Viera Záhonová, Agnesa Dicsöová, Jana Dobrakovová,
Ružena Pekárková, Viera Poláková

ÚVOD DO ŠTÚDIA MATEMATIKY I.

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE

Viera Záhonová, Agnesa Dicsöová, Jana Dobrakovová,
Ružena Pekárková, Viera Poláková

ÚVOD DO ŠTÚDIA MATEMATIKY I.

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2013

Recenzenti: doc. RNDr. Ing. Blahoslav Harman, CSc.
RNDr. Jaroslava Trubenová, PhD.

ISBN 978-80-227-3998-6

Obsah

Úvod

Skriptá Úvod do štúdia Matematiky I sú určené predovšetkým študentom prijatým na štúdium do prvého ročníka bakalárskeho stupňa na SjF STU. Obsahujú prehľad tých partií matematiky, ktoré sú potrebné k úspešnému zvládnutiu predmetu Matematika I. Sú vhodnou doplnkovou literatúrou počas celého prvého semestra prvého ročníka bakalárskeho štúdia.

Skriptá sú usporiadané tak, aby študent získal prehľad o potrebných pojmoch, pravidlách a úlohách vybraných častí matematiky. V každej časti sú uvedené základné definície, pravidlá a vlastnosti, riešené príklady a dostatočné množstvo úloh s výsledkami na precvičenie danej látky. V prípade, že výsledky sú grafického charakteru, neuvádzame ich.

Skladajú sa z jedenástich kapitol, ktoré možno rozdeliť do niekoľkých na seba nadväzujúcich častí. V prvých štyroch kapitolách sa opakujú základné pojmy z teórie množín a reálnych čísel, ako aj základné metódy a postupy pri úprave algebrických výrazov a riešení jednoduchých rovníc, sústav rovníc a nerovníc. Tam, kde je to možné a vhodné, sa kladie veľký dôraz aj na geometrický aspekt riešenia týchto úloh. Piata kapitola obsahuje nevyhnutné minimum pojmov z analytickej geometrie roviny a niekoľko základných pojmov z analytickej geometrie trojrozmerného priestoru. Z hľadiska predmetu Matematika I. má zrejme najväčší význam šiesta kapitola: Funkcia a jej graf, kde sú zhrnuté najdôležitejšie pojmy, vlastnosti a typy reálnych funkcií jednej reálnej premennej. Siedma, resp. ôsma kapitola sa venuje špeciálne logaritmickým a exponenciálnym, resp. goniometrickým funkciám. Kapitoly deväť a jedenásť stručne pojednávajú o ďalších dôležitých pojmoch a úlohách, týkajúcich sa komplexných čísel, kombinatoriky, číselných postupností a ich limít.

Záverom by sme chceli poďakovať recenzentom doc. RNDr. Ing. Blahoslavovi Harmanovi, CSc. a RNDr. Jaroslave Trubenovej, PhD., ktorí cennými radami a pripomienkami prispeli k skvalitneniu predkladaných skrípt. Za grafickú časť a úpravu skrípt ďakujeme Bc. Kristíne Záhonovej. Taktiež vopred ďakujeme všetkým za oznámenie prípadných chýb alebo nepresností, ktoré sa môžu vyskytnúť v texte. Chceme tiež vysloviť úprimné želanie, aby tieto skriptá boli užitočnou pomôckou pre všetkých čitateľov, zvlášť pre študentov na začiatku ich štúdia na SjF STU a pomohli im tak doplniť prípadné medzery zo stredoškolskej matematiky, a predovšetkým - prekonať problémy vyplývajúce z nástupu na vysokú školu a nutnosti prispôsobiť sa novému, samostatnejšiemu systému štúdia.

Autorky

1

ZÁKLADNÉ POJMY Z TEÓRIE MNOŽÍN, MNOŽINY REÁLNYCH ČÍSEL

Pod množinou rozumieme súhrn (súbor, množstvo nejakých vzájomne odlíšiteľných vecí) objektov, ktoré nazývame jej prvkami. Množinu určujeme dvojakým spôsobom:

a) vymenovaním (vypísaním) všetkých prvkov,
b) uvedením charakteristickej vlastnosti prvkov patriacich do množiny.

Množiny označujeme obyčajne veľkými písmenami, ich prvky malými písmenami. Množinu považujeme za určenú, ak vieme o ľubovoľnom objekte povedať, či je, alebo nie je prvkom tejto množiny. Ak prvok x je prvkom množiny A, zapisujeme $x \in A$. Ak prvok x nie je prvkom množiny A, zapisujeme $x \notin A$.
Napríklad:

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{x \in N : x > 5\}$, $C = \{x \in R : x^2 - 4 = 0\}$,
b) množina všetkých študentov SjF STU zapísaných do 1. ročníka v šk. roku 2010/11,
c) množina všetkých pravouhlých trojuholníkov zostrojených nad priemerom danej kružnice.

Ak má množina konečný počet prvkov, nazýva sa **konečná**. Ak nemá konečný počet prvkov, nazýva sa **nekonečná**. Množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok, sa nazýva **prázdna** množina. Prázdnu množinu zaraďujeme medzi konečné množiny, označujeme $\emptyset$.

Množiny $A,\ B$ **sa rovnajú** ($A = B$), ak obsahujú rovnaké prvky. Inak povedané, množiny $A,\ B$ sa rovnajú, ak každý prvok množiny A je aj prvkom množiny B a každý prvok množiny B je aj prvkom množiny A.

Množina B je **podmnožinou** množiny A ($B \subset A$), ak každý prvok množiny B je aj prvkom množiny A. Pre ľubovoľné množiny $A,\ B$ platí:

$$A \subset A, \quad \emptyset \subset A, \quad \text{ak} \quad A \subset B \quad \text{a} \quad B \subset A, \quad \text{tak} \quad A = B.$$

Prienik množín $A,\ B$ ($A \cap B$) je množina, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do obidvoch množín. Množiny $A,\ B$, pre ktoré platí $A \cap B = \emptyset$ nazývame **disjunktné** množiny.

Zjednotenie množín $A,\ B$ ($A \cup B$) je množina, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria aspoň do jednej z množín $A,\ B$.

Množinu, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré sú prvkami množiny A, a nie sú prvkami množiny B, nazývame **rozdiel** množín $A,\ B$ ($A - B$).

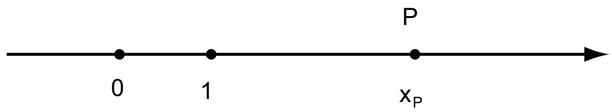
Ak $B \subset A$, tak rozdiel $A - B$ nazývame **doplnok** množiny B v množine A.

Označenie číselných množín:

N množina všetkých prirodzených čísel,
Z množina všetkých celých čísel,
Q množina všetkých racionálnych čísel,
R množina všetkých reálnych čísel,
C množina všetkých komplexných čísel.

Pre číselné množiny platí: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Reálne čísla je výhodné zobrazovať bodmi priamky (číselnej osi), na ktorej je zvolený začiatok, orientácia a jednotka dĺžky.



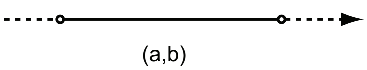
Každé reálne číslo je na číselnej osi zobrazené práve jedným bodom. Každý bod na číselnej osi je obrazom práve jedného reálneho čísla. Pod pojmom číslo, ak nebude ináč uvedené, budeme ďalej vždy rozumieť reálne číslo.
Racionálnym číslom nazývame každé číslo, ktoré možno vyjadriť v tvare zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p,\ q$ sú nesúdeliteľné celé čísla, q je prirodzené číslo. Reálne čísla, ktoré nie sú racionálne, sa nazývajú **iracionálne**. Iracionálne čísla možno zapísať len nekonečným desatinným rozvojom, v ktorom sa nevyskytuje žiadna perióda.

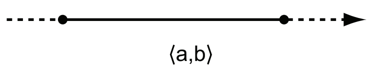
Pri riešení úloh budeme často zapisovať a znázorňovať rôzne množiny reálnych čísel pomocou **intervalov**. Nech $a,\ b$ sú ľubovoľné reálne čísla také, že $a < b$. Potom množinu všetkých reálnych čísel x, pre ktoré platí:

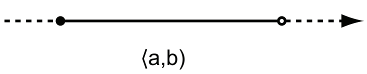
1. $a < x < b$ označujeme (a, b) a čítame: otvorený interval od a do b,
2. $a \leq x \leq b$ označujeme $\langle a, b\rangle$ a čítame: uzavretý interval od a do b,
3. $a \leq x < b$ označujeme $\langle a, b)$ a čítame: polouzavretý interval od a do b,
4. $a < x \leq b$ označujeme $(a, b\rangle$ a čítame: polouzavretý interval od a do b,

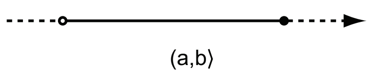
Čísla $a,\ b$ nazývame krajnými (koncovými) bodmi intervalu.

Zobrazenie na číselnej osi:









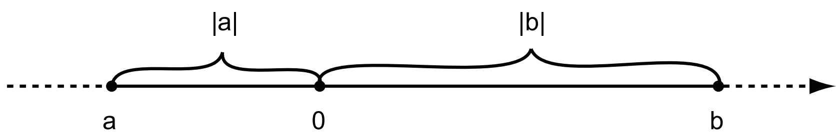
Množinu všetkých reálnych čísel označujeme $(-\infty, \infty)$. Ak a je ľubovoľné reálne číslo, tak množinu všetkých reálnych, čísel x, pre ktoré platí:

1. $x > a$ označujeme (a, ∞),
2. $x \geq a$ označujeme $\langle a, \infty)$,
3. $x < a$ označujeme $(-\infty, a)$,
4. $x \leq a$ označujeme $(-\infty, a\rangle$.

Nech $a,\ \delta > 0$ sú ľubovoľné reálne čísla. Interval $(a-\delta, a+\delta)$ nazývame **okolím** (δ-okolím) bodu a, označujeme $O_\delta(a)$.

Absolútna hodnota reálneho čísla a je definovaná pre každé reálne číslo a takto:
$$|a| = \begin{cases} a \text{ pre } & a \geq 0 \\ -a \text{ pre } & a \leq 0 \end{cases}$$

Geometrický význam absolútnej hodnoty:
$|a|$ udáva vzdialenosť obrazu reálneho čísla a od začiatku číselnej osi.



Vlastnosti:
$|a| = \sqrt{a^2}, \qquad |a+b| \leq |a| + |b|, \qquad |a\,.\,b| = |a|\,.\,|b|,$
$|x-\alpha| \leq c$ práve vtedy, ak $-c \leq x - \alpha \leq c$, teda $\alpha - c \leq x \leq \alpha + c$,
$a,\ b,\ x,\ \alpha \in R,\ c \geq 0.$

Príklad 1. Dané sú množiny $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\},\ B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $C = \{1, 3, 6, 10, 15\}$. Nájdite množiny $A \cap B,\ (A \cap B) \cap C,\ A \cup B,\ (A \cap B) \cup C$, $(A \cup B) \cap C,\ B - A,\ A - B,\ (A - B) - C$.

Riešenie: Z definície zavedených pojmov je zrejmé
$A \cap B = \{6, 12, 18\},\ (A \cap B) \cap C = \{6\},\ A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$,
$(A \cap B) \cup C = \{1, 3, 6, 10, 12, 15, 18\},\ (A \cup B) \cap C = \{3, 6, 10, 15\}$,
$B - A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\},\ A - B = \{3, 9, 15\},\ (A - B) - C = \{9\}$.

Príklad 2. Dané sú množiny $A = \langle 3, 5\rangle,\ B = \langle 2, 4\rangle,\ C = (2, 5),\ D = (4, \infty)$. Nájdite množiny $A \cup B,\ A \cup C,\ A \cap B,\ A \cap C,\ A - B,\ B - A,\ B - C,\ B \cup D,\ B \cap D,\ C \cap D$, $D - C$.

Riešenie:

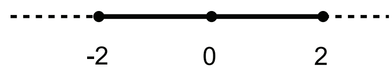
$A \cup B = \langle 3,5\rangle \cup \langle 2,4\rangle = \langle 2,5\rangle$,
$A \cap B = \langle 3,5\rangle \cap \langle 2,4\rangle = \langle 3,4\rangle$,
$A - B = \langle 3,5\rangle - \langle 2,4\rangle = (4,5\rangle$,
$B - C = \langle 2,4\rangle - (2,5) = \{2\}$,
$B \cap D = \langle 2,4\rangle \cap (4,\infty) = \emptyset$,
$D - C = (4,\infty) - (2,5) = \langle 5,\infty)$.

$A \cup C = \langle 3,5\rangle \cup (2,5) = (2,5\rangle$,
$A \cap C = \langle 3,5\rangle \cap (2,5) = \langle 3,5)$
$B - A = \langle 2,4\rangle - \langle 3,5\rangle = \langle 2,3)$,
$B \cup D = \langle 2,4\rangle \cup (4,\infty) = \langle 2,\infty)$,
$C \cap D = (2,5) \cap (4,\infty) = (4,5)$,

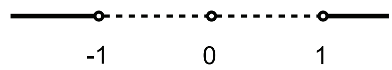
Príklad 3. Vyznačte na číselnej osi množiny všetkých reálnych čísel, pre ktoré platí:
a) $|x| \leq 2$, b) $|x| > 1$, c) $|x-3| \leq 1$, d) $|x+2| \geq \sqrt{3}$.

Riešenie:

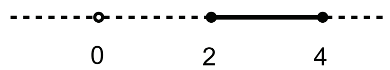
a) $|x| \leq 2$ práve vtedy $-2 \leq x \leq 2$, teda $x \in \langle -2, 2\rangle$,



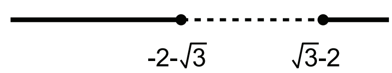
b) $|x| > 1$ práve vtedy $x > 1$ alebo $x < -1$, teda $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$,



c) $|x-3| \leq 1$ práve vtedy $-1 \leq x-3 \leq 1$, teda $2 \leq x \leq 4$, $x \in \langle 2,4\rangle$,



d) $|x+2| \geq \sqrt{3}$ práve vtedy $x+2 \geq \sqrt{3}$ alebo $x+2 \leq -\sqrt{3}$, teda
$x \geq \sqrt{3}-2$ alebo $x \leq -2-\sqrt{3}$.



Výroky

K charakteristickým znakom matematického jazyka patri jeho presnosť, jednoznačnosť. Uvedieme niektoré pojmy z matematickej logiky, ktoré nám umožňujú presnejšie sa vyjadrovať. **Výrok** je napísaná alebo vyslovená myšlienka, o ktorej pravdivosti má zmysel uvažovať.

Príklady:

a) Číslo 12 je deliteľné dvoma.
b) $3+5=10$
c) Bratislava je hlavné mesto Slovenska.

Každý výrok je pravdivý alebo nepravdivý. Ten istý výrok nemôže byť súčasne aj pravdivý aj nepravdivý. Spájaním výrokov môžeme získať nové zložitejšie výroky.

Negáciu výroku V tvoríme tak, že pred výrok dáme formulku „nie je pravda, že“, označujeme V'.

Výrok - V	Negácia výroku - V'
Číslo 4 je párne.	Nie je pravda, že číslo 4 je párne. (Číslo 4 je nepárne).
Dnes je nedeľa.	Dnes nie je nedeľa.

Konjunkcia (logický súčin) výrokov V a U, označujeme $V \wedge U$, čítame „platí výrok V a U“.

Disjunkcia (logický súčet) výrokov V a U, označujeme $V \vee U$, čítame „platí výrok V alebo U“.

Implikácia - označujeme $V \Rightarrow U$, čítame „ak platí V, potom platí U“.

Ekvivalencia - označujeme $V \Leftrightarrow U$, čítame „V platí práve vtedy, keď platí U“.

Všeobecný a existenčný kvantifikátor

Zápis $\forall\ x \in M : p(x)$ označuje výrok „pre každý prvok z množiny M platí $p(x)$“. Symbol $\forall$ nazývame **všeobecný kvantifikátor**.

Zápis $\exists\ x \in M : p(x)$ označuje výrok „existuje taký prvok x z množiny M, že platí $p(x)$“. Symbol $\exists$ nazývame **existenčný kvantifikátor**.

Príklad 4. V je výrok: „Číslo 9 je nepárne“, U je výrok: „Každý trojuholník má pravý uhol“. Utvorte výroky V', U', $V \wedge U$, $V \vee U$, $V \Rightarrow U$, $V \Leftrightarrow U$.

Riešenie:

V': „Nie je pravda, že číslo 9 je nepárne“.
U': „Nie je pravda, že každý trojuholník má pravý uhol“.
$V \wedge U$: „Číslo 9 je nepárne a každý trojuholník má pravý uhol“.
$V \vee U$: „Číslo 9 je nepárne, alebo každý trojuholník má pravý uhol“.
$V \Rightarrow U$: „Ak číslo 9 je nepárne, tak každý trojuholník má pravý uhol“.
$V \Leftrightarrow U$: „Číslo 9 je nepárne práve vtedy, keď každý trojuholník má pravý uhol“.

Príklad 5. Rozhodnite o pravdivosti výrokov:

a) $\forall x \in N : x \geq 1$, b) $\forall x \in R : (x+2)^2 \geq 0$, c) $\exists x \in R : 3x + 2 = 0$,
d) $\exists x \in R : x^2 + 4 = 0$, e) $\exists k \in Z : (2k+1)\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{5\pi}{2}$, f) $\forall x \in N : |x - 5| > 0$.

Riešenie: Výroky a), b), c) sú zrejme pravdivé. Výrok d) je nepravdivý, daná rovnica nemá riešenie v množine R. Výrok e) je pravdivý ($k = -3$). Výrok f) je nepravdivý, nerovnosť $|x - 5| > 0$ neplatí pre $x = 5$.

Príklad 6. Negujte výrok V:

a) Číslo 2 je deliteľom každého párneho čísla.
b) Každý trojuholník je tupouhlý.
c) Existuje úsečka, ktorá má veľkosť $\sqrt{2}$.
d) Existuje aspoň jeden lichobežník, ktorý má pravý uhol.

Riešenie: Výroky V':

a) Číslo 2 nie je deliteľom každého párneho čísla. (Existuje párne číslo, ktoré nie je deliteľné dvoma).
b) Každý trojuholník nie je tupouhlý. (Existuje trojuholník, ktorý nie je tupouhlý).
c) Nie je pravda, že existuje úsečka, ktorá má veľkosť $\sqrt{2}$.(Ani jedna úsečka nemá veľkosť $\sqrt{2}$).
d) Nie je pravda, že existuje lichobežník, ktorý má pravý uhol. (Ani jeden lichobežník nemá pravý uhol).

1.1 Cvičenia

1. Dané sú množiny $A = \{-3, -1, 0, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Určte množiny: a) $A \cup C$, b) $(A \cup B) \cup C$, c) $A \cap B$, d) $A \cap (B \cap C)$, e) $A - B$, f) $C - A$, g) $A - (B \cup C)$.

2. Je možné, aby pre nejaké množiny platilo: a) $A \cap B = A$, b) $A \cup B = A$, c) $A \cup B = A \cap B$, d) $A - B = A$, e) $A - B = \emptyset$, f) $(A - B) \cap B = \emptyset$? Ak áno, aká podmienka musí byť splnená?

3. Dané sú množiny $A = (6, 10\rangle$, $B = (-\infty, 8\rangle$, $G = \langle -2, 4\rangle$. Nájdite množiny: a) $A \cap B$, b) $B \cap C$, c) $A \cap C$, d) $A \cup B$, e) $A \cup C$, f) $A - B$, g) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

4. Nájdite množiny všetkých reálnych čísel, pre ktoré platí: a) $|x| < 3$, b) $|x| \geq 2$, c) $|x + 4| \leq 5$.

5. Rozhodnite o pravdivosti výrokov:
   a) Každé párne číslo je deliteľné 4.
   b) 35 je deliteľné 7.
   c) Rovnica $2x - 1 = 5$ má najviac jeden reálny koreň.
   d) Každý pravouhlý trojuholník je rovnoramenný.

6. Rozhodnite o pravdivosti výrokov:
   a) $\exists x \in N : x^2 - 9 = 0$, b) $\forall x \in (-1, 1\rangle : |x| \leq 1$, c) $\forall x \in (-\infty, 2) : \dfrac{1}{x - 2} < 0$,
   d) $\exists x \in R : x^2 + 3 < 0$.

Výsledky

1. a) $\{-3,-1,0,1,2,3,5\}$, b) $\{-3,-1,0,1,2,3,5,7\}$, c) $\{3,5\}$, d) $\{3\}$, e) $\{-3,-1,0\}$, f) $\{1,2\}$, g) $\{-3\}$,

2. a) $A \subset B$, b) $B \subset A$, c) $A = B$, d) $B \cap A = \emptyset$, e) $A \subset B$, f) vždy,

3. a) $(6,8\rangle$, b) $\langle -2,4\rangle$, c) $\emptyset$, d) $(-\infty,10\rangle$, e) $\langle -2,4\rangle \cup (6,10\rangle$, f) $(8,10\rangle$, g) $(-\infty,8\rangle$,

4. a) $x \in (-3,3)$, b) $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty)$, c) $x \in \langle -9,1\rangle$,

5. b), c) pravdivý, a), d) nepravdivý,

6. a), b), c) pravdivý, d) nepravdivý.

2

ÚPRAVA ALGEBRICKÝCH VÝRAZOV

Algebrický výraz je zápis skladajúci sa z čísel a písmen (označujú premenné), ktorý dostaneme pomocou konečného počtu operácií: sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie, umocnenie, odmocnenie, pomocou zátvoriek a pomocou absolútnej hodnoty. Zátvorky určujú poradie naznačených operácií. Napr. zápis $2x + 5y$ je algebrický výraz s dvoma premennými, zápis $\dfrac{xyz}{\sqrt{x+z}}$ je algebrický výraz s troma premennými.

Definičný obor výrazu je množina všetkých čísel, pre ktorý má daný výraz zmysel. Dva výrazy s písmenami sa rovnajú, ak majú rovnaký definičný obor a po dosadení každého čísla z definičného oboru za každé písmeno do rovnosti týchto výrazov dostaneme pravdivý výrok.

Úprava výrazu je nahradenie jedného výrazu iným, ktorý sa mu rovná, pričom obyčajne požadujeme, aby mal nový výraz vhodný tvar. Pred úpravou výrazu treba určiť definičný obor.

Zjednodušenie výrazu je taká úprava, po ktorej dostaneme výraz s menším počtom členov, zátvoriek, premenných, ktorý sa však rovná pôvodnému výrazu.
Pri úprave algebrických výrazov používame nasledujúce tvrdenia.

Pre každé dve reálne čísla $a,\ b$ platí:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Pre každé reálne číslo a a každé prirodzené číslo n definujeme:

$$a^n = a\,.\,a\,.\,...\,.\,a \qquad (n\text{−krát}).$$

Pre každé reálne číslo $a \neq 0$ a každé celé číslo z definujeme:

$$a^0 = 1, \qquad a^{-z} = \frac{1}{a^z}.$$

Ak n je prirodzené číslo, potom n-tá odmocnina z nezáporného reálneho čísla a (ozn. $\sqrt[n]{a}$) je to nezáporné číslo b, pre ktoré platí $b^n = a$.

Pre každé reálne kladné číslo a a každé racionálne číslo $\dfrac{z}{n}$ definujeme:

$$a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z} = (\sqrt[n]{a})^z.$$

Pre každé reálne čísla $a,\ b$ a ľubovoľné reálne čísla $r,\ s$ platí:

$$a^r.a^s = a^{r+s}, \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$(a^s)^r = (a^r)^s = a^{rs}, \qquad (ab)^r = a^r.\ b^r.$$

Príklad 1. Určte, pre ktoré reálne čísla $x,\ y$ má výraz zmysel a zjednodušte tento výraz: $\left(\dfrac{y}{x^2-xy} + \dfrac{x}{y^2-xy}\right) \cdot \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}$.

Riešenie: Výraz má zmysel práve vtedy, ak platí: $x^2-xy \neq 0,\ y^2-xy \neq 0,\ x^2-y^2 \neq 0$. Upravíme menovatele na súčin $x^2-xy = x(x-y),\ y^2-xy = y(y-x)$, $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$. Z toho vidíme, že daný výraz má zmysel pre všetky reálne čísla $x,\ y$, pre ktoré platí: $x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq y,\ x \neq -y$. Výraz zjednodušíme (urobíme naznačené operácie, krátime zlomky):

$$\left(\frac{y}{x^2-xy} + \frac{x}{y^2-xy}\right) \cdot \frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2} = \left(\frac{y}{x(x-y)} + \frac{x}{y(y-x)}\right) \cdot \frac{xy(x+y)}{(x-y)(x+y)} =$$

$$= \frac{y^2-x^2}{xy(x-y)} \cdot \frac{xy}{x-y} = \frac{-(x-y)(x+y)}{x-y} \cdot \frac{1}{x-y} = -\frac{x+y}{x-y} = \frac{x+y}{y-x}.$$

Príklad 2. Určte definičný obor výrazu a zjednodušte: $\sqrt{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}$.

Riešenie: Definičným oborom daného výrazu sú všetky reálne čísla $a,\ b$, pre ktoré platí: $a > 0,\ b > 0,$ alebo $a < 0,\ b < 0$. Výraz upravíme tak, aby obsahoval jednu odmocninu:

$$\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b}{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \frac{b}{a}}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b}{a}} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b}{a}} = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}.$$

Príklad 3. Zistite, pre ktoré reálne čísla $a,\ x$ má výraz zmysel a zjednodušte tento výraz: $\left(\dfrac{a-x}{a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}}\right) \cdot \dfrac{1}{2(ax)^{\frac{1}{3}}}$.

Riešenie: Výraz má zmysel, ak platí: $a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \neq 0,\ \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x} \neq 0,\ (ax)^{\frac{1}{3}} \neq 0$, $\sqrt[3]{a} \neq \sqrt[3]{x},\ \sqrt[3]{a} \neq -\sqrt[3]{x},\ a \neq 0,\ x \neq 0$. Teda výraz má zmysel, ak platí $a \neq 0,\ x \neq 0$, $x \neq \pm a$. Ďalej upravíme daný výraz

$$\left(\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}-\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}\right):2(ax)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\left(a^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}+(ax)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right):2(ax)^{\frac{1}{3}}=2(ax)^{\frac{1}{3}}:2(ax)^{\frac{1}{3}}=1.$$

Príklad 4. Udajte podmienky existencie a zjednodušte: $\left(x\sqrt[6]{\dfrac{y^2}{x}}+y\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{y}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[6]{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$

Riešenie: Podmienky existencie sú $\dfrac{y^2}{x}\geq 0,\ x\neq 0,\ \dfrac{x^2}{y}\geq 0,\ y\neq 0,\ xy\geq 0,$ $x\geq 0,\ y\geq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\neq 0$. Toto je splnené práve vtedy, ak $x>0,\ y>0$. Upravíme

$$\left(x\sqrt[6]{\frac{y^2}{x}}+y\sqrt[6]{\frac{x^2}{y}}\right)\cdot\frac{\sqrt[6]{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\left(xy^{\frac{2}{6}}x^{-\frac{1}{6}}+yx^{\frac{2}{6}}y^{-\frac{1}{6}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\left(x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{5}{6}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{xy^{\frac{1}{2}}+yx^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{(xy)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{xy}.$$

2.1 Cvičenia

Určte definičný obor a zjednodušte výraz:

1. a) $\dfrac{x^3-x^2y}{2x-2y}$, b) $\dfrac{a^2b^2}{a^4b^4+a^2b^2}$, c) $\dfrac{x^2y^2-1}{x^2y-x}$, d) $\dfrac{(x+y)^2}{xy+y^2}$, e) $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$,
   f) $\dfrac{2y}{(x+y)^2-x^2+y^2}$,
2. a) $\dfrac{a}{b-3}+\dfrac{a}{3-b}$, b) $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{y}{(x+y)^2}$, c) $\dfrac{a}{b^2}\cdot\dfrac{b^2-ab}{a^2}$,
   d) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{2x-2y}{3x+3y}$, e) $\dfrac{a^2-b^2}{3b}:\dfrac{a-b}{b}$, f) $\dfrac{x-y}{x+y}:\dfrac{3x^2-3y^2}{xy+y^2}$,
3. a) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}\sqrt{\dfrac{y^3}{x^2}}}$, b) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{b^3}{a}}$, c) $\sqrt{\dfrac{x^2}{y^3}}:\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{y^2}}$, d) $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b^2}}-2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\sqrt{a}$,
   e) $\dfrac{a-b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}:\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b}$, f) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x^3}}{x+y}$,
4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^2}}}$,

5. $\dfrac{\left(x^{\frac{8}{9}}\sqrt[4]{y^5}\right)^{\frac{2}{3}} z^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{x^2}y^{\frac{3}{4}}z^{-\frac{5}{6}}}$,

6. $\left(\dfrac{a^{-3}b^2}{c^{-3}d}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{a^2b^{-4}}{c^{-3}d^{-2}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{a^3b^{-3}}{c^{-2}d^{-2}}\right)^{-2}$,

7. $\sqrt[5]{\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}} : \sqrt[5]{\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}\right)^{2}}$,

8. $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}} + 4\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} - 2x\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} - 3x\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}$,

9. $\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$,

10. $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \dfrac{1-4\sqrt{x}}{1-x}$,

11. $\left[\left(1-\dfrac{2}{1-3a}\right) \cdot \left(1-\dfrac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\right] : 2(1-9a^2)$,

12. $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \left(1-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$,

13. $\left(\dfrac{a^3-ab^2+b^3}{(a-b)^3} - \dfrac{b}{a-b}\right) \cdot \left(\dfrac{a^2-2ab+2b^2}{a^2-ab+b^2} - \dfrac{b}{a}\right)$,

14. $\left(\dfrac{3}{x-y} + \dfrac{3x}{x^3-y^3} \cdot \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right) : \dfrac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}$,

15. $\dfrac{2-\dfrac{x^2+y^2}{xy}}{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}}$ a vypočítajte hodnotu zlomku pre $x = 0,2,\ y = 2$,

16. $\dfrac{\dfrac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right) \cdot \left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)}$,

17. $\dfrac{\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{a^2}{b}+a+b}{\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{b^2}{a^2}}$,

18. $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$,

19. $\dfrac{(x^2-5x+6)^2}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{(x-2)^2}$,

20. $\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{1-x}{4-x}+\dfrac{1}{x^2-7x+12}$,

21. $\dfrac{a+1}{a^3+a^2+a}:\dfrac{1}{a^4-a}$,

22. $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right):\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2-2y(x+y)}$,

23. $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{a}{b^2-ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2b+ab^2}\right)^{-1}$,

24. $\left(1+\dfrac{1+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{1-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}\right)\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

Výsledky:

1. a) $\dfrac{x^2}{2},\ x\neq y$, b) $\dfrac{1}{a^2b^2+1},\ a\neq 0,\ b\neq 0$, c) $\dfrac{xy+1}{x},\ x\neq 0,\ x\neq\dfrac{1}{y}$,
d) $\dfrac{x+y}{y},\ y\neq 0,\ x\neq -y$, e) $4,\ a\neq 0,\ b\neq 0$, f) $\dfrac{1}{x+y},\ y\neq 0,\ y\neq -2x$,

2. a) $0,\ b\neq 3$, b) $\dfrac{2x^2}{(x+y)^2(x-y)},\ x\neq\pm y$, c) $\dfrac{b-a}{ab},\ a\neq 0,\ b\neq 0$,
d) $\dfrac{2}{3},\ x\neq\pm y$, e) $\dfrac{a+b}{3},\ b\neq 0,\ a\neq b$, f) $\dfrac{y}{3(x+y)},\ x\neq -y,\ y\neq 0$,

3. a) $x^{-\frac{1}{3}}\,y^{\frac{1}{3}},\ x\neq 0,\ y>0$, b) $a^{\frac{1}{12}}\,b^{\frac{1}{12}},\ a>0,\ b>0$, c) $y^{-\frac{5}{6}},\ y>0,\ x\neq 0$,
d) $-a^{\frac{1}{4}}\,b^{-\frac{1}{2}},\ a\geq 0,\ b>0$, e) $-b,\ b>0,\ a\neq b,\ a\geq 0$,
f) $-\dfrac{xy^{\frac{1}{2}}}{x+y},\ x\neq -y,\ x\geq 0,\ y\geq 0$,

4. $a^{\frac{29}{24}}b^{-\frac{13}{12}},\quad a\geq 0,\quad b>0$,

5. $x^{-\frac{2}{27}}y^{\frac{1}{12}}z^{\frac{1}{12}}, \quad x \neq 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$

6. $a^6b^2c^{-11}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0,$

7. $a^{\frac{1}{6}}, \quad a > 0,$

8. $0, \quad x > 0,$

9. $\dfrac{2}{1-a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$

10. $\dfrac{1}{1-x}, \quad x \geq 0, \quad x \neq 1,$

11. $\dfrac{-1}{2(1+3a)}, \quad a \neq \pm\dfrac{1}{3},$

12. $-\dfrac{2a}{b}, \quad a \neq \pm b, \quad b \neq 0,$

13. $1, \quad a \neq 0, \quad a \neq b,$

14. $\dfrac{3(x+y)}{x-y}, \quad x \neq \pm y, \quad y \neq -2x,$

15. $-y, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad x \neq y, \quad -2,$

16. $\dfrac{a+b}{a-b}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a \neq b,$

17. $\dfrac{a^2}{a-b}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a \neq \pm b,$

18. $\dfrac{1-a}{1-2a}, \quad a \neq \pm 1, \quad a \neq \pm\dfrac{1}{2},$

19. $\sqrt[3]{x^2-9}, \quad x \neq 2, \quad x \neq 3,$

20. $\dfrac{2(x-2)}{x-4}, \quad x \neq 3, \quad x \neq 4,$

21. $a^2-1, \quad a \neq 0, \quad a \neq 1,$

22. $\dfrac{1}{2y}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad x \neq \pm y,$

23. $\dfrac{a+b}{b-a}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a \neq \pm b,$

24. $1, \quad x \neq 0.$

3

ROVNICE A SÚSTAVY ROVNÍC

Rovnica je matematické vyjadrenie rovnosti medzi hodnotami dvoch výrazov. Výrazy môžu obsahovať jednu alebo viac premenných. Definičný obor rovnice je prienik definičných oborov všetkých výrazov, ktoré sa v rovnici nachádzajú.

