,1	56,3	13	11,9	16,9	22	27,2	32,5	37,9	43,3	48,8			
15,4	21,3	27,2	33,3	39,5	45,7	52	58,4	14	12,4	17,5	22,8	28,2	33,7	39,3	45	50,7			
16	22	28,2	34,5	40,8	47,3	53,9	60,5	15	12,8	18,2	23,6	29,2	34,9	40,7	46,6	52,5			
16,5	22,7	29,1	35,6	42,2	48,9	55,6	62,5	16	13,3	18,8	24,4	30,2	36	42	48,1	54,2			
17	23,4	30	36,7	43,5	50,4	57,3	64,4	17	13,7	19,3	25,2	31,1	37,1	43,3	49,5	55,9			
17,5	24,1	30,9	37,8	44,7	51,8	59	66,2	18	14,1	19,9	25,9	32	38,2	44,5	51	57,5			
18	24,8	31,7	38,8	46	53,2	60,6	68,1	19	14,4	20,4	26,6	32,9	39,3	45,8	52,4	59			
18,4	25,4	32,5	39,8	47,2	54,6	62,2	69,8	20	14,8	21	27,3	33,7	40,3	47	53,7	60,6			
18,9	26	33,4	40,9	48,3	56	63,7	71,6	21	15,2	21,5	28	34,6	41,3	48,1	55,1	62,1			
19,3	26,7	34,1	41,7	49,5	57,3	65,2	73,2	22	15,5	22	28,6	35,4	42,3	49,2	56,4	63,5			
19,8	27,3	34,9	42,7	50,6	58,6	66,7	74,9	23	15,9	22,5	29,3	36,2	43,2	50,3	57,6	65			
20,2	27,8	35,7	43,6	51,7	59,8	68,1	76,5	24	16,2	23	29,9	36,9	44,1	51,4	58,9	66,4			
20,6	28,4	36,4	44,5	52,7	61,1	69,5	78,1	25	16,6	23,5	30,5	37,7	45	52,5	60,1	67,7			

Faktory pre konštrukciu regulačných diagramov na reguláciu meraním

n	Diagram priemerov			Diagram smerodajných odchýlok						Diagram rozptätí						
	Faktory regulačných hraníc			Faktory centrálnych priamky		Faktory regulačných hraníc				Faktory centrálnych priamky		Faktory regulačných hraníc				
	A	A ₂	A ₃	c ₄	1/c ₄	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₂	1/d ₂	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.115
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541

Pre $n > 25$ je $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$, $A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}$, $c_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3}$, $B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}$, $B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}$,

$$B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

LITERATÚRA

- [1] ANDĚL, J. *Matematická statistika*. Praha, SNTL/ALFA, 1985, 346 s.
- [2] GARAJ, I. - JANIGA, I. *Dvojstranné tolerančné medze pre neznámu strednú hodnotu a rozptyl normálneho rozdelenia*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2002, 147 s. ISBN 80-227-1779-7.
- [3] GARAJ, I. - JANIGA, I. *Dvojstranné tolerančné medze normálnych rozdelení s neznámymi strednými hodnotami a s neznámym spoločným rozptylom. Two Sided Tolerance Limits of Normal Distributions with Unknown Means and Unknown Common Variability*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2004, 218 s. ISBN 80-227-2019-4.
- [4] GARAJ, I. - JANIGA, I. *Jednostranné tolerančné medze normálneho rozdelenia s neznámou strednou hodnotou a rozptylom. One Sided Tolerance Limits of Normal Distributions with Unknown Mean and Variability*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2005, 214 s. ISBN 80-227-2218-9.
- [5] HÁTLE, J. - LIKEŠ, J. *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. Praha, SNTL/ALFA, 1972, 463 s.
- [6] JAROŠOVÁ, E. *Navrhování experimentů a jejich analýza*. Česká společnost pro jakost, 2007. 103 s. ISBN 978-80-02-01985-5.
- [7] JAROŠOVÁ, E. *Navrhování experimentů*. Ed. odd. VŠE Praha, 1998. 201 s. ISBN 80-7079-321-X.
- [8] JANIGA, I. *Aplikovaná pravdepodobnosť a štatistika pre inžinierov : štatistická analýza jedného a dvoch súborov dát 1. diel*. Bratislava, Nakladateľstvo STU, 2013. 265 s, ISBN 978-80-227-4046-3.
- [9] JANIGA, I. - GABKOVÁ, J. *Tolerance charts in statistical process kontrol*. In Aplimat 2017 [elektronický zdroj] : Proceedings of the 16th conference on applied mathematics 2017. Bratislava, 31. 1. – 2. 2. 2017. 1st. ed. Bratislava : Vydavateľstvo STU, 2017, s. 723-729, CD ROM. ISBN 978-80-227-4650-2.
- [10] JANIGA, I. - GABKOVÁ, J. - OMACHELOVÁ, M. - RICHTÁRIKOVÁ, D. *Základy štatistickej analýzy*. Bratislava, Nakladateľstvo STU, 2013. 221 s. ISBN 978-80-227-4023-4.
- [11] JANIGA, I. - GABKOVÁ, J. *Základy štatistickej analýzy. Zbierka úloh*. Bratislava, Nakladateľstvo STU, 2016. 157 s. ISBN 978-80-227-4533-8.
- [12] JANIGA, I. *Basics of statistical analysis*. Nakladateľstvo STU, 2014. 218 s. ISBN 978-80-227-4161-3.
- [13] JANIGA, I. *Basics of statistical analysis. Collection of exercises*. Bratislava, Nakladateľstvo STU, 2015. 157 s. ISBN 978-80-227-4433-1.
- [14] JANIGA, I. - MIKLÓŠ, R. *Statistical tolerance intervals for a normal distribution*. In Measurement Science Review. ISSN 13, 2001, vol. 1, no. 1, p. 29-32.

