MATEMATIKA I

Riešené príklady

VIERA ZÁHONOVÁ

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE

MATEMATIKA I
Riešené príklady

VIERA ZÁHONOVÁ

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2012

Recenzenti: prof. RNDr. Anna Kolesárová, CSc.
doc. RNDr. Jana Dobrakovová, CSc.

Schválila Vedecká rada Strojníckej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-3731-9

Obsah

1 Vybrané kapitoly z lineárnej algebry 7
1.1 Matice 7
1.2 Systémy m lineárnych rovníc s n neznámymi 11
1.3 Determinanty 18
1.4 Cvičenia 23

2 Reálna funkcia reálnej premennej 25
2.1 Cyklometrické funkcie 27
2.2 Cvičenia 32

3 Postupnosť a limita postupnosti 33
3.1 Limita postupnosti 35
3.2 Cvičenia 42

4 Limita a spojitosť funkcie 43
4.1 Limita funkcie 43
4.2 Spojitosť funkcie 52
4.3 Asymptoty grafu funkcie 56
4.4 Cvičenia 61

5 Derivácia funkcie 63
5.1 Výpočet derivácie funkcie 63
5.2 Derivácie vyšších rádov 77
5.3 Diferenciál funkcie, Taylorov polynóm 80
5.4 L'Hospitalovo pravidlo 85
5.5 Cvičenia 91

6 Použitie derivácií na vyšetrovanie priebehu funkcie 93
6.1 Monotónnosť, lokálne a globálne extrémy funkcie 93
6.2 Konvexnosť, konkávnosť a inflexné body funkcie 99
6.3 Priebeh funkcie 102
6.4 Cvičenia 114

7 Neurčitý integrál 115
7.1 Primitívna funkcia a základné integrály 115
7.2 Integrovanie substitučnou metódou 123

7.3 Integrovanie metódou per-partes ... 128
7.4 Integrovanie niektorých špeciálnych typov funkcií ... 134
7.5 Cvičenia ... 143

8 Určitý integrál ... 145
8.1 Výpočet určitého integrálu ... 145
8.2 Aplikácie určitého integrálu ... 152
8.2.1 Plošný obsah rovinnej oblasti ... 152
8.2.2 Objem rotačného telesa ... 159
8.2.3 Dĺžka rovinnej krivky a plošný obsah rotačnej plochy ... 162
8.3 Cvičenia ... 165

9 Nevlastný integrál ... 167
9.1 Nevlastný integrál na neohraničenom intervale ... 167
9.2 Nevlastný integrál z neohraničenej funkcie ... 172
9.3 Cvičenia ... 178

10 Diferenciálne rovnice prvého rádu ... 179
10.1 Základné pojmy ... 179
10.2 Diferenciálne rovnice so separovanými premennými ... 180
10.3 Diferenciálne rovnice so separovateľnými premennými ... 185
10.4 Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu ... 193
10.5 Cvičenia ... 200

11 Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientmi ... 201
11.1 Základné pojmy ... 201
11.2 Homogénna LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi ... 202
11.3 Nehomogénna LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi – špeciálna pravá strana ... 208
11.4 Nehomogénna LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi – metóda variácie konštánt ... 227
11.5 Cvičenia ... 230

Úvod

Skriptá Matematika I – riešené príklady sú určené predovšetkým pre študentov prvého ročníka bakalárskeho stupňa na SjF STU v Bratislave ako základná učebná pomôcka pre predmet Matematika I. Obsahujú vzorovo vyriešené príklady a mali by byť pomôckou pre každého študenta úspešne zvládnuť tento predmet, ktorý je nosným predmetom prvého semestra.

Cieľom týchto skrípt je poskytnúť študentom dostatočne veľký počet riešených príkladov z predmetu Matematika I. Na začiatku každej kapitoly, resp. podkapitoly sú uvedené nevyhnutné základné pojmy, ich vlastnosti a metódy používané na riešenie úloh v danej kapitole. Riešenie väčšiny príkladov je sprevádzané podrobným komentárom ku každému kroku, medzikroky sú zvyčajne zapísané v zátvorkách. Tam, kde je to možné a vhodné, sa kladie veľký dôraz aj na geometrický aspekt riešenia týchto úloh. Na konci každej kapitoly sú cvičenia aj s výsledkami, aby si študent mohol overiť, či správne zvládol metódy na riešenie úloh.

Skriptá sa skladajú z jedenástich kapitol, ktoré zodpovedajú obsahovej náplni predmetu Matematika I. Prvá kapitola je venovaná riešeným úlohám z vybraných častí lineárnej algebry. Ďalšie tri kapitoly sú venované reálnej funkcii reálnej premennej, najmä cyklometrickým funkciám, s ktorými sa študenti nestretli na strednej škole, postupnostiam, limite postupnosti a funkcie, spojitosti funkcie a vlastnostiam spojitých funkcií. Piata a šiesta kapitola sa zaoberá diferenciálnym počtom funkcie jednej premennej. Kým v piatej kapitole sa pozornosť venuje najmä technike výpočtu derivácií a aplikáciám derivácií, šiesta kapitola je venovaná použitiu derivácií na vyšetrovanie vlastností funkcie. Metódy výpočtu neurčitého integrálu sú vysvetlené v siedmej kapitole. Obsahom ôsmej kapitoly je výpočet určitého integrálu a jeho geometrické aplikácie, deviata kapitola je venovaná výpočtu nevlastného integrálu. Posledné dve kapitoly sa zaoberajú riešením niektorých špeciálnych typov diferenciálnych rovníc prvého rádu a riešením lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi druhého rádu.

Záverom by som chcela poďakovať recenzentkám doc. RNDr. Jane Dobrakovovej, CSc. a prof. RNDr. Anne Kolesárovej, CSc., ktoré svojimi cennými radami a pripomienkami prispeli k skvalitneniu predkladaných skrípt. Za pripomienky z pohľadu študenta ďakujem svojim dcéram Bc. Zuzane Záhonovej a Bc. Kristíne Záhonovej a za grafickú úpravu skrípt ďakujem Bc. Kristíne Záhonovej. Taktiež vopred ďakujem všetkým za oznámenie prípadných chýb a nepresností, ktoré sa môžu vyskytnúť v texte.

Autorka

1

Vybrané kapitoly z lineárnej algebry

1.1 Matice

Nech $m, n \in N$. Tabuľku $m.n$ čísel a_{ij} usporiadaných do m riadkov a n stĺpcov

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame **matica** typu $m \times n$. Čísla a_{ij} nazývame prvky matice. Ak $m = n$ hovoríme o štvorcovej matici stupňa n.
Pokiaľ nedôjde k nedorozumeniu, maticu budeme označovať $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

OPERÁCIE S MATICAMI

Nech $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ sú matice typu $m \times n$. Potom definujeme:

<u>Rovnosť matíc</u>

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \;\Leftrightarrow\; a_{ij} = b_{ij} \;\text{ pre každé }\; i = 1, 2, ..., m, \;\; j = 1, 2, ..., n$$

<u>Súčet matíc</u>
Súčtom matíc $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ rozumieme maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pričom platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \;\text{ pre každé }\; i = 1, 2, ..., m, \;\; j = 1, 2, ..., n.$$

<u>Súčin matice a reálneho čísla</u>
Súčinom matice $\mathbf{A}$ a reálneho čísla k rozumieme maticu $k.\mathbf{A} = \mathbf{C} = (c_{ij})$ typu $m \times n$, pričom platí

$$c_{ij} = k \,.\, a_{ij} \;\text{ pre každé }\; i = 1, 2, ..., m, \;\; j = 1, 2, ..., n.$$

<u>Súčin matíc</u>
Nech $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matica typu $m \times n$ a $\mathbf{B} = (b_{jk})$ je matica typu $n \times p$. Súčinom matíc $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}$ rozumieme maticu $\mathbf{C} = (c_{ik})$ typu $m \times p$, pričom platí

$$c_{ik} = a_{i1}.\, b_{1k} + a_{i2}.\, b_{2k} + ... + a_{in}.\, b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.\, b_{jk} \;\text{ pre každé }\; i = 1, 2, ..., m, \;\; k = 1, 2, ..., p.$$

Poznámka: Definície špeciálnych typov matíc a ich vlastnosti čitateľ nájde v uvedenej literatúre.

$\boxed{\textbf{Príklad 1.}}$ Pre aké reálne číslo x platí: $\begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 2, & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5, & 4 \\ 2, & 4 \end{pmatrix}$.

Riešenie: Matica **A** aj matica **B** sú matice druhého stupňa, čiže sú rovnakého typu. Vidíme, že

$$a_{12} = b_{12} = 4, \qquad a_{21} = b_{21} = 2.$$

Aby sa matice rovnali, musí platiť aj $a_{11} = b_{11}$ a $a_{22} = b_{22}$, t. j.,

$$1 = 2x + 5 \qquad \text{a súčasne} \qquad x^2 = 4.$$

Týmto dvom rovniciam vyhovuje jedine číslo

$$x = -2.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 2.}}$ Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 5, & 0 \\ 2, & 3, & -1, & 2 \\ 1, & 3, & -4, & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & -3, & 4, & 0 \\ 1, & 1, & -2, & 2 \\ 2, & 0, & 2, & 1 \end{pmatrix}$. Vypočítajme:

a) $2\mathbf{A}$, **b)** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, **c)** $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$.

Riešenie:
a) Maticu násobíme reálnym číslom λ tak, že vynásobíme každý jej prvok číslom λ. Teda

$$2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\,.\,1, & 2\,.(-2), & 2\,.\,5, & 2\,.\,0 \\ 2\,.\,2, & 2\,.\,3, & 2\,.(-1), & 2\,.\,2 \\ 2\,.\,1, & 2\,.\,3, & 2\,.(-4), & 2\,.\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & -4, & 10, & 0 \\ 4, & 6, & -2, & 4 \\ 2, & 6, & -8, & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Keďže matica **A** aj matica **B** sú matice rovnakého typu, t.j. typu 3×4, ich súčet je definovaný, výsledkom je matica typu 3×4, a to:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2, & -2+(-3), & 5+4, & 0+0 \\ 2+1, & 3+1, & -1+(-2), & 2+2 \\ 1+2, & 3+0, & -4+2, & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & -5, & 9, & 0 \\ 3, & 4, & -3, & 4 \\ 3, & 3, & -2, & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Pristúpime priamo k výpočtu, ktorý je kombináciou predchádzajúcich dvoch úloh.

$$3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = 3\mathbf{A} + (-2\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 3, & -6, & 15, & 0 \\ 6, & 9, & -3, & 6 \\ 3, & 9, & -12, & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4, & 6, & -8, & 0 \\ -2, & -2, & 4, & -4 \\ -4, & 0, & -4, & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1, & 0, & 7, & 0 \\ 4 & 7, & 1, & 2 \\ -1, & 9, & -16, & 1 \end{pmatrix}.$$

Príklad 3. Vypčítajme $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$ a ukážme, že $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$, ak

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 5, & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & 4 \\ 7, & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 2, & 1 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 2, & -1, & 1 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 4 \\ 2, & 2 \end{pmatrix}$, $\qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

a) Násobenie matíc je o niečo zložitejšie ako súčet, resp. súčin matice s reálnym číslom. Matica $\mathbf{A}$ aj $\mathbf{B}$ sú typu 2×2. Počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je ten istý ako počet riadkov matice $\mathbf{B}$, súčin je definovaný a výsledná matica bude typu 2×2. Ak označíme

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{21}, & c_{22} \end{pmatrix}$$

tak prvky c_{ij}, $i = 1,\ 2,\ j = 1,\ 2,$ podľa definície dostaneme tak, že postupne vynásobíme prvky i-teho riadku matice $\mathbf{A}$ s prvkami j-teho stĺpca matice $\mathbf{B}$. Potom

$$c_{11} = 3\,.\,2 + 2\,.\,7 = 20, \qquad c_{12} = 3\,.\,4 + 2\,.\,1 = 14,$$

$$c_{21} = 5\,.\,2 + 1\,.\,7 = 17, \qquad c_{22} = 5\,.\,4 + 1\,.\,1 = 21,$$

teda

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 5, & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2, & 4 \\ 7, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20, & 14 \\ 17, & 21 \end{pmatrix}.$$

Podobne, ak

$$\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11}, & d_{12} \\ d_{21}, & d_{22} \end{pmatrix},$$

tak

$$d_{11} = 2\,.\,3 + 4\,.\,5 = 26, \qquad d_{12} = 2\,.\,2 + 4\,.\,1 = 8,$$

$$d_{21} = 7\,.\,3 + 1\,.\,5 = 26, \qquad d_{22} = 7\,.\,2 + 1\,.\,1 = 15$$

a

$$\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 4 \\ 7, & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 5, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26, & 8 \\ 26, & 15 \end{pmatrix}.$$

Z výsledku je zrejmé, že $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$, čiže násobenie matíc nie je komutatívne.

b) Súčiny $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$ sú definované, sú to matice tretieho stupňa. Výpočet trochu urýchlime.

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 2, & 1 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 2, & -1, & 1 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,.\,3 + 2\,.\,2 + 3\,.\,2, & 1\,.\,1 + 2\,.(-1) + 3\,.\,1, & 1\,.(-2) + 2\,.\,1 + 3\,.\,1 \\ 2\,.\,3 + 2\,.\,2 + 1\,.\,2, & 2\,.\,1 + 2\,.(-1) + 1\,.\,1, & 2\,.(-2) + 2\,.\,1 + 1\,.\,1 \\ 3\,.\,3 + 1\,.\,2 + 2\,.\,2, & 3\,.\,1 + 1\,.(-1) + 2\,.\,1, & 3\,.(-2) + 1\,.\,1 + 2\,.\,1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13, & 2, & 3 \\ 12, & 1, & -1 \\ 15, & 4, & -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 2, & -1, & 1 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 2, & 1 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\,.\,1 + 1\,.\,2 + (-2)\,.\,3, & 3\,.\,2 + 1\,.\,2 + (-2)\,.\,1, & 3\,.\,3 + 1\,.\,1 + (-2)\,.\,2 \\ 2\,.\,1 + (-1)\,.\,2 + 1\,.\,3, & 2\,.\,2 + (-1)\,.\,2 + 1\,.\,1, & 2\,.\,3 + (-1)\,.\,1 + 1\,.\,2 \\ 2\,.\,1 + 1\,.\,2 + 1\,.\,3, & 2\,.\,2 + 1\,.\,2 + 1\,.\,1, & 2\,.\,3 + 1\,.\,1 + 1\,.\,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1, & 6, & 6 \\ 3, & 3, & 7 \\ 7, & 7, & 9 \end{pmatrix}.$$

Opäť vidíme, že $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$.

c) Matica $\mathbf{A}$ je typu 3×2, matica $\mathbf{B}$ je typu 2×3. Obidva súčiny sú definované, $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}$ je štvorcová matica tretieho stupňa, $\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$ je štvorcová matica druhého stupňa. Keďže tieto súčiny nie sú matice toho istého stupňa, platí $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$. Vypočítajme však aj tieto súčiny.

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 4 \\ 2, & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,.\,1 + 3\,.\,2, & 1\,.\,2 + 3\,.\,3, & 1\,.\,3 + 3\,.\,1 \\ 1\,.\,1 + 4\,.\,2, & 1\,.\,2 + 4\,.\,3, & 1\,.\,3 + 4\,.\,1 \\ 2\,.\,1 + 2\,.\,2, & 2\,.\,2 + 2\,.\,3, & 2\,.\,3 + 2\,.\,1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7, & 11, & 6 \\ 9, & 14, & 7 \\ 6, & 10, & 8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 4 \\ 2, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,.\,1 + 2\,.\,1 + 3\,.\,2, & 1\,.\,3 + 2\,.\,4 + 3\,.\,2 \\ 2\,.\,1 + 3\,.\,1 + 1\,.\,2, & 2\,.\,3 + 3\,.\,4 + 1\,.\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9, & 17 \\ 7, & 20 \end{pmatrix}.$$

Príklad 4. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & k \end{pmatrix}$. Vypočítajme súčiny matíc $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}\,.\,\mathbf{A}$, ak sú definované.

Riešenie: Matica $\mathbf{A}$ je typu 2×3 a matica $\mathbf{B}$ je typu 3×3. Počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je ten istý ako počet riadkov matice $\mathbf{B}$, súčin je definovaný a výsledná matica bude typu 2×3. Potom

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2d + 3g, & b + 2e + 3h, & c + 2f + 3k \\ 4a + 5d + 6g, & 4b + 5e + 6h, & 4c + 5f + 6k \end{pmatrix}.$$

Na výpočet súčinu matíc sa dá použiť nasledujúca pomôcka:

	a d g	b e h	c f k
1 2 3	$a+2d+3g$	$b+2e+3h$	$c+2f+3k$
4 5 6	$4a+5d+6g$	$4b+5e+6h$	$4c+5f+6k$

Všimnime si, že prvky matice **A** sú napísané vľavo v tabuľke po riadkoch, prvky matice **B** sú napísané v tabuľke hore po stĺpcoch. Po vypočítaní súčinov prislúchajúcich riadkov a stĺpcov, dostaneme výslednú maticu.
Súčin **B** . **A** nie je definovaný, pretože matica **B** má 3 stĺpce a matica **A** má iba 2 riadky.

1.2 Systémy m lineárnych rovníc s n neznámymi

Systémom m lineárnych rovníc s n neznámymi rozumieme systém rovníc

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \, ... \, ... \quad ... \quad ... \, ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array},$$

kde $a_{ij},\ b_i$ pre $i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n$ sú dané reálne čísla, $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ sú neznáme. Čísla a_{ij} nazývame koeficienty a čísla b_i absolútne členy systému m lineárnych rovníc s n neznámymi.

Ľubovoľný systém lineárnych rovníc môžeme riešiť **Gaussovou eliminačnou metódou**, ktorej princíp spočíva v postupnom vylučovaní neznámych z rovníc. Pritom využívame ekvivalentné úpravy systému, t. j. úpravy, ktoré nemenia množinu riešení. Sú to nasledujúce úpravy:

- Zmena poradia rovníc.
- Vynásobenie rovnice číslom $c \neq 0$.
- Pričítanie násobku jednej rovnice k inej rovnici.
- Vynechanie rovnice, ktorá je násobkom inej rrovnice.

Po ekvivalentných úpravách môžu nastať iba nasledujúce prípady:

- systém nemá riešenie,
- systém má jediné riešenie,
- systém má nekonečne veľa riešení.

Keďže zmeny sa týkajú iba koeficientov daného systému, stačí ich urobiť iba na rozšírenej matici systému, t. j. na matici

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{21}, & \dots & a_{2n}, & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn}, & b_m \end{pmatrix}.$$

Potom úpravy, ktoré by sme robili s rovnicami, budeme robiť s riadkami rozšírenej matice systému a upravíme ju pomocou nich na trojuholníkovú maticu. Nakoniec zostavíme systém rovníc zodpovedajúci získanej trojuholníkovej matici, ktorý je ekvivalentný s pôvodným systémom. Spätnou metódou (postupom od poslednej rovnice k prvej) určíme hodnoty jednotlivých neznámych. Postup je podrobne vysvetlený v nasledujúcich príkladoch.

Poznámka: Kvôli prehľadnosti výpočtu, budeme úpravy zapisovať a dohodneme sa na nasledujúcom značení (i-tý riadok matice budeme označovať r_i):

- i-tý riadok zameníme s j-tým riadkom: $r_i \leftrightarrow r_j$,
- i-tý riadok vynásobíme číslom $c \neq 0$ a výsledok zapíšeme do i-teho riadku: $c \,.\, r_i \to r_i$,
- k násobok i-tého riadku pričítame k j-tému riadku a výsledok zapíšeme do j-tého riadku: $k \,.\, r_i + r_j \to r_j$.

$\boxed{\textbf{Príklad 5.}}$ Riešme systém troch rovníc o troch neznámych:

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Riešenie:

a) Najskôr priraďme danému systému rozšírenú maticu systému a urobme také ekvivalentné úpravy matice, aby v prvom stĺpci okrem prvého riadku boli nuly – tým vylúčime neznámu x_1 z druhého a tretieho riadku. Absolútne členy oddeľme od koeficientov systému.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & -1 & 1 \\ 1, & 2, & -1 & -1 \\ 1, & -1, & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 + r_2 \to r_2 \\ -r_1 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & -1 & 1 \\ 0, & 1, & 0 & -2 \\ 0, & -2, & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Teraz vylúčime neznámu x_2 z tretej rovnice, to znamená, že v druhom stĺpci a treťom riadku chceme mať 0.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & -1 & 1 \\ 0, & 1, & 0 & -2 \\ 0, & -2, & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2r_2 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & -1 & 1 \\ 0, & 1, & 0 & -2 \\ 0, & 0, & 3 & -5 \end{array}\right).$$

Posledná matica, ktorú sme dostali je trojuholníková matica, evivalentná s pôvodnou, a tejto matici prislúcha ekvivalentný systém s pôvodným systémom. Napíšme ho.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 \qquad &= -2 \\ 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice dostaneme $x_3 = -\dfrac{5}{3}$ a z druhej rovnice je zrejmé, že $x_2 = -2$. Ak dosadíme vypočítané hodnoty do prvej rovnice, tak:

$$x_1 + (-2) - \left(-\frac{5}{3}\right) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 1 + 2 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

Daný systém má jediné riešenie $(x_1,\ x_2,\ x_3) = \left(\frac{4}{3},\ -2,\ -\frac{5}{3}\right)$.

b) Pri riešení tohto systému aj ďalších už budeme postupovať rýchlejšie. Priradíme systému rozšírenú maticu, ktorú budeme postupne upravovať na trojuholníkový tvar a upravenej matici spätne priradíme ekvivalentný systém rovníc.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -2, & 1 & -1 \\ 2, & -1, & 1 & 1 \\ 1, & 4, & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 + r_2 \to r_2 \\ -r_1 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -2, & 1 & -1 \\ 0, & 3, & -1 & 3 \\ 0, & 6, & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & -2, & 1 & -1 \\ 0, & 3, & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Pri poslednej úprave sme vynechali tretí riadok, pretože bol dvojnásobkom druhého riadku. Ekvivalentný systém je

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Keďže máme dve rovnice a tri neznáme, jednu neznámu si musíme voliť a zvyšné dve neznáme vyjadríme pomocou nej. Zvolená neznáma bude tzv. parameter. Najvýhodnejšie je za parameter voliť si jednu neznámu, ktorá sa nachádza v poslednej rovnici a tú druhú si vyjadriť pomocou nej. Z tretej rovnice sa jednoduchšie vyjadrí neznáma x_3, takže za parameter zvolíme $x_2 = t,\ t \in R$. Po dosadení do druhej rovnice dostaneme

$$3t - x_3 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 3t - 3.$$

Dosaďme teraz do prvej rovnice, potom

$$x_1 - 2t + 3t - 3 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2 - t.$$

Systém má teda nekonečne veľa riešení, ktoré sa dajú zapísať v tvare

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (2 - t,\ t,\ 3t - 3) \qquad \text{kde} \qquad t \in R.$$

Ak položíme napríklad parameter $t = 5$ dostaneme konkrétne riešenie

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (-3,\ 5,\ 12).$$

c) Priraďme danému systému rozšírenú maticu systému a urobme príslušné ekvivalentné úpravy.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 1 & 2 \\ -1, & 3, & -1 & 0 \\ 1, & 5, & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ r_1 + r_2 \to r_2 \\ -r_1 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 1 & 2 \\ 0, & 4, & 0 & 2 \\ 0, & 4, & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 1 & 2 \\ 0, & 4, & 0 & 2 \\ 0, & 0, & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Prislúchajúci ekvivalentný systém má tvar

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_2 \qquad &= 2 \\ 0 &= -3 \end{aligned}$$

Keďže $0 \neq -3$ daný systém nemá riešenie.