Sústava rovníc obsahuje dve, resp. viac rovníc, ktoré majú byť splnené súčasne. Definičný obor sústavy rovníc je prienik definičných oborov jednotlivých rovníc sústavy. Číslo z definičného oboru rovnice s jednou premennou ($L(x) = P(x)$, L - ľavá strana rovnice, P - pravá strana rovnice) sa nazýva **koreňom** (riešením) tejto rovnice, ak po dosadení tohto čísla do rovnice namiesto premennej dostaneme pravdivý výrok. Riešením sústavy rovníc s dvoma premennými sú všetky usporiadané dvojice čísiel $[x, y] \in R \times R$, ktoré spĺňajú každú rovnicu sústavy. Vyriešiť rovnicu, alebo sústavu rovníc znamená nájsť množinu K všetkých riešení.

Pri riešení rovníc používame úpravy, ktoré nemenia množinu riešení (**ekvivalentné úpravy**).

1. Nahradenie výrazu $L(x)$ alebo $P(x)$ výrazom, ktorý sa mu rovná.
2. Násobenie obidvoch strán rovnice číslom $c \neq 0$.
3. Pripočítanie toho istého čísla k obidvom stranám rovnice.

Ďalej používame úpravy, ktoré môžu viesť k rovnici s inou množinou riešení, ako mala pôvodná rovnica (**neekvivalentné úpravy**).

1. Pripočítanie výrazu definovaného na celom definičnom obore rovnice k obidvom stranám rovnice. (Ak definičný obor rovnice je celá množina R, potom táto úprava je ekvivalentná).
2. Násobenie obidvoch strán rovnice výrazom definovaným na celom definičnom obore rovnice. (Ak výraz je nenulový a definovaný pre všetky čísla z R, potom úprava je ekvivalentná).
3. Umocnenie obidvoch strán rovnice prirodzeným mocniteľom.

Pri použití neekvivalentných úprav je nevyhnutnou súčasťou riešenia rovnice **skúška správnosti**. Skúšku urobíme tak, že vypočítané korene dosadíme do pôvodnej rovnice. Ak po dosadení dostaneme pravdivý výrok, je vypočítané číslo koreňom pôvodnej rovnice.

Základné typy rovníc a sústav rovníc

Lineárna rovnica s jednou neznámou má tvar: $ax + b = 0$, a, $b \in R$, $a \neq 0$. Rovnica má jediný koreň $x = -\dfrac{b}{a}$.

Sústava dvoch rovníc

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

kde $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2 \in R$, pričom aspoň jedno z čísel $a_1,\ b_1$ a aspoň jedno z čísel $a_2,\ b_2$ je rôzne od nuly, sa nazýva **sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi**. Sústavu riešime dosadzovacou alebo sčítacou metódou. Pri dosadzovacej metóde vyjadríme jednu neznámu z jednej rovnice sústavy a dosadíme do druhej rovnice, čím dostaneme rovnicu o jednej neznámej. Pri sčítacej metóde vynásobíme dané rovnice vhodnými číslami tak, aby sa po sčítaní rovníc jedna neznáma vylúčila.

Kvadratická rovnica má tvar: $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a,\ b,\ c \in R,\ a \neq 0$. Číslo $D = b^2 - 4ac$ sa nazýva diskriminant kvadratickej rovnice.

- Pre $D > 0$ má kvadratická rovnica dva reálne korene

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- Pre $D = 0$ má kvadratická rovnica dvojnásobný reálny koreň

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

- Pre $D < O$ v množine reálnych čísel kvadratická rovnica nemá riešenie. Riešenie kvadratickej rovnice pre $D < 0$ je uvedené v kapitole 9.

Rovnice s absolútnou hodnotou obsahujú neznámu v absolútnej hodnote. Riešime ich pomocou definície absolútnej hodnoty čísla, rozdelením definičného oboru rovnice na množiny, na ktorých každý z výrazov v absolútnej hodnote nemení znamienko. Na každej z týchto množín riešime rovnicu, ktorá je ekvivalentná s pôvodnou rovnicou a neobsahuje už absolútne hodnoty. Riešenie potom dostaneme ako zjednotenie riešení na jednotlivých množinách.

Sústavu lineárnej a kvadratickej rovnice, resp. dvoch kvadratických rovníc s dvoma neznámymi riešime zvyčajne tiež dosadzovacou alebo sčítacou metódou.

Príklad 1. Riešte v R rovnicu $(2x-3)^2 = (3x-4)(3x+4) - x(5x-3)$.

Riešenie: Definičný obor rovnice je R. Pri riešení použijeme základné vzorce a ekvivalentné úpravy.

$$4x^2 - 12x + 9 = 9x^2 - 16 - 5x^2 + 3x$$

$$-15x = -25, \quad \text{z čoho} \quad x = \frac{5}{3}$$

Pretože použité úpravy boli ekvivalentné, $K = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

Príklad 2. Riešte v R rovnicu $1 + \dfrac{3(x-3)}{2(x-2)} + \dfrac{15}{x(x-2)} = \dfrac{6}{x-2}$.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre $x \neq 0$, $x \neq 2$. Rovnicu vynásobíme výrazom $2x(x-2) \neq 0$.

$$2x(x-2) + 3x(x-3) + 30 = 12x$$
$$5x^2 - 25x + 30 = 0$$
$$5(x-2)(x-3) = 0$$
$$x = 2 \quad \text{alebo} \quad x = 3$$

Vykonané úpravy boli na definičnom obore rovnice ekvivalentné. Koreň $x = 2$ nie je z definičného oboru rovnice, teda $K = \{3\}$.

Príklad 3. Riešte v $R \times R$ sústavu rovníc

$$36x + 8y = 7x - 21y$$
$$18x + 9y = 3x - 3y + 3.$$

Riešenie: Sústava rovníc je definovaná pre každé $[x, y] \in R \times R$. Sústavu upravíme na jednoduchší tvar

$$29x + 29y = 0$$
$$15x + 12y = 3$$

Ďalej riešime dosadzovacou metódou. Z prvej rovnice $y = -x$ dosadíme do druhej rovnice a dostaneme

$$15x - 12x = 3$$
$$x = 1$$

Z podmienky $y = -x$ vyplýva $y = -1$. Všetky úpravy boli ekvivalentné, teda dvojica $[1, -1]$ vyhovuje danej sústave, $K = \{[1, -1]\}$.

Príklad 4. Riešte v $R \times R$ sústavu rovníc

$$\frac{x-1}{x+15} = \frac{y-6}{y+2}$$
$$\frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y-1}.$$

Riešenie: Sústava rovníc je definovaná pre $x \neq -15$, $x \neq 0$, $y \neq -2$, $y \neq 1$. Prvú rovnicu sústavy vynásobíme výrazom $(x+15)(y+2)$ a druhú rovnicu výrazom $x(y-1)$. Oba výrazy sú definované pre každé reálne $x,\ y$ a na definičnom obore rovnice sú nenulové.

$$(x-1)(y+2) = (y-6)(x+15)$$
$$(x-3)(y-1) = (y-4)x$$

Po úprave dostaneme jednoduchú sústavu

$$x - 2y = -11$$

$$x - y = -1,$$

ktorú riešime sčítacou metódou. Druhú rovnicu odčítame od prvej a dostaneme

$$-y = -10, \quad \text{z čoho} \quad y = 10.$$

Po dosadení $y = 10$ napr. do prvej rovnice dostaneme $x - 20 = -11$, $\quad x = 9$. Použité úpravy boli ekvivalentné na definičnom obore rovnice, teda riešením je $K = \{[9, 10]\}$.

Príklad 5. Súčet druhých mocnín dvoch po sebe idúcich nepárnych prirodzených čísel je 514. Vypočítajte obidve čísla.

Riešenie: Nech $x \in N$, potom dve po sebe idúce nepárne prirodzené čísla sú napr. $2x - 1$ a $2x + 1$. Rovnica bude mať tvar

$$(2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 514$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 = 514$$
$$8x^2 = 512$$
$$x^2 = 64 \quad x_{1,2} = \pm 8.$$

Pretože $x \in N$, vyhovuje len $x = 8$. Hľadané čísla sú $2x - 1 = 15$ a $2x + 1 = 17$.

Príklad 6. Riešte v R rovnicu $\dfrac{2}{1-x} - \dfrac{7}{1+x} = \dfrac{3}{x}$.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. Rovnicu vynásobíme výrazom $(1-x)(1+x)x \neq 0$ a upravíme

$$2(1+x)x - 7(1-x)x = 3(1-x)(1+x)$$

$$12x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Diskriminant kvadratickej rovnice $D = b^2 - 4ac = 25 + 144 = 169 > 0$ a korene rovnice sú

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 13}{24},$$

$$x_1 = \frac{3}{4}, \qquad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Korene patria do definičného oboru rovnice, teda $K = \left\{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right\}$.

Príklad 7. Riešte v R rovnicu $\sqrt{3x+10} - x = 2$.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre $3x+10 > 0$, teda na $\left\langle -\frac{10}{3}, \infty \right)$. Osamostatníme odmocninu a okrem ekvivalentných úprav použijeme aj 3. neekvivalentnú úpravu, preto nakoniec vykonáme skúšku správnosti riešenia.

$$\sqrt{3x+10} = 2 + x$$

$$3x + 10 = (2+x)^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Pretože $x_1 . x_2 = -6$ a $x_1 + x_2 = -1$, koreňmi kvadratickej rovnice sú čísla $x_1 = -3$ a $x_2 = 2$.
Urobíme skúšku správnosti riešenia.
Pre $x_1 = -3$: ľavá strana rovnice $L = \sqrt{-9+10} + 3 = 4$, pravá strana $P = 2$, $L \neq P$.
Pre $x_2 = 2$: ľavá strana rovnice $L = \sqrt{6+10} - 2 = 2$, pravá strana $P = 2$, $L = P$.

Rovnici vyhovuje len $x_2 = 2$, teda $K = \{2\}$.

Príklad 8. Riešte v R rovnicu $2|x-3| = 3x+2$.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre každé $x \in R$. Z definície absolútnej hodnoty reálneho čísla vyplýva

a) pre $x - 3 \geq 0$, teda na $\langle 3, \infty)$ platí $|x-3| = x-3$
b) pre $x - 3 < 0$, teda na $(-\infty, 3)$ platí $|x-3| = -(x-3)$

Rovnicu riešime pre oba prípady.

a) Nech $x \geq 3$, potom rovnica $2|x-3| = 3x+2$ je ekvivalentná s rovnicou

$$2(x-3) = 3x+2, \quad \text{z ktorej} \quad x = -8.$$

Toto číslo nevyhovuje podmienke $x \geq 3$, preto nie je koreňom pôvodnej rovnice na $\langle 3, \infty)$.

b) Nech $x < 3$, potom rovnica $2|x-3| = 3x+2$ je ekvivalentná s rovnicou

$$-2(x-3) = 3x+2, \quad \text{z ktorej} \quad -5x = -4 \quad \text{a} \quad x = \frac{4}{5}.$$

Vypočítané číslo vyhovuje podmienke $x < 3$, preto je koreňom danej rovnice na $(-\infty, 3)$.

Teda

$$K = \emptyset \cup \left\{\frac{4}{5}\right\} = \left\{\frac{4}{5}\right\}.$$

Príklad 9. Riešte v $R \times R$ sústavu rovníc

$$x^2 + 2y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$2xy - x = 0.$$

Riešenie: Sústava rovníc je definovaná pre každé $[x, y] \in R \times R$. Riešime ju dosadzovacou metódou. Druhú rovnicu upravíme na tvar

$$x(2y - 1) = 0, \quad \text{z čoho} \quad x = 0 \quad \text{alebo} \quad y = \frac{1}{2}.$$

- Pre $x = 0$ má prvá rovnica sústavy tvar $2y^2 - 2y - 4 = 0$, čiže $2(y + 1)(y - 2) = 0$, z čoho $y = -1$ alebo $y = 2$.
  Pre $x = 0$ je riešením $[0, -1]$ a $[0, 2]$.
- Pre $y = \frac{1}{2}$ má prvá rovnica sústavy tvar $x^2 + \frac{1}{2} - 1 - 4 = 0$, teda $x^2 = \frac{9}{2}$ a $x_{1,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
  Pre $y = \frac{1}{2}$ je riešením $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a $\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Použité úpravy sú ekvivalentné, teda $K = \left\{[0, -1], [0, 2], \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$.

3.1 Cvičenia

1. Riešte v R rovnicu $(2 - x)^3 - 2x^2 + 10 = (3 - x)(3 + x)x + (2x - 1)^2$.
2. Riešte v R rovnicu $\dfrac{2x - 13}{2x - 16} + \dfrac{2x - 12}{x - 8} = \dfrac{10x - 78}{3x - 24} + \dfrac{7}{8}$.
3. Riešte v $R \times R$ sústavu rovníc

   a) $$\frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} = x + 1$$
   $$\frac{2x - 3y}{3} + \frac{4x - 3y}{2} = y + 1,$$

   b) $$\frac{12}{y + 2} + \frac{3}{x - y} = 5$$
   $$\frac{5}{x - y} + \frac{6}{y + 2} = 4.$$

4. Riešte v R rovnicu $\dfrac{3}{1 - x^2} = \dfrac{2}{(1 + x)^2} - \dfrac{5}{(1 - x)^2}$.
5. Obvod obdĺžnika je 42 cm, dĺžka jeho uhlopriečky je 15 cm. Vypočítajte rozmery tohto obdĺžnika.

6. Študent mal preštudovať 480 strán skrípt. Štúdium si rozdelil tak, že každý deň naštudoval rovnaký počet strán. Keby bol každý deň preštudoval o 16 strán viac, ostalo by mu 5 dní na zopakovanie. Koľko dní študoval skriptá?

7. Nájdite m tak, aby rovnica $mx^2 - 4x + m - 2 = 0$ mala jeden koreň $x = 0$. Vypočítajte druhý koreň.

8. Riešte v R rovnice a) $6x^2 - 13x = 0$, b) $9x^2 - 2 = 0$, c) $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 11 = 0$, d) $3x^2 + 4 = 0$, e) $25x^2 - 3x - 28 = 0$, f) $x^2 + 8x\sqrt{2} + 32 = 0$, g) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$.

9. Riešte v R rovnice a) $\dfrac{2x+1}{x-1} - \dfrac{3x+3}{2x-3} = \dfrac{x-4}{2x^2-5x+3}$, b) $\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{4}{x(x-2)} = \dfrac{x}{2-x}$.

10. Pre ktoré r má rovnica $2(r+2)x^2 - 24x + r + 3 = 0$ dvojnásobný koreň?

11. Aká hlboká je šachta, ak dopad kameňa na dno šachty počujeme za 8 sek. (Rýchlosť zvuku vo vzduchu $v = 340\ m.s^{-1}$, zrýchlenie voľného pádu $g = 10\ m.s^{-2}$, $v_0 = 0$.)

12. Napíšte všetky kvadratické rovnice, ktoré majú korene $x_1 = -7$, $x_2 = 5$.

13. Riešte v R rovnice a) $\sqrt{3-x} - x = 3$, b) $2\sqrt{x+2} + 4 = x - 18$,
c) $\dfrac{x + \sqrt{x+2}}{x - \sqrt{x+2}} = -\dfrac{7}{5}$ d) $\sqrt{x-7} - \sqrt{5-x} = 3$, e) $\sqrt{10-x} = 2 - \sqrt{x-8}$,
f) $\sqrt{-x - \sqrt{1-x}} = 1$, g) $x + \sqrt{x^2-9} = 21$,
h) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$.

14. Riešte v R rovnice a) $|x-3| - 2x = 2 - x$, b) $\dfrac{4-x}{|3x-2|} = 2x + 1$,
c) $|x-2| = 3|x-4|$, d) $4 - x - x^2 = |x^2 - x + 2|$.

15. Riešte v $R \times R$ sústavy rovníc
a) $x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$, b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$,
c) $y - x - 2 = 0$, $y^2 = 8x$, d) $x^2 + 2y^2 - 2y - 4 = 0$, $2xy - x = 0$.

Výsledky:

1. $K = \{1\}$,

2. $K = \{12\}$,

3. a) $K = \{[3,2]\}$, b) $K = \{[5,4]\}$,

4. $K = \left\{-\dfrac{3}{7}\right\}$,

5. 9 cm, 12 cm,

6. 15 dní,

7. $m = 2$, $x = 2$,

8. a) $K = \left\{0, \dfrac{13}{6}\right\}$, b) $K = \left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right\}$, c) $K = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \pm 2\right\}$, d) $K = \emptyset$,
e) $K = \left\{-1, \dfrac{28}{25}\right\}$, f) $K = \{-4\sqrt{2}\}$, g) $K = \left\{\pm\dfrac{1}{2}, \pm\sqrt{3}\right\}$,

9. a) $K = \{4\}$, b) $K = \emptyset$,

10. $K = \{-11, 6\}$,

11. $h \approx 250$ m,

12. $ax^2 + 2ax - 35a = 0,\ a \in R,\ a \neq 0$,

13. a) $K = \{-1\}$, b) $K = \{34\}$, c) $K = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$, d) $K = \emptyset$, e) $K = \{9\}$,
f) $K = \{-3\}$, g) $K = \left\{\dfrac{75}{7}\right\}$, h) $K = \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$,

14. a) $K = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, b) $K = \{1\}$, c) $K = \left\{\dfrac{7}{2}, 5\right\}$, d) $K = \{-1, 1\}$,

15. a) $K = \emptyset$, b) $K = \{[-1, 0], [1, 2]\}$, c) $K = \{[2, 4]\}$,
d) $K = \left\{[0, -1], [0, 2], \left[\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right], \left[-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right]\right\}$.

4

NEROVNICE

Pojem nerovnice s jednou premennou ($L(x) < P(x)$, $L(x) > P(x)$, $L(x) \leq P(x)$, $L(x) \geq P(x)$) vyplýva z riešenia nasledujúcej matematickej úlohy. V danej číselnej množine hľadáme všetky také prvky x, ktoré spĺňajú nerovnosti medzi hodnotami výrazov $L(x)$ a $P(x)$.

Definičný obor nerovnice je prienik definičných oborov výrazov $L(x)$ a $P(x)$. Číslo z definičného oboru nerovnice sa nazýva riešenie (koreň) tejto nerovnice, ak po dosadení tohto čísla za premennú do nerovnice dostaneme pravdivý výrok. Riešiť nerovnicu znamená nájsť množinu K všetkých jej riešení.

Pri riešení používame najčastejšie nasledujúce úpravy, ktoré nemenia množinu riešení (**ekvivalentné úpravy**).

1. Nahradenie výrazu $L(x)$ alebo $P(x)$ výrazom, ktorý sa mu rovná.
2. Pripočítanie toho istého čísla k obidvom stranám nerovnice.
3. Pri násobení obidvoch strán nerovnice číslom $c \neq 0$ platí:
   a) ak $c > 0$, potom $L(x) < P(x)$ práve vtedy, ak $cL(x) < cP(x)$,
   b) ak $c < 0$, potom $L(x) < P(x)$ práve vtedy, ak $cL(x) > cP(x)$.
   Vlastnosť platí podobne, ak v nerovnici namiesto znaku $<$ je jeden zo znakov $>, \geq, \leq$. Teda po vynásobení nerovnice číslom $c > 0$ sa znak pôvodnej nerovnice nezmení, po vynásobení nerovnice číslom $c < 0$ sa znak nerovnice zmení na opačný.
4. Umocnenie (odmocnenie) obidvoch strán nerovnice, ak obidve strany nerovnice nadobúdajú na celom definičnom obore nerovnice nezáporné hodnoty: $L(x) \geq 0$ a $P(x) \geq 0$, potom $L(x) < P(x)$ práve vtedy, ak $[L(x)]^2 < [P(x)]^2$ ($\sqrt{L(x)} < \sqrt{P(x)}$). Vlastnosť platí podobne, keď v nerovnici namiesto znaku $<$ je jeden zo znakov $>, \geq, \leq$.

Poznámka: Pripočítanie ľubovoľného výrazu obsahujúceho neznámu k obom stranám nerovnice, resp. násobenie oboch strán nerovnice nenulovým výrazom obsahujúcim neznámu, všeobecne nie je ekvivalentná úprava. Táto úprava je ekvivalentná, ak definičný obor nerovnice aj definičný obor výrazu je celá množina R. Pri násobení oboch strán nerovnice nenulovým výrazom je potrebné uvážiť znamienko výrazu a postupovať podľa vlastnosti 3.

Základné typy nerovníc

Lineárna nerovnica s jednou neznámou má tvar: $ax + b > 0$, ($ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$), $a,\ b \in R$, $a \neq 0$.

Ak $a > 0$ je $ax + b > 0$ práve vtedy, ak $x > -\dfrac{b}{a}$ a množina riešení $K = \left(-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$.
Ak $a < 0$ je $ax + b > 0$ práve vtedy, ak $x < -\dfrac{b}{a}$ a množina riešení $K = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$.

Sústava lineárnych nerovníc s jednou neznámou má tvar napr. $ax + b > 0$, $cx + d < 0$, $\quad a, b, c, d \in R$, $a \neq 0$, $c \neq 0$. Číslo $x_0 \in R$ je koreňom sústavy nerovníc práve vtedy, ak je koreňom každej nerovnice tejto sústavy. Množinu riešení sústavy lineárnych nerovníc dostaneme ako prienik množín riešení jednotlivých nerovníc sústavy.

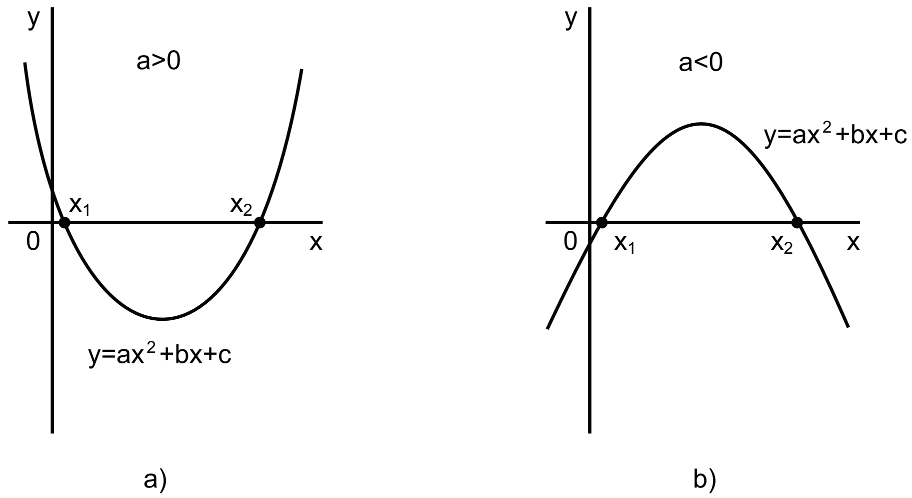
Kvadratickou nerovnicou nazývame nerovnicu $ax^2 + bx + c > 0$, $\quad a, b, c \in R$, $a \neq 0$ (prípadne nerovnicu, kde namiesto znaku $>$ je jeden zo znakov $<, \geq, \leq$).

Ak kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ má diskriminant $D > 0$, tak rozložíme kvadratický trojčlen na súčin koreňových činiteľov $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice. Pri riešení kvadratickej nerovnice využijeme vlastnosť súčinu dvoch (resp. troch) reálnych čísel. Súčin dvoch reálnych čísel je číslo kladné (záporné) práve vtedy, ak sú obidva činitele kladné alebo obidva činitele záporné (jeden činiteľ je kladný a druhý záporný). Kvadratickú nerovnicu riešime potom ako sústavu lineárnych nerovníc.
Ak diskriminant kvadratickej rovnice $D = 0$, potom kvadratická rovnica má dvojnásobný koreň $x_0 = x_1 = x_2$ a kvadratický trojčlen rozložíme na tvar $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. Riešenie príslušnej kvadratickej nerovnice závisí od znamienka koeficientu a.
Ak kvadratická rovnica $ax^2 - bx + c = 0$ má diskriminant $D < 0$, tak riešením nerovnice $ax^2 + bx + c > 0$ je buď $K = R$ alebo $K = \emptyset$. Možno to dokázať metódou doplnenia kvadratického trojčlena na úplný štvorec:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Pretože $D = b^2 - 4ac < 0$, pre $a > 0$ nerovnica $\; a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$, platí pre všetky reálne x, teda $K = R$.
Ak $D < 0$, $a < 0$, tak $\; a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ neplatí pre žiadne reálne číslo, teda $K = \emptyset$.
To, či nerovnica $ax^2 + bx + c > 0$ má riešenie $K = R$ alebo $K = \emptyset$ (pre $D < 0$), možno najvýhodnejšie zistiť, ak dosadíme ľubovoľné reálne číslo do nerovnice. Ak toto číslo je koreňom nerovnice, tak množina riešení je R, ak nie je koreňom, tak nerovnica nemá riešenie.

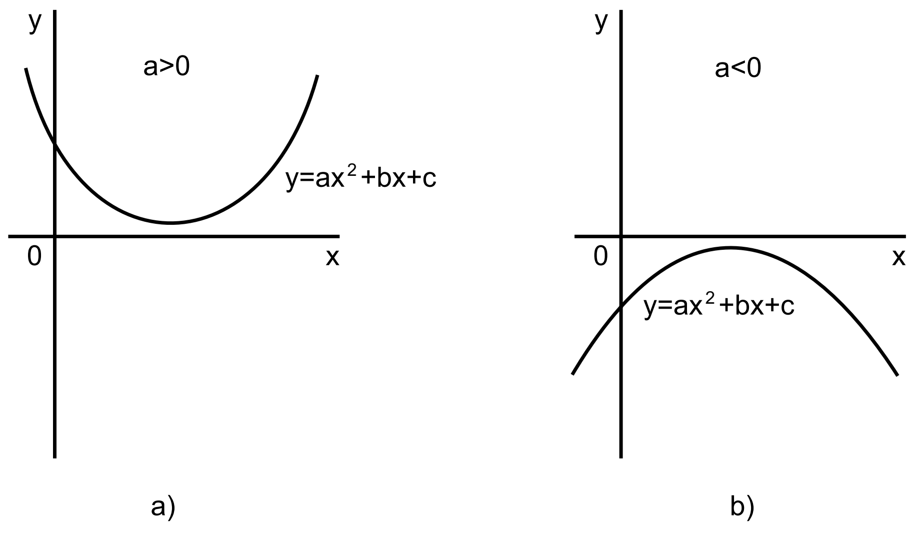
Kvadratické nerovnice možno výhodne riešiť aj graficky. Grafom kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$ je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y (obr. 4.1). Ak v kvadratickej rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ je $D > 0$, tak rovnica má dva rôzne korene x_1, x_2, ktoré odpovedajú priesečníkom tejto paraboly so súradnicovou osou x a graf kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$ môže mať tvar:



Obr. 4.1

Z obr. 4.1a sa dá hneď usúdiť, že pre $x \in (-\infty, x_1)$ platí $y = ax^2 + bx + c > 0$, pre $x \in (x_1, x_2)$ platí $y < 0$ a pre $x \in (x_2, \infty)$ platí $y > 0$. Podobne z obr. 4.1b je vidieť, pre ktoré x je $y > 0$ a pre ktoré x platí $y < 0$.