- [15] JANIGA, I. - STANISLAV, M. - GABKOVÁ, J. Aplikácia DMAIC v procese kompletizácie. In *Forum Statisticum Slovacum*. ISSN 1336-7420, 2012, roč. VIII, č. 5. s. 52–59.
- [16] JÍLEK, M. *Statistické toleranční meze*. Praha, SNTL, 1988, 275 s.
- [17] LAMOŠ, F. - POTOCKÝ, R. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. Vyd. ALFA, 1989. 342 s. ISBN 80-05-00115-0.
- [18] LIKEŠ, J. - LAGA, J. *Základní statistické tabulky*. Praha, SNTL, 1978, 488 s.
- [19] MARKECHOVÁ, D. - STEHLÍKOVÁ, B. - TIRPÁKOVÁ, A. *Štatistické metódy a ich aplikácie*. Univerzita Koštantína filozofa v Nitre. 2011. 537 s. ISBN 978-80-8094-807-8.
- [20] MONTGOMERY, D. C. - RUNGER, G. C. *Applied statistics and probability for engineers*. John Wiley & Sons, Inc., 2002. 706 p. ISBN 0-471-20454-4.
- [21] MONTGOMERY, D. C. - RUNGER, G. C. *Applied statistics and probability for engineers. Student workbook with solutions*. John Wiley & Sons, Inc., 2003. 706 p. ISBN 0-471-42682-2.
- [22] PALENČÁR, R. - RUIZ, J. M., JANIGA, I. - HORNÍKOVÁ, A. *Štatistické metódy v metrologických a skúšobných laboratóriach*. Vyd. Grafické štúdio Ing. Peter Juriga, 2001. 366 s. ISBN 80-968449-3-8.
- [23] VARGA, Š. - KVASNIČKA, V. *Matematika III. Diferenciálne rovnice a matematická štatistika*. Edičné stredisko SVŠT v Bratislave, 1988. 167 s.
- [24] VARGA, Š. - KVASNIČKA, V. *Matematika III. Príklady*. Edičné stredisko SVŠT v Bratislave, 1988. 200 s.
- [25] WIMMER, G. *Štatistické metódy v pedagogike*. Nakladateľstvo GAUDEAMUS, 1993. 154 s. ISBN 80-7041-864-8.

doc. RNDr. Ivan Janiga, PhD., RNDr. Jana Gabková, PhD., Mgr. Milada Omachelová, PhD.

ŠTATISTICKÉ ANALÝZY

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2017.

Edícia skrípt

Rozsah 228 strán, 49 obrázkov, 89 tabuliek, 8,162 AH, 8,451 VH, 1. vydanie,
edičné číslo 5945, náklad 20 CD.

85 – 216 – 2017

ISBN 978-80-227-4704-2