Pri riešení systémov troch rovníc o troch neznámych sme ukázali princíp riešenia Gaussovou eliminačnou metódou. Podobne sa riešia aj systémy rovníc pre ľubovoľný počet rovníc a neznámych.

Príklad 6. Riešme systém rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \quad x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 &= 8 \\ x_1 - \quad x_2 - \quad x_3 + \quad x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - \quad x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Riešenie: Máme riešiť systém štyroch rovníc o štyroch neznámych. Tento systém môže mať práve jedno riešenie, nekonečne veľa alebo žiadne. Priraďme systému rozšírenú maticu a urobme ekvivalentné úpravy.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 2, & -1, & -2 & -2 \\ 2, & 1, & 1, & 1 & 8 \\ 1, & -1, & -1, & 1 & 1 \\ 1, & 2, & 2, & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 + r_2 \to r_2 \\ -r_1 + r_3 \to r_3 \\ -r_1 + r_4 \to r_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 2, & -1, & -2 & -2 \\ 0, & -3, & 3, & 5 & 12 \\ 0, & -3, & 0, & 3 & 3 \\ 0, & 0, & 3, & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 + r_3 \to r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 2, & -1, & -2 & -2 \\ 0, & -3, & 3, & 5 & 12 \\ 0, & 0, & -3, & -2 & -9 \\ 0, & 0, & 3, & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_3 + r_4 \to r_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 2, & -1, & -2 & -2 \\ 0, & -3, & 3, & 5 & 12 \\ 0, & 0, & -3, & -2 & -9 \\ 0, & 0, & 0, & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Dostali sme ekvivalentný systém

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 - \quad x_3 - \ 2x_4 &= -2 \\ -3x_2 + \quad 3x_3 + \ 5x_4 &= 12 \\ -3x_3 - \ 2x_4 &= -9 \\ -x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Je zrejmé, že $x_4 = 3$. Dosadením za x_4 do tretej rovnice dostaneme

$$-3x_3 - 2\,.\,3 = -9 \qquad \Rightarrow \qquad 3x_3 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 1.$$

Ak do druhej rovnice dosadíme vypočítané hodnoty, tak

$$-3x_2 + 3\,.\,1 + 5\,.\,3 = 12 \qquad \Rightarrow \qquad 3x_2 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 2.$$

Nakoniec dosaďme do prvej rovnice a vypočítajme x_1.

$$x_1 + 2\,.\,2 - 1 - 2\,.\,3 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 1.$$

Daný systém má jediné riešenie, a to usporiadanú štvoricu

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (1,\ 2,\ 1,\ 3)\,.$$

Príklad 7. Riešme systém rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + \ x_4 &= \ \ 5 \\ 2x_1 - x_2 \qquad\quad - \ x_4 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 + \ x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 \qquad + \ x_3 + \ x_4 &= \ \ 3 \end{aligned}$$

Potom nájdime také riešenie $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, pre ktoré platí $x_2 = x_4$ (ak existuje).

Riešenie: Systém štyroch rovníc o štyroch neznámych môže mať práve jedno riešenie, nekonečne veľa alebo žiadne riešenie. Priraďme systému rozšírenú maticu a urobme ekvivalentné úpravy.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 1, & 3, & 1 & 5 \\ 2, & -1, & 0, & -1 & -2 \\ 3, & -1, & 1, & -2 & -3 \\ 1, & 0, & 1, & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 + r_2 \to r_2 \\ -3r_1 + r_3 \to r_3 \\ -r_1 + r_4 \to r_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 1, & 3, & 1 & 5 \\ 0, & -3, & -6, & -3 & -12 \\ 0, & -4, & -8, & -5 & -18 \\ 0, & -1, & -2, & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{3}r_2 \to r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 1, & 3, & 1 & 5 \\ 0, & 1, & 2, & 1 & 4 \\ 0, & -4, & -8, & -5 & -18 \\ 0, & -1, & -2, & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 4r_2 + r_3 \to r_3 \\ r_2 + r_4 \to r_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 1, & 3, & 1 & 5 \\ 0, & 1, & 2, & 1 & 4 \\ 0, & 0, & 0, & -1 & -2 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 1, & 3, & 1 & 5 \\ 0, & 1, & 2, & 1 & 4 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & 2 \end{array}\right).$$

V poslednej úprave sme vynechali tretí riadok, pretože $r_3 = -r_4$. Priraďme k matici, ktorú sme dostali, ekvivalentný systém rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Tento systém má tri rovnice a štyri neznáme, teda má nekonečne veľa riešení. Je zrejmé, že $x_4 = 2$ a jednu neznámu musíme voliť za parameter. Zvoľme teda $x_3 = t,\ t \in R$ Dosadením za x_4 a x_3 do druhej rovnice dostaneme

$$x_2 + 2t + 2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 2 - 2t.$$

Nakoniec dosaďme do prvej rovnice a vypočítajme x_1.

$$x_1 + (2 - 2t) + 3t + 2 = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 1 - t.$$

Všetky riešenia daného systému potom majú tvar

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (1 - t,\ 2 - 2t,\ t,\ 2)\,,\ t \in R.$$

Ak za t dosadíme konkrétne číslo, napríklad $t = 2$, dostaneme jedno riešenie systému $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-1,\ -2,\ 2,\ 2)$.

Vyriešme druhú časť úlohy. Z množiny riešení máme vybrať také riešenie, pre ktoré platí $x_2 = x_4$, to znamená, že

$$2 - 2t = 2 \qquad \Rightarrow \qquad t = 0.$$

Hľadané riešenia dostaneme tak, že položíme $t = 0$, t. j. $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (1,\ 2,\ 0,\ 2)$.

Príklad 8. Riešme systém rovníc

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 - 2x_4 &= -2\\
2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= \ \ 8\\
x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 &= \ \ 1\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 &= \ \ 4\\
x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 &= \ \ 0
\end{aligned}$$

Riešenie: Máme systém piatich rovníc o štyroch neznámych. Tento systém môže mať práve jedno riešenie, nekonečne veľa alebo žiadne riešenie. Priraďme systému rozšírenú maticu a urobme ekvivalentné úpravy.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}
1, & 2, & -1, & -2 & -2\\
2, & 1, & 1, & 1 & 8\\
1, & -1, & -1, & 1 & 1\\
1, & 2, & 2, & -1 & 4\\
1, & 2, & -1, & 2 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
-2r_1 + r_2 \to r_2\\
-r_1 + r_3 \to r_3\\
-r_1 + r_4 \to r_4\\
-r_1 + r_5 \to r_5
\end{array} \qquad \sim$$

$$\sim \quad \left(\begin{array}{rrrr|r}
1, & 2, & -1, & -2 & -2\\
0, & -3, & 3, & 5 & 12\\
0, & -3, & 0, & 3 & 3\\
0, & 0, & 3, & 1 & 6\\
0, & 0, & 0, & 4 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
-r_2 + r_3 \to r_3\\
\\
\\
\end{array} \qquad \sim$$

$$\sim \quad \left(\begin{array}{rrrr|r}
1, & 2, & -1, & -2 & -2\\
0, & -3, & 3, & 5 & 12\\
0, & 0, & -3, & -2 & -9\\
0, & 0, & 3, & 1 & 6\\
0, & 0, & 0, & 4 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
r_3 + r_4 \to r_4\\
\\
\end{array} \qquad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 2, & -1, & -2 & -2 \\ 0, & -3, & 3, & 5 & 12 \\ 0, & 0, & -3, & -2 & -9 \\ 0, & 0, & 0, & -1 & -3 \\ 0, & 0, & 0, & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ 4r_4 + r_5 \to r_5 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 2, & -1, & -2 & -2 \\ 0, & -3, & 3, & 5 & 12 \\ 0, & 0, & -3, & -2 & -9 \\ 0, & 0, & 0, & -1 & -3 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & -10 \end{array}\right).$$

Priraďme trojuholníkovej matici, ktorú sme dostali, systém rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 - \ x_3 - 2x_4 &= -2 \\ -3x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 12 \\ -3x_3 + 2x_4 &= -9 \\ -x_4 &= -3 \\ 0 &= -10 \end{aligned}$$

ktorý je ekvivalentný s pôvodným systémom. Keďže $0 \neq -10$, tento systém nemá riešenie, a teda ani pôvodný systém nemá riešenie.

Príklad 9. Riešme systém rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + \ x_2 - \ x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie: Máme homogénny systém troch rovníc o štyroch neznámych, ktorý má nekonečne veľa riešení, pretože máme menej rovníc, ako je neznámych. Prípad, že systém nemá riešenie nemôže nastať, lebo každý homogénny systém má riešenie, a to triviálne $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$. Pri riešení systému nemusíme opisovať pravú stranu, pretože tá sa nebude meniť. Napíšme teda maticu systému a pomocou ekvivalentných úprav ho vyriešme.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & -3, & 1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ 2, & 3, & -4, & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ r_1 + r_2 \to r_2 \\ -2r_1 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1, & 2, & -3, & 1 \\ 0, & 3, & -4, & 2 \\ 0, & -1, & 2, & -1 \end{pmatrix} r_2 \leftrightarrow r_3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1, & 2, & -3, & 1 \\ 0, & -1, & 2, & -1 \\ 0, & 3, & -4, & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3r_2 + r_3 \to r_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1, & 2, & -3, & 1 \\ 0, & -1, & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 2, & -1 \end{pmatrix}.$$

Priraďme matici, ktorú sme dostali, ekvivalentný systém rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Jednu neznámu si musíme zvoliť za parameter. Z poslednej rovnice sa jednoduchšie vyjadrí x_4, položme teda $x_3 = t,\ t \in R$. Potom $x_4 = 2t$ a po dosadení do druhej rovnice dostávame

$$-x_2 + 2t - 2t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 0.$$

Ak dosadíme do prvej rovnice za neznáme $x_1,\ x_2,\ x_3$, dostaneme

$$x_1 + 2\,.\,0 - 3t + 2t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = t.$$

Takže všetky riešenia daného homogénneho systému sa dajú vyjadriť v tvare

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (t,\ 0,\ t,\ 2t), \quad t \in R.$$

1.3 Determinanty

Ak v lineárnom systéme sa počet rovníc rovná počtu neznámych, za istého predpokladu ho môžeme riešiť aj inou metódou ako Gaussovou eliminačnou metódou, a to Cramerovým pravidlom. K tomu si musíme najskôr zaviesť pojem determinantu. Každej štvorcovej matici $\mathbf{A}$ vieme priradiť číslo, ktoré nazývame determinant a označujeme $|\mathbf{A}|$. Definícia determinantu štvorcovej matice je uvedná v literatúre [5], [7]. V tejto časti kapitoly budeme pracovať iba s determinantami matíc druhého a tretieho stupňa.

Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix}$, potom determinant matice $\mathbf{A}$ je číslo $|\mathbf{A}|$, ktoré je definované

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$, tak determinant matice $\mathbf{A}$ je číslo, na výpočet ktorého použijeme Sarrusovo pravidlo. Pod determinat opíšeme znova prvé dva riadky matice a utvoríme súčiny po troch prvkoch v smere hlavnej a vedľajšej diagonály matice $\mathbf{A}$, pritom súčiny v smere vedľajšej diagonály ešte vynásobíme číslom -1. Potom tieto súčiny sčítame.

$$\begin{array}{c} \searrow + \qquad\qquad - \swarrow \\ |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = \\ a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}.\, a_{22}.\, a_{33} + a_{21}.\, a_{32}.\, a_{13} + a_{31}.\, a_{12}.\, a_{23} - a_{13}.\, a_{22}.\, a_{31} - a_{23}.\, a_{32}.\, a_{11} - a_{33}.\, a_{12}.\, a_{21}.$$

Príklad 10. Vypočítajme determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 2, & 4 \\ -1, & 2 \end{vmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} -1, & -3 \\ -5, & 2 \end{vmatrix}$, **c)** $\begin{vmatrix} a+1, & a \\ a, & a-1 \end{vmatrix}$, **d)** $\begin{vmatrix} \cos x, & \sin x \\ -\sin x, & \cos x \end{vmatrix}$.

Riešenie:

a)

$$\begin{vmatrix} 2, & 4 \\ -1, & 2 \end{vmatrix} = 2\,.\,2 - 4\,.(-1) = 8.$$

b)

$$\begin{vmatrix} -1, & -3 \\ -5, & 2 \end{vmatrix} = (-1)\,.\,2 - (-3)\,.\,(-5) = -17.$$

c)

$$\begin{vmatrix} a+1, & a \\ a, & a-1 \end{vmatrix} = (a+1)\,.\,(a-1) - a\,.\,a = a^2 - 1 - a^2 = -1.$$

d)

$$\begin{vmatrix} \cos x, & \sin x \\ -\sin x, & \cos x \end{vmatrix} = \cos x \,.\, \cos x - \sin x \,.\, (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Príklad 11. Vypočítajme determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1, & -1, & 2 \\ 0, & -2, & 3 \\ -1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} 2, & 0, & 2 \\ 1, & 2, & 3 \\ 0, & 1, & -2 \end{vmatrix}$, **c)** $\begin{vmatrix} 1+i, & 0, & 1 \\ i, & 1, & 0 \\ 1, & -i, & i-1 \end{vmatrix}$,

kde i je komplexná jednotka.

Riešenie:
a)

$$\begin{vmatrix} 1, & -1, & 2 \\ 0, & -2, & 3 \\ -1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 1\,.(-2).\,1+0\,.\,1\,.\,2+(-1).(-1)\,.\,3-2\,.\,(-2)\,.\,(-1)-3\,.\,1\,.\,1-1\,.\,(-1)\,.\,0 = -6.$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2, & 0, & 2 \\ 1, & 2, & 3 \\ 0, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 2\,.\,2\,.\,(-2) + 0\,.\,3\,.\,0 + 2\,.\,1\,.\,1 - 2\,.\,2\,.\,0 - 3\,.\,1\,.\,2 - (-2)\,.\,0\,.\,1 = -12.$$

c) Pri výpočte využijeme známy fakt, že $i^2 = -1$.

$$\begin{vmatrix} 1+i, & 0, & 1 \\ i, & 1, & 0 \\ 1, & -i, & i-1 \end{vmatrix} = (1+i)\,.\,1\,.\,(i-1) + i\,.\,(-i)\,.\,1 + 1\,.\,0\,.\,0 - 1\,.\,1\,.\,1 - 0\,.\,(-i)\,.\,(1+i)-$$

$$-(i-1)\,.\,0\,.\,i = i^2 - 1 - i^2 - 1 = -2.$$

Príklad 12. Zistime, pre aké x platí

a) $\begin{vmatrix} x-1, & x \\ 2, & x+3 \end{vmatrix} = 0,$ **b)** $\begin{vmatrix} 2, & 1, & 0 \\ x, & x+2, & 1 \\ 1, & -1, & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Riešenie: V obidvoch prípadoch potrebujeme najskôr vypočítať determinant a potom výraz, ktorý dostaneme, položíme rovný nule. Daná úloha sa tak zredukuje na vyriešenie rovnice s neznámou x.
a) Keďže

$$\begin{vmatrix} x-1, & x \\ 2, & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)\,.\,(x+3) - 2x = x^2 + 2x - 3 - 2x = x^2 - 3,$$

determinant sa bude rovnať nule práve vtedy, ak $x^2 - 3 = 0$. Je to kvadratická rovnica, ktorá je splnená pre dve reálne čísla $x_1 = \sqrt{3}$ a $x_2 = -\sqrt{3}$.

b) Opäť vypočítajme determinant

$$\begin{vmatrix} 2, & 1, & 0 \\ x, & x+2, & 1 \\ 1, & -1, & 2 \end{vmatrix} = 2\,.\,(x+2)\,.\,2 + x\,.\,(-1)\,.\,0 + 1\,.\,1\,.\,1 - 0\,.(x+2)\,.\,1 - 1\,.\,(-1)\,.\,2 - 2\,.\,1\,.\,x =$$

$$= 4x + 8 + 1 + 2 - 2x = 2x + 11.$$

a získaný výraz položme rovný nule, t. j.

$$2x + 11 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{11}{2}.$$

Determinant sa rovná nule pre jediné reálne číslo $x = -\dfrac{11}{2}$.

Cramerovo pravidlo pre systém dvoch rovníc o dvoch neznámych

Nech $D = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Potom systém rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

má jediné riešenie, a to

$$(x_1,\ x_2) = \left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D}\right),$$

kde

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1, a_{12} \\ b_2, a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{a} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, b_1 \\ a_{21}, b_2 \end{vmatrix}.$$

Cramerovo pravidlo pre systém troch rovníc o troch neznámych

Nech $D = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. Potom systém rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

má jediné riešenie, a to

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = \left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\right),$$

kde

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1, a_{12}, a_{13} \\ b_2, a_{22}, a_{23} \\ b_3, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, b_1, a_{13} \\ a_{21}, b_2, a_{23} \\ a_{31}, b_3, a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{a} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, b_1 \\ a_{21}, a_{22}, b_2 \\ a_{31}, a_{32}, b_3 \end{vmatrix}.$$

Príklad 13. Riešme daný systém, ak sa dá, Cramerovým pravidlom.

a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 3 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -2x_1 - \frac{4}{3}x_2 &= -2 \end{aligned}$

Riešenie:
a) Vypočítajme determinant

$$D = \begin{vmatrix} 3, & 2 \\ 2, & -5 \end{vmatrix} = -15 - 4 = -19.$$

Keďže $D \neq 0$, systém má jediné riešenie. Aby sme ho našli, potrebujeme vyčísliť determinaty D_1 a D_2.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 3, & -5 \end{vmatrix} = -10 - 6 = -16 \qquad \text{a} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3, & 2 \\ 2, & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5.$$

Riešením je usporiadaná dvojica

$$(x_1,\ x_2) = \left(\frac{-16}{-19}, \frac{5}{-19} \right) = \left(\frac{16}{19}, -\frac{5}{19} \right).$$

b) Pretože

$$D = \begin{vmatrix} 1, & -3 \\ 3, & 4 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13 \neq 0$$

a

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0, & -3 \\ 0, & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 3, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

riešením daného homogénneho systému je usporiadaná dvojica

$$(x_1,\ x_2) = \left(\frac{0}{13}, \frac{0}{13} \right) = (0,\ 0),$$

teda systém má iba triviálne riešenie.

c) Hodnota determinatu

$$D = \begin{vmatrix} 3, & 2 \\ -2, & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

a preto daný systém sa nedá riešiť Cramerovým pravidlom.

Príklad 14. Riešme daný systém, ak sa dá, Cramerovým pravidlom.

a) $\begin{aligned} 2x_1 + \ x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - \ x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= 0 \\ x_1 - \ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$

Riešenie:

a) Vypočítajme

$$D = \begin{vmatrix} 2, & 1, & -1 \\ -1, & 2, & 0 \\ 1, & 2, & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 0 + 2 - 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Riešenie systému môžeme nájsť pomocou Cramerovho pravidla.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2, & 1, & -1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 2, & -1 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 + 2 - 0 - 0 = -2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2, & 2, & -1 \\ -1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 2 = -1,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 2 \\ -1, & 2, & 0 \\ 1, & 2, & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 0 - 4 - 0 + 1 = -3.$$

Systém má jediné riešenie, a to

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = \left(\frac{-2}{-1},\ \frac{-1}{-1},\ \frac{-3}{-1} \right) = (2,\ 1,\ 3).$$

b) Keďže

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ -1, & 2, & -1 \\ 1, & -1, & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 1 + 2 - 1 + 2 = 5 \neq 0,$$

systém sa dá riešiť Cramerovým pravidlom.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & -1 \\ 0, & 2, & -1 \\ 0, & -1, & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_2 \begin{vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ -1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0 \\ -1, & 2, & 0 \\ 1, & -1, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

teda riešením je trojica

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = \left(\frac{0}{5},\ \frac{0}{5},\ \frac{0}{5} \right) = (0,\ 0,\ 0).$$

c) Vzhľadom na to, že

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & -1 \\ 1, & 4, & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 - 1 + 2 + 4 + 1 = 0,$$

systém sa nedá riešiť Cramerovým pravidlom.

1.4 Cvičenia

1. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 9, & -2 \\ 2, & 3, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1, & -4, & 3 \\ 2, & 1, & 0 \\ 3, & 1, & -2 \end{pmatrix}$. Vypočítajte:
   a) $-\mathbf{A}$, **b)** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, **c)** $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

2. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 0, & -4 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 2 \\ 0, & 2, & 1 \end{pmatrix}$. Vypočítajte, ak existuje $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \,.\, \mathbf{A}$.

3. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 2, & 3, & 1 \\ -2, & 2, & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \\ -1, & 2, & 2 \end{pmatrix}$. Vypočítajte, ak existuje $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \,.\, \mathbf{A}$.
   Platí $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A}$?

4. Riešte systém rovníc:

   a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 &= -4 \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

5. Riešte systém rovníc $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= -8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -4 \end{aligned}$
   Potom nájdite také riešenie $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, pre ktoré platí $x_1 + x_4 = 0$ (ak existuje).