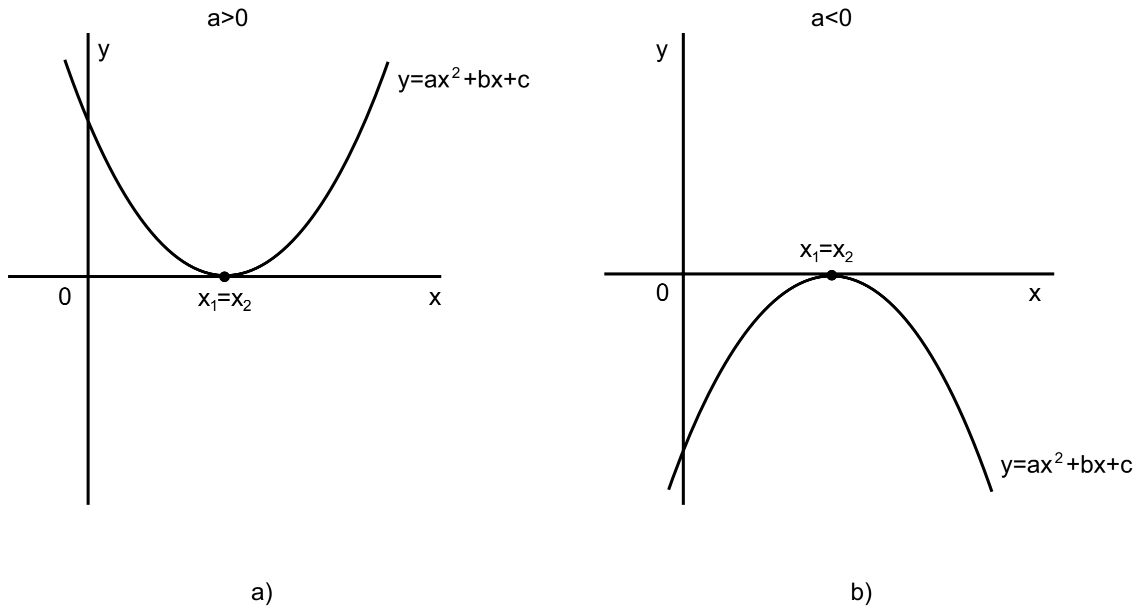
Ak v kvadratickej rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ je $D < 0$, tak rovnica nemá reálny koreň, graf kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$ nepretína os x a môže mať tvar:



Obr. 4.2

Z obr. 4.2a vyplýva, že pre každé $x \in R$ platí $y = ax^2 + bx + c > 0$, teda riešením nerovnice $ax^2 + bx + c > 0$ je $K = R$. Z obr. 4.2b vyplýva, že pre každé $x \in R$ platí $y = ax^2 + bx + c < 0$, teda riešením nerovnice $ax^2 + bx + c > 0$ je $K = \emptyset$.

Ak v kvadratickej rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = 0$, tak rovnica má jeden dvojnásobný reálny koreň $x_1 = x_2$, graf kvadratickej funkcie $y = ax^2 + bx + c$ sa dotýka osi x a môže mať tvar:



Obr. 4.3

Z obr. 4.3a vyplýva, že $y = ax^2 + bx + c > 0$ pre každé $x \in R - \{x_1\}$, teda riešením nerovnice $ax^2 + bx + c > 0$ je $K = (-\infty, x_1) \cup (x_1, \infty)$. Podobne z obr. 4.3b je zrejmé, že $y = ax^2 + bx + c \leq 0,\ \forall\, x \in R$, teda riešením nerovnice $ax^2 + bx + c \geq 0$ je $K = \{x_1\}$.

Pri riešení nerovníc s **absolútnou hodnotou** sa podobne ako pri riešení rovníc, využíva definícia absolútnej hodnoty reálneho čísla. Definičný obor nerovnice rozdelíme na intervaly, na ktorých výrazy v absolútnej hodnote nemenia znamienko. Na získaných intervaloch nahradíme nerovnicu ekvivalentnou nerovnicou bez absolútnych hodnôt. Riešenie nerovnice s absolútnou hodnotou je zjednotením riešení nerovníc na jednotlivých intervaloch.

Príklad 1. Riešte v R nerovnicu $(3x-5)^2 + (4x+3)^2 \geq (5x+4)(5x-1) + 5$.

Riešenie: Nerovnica je definovaná pre každé $x \in R$. Po úprave dostaneme

$$9x^2 - 30x + 25 + 16x^2 + 24x + 9 \geq 25x^2 + 20x - 5x - 4 + 5$$

$$-21x \geq -33$$

$$x \leq \frac{11}{7}$$

Riešením nerovnice je $K = \left(-\infty, \dfrac{11}{7}\right\rangle$.

Príklad 2. Pre ktoré reálne čísla platí $\dfrac{x-3}{2x-1} \geq 2$?

Riešenie: Definičný obor nerovnice je $D = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$. Nerovnicu upravíme pomocou ekvivalentných úprav na tvar

$$\frac{x-3}{2x-1} - 2 \geq 0, \quad \text{z čoho} \quad \frac{-3x-1}{2x-1} \geq 0.$$

Na definičnom obore upravíme poslednú nerovnicu na ekvivalentnú sústavu nerovníc:

$$(-3x-1 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x-1 > 0) \quad \vee \quad (-3x-1 \leq 0 \quad \wedge \quad 2x-1 < 0),$$

$$\left(x \leq -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad x > \frac{1}{2}\right) \quad \vee \quad \left(x \geq -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad x < \frac{1}{2}\right).$$

Riešením nerovnice je množina $K = \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Príklad 3. Riešte v R sústavu nerovníc

$$\frac{5}{4}x - \frac{6x-1}{4} > \frac{4x+1}{12} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} \leq 1.$$

Riešenie: Sústava nerovníc je definovaná pre každé $x \in R$. Prvú nerovnicu vynásobíme číslom 12, druhú číslom 15 a dostaneme ekvivalentnú sústavu:

$$15x - 18x + 3 > 4x + 1 - 2$$

$$6x + 3 - 10 + 5x \leq 15,$$

z čoho

$$-7x > -4 \quad \wedge \quad 11x \leq 22$$

$$x < \frac{4}{7} \quad \wedge \quad x \leq 2$$

$$K = \left(-\infty, \frac{4}{7}\right) \cap (-\infty, 2\rangle = \left(-\infty, \frac{4}{7}\right).$$

Príklad 4: Riešte v R nerovnicu $3x^2 - 5x - 2 > 0$.

Riešenie: Nerovnica je definovaná pre každé $x \in R$. Nájdeme korene rovnice $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6}, \quad \text{teda} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2) > 0.$$

Nerovnica platí práve vtedy, ak

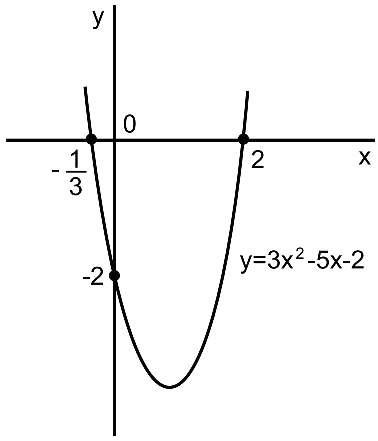
$$\left(x+\frac{1}{3}>0 \quad \wedge \quad x-2>0\right) \qquad \vee \qquad \left(x+\frac{1}{3}<0 \quad \wedge \quad x-2<0\right)$$

$$\left(x>-\frac{1}{3} \quad \wedge \quad x>2\right) \qquad \vee \qquad \left(x<-\frac{1}{3} \quad \wedge \quad x<2\right)$$

$$x \in K_1=\left(-\frac{1}{3},\infty\right)\cap(2,\infty) \qquad \text{alebo} \qquad x\in K_2=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cap(-\infty,2)$$

$$K_1=(2,\infty) \qquad\qquad K_2=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$$

Riešením nerovnice je množina $K=K_1\cup K_2=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(2,\infty)$.
Množinu riešení vieme nájsť hneď, ak poznáme korene zodpovedajúcej kvadratickej rovnice a načrtneme graf kvadratickej funkcie $y=3x^2-5x-2$ (obr. 4.4).



Obr. 4.4

Z obr. 4.4 vidieť, že $y>0$ platí pre $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$, alebo pre $x\in(2,\infty)$. Teda $K=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(2,\infty)$.

Príklad 5. Riešte v R nerovnicu $5x^2-2x+3<0$.

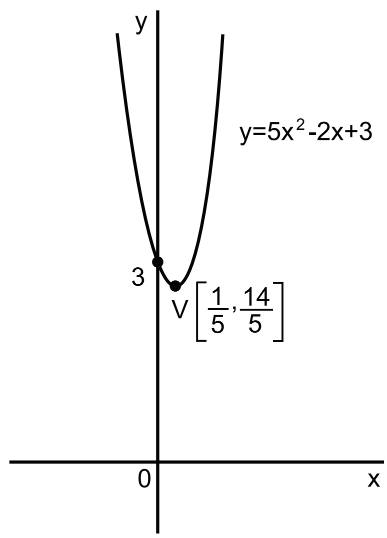
Riešenie: Nerovnica je definovaná pre všetky $x\in R$. Rovnica $5x^2-2x+3=0$ nemá reálne korene, $D=4-60<0$. Dosadením napr. čísla $x=0$ do nerovnice dostaneme $3<0$. Daná nerovnica teda nemá riešenie, t. j. $K=\emptyset$.
Riešenie môžeme dostať aj doplnením kvadratického trojčlena na úplný štvorec:

$$5\left(x^2-\frac{2}{5}x\right)+3<0$$

$$5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-5.\frac{1}{25}+3<0$$

$$5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{25}<0.$$

Nerovnica neplatí pre žiadne reálne x, teda $K=\emptyset$. Riešenie nerovnice môžeme získať aj z náčrtu kvadratickej funkcie $y=5x^2-2x+3$, kde $a=5>0$ (obr. 4.5).



Obr. 4.5

Z obr. 4.5 vidíme, že pre každé $x\in R$ je $y>0$, teda $5x^2-2x+3<0$ neplatí pre žiadne reálne číslo, teda $K=\emptyset$.

Príklad 6. Riešte v R nerovnicu $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x}\geq 0.$

Riešenie: Nerovnica je definovaná pre $x\neq 0$ a $x\neq -3$, teda na $(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,\infty)$. Kvadratické výrazy v čitateli a menovateli rozložíme na súčin lineárnych činiteľov a riešime ekvivalentnú nerovnicu

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x(x-3)}\geq 0.$$

Riešenie nerovnice možno nájsť podobne ako v príklade 2. Prehľadnejší je však nasledujúci spôsob. Kladnosť alebo zápornosť činiteľov posúdime v otvorených intervaloch, ktorých krajné body sú korene rovníc $x+1=0$, $x-2=0$, $x=0$, $x+3=0$, t. j. čísla $x=-1$, $x=2$, $x=0$, $x=-3$. Vo vnútri intervalov $(-\infty,-3)$, $(-3,-1)$, $(-1,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$ jednotlivé činitele nemenia znamienko. Znamienko činiteľov na jednotlivých intervaloch zistíme po dosadení jednej ľubovoľnej hodnoty premennej x z tohto intervalu do výrazu.

Znamienka vyznačíme v tabuľke:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

Zlomok je kladný práve vtedy, keď záporné hodnoty nadobúda párny počet výrazov a ani jeden z výrazov sa nerovná nule. Nule sa zlomok rovná vtedy, keď sa rovná nule čitateľ výrazu, teda $x \in \{-1, 2\}$. Riešením nerovnice je teda $K = (-\infty, -3) \cup \langle -1, 0) \cup \langle 2, \infty)$.

Príklad 7: Riešte v R nerovnicu $|2-x| > 3-2x$.

Riešenie: Definičný obor nerovnice je R. Množinu R rozdelíme na intervaly, na ktorých $2-x \le 0$ alebo $2-x \ge 0$, teda $x \ge 2$ alebo $x \le 2$. Na intervaloch $(-\infty, 2\rangle$, $\langle 2, \infty)$ budeme riešiť ekvivalentné nerovnice.

a) Pre $x \le 2$ je $2-x \ge 0$ a platí $|2-x| = 2-x$. Daná nerovnica je ekvivalentná s nerovnicou

$$2-x > 3-2x$$

$$x > 1.$$

Výsledná nerovnica platí len pre $x \le 2$, preto $K_1 = (1, \infty) \cap (-\infty, 2\rangle = (1, 2\rangle$.

b) Pre $x \ge 2$ je $2-x \le 0$ a platí $|2-x| = -(2-x)$. Daná nerovnica je ekvivalentá s nerovnicou

$$-2+x > 3-2x$$

$$3x > 5, \quad \text{teda} \quad x > \frac{5}{3}.$$

Výsledná nerovnica platí len pre $x \ge 2$, preto $K_2 = \left(\frac{5}{3}, \infty\right) \cap \langle 2, \infty) = \langle 2, \infty)$.

Riešením nerovnice je $K = K_1 \cup K_2 = (1, 2\rangle \cup \langle 2, \infty) = (1, \infty)$.

Príklad 8. Riešte v R nerovnicu $\dfrac{2|2x+1|-3x}{|4-x|} \le 1$.

Riešenie: Nerovnica je definovaná pre $x \neq 4$, teda na $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$. Nájdeme body, v ktorých $2x+1 = 0$ a $4-x = 0$, teda $x = -\frac{1}{2}$ a $x = 4$. Na jednotlivých intervaloch $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{2}, 4\right)$, $(4, \infty)$ výrazy $2x+1$ a $4-x$ už nemenia znamienko. Na týchto intervaloch riešime nerovnicu, ktorá je pre $x \neq 4$ ekvivalentná s danou nerovnicou

$$2|2x+1| - 3x \le |4-x|.$$

a) Pre $x \leq -\frac{1}{2}$ platí $2x+1 \leq 0$ a $4-x>0$, teda $|2x+1| = -(2x+1)$, $|4-x| = 4-x$. Daná nerovnica je ekvivalentná s nerovnicou

$$2(-2x-1) - 3x \leq 4 - x$$

$$-6x \leq 6$$

$$x \geq -1$$

Výsledná nerovnica platí len pre $x \leq -\frac{1}{2}$, preto
$K_1 = \langle -1, \infty) \cap \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle = \left\langle -1, -\frac{1}{2}\right\rangle$.

b) Pre $-\frac{1}{2} \leq x < 4$ je $2x+1 \geq 0$ a $4-x>0$, teda $|2x+1| = 2x+1$, $|4-x| = 4-x$. Daná nerovnica je ekvivalentná s nerovnicou

$$2(2x+1) - 3x \leq 4 - x,$$

$$\text{teda} \quad 2x \leq 2, \quad \text{z čoho} \quad x \leq 1.$$

Výsledná nerovnica platí len pre $-\frac{1}{2} \leq x < 4$, preto
$K_2 = (-\infty, 1\rangle \cap \left\langle -\frac{1}{2}, 4\right) = \left\langle -\frac{1}{2}, 1\right\rangle$.

c) Pre $x > 4$ je $2x+1>0$ a $4-x<0$, teda $|2x+1| = 2x+1$, $|4-x| = -(4-x)$. Daná nerovnica je ekvivalentná s nerovnicou

$$2(2x+1) - 3x \leq -4 + x$$

$$2 \leq -4$$

Z posledného vzťahu vyplýva, že množina riešení nerovnice je prázdna, preto
$K_3 = \emptyset \cap (4, \infty) = \emptyset$.

Riešením nerovnice je $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \left\langle -1, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}, 1\right\rangle \cup \emptyset = \langle -1, 1\rangle$.

Príklad 9. Riešte v R nerovnicu $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} < 1$.

Riešenie: Nerovnica je definovaná pre $\frac{3x-1}{2-x} \geq 0$, ak $x \neq 2$. Podmienky sú splnené práve vtedy, ak platí:

$$(3x-1 \geq 0 \quad \wedge \quad 2-x>0) \quad \vee \quad (3x-1 \leq 0 \quad \wedge \quad 2-x<0)$$

$$\left(x \geq \frac{1}{3} \quad \wedge \quad x < 2\right) \quad \vee \quad \left(x \leq \frac{1}{3} \quad \wedge \quad x > 2\right)$$

$$D_1 = \left\langle \frac{1}{3}, \infty\right) \cap (-\infty, 2) = \left\langle \frac{1}{3}, 2\right) \qquad D_2 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right\rangle \cap (2, \infty) = \emptyset$$

Definičný obor $D = D_1 \cup D_2 = \left\langle \frac{1}{3}, 2\right) \cup \emptyset = \left\langle \frac{1}{3}, 2\right)$.

Na tomto definičnom obore riešime pôvodnú nerovnicu. Obidve strany nerovnice sú nezáporné, teda môžeme použiť úpravu 4 a umocniť obe strany nerovnice.
Dostaneme $\dfrac{3x-1}{2-x} < 1$, teda $\dfrac{3x-1}{2-x} - 1 < 0$, z čoho $\dfrac{4x-3}{2-x} < 0$. Posledná nerovnica platí práve vtedy, ak

$$(4x - 3 < 0 \quad \wedge \quad 2 - x > 0) \quad \vee \quad (4x - 3 > 0 \quad \wedge \quad 2 - x < 0)$$
$$\left(x < \frac{3}{4} \quad \wedge \quad x < 2\right) \quad \vee \quad \left(x > \frac{3}{4} \quad \wedge \quad x > 2\right)$$
$$K_1 = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cap (-\infty, 2) = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \qquad K_2 = \left(\frac{3}{4}, \infty\right) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$$
$$K = K_1 \cup K_2 = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup (2, \infty)$$

Riešenie hľadáme len na definičnom obore nerovnice, teda riešením je množina

$$P = D \cap K = \left\langle \frac{1}{3}, 2\right) \cap \left[\left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup (2, \infty)\right] = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right).$$

4.1 Cvičenia

1. Riešte v R nerovnicu $\dfrac{x-1}{3} - 2(1-4x) \geq \dfrac{x}{4} - \dfrac{7-52x}{6}$.

2. Riešte v R sústavy nerovníc

   a) $2x - 3 > 5 - 4x$, $4x + 6 < x - 2$,

   b) $\dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6} > \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2}$, $\dfrac{3x+5}{7} + \dfrac{10-3x}{5} > \dfrac{2x+7}{3} - 8$,

   c) $(3x+1)^2 \leq 9x^2 + 2x + 3$, $2x + 1 < 4x + 3$,

   d) $7 - 2x \leq 2x + 13 - 6x$, $8 + 7x > 2x - 7$.

3. Nájdite všetky reálne čísla a, pre ktoré platí:

   a) $\dfrac{3a+7}{2-6a} > 0$, b) $\dfrac{5-2a}{a-7} \leq 3$.

4. Pre ktoré reálne hodnoty parametra m platí, že kvadratická rovnica
   a) $x^2 - 2(m+4)x + m^2 + 6m = 0$ nemá reálne korene?
   b) $(3-m)x^2 + 2mx + 6 - m = 0$ má reálne korene?
   c) $x^2 - 5x - 2 + m = 0$ má obidva korene kladné?

5. Riešte v R nerovnice a) $x^2 - 5x - 24 < 0$, b) $2x^2 - 3x + 1 > 0$, c) $20x - x^2 \geq 36$, d) $5x^2 - 2x + 7 > 0$, e) $x^2 - 4x + 18 < 0$, f) $3x^2 + x + 12 > 0$, g) $x^2 - 2x - 2 \leq 0$, h) $1 - x - 6x^2 \leq 0$, i) $2x^2 + 3 < 0$, j) $9x^2 - 16 \leq 0$, k) $5 - x^2 < 0$.

6. Riešte v R nerovnice a) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+2x+7}<0$, b) $\dfrac{3}{x-1}<\dfrac{1}{x+3}$, c) $x\geq\dfrac{2x}{1-x^2}$,
d) $\dfrac{1}{x}>x$, e) $\dfrac{x+1}{x+3}<\dfrac{x+5}{x+6}$, f) $\dfrac{9}{5-x}\geq x+5$, g) $\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{5}{x-1}\leq 1$.

7. Riešte v R nerovnice a) $|x+3|\leq 2$, b) $|x-2|>5$, c) $|3x+1|>2x$,
d) $3-2x\geq|x+1|$, e) $\dfrac{|2x-2|}{2-x}\leq 1$, f) $|x|+|x-1|>2$, g) $|3x-2|-5\leq|x+1|$.

8. Riešte v R nerovnice a) $|x^2+3x+2|<2x+4$, b) $|x^2-2x|\geq|x-2|$.

9. Riešte v R nerovnice a) $\sqrt{x+1}<x-1$, b) $\sqrt{2x^2+2}\geq 3-x$.

Výsledky

1. $K=(-\infty,2\rangle$,

2. a) $K=\emptyset$, b) $K=(-\infty,2)$, c) $K=\left(-1,\dfrac{1}{2}\right\rangle$, d) $K=(-3,3\rangle$,

3. a) $K=\left(-\dfrac{7}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, b) $K=\left(-\infty,\dfrac{26}{5}\right\rangle\cup(7,\infty)$,

4. a) $K=(-\infty,-8)$, b) $K=\langle 2,3)\cup(3,\infty)$, c) $K=\left(2,\dfrac{33}{4}\right\rangle$,

5. a) $K=(-3,8)$, b) $K=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,\infty)$, c) $K=\langle 2,18\rangle$, d) $K=R$,
e) $K=\emptyset$, f) $K=R$, g) $K=\langle 1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\rangle$, h) $K=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle\dfrac{1}{3},\infty\right)$,
i) $K=\emptyset$, j) $K=\left\langle-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right\rangle$, k) $K=(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$,

6. a) $K=(1,4)$, b) $K=(-\infty,5)\cup(-3,1)$, c) $K=(-1,0\rangle\cup(1,\infty)$,
d) $K=(-\infty,-1)\cup(0,1)$, e) $K=(-9,-6)\cup(-3,\infty)$, f) $K=(-\infty,-4\rangle\cup\langle 4,5)$,
g) $K=(1,3)\cup\left\langle\dfrac{7}{2},\infty\right)$,

7. a) $K=\langle-5,-1\rangle$, b) $K=(-\infty,-3)\cup(7,\infty)$, c) $K=R$, d) $K=\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right\rangle$,
e) $K=\left(0,\dfrac{4}{3}\right\rangle\cup(2,\infty)$, f) $K=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)$, g) $K=\langle-1,4\rangle$,

8. a) $K=(-2,1)$, b) $K=(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,\infty)$,

9. a) $K=(3,\infty)$, b) $K=(-\infty,-7\rangle\cup\langle 1,\infty)$.

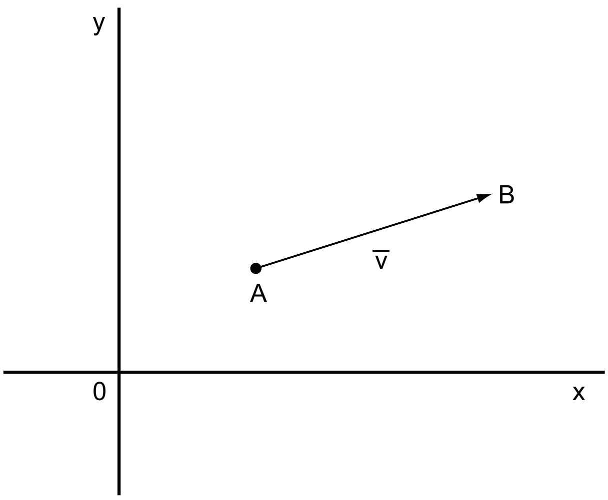
5

ANALYTICKÁ GEOMETRIA

5.1 Analytická geometria v rovine

Nech $A = [x_A, y_A]$, $B = [x_B, y_B]$ sú dva ľubovoľné body v pravouhlej súradnicovej sústave. Reálne čísla x_A, x_B, resp. y_A, y_B nazývame súradnice bodu A, resp. B.

Orientovanú úsečku $\overline{v} = \overline{AB} = B - A$ nazývame umiestnenie vektora $\overline{v}$ (obr. 5.1). Súradnicami vektora $\overline{v} = \overline{AB}$ v pravouhlej súradnicovej sústave nazývame usporiadanú dvojicu čísel $(x_B - x_A, y_B - y_A)$, čo zapisujeme $\overline{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.



Obr. 5.1

Veľkosť vektora $\overline{v}$ je $|\overline{v}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
Vektor $\overline{0} = (0, 0)$ nazývame **nulový vektor**, jeho veľkosť $|\overline{0}| = 0$.
Vektor, ktorého veľkosť sa rovná 1 nazývame **jednotkový vektor**. Jednotkový vektor je napríklad vektor $\overline{v} = (1, 0)$ ale aj vektor $\overline{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Vektor $\overline{v} = (1, 1)$ nie je jednotkový, pretože jeho veľkosť $|\overline{v}| = \sqrt{2}$.

Skalárny súčin dvoch nenulových vektorov $\overline{u}$ a $\overline{v}$: $\overline{u} \,.\, \overline{v} = |\overline{u}|.|\overline{v}|. \cos \varphi$, kde φ je uhol vektorov $\overline{u}$ a $\overline{v}$, $0° \leq \varphi \leq 180°$.

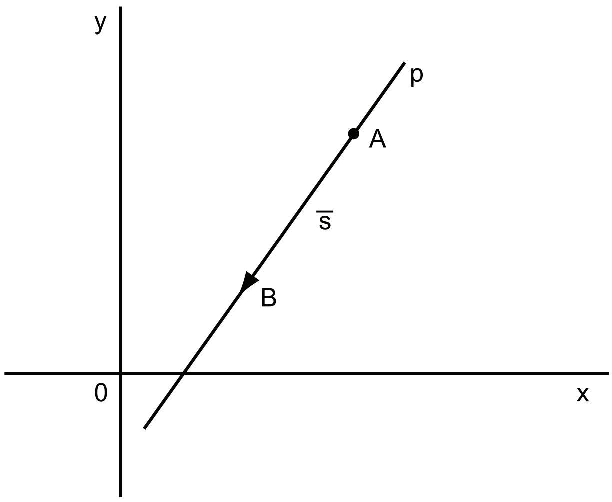
Pre každé dva nenulové vektory $\overline{u}$ a $\overline{v}$ platí:

a) $\overline{u}$ je kolmé na $\overline{v}$: $(\overline{u} \perp \overline{v}) \Leftrightarrow \overline{u} \,.\, \overline{v} = 0$,
b) $\overline{u}$ je rovnobežné s $\overline{v}$ práve vtedy, ak $\overline{u} = k\overline{v}, \ k \in R, \ k \neq 0$.

V pravouhlej súradnicovej sústave pre každé dva vektory $\overline{u} = (u_1, u_2)$, $\overline{v} = (v_1, v_2)$ platí:

$$\overline{u} \,.\, \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Každú priamku určenú bodmi A, B môžeme pomocou bodu A a vektora $\overline{s} = B - A$ analyticky vyjadriť rovnicou $X = A + t\overline{s}$ kde $t \in R$, X je ľubovoľný bod priamky. Vektor $\overline{s} \neq \overline{0}$ sa nazýva **smerový vektor priamky**. Daná rovnica sa nazýva parametrickým vyjadrením priamky (obr. 5.2).



Obr. 5.2

Ak v pravouhlom súradnicovom systéme v rovine $A = [x_A, y_A]$, $X = [x, y]$ sú body priamky a $\overline{s} = (s_1, s_2)$ je smerový vektor priamky, potom **parametrické vyjadrenie priamky** v súradniciach je dané rovnicami:

$$\begin{aligned} x &= x_A + ts_1 \\ y &= y_A + ts_2 \end{aligned}, \quad t \in R.$$

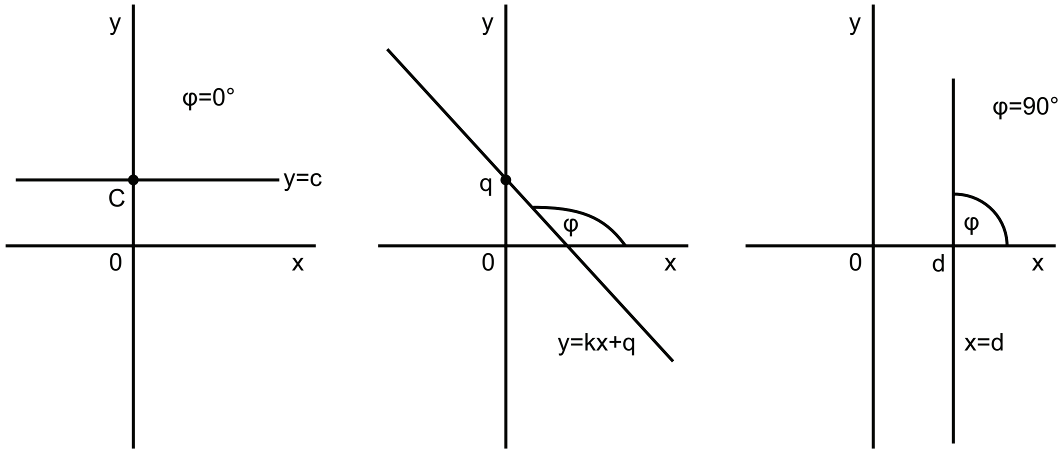
Ľubovoľný bod X, ktorý leží na priamke určenej parametrickými rovnicami, dostaneme vhodnou voľbou parametra t.

Rovnicu $ax + by + c = 0$, kde aspoň jedno z čísel a, b je rôzne od nuly, nazývame **všeobecná rovnica priamky v rovine**. Vektor $\overline{n} = (a, b)$ nazývame **normálový vektor priamky**; je to vektor kolmý na danú priamku.
Ak $\overline{s} = (s_1, s_2)$ je smerový vektor priamky, tak normálový vektor priamky je každý vektor $\overline{n} = (ks_2, -ks_1), \ k \neq 0, \ k \in R$.
Ak $\overline{n} = (a, b)$ je normálový vektor priamky, tak smerový vektor priamky je každý vektor $\overline{s} = (kb, -ka), \ k \neq 0, \ k \in R$.

Rovnica priamky prechádzajúcej bodmi $A = [x_A, y_A]$, $B = [x_B, y_B]$, kde $x_A \neq x_B$, má tvar:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), \quad \text{kde} \quad k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{je smernica priamky.}$$

Nech φ ($0^\circ \leq \varphi < 180^\circ$) je uhol, ktorý priamka zviera s kladnou poloosou x, potom pre $\varphi \neq 90^\circ$, $k = \tan\varphi$ a rovnica priamky je $y = kx + q$ (**smernicový tvar rovnice priamky**).
Pre $\varphi = 90^\circ$ k neexistuje a rovnica priamky je $x = d$, $d \in R$ (obr. 5.3).

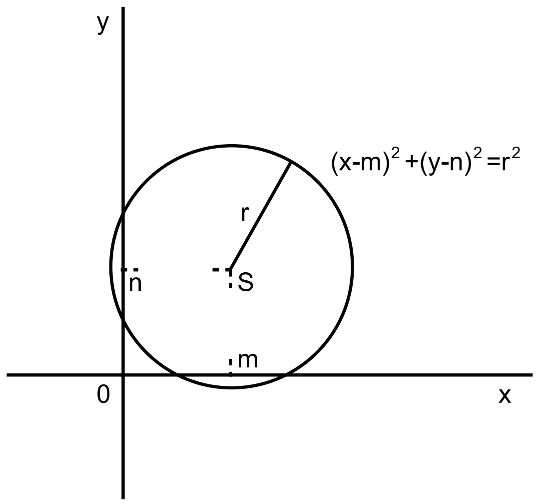


Obr. 5.3

Ak je v rovine daná priamka p so smernicou k_1 a priamka q so smernicou k_2, potom:

a) priamky sú rovnobežné $\Leftrightarrow$ ak $k_1 = k_2$,
b) priamky sú kolmé $\Leftrightarrow$ ak $k_1 \,.\, k_2 = -1$.

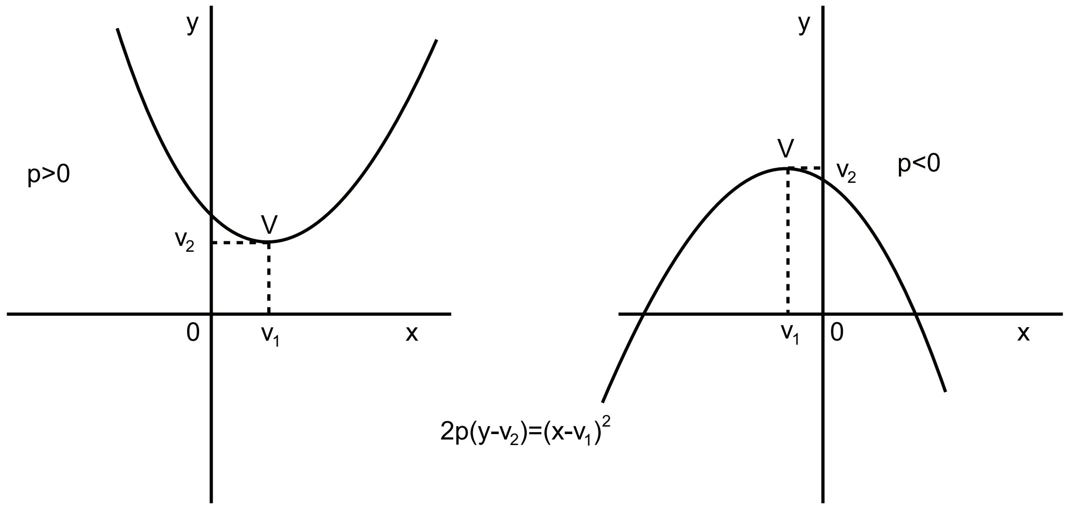
Rovnicu $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, kde $r > 0$ nazývame **rovnicou kružnice** so stredom $S = [m, n]$ a polomerom r (obr. 5.4).



Obr. 5.4

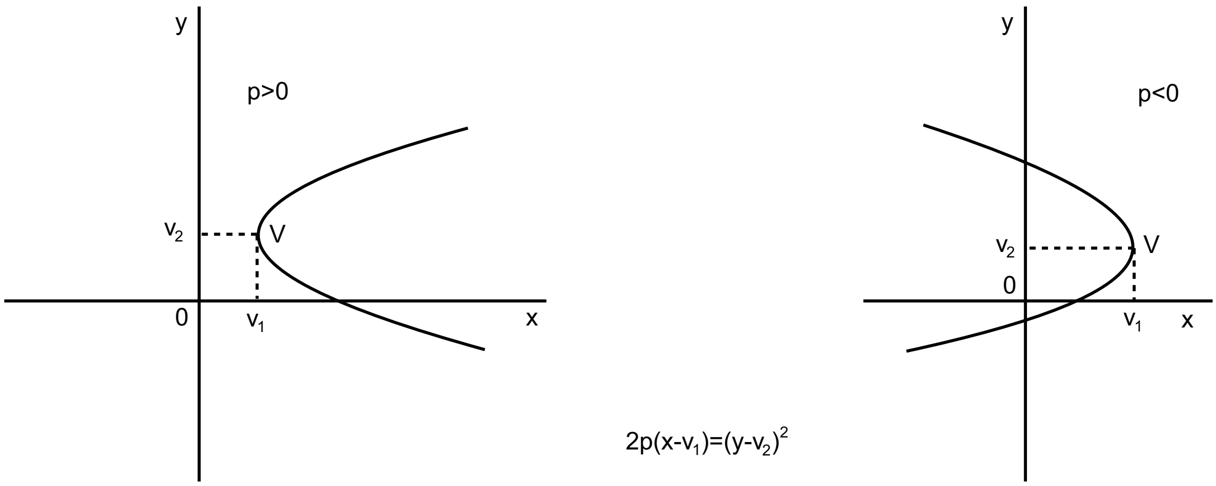
Parabola, ktorá má parameter $p \neq 0$ a vrchol $V = [v_1, v_2]$ má rovnicu:

- $2p(y - v_2) = (x - v_1)^2$, ak os paraboly je rovnobežná s osou y (obr. 5.5),



Obr. 5.5

- $2p(x - v_1) = (y - v_2)^2$, ak os paraboly je rovnobežná s osou x (obr. 5.6).

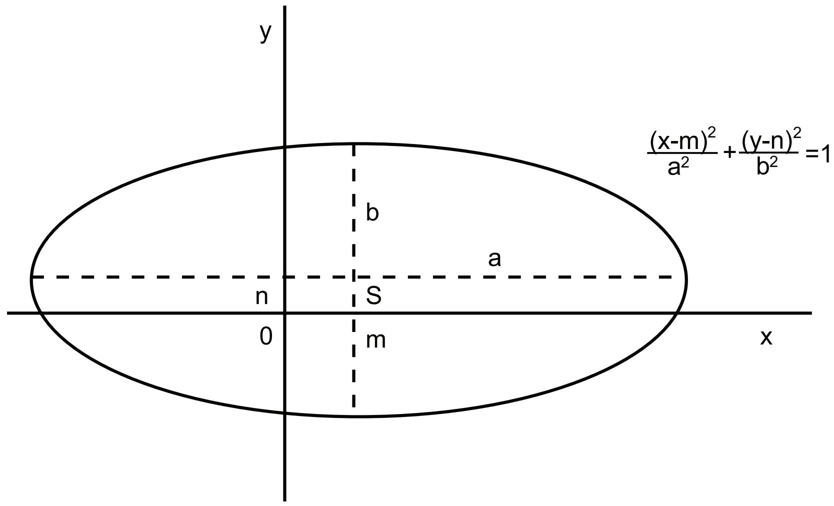


Obr. 5.6

Elipsa, ktorá má osi rovnobežné s osami $x,\ y$ a stred $S = [m, n]$ má rovnicu:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

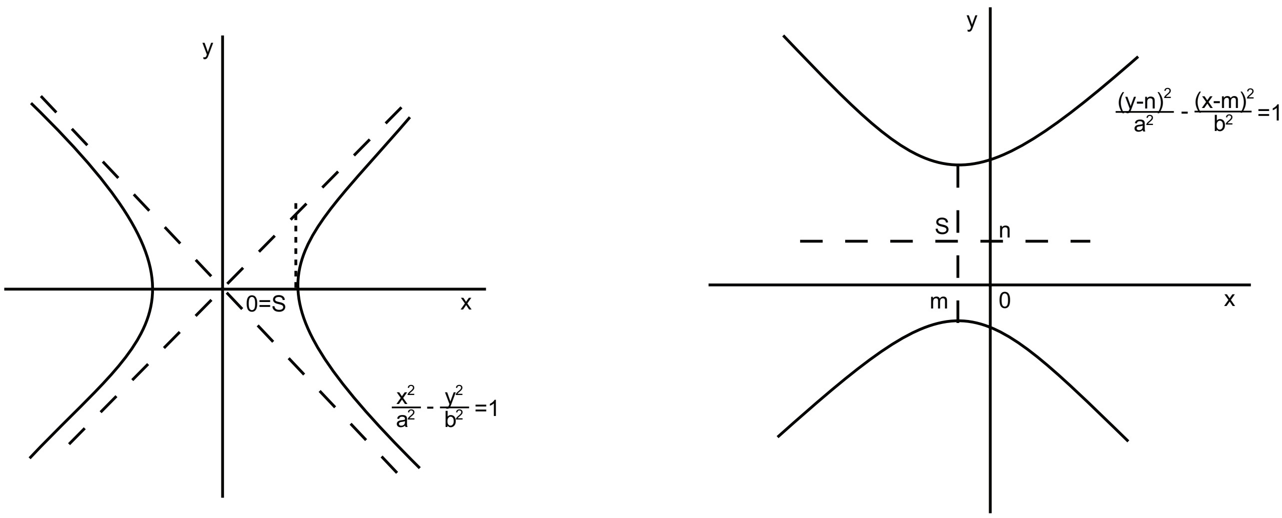
kde $a > 0,\ b > 0$ sú dĺžky poloosí rovnobežných so súradnicovými osami $x,\ y$ (obr. 5.7).



Obr. 5.7

Hyperbola, ktorej hlavná os je rovnobežná s osou x (osou y) a stred $S = [m, n]$ má rovnicu:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1, \qquad \left(\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1\right)\ a > 0,\ b > 0 \text{ (obr. 5.8).}$$



Obr. 5.8

Príklad 1. Priamka p je daná bodmi $A = [3, 2]$, $B = [-1, 4]$. Nájdite parametrické rovnice a všeobecnú rovnicu priamky p.

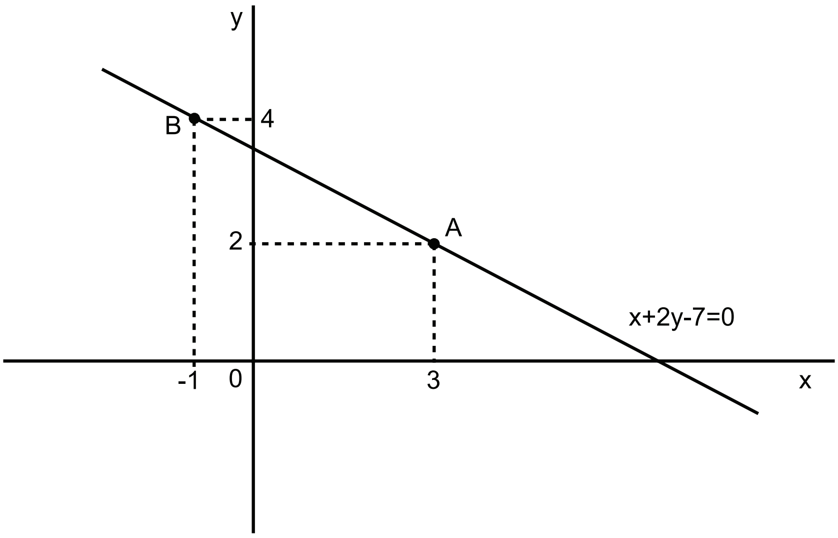
Riešenie: Smerový vektor priamky p: $\overline{s} = \overline{AB} = (-1 - 3, 4 - 2) = (-4, 2)$.

$$\begin{array}{l} x = 3 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{array}, \quad \text{kde } t \in R \text{ sú parametrické rovnice priamky } p.$$

Všeobecnú rovnicu priamky možno nájsť z parametrického tvaru vylúčením parametra t:

$$\begin{array}{ll} x = 3 - 4t & \\ y = 2 + 2t & /.2, \quad \text{po sčítaní} \quad x + 2y = 7. \end{array}$$

Všeobecná rovnica priamky p je: $\quad x + 2y - 7 = 0 \quad$ (obr. 5.9).



Obr. 5.9

Príklad 2. Nájdite všeobecnú rovnicu priamky p, ktorá prechádza bodom $A = [3, 5]$ a je kolmá na priamku q určenú rovnicou $2x - 7y + 3 = 0$.

Riešenie: Priamku q vyjadríme v smernicovom tvare.

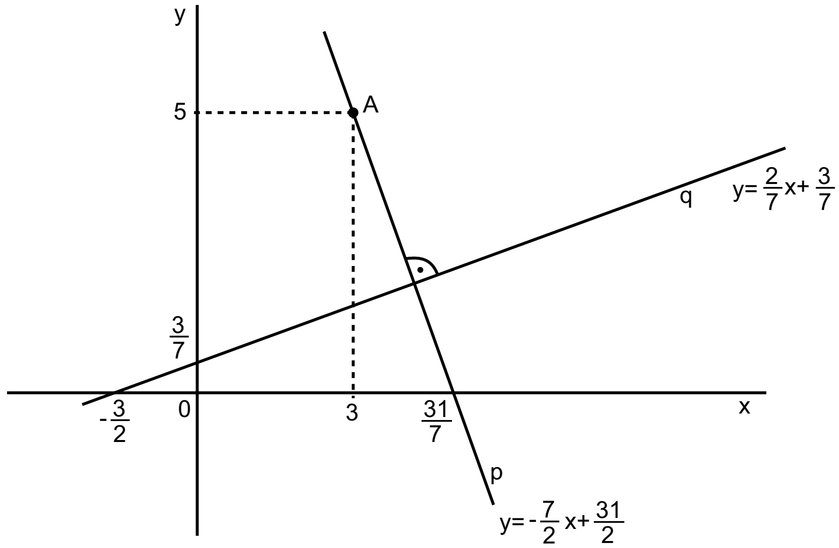
$$q : 2x - 7y + 3 = 0$$

$$y = \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}, \quad \text{teda} \quad k_q = \frac{2}{7}.$$

Z podmienky kolmosti dvoch priamok $k_p \,.\, k_q = -1$ vypočítame $k_p = -\dfrac{7}{2}$.

$p : y - 5 = -\dfrac{7}{2}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{7}{2}x + \dfrac{31}{2} \quad \Rightarrow \quad 2y = -7x + 31$

Teda $p : 7x + 2y - 31 = 0$ je všeobecná rovnica priamky p (obr. 5.10).



Obr. 5.10

Príklad 3. Daná je priamka p o rovnici $4x - 3y + 2 = 0$ a bod $A = [2, 1]$. Nájdite čísla a, b tak, aby priamka q o rovnici $ax + by - 5 = 0$ bola kolmá na priamku p a prechádzala bodom A.

Riešenie: Normálový vektor priamky $p : \overline{n_1} = (4, -3)$. Normálový vektor priamky $q : \overline{n_2} = (a, b)$.
$p \perp q$, teda $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$, $\overline{n_1} \, . \, \overline{n_2} = 0$, z čoho vyplýva $4a - 3b = 0$.
$A \in q$, teda $2a + b - 5 = 0$.
Riešením tohto systému dostaneme $a = \dfrac{3}{2}$, $b = 2$. Hľadaná priamka má všeobecnú rovnicu

$$\frac{3}{2}x + 2y - 5 = 0, \quad \text{teda} \quad 3x + 4y - 10 = 0.$$

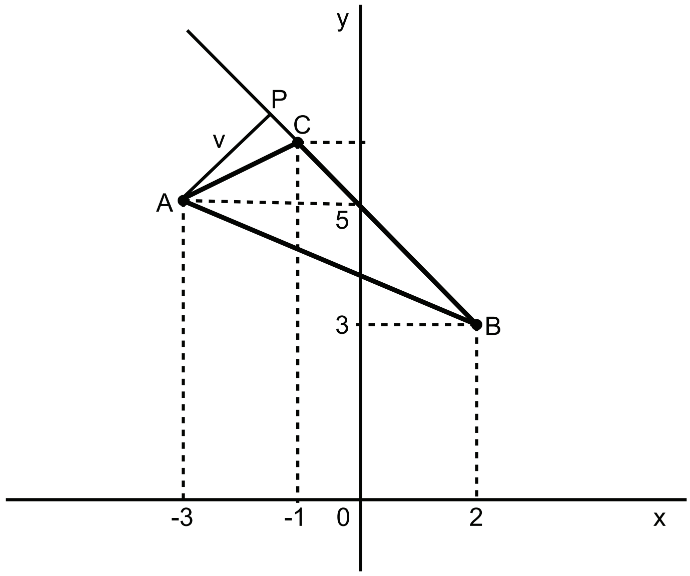
Príklad 4. Daný je trojuholník s vrcholmi $A = [-3, 5]$, $B = [2, 3]$, $C = [-1, 6]$. Nájdite parametrické vyjadrenie a veľkosť výšky, ktorá prechádza vrcholom A trojuholníka. Vypočítajte veľkosť vnútorného uhla trojuholníka pri vrchole B.

Riešenie: Výška prechádzajúca vrcholom A je kolmá na vektor $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = (-1 - 2, 6 - 3) = (-3, 3) \quad \text{(obr. 5.11)}.$$

Za smerový vektor priamky BC zoberieme vektor rovnobežný s vektorom $\overline{BC}$, $\overline{s} = (-1, 1)$.
Rovnica priamky BC:

$$\begin{array}{l} x = 2 - t_1 \\ y = 3 + t_1 \end{array}, \quad t_1 \in R.$$



Obr. 5.11

Výška je kolmá na vektor $\overline{s}$, teda jej smerový vektor $\overline{u} = (1, 1)$ a parametrické vyjadrenie priamky v, na ktorej výška leží je:

$$\begin{array}{r} x = -3 + t_2 \\ y = 5 + t_2 \end{array}, \quad t_2 \in R.$$

Nájdeme bod P ako priesečník priamky v s priamkou BC, teda spoločné riešenie rovníc:

$$\begin{array}{r} 2 - t_1 = -3 + t_2 \\ 3 + t_1 = 5 + t_2 \end{array}.$$

Hľadáme tú hodnotu parametra t_1 (t_2), ktorá prislúcha bodu P na priamke BC (na priamke v).

$$\begin{array}{r} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 - t_2 = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2t_1 = 7, \quad \text{z čoho} \quad t_1 = \frac{7}{2} \quad \text{a} \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Dosadením t_1 do rovnice priamky BC alebo t_2 do rovnice výšky dostaneme pre bod $P = \left[-\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right]$.

Veľkosť vektora $\overline{AP} = \left(-\frac{3}{2} + 3, \frac{13}{2} - 5\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ udáva veľkosť výšky:

$$\overline{AP} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Vnútorný uhol trojuholníka pri vrchole B je uhol vektorov $\overline{BC} = (-3, 3)$ a $\overline{BA} = (-5, 2)$.

$$\cos\beta = \frac{\overline{BC}.\overline{BA}}{|\overline{BC}|.|\overline{BA}|} = \frac{15 + 6}{\sqrt{29}.\sqrt{18}} = \frac{7}{\sqrt{58}}, \quad \text{teda} \quad \beta \doteq 23°12'.$$

Príklad 5. Nájdite súradnice stredu a polomer kružnice danej rovnicou $4x^2 + 4y^2 - 24x - 32y + 51 = 0$.

Riešenie: Aby sme našli súradnice stredu a polomer kružnice, potrebujeme výraz na ľavej strane rovnice upraviť na stredový tvar rovnice kružnice. Najskôr združíme výrazy, ktoré obsahujú x a y a potom použijeme tzv. úpravu na úplný štvorec.

$$4(x^2 - 6x) + 4(y^2 - 8y) + 51 = 0$$

$$4(x^2 - 6x + 9) - 36 + 4(y^2 - 8y + 16) - 64 + 51 = 0$$

$$4(x - 3)^2 + 4(y - 4)^2 = 49$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \frac{49}{4}$$

$$S = [3, 4] \quad \text{a} \quad r = \frac{7}{2}.$$

Príklad 6: Daná je hyperbola o rovnici $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ a priamka p o rovnici $3x - 2y = 0$. Vyšetrite vzájomnú polohu hyperboly a priamky. Úlohu riešte graficky aj numericky.

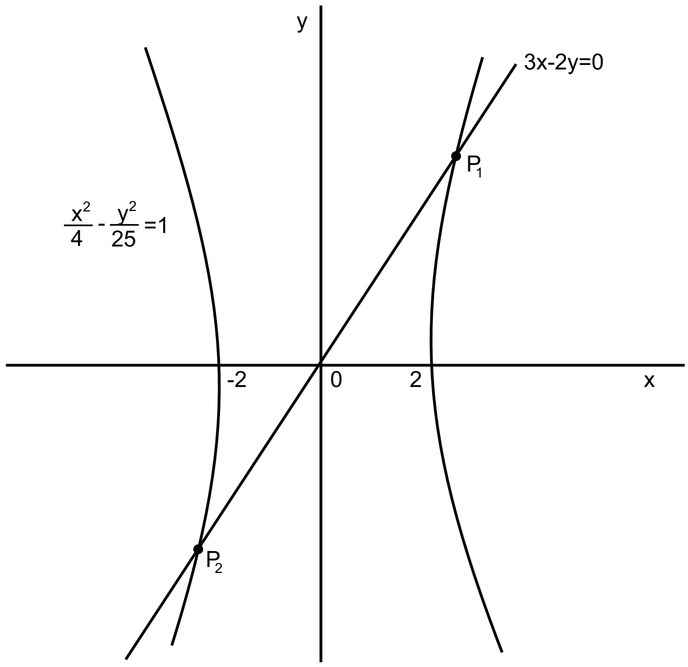
Riešenie: Hľadáme riešenie sústavy lineárnej a kvadratickej rovnice:

$$25x^2 - 4y^2 = 100$$

$$3x - 2y = 0, \quad \text{teda} \quad y = \frac{3x}{2}.$$

$$25x^2 - 4\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 100, \quad \text{z čoho vyplýva} \quad 16x^2 = 100, \quad \text{takže} \quad x = \pm\frac{5}{2}.$$

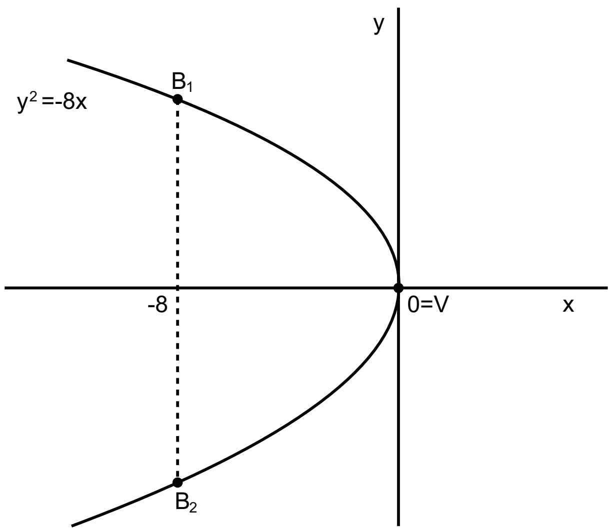
Pre $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{15}{4}$, $P_1 = \left[\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right]$, pre $x = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{15}{4}$, $P_2 = \left[-\frac{5}{2}, -\frac{15}{4}\right]$.
Priamka pretína hyperbolu v bodoch P_1 a P_2 (obr. 5.12).



Obr. 5.12

Príklad 7. Nájdite vrcholovú rovnicu paraboly, ktorá prechádza bodom $A = [-2, 4]$ a má os v osi x. Zistite y-ovú súradnicu bodu $B = [-8, y]$, ktorý je bodom paraboly.

Riešenie: Rovnica paraboly má tvar $y^2 = 2px$. A je bodom paraboly, teda $16 = 2p(-2)$, $2p = -8$. Rovnica paraboly je $y^2 = -8x$. Pre y-ovú súradnicu bodu B platí $y^2 = -8.(-8) = 64$, $y_{1,2} = \pm 8$. Na parabole existujú dva body, ktorých x-ová súradnica je $x = -8$, $B_1 = [-8, 8]$, $B_2 = [-8, -8]$ (obr. 5.13).



Obr. 5.13

5.2 Analytická geometria v priestore

Analytická geometria v (trojrozmernom) priestore, v prvom rade väčšina základných pojmov, je zovšeobecnením analytickej geometrie v rovine. Preto tu nebudeme definície týchto základných pojmov uvádzať. Ide predovšetkým o pojem vektora, jeho umiestnenie, veľkosť (vzdialenosť dvoch bodov), skalárny súčin dvoch vektorov, podmienku kolmosti a rovnobežnosti dvoch nenulových vektorov.

Úplne analogické rovinnému prípadu je aj parametrické vyjadrenie priamky v trojrozmernom prípade. Uvedieme toto vyjadrenie, ako aj vyjadrenie ďalších dvoch základných útvarov v priestore, roviny a guľovej plochy.

Ak v pravouhlom súradnicovom systéme v priestore je bod $A = [x_A, y_A, z_A]$ bodom danej priamky a $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je jej smerový vektor, potom **parametrické vyjadrenie** tejto priamky je dané takto:

$$\begin{aligned} x &= x_A + ts_1 \\ y &= y_A + ts_2\,, \quad t \in R. \\ z &= z_A + ts_3 \end{aligned}$$

Ak aspoň jedno z čísel a, b, c, d je rôzne od nuly, potom množinu všetkých bodov trojrozmerného priestoru, ktorých súradnice vyhovujú rovnici $ax+by+cz+d=0$ nazývame **rovina** a predchádzajúca rovnica sa nazýva **všeobecná rovnica** tejto roviny. Vektor $\overline{n} = (a, b, c)$ je na ňu kolmý a nazýva sa **normálový vektor** tejto roviny.

Rovnicu $(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = r^2$ kde $r > 0$ nazývame rovnica **guľovej plochy** so stredom v bode $S = [m, n, p]$ a polomerom r.

Príklad 1. Priamka p je daná bodmi $A = [1, 2, -2]$, $B = [2, 1, 0]$. Nájdite jej parametrické vyjadrenie.

Riešenie: Ako smerový vektor môžeme zobrať vektor
$\overline{s} = \overline{AB} = (2-1, 1-2, 0-(-2)) = (1, -1, 2)$. Potom jedno z možných parametrických vyjadrení tejto priamky je tvaru

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - t \quad , \quad t \in R. \\ z &= -2 + 2t \end{aligned}$$

Príklad 2. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je kolmá na priamku p z predchádzajúceho príkladu a obsahuje bod $A = [0, 2, 2]$.

Riešenie: Je zrejmé, že smerový vektor priamky p je normálový vektor danej roviny. Jej všeobecná rovnica je teda tvaru

$$1x - 1y + 2z + d = 0.$$

Vzhľadom na to, že bod A patrí do roviny, musí platiť

$$1\,.\,0 - 1\,.\,2 + 2\,.\,2 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2.$$

Z toho vyplýva, že rovnica tejto roviny má tvar

$$x - y + 2z - 2 = 0.$$

Príklad 3. Nájdite vzájomnú polohu roviny $\rho : 2x + y - 10z + 2 = 0$ a priamky p, ktorej parametrické rovnice sú:

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 5 + 3t\,, \ \ t \in R. \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

Riešenie: Normálový vektor roviny ρ, $\overline{n} = (2, 1, -10)$ a smerový vektor priamky p, $\overline{s} = (2, 3, 1)$ nie sú na seba kolmé, teda priamka p nie je rovnobežná s rovinou ρ ani v nej neleží. To znamená, že majú práve jeden spoločný bod. Nájdime jeho súradnice. Tieto súradnice musia vyhovovať tak rovnici roviny, ako aj parametrickým rovniciam priamky. Ak dosadíme tieto parametrické rovnice priamky do všeobecnej rovnice roviny, nájdeme tú hodnotu parametra t, pre ktorú je to splnené:

$$2(3 + 2t) + 5 + 3t - 10(1 + t) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

Ak dosadíme vypočítanú hodnotu do parametrického vyjadrenia, zistíme, že jediným spoločným bodom priamky a roviny je bod $P = [3 + 2\,.\,1, 5 + 3\,.\,1, 1 + 1] = [5, 8, 2]$.

Príklad 4. Napíšte rovnicu guľovej plochy, ktorej stredom je bod $S = [-1, 1, 1]$ a ktorá obsahuje bod $A = [3, -2, 1]$.

Riešenie: Je zrejmé, že polomer guľovej plochy r sa rovná vzdialenosti bodov A a S, teda veľkosti vektora $\overline{AS}$.

$$r = |\overline{AS}| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - (-2))^2 + (1 - 1)^2} = 5.$$

Potom rovnica guľovej plochy je

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5^2.$$

Príklad 5. Nájdite stred a polomer guľovej plochy, ktorá je daná rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 2 = 0$.

Riešenie: Podobne ako pri rovnici kružnice, aj tu združíme výrazy obsahujúce x, y, z a použijeme opäť úpravu na úplný štvorec, aby sme dostali rovnicu tejto guľovej plochy v stredovom tvare:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 2 = (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + (z - 2)^2 - 4 - 2 = 0,$$

čiže

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 16.$$

Dostali sme, že stredom guľovej plochy je bod $S = [3, -1, 2]$ a jej polomer je $r = 4$.

5.3 Cvičenia

1. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $M = [0, 6]$ a je rovnobežná s priamkou $x + 3y - 1 = 0$. Nakreslite obrázok.

2. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = [3, 1]$ a je rovnobežná a) s osou x, b) s osou y. Nakreslite obrázok.

3. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = [2, 1]$ a stredom úsečky CD, $C = [1, 3]$, $D = [-1, 1]$.

4. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = [2, 1]$ a je kolmá na priamku $2x + 3y - 12 = 0$. Dané priamky nakreslite.

5. Pre ktoré číslo a je priamka $ax + 2y - 1 = 0$ a) rovnobežná, b) kolmá na priamku $y - 2x + 2 = 0$.

6. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkom priamok $5x - y + 10 = 0$, $8x + 4y + 9 = 0$ a je rovnobežná s priamkou $x + 3y = 0$.

7. Nájdite priesečníky priamky so súradnicovými osami pravouhlého súradnicového systému, ak rovnice priamky sú:
   a) $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ t \in R$,
   b) $4x - 7y + 14 = 0$.
   Načrtnite obrázok.

8. Zistite vzájomnú polohu priamok $p : x = 8+5t,\ y = 6-10t,\ t \in R,$ a $q : y = -2x+3$.

9. Nájdite vzdialenosť bodu $A = [4, 3]$ od priamky $4x - 3y + 18 = 0$. Nakreslite obrázok.

10. Strana štvorca leží na priamke $4x - 3y + 15 = 0$ a jeden vrchol štvorca je v začiatku súradnicovej sústavy. Vypočítajte obsah tohto štvorca.

11. Ukážte, že priamky $y + 2x = 0$, $2y + 4x + 2\sqrt{5} = 0$ sú rovnobežné a vypočítajte ich vzdialenosť.

12. Daný je trojuholník ABC, $A = [2, 2]$, $B = [0, -4]$, $C = [5, 1]$. Nájdite rovnicu priamky, na ktorej leží výška v_a trojuholníka a vypočítajte jej veľkosť.

13. Daný je trojuholník ABC, $A = [4, -6]$, $B = [-2, -2]$, $C = [0, 4]$. Nájdite súradnice ťažiska trojuholníka ABC. Nakreslite obrázok.

14. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkom dvoch priamok $y = 7x - 4$, $y = -2x + 5$ a zviera s kladným smerom osi x uhol $60°$.

15. Nájdite rovnicu kružnice, ktorá má stred $S = [-2, 1]$ a prechádza bodom $L = [1, -3]$.

16. Nájdite rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A = [1, 3]$, $B = [-3, 1]$ a ktorej stred leží na priamke $2x - y - 8 = 0$.

17. Nájdite súradnice stredu a polomer kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Nakreslite obrázok.

18. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = [0, 0]$ a stredom kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

19. Nájdite rovnicu kružnice, ktorá sa dotýka osi y v začiatku pravouhlého súradnicového systému a pretína os x v bode $A = [-8, 0]$. Nakreslite obrázok.

20. Strany trojuholníka majú rovnice $x + 7y - 56 = 0$, $x - 3y + 14 = 0$, $2x - y + 8 = 0$. Nájdite rovnicu kružnice opísanej trojuholníku. Nakreslite obrázok.

21. Zistite vzájomnú polohu priamky a kružnice, ak ich rovnice sú: $x - y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$. Nakreslite obrázok.

22. Pre ktoré číslo a má priamka $x + y + a = 0$ práve jeden spoločný bod s kružnicou $x^2 + y^2 = 4$?

23. Akú krivku predstavuje v pravouhlom súradnicovom systéme rovnica $y^2 = 8x$? Nakreslite ju. Akú dlhú tetivu vytína táto krivka na priamke $y - x + 2 = 0$?

24. Akú krivku predstavuje v pravouhlom súradnicovom systéme rovnica $x^2 - 6x + 6y + 21 = 0$? Nakreslite obrázok.

25. Nájdite rovnicu paraboly, ktorá má vrchol v začiatku súradnicového systému a prechádza bodmi $A = [-5, 2]$, $B = [-5, -2]$. Nakreslite obrázok.

26. Zistite, či rovnica $x^2 + 16y^2 - 16x - 32y + 64 = 0$ je rovnicou elipsy. Ak áno, nájdite jej stred, vrcholy a dĺžky poloosí. Nakreslite obrázok.

27. Vyšetrite vzájomnú polohu elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ a priamky $3y - 2x + 6 = 0$.

28. Zistite súradnice stredu poloosí a, b kužeľosečky, ktorej analytickým vyjadrením je rovnica $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$. Nakreslite obrázok.

29. Zistite vzájomnú polohu hyperboly a priamky, ak ich rovnice sú: $x^2 - y^2 - 2x = 0$, $x - 2y = 0$. Nakreslite obrázok.

30. Zobrazte množinu všetkých bodov, ktorá vyhovuje nerovnostiam:
a) $3x + y \leq 0$, $y - x + 1 \geq 0$, b) $x - y \leq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$, c) $y \leq -x^2 + 4$,
d) $y \leq \sqrt{x}$, $y \geq 0$, $x \leq 3$, e) $y \geq 0$, $y \leq \sqrt{1 - x^2}$, f) $x - y \geq 0$, $y \geq x^2 - 2x$.

31. Nájdite rovnicu roviny, ktorá
    a) obsahuje bod $A = [5, -2, 3]$ a je rovnobežná s rovinou $R_{xy} : z = 0$,
    b) obsahuje bod $A = [2, -1, 1]$ a súradnicovú os x,
    c) obsahuje body $A = [3, 1, 1]$, $B = [0, 2, 3]$ a je rovnobežná so súradnicovou osou y.

32. Nájdite parametrické rovnice priamky, ktorá
    a) obsahuje bod $A = [-1, 2, 3]$ a je kolmá na rovinu $R_{yz} : x = 0$,
    b) obsahuje bod $A = [5, -2, 3]$ a je rovnobežná so súradnicovou osou z,
    c) leží v rovinách $x + 2y - z + 1 = 0$ a $x - y - 2z + 6 = 0$.

33. Nájdite kolmý priemet bodu $A = [0, 3, 2]$ do roviny $x + y + 3z + 2 = 0$.

34. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A = [-1, 2, 3]$, pretína priamku $p : x = 1 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = t,\ t \in R$ a je na ňu kolmá.

35. Nájdite rovnicu roviny, ktorá obsahuje priamku $p : x = 2 + 7t,\ y = -1 - 4t,\ z = 1 - 6t,\ t \in R$ a je kolmá na rovinu $x - 2y - z + 8 = 0$.

36. Nájdite bod súmerný k bodu $A = [5, 2, -6]$ vzhľadom na rovinu $x - y - 4z - 9 = 0$.

37. Nájdite rovnicu guľovej plochy, ak
    a) má stred $S = [-1, 2, -5]$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy,
    b) koncové body jedného jej priemeru sú $A = [3, -5, 2]$ a $B = [9, 7, 6]$,
    c) má stred $S = [-7, 3, 4]$ a dotýka sa súradnicovej osi y.

38. Zistite, aká je vzájomná poloha guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 4z + 16 = 0$ a priamky $p : x = -5 + 7t,\ y = -3 + 4t,\ z = 8 - 3t,\ t \in R$

39. Nájdite a zobrazte množinu všetkých bodov v priestore, ktoré vyhovujú nerovnostiam:
    a) $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3$,
    b) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 1$,
    c) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1,\ 0 \le z \le 2$,
    d) $x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x \ge 0$,
    e) $x^2 + y^2 + z^2 \ge 9,\ y \le 0$,
    f) $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z = 0$.

Výsledky:

1. $x + 3y - 18 = 0$,

2. a) $y = 1$, b) $x = 3$,

3. $x + 2y - 4 = 0$,

4. $3x - 2y - 4 = 0$,

5. a) $a = -4$, b) $a = 1$,

6. $x + 3y - 2 = 0$,

7. a) $P = [4, 0]$, $Q = [0, 8]$, b) $P = \left[-\frac{7}{2}, 0\right]$, $Q[0, 2]$,

8. rovnobežné rôzne,

9. $d = 5$,

10. 9,

11. $d = \frac{5}{2}$,

12. $x + y - 4 = 0$,

13. $T = \left[\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right]$,

14. $\sqrt{3}x - y + 3 - \sqrt{3} = 0$,

15. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$,

16. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 50$,

17. $S = [1, -2]$, $r = 2$,

18. $4x - 3y = 0$,

19. $(x + 4)^2 + y^2 = 16$,

20. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$,

21. sečnica, $A = [2, 1]$, $B = [0, -1]$,

22. $a = \pm 2\sqrt{2}$,

23. parabola, $d = 16$,

24. parabola, $V = [3, -2]$, os rovnobežná s osou y, $p = -3$,

25. $5y^2 + 4x = 0$,

26. $S = [8, 1]$, $a = 4$, $b = 1$, $A = [4, 1]$, $B = [12, 1]$, $C = [8, 2]$, $D = [8, 0]$,

27. priamka pretína elipsu v bodoch $M = [3, 0]$, $N = [0, -2]$,

28. $S=[2,-1],\ a=4,\ b=3,$ hyperbola s hlavnou osou rovnobežnou s osou x,

29. priamka pretína hyperbolu v dvoch bodoch $A=[0,0],\ B=\left[\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right]$,

30. grafický výstup,

31. a) $z-3=0$, b) $y+z=0$, c) $2x+3z-9=0$,

32. jedno z možných riešení je:
a) $x=-1+t,\ y=2,\ z=3,\ t\in R$, b) $x=5,\ y=-2\ z=3+t, t\in R$,
c) $x=-1+5t\ y=1-t\ z=2+3t,\ t\in R$,

33. $A'=[-1,2,-1]$,

34. $x=4+3t,\ y=1-2t,\ z=2+t,\ t\in R$,

35. $8x-y+10z-27=0$,

36. $B=[3,4,2]$,

37. a) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=30$, b) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=49$,
c) $(x+7)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=65$,

38. priamka pretína guľovú plochu v bodoch $A=[2,1,5]$ a $B=[9,5,2]$,

39. grafický výstup.

6

FUNKCIA A JEJ GRAF

Nech neprázdna množina M je podmnožinou R: $M \subset R$. Predpis f, ktorý každému $x \in M$ priradí práve jedno $y \in R$ (píšeme $y = f(x)$) sa nazýva funkcia f. Množinu M nazývame definičný obor funkcie f (píšeme $D(f) = M$), číslo $y = f(x)$ nazývame hodnota funkcie f v čísle x. Množinu $H(f)$ všetkých hodnôt funkcie f nazývame obor hodnôt funkcie f. Ak je daná funkcia f predpisom $y = f(x)$, tak definičný obor tejto funkcie je množina všetkých reálnych čísiel, pre ktoré je hodnota výrazu $f(x)$ reálne číslo.

Grafom funkcie f rozumieme množinu všetkých bodov $[x, y]$ v rovine, pre ktoré platí $x \in D(f)$ a $y = f(x)$.

Funkcia f sa na množine $M \subset D(f)$ nazýva **ohraničená zhora (zdola)**, ak existuje také reálne číslo K, že pre každé $x \in M$ je $f(x) < K$ $(f(x) > K)$. Ak funkcia f je na množine M ohraničená zhora aj zdola, hovoríme že je na M **ohraničená**.

Funkcia f sa nazýva **rastúca (klesajúca)** na množine $M \subset D(f)$ práve vtedy, keď pre každé dve čísla $x_1, x_2 \in M$ platí: ak $x_1 < x_2$, tak $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Ak funkcia f je rastúca (klesajúca) na definičnom obore, hovoríme, že funkcia f je rastúca (klesajúca).

Funkcia f sa na množine $M \subset D(f)$ nazýva **prostá (jednojednoznačná)**, ak pre každú dvojicu bodov $x_1, x_2 \in M$ platí $x_1 \neq x_2$, tak aj $f(x_1) \neq f(x_2)$. Teda rôznym bodom priraďuje rôzne hodnoty, inak povedané, každú svoju hodnotu nadobúda iba raz.

Je zrejmé, že ak je funkcia na nejakej množine rastúca alebo klesajúca, je aj prostá. Opak neplatí.

Na rozdiel od prostých funkcií, ktoré každú svoju hodnotu nadobúdajú iba raz, existuje trieda funkcií, ktoré naopak, každú svoju hodnotu nadobúdajú nekonečne veľakrát. Sú to periodické funkcie.

Funkcia f sa nazýva **periodická**, ak existuje také číslo $p \neq 0$, že ak $x \in D(f) \Rightarrow x \pm p \in D(f)$ a pre každé $x \in D(f)$ platí

$$f(x + p) = f(x).$$

Každé číslo p s touto vlastnosťou sa nazýva **perióda** funkcie f. Ak existuje najmenšie kladné číslo s takouto vlastnosťou, nazýva sa takéto číslo **základná perióda**.

Nech funkcia f je definovaná na takej množine $D(f)$, ktorá s každým číslom x obsahuje aj číslo $-x$, t. j. ak $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$.
Hovoríme, že funkcia f je **párna**, ak pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = f(x)$, f je **nepárna**, ak pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = -f(x)$.
Graf párnej funkcie je symetrický vzhľadom na os y, graf nepárnej funkcie je symetrický vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy.

Nech f je funkcia jednojednoznačná na svojom definičnom obore $D(f)$, s oborom hodnôt $H(f)$. Potom funkcia f^{-1}, ktorá je definovaná na $H(f)$, s oborom hodnôt $D(f)$ tak, že pre každé $y \in H(f)$ platí:

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

sa nazýva **inverzná** k funkcii f.

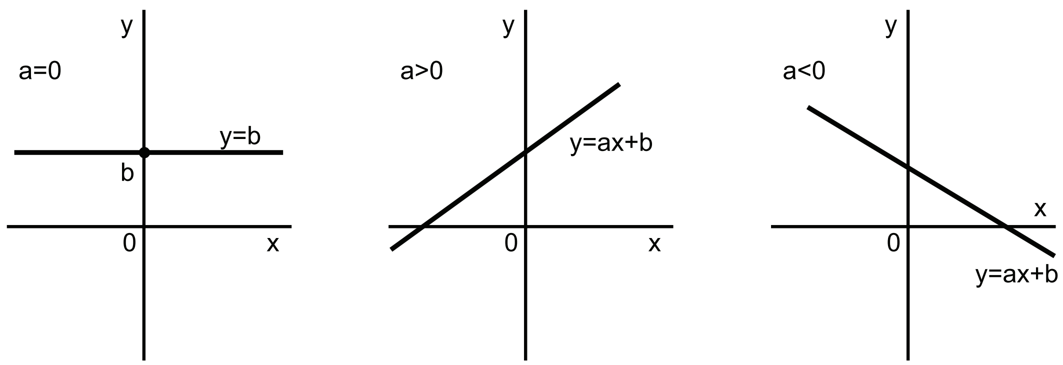
Ak f je rastúca (klesajúca), existuje k nej inverzná funkcia, ktorá je tiež rastúca (klesajúca). Grafy funkcií f a f^{-1} sú symetrické podľa priamky $y = x$. Z definície vyplýva, že inverzná funkcia k funkcii f^{-1} je pôvodná funkcia f. Teda $(f^{-1})^{-1} = f$.

Pri vyšetrovaní vlastností a priebehu funkcií a kreslení ich grafov môžeme často využiť nasledujúce vlastnosti:

Ak poznáme graf funkcie $f : y = f(x)$ a funkcia g je definovaná $g : y = f(x) + k$, kde k je ľubovoľná nenulová konštanta, potom jej graf dostaneme posunutím grafu funkcie f pozdĺž osi y o k jednotiek nahor, ak $k > 0$, resp. nadol, ak $k < 0$.

Ak funkcia h je definovaná $h : y = f(x + k)$, kde k je opäť ľubovoľná nenulová konštanta, potom jej graf dostaneme posunutím grafu funkcie f pozdĺž osi x o k jednotiek naľavo, ak $k > 0$, resp. napravo, ak $k < 0$.

Lineárna funkcia je daná rovnicou $y = ax+b$, a, $b \in R$ $D(f) = R$. Grafom lineárnej funkcie je priamka. Ak $a = 0$, lineárna funkcia $y = b$ sa nazýva konštantná funkcia. Jej grafom je priamka rovnobežná s osou x (obr. 6.1).

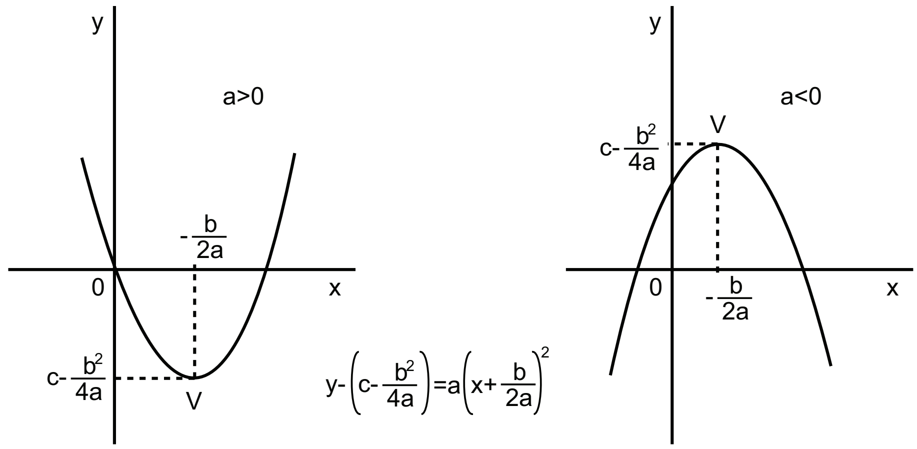


Obr. 6.1

Kvadratická funkcia je daná rovnicou $y = ax^2 + bx + c,\ a,\ b,\ c \in R,\ a \neq 0$, $D(f) = R$. Jej grafom je parabola, ktorej vrchol V dostaneme nasledujúcou úpravou:

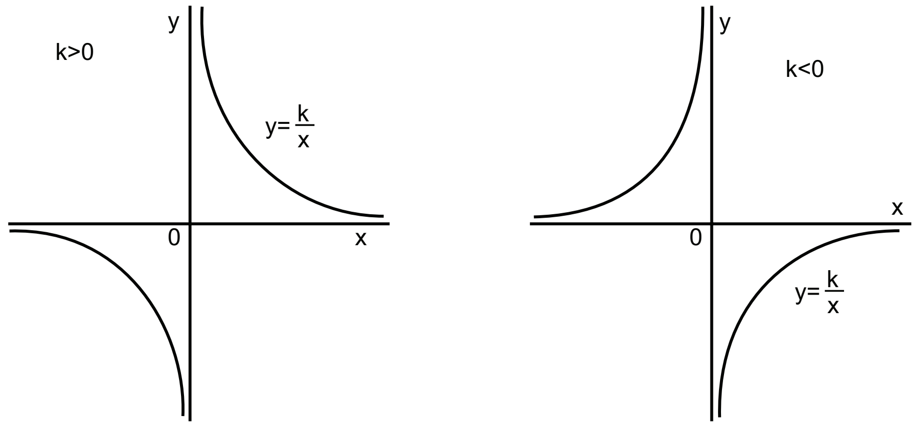
$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c, \quad \text{teda} \quad y - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\text{čiže} \quad V = \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right], \quad \text{(obr.6.2)}.$$



Obr. 6.2

Nepriama úmernosť je funkcia daná rovnicou $y = \dfrac{k}{x},\ k \in R,\ k \neq 0$. Jej $D(f) = R - \{0\}$ a grafom je rovnoosá hyperbola (obr. 6.3).

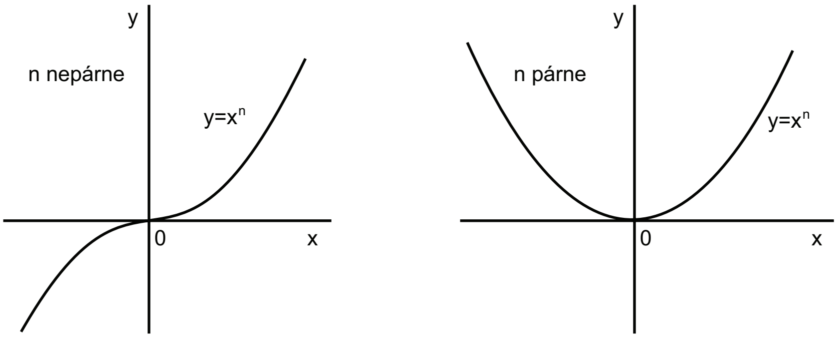


Obr. 6.3

Funkcia $y = x^r$, pre $x > 0$, kde r je ľubovoľné reálne číslo, sa nazýva **mocninová funkcia**.

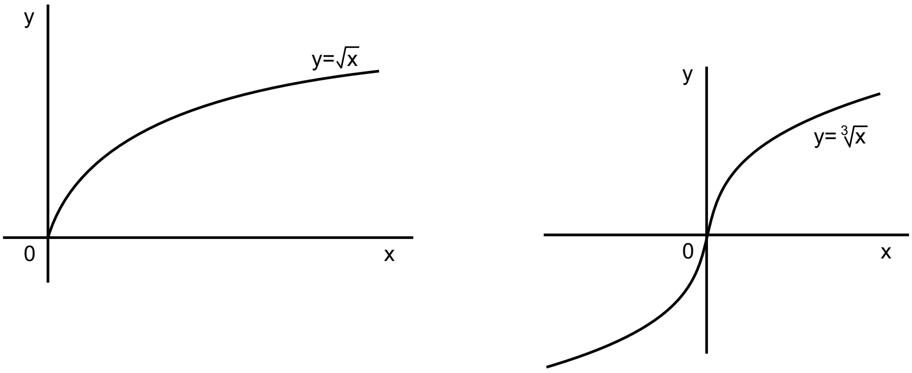
Ak r je prirodzené číslo ($r = n$), tak $y = x^n$ je mocninová funkcia definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$.

Ak n je párne, $H(f) = \langle 0, \infty)$, funkcia je párna, na intervale $(-\infty, 0\rangle$ klesajúca a na $\langle 0, \infty)$ rastúca. Ak n je nepárne, $H(f) = R$, funkcia je nepárna a rastúca (obr. 6.4).



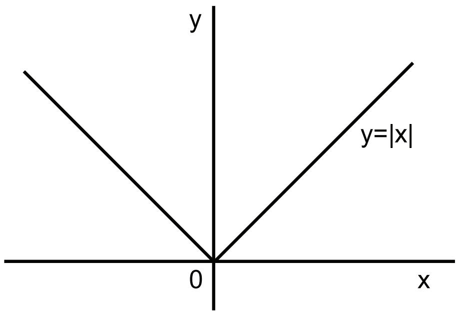
Obr. 6.4

Ak $r = \dfrac{1}{q}$, $q \in N$ tak rovnicou $y = x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$, ak q je nepárne, je funkcia definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$, ak q je párne, je funkcia definovaná na intervale $\langle 0, \infty)$ (napr. pre $q = 2$, $q = 3$ grafy funkcií sú na obr. 6.5).



Obr. 6.5

Funkcia $y = |x|$ je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$. Grafom funkcie je časť priamky $y = x$ na intervale $\langle 0, \infty)$ a časť priamky $y = -x$ na intervale $(-\infty, 0)$ (obr. 6.6).



Obr. 6.6

Funkcia daná rovnicou $y = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0}$, kde m, n sú prirodzené čísla, a_m, a_{m-1}, ..., a_0, b_n, b_{n-1}, ..., b_0 sú reálne čísla, $b_n \neq 0$ sa nazýva **racionálna funkcia**.

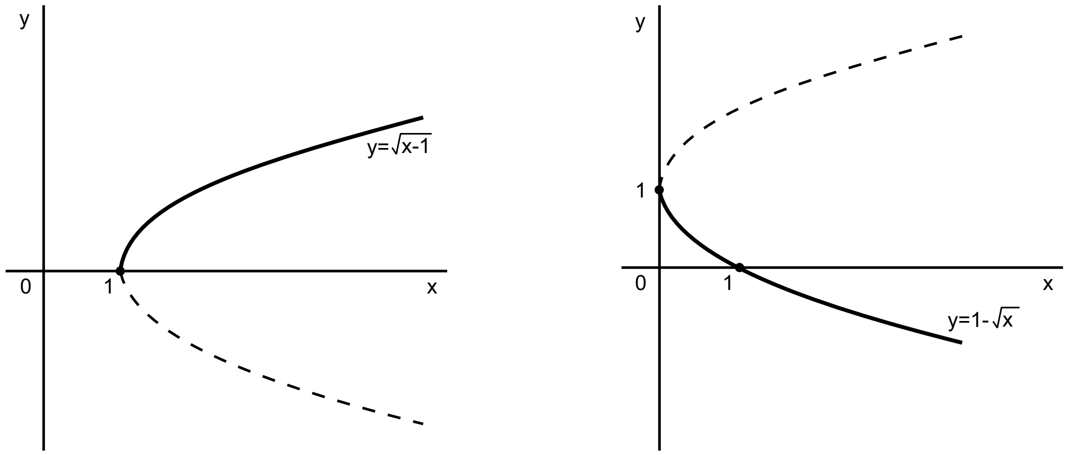
Špeciálnym prípadom racionálnej funkcie je **polynóm**
$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Často sa vyskytujú a dôležitú úlohu majú funkcie, ktorých grafom je časť kužeľosečky (prípadne celá kužeľosečka). Zo spomenutých je to napríklad kvadratická funkcia, funkcia vyjadrujúca nepriamu úmeru, ako aj funkcia $y = \sqrt{x}$, ktorej graf je hornou časťou paraboly $x = y^2$.

Ukážeme si ešte niektoré ďalšie prípady, pričom sa vždy jedná o kužeľosečku, ktorej osou symetrie je niektorá zo súradnicových osí, prípadne priamka rovnobežná s niektorou z nich. Uvedomenie si tejto skutočnosti nám podstatne zjednodušuje napríklad nakreslenie grafu danej funkcie, bez toho, aby sme museli podrobne vyšetrovať jej jednotlivé vlastnosti. Naopak, môžeme ich z grafu funkcie ľahko „vyčítať“.

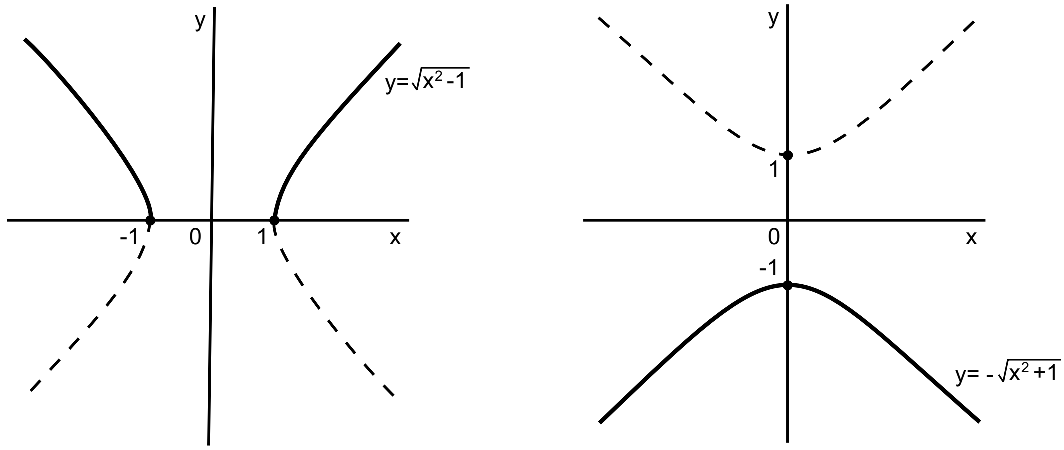
Kvadratická funkcia je príkladom funkcie, ktorej grafom je parabola s osou súmernosti rovnobežnou s osou y. V prípade, že ide o parabolu, ktorej osou je os x (alebo priamka s ňou rovnobežná), táto nemôže byť celá grafom funkcie, vždy iba jej horná alebo dolná časť.

Uvažujme napríklad o funkciách $f_1 : y = \sqrt{x-1}$ a $f_2 : y = 1 - \sqrt{x}$. Ľahko sa presvedčíme, že graf funkcie f_1 je hornou časťou paraboly $y^2 = x - 1$ a graf funkcie f_2 je dolnou časťou paraboly $(y-1)^2 = x$. Na základe toho, bez ďalšieho vyšetrovania vlastností, môžeme nakresliť ich grafy (obr. 6.7).



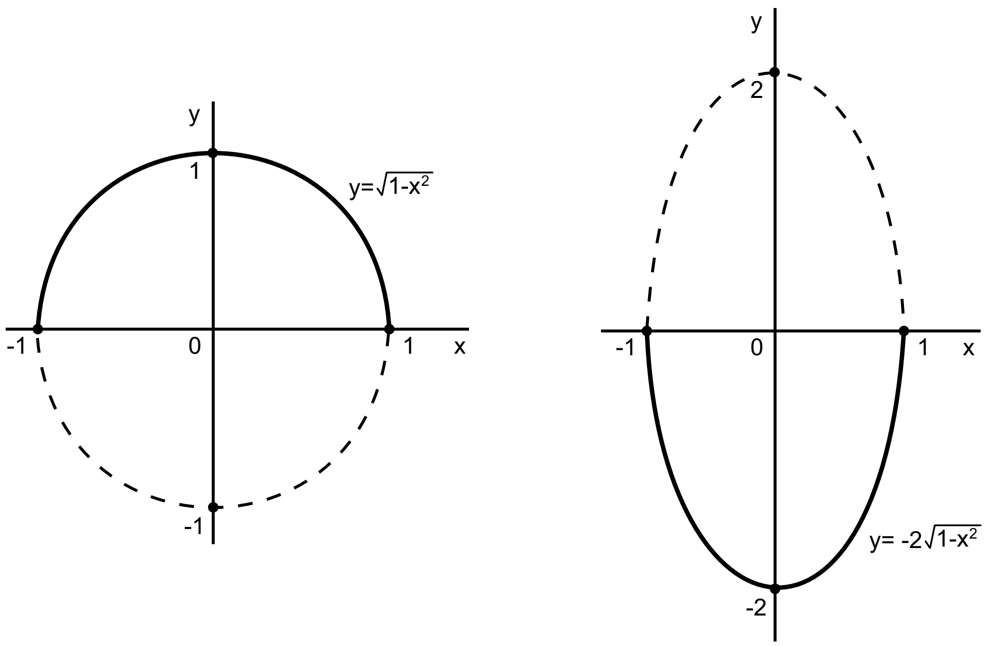
Obr. 6.7

Grafom funkcie $y = \dfrac{k}{x}$, ktorá vyjadruje nepriamu úmernosť, je hyperbola. Ide o hyperbolu, ktorej osami súmernosti sú priamky $y = x$ a $y = -x$, teda nie sú to rovnobežky so súradnicovými osami. Uvažujeme teraz dve funkcie, definované pomocou jednoduchých analytických vyjadrení: $f_3 : y = \sqrt{x^2 - 1}$ a $f_4 : y = -\sqrt{x^2 + 1}$. Opäť sa môžeme (umocnením príslušného analytického vyjadrenia danej funkcie) presvedčiť, že graf funkcie f_3 je hornou časťou hyperboly $x^2 - y^2 = 1$ a graf funkcie f_4 je dolnou časťou hyperboly $y^2 - x^2 = 1$. Osami súmernosti oboch sú súradnicové osi, pričom reálna a imaginárna os sú navzájom vymenené. Teda zase môžeme pomocou tohto zistenia jednoducho nakresliť ich grafy (obr. 6.8).