6. Vypočítajte determinanty:
   a) $\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ -1, & 1 \end{vmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} 3, & 2 \\ \frac{3}{2}, & 1 \end{vmatrix}$, **c)** $\begin{vmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 2, & 3, & 1 \\ -2, & 2, & 2 \end{vmatrix}$, **d)** $\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ -1, & 1, & 2 \\ 3, & 1, & 0 \end{vmatrix}$.

7. Pomocou Cramerovho pravidla, ak sa dá, riešte systémy rovníc v Príklade 4.

<u>VÝSLEDKY:</u>

1. **a)** $\begin{pmatrix} -1, & -9, & 2 \\ -2, & -3, & 0 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 0, & 5, & 1 \\ 4, & 4, & 0 \\ 4, & 2, & -1 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} -1, & 6, & 5 \\ 10, & 9, & 0 \\ 11, & 5, & -4 \end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 5, & 4 \\ 0, & -8, & -4 \end{pmatrix}$. Súčin $\mathbf{B} \,.\, \mathbf{A}$ nie je definovaný.

3. $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1, & 1, & 3 \\ 2, & 3, & 10 \\ 0, & 8, & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} \,.\, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4, & -1, & 1 \\ -1, & 7, & 6 \\ -1, & 10, & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A}$.

4. **a)** $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$, **b)** $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{8-5t}{3}, \dfrac{4-t}{3}, t \right)$, $t \in R$,
   c) $(x_1, x_2, x_3) = (0, t, t)$, $t \in R$, **d)** systém nemá riešenie.

5. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(2t + 2, -\frac{5}{2} - t, \frac{5}{2} + t, 2t\right)\ t \in R,$
   $x_1 + x_4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -2, 2, -1).$
6. **a)** 3, **b)** 0, **c)** 14, **d)** 0.
7. **a)** $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$, **b)**, **c)**, **d)**systém sa nedá sa riešiť Cramerovým pravidlom, $D = 0$.

2

Reálna funkcia reálnej premennej

Nech $M \subset R,\ M \neq \emptyset$. Predpis f, ktorý každému $x \in M$ priradí práve jedno $y \in R$ sa nazýva **reálna funkcia reálnej premennej** (krátko funkcia). Množinu M nazývame **definičný obor** funkcie f a označujeme $D(f)$. Číslo y nazývame **hodnotou** funkcie f v čísle x a píšeme $y = f(x)$. Množinu $H(f) = \{y \in R; \exists x \in D(f), y = f(x)\}$ nazývame **obor hodnôt** funkcie f.

Ak definičný obor funkcie nie je určený a funkcia je určená iba predpisom $y = f(x)$, tak uvažujeme prirodzený definičný obor tejto funkcie, t. j. množinu všetkých reálnych čísel, pre ktoré má daný výraz $f(x)$ zmysel.

Príklad 1. Určime definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{4 - x^2}$ a nájdime $f(0),\ f(-1),\ f(3),\ f(-a),\ f(x^2)$

Riešenie: Definičným oborom funkcie f je množina tých reálnych čísel, pre ktoré má výraz $\sqrt{4 - x^2}$ zmysel. Keďže odmocniť vieme iba nezáporné čísla, tak

$$D(f) = \{x \in R;\ 4 - x^2 \geq 0\}.$$

Takže úloha nájsť $D(f)$ je ekvivalentná s vyriešením nerovnice

$$4 - x^2 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 \leq 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad |x| \leq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \langle -2,\, 2\rangle$$

a

$$D(f) = \langle -2,\, 2\rangle.$$

$0 \in D(f)$ a tiež aj $-1 \in D(f)$, má zmysel počítať hodnoty funkcie v týchto bodoch.

$$f(0) = \sqrt{4 - 0^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{a} \qquad f(-1) = \sqrt{4 - (-1)^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

$3 \notin D(f)$, teda $f(3)$ neexistuje. Ak by sme dosadili číslo 3 do predpisu, dostaneme pod odmocninou záporné číslo.
Aby sme mohli vypočítať $f(-a)$, tak

$$-a \in D(f) = \langle -2,\, 2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq -a \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geq a \geq -2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a \in \langle -2,\, 2\rangle = D(f).$$

Teda pre $a \in D(f)$ má zmysel $f(-a)$ a

$$f(-a) = \sqrt{4-(-a)^2} = \sqrt{4-a^2}.$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade aj teraz musí platiť

$$x^2 \in D(f) = \langle -2,\, 2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le x^2 \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x^2 \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le |x| \le \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\langle -\sqrt{2},\, \sqrt{2}\right\rangle.$$

Pre takto zvolené x má zmysel výraz

$$f(x^2) = \sqrt{4-(x^2)^2} = \sqrt{4-x^4}.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 2.}}$ Určime definičný obor funkcie $f : y = \dfrac{2x-3}{1-\log(4-2x)}$.

Riešenie: Pri určovaní definičného oboru je potrebné si uvedomiť, že logaritmická funkcia je definovaná iba pre kladné čísla a v menovateli zlomku nemôže byť 0, teda

$$D(f) = \{x \in R;\ 4-2x > 0\ \wedge 1-\log(4-2x) \ne 0\}.$$

Keďže

$$4-2x > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < 0$$

a

$$1-\log(4-2x) \ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log(4-2x) \ne 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4-2x \ne 10 \quad \Leftrightarrow \quad x \ne -3,$$

tak

$$D(f) = (-\infty,\, 0) - \{-3\} = (-\infty\ -3) \cup (-3, 0).$$

$\boxed{\textbf{Príklad 3.}}$ Určime definičný obor funkcie $f : y = \dfrac{\cos x}{0,5-\sin x}$.

Riešenie: Funkcie $\sin x$ a $\cos x$ sú základné elementárne funkcie a sú definované pre všetky reálne čísla. Menovateľ zlomku sa však nesmie rovnať nule, a preto

$$D(f) = \{x \in R;\ 0,5-\sin x \ne 0\}.$$

$$0,5-\sin x \ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \ne \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \ne \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k \in Z \quad \wedge \quad x \ne \frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k \in Z.$$

Potom

$$D(f) = \{x \in R;\ x \ne \frac{\pi}{6}+2k\pi\ \wedge\ x \ne \frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k \in Z\}.$$

Poznámka: V skriptách [9] sú podrobne popísané jednotlivé typy elementárnych funkcií a ich vlastnosti, ilustrované riešenými príkladmi. V týchto skriptách sa budeme podrobnejšie venovať len cyklometrickým funkciám, ktoré sú tiež základnými elementárnymi funkciami, a s ktorými sa študenti na strednej škole nestretli.

2.1 Cyklometrické funkcie

Inverznú funkciu k funkcii $y = \sin x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazývame **arkussínus** a označujeme $y = \arcsin x$.
Pre funkciu $f : y = \arcsin x$ platí: $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, je rastúca a nepárna.

$$\arcsin a = b \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \sin b \qquad a \in \langle -1, 1 \rangle, \qquad b \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle .$$

Inverznú funkciu k funkcii $y = \cos x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ nazývame **arkuskosínus** a označujeme $y = \arccos x$.
Pre funkciu $f : y = \arccos x$ platí: $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f) = \langle 0, \pi \rangle$, je klesajúca.

$$\arccos a = b \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \cos b \qquad a \in \langle -1, 1 \rangle, \qquad b \in \langle 0, \pi \rangle .$$

Inverznú funkciu k funkcii $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ nazývame **arkustangens** a označujeme $y = \operatorname{arctg} x$.
Pre funkciu $f : y = \operatorname{arctg} x$ platí: $D(f) = R$, $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, je rastúca a nepárna.

$$\operatorname{arctg} a = b \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \operatorname{tg} b \qquad a \in R, \qquad b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) .$$

Inverznú funkciu k funkcii $y = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$ nazývame **arkuskotangens** a označujeme $y = \operatorname{arccotg} x$.
Pre funkciu $f : y = \operatorname{arccotg} x$ platí: $D(f) = R$, $H(f) = (0, \pi)$, je klesajúca.

$$\operatorname{arccotg} a = b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = \operatorname{cotg} a \qquad a \in R, \qquad b \in (0, \pi) .$$

Príklad 4. Vypočítajme:

a) $\arcsin 1$, $\quad \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right)$,

b) $\arccos 0$, $\quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \arccos(-1)$,

c) $\operatorname{arctg} 0$, $\quad \operatorname{arctg} 1$, $\quad \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$,

d) $\operatorname{arccotg} 1$, $\quad \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad \operatorname{arccotg}(-1)$.

Riešenie:

a)

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, lebo $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\qquad \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, lebo $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \text{lebo} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

b)

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lebo} \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{lebo} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \text{lebo} \quad \cos\pi = -1.$$

c)

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \text{lebo} \quad \operatorname{tg} 0 = 0, \qquad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{lebo} \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \quad \text{lebo} \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

d)

$$\operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{lebo} \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1, \qquad \operatorname{arccotg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}, \quad \text{lebo} \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \quad \text{lebo} \quad \operatorname{cotg}\ \frac{3\pi}{4} = -1.$$

Príklad 5. Určime definičný obor funkcie $f : y = \arccos\dfrac{x-3}{2}$.

Riešenie: Funkcia arkuskosínus je definovaná na intervale $\langle -1,\, 1\rangle$, preto

$$D(f) = \{x \in R;\ -1 \le \frac{x-3}{2} \le 1\}.$$

Aby sme zistili $D(f)$ musíme vyriešiť sústavu nerovníc.

$$-1 \le \frac{x-3}{2} \le 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad -2 \le x-3 \le 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \le x \le 5$$

Takže

$$D(f) = \langle 1,\, 5\rangle.$$

Príklad 6. Určime definičný obor funkcie $f : y = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}$.

Riešenie: Funkcia arkustangens je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Argument má však premennú v menovateli, preto

$$D(f) = \{x \in R;\ x+1 \ne 0\} = R - \{-1\} = (-\infty,\, -1) \cup (-1,\, \infty).$$

$\boxed{\textbf{Príklad 7.}}$ Určime definičný obor a obor hodnôt funkcie $f : y = 1 + 2\arcsin(x-2)$. Ukážme, že je rýdzomonotónna a nájdime k nej inverznú funkciu f^{-1}. Nakreslime grafy funkcií f a f^{-1}.

Riešenie: Aby funkcia bola definovaná, tak argument musí byť z intervalu $\langle -1,\ 1\rangle$. Teda

$$D(f) = \{x \in R;\ -1 \le x-2 \le 1\}.$$

$$-1 \le x-2 \le 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \le x \le 3 \qquad \Rightarrow \qquad D(f) = \langle 1, 3\rangle.$$

Nech teraz $x_1,\ x_2 \in D(f)$ a $x_1 < x_2$, t. j.

$$1 \le x_1 < x_2 \le 3 \qquad \Rightarrow \qquad -1 \le x_1 - 2 < x_2 - 2 \le 1.$$

Využijeme fakt, že funkcia arkussínus na intervale $\langle -1,\ 1\rangle$ rastie a dostávame

$$\arcsin(x_1-2) < \arcsin(x_2-2) \qquad \Rightarrow \qquad 2\arcsin(x_1-2) < 2\arcsin(x_2-2) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 1 + 2\arcsin(x_1-2) < 1 + 2\arcsin(x_2-2).$$

Takže

$$\forall x_1,\ x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2),$$

čo znamená, že funkcia f je rastúca na svojom definičnom obore, teda je jednojednoznačná a existuje k nej inverzná funkcia f^{-1} s $D(f^{-1}) = H(f)$. Potrebujeme teda ešte určiť obor hodnôt $H(f)$. Najmenšia hodnota funkcie je $f(1) = 1 + 2\arcsin(-1) = 1 - \pi$, najväčšia hodnota je $f(3) = 1 + 2\arcsin 1 = 1 + \pi$. Z vlastností funkcie f sa dá dokázať (pozri podkapitolu 4.2 Spojitosť funkcie), že

$$H(f) = \langle 1-\pi,\ 1+\pi\rangle.$$

Takže definičný obor inverznej funkcie

$$D(f^{-1}) = H(f) = \langle 1-\pi,\ 1+\pi\rangle \qquad \text{a} \qquad H(f^{-1}) = D(f) = \langle 1,\ 3\rangle.$$

Predpis pre funkciu f^{-1} nájdeme tak, že formálne zameníme v predpise pre funkciu f x za y a vyjadríme z rovnosti y. Potom

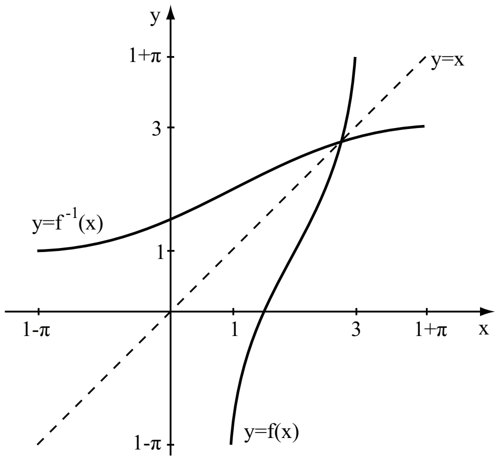
$$x = 1 + 2\arcsin(y-2) \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 2\arcsin(y-2) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{2} = \arcsin(y-2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = \sin\frac{x-1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 2 + \sin\frac{x-1}{2}$$

Predpis pre inverznú funkciu je

$$f^{-1} : y = 2 + \sin\frac{x-1}{2}.$$

Grafy funkcií f a f^{-1} sú na obrázku (obr. 2.1). Všimnime si, že grafy funkcií f a f^{-1} sú súmerné podľa priamky $y = x$ (osi 1. a 3. kvadrantu).



Obr. 2.1

Príklad 8. Určime definičný obor a obor hodnôt funkcie $f : y = \arccos(3-2x)$. Ukážme, že je rýdzomonotónna a nájdime k nej inverznú funkciu f^{-1}. Nakreslime grafy funkcií f a f^{-1}.

Riešenie: Aby funkcia bola definovaná, tak argument musí byť z intervalu $\langle -1,\ 1\rangle$. Teda

$$D(f) = \{x \in R;\ -1 \le 3-2x \le 1\}.$$

$$-1 \le 3-2x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \le -2x \le -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \ge x \ge 1 \quad \Rightarrow \quad D(f) = \langle 1,\ 2\rangle.$$

Nech teraz $x_1,\ x_2 \in D(f)$ a $x_1 < x_2$, t. j.

$$1 \le x_1 < x_2 \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \ge -2x_1 > -2x_2 \ge -4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \ge 3-2x_1 > 3-2x_2 \ge -1.$$

Funkcia arkuskosínus na intervale $\langle -1,\ 1\rangle$ je klesajúca, a preto

$$\arccos(3-2x_1) < \arccos(3-2x_2).$$

Takže

$$\forall x_1,\ x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$

čo znamená, že funkcia je rastúca na svojom definičnom obore, teda je jednojednoznačná a existuje k nej inverzná funkcia f^{-1}. Aby sme určili $D(f^{-1})$, potrebujeme určiť obor hodnôt funkcie f. Keďže f je rastúca, tak najmenšia hodnota funkcie je $f(1) = \arccos 1 = 0$, najväčšia hodnota, ktorú nadobúda je $f(2) = \arccos(-1) = \pi$. Z vlastností funkcie f sa dá dokázať, že obor hodnôt je $H(f) = \langle 0,\ \pi\rangle$. Potom

$$D(f^{-1}) = H(f) = \langle 0,\ \pi\rangle \qquad \text{a} \qquad H(f^{-1}) = D(f) = \langle 1,\ 2\rangle.$$

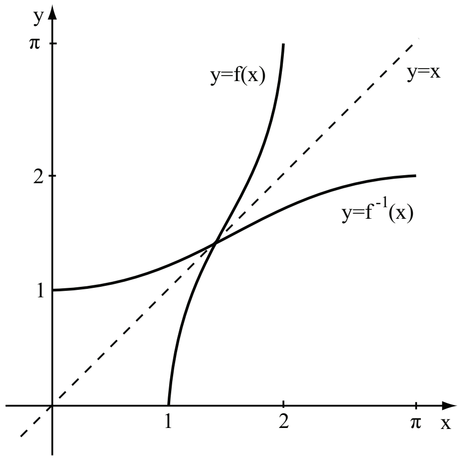
Predpis pre funkciu f^{-1} nájdeme tak, že formálne zameníme v predpise pre funkciu f x za y a vyjadríme z neho y pomocou x.

$$x = \arccos(3-2y) \quad \Rightarrow \quad 3-2y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3-\cos x}{2}.$$

Predpis pre inverznú funkciu je

$$f^{-1} : y = \frac{3 - \cos x}{2}$$

Grafy funkcií f a f^{-1} sú na obrázku (obr. 2.2).



Obr. 2.2

$\boxed{\textbf{Príklad 9.}}$ Určime definičný obor a obor hodnôt funkcie $f : y = 1 - \operatorname{arctg}(x + 1)$. Ukážme, že je rýdzomonotónna a nájdime k nej inverznú funkciu f^{-1}. Nakreslime grafy funkcií f a f^{-1}.

Riešenie: Funkcia arkustangens je definovaná pre každé reálne číslo x, teda $D(f) = R$. Pretože obor hodnôt funkcie arkustangens je $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, z vlastností funkcie f vyplýva, že jej obor hodnôt je $H(f) = \left(1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$.
Nech teraz $x_1,\ x_2 \in D(f)$ a $x_1 < x_2$. Potom $x_1 + 1 < x_2 + 1$. Keďže funkcia arkustangens je na R rastúca, dostaneme

$$\operatorname{arctg}(x_1 + 1) < \operatorname{arctg}(x_2 + 1) \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{arctg}(x_1 + 1) > -\operatorname{arctg}(x_2 + 1) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 1 - \operatorname{arctg}(x_1 + 1) > 1 - \operatorname{arctg}(x_2 + 1).$$

Takže

$$\forall x_1,\ x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$

čo znamená, že funkcia je klesajúca na svojom definičnom obore, teda je jednojednoznačná a existuje k nej inverzná funkcia f^{-1}. Jej definičný obor

$$D(f^{-1}) = H(f) = \left(1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{a} \qquad H(f^{-1}) = D(f) = R.$$

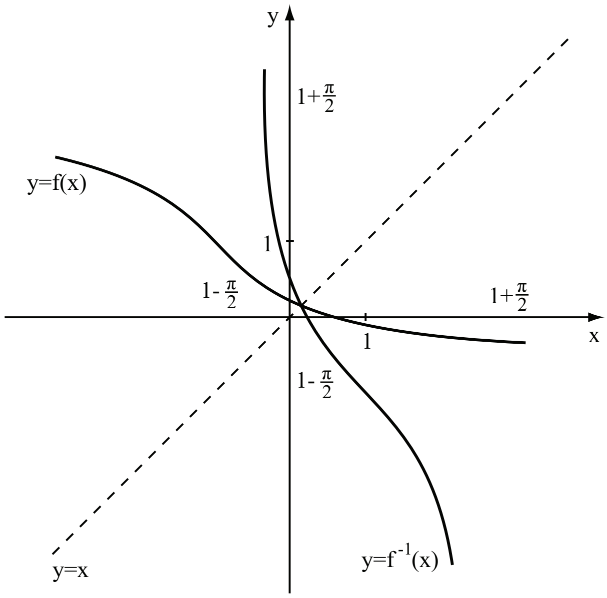
Nájdime predpis pre funkciu f^{-1}:

$$x = 1 - \operatorname{arctg}(y + 1) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}(y + 1) = 1 - x \quad \Rightarrow \quad y + 1 = \operatorname{tg}(1 - x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = -1 + \operatorname{tg}(1 - x)$$

Predpis pre inverznú funkciu je

$$f^{-1} : y = 1 + \operatorname{tg}(1 - x).$$

Grafy funkcií f a f^{-1} sú na obrázku (obr. 2.3).



Obr. 2.3

2.2 Cvičenia

1. Určte definičný obor funkcie:
   a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$, **b)** $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{x+2}$, **c)** $f(x) = \sqrt{\sin x}$.
2. Určte definičný obor funkcie:
   a) $f(x) = \arcsin(2x+3)$, **b)** $f(x) = 1 + \operatorname{arccotg} \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+2}}$.
3. Nájdite x, pre ktoré platí:
   a) $\arcsin x = \dfrac{\pi}{4}$, **b)** $\arccos x = \dfrac{2\pi}{3}$, **c)** $\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{3}$, **d)** $\operatorname{arccotg} x = \dfrac{\pi}{6}$.
4. Určte $D(f)$ a $H(f)$ a zistite, či existuje inverzná funkcia f^{-1} k funkcii f. Ak áno, nájdite ju a určte $D(f^{-1})$. Načrtnite grafy f a f^{-1}.
   a) $f : y = \arcsin \dfrac{x+1}{2}$, **b)** $f : y = 1 - \arccos(x-2)$, **c)** $f : y = 3 \operatorname{arccotg} 2x$.

<u>Výsledky</u>

1. **a)** $D(f) = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, **b)** D(f)=(-2, 1), **c)** $D(f) = \bigcup_{k \in Z} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$.
2. **a)** $D(f) = \langle -2, -1 \rangle$, **b)** $D(f) = \langle 1, \infty)$.
3. **a)** $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $x = -\dfrac{1}{2}$, **c)** $x = -\sqrt{3}$, **d)** $x = \sqrt{3}$.
4. a) $D(f) = \langle -3, 1 \rangle$, $H(f) = \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$, rastúca, $f^{-1} : y = -1 + 2\sin x$, $D(f^{-1}) = \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$,
   b) $D(f) = \langle 1, 3 \rangle$, $H(f) = \langle 1 - \pi, \pi \rangle$, rastúca, $f^{-1} : y = 2 + \cos(1-x)$, $D(f^{-1}) = \langle 1 - \pi, \pi \rangle$.
   c) $D(f) = R$, $H(f) = (0, 3\pi)$, klesajúca, $f^{-1} : y = \dfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{x}{3}$, $D(f^{-1}) = (0, 3\pi)$.

3

Postupnosť a limita postupnosti

Postupnosťou nazývame každú funkciu, ktorej definičným oborom je množina všetkých prirodzených čísel. Hodnoty tejto funkcie nazývame členmi postupnosti a označujeme $f(n) = a_n \ \forall n \in N$. Ak $a_n \in R$, hovoríme o postupnosti reálnych čísel. **Grafom** postupnosti reálnych čísel je množina izolovaných bodov $A_n = [n, a_n]$.
Postupnosť je **ohraničená zdola (zhora)**, ak existuje $d \in R$ $(h \in R)$, že pre každé $n \in N$ platí $a_n \geq d$ $(a_n \leq h)$. Ak je postupnosť ohraničená zhora aj zdola, hovoríme, že je **ohraničená**.
Postupnosť je **rastúca (klesjúca)**, ak pre každé $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$.