Obr. 6.8

Zostáva nám ešte tretí typ funkcií, ktorých graf je časťou elipsy, prípadne kružnice. Zoberme si funkcie $f_5 : y = \sqrt{1-x^2}$ a $f_6 : y = -2\sqrt{1-x^2}$. Zrejme sa jedná o funkcie, ktorých graf je v prípade funkcie f_5 hornou časťou kružnice $x^2 + y^2 = 1$ a v prípade funkcie f_6 dolnou časťou elipsy $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Nasledujú ich grafy (obr. 6.9).



Obr. 6.9

Príklad 1. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3} + \sqrt{x+1}$ a vypočítajte $f(-1)$, $f(5)$, $f(a)$.

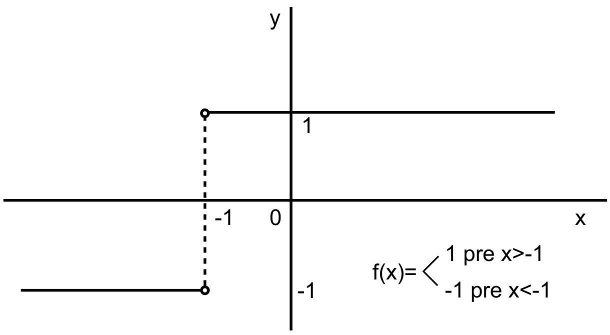
Riešenie Definičný obor danej funkcie je množina všetkých takých čísel x, pre ktoré platí $x - 3 \neq 0$ a $x + 1 \geq 0$. To znamená, že $x \in D(f)$ práve vtedy, ak $x \neq 3$ a $x \geq -1$. Teda $D(f) = \langle -1, 3) \cup (3, \infty)$,

$$f(-1) = \frac{-1+1}{-1-3} + \sqrt{-1+1} = 0 + 0 = 0, \quad f(5) = \frac{6}{2} + \sqrt{6} = 3 + \sqrt{6},$$
$$f(a) = \frac{a+1}{a-3} + \sqrt{a+1} \quad \text{pre každé} \ \ a \in D(f).$$

Príldad 2. Nájdite definičný obor a načrtnite graf funkcie $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$.

Riešenie Definičný obor danej funkcie je množina všetkých reálnych čísel x, pre ktoré platí $x + 1 \neq 0$. To znamená $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.
Pre $x > -1$ je $|x+1| = x+1$, pre $x < -1$ je $|x+1| = -x-1$. Teda funkciu f môžme definovať takto:

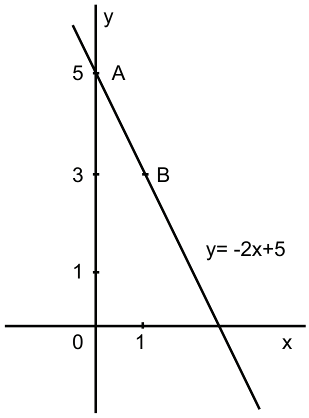
$$f(x) = \left\langle \begin{array}{l} 1 \text{ pre } x > -1 \\ -1 \text{ pre } x < -1 \end{array} \right. \quad \text{Graf funkcie je na obr. 6.10.}$$



Obr. 6.10

Príklad 3. Dokážte, že funkcia $f:\ y = -2x + 5$ je klesajúca a načrtnite jej graf.

Riešenie: Definičný obor danej funkcie je $D(f) = R$. Máme dokázať, že pre každé $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ je $f(x_1) > f(x_2)$. Nech x_1, x_2 sú také ľubovoľné reálne čísla, že $x_1 < x_2$. Potom postupne pomocou ekvivalentných úprav dostaneme $-2x_1 > -2x_2$ a $-2x_1 + 5 > -2x_2 + 5$ t. j. $f(x_1) > f(x_2)$. To znamená, že daná funkcia je klesajúca. Grafom tejto funkcie je priamka, ktorú zostrojíme tak, že nájdeme dva rôzne body A, B, ktorých súradnice vyhovujú rovnici priamky. Ak $x = 0$, potom $y = 5$. Ak $x = 1$, tak $y = 3$. Teda $A = [0, 5]$, $B = [1, 3]$. Priamka daná bodmi A, B je grafom funkcie $y = -2x + 5$ (obr. 6.11).



Obr. 6.11

Príklad 4. Zistite, či je daná funkcia párna alebo nepárna a načrtnite jej graf, ak:
a) $f(x) = 1 - x^2$, b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$, c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, d) $f(x) = \sqrt{2+x}$.

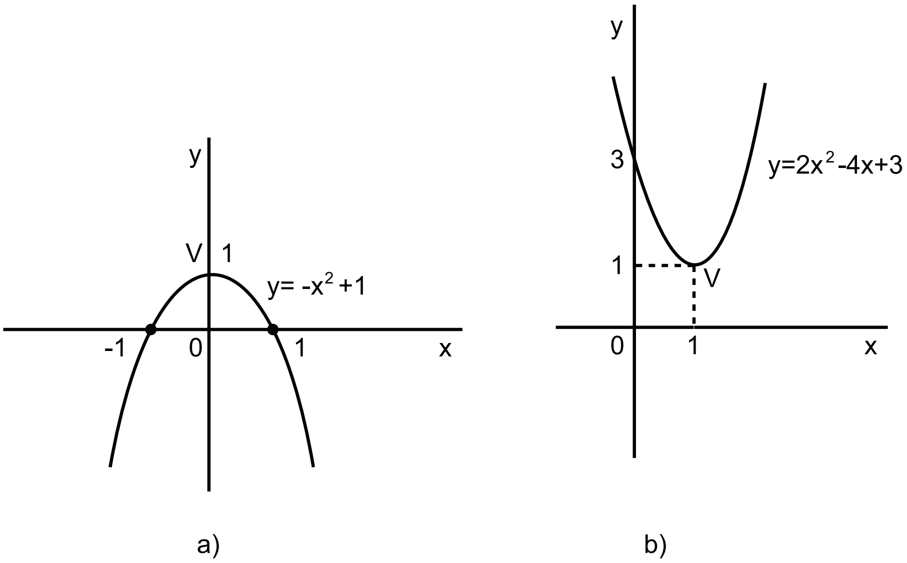
Riešenie:

a) Definičný obor funkcie $f(x) = 1 - x^2$ je $D(f) = R$, teda množina s každým x obsahuje aj $-x$. Pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - x^2 = f(x)$, funkcia je párna, graf funkcie je na obr. 6.12a.

b) Definičný obor funkcie $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ je $D(f) = R$, teda množina s každým x obsahuje aj $-x$. Pre každé $x \in D(f)$ je:
$f(-x) = 2(-x)^2 - 4(-x) + 3 = 2x^2 + 4x + 3$ a $-f(x) = -(2x^2 - 4x + 3) = -2x^2 + 4x - 3$.
Z toho je zrejmé, že pre každé $x \in D(f)$ nie je splnená žiadna z rovností:
$f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$. Daná funkcia nie je párna ani nepárna. Je to kvadratická funkcia ($a = 2$), ktorej grafom je parabola. V predpise funkcie urobíme úpravu doplnenia na úplný štvorec a nájdeme vrchol príslušnej paraboly.

$$y = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2(x-1)^2 - 2 + 3 = 2(x-1)^2 + 1$$

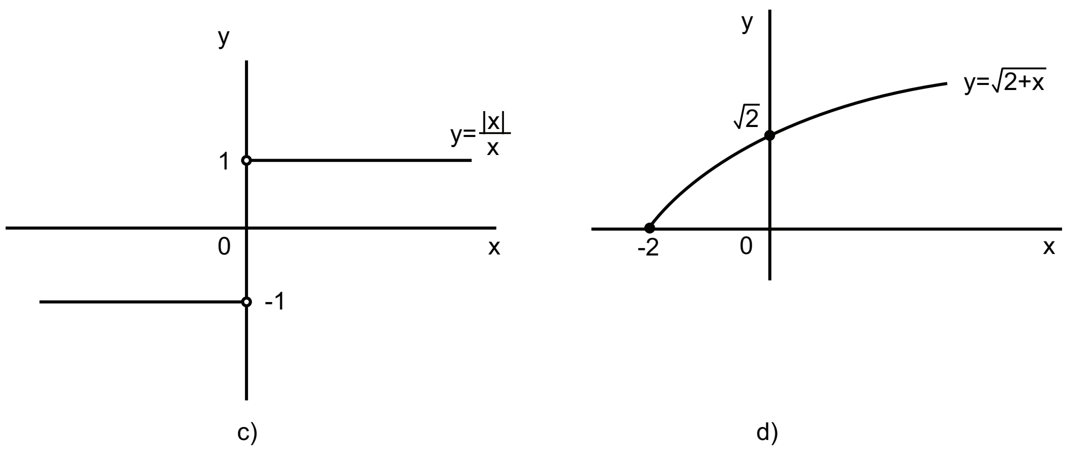
$$y - 1 = 2(x-1)^2, \quad \text{teda} \quad V = [1, 1] \quad \text{(obr. 6.12b).}$$



Obr. 6.12

c) Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ je $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Pre každé $x \in D(f)$ platí: ak $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$ a tiež $f(-x) = \dfrac{|-x|}{-x} = \dfrac{|x|}{-x} = -\dfrac{|x|}{x} = -f(x)$. Teda funkcia je nepárna, graf funkcie je na obr. 6.13c.

d) Definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{2+x}$ je množina všetkých čísiel x, pre ktoré platí: $x + 2 \geq 0$, t. j. $x \geq -2$. Teda $D(f) = \langle -2, \infty)$. Pre všetky $x \in D(f)$ nie je splnená podmienka, že ak $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$, napr. $3 \in D(f)$, ale $-3 \notin D(f)$, čiže funkcia nie je párna ani nepárna. Graf funkcie je na obr. 6.13d.



Obr. 6.13

Príklad 5. Ukážte, že funkcia $f : y = 1 + \sqrt{4 - x}$ je jednojednoznačná, nájdite k nej inverznú funkciu f^{-1} a nakreslite grafy týchto dvoch funkcií.

Riešenie: Najprv nájdeme definičný obor danej funkcie:
$D(f) = \{x : 4 - x \geq 0\} = (-\infty, 4\rangle$. Nech teraz $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, potom

$$-x_1 \neq -x_2 \quad \Rightarrow \quad 4 - x_1 \neq 4 - x_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4 - x_1} \neq \sqrt{4 - x_2} \quad \Rightarrow$$

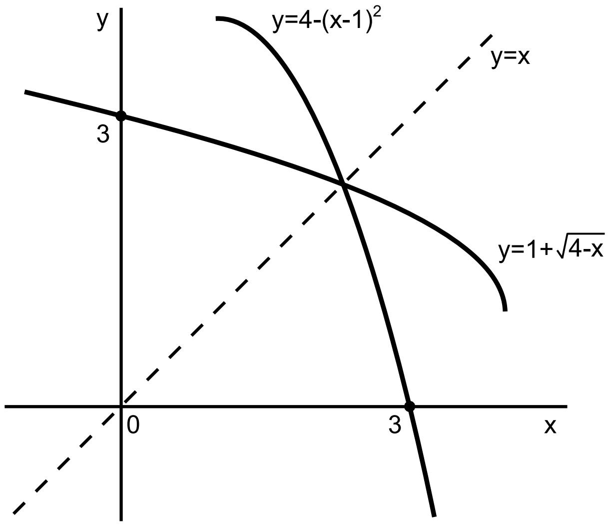
$$\Rightarrow \quad 1 + \sqrt{4 - x_1} \neq 1 + \sqrt{4 - x_2}.$$

Funkcia je teda jednojednoznačná (klesajúca) a ľahko vidíme, že jej obor hodnôt je $H(f) = \langle 1, \infty)$. Z toho vyplýva, že existuje k nej inverzná funkcia f^{-1}, pričom jej obor definície je $D(f^{-1})) = \langle 1, \infty)$ a obor hodnôt je $H(f^{-1}) = (-\infty, 4\rangle$.
Štandardný postup pre nájdenie analytického vyjadrenia inverznej funkcie spočíva vo formálnej zámene x a y vo vyjadrení funkcie f a opätovnom explicitnom vyjadrení y ako funkcie x:

$$f : y = 1 + \sqrt{4 - x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : x = 1 + \sqrt{4 - y} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : x - 1 = \sqrt{4 - y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1} : (x - 1)^2 = 4 - y \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : y = 4 - (x - 1)^2.$$

Všimnime si, že inverzná funkcia nie je definovaná na svojom prirodzenom (maximálnom) definičnom obore. Grafy funkcií f a f^{-1} sú na obr. 6.14.



Obr. 6.14

6.1 Cvičenia

1. Nájdite $f(-1)$, $f(0)$, $f(-t)$, $f(a+b)$, $f(x^2)$, ak sú dané funkcie
   a) $f : y = 2 - x$, b) $f : y = 3x^2 - 2x + 1$.

2. Nájdite definičný obor funkcií f : a) $y = \dfrac{x}{x-1}$, b) $y = \sqrt{x-2} + \dfrac{x-3}{x-4}$,
   c) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$, d) $y = \sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}$, e) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{6-5x}}$, f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+5x-3}}$,
   g) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{|x-1|}}$, h) $y = \sqrt{\dfrac{2x^2-4x+3}{3-x}}$, i) $y = \sqrt{4-|x|}$, j) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x-3|-7}}$.

3. Nájdite definičný obor a načrtnite grafy funkcií f : a) $y = 3 - x$, b) $y = 4 - x^2$,
   c) $y = (x-3)^2 + 5$, d) $y = 2x^2 + 2x - 3$, e) $y = \sqrt{(x-1)^2}$, f) $y = -\dfrac{3}{x}$,
   g) $y = 3+\sqrt{x}$, h) $y = \sqrt{x-2}$, i) $y = \sqrt{4-x^2}$, j) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x+1}$, k) $y = |x^2-4|$.

4. Nájdite lineárnu funkciu, pre ktorú $f(1) = 3$, $f(2) = 0$. Načrtnite graf.

5. Nájdite kvadratickú funkciu, pre ktorú $f(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f(1) = -1$. Načrtnite graf.

6. Vyšetrite ohraničenosť (ohraničenosť zhora, resp. zdola) funkcií f na $D(f)$:
   a) $y = x^3$, b) $y = \sqrt{x+2}$, c) $y = 1 - x^2$, d) $y = \sqrt{4-x^2}$.

7. Vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcií f : a) $y = 2x$, b) $y = 4$, c) $y = \dfrac{1}{x^3}$,
   d) $y = 5 + x$, e) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$, f) $y = |x| + 3$, g) $y = |x-2|$, h) $y = \dfrac{3}{x-2}$.

8. Vyšetrite monotónnosť funkcií f : a) $y = 3x - 2$, b) $y = \sqrt{2-5x}$,
   c) $y = 4 + \sqrt{3x}$, d) $y = |x| - x$, e) $y = \dfrac{1}{x}$.

9. Ukážte, že funkcia $f : y = \dfrac{1}{x}$ je na svojom $D(f)$ prostá, ale nie je na ňom ani rastúca ani klesajúca.

10. Nájdite a nakreslite kužeľosečku, ktorej časť je grafom nasledujúcej funkcie. Vyznačte na nej tú časť, ktorá je grafom danej funkcie.
    a) $y = -\sqrt{x+2}$, b) $y = 2 + \sqrt{x}$, c) $y = 4 + \sqrt{x^2-1}$, d) $y = 2 - \sqrt{x^2+1}$,
    e) $y = -\sqrt{9-x^2}$, f) $y = \sqrt{1-4x^2}$.

11. Ukážte, že daná funkcia je jednojednoznačná, nájdite k nej inverznú funkciu a nakreslite grafy oboch funkcií.
    a) $f : y = -2x + 4$, b) $f : y = 3 + \sqrt{x}$, c) $f : y = \dfrac{2}{x-1}$, d) $f : y = (x+1)^3$.

12. Nájdite priesečníky grafov funkcií. Úlohu riešte numericky aj graficky:
    a) $y = 2x - x^2$, $y = x$, b) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 3 - 2x$,

c) $y = x^2 - x - 6, \quad y = -x^2 + 5x + 14.$

13. Nájdite definičný obor funkcií a zistite pre ktoré x platí $f(x) = 0$:
a) $y = \sqrt{2x+11} - x - 4$, b) $y = 1 - x + \sqrt{1 + 4x - 5x^2}$, c) $y = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}} - 3$.

Výsledky:

1. a) $3, \quad 2, \quad 2+t, \quad 2-a-b, \quad 2-x^2,$
b) $6, \quad 1, \quad 3t^2+2t+1, \quad 3(a+b)^2 - 2(a+b) + 1, \quad 3x^4 - 2x^2 + 1,$

2. a) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, b) $\langle 2, 4) \cup (4, \infty)$, c) $(-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty)$, d) $\langle -2, 1\rangle$,
e) $\left\langle 0, \dfrac{6}{5}\right)$, f) $(-\infty, -3) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$, g) $(1, \infty)$, h) $(-\infty, 3)$, i) $\langle -4, 4\rangle$,
j) $(-\infty, -4) \cup (10, \infty)$,

3. a), b), c), d), e), k) R,
f) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
g) $\langle 0, \infty)$,
h) $\langle 2, \infty)$,
i) $\langle -2, 2\rangle$,
j) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$,

4. $y = -3x + 6$,

5. $y = x^2 - 2x$,

6. a) nie je ohraničená ani zhora ani zdola, b) ohraničená len zdola,
c) ohraničená len zhora, d) ohraničená.

7. a), c) nepárna,
b), e), f) párna,
d), g), h) ani párna ani nepárna,

8. a), c) rastúca,
b) klesajúca,
d) nerastúca,
e) nie je monotónna,

9. Návod: pri vyšetrovaní monotónnosti porovnajte funkčné hodnoty $f(x_1)$, $f(x_2)$, ak napr. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ a $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,

10. a) dolná časť paraboly $y^2 = x + 2$,
    b) horná časť paraboly $(y-2)^2 = x$,
    c) horná časť hyperboly $(y-4)^2 - x^2 = 1$,
    d) dolná časť hyperboly $x^2 - (y-2)^2 = 1$,
    e) dolná časť kružnice $x^2 + y^2 = 9$,
    f) horná časť elipsy $4x^2 + y^2 = 1$.

11. a) $f^{-1} : y = 2 - \dfrac{x}{2}$, $\quad D(f^{-1}) = H(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$,
    b) $f^{-1} : y = (x-3)^2$, $\quad D(f^{-1}) = \langle 3, \infty)$, $\quad H(f^{-1}) = \langle 0, \infty)$,
    c) $f^{-1} : y = 1 + \dfrac{2}{x}$, $\quad D(f^{-1}) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\quad H(f^{-1}) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$,
    d) $f^{-1} : y = \sqrt[3]{x} - 1$, $\quad D(f^{-1}) = H(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$.

12. a) $[0,0]$, $[1,1]$, $\quad$ b) $[1,1]$, $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, $\quad$ c) $[5,14]$, $[-2,0]$,

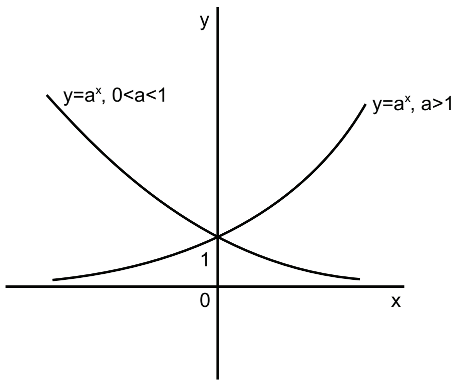
13. a) $\left\langle -\dfrac{11}{2}, \infty \right)$, $\{-1\}$, $\quad$ b) $\left\langle -\dfrac{1}{5}, 1 \right\rangle$, $\{1\}$, $\quad$ c) $(-1, 3\rangle$, $\left\{-\dfrac{3}{5}\right\}$.

7

EXPONENCIÁLNA A LOGARITMICKÁ FUNKCIA

Funkcie exponenciálne a logaritmické predstavujú dve triedy funkcií, ktoré sú k sebe navzájom inverzné.

Funkcia $f : y = a^x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$ je **exponenciálna funkcia**, pričom $D(f) = (-\infty, \infty)$, $H(f) = (0, \infty)$. Ak $a > 1$ je exponenciálna funkcia rastúca, ak $0 < a < 1$, je exponenciálna funkcia klesajúca (obr. 7.1).



Obr. 7.1

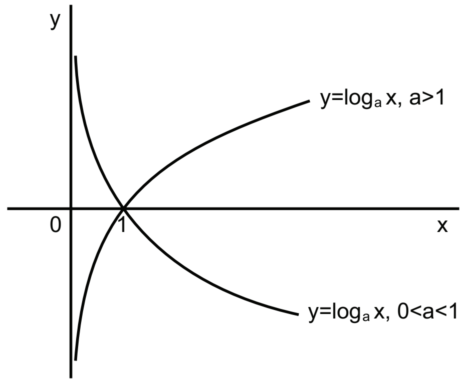
Inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii je **logaritmická funkcia** $y = \log_a x$, kde $a > 0$ $a \neq 1$. Definičný obor logaritmickej funkcie $D(f) = (0, \infty)$, obor hodnôt $H(f) = (-\infty, \infty)$, pre $a > 1$ je funkcia rastúca, pre $0 < a < 1$ je logaritmická funkcia klesajúca (obr. 7.2).

Pre každé $a > 0$, $a \neq 1$ a každé $x > 0$, $y > 0$ platí:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^r = r.\log_a x, \ r \in R, \qquad x = a^{\log_a x}.$$

Pre každé $a > 0$, $a \neq 1$ platí: $a^u = v$ práve vtedy, ak $u = \log_a v$, kde $u \in R$, $v > 0$.



Obr. 7.2

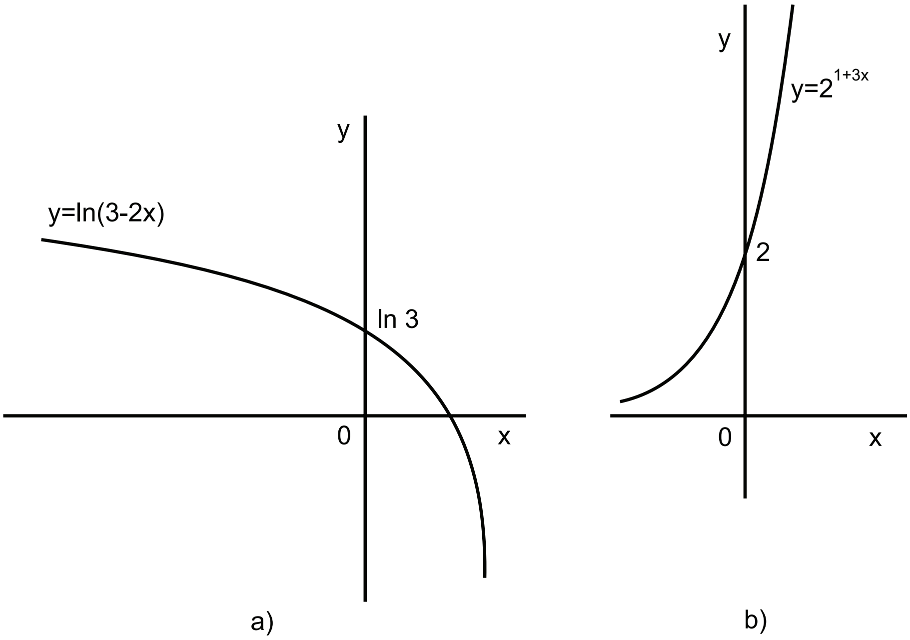
Z istých dôvodov, ktoré sa stanú zrejmé až pri štúdiu ďalších oblastí matematiky, ako je napríklad diferenciálny a integrálny počet, najvýznamnejšiu úlohu spomedzi logaritmických funkcií hrá logaritmus pri základe e. e je iracionálne číslo, jeho približná hodnota je $e \doteq 2,71828$. Tento logaritmus sa nazýva **prirodzený** a obyčajne sa značí $\ln x$. Teda $\ln x = \log_e x$.
Predovšetkým v technických výpočtoch sa často používa aj logaritmus pri základe 10, ktorý sa nazýva **dekadický** a obyčajne ho zapisujeme $\log x$. Teda $\log x = \log_{10} x$.

Príklad 1. Nájdite definičný obor funkcie f, zistite, či je rastúca alebo klesajúca a nakreslite jej graf, ak: a) $f(x) = \ln(3 - 2x)$, b) $f(x) = 2^{1+3x}$.

Riešenie:

a) Definičný obor funkcie $f(x) = \ln(3 - 2x)$ je množina všetkých $x \in R$, pre ktoré platí: $3 - 2x > 0$, teda $x < \frac{3}{2}$, čiže $D(f) = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.
Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné čísla z definičného oboru a nech $x_1 < x_2$, potom platí: $-2x_1 > -2x_2 \quad \Rightarrow \quad 3-2x_1 > 3-2x_2$. Pretože $\ln x = \log_e x$, je základ logaritmickej funkcie väčší ako 1, a teda platí: $\ln(3 - 2x_1) > \ln(3 - 2x_2)$, t. j. $f(x_1) > f(x_2)$. Z toho vyplýva, že daná funkcia je klesajúca (obr. 7.3a).

b) Definičný obor funkcie $f(x) = 2^{1+3x}$ je množina všetkých reálnych čísel, teda $D(f) = R$. Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné reálne čísla a nech $x_1 < x_2$, potom platí: $3x_1 < 3x_2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3x_1 < 1 + 3x_2 \quad \Rightarrow \quad 2^{1+3x_1} < 2^{1+3x_2}$, t.j. $f(x_1) < f(x_2)$. Z toho vyplýva, že daná funkcia je rastúca (obr. 7.3b).



Obr. 7.3

Príklad 2. Ukážte, že funkcia f je jednojednoznačná, nájdite k nej inverznú funkciu f^{-1} a nakreslite grafy týchto dvoch funkcií. a) $f : y = \ln(x+3)$, b) $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$.

Riešenie:

a) Najprv nájdeme definičný obor danej funkcie: $D(f) = \{x : x+3 > 0\} = (-3, \infty)$. Nech teraz

$$x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3 \neq x_2 + 3 \quad \Rightarrow \quad \ln(x_1+3) \neq \ln(x_2+3).$$

Funkcia je teda jednojednoznačná (rastúca) a ľahko vidíme, že jej obor hodnôt je $H(f) = (-\infty, \infty)$. Z toho vyplýva, že existuje k nej inverzná funkcia f^{-1}, pričom jej obor definície je $D(f^{-1})) = (-\infty, \infty)$ a obor hodnôt je $H(f^{-1}) = (-3, \infty)$. Nájdime štandardným spôsobom analytické vyjadrenie inverznej funkcie:

$$f^{-1} : x = \ln(y+3) \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : y + 3 = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : y = e^x - 3.$$

Grafy funkcií f a f^{-1} sú na obr. 7.4.

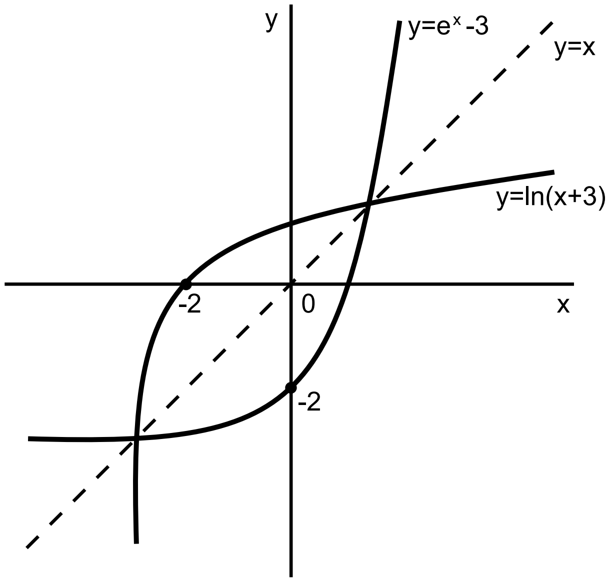
b) Definičný obor danej funkcie je zrejme $D(f) = (-\infty, \infty)$. Nech

$$x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+1} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2+1}.$$

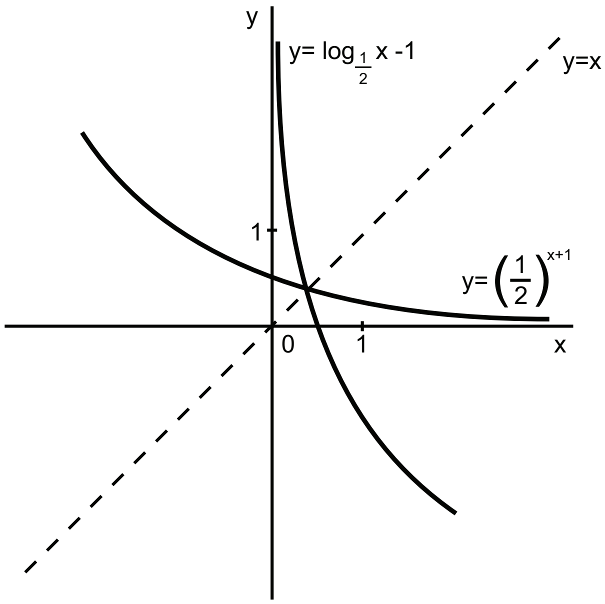
Funkcia je teda jednojednoznačná (klesajúca) a ľahko vidíme, že jej obor hodnôt je $H(f) = (0, \infty)$. Teda existuje k nej inverzná funkcia f^{-1} a jej obor definície je $D(f^{-1})) = (0, \infty)$ obor hodnôt $H(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$. Nájdime analytické vyjadrenie inverznej funkcie:

$$f^{-1} : x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : y + 1 = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : y = \log_{\frac{1}{2}} x - 1.$$

Grafy funkcií f a f^{-1} sú na obr. 7.5.



Obr. 7.4



Obr. 7.5

Príklad 3. Zistite, či je funkcia f párna alebo nepárna, ak
a) $f(x) = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$, b) $f(x) = 3^{1-x^2}$, c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

Riešenie:

a) Definičný obor funkcie $f(x) = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$ je $D(f) = (-2, 2)$. Pre každé $x \in D(f)$ platí: ak $x \in D(f)$, aj $-x \in D(f)$ a tiež:

$$f(-x) = \ln \frac{2-(-x)}{2+x} = \ln \frac{2+x}{2-x} = \ln \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\ln \frac{2-x}{2+x} = -f(x).$$

Teda funkcia je nepárna.

b) Definičný obor funkcie $f(x) = 3^{1-x^2}$ je $D(f) = R$, teda množina s každým x obsahuje aj $-x$. Pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = 3^{1-(-x)^2}$. Daná funkcia je párna.

c) Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ je $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. V tomto prípade pre každé $x \in D(f)$ neplatí, že aj $-x \in D(f)$, lebo $1 \in D(f)$, ale $-1 \notin D(f)$. Teda daná funkcia nie je párna ani nepárna.

Príklad 4. Vypočítajte číslo x, ak:

a) $x = \log_5 \sqrt{125}$, b) $\log_{\sqrt{3}} x = -4$, c) $\log_x \dfrac{1}{9} = -2$.

Riešenie:

a) $x = \log_5 (5^3)^{\frac{1}{2}} = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2} \log_5 5 = \dfrac{3}{2}$.

b) Vzťah $\log_{\sqrt{3}} x = -4$ je ekvivalentný so vzťahom $x = (\sqrt{3})^{-4}$. Pretože $(\sqrt{3})^{-4} = 3^{-\frac{4}{2}} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ je $x = \dfrac{1}{9}$.

c) Vzťah $\log_x \dfrac{1}{9} = -2$ je ekvivalentný so vzťahom $x^{-2} = \dfrac{1}{9}$, z čoho $x^{-2} = 3^{-2}$, teda $x = 3$.

Príklad 5. Riešte rovnicu $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$ s neznámou $x \in R$.

Riešenie: Obe strany rovnice upravíme tak, aby boli vyjadrené v tvare mocnín s rovnakým základom:

$$2^{x-3}(2^2 + 2^1 + 1) = 448, \quad \text{z toho} \quad 7 \,.\, 2^{x-3} = 448, \quad \text{teda} \quad 2^{x-3} = 64 \quad \text{alebo} \quad 2^{x-3} = 2^6,$$

$$\text{čiže} \quad x - 3 = 6 \quad \text{a z toho} \quad x = 9.$$

Skúška správnosti: $L = 2^8 + 2^7 + 2^6 = 2^6(4 + 2 + 1) = 2^6 . 7 = 64 . 7 = 448 = P$. Množina riešení danej rovnice je $K = \{9\}$.

Príklad 6. Riešte rovnicu $2\log(x-1) = \dfrac{1}{2} \log x^5 - \log \sqrt{x}$ v obore reálnych čísel.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre každé $x > 1$. Ak použijeme pravidlá o logaritmoch a ekvivalentné úpravy v rovniciach, dostaneme: $\log(x-1)^2 = \log \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$, alebo $\log(x-1)^2 = \log x^2$, z toho $(x-1)^2 = x^2$, čiže $x^2 - 2x + 1 = x^2$, teda $x = \dfrac{1}{2}$.
Ale číslo $\dfrac{1}{2} < 1$, teda nie je riešením danej rovnice, lebo rovnica je definovaná iba pre $x > 1$. Teda množina riešení danej rovnice je prázdna.

Príklad 7. Riešte rovnicu $x^{\log x - 1} = 100$ v obore reálnych čísel.

Riešenie: Rovnica je definovaná pre každé $x > 0$. Logaritmujeme danú rovnicu pri základe $a = 10$ a upravíme obe strany rovnice: $(\log x - 1).\log x = 2$, z čoho dostaneme $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$ alebo
$(\log x - 2)(\log x + 1) = 0$, toto platí práve vtedy, ak $\log x - 2 = 0$ alebo $\log x + 1 = 0$, čiže $x = 10^2 = 100$, $x = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$.
Urobíme skúšku správnosti dosadením do danej rovnice:

$$L = 100^{\log 100 - 1} = 100^{2-1} = 100 = P,$$

$$L = \left(\frac{1}{10}\right)^{\log \frac{1}{10} - 1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1-1} = (10^{-1})^{-2} = 10^2 = 100 = P.$$

Množina riešení danej rovnice je $K = \left\{100, \dfrac{1}{10}\right\}$.

7.1 Cvičenia

1. Vypočítajte logaritmy daných čísel pri daných základoch: a) $\log_3 \sqrt{3}$, b) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{27}$,
   c) $\log_4 \dfrac{1}{64}$, d) $\log_5 0,008$, e) $\log_{\sqrt{7}} 49$, f) $\log_{16} 2$.

2. Vypočítajte číslo x, ak a) $\log_2 x = -3$, b) $\log_4 x = -\dfrac{1}{2}$, c) $\log_9 x = -\dfrac{1}{2}$,
   d) $\log_{\frac{1}{3}} x = 0$, e) $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$, f) $\log_{\sqrt{3}} x = -4$.

3. Vypočítajte základ z, aby platilo: a) $\log_z \dfrac{1}{4} = -2$, b) $\log_z 100 = 2$,
   c) $\log_z 1 = 0$, d) $\log_z 8 = \dfrac{3}{2}$, e) $\log_z \dfrac{1}{64} = -3$, f) $\log_z 3 = -1$.

4. Ak a, b, c, x, y sú kladné čísla, logaritmujte:
   a) $v = \dfrac{a^4 b^2 c^3}{2x^5 y}$, b) $v = \sqrt{\dfrac{a^3 b}{c^5}}$, c) $v = \dfrac{a\sqrt[3]{b^2}}{b\sqrt{a^3}}$.

5. Vypočítajte x, ak a) $\log x = \dfrac{1}{3}\left(2\log a - 2\log b + \dfrac{1}{2}\log c\right)$,
   b) $\log x = \dfrac{1}{3}\log(a+b) - \dfrac{1}{3}\log(a-b) + 3\log a - 3\log b$,
   c) $\log x = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{2}(\log 2 - \log 3) + \dfrac{2}{3}(\log 2 + \log 3)\right]$,
   d) $\log x = \dfrac{1}{2}\left[\log(b+10) - \dfrac{1}{2}\log(b-1)\right]$.

6. Nájdite definičný obor funkcie danej rovnicou:
   a) $y = 1 + \ln \dfrac{1}{x+2}$, b) $y = \dfrac{1}{\log x}$, c) $y = \log \dfrac{x-2}{x+1}$, d) $y = \dfrac{1}{3 - \log_3(x-3)}$,

e) $y = \log(\log x)$, f) $y = \log(x^2 - 5x + 6)$, g) $y = \log(x^2 + x + 1)$.

7. Nájdite definičný obor a nakreslite graf funkcie: a) $y = 4^{-x}$, b) $y = \ln(x + l)$.

8. Zistite, či je funkcia párna alebo nepárna: a) $f(x) = \ln(1 - x^2)$, b) $f(x) = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$.

9. Zistite, či sú dané funkcie rýdzo monotónne: a) $f(x) = \ln(x - 3)$, b) $f(x) = 2^{4-x}$.

10. Pre ktoré číslo c je funkcia $f(x) = \left(\dfrac{c-1}{c+1}\right)^x$ rastúca?

11. Ukážte, že daná funkcia je jednojednoznačná, nájdite k nej inverznú funkciu a nakreslite grafy oboch funkcií.

    a) $f : y = 1 - \ln x$, b) $f : y = \log(2 - x)$, c) $f : y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 1$, d) $f : y = 3 - e^x$.

12. Riešte rovnice v obore reálnych čísel: a) $3^x = 81$, b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 64$,

    c) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^8$, d) $3^3 . 27^{x-2} = 81^{x+3}$, e) $5^x + 5^{x-1} = 750$, f) $2^x . 3^{x+1} = 18$,

    g) $\dfrac{1}{5^{2x-4}} = 125$, h) $2^x . 5^x = 0,1(10^{x-1})^5$, i) $3^{2x} - 3^x = 6$,

    j) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$, k) $4^{12-3x-x^2} = 16$, l) $4^{\sqrt{x+1}} = 64.2^{\sqrt{x+1}}$,

    m) $5 . 2^{x+2} - 6 . 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 . 2^{x+1}$, n) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x . \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{\log 4}{\log 8}$,

    o) $2^{4x+1} + 8 = 17 . 2^{2x}$.

13. Riešte rovnice v obore reálnych čísel: a) $\log x = 2 - \log 5$, b) $\log \dfrac{1+x}{1-x} = 2$,

    c) $\log^2 x - 2\log x - 8 = 0$, d) $\log(x - 3) + \log(x + 3) = 2\log(3 - x)$,

    e) $\log 2 + \dfrac{1}{2}\log(x + 2) = 1$, f) $\dfrac{2 + \log x}{2 - \log x} = 3$, g) $\dfrac{\log(x + 3)}{1 + \log x} = 1$,

    h) $\log^2 x - 6\log x + 5 = 0$, i) $\log(x + 2) - \log(x - 1) = 2 - \log 4$,

    j) $\log(x + 3) + \log(x - 3) = \log(x + 11)$, k) $1 + \log x^3 = \dfrac{10}{\log x}$,

    l) $\log_{x-1} 9 = 2 + \log_{x-1} 3$, m) $\dfrac{2\log x}{\log(5x - 4)} = 1$, n) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)}$.

14. Načrtnite grafy funkcií: a) $y = 2^x$, b) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, c) $y = \log_3 x$, d) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{2}$, b) -6, c) -3, d) -3, e) 4, f) $\frac{1}{4}$,

2. a) $\frac{1}{8}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{3}$, d) 1, e) 5, f) $\frac{1}{9}$,

3. a) 2, b) 10, c) $z > 0,\ z \neq 1$, d) 4, e) 4, f) $\frac{1}{3}$,

4. a) $4\log a + 2\log b + 3\log c - \log 2 - 5\log x - \log y$, b) $\frac{3}{2}\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{5}{2}\log c$,
c) $-\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{3}\log b$,

5. a) $\sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt{c}}{b^2}},\ a, b, c > 0$, b) $\frac{a^3}{b^3}\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}},\ b > 0,\ a > b$, c) $2^{\frac{7}{18}}.3^{\frac{1}{18}}$,
d) $\sqrt{\frac{b+10}{\sqrt{b-1}}},\ b > 1$,

6. a) $(-2, \infty)$, b) $(0, 1) \cup (1, \infty)$, c) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, d) $(3, 30) \cup (30, \infty)$,
e) $(1, \infty)$, f) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$, g) $(-\infty, \infty)$,

7. a) $(-\infty, \infty)$, b) $(-1, \infty)$,

8. a) párna, b) nepárna,

9. a) rastúca, b) klesajúca,

10. $c \in (-\infty, -1)$,

11. a) $f^{-1} : y = \left(\frac{1}{e}\right)^{x-1}$, $D(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$, $H(f^{-1}) = (0, \infty)$,
b) $f^{-1} : y = 2 - 10^x$, $D(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$, $H(f^{-1}) = (-\infty, 2)$,
c) $f^{-1} : y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$, $D(f^{-1}) = (1, \infty)$, $H(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$,
d) $f^{-1} : y = \ln(3 - x)$, $D(f^{-1}) = (-\infty, 3)$, $H(f^{-1}) = (-\infty, \infty)$,

12. a) $K = \{4\}$, b) $K = \{-6\}$, c) $K = \{-4\}$, d) $K = \{-15\}$, e) $K = \{4\}$,
f) $K = \{1\}$, g) $K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, h) $K = \left\{\frac{3}{2}\right\}$, i) $K = \{1\}$, j) $K = \{3\}$,
k) $K = \{-5, 2\}$, l) $K = \{35\}$, m) $K = \{-4\}$, n) $K = \{2\}$,
o) $K = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$,

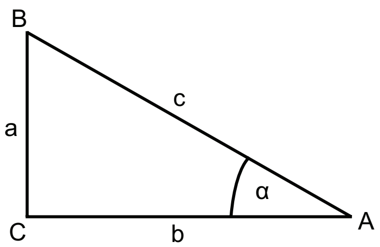
13. a) $K = \{20\}$, b) $K = \left\{\frac{99}{101}\right\}$, c) $K = \{10^{-2}, 10^4\}$, d) $K = \emptyset$, e) $K = \{23\}$,
f) $K = \{10\}$, g) $K = \left\{\frac{1}{3}\right\}$, h) $K = \{10, 10^5\}$, i) $K = \left\{\frac{9}{8}\right\}$, j) $K = \{5\}$,
k) $K = \left\{10^{-2}, 10^{\frac{5}{3}}\right\}$, l) $K = \{1 + \sqrt{3}\}$, m) $K = \{4\}$, n) $K = \{0\}$,

14. grafický výstup.

8

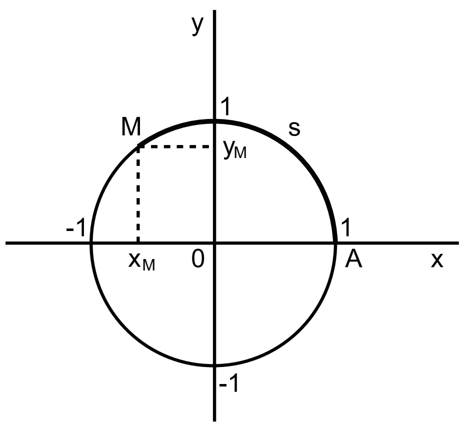
GONIOMETRIA

Goniometrické funkcie v pravouhlom trojuholníku ABC s ostrým uhlom α sú definované takto: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\operatorname{cotg}\,\alpha = \dfrac{a}{c}$, kde a je veľkosť protiľahlej odvesny k uhlu α, b je veľkosť priľahlej odvesny k uhlu α, c je prepona (obr. 8.1).



Obr. 8.1

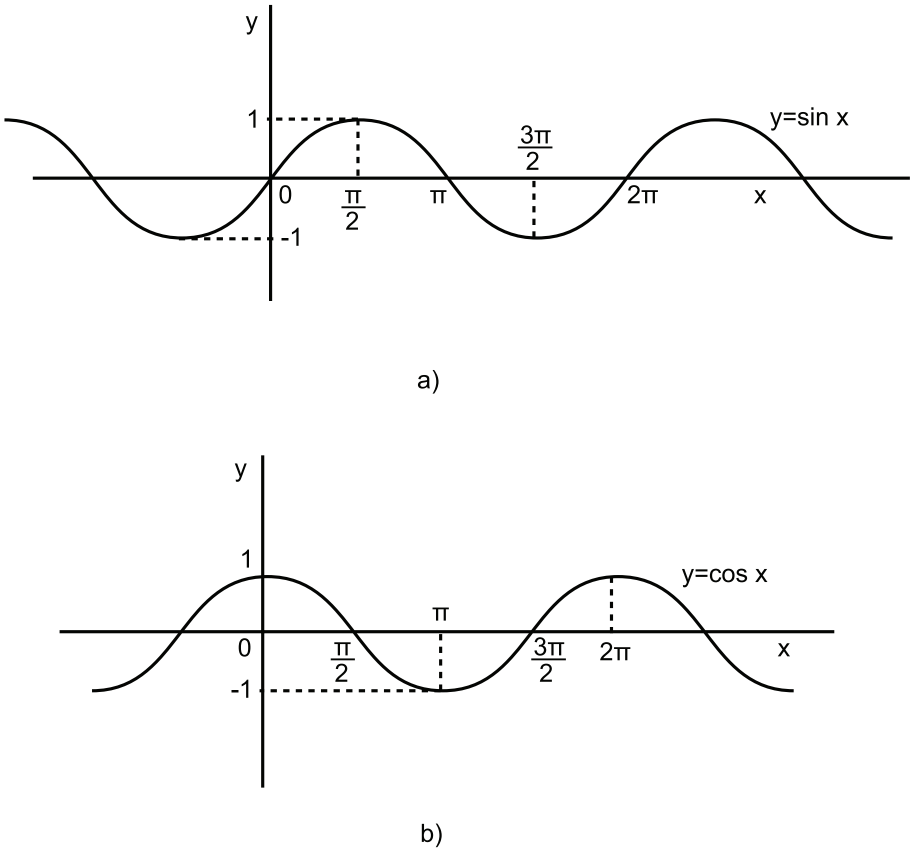
Pre každé reálne číslo x existuje práve jedno celé číslo k a práve jedno reálne číslo $s \in \langle 0, 2\pi)$ tak, že platí: $x = k2\pi + s$. Každému reálnemu číslu x priradíme na jednotkovej kružnici práve jeden bod $M = [x_M, y_M]$, ktorý dostaneme tak, že z bodu $A = [1, 0]$ nanesieme na jednotkovú kružnicu oblúk dĺžky s proti smeru hodinových ručičiek (obr. 8.2).



Obr. 8.2

Funkcia sínus, $y = \sin x$ (obr. 8.3a) priraďuje každému reálnemu číslu x y-ovú súradnicu y_M bodu M, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.

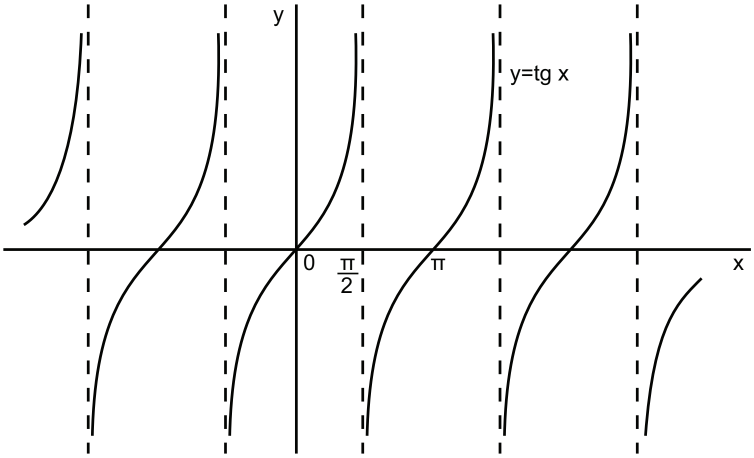
Funkcia kosínus, $y = \cos x$ (obr. 8.3b) priraďuje každému reálnemu číslu x x-ovú súradnicu x_M bodu M, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.



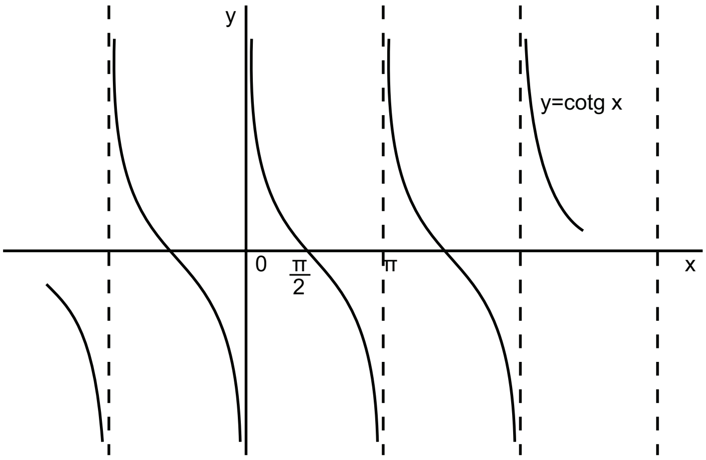
Obr. 8.3

Funkcia tangens, $y = \mathrm{tg}\ x$ (obr. 8.4a) je daná rovnicou $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pre každé $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$, $D(f) = \left\{x \in R: \ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z\right\}$, $H(f) = R$.

Funkcia kotangens, $y = \mathrm{cotg}\ x$ (obr. 8.4b) je daná rovnicou $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ pre každé $x \neq k\pi$, kde $k \in Z$, $D(f) = \{x \in R: \ x \neq k\pi,\ k \in Z\}$, $H(f) = R$.



a)



b)

Obr. 8.4

V tabuľke uvádzame hodnoty goniometrických funkcií v niektorých bodoch intervalu $\langle 0, 2\pi)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$
$\mathrm{cotg}\ x$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-$	0

Typickou vlastnosťou funkcií sínus a kosínus je ich periodičnosť. Z definície vyplýva, že ich základná perióda je 2π. To znamená, že pre každé $k \in Z$ a každé $x \in R$ platí:

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + k2\pi) = \cos x.$$

Funkcia sínus je nepárna, t. j. platí:

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

funkcia kosínus je párna, teda

$$\cos(-x) = \cos x.$$

Z vlastností funkcií sínus a kosínus a z definície funkcií tangens a kotangens vyplýva, že sú tiež periodické, pričom ich základná perióda je π a pre každé $k \in Z$ a

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{platí:} \quad \mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}\ x,$$

$$x \neq k\pi \quad \text{platí:} \quad \mathrm{cotg}(x + k\pi) = \mathrm{cotg}\ x.$$

Funkcie tangens a kotangens sú nepárne, a preto

$$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\ x \quad \text{a} \quad \mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}\ x.$$

Pre ľubovoľné reálne čísla x, y platí:

$$\sin(x \pm y) = \sin x . \cos y \pm \sin y . \cos x, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x . \cos y \mp \sin x . \sin y,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - sin^2 x, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Nech a, b, c sú veľkosti strán ľubovoľného trojuholníka ABC a α $(\beta,\ \gamma)$ je uhol tohto trojuholníka ležiaci oproti strane a $(b,\ c)$, potom platí:

1. **Kosínusová veta:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $(b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma)$. Ak trojuholník je pravouhlý a $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, dostaneme Pytagorovu vetu $c^2 = a^2 + b^2$.
2. **Sínusová veta:** $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$.

Príklad 1. Vypočítajte $\sin x$, $\mathrm{tg}\ x$, $\mathrm{cotg}\ x$ ak $\cos x = -\dfrac{4}{5}$, pričom $\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$.

Riešenie: Zo vzťahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ vyplýva $|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \dfrac{16}{25}} = \dfrac{3}{5}$. Pretože x je z tretieho kvadrantu, platí

$$\sin x = -\frac{3}{5}. \text{ Teda } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \text{ a } \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{4}{3}.$$

Príklad 2. Riešte rovnicu $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

Riešenie: Danú rovnicu riešime ako kvadratickú rovnicu pre $\sin x$.

$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}, \quad \text{alebo} \quad \sin x = -2$$

Funkcia $\sin x$ nemôže mať hodnotu -2, rovnica $\sin x = -2$ nemá riešenie.
Z rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$ dostaneme $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$.

Príklad 3. V trojuholníku ABC poznáme $a = 16,\ b = 6,\ \gamma = 60°$. Vypočítajte ostatné základné prvky trojuholníka.

Riešenie: Z kosínusovej vety $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 196,\ c = 14$.
Zo sínusovej vety platí: $\sin\beta : \sin\gamma = b : c$ teda

$$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{2}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \doteq 0,372, \quad \beta \doteq 21°50',\ \alpha+\beta+\gamma = 180°, \text{ teda } \alpha \doteq 98°10'.$$

8.1 Cvičenia

1. Ak viete, že $\sin x = \frac{3}{5},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ nájdite $\cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x$.
2. Vypočítajte $\sin 2x$, ak viete, že $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Ak $\sin x = \frac{3}{5},\ \cos x > 0$ vypočítajte $\sin 2x,\ \cos 2x,\ \operatorname{tg} 2x$.
4. Vypočítajte $\cos 2x$, ak $\cos x = \frac{1}{3}$.
5. Načrtnite grafy funkcií:
   a) $y = \cos 2x$, b) $y = \sin\frac{x}{2}$, c) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
   d) $y = \cos(x - \pi)$, e) $y = 2\operatorname{tg} x$, f) $y = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$.
6. Nájdite všetky reálne čísla, pre ktoré platí:
   a) $\sin x = \frac{1}{2}$, b) $\cos x = -\frac{1}{2}$, c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
   d) $\operatorname{tg} x = 1$, e) $\operatorname{cotg} x = 1$, f) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.
   Načrtnite grafy funkcií a vyznačte niektoré nájdené hodnoty.

7. Nájdite obor definície funkcie:
a) $y = \dfrac{1}{\cos x}$, b) $y = \sqrt{\sin x}$, c) $y = \dfrac{\mathrm{tg}\ x}{1 - \mathrm{tg}\ x}$,
d) $y = \ln \cos x$, e) $y = \dfrac{\sin x}{4\cos^2 x - 1}$, f) $y = \dfrac{1 - \sin x}{\mathrm{cotg}\ x}$.

8. Vypočítajte bez tabuliek hodnotu výrazu $\sin 330^\circ - \cos 240^\circ$.

9. Pre prípustné hodnoty x upravte:
$$\text{a) } \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}, \qquad \text{b) } \frac{1}{1 - \sin x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{1 + \sin x}, \qquad \text{c) } \frac{1 - \mathrm{tg}^2\ x}{\cos 2x}.$$

10. Dokážte, že pre prípustné hodnoty platí:
$$\text{a) } (1 + \mathrm{tg}\ x)^2 + (1 - \mathrm{tg}\ x)^2 = \frac{2}{\cos^2 x}, \qquad \text{b) } \frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin^2 x} = 0.$$

11. Dokážte, že platí: $\sin(30^\circ + x) + \cos(60^\circ + x) = \cos x$.

12. Nájdite všetky uhly, ktorých veľkosti vyhovujú rovnici $\sin(2x + 15^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

13. Zjednodušte: $\cos(30^\circ - x) - \cos(30^\circ + x)$.

14. Riešte rovnicu:
a) $3\sin x + 1 = \sin x$, b) $4\cos x - \sqrt{2} = 2\cos x$, c) $\sin^2 x - \sin x = 0$,
d) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$, e) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, f) $\mathrm{tg}^2\ x - 1 = 0$,
g) $\mathrm{cotg}^2\ x - 3 = 0$, h) $\sin^2 x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - 1 = 0$.

15. Riešte rovnicu:
$$\text{a) } \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x.\cos x = 0, \qquad \text{b) } 2\sin^2 x = \sin x + 1, \qquad \text{c) } \cos x + \cos 2x = 0.$$

16. Vypočítajte veľkosť najväčšieho vnútorného uhla trojuholníka, ak jeho strany sú $a = 13,\ b = 7,\ c = 8$.

17. Vypočítajte v trojuholníku strany $a,\ b$, ak viete, že $c = 55,\ \alpha = 30^\circ,\ \beta = 45^\circ$.

18. Pomocou kosínusovej vety rozhodnite, či trojuholník so stranami $a = 3,\ b = 4,\ c = 6$ má tupý uhol.

19. Pre veľkosti uhlov trojuholníka platí $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$ a strana oproti uhlu α má dĺžku $\sqrt{2}$. Určte veľkosti uhlov trojuholníka a dĺžky strán $b,\ c$.

20. Určte stranu a, uhly α, β v trojuholníku ABC, ak $b = 25,\ c = 25\sqrt{2},\ \gamma = 45^\circ$.

21. Vypočítajte plošný obsah ostrouhlého trojuholníka, ktorého strany majú dĺžku $a = 5\sqrt{2},\ b = 5\sqrt{3}$ a uhol $\alpha = 45^\circ$.

Výsledky

1. $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$,
2. 1, -1,
3. $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{7}$,
4. $-\frac{7}{9}$,
5. grafický výstup,
6. a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$, b) $x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$,
c) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$, d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$,
e) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$, f) $x = \frac{2}{3}\pi + k\pi,\ k \in Z$,
7. a) $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$, b) $x \in \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle,\ k \in Z$,
c) $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ a $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$, d) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in Z$,
e) $x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$ a $x \neq \frac{2}{3}\pi + k\pi,\ k \in Z$, f) $x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$,
8. 0,
9. a) $2\mathrm{tg}x$, b) $\frac{\mathrm{tg}x}{\cos x}$, c) $\frac{1}{\cos^2 x}$,
10. a) pre $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$ platí, b) pre $x \neq k\pi$ platí,
11. Návod: použite súčtové vzorce,
12. $x_1 = 105^\circ + k180^\circ,\ x_2 = 150^\circ + k180^\circ,\ k \in Z$,
13. $\sin x$,
14. a) $x_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$, b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$,
c) $x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$, d) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$,
e) $x_1 = 2k\pi,\ x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ x_3 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$,
f) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ x_2 = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in Z$, g) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ x_2 = \frac{5}{6}\pi + k\pi,\ k \in Z$,
h) $x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, x_3 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$,
15. a) $x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$,
b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$,

c) $x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x_2 = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ x_3 = \pi + 2k\pi,\ k \in Z,$

16. 120°,

17. $a \doteq 28{,}47,\ b \doteq 40{,}26,$

18. $\cos\gamma = -\dfrac{11}{24} \quad \Rightarrow \quad$ trojuholník má tupý uhol,

19. $\alpha = 45^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 75^\circ,\ b = \sqrt{3},\ c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1),$

20. $\alpha = 105^\circ,\ \beta = 30^\circ,\ a \doteq 48{,}3,$

21. $P = \dfrac{25}{4}(3+\sqrt{3}).$

9

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

Mnohé matematické úlohy nemajú riešenie v množine reálnych čísel. Vieme napríklad, že v množine reálnych čísel nemá riešenie kvadratická rovnica s reálnymi koeficientmi, ktorej diskriminant je záporný. Najjednoduchšia rovnica, ktorá nemá riešenie v R je

$$x^2 + 1 = 0.$$

Preto bolo potrebné rozšíriť množinu reálnych čísel. Takouto množinou je množina komplexných čísel (ozn. C), ktorá je vybudovaná pomocou množiny reálnych čísel.
Každé komplexné číslo $z \in C$ môžeme vyjadriť v algebrickom tvare $z = a + bi$, kde a, b sú reálne čísla, i je imaginárna jednotka, pre ktorú platí $i^2 = -1$. Reálne číslo a sa nazýva **reálna časť**, reálne číslo b **imaginárna časť** komplexného číslo $a + bi$.
Komplexné čísla sa sčítajú, odčítajú a násobia ako dvojčleny. Pri násobení využívame:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in Z.$$

To znamená, že ak máme dve komplexné čísla $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, potom

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i \ , \qquad z_1 \, . \, z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i.$$

Komplexne združeným číslom k číslu $z = a + bi$ je číslo $\overline{z} = a - bi$. Platí: $z \, . \, \overline{z} = a^2 + b^2$ je reálne číslo.