$\boxed{\textbf{Príklad 1.}}$ Napíšme prvých päť členov postupnosti $\left\{\dfrac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a načrtnime jej graf. Aké vlastnosti má daná postupnosť?

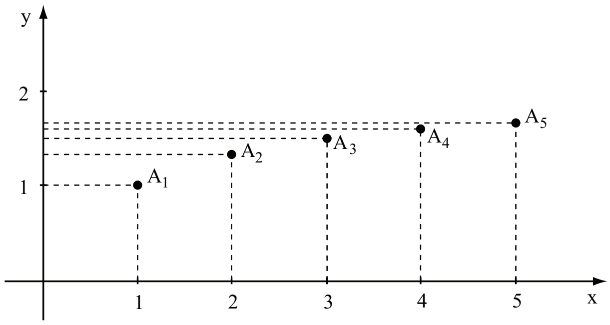
Riešenie: Zo zadania postupnosti vidíme, že predpis pre n-tý člen je $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$.
Prvých päť členov získame tak, že postupne za n dosadíme čísla 1, 2, ..., 5. Potom

$$a_1 = \frac{2\,.\,1}{1+1} = 1, \quad a_2 = \frac{2\,.\,2}{2+1} = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{2\,.\,3}{3+1} = \frac{3}{2}, \quad a_4 = \frac{2\,.\,4}{4+1} = \frac{8}{5}, \quad a_5 = \frac{2\,.\,5}{5+1} = \frac{5}{3}.$$

Aby sme načrtli graf tejto postupnosti, potrebujeme v pravouhlom súradnicovom systéme zostrojiť izolované body

$$A_1 = [1,\ 1], \quad A_2 = \left[2,\ \frac{4}{3}\right], \quad A_3 = \left[3,\ \frac{3}{2}\right], \quad A_4 = \left[4,\ \frac{8}{5}\right], \quad A_5 = \left[5,\ \frac{5}{3}\right], \ldots$$

Keďže máme vypočítaných iba prvých päť členov postupnosti, znázornime iba päť bodov grafu (obr. 3.1).



Obr. 3.1

Na základe grafu môžeme vysloviť hypotézu, že postupnosť je rastúca a ohraničená. Ukážme to. Keďže

$$a_n < a_{n+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n - a_{n+1} < 0,$$

stačí ukázať splnenie druhej nerovnosti.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2n(n+2) - 2(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{2n^2 + 4n - 2n^2 - 4n - 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0 \quad \text{pre každé} \quad n \in N.$$

Teda, postupnosť je rastúca. Z tejto vlasnosti však vyplýva, že pre každé n platí

$$a_1 \le a_n, \qquad \text{t. j.} \qquad 1 \le a_n,$$

z čoho vyplýva, že postupnosť je zdola ohraničená ($d = 1$). Z grafu postupnosti a tiež aj zo zadania môžeme usudzovať, že hodnoty postupnosti neprekročia hodnotu 2. Ukážme to. Počítajme

$$2 - a_n = 2 - \frac{2n}{n+1} = \frac{2(n+1) - 2n}{n+1} = \frac{2n + 2 - 2n}{n+1} = \frac{2}{n+1} > 0.$$

Pretože nerovosť $2 - a_n > 0$ je ekvivalentná s nerovnosťou $2 > a_n$, postupnosť je ohraničená zhora ($h = 2$). Keďže postupnosť je ohraničená aj zdola aj zhora, je ohraničená.

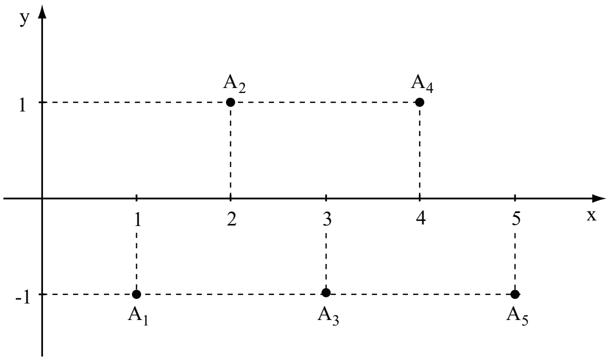
Príklad 2. Napíšme prvých päť členov postupnosti $\{\cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ a načrtnime jej graf. Aké vlastnosti má daná postupnosť?

Riešenie: Vypočítajme prvých päť členov postupnosti, $a_n = \cos(n\pi)$.

$a_1 = \cos\pi = -1, \quad a_2 = \cos 2\pi = 1, \quad a_3 = \cos 3\pi = -1, \quad a_4 = \cos 4\pi = 1,$
$a_5 = \cos 5\pi = -1.$

Znázornime (obr. 3.2) v pravouhlom súradnicovom systéme izolované body

$$A_1 = [1, -1], \quad A_2 = [2, 1], \quad A_3 = [3, -1], \quad A_4 = [4, 1], \quad A_5 = [5, -1].$$



Obr. 3.2

Postupnosť nie je rastúca, pretože $a_2 > a_3$ a nie je klesajúca, lebo $a_1 < a_2$. Postupnosť je ohraničená, pre každé $n \in N$ platí

$$-1 \leq a_n \leq 1.$$

3.1 Limita postupnosti

Hovoríme, že číslo a je **limitou postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$ $n > n_0$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$, alebo symbolicky

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0,\ \forall n > n_0 :\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

V tomto prípade hovoríme o vlastnej limite postupnosti.
Definíciu nevlastných limít postupnosti uvedieme iba symbolicky.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K\ \exists n_0,\ \forall n > n_0 :\ a_n > K,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K\ \exists n_0,\ \forall n > n_0 :\ a_n < K.$$

Poznámka: Ak existuje vlastná limita postupnosti, hovoríme, že postupnosť je konvergentná. V opačnom prípade je postupnosť divergentná, t. j. ak limita je nevlastná alebo neexistuje.

PRAVIDLÁ NA VÝPOČET LIMITY

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,\ b \in R$. Potom platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \,.\, b_n) = a \,.\, b$,
- ak pre každé $n \in N$ je $b_n \neq 0$ a $b \neq 0$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$,
- ak pre každé $n \in N$ je $a_n > 0$ a $a > 0$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = a^b$.

Pri výpočte nevlastných limít môžeme použiť „pravidlá“ pri operáciách medzi reálnym číslom c a symbolmi $\pm\infty$.

- Pre súčet a rozdiel:
  $\infty + \infty = \infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty, \qquad c + \infty = \infty, \qquad c - \infty = -\infty.$

- Pre súčin:
  $\infty \,.\, \infty = \infty, \qquad -\infty \,.\, \infty = -\infty, \qquad c \,.\, \infty = \begin{cases} \infty, & c > 0 \\ -\infty, & c < 0 \end{cases}.$

- Pre podiel:
  $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0.$

- Pre mocninu:
  $\infty^{\infty} = \infty, \qquad \infty^{-\infty} = 0, \qquad \infty^{c} = \begin{cases} \infty, & c > 0 \\ 0, & c < 0 \end{cases}, \qquad c^{\infty} = \begin{cases} 0, & c \in \langle 0, 1) \\ \infty, & c > 1 \end{cases}.$

Poznámka 1: Pri výpočte limity postupnosti budeme tieto pravidlá zapisovať ako pomocný krok do hranatých zátvoriek priamo do výpočtu.
Poznámka 2: Poznamenajme ešte, že v predchádzajúcich pravidlách sa nevyskytli výrazy

$$\infty - \infty, \qquad 0 \,.\, \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \infty^0, \qquad 1^{\infty}, \qquad 0^0.$$

Tieto výrazy sa nazývajú neurčité výrazy a nedá sa vo všeobecnosti jednoznačne určiť ich hodnota.
Poznámka 3: Pravidlá na výpočet vlastných limít, môžeme použiť aj v prípade nevlastných limít, ak výrazy, ktoré dostaneme majú zmysel.

$\boxed{\textbf{Príklad 3.}}$ Vypočítajme nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+n^3}{n^3}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} (4 + 5n - 3n^2)$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{1 - 2n - 3n^2}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + n - 2}{n^3 - 3n + 1}$, **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 2n - 1}$.

Riešenie:
a) Postupnosť $\left\{\dfrac{2+n^3}{n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je súčtom dvoch konvergentných postupností, a to $\left\{\dfrac{2}{n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{1\}_{n=1}^{\infty}$. Pretože

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} = 0,$$

tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+n^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^3} + 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^3}\right) + \lim_{n\to\infty} 1 = 0 + 1 = 1.$$

b) Limitu nemôžeme vypočítať priamo, použitie základných viet ovýpočte vedie na neurčitý výraz „$\infty - \infty$“. Urobme najskôr úpravy (vyberme najvyššiu mocninu n pred zátvorku), aby sme mohli použiť pravidlá pre výpočet limít.

$$\lim_{n\to\infty}\left(4+5n-3n^2\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}-3\right)=\left[\infty^2.(0+0-3)=\infty\,.\,(-3)\right]=-\infty.$$

c) Limitu nemôžeme opäť vypočítať priamo, pretože daná postupnosť je podielom dvoch divergentných postupností (o čom sa môžeme presvedčiť podobne ako v predchádzajúcom výpočte) a použitie vety o limite podielu by viedlo na neurčitý výraz „$\frac{\infty}{-\infty}$“. Urobme úpravy (vyberme v čitateli a menovateli pred zátvorku najvyššiu mocninu n), ktoré nám umožnia použiť pravidlá pre výpočet limít.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{1-2n-3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}-3\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}-3}=\frac{2-0+0}{0-0-3}=-\frac{2}{3}.$$

d) Počítajme podobne ako v predchádzajúcom prípade.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-2}{n^3-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,.\,\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=0\,.\,\frac{2+0-0}{1-0+0}=0.$$

e) Opäť najskôr urobme úpravy a až potom vypočítame limitu.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+2n+3}{3n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}n\,.\,\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\left[\infty\,.\,\frac{1-0+0+0}{3+0-0}=\infty\,.\,\frac{1}{3}\right]=\infty.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 4.}}$ Vypočítajme nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$.

Riešenie:

a) Opäť je potrebné urobiť úpravy, ktoré umožnia použiť pravidlá na počítanie s limitami.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

b) Ak by sme chceli priamo použiť pravidlá na výpočet limít dostali by sme $\infty - \infty$, čo je neurčitý výraz. Je potrebné urobiť úpravy. V tomto prípade je úprava založená na rozšírení postupnosti zlomkom s hodnotou 1 tak, aby sme odstránili odmocniny a tiež aj neurčitý výraz. Pri odstránení odmocnín využijeme vzorec $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \left[\frac{1}{\infty+\infty}\right] = 0.$$

c) Urobíme podobnú úpravu ako v predchádzajúcom príklade.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{n+2-n} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2} = \left[\frac{\infty+\infty}{2}\right] = \infty.$$

d) Výpočet urobíme podobne ako vyššie.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^2-(n^2+1)\right)}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}.$$

Príklad 5. Vypočítajme nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2n^4-1}{n^4+3n+2}}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2-1}\right)^3$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} 4^{\frac{n}{2n+3}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{n^2+2}}$, **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{n^2+2n-3}{n+1}}$, **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n^2+6n+2}$.

Riešenie:

a) Podľa pravidiel o výpočte limity, stačí vypočítať limitu postupnosti, ktorá je pod odmocninou. Preto.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n^4-1}{n^4+3n+2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4\left(2-\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(1+\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n^4}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-\frac{1}{n^4}}{1+\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n^4}}} = \sqrt{2}.$$

b) Podobne vypočítame

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2-1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2-\frac{1}{n^2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

c) Najskôr vypočítajme limitu exponenta.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\dfrac{3}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} 4^{\frac{n}{2n+3}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

d) Postupujeme podobne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)} = 0,$$

teda

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{n^2+2}} = 2^0 = 1.$$

e) Vypočítajme limitu exponenta.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{1+\dfrac{1}{n}} = \infty.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{n^2+2n-3}{n+1}} = \left[\ 3^\infty\ \right] = \infty,$$

lebo $3 > 1$.

e) Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2+6n+2\right) = \infty \qquad \text{a} \qquad \frac{2}{5} < 1,$$

tak

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n^2+6n+2} = \left[\ \left(\frac{2}{5}\right)^\infty\ \right] = 0.$$

Príklad 6. Vypočítajme limity:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^3}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{5n^2}$.

Riešenie: Pri výpočte týchto limít využijeme jednu zo základných limít, a to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Potom
a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}\,\sqrt[n]{n} = 2^0 . 1 = 1.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4}\,\sqrt[n]{n^3} = \lim_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 4^0 .\, 1^3 = 1.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{5n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{5}\,\sqrt[3n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} 5^{\frac{1}{3n}} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 5^0 .\, 1^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Príklad 7. Vypočítajme limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^n$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{3n-1}\right)^n$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^{1-n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{2n}$, **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n+2}{5n}\right)^{n-3}$, **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$.

Riešenie:

a) Keďže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} n = \infty \qquad \text{a výraz} \qquad 2^\infty \qquad \text{má zmysel,}$$

tak

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n = \left[\; 2^\infty \;\right] = \infty.$$

b) Podobne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^\infty\right] = 0.$$

c) Opäť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} (1-n) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{1-n} = \left[\; 2^{-\infty} \;\right] = 0.$$

Ďalšie limity sú limity typu „1^∞“. Je to neurčitý výraz a pri výpočte týchto limít využijeme tvrdenie, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, kde e je Eulerovo číslo.

d) Môžeme sa presvedčiť, že limita postupnosti je typu „1^∞“. Preto najskôr danú postupnosť upravíme, aby sme mohli limitu vypočítať.

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{2n}$$

Ak položíme $\quad k = \dfrac{n}{3}, \quad$ tak $\quad n = 3k, \quad$ pričom $\quad \lim\limits_{n\to\infty} k = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3} = \infty.$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2\,.\,3k} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{6} =$$

$$= \left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{6} = e^6.$$

e) Pri výpočte postupujeme podobne ako pri predchádzajúcom príklade.

$$\left(\frac{5n+2}{5n}\right)^{n-3} = \left(1+\frac{2}{5n}\right)^{n-3} = \left(1+\frac{1}{\frac{5n}{2}}\right)^{n-3}.$$

Položme

$$k = \frac{5n}{2} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{2}{5}k \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} k = \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{2} = \infty.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n}\right)^{n-3} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{2}{5}k-3} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{\frac{2}{5}}.\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-3} =$$

$$= e^{\frac{2}{5}}.(1+0)^{-3} = \sqrt[5]{e^2}.$$

f) Opäť najskôr upravme n-tý člen postupnosti na vhodný tvar. Keďže čitateľ je menší ako menovateľ, tak

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{-n}.$$

Položme

$$k = \frac{n-1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad n = 2k+1 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} k = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2} = \infty.$$

Preto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{-n} = \lim_{k\to\infty}(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-(2k+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{-2}.\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1} = e^{-2}.(1+0)^{-1} = \frac{1}{e^2}.$$

3.2 Cvičenia

1. Napíšte prvých päť členov postupnosti načrtnime jej graf. Aké vlastnosti má daná postupnosť?

   a) $\left\{\dfrac{2-3n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, **b)** $\left\{\dfrac{5n^2}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, **c)** $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
2. Vypočítajte limitu:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-3}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-5}{2+3n-n^2}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n}{1+n-2n^2}$,

   d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n}{n^2+3n+1}$, **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-2n+1)$, **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}(-3n^3+2n)$.
3. Vypočítajte limitu:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt[3]{2n^3-2n}}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{4^n}\right)$,

   d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4}{1-2\,.\,3^n}$. **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}\right)$.
4. Vypočítajte limitu:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^3-n+2}{4n^3+3n^2}}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{2n^2-3n}{1-n^2}}$.
5. Vypočítajte limitu:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{4}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3}$.
6. Vypočítajte limitu:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{n+3}\right)^{\frac{n}{2n+3}}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{n+1}\right)^{n+1}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+1}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4n+1}}$.
7. Vypočítajte limitu:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{n}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{2n+1}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

<u>VÝSLEDKY</u>

1. a) $\{a_n\}_{n=1}^5=\left\{-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{7}{4},\ -2,\ -\dfrac{13}{6}\right\}$, klesajúca, ohraničená,

   b) $\{a_n\}_{n=1}^5=\left\{\dfrac{5}{3},\ 5,\ 9\ \dfrac{40}{3},\ \dfrac{125}{7}\right\}$, rastúca, zdola ohraničená,

   c) $\{a_n\}_{n=1}^5=\{0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\}$, ani rastúca, ani klesajúca, ohraničená.
2. **a)** $\dfrac{3}{2}$, **b)** -3, **c)** 0, **d)** ∞, **e)** ∞, **f)** $-\infty$.
3. **a)** 1, **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, **c)** 3, **d)** $-\dfrac{1}{2}$, **e)** 0.
4. **a)** $\dfrac{1}{16}$, **b)** $\dfrac{1}{2}$, **c)** $\dfrac{1}{4}$.
5. **a)** 1, **b)** 1, **c)** 1.
6. **a)** $\sqrt{3}$, **b)** ∞, **c)** ∞.
7. **a)** e, **b)** e^4, **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$.

4

Limita a spojitosť funkcie

4.1 Limita funkcie

Limita funkcie v bode a poskytuje dôležitú informáciu o „správaní sa“ (hodnotách) funkcie v bodoch x, ktoré sú „blízko“bodu a, ale $x \neq a$. Pojem „blízkosti“ sa zavádza pomocou okolí.
Nech $\varepsilon > 0$ a $a \in R$, potom interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ sa nazýva **ε-ové okolie bodu** a, ozn. $O_\varepsilon(a)$ alebo skrátene $O(a)$.
Množinu $\widetilde{O}(a) = O(a) - \{a\} = (a - \varepsilon,\ a) \cup (a,\ a + \varepsilon)$ nazveme **rýdze okolie bodu** a.
$O_\varepsilon^+(a) = (a, a + \varepsilon)$ sa **nazýva pravé okolie bodu** a, $O_\varepsilon^-(a) = (a - \varepsilon, a)$ sa nazýva **ľavé okolie bodu** a.

Nech funkcia f je definovaná v nejakom rýdzom okolí bodu a. Potom

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0:\ x \in \widetilde{O}_\delta(a) \Rightarrow\ f(x) \in O_\varepsilon(b).$$

Číslo b sa nazýva **limita funkcie** f v bode a.

Poznámka: Ak pri zavedení pojmu limity funkcie uvažujeme len jednostranné okolie $O^+(a)$, resp. $O^-(a)$ bodu a hovoríme o **limite sprava**, resp. **limite zľava**, t. j. o jednostranných limitách funkcie f v bode a. Presné definície jednostranných limít nájdete v uvedenej literatúre ([1], [5], [7]).

Nasledujúce tvrdenie hovorí o vzťahu medzi limitou funkcie v bode a a jednostrannými limitami.
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje práve vtedy, ak existuje $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
Potom

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Pre limitu funkcie platia určité vlastnosti, uvedieme len tie najdôležitejšie. Poznamenajme, že dané vlastnosi platia aj pre jednostranné limity.

- Funkcia môže mať v bode a len jednu limitu.
- Ak $f(x) = c,\ c \in R$, tak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

- Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $A,\ B \in R$, tak $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
  $\lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, g(x) = A \,.\, B$,
  $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, ak $B \neq 0$,
  $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = A^B$, ak $A > 0$
- Ak $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$, $\lim\limits_{u\to b} f(u) = A$ a existuje také rýdze okolie $\widetilde{O}(a)$ bodu a, že $\forall\, x \in \widetilde{O}(a)$, je $\varphi(x) \neq b$, tak $\lim\limits_{x\to a} f\left(\varphi(x)\right) = \lim\limits_{u\to b} f(u) = A$.

Poznámka: Ďalšie vlastnosti limity funkcie aj definíciu nejvlastnej limity, či limity v nevlastných bodoch a vlastnosti nevlastných limít nájdete v uvedenej literatúre ([1], [5], [7]). Pri výpočte nevlastných limít funkcií môžeme použiť tie isté pravidlá pri operáciách medzi reálnym číslom a symbolmi $\pm\infty$ ako pri výpočte nevlastných limít postupností. Pravidlá na výpočet vlastných limít funkcie môžeme použiť aj v prípade nevlastných limít, ak výrazy, ktoré dostaneme majú zmysel.

Príklad 1. Vypočítajme limitu funkcie $f(x) = x + 4$ v bodoch $a = -4,\ 0,\ 1$ a v nevlastných bodoch $a = -\infty,\ \infty$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(f) = R$, teda má zmysel počítať limity vo všetkých bodoch. Funkcia je súčtom dvoch funkcií, t. j.

$$f = f_1 + f_2 \qquad \text{kde} \qquad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 4.$$

Keďže z definície ľahko vyplýva, že

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} x = a, \qquad\qquad \lim_{x\to a} f_2(x) = \lim_{x\to a} 4 = 4,$$

tak

$$\lim_{x\to -4}(x+4) = \lim_{x\to -4} x + \lim_{x\to -4} 4 = -4 + 4 = 0.$$

Podobne

$$\lim_{x\to 0}(x+4) = 0 + 4 = 4 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1}(x+4) = 1 + 4 = 5.$$

Pre výpočet limít v nevlasných bodoch použijeme pravidlá pre operácie reálneho čísla a symbolov $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to \infty}(x+4) = \left[\ \infty + 4\ \right] = \infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to -\infty}(x+4) = \left[\ -\infty + 4\ \right] = -\infty.$$

Príklad 2. Vypočítajme limitu funkcie $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}$ v bodoch $a = -3,\ -1,\ 0,\ 2$ a v nevlastných bodoch $a = -\infty,\ \infty$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(f) = \{x \in R: \ x^2 - x - 2 \neq 0\} = R - \{-1, \ 2\}$.

<u>*Počítajme limitu funkcie f v bode $a = -3$.*</u>
Funkcia f je definovaná v bode $a = -3$ a aj na nejakom jeho okolí (napr. na intervale $(-4, \ -2)$). Na výpočet použijeme pravidlo o výpočte limity súčtu, rozdielu a podielu. Potom

$$\lim_{x\to-3} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to-3}(x^2+4x+3)}{\lim\limits_{x\to-3}(x^2-x-2)} = \frac{\lim\limits_{x\to-3} x^2 + 4\lim\limits_{x\to-3} x + \lim\limits_{x\to-3} 3}{\lim\limits_{x\to-3} x^2 - \lim\limits_{x\to-3} x - \lim\limits_{x\to-3} 2} =$$

$$= \frac{9-12+3}{9+3-2} = \frac{0}{10} = 0.$$

<u>*Počítajme limitu funkcie f v bode $a = -1$.*</u>
Bod $a = -1 \notin D(f)$, ale určite existuje rýdze okolie $\widetilde{O}(-1)$ také, že $\widetilde{O}(-1) \subset D(f)$. Nemôžeme použiť predchádzajúci postup, pretože limita menovateľa i čitateľa sa rovná nule. Zlomok najskôr upravíme.

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \frac{(x+3)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+3}{x-2}.$$

Použitá úprava je možná, pretože $x + 1 \neq 0$ pre $\forall \ x \in \widetilde{O}(-1)$ a funkcia, ktorú sme po úprave dostali je rovná pôvodnej funkcii pre $x \neq -1$. Keďže limita menovateľa je teraz rôzna od nuly, môžeme danú limitu už vypočítať. Výpočet trochu urýchlime, pričom je potrebné uvedomiť si, že použijeme vlastnosti na výpočet limity súčtu, rozdielu a podielu. Teda

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to-1} \frac{x+3}{x-2} = \frac{-1+3}{-1-2} = -\frac{2}{3}.$$

<u>*Počítajme limitu funkcie f v bode $a = 0$.*</u>
Funkcia je definovaná v bode $a = 0$ a aj na nejakom okolí $O(0)$. Limita menovateľa je rôzna od nuly, takže túto limitu môžeme priamo vypočítať.

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \frac{0+0+3}{0-0-2} = -\frac{3}{2}.$$

<u>*Počítajme limitu funkcie f v bode $a = 2$.*</u>
Funkcia nie je definovaná v bode 2, ale je definovaná v bodoch nejakého rýdzeho okolia $\widetilde{O}(2)$. Pre $a = 2$ je iba limita menovateľa rovná nule. Podobne ako pri výpočte limity v bode $a = -1$ môžeme funkciu pre $x \neq -1$ upraviť na tvar

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \frac{x+3}{x-2}.$$

Pretože pre $x \in O^+(2)$ je $x > 2$, teda $x - 2 > 0$ a pre $x \in O^-(2)$ je $x < 2$, teda $x - 2 < 0$, budeme počítať jednostranné limity.

Dohovor: Fakt, že limita (jednostranná limita) nejakého výrazu sa rovná nule a výraz je kladný (záporný) na nejakom okolí bodu, v ktorom limitu počítame, budeme zapisovať

0^+ (0^-). Pozor, ak znak 0^+, resp. 0^- bude v menovateli zlomku, nie je to delenie nulou. Je to len pomocný zápis, pre lepšie pochopenie výpočtu.

Na základe tohto dohovoru potom pri výpočte limity môžeme použiť skrátený zápis

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \left| \frac{5}{0^+} \right| = \infty$$

a

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{x-2} = \left| \frac{5}{0^-} \right| = -\infty.$$

Pretože jednostanné limity funkcie v bode 2 sa nerovnajú, limita

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} \qquad \text{neexistuje.}$$

Počítajme limitu funkcie f v nevlastných bodoch $a = \pm\infty$.
Limitu v nevlastnom bode $a = \infty$ počítame podobne ako limitu postupnosti.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1.$$

Pri výpočte limity v nevlastnom bode $a = -\infty$ postupujeme podobne.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1.$$

Príklad 3. Vypočítajme limity:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+3x-2)$, **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-x}{2x^2+6}$, **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^4+3x^2-5x}{x^3+2x-1}$.

Riešenie: Pri výpočte použijeme pravidlá pre operácie s reálnym číslom a výrazmi $\pm\infty$.

a)

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2+3x-2) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right) = \left[(-\infty)^2.(1+0+0) = \infty\,.\,1 \right] = \infty.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-x}{2x^2+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\frac{5}{x}-1\right)}{x^2\left(2+\frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{5}{x}-1}{2+\frac{6}{x^2}} = 0 \cdot \frac{-1}{2} = 0.$$

c)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4+3x^2-5x}{x^3+2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}x\,.\,\frac{2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=$$

$$=\left[\ -\infty\,.\,\frac{2}{1}\ \right]=-\infty.$$

Príklad 4. Vypočítajme limity:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, **b)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x-3}{(x+1)^2}$, **c)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{2-x}$, **d)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-4}{x+2}$.

Riešenie:

a) $D(f)=\{x\in R:\ \ x^2-x\neq 0\}=R-\{0,\ 1\}$, teda funkcia f je definovaná v nejakom rýdzom okolí bodu 1. Limita menovateľa aj čitateľa sa rovná nule. Upravme najskôr funkciu a až potom vypočítajme limitu.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x}=\frac{2}{1}=2.$$

b) $D(f)=R-\{-1\}$. Funkcia je definovaná v nejakom okolí bodu -1. Limita menovateľa sa rovná nule, limita čitateľa je rôzna od nuly. Menovateľ je však kladný pre každé $x\in\widetilde{O}(-1)$. Potom

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x-3}{(x+1)^2}=\left[\frac{-5}{0^+}\right]=-\infty.$$

c) $D(f)=R-\{2\}$. Funkcia je definovaná na nejakom rýdzom okolí bodu 2. Limita menovateľa sa rovná nule, limita čitateľa je rôzna od nuly. Keďže znamienko menovateľa závisí od toho, či $x\in O^+(2)$ alebo $x\in O^-(2)$, vypočítajme jednostranné limity.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x+1}{2-x}=\left[\frac{3}{0^-},\ \text{lebo } x>2\ \Rightarrow\ 2-x<0\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x+1}{2-x}=\left[\frac{3}{0^+},\ \text{lebo } x<2\ \Rightarrow\ 2-x>0\right]=\infty.$$

Keďže

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x+1}{2-x}\neq\lim_{x\to2^-}\frac{x+1}{2-x}\qquad\Rightarrow\qquad\lim_{x\to2}\frac{x+1}{2-x}\qquad\text{neexistuje.}$$

d) $D(f)=R-\{-2\}$. Funkcia je definovaná v nejakom rýdzom okolí $\widetilde{O}(-2)$. Limita menovateľa sarovná nule, limita čitateľa je rôzna od nuly. Pretože znamienko menovateľa závisí od toho, či $x\in O^+(-2)$ alebo $x\in O^-(-2)$, vypočítajme jednostranné limity.

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-4}{x+2}=\left[\frac{-4}{0^+},\ \text{lebo } x>-2\ \Rightarrow\ x+2>0\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+x-4}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^-}, \text{ lebo } x < -2 \ \Rightarrow \ x+2<0 \right] = \infty.$$

Pretože

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+x-4}{x+2} \neq \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+x-4}{x+2} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-4}{x+2} \text{ neexistuje.}$$

Príklad 5. Vypočítajme limity:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$, **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$, **c)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{2-x}-x\right)$, **e)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x}$, **f)** $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x}$.

Riešenie:

a) $D(f) = \{x \in R : \ \sqrt{x+5}-3 \neq 0 \ \wedge \ x+5 \geq 0\} = \langle -5, 4) \cup (4, \infty)$. Funkcia je definovaná na nejakom rýdzom okolí bodu 4. Limita menovateľa aj čitateľa sa rovná nule. Upravme funkciu tak, že rošírime čiteteľa a menovateľa vhodným výrazom, čím odstránime odmocninu z menovateľa a potom vypočítajme limitu.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x+5}\right)^2-3^2} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{x+5-9} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \left(\sqrt{x+5}+3\right) = 6.$$

b) $D(f) = R - \{0\}$, funkcia je definovaná v rýdzom okolí bodu 0. Limita menovateľa aj čitateľa sa rovná nule. Urobme podobnú úpravu ako v predchádzajúcom príklade a vypočítajme potom limitu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+3-3}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

c) $D(f) = \langle 3, \infty)$, teda má zmysel počítať limitu pre $x \to \infty$. Ak by sme počítali zvlášť limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x-3}$ a $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}$, dostaneme neurčitý výraz „$\infty - \infty$“. Rozšírme daný výraz vhodnou jednotkou a vypočítajme limitu.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x-3}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-3-x}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}} = \left[\frac{-3}{\infty+\infty} = \frac{-3}{\infty} \right] = 0.$$

d) $D(f) = (-\infty, 2\rangle$, teda môžeme počítať limitu pre $x \to -\infty$. Keďže $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2-x} = \infty$ a tiež aj $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = \infty$, tak

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2-x} - x\right) = \left[\, \infty + \infty \,\right] = \infty.$$

e) Funkcia je definovaná na $D(f) = R - \{0\}$. Ak počítame zvlášť limitu čitateľa a menovateľa, tak dostaneme neurčitý výraz „$\frac{\infty}{\infty}$“. Najskôr teda musíne funkciu upraviť a až potom vypočítať limitu.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x},$$

pretože $x \to \infty$, teda $x > 0$, a preto $|x| = x$. Potom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{3+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{3}.$$

f) Máme počítať limitu tej istej funkcie ako v predchádzajúcom príklade. Keďže funkcia f je nepárna, tak

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} = -\sqrt{3}.$$

Napriek tomu, však túto limitu vypočítajme. Je to limita typu „$\frac{\infty}{-\infty}$“. Urobíme tie isté úpravy ako v predchádzajúcom príklade, ale je nutné uvedomiť si fakt, že $x \to -\infty$, čiže $x < 0$, a $|x| = -x$. Potom

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}\right) = -\sqrt{3}.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 6.}}$ Vypočítajme limity:

a) $\lim\limits_{x\to-1} 3^{\frac{2}{x+1}}$, **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos x}$, **c)** $\lim\limits_{x\to1} \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{1-x}$, **d)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \ln(2x-1)$.

Riešenie:

a) Funkcia je definovaná na rýdzom okolí bodu -1, $D(f) = R - \{-1\}$. Pre každé $x \in O^-(-1)$ je $x < -1$, teda $x + 1 < 0$, a preto

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{2}{x+1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to-1} 3^{\frac{2}{x+1}} = \left[\, 3^{-\infty} \,\right] = 0.$$

Ak $x \in O^+(-1)$, tak $x > -1$ a $x + 1 > 0$. Potom

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to -1^-} 3^{\frac{2}{x+1}} = \left[\ 3^{\infty}\ \right] = \infty.$$

Keďže

$$\lim_{x\to -1^-} 3^{\frac{2}{x+1}} \neq \lim_{x\to -1^+} 3^{\frac{2}{x+1}},$$

limita danej funkcie neexistuje.

b) Funkcia je definovaná pre každé $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z$, teda je definovaná na nejakom rýdzom okolí bodu $\frac{\pi}{2}$. Ak $x \in O^-\left(\frac{\pi}{2}\right)$, tak $\cos x > 0$, ak $x \in O^+\left(\frac{\pi}{2}\right)$, tak $\cos x < 0$. Vypočítajme teda najskôr jednostranné limity.

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{\cos x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1}{\cos x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$

Pretože jednostranné limity sa nerovnajú, limita funkcie neexistuje.

c) Definičný obor funkcie je $D(f) = R - \{1\}$, má teda zmysel počítať danú limitu. Je to limita zloženej funkcie, jej vedľajšia zložka $u = \dfrac{1}{1-x}$. Pretože

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty,$$

tak vypočítame najskôr jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arccotg} \frac{1}{1-x} = \lim_{u\to\infty} \operatorname{arccotg} u = 0,$$

a

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arccotg} \frac{1}{1-x} = \lim_{u\to -\infty} \operatorname{arccotg} u = \pi.$$

Jednostranné limity sú rôzne, teda funkcia nemá limitu v bode 1.

d) Funkcia je definovaná na $D(f) = \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$. Má teda zmysel počítať limitu sprava v bode $\dfrac{1}{2}$. Daná funkcia je zložená funkcia s vnútornou zložkou $u = 2x - 1$. Pretože

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} (2x-1) = 0, \qquad \text{pričom} \qquad 2x - 1 > 0,$$

tak

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \ln(2x-1) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty.$$

Príklad 7. Vypočítajme limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x+2}$, **b**) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x+2}$, **c**) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x+2}}$,
d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$, **e**) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

Riešenie: Všetky funkcie sú definované v okolí nevlastných bodov, teda má zmysel počítať limity.

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=2 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty}(x+2)=\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x+2}=\left[\;2^{\infty}\;\right]=\infty.$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=2 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x+2}=\left[\;2^{-\infty}\;\right]=0.$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=2 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x+2}}=2^0=1.$$

d) Túto limitu nemôžeme vypočítať priamo, lebo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty}(2x+1)=\infty,$$

a preto dostávame po dosadení neurčitý výraz „1^{∞}“. Pri výpočte takejto limity využijeme, že

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Takže potrebujeme upraviť funkciu, ktorej limitu počítame na uvedený tvar.

$$\frac{x+2}{x+1}=\frac{(x+1)+1}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$$

Ak

$$u=x+1 \qquad \Rightarrow \qquad x=u-1$$

a exponent

$$2x+1=2(u-1)+1=2u-1.$$

Pretože

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)=\infty,$$

tak

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2x+1}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u-1}=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-1}=\lim_{u\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{2}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-1}=e^2.1^{-1}=e^2.$$

e) Opäť máme limtu typu „$1^{-\infty}$“ a budeme postupovať ako v predchádzajúcom príklade.

$$\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+(1-1)-1}{2x+1}=\frac{2x+1-2}{2x+1}=1+\frac{-2}{2x+1}=1+\frac{-2}{2x+1}\cdot\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2}}=1+\frac{1}{-\dfrac{2x+1}{2}}.$$

Ak položíme

$$u=-\frac{2x+1}{2},\qquad \text{tak}\qquad x=\frac{-2u-1}{2}=-u-\frac{1}{2}\qquad \text{a}\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2x+1}{2}\right)=\infty.$$

Potom

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-\dfrac{2x+1}{2}}\right)^{x}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-u-\frac{1}{2}}=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-1}.1^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e}.$$

4.2 Spojitosť funkcie

Hovoríme, že funkcia f je **spojitá v bode** a, ak $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. Hovoríme, že funkcia f je v bode a **spojitá sprava (zľava)**, ak $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ $\left(\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)\right)$.
Funkcia f je s**pojitá na množine** M, ak je spojitá v každom bode množiny M.
Funkcia f je **spojitá na uzavretom intervale** $\langle a,\,b\rangle$, ak je spojitá v každom bode otvoreného intervalu $(a,\,b)$, v bode a je spojitá sprava a v bode b je spojitá zľava.

Platí:
Ak funkcie f a g sú spojité v bode a, tak aj funkcie $f\pm g,\ f.g,\ c.f,\ c\in R$ sú spojité v bode a. Ak okrem toho $g(a)\neq 0$, tak aj funkcia $\dfrac{f}{g}$ je spojitá v bode a.

Každá elementárna funkcia je spojitá na svojom definičnom obore.

Vlastnosti spojitých funkcií na uzavretom intervale

- Funkcia spojitá na uzavretom intervale je na tomto intervale ohraničená.
- Nech funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a,\, b\rangle$. Potom f nadobúda na intervale $\langle a,\, b\rangle$ maximum a minimum, t. j. $\exists\ c_1,\ c_2 \in \langle a,\, b\rangle$, že platí $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ $\forall\ x \in \langle a,\, b\rangle$.
- Nech funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a,\, b\rangle$ a nech $f(a)\,.\,f(b) < 0$. Potom $\exists\ c \in (a, b)$, pre ktoré platí $f(c) = 0$.
- Ak funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a,\, b\rangle$ a nie je to konštantná funkcia, tak obraz intervalu $\langle a,\, b\rangle$ je uzavretý interval. (V prípade, že $f(x) = c,\ c \in R,\ \forall x \in \langle a,\, b\rangle$, tak $f(\langle a,\, b\rangle) = \{c\}$.)

Príklad 8. Zistime, či funkcia $f(x) = \begin{cases} x+2,\ x \in (-\infty,\, 0\rangle \\ e^x + 1,\ x \in (0,\, \infty) \end{cases}$ je spojitá v bode 0.

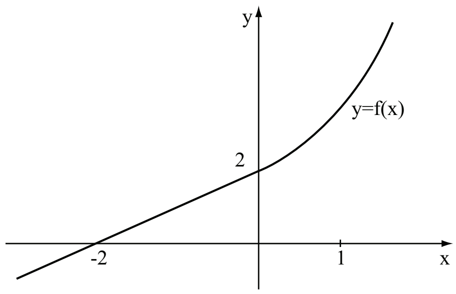
Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Aby bola v bode $a = 0$ spojitá, musí existovať v danom bode limita a musí sa rovnať funkčnej hodnote v tomto bode. Vypočítajme jednostranné limity v tomto bode.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+2) = 0+2 = 2, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(e^x+1) = e^0+1 = 1+1 = 2.$$

Keďže jednostranné limity funkcie sa rovnajú, tak

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \qquad \text{a} \qquad f(0) = 0+2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2,$$

teda funkcia f je spojitá v bode 0. Jej graf je na obrázku 4.1.



Obr. 4.1

Príklad 9. Pre aké $c \in R$ je funkcia $f(x) = \begin{cases} cx,\ x < 1 \\ 2 - \dfrac{x}{c},\ x \ge 1 \end{cases}$ spojitá v bode 1? Nakreslime graf funkcie pre určené c a pre $c = 2$. Grafy porovnajme.

Riešenie: Aby funkcia f bola spojitá v bode 1, tak v tomto bode musí existovať limita funkcie a musí sa rovnať $f(1) = 2 - \dfrac{1}{c}$. Keďže

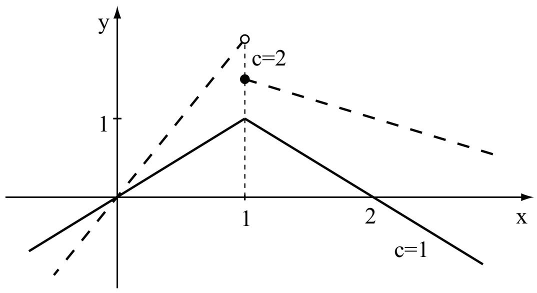
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} cx = c \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(2 - \frac{x}{c}\right) = 2 - \frac{1}{c},$$

limita funkcie existuje práve vtedy, ak jednostranné limity nadobúdajú tú istú hodnotu, teda musí platiť

$$c = 2 - \frac{1}{c} \quad \Leftrightarrow \quad c^2 - 2c + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1.$$

$$\text{Ak} \quad c = 1, \quad \text{tak} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1),$$

teda funkcia je spojitá v bode 1. Na obrázku 4.2 sú nakreslené grafy funkcie pre $c = 1$ a $c = 2$. Kým graf funkcie pre $c = 1$ je neprerušený v bode 1, graf funkcie pre $c = 2$ je v bode 1 „roztrhnutý“.



Obr. 4.2

Príklad 10. Nájdime obor hodnôt funkcie $f(x) = 1 + 2\sqrt{3 - x}$.

Riešenie: Definičný obor funkcie f je $D(f) = \{x \in R :\ 3 - x \geq 0\} = (-\infty, 3\rangle$. Nech

$$x_1,\ x_2 \in D(f) \text{ a } x_1 < x_2.$$

Potom

$$x_1 < x_2 \leq 3 \quad \Rightarrow \quad 3 - x_1 > 3 - x_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3 - x_1} > \sqrt{3 - x_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2\sqrt{3 - x_1} > 1 + 2\sqrt{3 - x_2} \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

a funkcia f je klesajúca na $D(f)$. Keďže funkcia je elementárna, tak je spojitá na svojom definičnom obore $(-\infty, 3\rangle$ a zobrazí ho opäť na interval. Jej najväčšia hodnota nexistuje, pretože $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (1 + 2\sqrt{3 - x}) = \infty$. Najmenšiu hodnotu nadobúda v bode $3 \in D(f)$, teda je rovná $f(3) = 1$. Takže

$$H(f) = \langle 1, \infty).$$

Príklad 11. Ukážme, že funkcia $f(x) = \ln(2x+3)$ je ohraničená na intervale $\langle -1,\, 3\rangle$, nájdime maximum a minimum funkcie na $\langle -1,\, 3\rangle$ a nájdime interval, na ktorý zobrazí funkcia f interval $\langle -1,\, 3\rangle$.

Riešenie: $D(f) = \{x \in R:\ 2x+3>0\} = \left(-\frac{3}{2},\, \infty\right)$. Funkcia f je elementárna funkcia, teda je spojitá na svojom definičnom obore a z toho vyplýva, že je spojitá aj na intervale $\langle -1,\, 3\rangle \subset D(f)$. Z vlastností spojitej funkcie na uzavretom intervale vyplýva, že je na intervale $\langle -1, 3\rangle$ ohraničená.
Zo spojitosti funkcie tiež vyplýva, že na intervale určite nadobúda maximum a minimum. Keďže pre každé

$$x_1,\ x_2 \in \langle -1,\, 3\rangle,\ x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_1+3 < 2x_2+3 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \ln(2x_1+3) < \ln(2x_2+3) \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2),$$

teda funkcia f je rastúca na intervale $\langle -1,\, 3\rangle$, a preto

$$\min_{x\in\langle -1,\, 3\rangle} f(x) = f(-1) = \ln(-2+3) = 0 \qquad \text{a} \qquad \max_{x\in\langle -1,\, 3\rangle} f(x) = f(3) = \ln(6+3) = \ln 9.$$

Obraz intervalu je potom opäť uzavretý inteval, ktorý sa rovná

$$f\left(\langle -1,\, 3\rangle\right) = \left\langle \min_{x\in\langle -1,\, 3\rangle} f(x),\ \max_{x\in\langle -1,\, 3\rangle} f(x)\right\rangle = \langle 0, \ln 9\rangle.$$

Príklad 12. Ukážme, že rovnica $\cos x + x + 1 = 0$ má na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2},\, 0\right\rangle$ aspoň jeden koreň.

Riešenie: Funkcia $f(x) = \cos x + x + 1$ má $D(f) = R$, je to elementárna funkcia, teda je spojitá na R, a preto je spojitá aj na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2},\, 0\right\rangle \subset R$.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0, \qquad f(0) = \cos 0 + 0 + 1 = 2 > 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right).f(0) < 0,$$

teda existuje také číslo

$$c \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \qquad \text{že} \qquad f(c) = 0.$$

Z toho vyplýva, že číslo c je koreňom danej rovnice.