Delenie komplexných čísel $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, kde $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \, . \, \overline{z_2}}{z_2 \, . \, \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

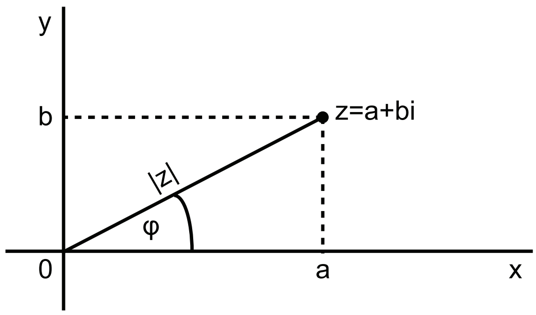
Znázornenie komplexných čísel
Každému komplexnému číslu $z = a + bi$, a, $b \in R$ môžeme jednoznačne priradiť bod so súradnicami $A = [a, b]$ v rovine, v ktorej je zvolený pravouhlý súradnicový systém so začiatkom $O = [0, 0]$. Pri znázorňovaní komplexných čísel os x nazývame reálnou osou a os y imaginárnou osou. Bod A je obrazom komplexného čísla z.

Absolútna hodnota komplexného čísla $z = a + bi$ je nezáporné reálne číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Zápis nenulového komplexného čísla $z = a + bi$ v tvare $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ nazývame

goniometrický tvar komplexného čísla. Reálne číslo φ sa nazýva amplitúda (argument) komplexného čísla z, pričom

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Číslo $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ nazývame hlavnou amplitúdou komplexného čísla z. Ak $z = 0$, potom $|z| = 0$, $\varphi = 0$ (obr. 9.1).



Obr. 9.1

Násobenie komplexných čísel v goniometrickom tvare
Ak $z_1, z_2 \in C$, $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, potom

$$z_1 \,.\, z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Moivreova veta
Pre každé $z \in C$, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in N$ platí

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Riešenie kvadratických rovníc v obore komplexných čísel
Kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, $c \in R$, $a \neq 0$ má riešenie v obore reálnych čísel len vtedy, keď diskriminant $D > 0$. Potom korene rovnice sú $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
V obore komplexných čísel existuje riešenie aj v prípade $D < 0$ a platí

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Teda kvadratická rovnica pre $D < 0$ má komplexne združené korene.

Príklad 1. Vypočítajte $\dfrac{3+i}{1-2i}$.

Riešenie: Čitateľa aj menovateľa vynásobíme komplexným číslom združeným k menovateľu, teda

$$\frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+i+6i+2i^2}{1-4i^2} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i.$$

Príklad 2. Napíšte goniometrický tvar komplexného čísla $z = 5i\dfrac{i-3}{2+i}$.

Riešenie: Najprv vypočítame

$$5i\frac{i-3}{2+i} = 5i\frac{(i-3)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 5i\frac{-5+5i}{5} = -5-5i.$$

Z definície absolútnej hodnoty komplexného čísla vyplýva

$$|z| = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Podľa definície amplitúdy komplexného čísla vypočítame φ tak, aby platilo

$$\cos\varphi = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

z čoho $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$, teda

$$5i\frac{i-3}{2+i} = -5-5i = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Príklad 3. Vypočítajte $(\sqrt{3}-i)^{14}$.

Riešenie: $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2}$, z toho $\varphi = 330° = \dfrac{11\pi}{6}$.

Podľa Moivreovej vety platí:

$$(\sqrt{3}-i)^{14} = 2^{14}\left(\cos 14\frac{11\pi}{6} + i\sin 14\frac{11\pi}{6}\right) = 2^{14}\left[\cos\left(24\pi+\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(24\pi+\frac{5\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2^{14}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2^{14}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{13}(1-i\sqrt{3}).$$

Príklad 4. Riešte rovnice a) $5x^2-6x+2=0$, b) $x^2+4=0$, c) $x^3-8=0$.

Riešenie:

a) Pretože diskriminant kvadratickej rovnice $5x^2-6x+2=0$ je $D=-4<0$, použijeme vzorec $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a}$ a dostaneme $x_{1,2} = \dfrac{6\pm i\sqrt{|-4|}}{10} = \dfrac{6\pm 2i}{10} = \dfrac{3\pm i}{5} = = \dfrac{3}{5}\pm\dfrac{1}{5}i$.

Korene rovnice sú komplexne združené čísla $x_1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i,\ x_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i.$

b) Z rovnice $x^2 + 4 = 0$ vyplýva $x^2 = -4$, z čoho $x_{1,2} = \pm i\sqrt{|-4|} = \pm 2i.$

c) Výraz $x^3 - 8$ rozložíme podľa vzorca $a^3 - b^3$. Teda $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$.
Potom platí: $x^3 - 8 = 0$ práve vtedy, ak $x - 2 = 0$ alebo $x^2 + 2x + 4 = 0$.
Ak $x - 2 = 0$, tak $x = 2$,
ak $x^2 + 2x + 4 = 0$, tak $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$
Koreňom rovnice je reálne číslo $x = 2$ a komplexne združené čísla
$x_2 = -1 + i\sqrt{3},\ x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$

9.1 Cvičenia

1. $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 3 + i$. Vypočítajte $z_1 + z_2,\ z_1 \,.\, z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$.
2. Vypočítajte $\left(\frac{i-1}{i} + \frac{i}{i-1}\right)(4i - 6) - (i-1)2i.$
3. Vypočítajte $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} \cdot \frac{3-i}{1+3i}.$
4. Pre aké reálne čísla $x,\ y$ platí $\frac{x - 2 + (y-3)i}{1+i} = 1 - 3i.$
5. Dokážte, že platí $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta).$
6. Vyjadrite v goniometrickom tvare komplexné čísla, nájdite ich obrazy v rovine komplexných čísel a) i, b) $-1 + i\sqrt{3}$, c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, d) -2.
7. Vypočítajte súčin komplexných čísel $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),\ z_2 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.
Výsledok vyjadrite v algebrickom tvare.
8. Vypočítajte $(1+i)^{10}$.
9. Vypočítajte $(1 - i\sqrt{3})^{15}$.
10. Riešte rovnice: a) $5x^2 - 4x + 6 = 0$, b) $2x^2 + 32 = 0$, c) $x^3 - 1 = 0$,
d) $x^4 - 81 = 0$.

Výsledky

1. $4 - i,\ 5 - 5i,\ \frac{1}{10} - i\frac{7}{10},$

2. $-9+5i$,

3. i,

4. $x=6,\ y=1$,

5. Návod: použite operáciu delenia komplexných čísel a súčtové vzorce pre goniometrické funkcie,

6. a) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, b) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, c) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,
   d) $(\cos\pi+i\sin\pi)$,

7. $-\sqrt{3}+i$,

8. $32i$,

9. -2^{15},

10. a) $x_{1,2}=\frac{2}{5}\pm i\frac{6}{5}$, b) $x_{1,2}=\pm 4i$, c) $x_1=1,\ x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
    d) $x_{1,2}=\pm 3,\ x_{3,4}=\pm 3i$.

10

KOMBINATORIKA

Pre každé nezáporné celé číslo n znakom $n!$ (čítame n faktoriál) rozumieme číslo, ktoré má tieto vlastnosti:

1. $0! = 1$,
2. Ak $n > 0$, tak $\quad n! = n(n-1)!$.

Symbol $\binom{n}{k}$ (čítame n nad k), kde $n,\ k$ sú celé nezáporné čísla, $k \leq n$, nazývame **kombinačným číslom**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Pre kombinačné čísla platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Binomická veta
Pre všetky reálne čísla $a,\ b$ a celé nezáporné číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

Nech $k,\ n$ sú prirodzené čísla, M je konečná množina, ktorá má n prvkov. Každá usporiadaná k-tica zostavená z prvkov množiny M sa nazýva **variácia k-tej triedy z n prvkov množiny M.** Definícia variácií pripúšťa v jednotlivých usporiadaných k-ticiach opakovanie prvkov množiny M, takto definované variácie nazývame niekedy **variácie s opakovaním**. Počet variácií k-tej triedy z n prvkov s opakovaním pre všetky prirodzené čísla $k,\ n$ je $V'(k,n) = n^k$.

Nech $k,\ n$ sú prirodzené čísla, $k \leq n$. M je konečná množina, ktorá má n prvkov. Každá usporiadaná k-tica zostavená z prvkov množiny M tak, že sa v nej ani jeden prvok neopakuje, sa nazýva **variácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania**. Počet variácií k-tej triedy z n prvkov bez opakovania pre všetky prirodzené čísla $k,\ n,\ k \leq n$ je $V(k,n) = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Variácie n-tej triedy z n prvkov bez opakovania nazývame **permutácie**. Počet všetkých permutácií z n prvkov pre všetky prirodzené čísla n je $P(n) = n!$.

Nech k, n sú nezáporné celé čísla $k \leq n$. M je konečná množina, ktorá má n prvkov. Každá podmnožina tejto množiny, ktorá má k prvkov, sa nazýva **kombinácia k-tej triedy z n prvkov**. Kombinácia k-tej triedy z n prvkov je taká skupina prvkov množiny M, že sa v nej ani jeden prvok neopakuje, pričom nezáleží na poradí prvkov v skupine. Počet kombinácií k-tej triedy z n prvkov, kde n, k sú celé nezáporné čísla, $k \leq n$ je $C(k,n) = \binom{n}{k}$.

Príklad 1. Vypočítajte $\dfrac{7! + 5!}{5!}$.

Riešenie:

$$7! = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 7\,.\,6\,.\,5!, \qquad \frac{7! + 5!}{5!} = \frac{7\,.\,6\,.\,5! + 5!}{5!} = \frac{5!(42+1)}{5!} = 43.$$

Príklad 2. Upravte $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n-1)!}$.

Riešenie: Aby výraz mal zmysel, musí platiť $n \geq 1$. Podľa definície faktoriálu

$$\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{n(n-1)!} - \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n + 1 - n = 1.$$

Príklad 3. Riešte v Z rovnicu $\dbinom{x-1}{x-2} + \dbinom{x-2}{x-4} = 4$.

Riešenie: Rovnica má zmysel pre $x \in N$ a $x \geq 4$. Využijeme definíciu kombinačného čísla, potom zjednodušíme zlomky:

$$\frac{(x-1)!}{(x-2)!(x-1-x+2)!} + \frac{(x-2)!}{(x-4)!(x-2-x+4)!} = 4$$

$$\frac{(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)!}{(x-4)!2} = 4$$

$$x - 1 + \frac{(x-2)(x-3)}{2} = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

teda $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Podmienkam úlohy vyhovuje len číslo $x_1 = 4$.

Príklad 4. Vypočítajte desiaty člen mnohočlena, ktorý vznikne pri výpočte $(1-i)^{12}$ použitím binomickej vety.

Riešenie: Binomickú vetu môžme použiť aj v prípade, že a, b sú komplexné čísla. Desiaty člen je $\binom{12}{9}(-i)^9 = \binom{12}{3}(-i)^8(-i) = -220i$.

Príklad 5. Koľko 5-cifemých čísel možno napísať pomocou číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ak sa žiadne z nich v čísle nemá opakovať?

Riešenie: Z definície variácie bez opakovania je zrejmé, že počet číslic sa rovná počtu variácií 5-tej triedy zo 7 prvkov bez opakovania. Použijeme vzorec

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad \text{pre} \quad n=7,\ k=5,$$

teda

$$V(5,7) = \frac{7!}{(7-5)!} = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3 = 2\,520.$$

Príklad 6. Zámka na heslo má na spoločnej osi 5 kotúčov. Každý z nich je rozdelený na 8 výsekov označených písmenami a, b, c, d, e, f. Zámka sa otvorí, ak každý kotúč zaujme jednu určitú polohu označenú písmenom vzhľadom k telesu zámky. Koľko hesiel má možnosť voliť majiteľ zámky?

Riešenie: Heslo je usporiadaná 5-tica prvkov zo 6 prvkov, pričom prvky v 5-tici sa môžu opakovať. Sú to teda variácie 5-tej triedy zo 6 prvkov s opakovaním. Použijeme vzorec

$$V'(k,n) = n^k, \quad \text{pre} \quad n=6,\ k=5, \quad \text{vypočítame} \quad V'(5,6) = 6^5 = 7\,776.$$

Príklad 7. Koľko trojuholníkov je určených siedmimi bodmi v rovine, ak žiadne tri z nich neležia na jednej priamke?

Riešenie: Trojuholník je určený troma rôznymi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke. Z množiny 7 prvkov tvoríme trojice rôznych prvkov, v ktorých nezáleží na poradí, sú to kombinácie tretej triedy zo siedmich prvkov. Použijeme vzorec

$$C(k,n) = \binom{n}{k}, \quad \text{kde} \quad n=7,\ k=3, \quad \text{teda} \quad C(3,7) = \binom{7}{3} = 35.$$

Príklad 8. Ak sa zmenší počet prvkov o dva, zmenší sa počet permutácií dvadsaťkrát. Určte pôvodný počet prvkov.

Riešenie: Počet permutácií $n-2$ prvkov je $P(n-2) = (n-2)!$. Teda platí rovnosť $(n-2)! = \dfrac{n!}{20}$, ak $n > 2$, $n \in N$, úpravou dostaneme $n^2 - n - 20 = 0$, teda $n_1 = 5$, $n_2 = -4$. Danej úlohe vyhovuje len číslo $n = 5$.

Príklad 9. Koľkými spôsobmi možno usporiadať 6 stúh rôznych farieb, ak na prvom mieste má byť stuha s určitou zvolenou farbou?

Riešenie: Pri usporiadaní stúh tvoríme skupiny po 6 prvkoch, pričom 1. prvok v skupine je pevný, 2. až 6. prvok môže mať všetky možné poradia, sú to permutácie piatich prvkov.

$$P(5) = 5! = 120.$$

10.1 Cvičenia

1. Upravte: $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{(n-2)!}$.
2. Riešte v Z rovnicu $\dbinom{x}{2} - 2\dbinom{x-1}{x-2} + \dbinom{x}{0} = 0$.
3. Vypočítajte: $\left(\dfrac{1}{2} + v\right)^5 + \left(\dfrac{1}{2} - v\right)^5$.
4. Vypočítajte: $(1+i)^8 - (2i)^4$.
5. Zistite tretí člen mnohočlena, ktorý vznikne pri výpočte $(a^5 - 2b^4)^4$ použitím binomickej vety.
6. Vypočítajte tretí reálny člen mnohočlena $(2 + i\sqrt{3})^9$ použitím binomickej vety.
7. Presvedčte sa, že číslo $11^{10} - 1$ je deliteľné číslom 100.
8. Koľkými spôsobmi možno v triede s 25 žiakmi zvoliť trojčlenný výbor: predsedu, pokladníka a referenta?
9. Dané sú číslice 1, 2, 3. Koľko rôznych a) dvojciferných, b) päťciferných čísel možno pomocou nich napísať?
10. Trezor sa otvára po správnom zoskupení piatich písmen v otvore kotúča, na ktorom je 12 písmen. Koľko je možných rôznych pokusov na otvorenie tohto trezoru?

11. Určte počet uhlopriečok v konvexnom n-uholníku.

12. V koľkých bodoch sa pretína 9 priamok v rovine, z ktorých 4 sú navzájom rovnobežné?

Výsledky:

1. $\dfrac{1-n^2}{n!}$,
2. $x_1 = 2,\ x_2 = 3$,
3. $\dfrac{1+40v^2+80v^4}{16}$,
4. 0,
5. $24a^{10}b^8$,
6. 36 288,
7. $11 = 10 + 1$, použite binomickú vetu,
8. 13 800,
9. a) 9, b) 243,
10. 248 832,
11. $\dfrac{n(n-3)}{2}$,
12. 30.

11

POSTUPNOSŤ A LIMITA POSTUPNOSTI

Postupnosťou nazývame každú funkciu, ktorej definičným oborom je množina prirodzených čísel. Hodnoty tejto funkcie nazývame členmi postupnosti a označujeme $f(n) = a_n$. Ak $a_n \in R$, hovoríme o číselnej postupnosti. Grafom číselnej postupnosti je množina izolovaných bodov $A_n = [n, a_n]$.

Postupnosť je **ohraničená zdola (zhora)**, ak existuje $d \in R$ ($h \in R$), že pre každé $n \in N$ platí $a_n \geq d$ ($a_n \leq h$). Ak je postupnosť ohraničená zhora aj zdola, hovoríme, že je **ohraničená**.

Postupnosť je **rastúca (klesjúca)**, ak pre každé $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$).

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **aritmetická**, ak existuje také číslo d (diferencia), že pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+1} = a_n + d$. Pre n-tý člen aritmetickej postupnosti platí $a_n = a_1 + (n-1)d$. Pre súčet s_n prvých n členov aritmetickej postupnosti platí $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **geometrická**, ak existuje také číslo q (kvocient), že pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+1} = a_n q$. Pre n-tý člen geometrickej postupnosti platí $a_n = a_1 q^{n-1}$. Pre súčet s_n prvých n členov geometrickej postupnosti platí $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, ak $q \neq 1$, $s_n = n a_1$, ak $q = 1$.

Príklad 1. Napíšte prvých päť členov postupnosti $\left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Aké vlastnosti má daná postupnosť?

Riešenie: Zo zadania postupnosti vidíme, že predpis pre n-tý člen je $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Prvých päť členov získame tak, že postupne za n dosadíme čísla 1, 2, ..., 5. Potom

$$a_1 = \frac{1}{2\,.\,1 - 1} = 1, \quad a_2 = \frac{2}{2\,.\,2 - 1} = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{2\,.\,3 - 1} = \frac{3}{5},$$

$$a_4 = \frac{4}{2\,.\,4 - 1} = \frac{4}{7}, \quad a_5 = \frac{5}{2\,.\,5 - 1} = \frac{5}{9}$$

Ľahko sa odhadne, že

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$$

Na základe tohto môžeme vysloviť hypotézu, že postupnosť je klesajúca. Ukážme to. Keďže

$$a_n > a_{n+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n - a_{n+1} > 0,$$

stačí ukázať splnenie druhej nerovnosti.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2n-1} - \frac{(n+1)}{2(n+1)-1} = \frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n(2n+1)-(n+1)(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2+n-2n^2-2n+n+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} > 0 \quad \text{pre každé} \quad n \in N$$

Teda, postupnosť je klesajúca. Z tejto vlasnosti však vyplýva, že pre každé n platí

$$a_1 \geq a_n, \quad \text{t.j} \quad 1 \geq a_n$$

z čoho vyplýva, že postupnosť je zhora ohraničená ($h = 1$). Pre každé $n \in N$ platí $2n - 1 > 0$, z čoho vyplýva, že aj $a_n = \dfrac{n}{2n-1} > 0$, teda postupnosť je ohraničená aj zdola ($d = 0$). Keďže postupnosť je ohraničená aj zdola aj zhora, je ohraničená.

Príklad 2. Napíšte prvých päť členov postupnosti $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Aké vlastnosti má daná postupnosť?

Riešenie: Vypočítajme prvých päť členov postupnosti.

$$a_1 = 1 + (-1)^1 = 0, \quad a_2 = 1 + (-1)^2 = 2, \quad a_3 = 1 + (-1)^3 = 0, \quad a_4 = 1 + (-1)^4 = 2,$$

$$a_5 = 1 + (-1)^5 = 0$$

Postupnosť nie je rastúca, pretože $a_2 > a_3$ a nie je klesajúca, lebo $a_1 < a_2$. Postupnosť je ohraničená, pre každé $n \in N$ platí

$$0 \leq a_n \leq 2$$

Príklad 3. V aritmetickej postupnosti $a_1 = 450$, $d = 24$, $a_n = 210$. Nájdite n a s_n.

Riešenie: Použijeme vzorce pre aritmetickú postupnosť $a_n = a_1 + (n-1)d$ a $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Dosadíme do vzorcov zadané hodnoty a dostaneme

$$210 = 450 + (n-1)24$$

$$24n = 264, \quad \text{z toho} \quad n = 11$$

$$\text{a} \quad s_n = \frac{11}{2}(450 + 210) = 3\,630.$$

Príklad 4. Medzi čísla 1 a 25 vložte toľko čísel, aby s danými číslami tvorili aritmetickú postupnosť so súčtom 117. Zistite vložené čísla a ich počet.

Riešenie: Zvolíme $a_1 = 1$, $a_n = 25$. Zo vzťahu pre s_n dostaneme $117 = \dfrac{n}{2}(1 + 25)$, teda $n = 9$. Zo vzorca $a_n = a_1 + (n-1)d$ vypočítame diferenciu d: $25 = 1 + 8d$, z čoho $d = 3$. Vložené čísla sú 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22.

Príklad 5. Železné rúry sa skladajú do vrstiev tak, že rúry hornej vrstvy zapadajú do medzier dolnej vrstvy. Do koľkých vrstiev sa zloží 75 rúr, ak vrchná vrstva má 3 rúry? Koľko rúr je v najspodnejšej vrstve?

Riešenie: V príklade máme dané $s_n = 75$, $a_1 = 3$, $d = 1$, treba vypočítať n. Pri riešení použijeme vzorec a_n a s_n aritmetickej postupnosti:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad \text{čiže} \quad a_n = 3 + n - 1,$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \quad \text{čiže} \quad 75 = \frac{n}{2}(3 + 3 + n - 1),$$

z čoho úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu pre neznámu n:

$$150 = n(n+5)$$

$$n^2 + 5n - 150 = 0$$

$$(n+15)(n-10) = 0.$$

Koreň $n_1 = -15$ nevyhovuje, $n_2 = 10$ vyhovuje podmienkam príkladu. Rúry sa zložia do desiatich vrstiev. V najspodnejšej vrstve je 12 rúr.

Príklad 6. V geometrickej postupnosti $a_1 = 6\,144$, $q = \dfrac{1}{2}$, $a_n = 48$. Zistite n a s_n.

Riešenie: Pri riešení použijeme vzorce a_n a s_n geometrickej postupnosti. Dosadením do a_n dostávame:

$$48 = 6\,144 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad \text{z čoho} \quad 2^{n-1} = \frac{6\,144}{48} = 2^7, \quad \text{teda} \quad n = 8.$$

Dosadením do s_n dostávame:

$$s_8 = 6\,144 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -12\,288 \left(\frac{1}{256} - 1\right) = 12\,240.$$

Teda $n = 8$ a $s_8 = 12\,240$.

Príklad 7. V geometrickej postupnosti $a_1 + a_5 = 51$, $a_2 + a_6 = 102$. Koľko členov tejto postupnosti treba zobrať, aby ich súčet bol 3 069?

Riešenie: Pomocou vzorca pre a_n geometrickej postupnosti vyjadríme v daných rovniciach $a_2 = a_1 q$, $a_5 = a_1 q^4$, $a_6 = a_1 q^5$. Dostaneme dve rovnice s neznámymi a_1 a q: $a_1(1 + q^4) = 51$, $a_1 q(1 + q^4) = 102$. Z prvej rovnice vyjadríme $a_1 = \dfrac{51}{1 + q^4}$ a dosadíme do druhej rovnice. Dostaneme $51q = 102$, teda $q = 2$ a $a_1 = 3$. Zo vzťahu pre s_n vyplýva $3\,069 = 3(2^n - 1)$, teda $2^n = 1\,024$ a $n = 10$. V danej postupnosti treba zobrať 10 členov, aby ich súčet bol 3 069.

11.1 Limita postupnosti

Hovoríme, že číslo a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$ alebo symbolicky

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0,\ \forall n > n_0 :\ |a_n - a| < \varepsilon$$

V tomto prípade hovoríme o vlastnej limite postupnosti.
Pomocou tejto definície sa dá dokázať:

1. Ak $a_n = c$ pre všetky $n \in N$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Limitu postupnosti počítame pomocou pravidiel:
ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tak platí $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \,.\, b_n) = a \,.\, b$,
ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, a pre všetky priridzené čísla n je $b_n \neq 0$ a $b \neq 0$, tak platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Príklad 8. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(1-n)}{(3n-2)(1-n^2)}$.

Riešenie: Postupnosť, ktorej limitu máme vypočítať, sa snažíme upraviť tak, aby sme v čitateli a v menovateli dostali postupnosti, ktoré majú limitu a aby limita menovateľa bola rôzna od nuly. Potom podľa pravidiel o výpočte limit, limitu vypočítame.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1-n)}{(3n-2)(1-n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+n^2}{-3n^3+2n^2+3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+\dfrac{1}{n}}{-3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-1) + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(-3) + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^3}} =$$

$$= \frac{-1+0}{-3 + \lim\limits_{n\to\infty} 2 . \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 3 . \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} . \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 2 . \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} . \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} . \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}} =$$

$$= \frac{-1}{-3+2.0+3.0-2.0} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

11.2 Cvičenia

1. Napíšte prvých päť členov postupnosti $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Je daná postupnosť rastúca alebo klesajúca? Je ohraničená?

2. Napíšte prvých päť členov postupnosti $\{1-2^n\}_{n=1}^{\infty}$. Je daná postupnosť rastúca alebo klesajúca? Je ohraničená?

3. Napíšte prvých päť členov postupnosti $\{\cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$. Je daná postupnosť rastúca alebo klesajúca? Je ohraničená?

4. V aritmetickej postupnosti $a_1 = 6,\ s_{10} = 195$. Nájdite a_{10} a d.

5. V aritmetickej postupnosti $s_n = 245,\ d = 5,\ a_n = 47$. Nájdite n a a_1.

6. Nájdite aritmetickú postupnosť, v ktorej súčet prvých troch členov je 27 a súčet štvorcov týchto členov je 275.

7. Aká je teplota v našich baniach 1015 m pod povrchom, ak je známe, že teplota Zeme sa zvyšuje o $1°C$ na 33 m hĺbky a ak je v hĺbke 25 m stála teplota $+9°C$.

8. V aritmetickej postupnosti je $a_1 = 3,\ d = 2$. Koľko členov dáva súčet $s_n = 120$?

9. Sčítajte prvých 20 členov aritmetickej postupnosti, v ktorej $a_8 = -2,\ a_{10} = 0$.

10. Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti, pričom prepona má dĺžku 5 cm. Vypočítajte dĺžky odvesien.

11. V geometrickej postupnosti je $q = 2,\ a_n = \frac{16}{3},\ s_n = \frac{21}{2}$. Zistite počet členov.

12. V geometrickej postupnosti $a_2 - a_1 = 15,\ a_3 - a_2 = 60$. Zistite a_4.

13. Zistite kvocient geometrickej postupnosti, ak $a_3 = -3,\ a_6 = -192$.

14. Zistite súčet prvých n členov geometrickej postupnosti, ak je dané: $a_{11} = \frac{1}{8}$, $a_3 = 2,\ n = 11$.

15. Medzi čísla 5 a 640 vložte toľko čísel, aby vznikla geometrická postupnosť, v ktorej súčet vložených čísel je 630. Vypočítajte ich.

16. Vŕtačka má 4 rýchlosti, ktoré sú za sebou nasledujúcimi členmi geometrickej postupnosti. Najväčšia rýchlosť je 1200 otáčok za minútu, najmenšia rýchlosť je 150 otáčok za minútu. Zistite všetky rýchlosti.

17. Vypočítajte limitu postupnosti: a) $\dfrac{n^2+3n-1}{2n^2-n}$, b) $\dfrac{n^5-n^4}{n^6+n^5}$, c) $\dfrac{(1-n)(2+3n^2)}{n^3+1}$,
d) $\dfrac{(2n-1)(n-1)^2}{n(n^2+2n-1)}$, e) $\dfrac{(n+1)^2}{(n-1)^3}$, f) $\dfrac{(n-2)^2(1-n)}{(n+2)^2(1+n)}$.

Výsledky

1. $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{4}{3},\ a_3 = \dfrac{3}{2},\ a_4 = \dfrac{8}{5},\ a_5 = \dfrac{5}{3}$, rastúca, ohraničená $(d = 1,\ h = 2)$,
2. $a_1 = -1,\ a_2 = -3,\ a_3 = -7,\ a_4 = -15,\ a_5 = -31$, klesajúca, zhora ohraničená $(h = -1)$,
3. $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_4 = -1,\ a_5 = -1$, ani rastúca, ani klesajúca, ohraničená $(d = -1,\ h = 1)$,
4. $a_{10} = 33,\ d = 3$,
5. $n = 10,\ a_1 = 2$,
6. ak $d = -4$ je $a_1 = 13,\ a_2 = 9,\ a_3 = 5$,
   ak $d = 4$ je $a_1 = 5,\ a_2 = 9,\ a_3 = 13$,
7. $39°C$,
8. $n = 10$,
9. $s_{20} = 10$,
10. $a = 3,\ b = 4$,
11. $n = 6$,
12. $s_4 = 425$,
13. $q = 4$,
14. $s_{11} = \dfrac{1}{8}(63 \pm 31\sqrt{2})$,
15. $10,\ 20,\ 40,\ 80,\ 160,\ 320$,
16. $150,\ 300,\ 600,\ 1200$,
17. a) $\dfrac{1}{2}$, b) 0, c) -3, d) 2, e) 0, f) -1.

Literatúra

[1] Eliaš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 1, Bratislava, Alfa, 1971.

[2] Eliaš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, Bratislava, Alfa, 1972.

[3] Ivan J.: Matematika I, Bratislava, Vydavateľstvo STU, 1998.

[4] Kluvánek I., Mišík L., Švec, M.: Matematika I, Bratislava, Alfa 1974.

[5] Thomas G., Finney R.: Calculus and Analytic Geometry, Massachusetts, Addison - Wesley Publishing Company, 1988.

RNDr. Viera Záhonová, CSc., RNDr. Agnesa Dicsöová, CSc.,
doc. RNDr. Jana Dobrakovová, CSc., RNDr. Ružena Pekárková, RNDr. Viera Poláková, CSc.

ÚVOD DO ŠTÚDIA MATEMATIKY I.

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2010.

Edícia skrípt

Rozsah 107 strán, 49 obrázkov, 2 tabuľky, 6,006 AH, 6,182 VH, 2. vydanie, tlač Nakladateľstvo STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-3998-6