4.3 Asymptoty grafu funkcie

Ak existuje priamka, ku ktorej sa približujú body grafu funkcie, tak takáto priamka sa nazýva **asymptota** grafu funkcie.
Môžu nastať dva prípady:
a) asymptota nie je kolmá na os x - nazýva sa **asymptota so smernicou**,
b) asymptota je kolmá na os x - nazýva sa **asymptota bez smernice**.

Na nájdenie asymptoty so smernicou nám slúži nasledujúce tvrdenie, ktoré dáva návod na praktický výpočet.

- Priamka $y = kx + q$ je asymptota so smernicou grafu funkcie f pre „$x \to \infty$" práve vtedy, ak súčasne platí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)\,.$$

  Podobné tvrdenie platí aj pre „$x \to -\infty$".

Pre asymptotu bez smernice platí:

- Priamka $x = a$ je asymptota bez smernice grafu funkcie f, ak platí aspoň jeden z nasledujúcich vzťahov:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Z uvedenej definície vyplýva, že priamka $x = a$ môže byť asymptotou bez smernice, len ak funkcia nie je v bode a definovaná, ale má zmysel počítať aspoň jednu z jednostranných limít. Ak funkcia f je spojitá na množine R, tak nemá asymptoty bez smernice.

$\boxed{\textbf{Príklad 13.}}$ Nájdime asymptoty grafu funkcie $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 2}$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(f) = \{x \in R;\ x^2 + 3x + 2 \neq 0\} = R - \{-2,\ -1\}$. Funkcia nie je definovaná v bodoch -2, -1, ale na nejakom rýdzom okolí týchto bodov je definovaná, teda priamky $x = -2$, $x = -1$ môžu, ale nemusia byť asymptoty bez smernice. Pretože

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-5}{x+1} = \frac{-7}{-1} = 7,$$

tak jednostranné limity sú rovné limite funkcie, teda sú vlastné a priamka $x = -2$ nie je asymptota bez smernice. Získaný výsledok však dáva informáciu o tom, že v okolí bodu -2 sa hodnoty funkcie „blíža" k hodnote 7.
Vypočítajme limitu sprava v bode -1.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-5}{x+1} = \left[\frac{-6}{0^+}\right] = -\infty.$$

Limita je nevlastná a z definície asymptoty bez smernice dostávame, že priamka $x = -1$ je asymptota bez smernice. Limitu zľava už nemusíme počítať. Ak však chcemem vedieť, ako sa funkcia správa aj v ľavom okolí bodu, tak túto limitu vypočítame a dostaneme

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-3x-10}{x^2+3x+2} = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = \infty.$$

Nájdime, ak existuje, asymptotu so smernicou (priamku s rovnicou $y = kx + q$) pre „$x \to \infty$“.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+3x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-10}{x(x^2+3x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}}{x\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)} = 0,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k\,.\,x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3x-10}{x^2+3x+2} - 0\,.\,x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-10}{x^2+3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{10}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 1.$$

Asymptota so smernicou pre „$x \to \infty$“ má rovnicu

$$y = 0\,.\,x + 1 = 1.$$

Pre asymptotu so smernicou pre „$x \to -\infty$“ úplne tými istými úpravami dostaneme

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+3x+2}}{x} = 0$$

a

$$q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k\,.\,x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x-10}{x^2+3x+2} = 1.$$

Asymptota so smernicou pre „$x \to -\infty$“ má teda rovnicu

$$y = 1.$$

Funkcia má jednu asymptotu bez smernice s rovnicou $x = -1$ a spoločnú asymptotu so smernicou pre „$x \to \infty$“ a „$x \to -\infty$“ s rovnicou $y = 1$. Je to priamka rovnobežná s osou y.

Príklad 14. Nájdime asymptoty grafu funkcie $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(f) = R$ a funkcia je spojitá, teda nemá asymptoty bez smernice. (Limita pre každé reálne číslo a je vlastná a rovná sa $f(a) \in R$.) Nájdime asymptoty so smernicou.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{4} = 2$$

a

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) = \left[\ \infty - \infty\ \right] = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) \cdot \frac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{4x^2+1}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0,$$

takže pre „$x \to \infty$“ má asymptota so smernicou rovnicu

$$y = 2x.$$

Pretože funkcia f je párna, jej graf je symetrický podľa súradnicovej osi y, jej asymptota v bode $-\infty$ bude tiež symetrická podľa osi y a jej rovnica je $y = -2x$, o čom sa môžeme presvedčiť aj výpočtom. Pre „$x \to -\infty$“dostaneme:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right) = -\sqrt{4} = -2$$

a

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) = \left[\ \infty - \infty\ \right] = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) \cdot \frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{\sqrt{4x^2+1}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x} =$$

$$= \left[\frac{1}{\infty - (-\infty)} = \frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

Rovnica asymptoty so smernicou pre „$x \to -\infty$“ je potom

$$y = -2x.$$

Uvedomme si, že grafom funkcie je časť hyperboly $-4x^2 + y^2 = 1$, ktorá sa nachádza nad osou x a nájdené asymptoty sú asymptotami tejto hyperboly.

Príklad 15. Nájdime asymptoty grafu funkcie $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

Riešenie: Definičný obor $D(f) = \{x \in R;\ 4 - x^2 > 0\} = (-2,\ 2)$. Funkcia je definovaná na ohraničenom intervale, taže nemá zmysel počítať limity v nevlastných bodoch. Odtiaľ vyplýva, že funkcia nemá asymptoty so smernicou. Priamky $x = -2$ a $x = 2$ by mohli byť asymptotami bez smernice, pretože funkcia v bodoch ± 2 nie je definovaná, ale je definovaná v pravom okolí $O^+(-2)$ bodu -2 a v ľavom okolí $O^-(2)$ bodu 2. Označme $u = 4 - x^2$ a použime vetu o limite zloženej funkcie. Platí

$$\lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = \lim_{u \to 0+} \ln u = -\infty.$$

Keďže limita je nevlastná, priamka $x = -2$ je asymptota bez smernice. Podobne

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = \lim_{u \to 0+} \ln u = -\infty,$$

z čoho vyplýva, že graf funkcie f má aj druhú asymptotu bez smernice, ktorej rovnica je $x = 2$.
Stačilo nám nájsť iba jednu asymptotu a na zistenie druhej asymptoty, využiť, že funkcia f je párna, teda asymptoty bez smernice, tak ako aj graf funkcie, musia byť symetrické podľa súradnicovej osi y.

Príklad 16. Nájdime asymptoty grafu funkcie $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$.

Riešenie: Funkcia je definovaná na $D(f) = \{x \in R;\ 1 - x \neq 0\} = R - \{1\}$. Vzhľadom na definičný obor, priamka $x = 1$ by mohla byť asymptotou bez smernice grafu funkcie f. Na overenie tohto faktu počítajme

$$\lim_{x \to 1^+} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left[2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} \right] = 0.$$

Pretože limita sprava je vlastná, potrebujeme vypočítať ešte aj limitu zľava v bode 1.

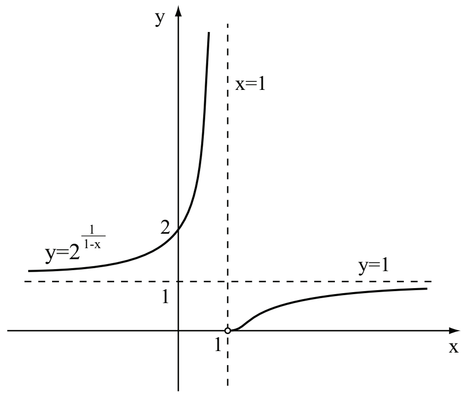
$$\lim_{x \to 1^-} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left[2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{\infty} \right] = \infty.$$

Keďže limita zľava je nevlastná, z toho vyplýva, že priamka $x = 1$ je asymptota bez smernice.

Nájdime asymptoty so smernicou. Budeme, pokiaľ sa dá, súčasne počítať limity pre $\pm\infty$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2^{\frac{1}{1-x}}}{x} = \left[\frac{2^0}{\pm\infty} = \frac{1}{\pm\infty} \right] = 0, \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2^{\frac{1}{1-x}} - 0 \, . \, x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} 2^{\frac{1}{1-x}} = 2^0 = 1,$$

z čoho vyplýva, že $y = 1$ je asymptota so smernicou pre „$x \to \pm\infty$“. Graf funkcie f a asymptoty sú znázornené na obrázku 4.3.



Obr. 4.3

Príklad 17. Nájdime asymptoty grafu funkcie $f(x) = \operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$.

Riešenie: $D(f) = R - \{0\}$, teda priamka $x = 0$ by mohla byť asymptotou bez smernice. Vypočítajme limitu funkcie f v bode 0 sprava.

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \left| u = \frac{1}{x} \text{ a } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty \right| = \lim_{u\to\infty} \operatorname{arccotg} u = 0.$$

Keďže táto limita je vlastná, vypočítajme ešte limitu zľava.

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \left| u = \frac{1}{x} \text{ a } \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty \right| = \lim_{u\to-\infty} \operatorname{arccotg} u = \pi.$$

Aj táto limita je vlastná, teda graf funkcie nemá asymptoty bez smernice.

Nájdime asymptoty so smernicou, ak existujú. Výpočet trochu urýchlime, budeme počítať, pokiaľ sa bude dať súčasne limity pre $\pm\infty$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arccotg}\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = 0 \,.\, \operatorname{arccotg} 0 = 0 \,.\, \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Priamka $y = \dfrac{\pi}{2}$ je asymptota so smernicou pre „$x \to \pm\infty$“.

Príklad 18. Nájdime asymptoty grafu funkcie $f(x) = x^3 - 5x + 1$.

Riešenie: $D(f)$=R a funkcia f je spojitá, teda graf funkcie nemá asymptoty bez smernice. Nájdime, ak existujú koeficienty k a q v rovnici asymptoty so smernicou.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5x+1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2-5+\frac{1}{x}\right)=\infty.$$

Keďže limita je nevlastná, graf funkcie nemá asymptoty so smernicou.

4.4 Cvičenia

1. Vypočítajte limitu:
   a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$,
   d) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1-x^2}{x+1}\right)^2$, **e)** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$, **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-2x}{(x-1)^2}$.
2. Vypočítajte limitu:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4}{2x^2-3x+2}$, **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4}{x^3-3x+2}$, **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{x+2}$,
   d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+2x-4\right)$.
3. Vypočítajte limitu:
   a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$, **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x}$,
   d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$, **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$.
4. Vypočítajte jednostanné limity:
   a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{1-x}$, **b)** $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x-2}{x+2}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$, **d)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg}x$.
5. Vypočítajte limity:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+5}\right)^{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+5}\right)^{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x+5}\right)^{\frac{x-1}{2x+3}}$
   d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x-1}$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x}$.
6. Zistite, na akú množinu zobrazí funkcia f interval J, ak
   a) $f(x)=x^2+3$, $J=\langle 1,\,5\rangle$, **b)** $f(x)=1+\arccos\dfrac{x}{2}$, $J=\langle 0,\,1\rangle$.
7. Ukážte, že daná rovnica ($f(x)=0$) má na intervale J aspoň jeden koreň, ak
   a) $x^3-x-1=0$, $J=\langle 0,\,2\rangle$, **b)** $e^x+x=0$, $J=\langle -1,\,0\rangle$.
8. Určte definičný obor funkcie a nájdite asymptoty grafu funkcie
   a) $f(x)=3x+\dfrac{3}{x-2}$, **b)** $f(x)=1+e^{\frac{1}{x}}$, **c)** $\dfrac{1}{\ln x}$ **d)** $f(x)=x+2\operatorname{arctg}x$.

VÝSLEDKY

1. **a)** 6, **b)** $\dfrac{1}{4}$, **c)** 0, **d)** 4, **e)** 2, **f)** $-\infty$.
2. **a)** $\dfrac{3}{2}$, **b)** 0, **c)** ∞, **d)** ∞.

3. **a)** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, **b)** $\dfrac{1}{4}$, **c)** $-\sqrt{2}$, **d)** 0, **e)** $-\infty$.

4. **a)** $-\infty$, **b)** ∞, **c)** $-\infty$, **d)** ∞.

5. **a)** 0, **b)** ∞, **c)** $\sqrt{3}$, **d)** e, **a)** e^{-2}.

6. **a)** $\langle 4,\ 28\rangle$ **b)** $\left\langle 1+\dfrac{\pi}{3},\ 1+\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$.

7. **a)** $f(0)=-1,\ f(2)=5$, **b)** $f(-1)=\dfrac{1}{e}-1 \doteq -0{,}632121,\quad f(0)=1$.

8. a) $D(f)=R-\{2\}$, ABS: $x=2$, ASS: $y=3x$ pre $x\to\pm\infty$,
   b) $D(f)=R-\{0\}$, ABS: $x=0$, ASS: $y=2$ pre $x\to\pm\infty$,
   c) $D(f)=(0,\ 1)\cup(1,\ \infty)$, ABS: $x=1$, ASS: $y=0$ pre $x\to\infty$,
   d) $D(f)=R$, ASS: $y=x+\pi$ pre $x\to\infty$, $y=x-\pi$ pre $x\to-\infty$.

5

Derivácia funkcie

5.1 Výpočet derivácie funkcie

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x_0. Ak existuje vlastná

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

tak túto limitu nazývame **derivácia funkcie** f **v bode** x_0 a označujeme $f'(x_0)$, resp. $\dfrac{df(x_0)}{dx}$. Teda

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ak $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ je nevlastná hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 nevlastnú deriváciu.

Poznámka: Jednostranné derivácie definujeme pomocou jednostranných limít. Derivácia funkcie v bode x_0 existuje, ak existujú jednostrané derivácie v tomto bode a rovnajú sa.

Ak existuje derivácia funkcie f v bode x_0, tak dotyčnica grafu funkcie f v bode dotyku $T = [x_0, f(x_0)]$ má smernicu rovnú derivácii $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 a jej rovnica je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nech funkcia f má deriváciu v každom bode množiny $M \subset D(f)$. Funkcia, ktorá každému bodu $x_0 \in M$ priradí hodnotu $f'(x_0)$ sa nazýva **derivácia funkcie** f **na množine** M a označujeme ju f', resp. $\dfrac{df}{dx}$.

<u>Základné pravidlá derivovania</u>

Nech funkcie f a g majú na množine M deriváciu a nech $c \in R$. Potom na množine M majú deriváciu aj funkcie $c\,.\,f$, $f \pm g$, $f\,.\,g$ a platí:

- $[c\,.\,f[(x)]' = c\,.\,f'(x)$,
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$,
- $[f(x)\,.\,g(x)]' = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)$,

- ak navyše $g(x) \neq 0$ pre každé $x \in M$, tak existuje na množine M aj derivácia funkcie $\dfrac{f}{g}$ a platí $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\,.\,g(x) - f(x)\,.\,g'(x)}{g^2(x)}$.

Derivácia zloženej funkcie

Majme zloženú funkciu $F(x) = f(\varphi(x))$. Ak na množine M existuje drivácia φ' a na množine $\varphi(M)$ existuje f', tak pre deriváciu funkcie F na M platí

$$F'(x) = [f(\varphi(x))]' = f'(u)\,.\,\varphi'(x), \quad \text{kde} \quad u = \varphi(x).$$

Vzorce na derivovanie elementárnych funkcií

1. $c' = 0, \qquad c \in R$
2. $[x^\alpha]' = \alpha\, x^{\alpha-1}, \qquad \alpha \in R,$ x je z množiny, kde má výraz $x^{\alpha-1}$ zmysel
3. $[a^x]' = a^x \ln a, \qquad x \in R$
4. $[e^x]' = e^x, \qquad x \in R$
5. $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}, \qquad x > 0$
6. $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}, \qquad x > 0$
7. $[\sin x]' = \cos x, \qquad x \in R$
8. $[\cos x]' = -\sin x, \qquad x \in R$
9. $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$
10. $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \qquad x \neq k\pi, \quad k \in Z$
11. $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1)$
12. $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1)$
13. $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{x^2+1}, \qquad x \in R$
14. $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{x^2+1}, \qquad x \in R$

$\boxed{\textbf{Príklad 1.}}$ Pomocou definície derivácie funkcie vypočítajme, ak existuje, deriváciu funkcie f v bode x_0, ak

a) $f(x) = x^2 \qquad x_0 = -2,$ **b)** $f(x) = x^3 + 1 \qquad x_0 = 2,$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \qquad x_0 = -1,$ **d)** $f(x) = |x - 1| \qquad x_0 = 1.$

Riešenie:

a) Funkcia f je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Zistime, či existuje limita

$$\lim_{x\to-2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{x^2 - 4}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to-2}(x-2) = -4.$$

Potom podľa definície

$$f'(-2) = -4.$$

b) $D(f) = R$, teda má zmysel zisťovať deriváciu funkcie v bode $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{x^3 + 1 - (8+1)}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{x^3 - 8}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to2}(x^2+2x+4) = 12 \qquad \Rightarrow \qquad f'(2) = 12.$$

c) Funkcia f je definovaná na množine reálnych čísel. Potom

$$\lim_{x\to-1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 0}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty.$$

Takže funkcia f má v bode $x_0 = -1$ nevlastnú deriváciu ∞.

d) Funkcia f je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Zistime, či existuje limita

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{|x-1| - |0|}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{|x-1|}{x-1}.$$

Aby sme mohli vypočítať túto limitu, potrebujeme vypočítať jednostranné limity v bode $x_0 = 1$. Pretože

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

limita funkcie neexistuje, teda neexistuje ani derivácia $f'(1)$.

Pomocou jednostranných limít sme vypočítali, že derivácia zľava $f'_-(1) = -1$ a derivácia sprava $f'_+(1) = 1$.

Poznámka: V ďalších príkladoch predpokladáme, že výpočty sú robené na množine, kde daná funkcia je definovaná a kde má deriváciu. Tieto množiny nebudeme uvádzať. Taktiež výrazy, ktoré dostaneme po zderivovaní, nebudeme všetky zjednodušovať. Tieto úpravy si môže v rámci domáceho cvičenia urobiť čitateľ sám.

$\boxed{\textbf{Príklad 2.}}$ Vypočítajme deriváciu funkcie:

a) $f(x) = x^3 + \sqrt{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$, **b**) $f(x) = x^4 + 4^x - e^x + 4$,

c)$f(x) = \log_2 x - 3\ln x$, **d**) $f(x) = \sin x - 5\cos x + \text{tg } x - \text{cotg } x$,

e)$f(x) = 2\arcsin x - \arccos x$, **f**) $f(x) = \text{arctg}\, x + 5\,\text{arccotg}\, x$.

Riešenie: Pri výpočte všetkých príkladov použijeme pravidlo na derivovanie súčtu funkcií a deriváciu súčinu konštanty a funkcie.

a) Aby sme mohli danú funkciu zderivovať, najskôr si funkciu upravíme na súčet mocnín tak, aby sme mohli použiť vzorec $[x^\alpha]' = \alpha\, x^{\alpha-1}$. Teda

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = x^3 + x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-1} - 3x^{-\frac{1}{3}}.$$

Potom

$$f'(x) = \left[x^3\right]' + \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' + 2\left[x^{-1}\right]' - 3\left[x^{-\frac{1}{3}}\right]' =$$

$$= 3x^{3-1} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 2\,.(-1)x^{-1-1} - 3\,.\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} = 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-2} + x^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

b) V predpise funkcie sa nachádza mocninová funkcia a exponenciálne funkcie. Preto použijeme vzorec, ktorý sme použili v predchádzajúcom príklade a pri derivovaní exponenciálnej funkcie využijeme fakt, že vo vzorci 3 máme $a = 4$. Potom

$$f'(x) = \left[x^4\right]' + \left[4^x\right]' - \left[e^x\right]' + [4]' = 4x^{4-1} + 4^x\ln 4 - e^x + 0 = 4x^3 + 4^x\ln 4 - e^x.$$

c) Pri výpočte použijeme vzorce na derivovanie logaritmickej funkcie, pričom základ prvej logaritmickej funkcie $a = 2$.

$$f'(x) = [\log_2 x]' - 3\,[\ln x]' = \frac{1}{x\ln 2} - 3\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln 2} - \frac{3}{x}.$$

d) Použijeme vzorce na derivovanie goniometrických funkcií.

$$f'(x) = [\sin x]' - 5\,[\cos x]' + [\text{tg } x]' - [\text{cotg } x]' = \cos x - 5(-\sin x) + \frac{1}{\cos^2 x} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= \cos x + 5\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \cos x + 5\sin x + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x} =$$

$$= \cos x + 5\sin x + \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}.$$

e) Počítajme deriváciu cyklometrických funkcií.

$$f'(x) = 2\,[\arcsin x]' - [\arccos x]' = 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

f) Výpočet derivácie je opäť na priame použitie vzorcov.

$$f'(x) = [\operatorname{arctg} x]' + 5\,[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{1}{1+x^2} + 5\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{5}{1+x^2} = -\frac{4}{1+x^2}.$$

Príklad 3. Vypočítajme deriváciu funkcie:

a) $f(x) = (x^3 + 2x - 5)\sin x$, **b)** $f(x) = \sqrt{x}\ln x$, **c)** $f(x) = e^x \operatorname{arctg} x$,

d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, **e)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{3^x}$, **f)** $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x - e^x}$.

Riešenie: Na výpočet derivácie funkcie v prvých troch príkladoch použijeme pravidlo na derivovanie súčinu, súčtu a rozdielu funkcií, v ďalších pravidlo na derivovanie podielu, súčtu a rozdielu dvoch funkcií.

a)

$$f'(x) = \left[(x^3+2x-5).\,\sin x\right]' = \left[x^3+2x-5\right]'.\,\sin x + (x^3+2x-5).\,[\sin x]' =$$

$$= (3x^2+2)\sin x + (x^3+2x-5)(\cos x) = (3x^2+2)\sin x + (x^3+2x-5)\cos x.$$

b)

$$f'(x) = \left[\sqrt{x}.\,\ln x\right]' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]'.\,\ln x + \sqrt{x}.\,[\ln x]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln x + \sqrt{x}.\,\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}.$$

c)

$$f'(x) = [e^x.\operatorname{arctg} x]' = [e^x]'.\operatorname{arctg} x + e^x.\,[\operatorname{arctg} x]' = e^x \operatorname{arctg} x + e^x.\,\frac{1}{1+x^2} =$$

$$= e^x\left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}\right).$$

d)

$$f'(x) = \left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]' = \frac{[x^2+1]'.(x^2-1) - (x^2+1).[x^2-1]'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x\,(x^2-1) - (x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x\,(x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

e)

$$f'(x) = \left[\frac{\cos x}{3^x}\right]' = \frac{[\cos x]'.\,3^x - \cos x\,.\,[3^x]'}{(3^x)^2} = \frac{(-\sin x\, 3^x - \cos x\, 3^x\,\ln 3)}{3^{2x}} =$$

$$= \frac{3^x\,(-\sin x - \ln 3\,\cos x)}{3^{2x}} = -\frac{\sin x + \ln 3\,\cos x}{3^x}.$$

f)

$$f'(x) = \left[\frac{\operatorname{tg}\,x}{x - e^x}\right]' = \frac{[\operatorname{tg}\,x]'.\,(x - e^x) - \operatorname{tg}\,x\,.\,[x - e^x]'}{(x - e^x)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\,(x - e^x) - \operatorname{tg}\,x\,(1 - e^x)}{(x - e^x)^2}.$$

Príklad 4. Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = \dfrac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{\log_2 x}$.

Riešenie: Máme derivovať podiel dvoch funkcií, pričom v čitateli je je súčin funkcií. Postupne použijeme pravidlá na derivovanie.

$$f'(x) = \left[\frac{(x^2+1).\operatorname{arctg} x}{\log_2 x}\right]' = \frac{\left[(x^2+1).\operatorname{arctg} x\right]'.\,\log_2 x - (x^2+1).\operatorname{arctg} x\,.\,[\log_2 x]'}{\log_2^2 x} =$$

$$= \frac{\left([x^2+1]'.\operatorname{arctg} x + (x^2+1).\,[\operatorname{arctg} x]'\right).\,\log_2 x - (x^2+1)\operatorname{arctg}\,x\,\frac{1}{x\ln 2}}{\log_2^2 x} =$$

$$= \frac{\left(2x\operatorname{arctg} x + (x^2+1)\,\frac{1}{x^2+1}\right)\log_2 x - (x^2+1)\ \operatorname{arctg}\,x\,\frac{1}{x\ln 2}}{\log_2^2 x} =$$

$$= \frac{(2x\operatorname{arctg}\,x + 1)\log_2 x - \frac{(x^2+1)\operatorname{arctg}\,x}{x\ln 2}}{\log_2^2 x}.$$

Príklad 5. Vypočítajme deriváciu funkcie:

a) $f(x) = (2x-3)^{10}$, **b)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2x}$, **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$, **d)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+4}}$,

e) $f(x) = \sin^2 x$, **f)** $f(x) = \sqrt{\ln x}$, **g)** $f(x) = \dfrac{2}{\arcsin^3 x}$, **h)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}$.

Riešenie: Všetky funkcie, ktoré máme derivovať sú zložené funkcie a na výpočet derivácie teda použijeme pravidlo na derivovanie zloženej funkcie.

a) Vnútorná zložka danej funkcie je $u = 2x - 3$. Označme ju aj pri výpočte a zapíšme v rámci riešenia príkladu medzi dve vertikálne čiary.

$$f'(x) = \left[(2x-3)^{10}\right]' = \left|\ u = 2x-3\ \right| = \left[u^{10}\right]'.\,[2x-3]' = 10u^9.\,2 = 20\,(2x-3)^9.$$

b)

$$f'(x) = \left[(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}\right]' = \left| \, u = x^2-2x \, \right| = \left[u^{\frac{1}{3}}\right]' . \left[x^2-2x\right]' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\,(2x-2) =$$

$$= \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{u^2}} = \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}.$$

c)

$$f'(x) = \left[(x+5)^{-1}\right]' = \left| \, u = x+5 \, \right| = \left[u^{-1}\right]' . \, [x+5]' = -1\,.\,u^{-2}.\,1 = -\,\frac{1}{u^2} = -\,\frac{1}{(x+5)^2}.$$

d)

$$f'(x) = \left[(x^3+4)^{-\frac{1}{2}}\right]' = \left| \, u = x^3+4 \, \right| = \left[u^{-\frac{1}{2}}\right]' . \left[x^3+4\right]' = -\,\frac{1}{2}\,u^{-\frac{3}{2}}.\,3x^2 = -\,\frac{3x^2}{2\sqrt{u^3}} =$$

$$= -\,\frac{3x^2}{2\sqrt{(x^3+4)^3}}.$$

e)

$$f'(x) = \left[(\sin x)^2\right]' = \left| \, u = \sin x \, \right| = \left[u^2\right]' . \, [\sin x]' = 2u\,\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

f)

$$f'(x) = \left[(\ln x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \left| \, u = \ln x \, \right| = \left[u^{\frac{1}{2}}\right]' . \, [\ln x]' = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{u}\,x} = \frac{1}{2x\,\sqrt{\ln x}}.$$

g)

$$f'(x) = 2\left[(\arcsin x)^{-3}\right]' = \left| \, u = \arcsin x \, \right| = 2\left[u^{-3}\right]' . \, [\arcsin x]' = 2\,.(-3)u^{-4}.\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -6\,\frac{1}{u^4}.\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\,\frac{6}{\arcsin^4 x\,\sqrt{1-x^2}}.$$

h)

$$f'(x) = \left[(\cos x)^{-\frac{1}{3}}\right]' = \left| \, u = \cos x \, \right| = \left[u^{-\frac{1}{3}}\right]' . \, [\cos x]' = -\,\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\,(-\sin x) = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{u^4}} =$$

$$= \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}}.$$

Ak sme sa už naučili deriváciu zloženej funkcie, tak môžeme potom výpočet urýchliť. Vnútornú zložku nemusíme označovať a môžeme písať:

$$f'(x) = \left[(\cos x)^{-\frac{1}{3}}\right]' = -\frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{4}{3}} . [\cos x]' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}}(-\sin x) = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}}.$$

Príklad 6. Vypočítajme deriváciu funkcie:

a) $f(x) = e^{x^3-x}$, **b**)$f(x) = \operatorname{tg} 2^x$ **c**) $f(x) = \ln \sin x$,

d) $f(x) = \arccos\sqrt{x}$, **e**) $f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$, **f**) $f(x) = \log(x^2 + 4)$.

Riešenie: Na výpočet derivácie použijeme pravidlo pre derivovanie zloženej funkcie a vzorce pre derivovanie základných elementárnych funkcií.

a)

$$f'(x) = \left[e^{x^3-x}\right]' = \left| u = x^3 - x \right| = [e^u]' , [x^3 - x]' = e^u(3x^2 - 1) = e^{x^3-x}(3x^2 - 1),$$

resp.

$$f'(x) = \left[e^{x^3-x}\right]' = e^{x^3-x}. \left[x^3 - x\right]' = e^{x^3-x}\left(3x^2 - 1\right).$$

b)

$$f'(x) = [\operatorname{tg}\, 2^x]' = \left| u = 2^x \right| = [\operatorname{tg}\, u]' . [2^x]' = \frac{1}{\cos^2 u} 2^x \ln 2 = \frac{2^x \ln 2}{\cos^2 2^x},$$

resp.

$$f'(x) = [\operatorname{tg}\, 2^x]' = \frac{1}{\cos^2 2^x}. [2^x]' = \frac{2^x \ln 2}{\cos^2 2^x}.$$

c)

$$f'(x) = [\ln \sin x]' = \frac{1}{\sin x}. [\sin x]' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x.$$

d)

$$f'(x) = \left[\arccos\sqrt{x}\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} . \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x}} . \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

e)

$$f'(x) = \left[\operatorname{arccotg}\frac{1}{x}\right]' = \frac{-1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} . \left[x^{-1}\right]' = \frac{-x^2}{1 + x^2} . \left(-1. x^{-2}\right) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

f)

$$f'(x) = \left[\log(x^2+4)\right]' = \frac{1}{(x^2+4)\ \ln 10} .\ \left[x^2+4\right]' = \frac{1}{(x^2+4)\ \ln 10}\, 2x = \frac{2x}{(x^2+4)\ \ln 10}.$$

Príklad 7. Vypočítajme deriváciu funkcie:

a) $f(x) = \log_3(2x)\ \sin x$, **b)** $f(x) = (x^3-1)\ \operatorname{arccotg}(e^x)$, **c)** $f(x) = \sqrt{\ln x}.\ \operatorname{tg}\ x$,

d) $f(x) = \dfrac{2^{\operatorname{cotg} x}}{\arcsin x}$, **e)** $f(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x}$, **f)** $f(x) = \dfrac{3x^2+2x}{\arccos^2 x}$.

Riešenie: V prvých troch príkladoch máme derivovať súčin dvoch funkcií, ďalšie príklady sú na deriváciu podielu dvoch funkcií, pričom jedna z funkcií je zložená funkcia. Teraz už nebudeme označovať vnútornú zložku funkcie. Nesmieme však zabudnúť použiť pravidlo pre derivovanie súčinu, resp. podielu dvoch funkcií a tiež aj pre deriváciu zloženej funkcie. Získané derivácie nebudeme upravovať.

a)

$$f'(x) = [\log_3(2x)\ .\ \sin x]' = [\log_3(2x)]'\ .\ \sin x + \log_3(2x)\ .\ [\sin x]' =$$

$$= \frac{1}{2x\ \ln 3}\ .\ [2x]'\ \sin x + \log_3(2x)\ \cos x = \frac{\sin x}{2x\ \ln 3}\ .\ 2 + \log_3(2x)\ \cos x =$$

$$= \frac{\sin x}{x\ \ln 3} + \log_3(2x)\ \cos x.$$

b)

$$f'(x) = \left[\left(x^3-1\right) .\ \operatorname{arccotg}(e^x)\right]' = \left[x^3-1\right]' .\ \operatorname{arccotg}(e^x) + \left(x^3-1\right)\ .\ [\operatorname{arccotg}(e^x)]' =$$

$$= 3x^2 \operatorname{arccotg}(e^x) + \left(x^3-1\right)\ .\ \frac{1}{1+(e^x)^2}\ .\ [e^x]' = 3x^2 \operatorname{arccotg}(e^x) + \frac{x^3-1}{1+e^{2x}}\ .\ e^x.$$

c)

$$f'(x) = \left[\sqrt{\ln x}\ .\ \operatorname{tg} x\right]' = \left[(\ln x)^{\frac{1}{2}}\right]' .\ \operatorname{tg} x + \sqrt{\ln x}\ .\ [\operatorname{tg} x]' =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\ .\ [\ln x]'\ \operatorname{tg} x + \sqrt{\ln x}\ .\ \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\ .\ \frac{1}{x}\ .\ \operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{\ln x}}{\cos^2 x}.$$

d)

$$f'(x) = \left[\frac{2^{\operatorname{cotg} x}}{\arcsin x}\right]' = \frac{\left[2^{\operatorname{cotg} x}\right]'\ .\ \arcsin x - 2^{\operatorname{cotg} x}\ .\ [\arcsin x]'}{\arcsin^2 x} =$$

$$= \frac{2^{\operatorname{cotg} x}\ \ln 2\ .\ [\operatorname{cotg} x]'\ \arcsin x - 2^{\operatorname{cotg} x}\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} =$$

$$= \frac{2^{\operatorname{cotg}\ x}\ \ln 2\ \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\ \arcsin x - \dfrac{2^{\operatorname{cotg}\ x}}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$$

e)

$$f'(x) = \left[\frac{\cos\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x}\right]' = \frac{[\cos\sqrt{x}]' \,.\, \operatorname{arctg} x - \cos\sqrt{x} \,.\, [\operatorname{arctg} x]'}{\operatorname{arctg}^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin\sqrt{x} \,.\, \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' \,.\, \operatorname{arctg} x - \cos\sqrt{x} \,.\, \dfrac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin\sqrt{x} \,.\, \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} x - \dfrac{\cos\sqrt{x}}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x}.$$

f)

$$f'(x) = \left[\frac{3x^2+2x}{\arccos^2 x}\right]' = \frac{[3x^2+2x]' \,.\, \arccos^2 x - (3x^2+2x) \,.\, [(\arccos x)^2]'}{(\arccos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{(6x+2)\ \arccos^2 x - (3x^2+2x)\, 2\arccos x \,.\, [\arccos x]'}{\arccos^4 x} =$$

$$= \frac{(6x+2)\ \arccos^2 x - (3x^2+2x)\, 2\arccos x \,.\, \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos^4 x}.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 8.}}$ Vypočítajme deriváciu funkcie:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}$, **b)** $f(x) = \sqrt{e^x \ln x}$, **c)** $f(x) = \dfrac{1}{(2x+3)\ \sin x}$,

d) $f(x) = \arcsin \dfrac{x+2}{\cos x}$, **e)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x \log_3 x}}$, **f)** $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{\sqrt{x}+1}{3^x}$.

Riešenie: Máme derivovať zložené funkcie, pričom vnútorná zložka je buď súčinom alebo podielom dvoch funkcií. Preto použijeme príslušné pravidlá pre derivovanie. Ukážeme len postup derivovania, čiastočné výsledky nebudeme upravovať.

a)

$$f'(x) = \left[\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}.$$

b)

$$f'(x) = \left[\sqrt{e^x \ln x}\right]' = \left[(e^x \,.\, \ln x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\,(e^x \ln x)^{\frac{-1}{2}} \,.\, [e^x \,.\, \ln x]' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^x \ln x}} \left(e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}\right).$$

c)

$$f'(x) = \left[\frac{1}{(2x+3)\ \sin x}\right]' = \left[((2x+3)\ \sin x)^{-1}\right]' =$$

$$= -1 \,.\, \left((2x+3)\ \sin x\right)^{-2} \,.\, \left[(2x+3)\,.\,\sin x\right]' =$$

$$= \frac{-1}{\left((2x+3)\ \sin x\right)^2} \,.\, \left(2\sin x + (2x+3)\ \cos x\right).$$

d)

$$f'(x) = \left[\arcsin\frac{x+2}{\cos x}\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+2}{\cos x}\right)^2}} \,.\, \left[\frac{x+2}{\cos x}\right]' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+2}{\cos x}\right)^2}} \,.\, \frac{\cos x - (x+2)\,(-\sin x)}{\cos^2 x}.$$

e)

$$f'(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[4]{x\ \log_3 x}}\right]' = \left[(x\ \log_3 x)^{-\frac{1}{4}}\right]' = -\frac{1}{4}\,(x\ \log_3 x)^{-\frac{5}{4}} \,.\, [x\,.\,\log_3 x]' =$$

$$= -\frac{1}{4}\ (x\ \log_3 x)^{-\frac{5}{4}} \left(\log_3 x + x\,\frac{1}{x\ln 3}\right).$$

f)

$$f'(x) = \left[\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{x}+1}{3^x}\right]' = \frac{1}{\cos^2\dfrac{\sqrt{x}+1}{3^x}} \,.\, \left[\frac{\sqrt{x}+1}{3^x}\right]' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\dfrac{\sqrt{x}+1}{3^x}} \,.\, \frac{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,3^x - (\sqrt{x}+1)3^x\ln 3}{(3^x)^2}.$$

Príklad 9. Vypočítajme deriváciu funkcie:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\ln(\sin x)}$ **b**) $f(x) = 2^{\arcsin\,(x^3-5x)}$ **c**) $f(x) = e^{\cos^2 x}$

d) $f(x) = \mathrm{arctg}\sqrt{x^2+1}$, **e**) $f(x) = \mathrm{cotg}\,\dfrac{1}{3x-4}$, **f**) $f(x) = \sin(3^x-1)^5$.

Riešenie: Máme derivovať dvakrát zložené funkcie. Derivovanie urobíme postupne.

a)

$$f'(x) = \left[\sqrt[3]{\ln(\sin x)}\right]' = \left[(\ln(\sin x))^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\,(\ln(\sin x))^{-\frac{2}{3}} \,.\, [\ln(\sin x)]' =$$

$$= \frac{1}{3\,(\ln(\sin x))^{\frac{2}{3}}} \,.\, \frac{1}{\sin x} \,.\, [\sin x]' = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{(\ln(\sin x))^2}} \,.\, \frac{1}{\sin x} \,.\, \cos x.$$

b)

$$f'(x)=\left[2^{\arcsin\left(x^3-5x\right)}\right]'=2^{\arcsin\left(x^3-5x\right)}\ln 2\,.\,\left[\arcsin\left(x^3-5x\right)\right]'=$$

$$=2^{\arcsin\left(x^3-5x\right)}\ln 2\,.\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^3-5x\right)^2}}\,.\,\left[x^3-5x\right]'=\frac{2^{\arcsin\left(x^3-5x\right)}\ln 2}{\sqrt{1-\left(x^3-5x\right)^2}}\,.\,\left(3x^2-5\right).$$

c)

$$f'(x)=\left[e^{\cos^2 x}\right]'=e^{\cos^2 x}\,.\,\left[(\cos x)^2\right]'=e^{\cos^2 x}\,2\cos x\,.\,[\cos x]'=e^{\cos^2 x}\,2\cos x\,(-\sin x).$$

d)

$$f'(x)=\left[\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}\right]'=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\,.\,\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=$$

$$=\frac{1}{1+x^2+1}\,.\,\frac{1}{2}\,\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\,.\,\left[x^2+1\right]'=\frac{1}{2(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}\,.\,2x.$$

e)

$$f'(x)=\left[\operatorname{cotg}\frac{1}{3x-4}\right]'=-\frac{1}{\sin^2\dfrac{1}{3x-4}}\,.\,\left[(3x-4)^{-1}\right]'=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2\dfrac{1}{3x-4}}\,.\,(-1)\,.\,(3x-4)^{-2}\,.\,[3x-4]'=\frac{1}{(3x-4)^2\sin^2\dfrac{1}{3x-4}}\,.\,3.$$

f)

$$f'(x)=\left[\sin(3^x-1)^5\right]'=\cos(3^x-1)^5\,.\,\left[(3^x-1)^5\right]'=\cos(3^x-1)^5\,.\,5\,(3^x-1)^4\,.\,[3^x-1]'=$$

$$=5\,(3^x-1)^4\,\cos(3^x-1)^5\,3^x\ln 3.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 10.}}$ Vypočítajme deriváciu funkcie:

a) $F(x)=x^{\sin x}$, **b)** $F(x)=(x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}$, **c)** $F(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie: Máme vypočítať deriváciu funkcie, ktorá je v tvare $F(x)=f(x)^{g(x)}$. Skôr ako začneme derivovať, za predpokladu, že $f(x)>0$, upravíme si funkciu nasledovne

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\,.\,\ln f(x)},$$

teda

$$F(x)=e^{g(x)\,\ln f(x)}$$

a funkciu budeme derivovať ako zloženú funkciu.

a) Funkciu najskôr upravíme. V našom prípade $f(x) = x$ a $g(x) = \sin x$. Teda

$$F(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \, \ln x}$$

a

$$F'(x) = \left[e^{\sin x \, \ln x}\right]' = e^{\sin x \, \ln x} \, . \, [\sin x \, . \, \ln x]' = x^{\sin x} \left(\cos x \, \ln x + \sin x \, . \, \frac{1}{x}\right).$$

b) Podľa úvodného označenia $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Potom

$$F(x) = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x} = e^{\operatorname{arctg} x \, \ln(x^2+1)}$$

a

$$F'(x) = \left[e^{\operatorname{arctg} x \, \ln(x^2+1)}\right]' = e^{\operatorname{arctg} x \, \ln(x^2+1)} \, . \, \left[\operatorname{arctg} \, x \, . \, \ln(x^2+1)\right]' =$$

$$= (x^2+1)^{\operatorname{arctg} \, x} \left(\frac{1}{1+x^2} \ln(x^2+1) + (\operatorname{arctg} \, x) \, \frac{1}{x^2+1} \, . \, 2x\right).$$

c) Upravme funkciu. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, teda

$$F(x) = e^{\frac{1}{x} \, \ln \cos x} = e^{\frac{\ln \cos x}{x}}$$

a

$$F'(x) = \left[e^{\frac{\ln \cos x}{x}}\right]' = e^{\frac{\ln \cos x}{x}} \, . \, \left[\frac{\ln \cos x}{x}\right]' = (\cos x)^{\frac{1}{x}} \, \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)\, x - \ln \cos x}{x^2}.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 11.}}$ Nájdime rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode dotyku T, ak

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad T = [2, ?]$, **b)** $f(x) = e^x \cos x, \quad T = [0, ?]$,
c) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad T = [?, 2]$.

Riešenie: Rovnica dotyčnice t ku grafu funkcie f v bode dotyku $T = [x_0, f(x_0)]$ je určená rovnicou $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. To nám dáva návod na riešenie úlohy. Potrebujeme, ak poznáme x_0, vypočítať hodnotu funkcie v tomto bode, t. j. $f(x_0)$ a hodnotu derivácie $f'(x_0)$, t. j. smernicu dotyčnice.

a) Prvá súradnica bodu dotyku je $x_0 = 2$. Potom $f(x_0) = f(2) = -1$. Takže bod dotyku je $T = [2, -1]$. Vypočítajme deriváciu funkcie

$$f'(x) = \left[x^2 - 3x + 1\right]' = 2x - 3.$$

Smernica dotyčnice je $f'(x_0) = f'(2) = 2 \, . \, 2 - 3 = 1$. Potom rovnica dotyčnice t je

$$t : y - (-1) = 1 \, . \, (x - 2), \qquad \text{po úprave} \qquad t : y = x - 3.$$

b) Výpočet trochu urýchlime.

$$x_0 = 0 \qquad \text{a} \qquad f(x_0) = f(0) = e^0 \,.\, \cos 0 = 1\,.\,1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad T = [0, 1].$$

$$f'(x) = [e^x \cos x]' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

a

$$f'(x_0) = f(0) = 1\,.\,(1 - 0) = 1.$$

Rovnica dotyčnice je

$$t : y - 1 = 1\,.\,(x - 0) \qquad \text{alebo po úprave} \qquad t : y = x + 1.$$

c) V tomto príklade nepoznáme x_0, ale poznáme hodnotu $f(x_0) = 2$, hľadáme teda také x, pre ktoré je

$$\sqrt{4 - x^2} = 2.$$

Riešme danú rovnicu. Najskôr ju umocníme a dostaneme:

$$\sqrt{4 - x^2} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 4 - x^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0.$$

Takže $x_0 = 0$ a bod dotyku $T = [0, 2]$. Potrebujeme ešte vypočítať smernicu dotyčnice v bode T, t. j. $f'(0)$.

$$f'(x) = \left[(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}},$$

a preto

$$f'(x_0) = f'(0) = 0$$

a rovnica dotyčnice je

$$t : y - 2 = 0\,.\,(x - 0), \qquad \text{resp.} \qquad t : y = 2.$$

Príklad 12. Nájdime rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 5x + 2$, ktorá je rovnobežná s priamkou $x + y + 1 = 0$.

Riešenie: Aby sme mohli napísať rovnicu dotyčnice, potrebujeme najskôr nájsť súradnice bodu dotyku. Využijeme poznatok, že dve rovnobežné priamky majú rovnaké smernice. Ak z rovnice zadanej priamky vyjadríme $y = -x - 1$, dostávame, že smernica danej priamky je -1. Na druhej strane, smernica dotyčnice ku grafu funkcie v bode dotyku $T = [x_0, f(x_0)]$ sa rovná hodnote derivácie $f'(x_0)$. Teda hľadáme také x, pre ktoré platí:

$$f'(x) = -1.$$

Keďže

$$f'(x) = 2x - 5 \qquad \Rightarrow \qquad 2x - 5 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2.$$

Takže

$$x_0 = 2, \quad \text{bod dotyku je} \quad T = [2, f(2)] = [2, -4], \quad \text{smernica dotyčnice je} \quad f'(2) = -1,$$

a rovnica dotyčnice je

$$t : y + 4 = -1\,.\,(x - 2) \qquad \text{alebo} \qquad t : y = -x - 2.$$

5.2 Derivácie vyšších rádov

Nech funkcia f má na množine M deriváciu f'. Ak existuje derivácia derivácie f' na množine M, tak túto deriváciu nazývame **derivácia druhého rádu** funkcie f, alebo jednoducho druhá derivácia a označujeme f''. Teda

$$f''(x) = (f'(x))', \quad x \in M.$$

Nech funkcia f má na množine M derivácie až do $(n-1)$-rádu. Ak existuje derivácia derivácie $(n-1)$-rádu na množine M, tak túto deriváciu nazývame **derivácia n-tého rádu** (n-tá derivácia) a označujeme $f^{(n)}$. Teda

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \quad x \in M.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 13.}}$ Vypočítajme druhú deriváciu funkcie

a) $f(x) = x^5 + 6x^3 - 8x^2 + 15x - 10$, **b)** $f(x) = x \ln x$,
c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$, **d)** $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

Riešenie: Podľa definície musíme najskôr vypočítať prvú a potom druhú deriváciu. Využijeme pritom základné vzorce a pravidlá na derivovanie.
a) $D(f) = R$,

$$f'(x) = \left[x^5 + 6x^3 - 8x^2 + 15x - 10\right]' = 5x^4 + 18x^2 - 16x + 15, \quad x \in R$$

a

$$f''(x) = \left[5x^4 + 18x^2 - 16x + 15\right]' = 20x^3 + 36x - 16, \quad x \in R.$$

b) $D(f) = (0, \infty)$,

$$f'(x) = [x \ln x]' = \ln x + x \,.\, \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

$$f''(x) = [\ln x + 1]' = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

c) $D(f) = R - \{2\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{e^x}{x-2}\right]' = \frac{e^x(x-2) - e^x}{(x-2)^2} = \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2},$$

$$f''(x) = \left[\frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}\right]' = \frac{\left[e^x(x-3) + e^x\right](x-2)^2 - e^x(x-3)\,.\,2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{e^x(x-2)(x-2)^2 - 2e^x(x-3)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{e^x(x-2)[(x-2)^2 - 2(x-3)]}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{e^x(x^2 - 4x + 4 - 2x + 6)}{(x-2)^3} = \frac{e^x(x^2 - 6x + 10)}{(x-2)^3}, \quad x \in R - \{2\}.$$

d) $D(f) = R$,

$$f'(x) = [x - \operatorname{arctg} x]' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

$$f''(x) = \left[\frac{x^2}{1+x^2}\right]' = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \,.\, 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1+x^2-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad x \in R.$$

Príklad 14. Vypočítajme $f^{(4)}$ a $f^{(4)}(\pi)$ funkcie $f(x) = (x+1)\sin x$.

Riešenie: $D(f) = R$. Postupne vypočítajme prvú, druhú, tretiu a štvrtú deriváciu.

$$f'(x) = [(x+1)\sin x]' = \sin x + (x+1)\cos x,$$

$$f''(x) = [\sin x + (x+1)\cos x]' = \cos x + \cos x - (x+1)\sin x = 2\cos x - (x+1)\sin x,$$

$$f'''(x) = [2\cos x - (x+1)\sin x]' = -2\sin x - \sin x - (x+1)\cos x = -3\sin x - (x+1)\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = [-3\sin x - (x+1)\cos x]' = -3\cos x - \cos x + (x+1)\sin x = -4\cos x + (x+1)\sin x,$$

pre $x \in R$. Potom hodnota štvrtej derivácie v bode π je

$$f^{(4)}(\pi) = -4\cos\pi + (\pi+1)\sin\pi = 4.$$

Príklad 15. Vypočítajme všetky derivácie funkcie $f(x) = 6x^3 + 7x^2 + 8x - 11$.

Riešenie: Počítajme postupne derivácie.

$$f'(x) = 18x^2 + 14x + 8, \qquad f''(x) = 36x + 14, \qquad f'''(x) = 36,$$

$$f^{(4)}(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{pre každé} \quad n \in N,\ n \geq 4,\ x \in R.$$

Príklad 16. Vypočítajme n-tú deriváciu funkcie $f(x) = \ln(x+1)$.

Riešenie: Našou úlohou je odvodiť vzťah, ktorý bude platiť pre ľubovoľnú deriváciu. Počítajme postupne derivácie.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}, \qquad f''(x) = -1(x+1)^{-2},$$

$$f'''(x) = (-1)\,.\,(-2)(x+1)^{-3}, \qquad f^{(4)}(x) = (-1)\,.\,(-2)\,.\,(-3)(x+1)^{-4}.$$

Z predchádzajúcich výsledkov sa dá predpokladať, že

$$f^{(n)}(x) = (-1)\,.\,(-2)\,.\,(-3)\ldots(-(n-1))(x+1)^{-n} =$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}.$$

Derivácia $f^{(n)}$, $n \in N$ je týmto vzťahom daná pre ľubovoľné x z definičného oboru funkcie f, t. j. na intervale $(-1,\, \infty)$.
Aby bol výsledok úplný, potrebujeme ešte matematickou indukciou dokázať platnosť tvrdenia pre n-tú deriváciu. Tento dôkaz prenecháme na čitateľa.

Príklad 17. Ukážme, že funkcia $y = \cos 2x + 3\sin 2x$ vyhovuje rovnici $y'' + 4y = 0$ pre každé reálne číslo x.

Riešenie: Daná funkcia je definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Potrebujeme vypočítať druhú deriváciu funkcie a dosadiť do rovnice.

$$y' = -2\sin 2x + 6\cos 2x \qquad \text{a} \qquad y'' = -4\cos 2x - 12\sin 2x.$$

Tieto derivácie existujú pre každé $x \in R$. Po dosadení do ľavej strany rovnice dostávame

$$L = -4\cos 2x - 12\sin 2x + 4(\cos 2x + 3\sin 2x) = -4\cos 2x - 12\sin 2x + 4\cos 2x + 12\sin 2x = 0,$$

pravá strana rovnice

$$P = 0, \qquad \text{teda} \qquad L = P$$

a daná funkcia vyhovuje rovnici pre každé reálne číslo x.

Príklad 18. Ukážme, že funkcia $y = e^x \cos x$ vyhovuje rovnici $y^{(4)} + 4y = 0$ pre každé $x \in R$.

Riešenie: Podobne ako v predchádzajúcom príklade najskôr vypočítajme prvé štyri derivácie funkcie.

$$y' = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x),$$

$$y'' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x,$$

$$y''' = -2e^x \sin x - 2e^x \cos x = -2e^x(\sin x + \cos x),$$

$$y^{(4)} = -2e^x(\sin x + \cos x) - 2e^x(\cos x - \sin x) = -2e^x(2\cos x) = -4e^x \cos x.$$

Všetky derivácie existujú na množine všetkých reálnych čísel. Dosaďme do rovnice:

$$L = -4e^x \cos x + 4e^x \cos x = 0, \qquad P = 0, \qquad L = P,$$

teda funkcia vyhovuje rovnici pre $x \in R$.

5.3 Diferenciál funkcie, Taylorov polynóm

Nech funkcia f je definovaná a diferencovateľná na istom okolí bodu x_0. Rozdiel $\Delta f_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0)$ nazývame **prírastok** (diferencia) funkcie f pre prírastok $\Delta x = x - x_0$.

Výraz $f'(x_0)(x - x_0)$ nazývame **diferenciál** funkcie f v bode x_0 a označujeme $df_{x_0}(x)$, t. j.

$$df_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ak $x \to x_0$, tak $\Delta f_{x_0}(x) \doteq df_{x_0}(x)$, teda

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nech funkcia f má v bode x_0 derivácie až do n-tého rádu, kde $n \in N$. Polynóm

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame **n-tý Taylorov polynóm** funkcie f v bode x_0.

Poznámka: Taylorov polynóm aproximuje funkciu v okolí bodu x_0, čím vyšší je jeho stupeň, tým je aproximácia presnejšia. Všimnime si, že ak $n = 1$, tak $T_1(x) = f(x_0) + df_{x_0}(x)$.

Príklad 19. Vypčítajme diferenciu a diferenciál funkcie $f(x) = x^2 - 5x$ v bode $x_0 = 2$, pre prírastok **a**) $\Delta x = 1$, **b**) $\Delta x = 0,1$, **c**) $\Delta x = 0,01$.
Vypočítané hodnoty porovnajme.

Riešenie: Keďže

$$\Delta x = x - x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x = x_0 + \Delta x,$$

tak diferencia

$$\Delta f_{x_0}(x) = \Delta f_{x_0}(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

a diferenciál

$$df_{x_0}(x) = df_{x_0}(x_0 + \Delta x) = f'(x_0) \,.\, \Delta x.$$

Potom

a) Diferencia

$$\Delta f_2(2 + 1) = \Delta f_2(3) = f(3) - f(2) = 9 - 15 - (4 - 10) = 0.$$

Keďže

$$f'(x) = 2x - 5 \qquad \text{a} \qquad f'(2) = -1, \qquad \text{tak} \qquad df_2(3) = -1 \,.\, 1 = -1.$$

b)

$$\Delta f_2(2+0,1) = \Delta f_2(2,1) = f(2,1) - f(2) = 4,41 - 10,5 - (4-10) = -0,09$$

a

$$df_2(2,1) = f'(2)\,.\,0,1 = -1\,.\,0,1 = -0,1.$$

c)

$$\Delta f_2(2+0,01) = \Delta f_2(2,01) = f(2,01) - f(2) = 4,0401 - 10,05 - (4-10) = -0,0099$$

a

$$df_2(2,1) = f'(2)\,.\,0,01 = -1\,.\,0,1 = -0,01.$$

Všimnime si, že čím bližšie je Δx k číslu nula, tým menej sa líšia hodnoty Δf_{x_0} a df_{x_0}.

Príklad 19. Vypočítajme diferenciál funkcie f v bode x_0, ak
a) $f(x) = \sqrt{5-x}$, $\quad x_0 = -4$, **b**) $f(x) = x\,\sin x + \cos x$, $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Riešenie: Aby sme našli diferenciál funkcie, tak potrebujeme nájsť hodnotu derivácie funkcie v bode x_0 a dosadiť do vzťahu pre diferenciál.
a)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5-x)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{5-x}} \qquad \text{a} \qquad f'(x_0) = f'(-4) = -\frac{1}{2\,\sqrt{5+4}} = -\frac{1}{6}.$$

Diferenciál funkcie je potom rovný

$$df_{-4}(x) = -\frac{1}{6}(x+4).$$

b)

$$f'(x) = \sin x + x\,\cos x - \sin x = x\,\cos x$$

a

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,.\,\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}.$$

Takže diferenciál je

$$df_{\frac{\pi}{4}}(x) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$\boxed{\textbf{Príklad 21.}}$ Vypočítajme približnú hodnotu
a) $\sqrt{4,02}$, **b**) $\arcsin 0,15$, **c**) $\ln 0,9$.

Riešenie: Na výpočet približnej hodnoty využijeme vzťah z úvodu tejto podkapitoly, t. j.

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

a) Keďže máme približne vypočítať $\sqrt{4,02}$ zaveďme funkciu $f(x) = \sqrt{x}$. Potom $\sqrt{4,02} = f(4,02)$. Položme $x = 4,02$ a zvoľme $x_0 = 4$, pretože ľahko určíme funkčnú hodnotu $f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$. Naviac, diferencia $\triangle x = x - x_0 = 4,02 - 4 = 0,02$ je malá, a preto aproximácia bude dostatočne presná. Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu, dostaneme:

$$f(4,02) \doteq f(4) + f'(4)\,.\,(4,02 - 4).$$

Vypočítajme potrebné hodnoty.

$$f(4) = 2 \qquad \text{a} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \Rightarrow \qquad f'(4) = \frac{1}{4},$$

teda

$$\sqrt{4,02} \doteq 2 + \frac{1}{4}\,.\,0,02 = 2 + 0,005 = 2,005.$$

Hodnota vypočítaná kalkulačkou je $2,0049938$.

b) Zvoľme: $f(x) = \arcsin x$, lebo máme vypočítať hodnotu $\arcsin 0,15$, $x_0 = 0$ a $x = 0,15$. Potom

$$f(0,15) \doteq f(0) + f'(0)\,.\,(0,15 - 0).$$

Pretože

$$f(0) = \arcsin 0 = 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 1,$$

dostaneme

$$\arcsin 0,15 \doteq 0 + 1\,.\,0,15 = 0,15.$$

Pomocou výpočtu na kalkulačke dostaneme $\arcsin 0,15 \doteq 0,1505682$.

c) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ a $x = 0,9$. Potom

$$f(1) = \ln 1 = 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(1) = 1$$

a

$$f(0,9) \doteq f(1) + f'(1)\,.\,(1 - 0,9) \qquad \Rightarrow \qquad \ln 0,9 \doteq 0 + 1\,.\,(-0,1) = -0,1.$$

Ak na výpočet použijeme kalkulačku, tak $\ln 0,9 \doteq -0,1053605$.

Príklad 22. Nájdime n-tý Taylorov polynóm funkcie f v bode x_0, ak
a) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3},\ n = 4,$ **b**) $f(x) = e^{2x},\ x_0 = 0,\ n = 5,$
c) $f(x) = \ln(x+1),\ x_0 = 1,\ n = 3.$

Riešenie:
a) Keďže $n = 4$, tak polynóm, ktorý potrebujeme nájsť, bude mať tvar

$$T_4(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'(\frac{\pi}{3})}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''(\frac{\pi}{3})}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''(\frac{\pi}{3})}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{f^{(4)}(\frac{\pi}{3})}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4.$$

Vypočítajme hodnotu funkcie f a hodnoty prvej až štvrtej derivácie v bode $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$f'''(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Potom

$$T_4(x) = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{-\frac{1}{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\frac{1}{2}}{24}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4.$$

b) Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade.

$$T_5(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5,$$

$$\begin{array}{llllll} & & f(0) = e^0 = 1, & f'(x) = 2e^{2x}, & \Rightarrow & f'(0) = 2, \\ f''(x) = 4e^{2x}, & \Rightarrow & f''(0) = 4, & f'''(x) = 8e^{2x}, & \Rightarrow & f'''(0) = 8, \\ f^{(4)}(x) = 16e^{2x}, & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = 16, & f^{(5)}(x) = 32e^{2x}, & \Rightarrow & f^{(5)}(0) = 32. \end{array}$$

Takže

$$T_5(x) = 1 + \frac{2}{1}x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3 + \frac{16}{24}x^4 + \frac{32}{120}x^5 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5.$$

c)

$$T_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3,$$

$$f(1) = \ln 2, \qquad f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Potom

$$T_3(x) = \ln 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1}(x-1) + \frac{-\frac{1}{4}}{2}(x-1)^2 + \frac{\frac{1}{4}}{6}(x-1)^3 = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 23.}}$ Pomocou tretieho Taylorovho polynómu vypočítajte približne $\sqrt{4,02}$ a porovnajte s približnou hodnotou vypočítanou pomocou kalkulačky.

Riešenie: Keďže máme vypočítať $\sqrt{4,02}$, zvolíme si funkciu $f(x) = \sqrt{x}$ a $x_0 = 4$. Nájdeme tretí Taylorov polynóm, t. j. polynóm

$$T_3(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3.$$

$$f(4) = \sqrt{4} = 2, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \Rightarrow \quad f'(4) = \frac{1}{4},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \quad \Rightarrow \quad f''(4) = -\frac{1}{32}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}, \quad \Rightarrow \quad f'''(4) = \frac{3}{256}.$$

Potom

$$T_3(x) = 2 + \frac{\frac{1}{4}}{1}(x-4) + \frac{-\frac{1}{32}}{2}(x-4)^2 + \frac{\frac{3}{256}}{6}(x-4)^3 = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

a

$$\sqrt{4,02} \doteq T_3(4,02) = 2 + \frac{1}{4}(4,02-4) - \frac{1}{64}(4,02-4)^2 + \frac{1}{512}(4,02-4)^3 =$$
$$= 2 + \frac{1}{4}\,.\,0,02 - \frac{1}{64}\,.\,(0,02)^2 + \frac{1}{512}\,.\,(0,02)^3 = 2,004993765625.$$

Hodnota vypočítaná kalkulačkou prípadne vhodným softvérom na počítači je

$$\sqrt{4,02} \doteq 2,0049937655763421351.$$

Tieto hodnoty sa zhodujú na prvých deviatich desatinných miestach.
Všimnime si, že hodnota $\sqrt{4,02}$ vypočítanú pomocou tretieho Taylorovho polynómu je $T_3(4,02) = 2,004993765625$ a hodnota vypočítaná v Príklade 21 a) pomocou diferenciálu, resp. pomocou prvého Taylorovho polynómu je $T_1(4,02) = 2,005$. Aj v tomto prípade je potvrdené, že vyšší stupeň Taylorovho plynómu lepšie aproximuje hodnoty funkcie v okolí bodu 4.

5.4 L'Hospitalovo pravidlo

Ak by sme nesprávne používali vety o počítaní s limitami a nezisťovali, či sú splnené podmienky na ich použitie, môžeme dostať výrazy tvaru

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \,.\, \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty, \qquad \infty^0,$$

ktoré sa nazývajú neurčité výrazy. Pri výpočte takýchto limít sa dá za určitých predpokladov použiť pravidlo, ktoré sa nazýva **L'Hospitalovo pravidlo**.

L'Hospitalovo pravidlo
Nech platí:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$ alebo $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty,$
2. existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastná alebo nevlastná).

Potom existuje aj $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}.$

Poznámka: L'Hospitalovo pravidlo platí aj v prípade jednostranných limít a limity v nevlastnom bode. Pokiaľ sú splnené predpoklady, môžeme pravidlo použiť viackrát po sebe.

Príklad 24. Vypočítajme:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x-6},$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1},$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x},$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x},$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-4},$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x^2}.$

Riešenie:
a) Označme $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $g(x) = x^2 + 5x - 6$ a počítajme limity týchto funkcií v bode 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 2) = 0, \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 5x - 6) = 0.$$

Dostali sme neurčitý výraz „$\frac{0}{0}$“. Na výpočet môžeme použiť L'Hospitalovo pravidlo. Pretože

$$f'(x) = 2x - 3, \qquad g'(x) = 2x + 5 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{2x+5} = \frac{-1}{7} = -\frac{1}{7},$$

tak

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-6} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{2x+5} = -\frac{1}{7}.$$

Tento zápis je zdĺhavý, a preto ho trochu skrátime. Overenie prvého predpokladu zapíšeme priamo do riešenia príkladu medzi dve hranaté zátvorky a splnenie druhého predpokladu zistíme až po vypočítaní limity. Teda, výpočet bude takýto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to 1}\frac{[x^2-3x+2]'}{[x^2+5x-6]'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{2x+5}=-\frac{1}{7}.$$

Keďže limita podielu derivácii funkcií existuje, existuje aj limita danej funkcie a rovnosť platí.

b)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to -1}\frac{[x+1]'}{\left[\sqrt{x+2}-1\right]'}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}=\lim_{x\to -1}2\sqrt{x+2}=2.$$

Predpoklady L'Hospitalovho pravidla sú splnené, takže daná rovnosť platí.

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[\sin 3x]'}{[x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{1}=3.$$

Obidva predpoklady L'Hospitalovho pravidla sú splnené.

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[\cos x-1]'}{[x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0.$$

Predpoklady L'Hospitalovho pravidla sú splnené.

e)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to 2}\frac{[\ln(x-1)]'}{[x^2-4]'}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{2x}=\frac{1}{4}.$$

Obidva predpoklady L'Hospitalovho pravidla sú splnené.

f)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{[e^x-1]'}{[x^2]'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2x}=\left|\frac{1}{0^+}\right|=\infty.$$

Predpoklady L'Hospitalovho pravidla sú splnené.

Príklad 25. Vypočítajme

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6}{x^3+2}$, **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{3x^2+5}$, **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^2}{3x+5}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$, **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-5}{x+1}$.

Riešenie: V týchto príkladoch aj limita čitateľa aj limita menovateľa sa rovná buď ∞ alebo $-\infty$. Aj teraz môžeme na výpočet limity použiť L'Hospitalovo pravidlo. V priebehu riešenia budeme overovať splnenie predpokladov.

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6}{x^3+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{[x^2-6]'}{[x^3+2]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x}=0.$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3x^2+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{[x^2]'}{[3x^2+5]'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{3x+5}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{[2-x^2]'}{[3x+5]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{3}=-\infty.$$

d)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-5}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{[e^x-5]'}{[x+1]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty.$$

Príklad 26. Vypočítajme

a) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{2x^3+x^2-4x-3}$, **b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+4)}{x}$, **c)** $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$.

Riešenie:

a)

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{2x^3+x^2-4x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to-1}\frac{[x^3-3x-2]'}{[2x^3+x^2-4x-3]'}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-3}{6x^2+2x-4}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to-1}\frac{[3x^2-3]'}{[6x^2+2x-4]'}=\lim_{x\to-1}\frac{6x}{12x+2}=\frac{-6}{-10}=\frac{3}{5}.$$

L'Hospitalovo pravidlo sme použili dvakrát po sebe. Keďže posledná limita existuje, existuje aj $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-3}{6x^2+2x-4}$, a preto existuje aj pôvodná limita.

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+4)}{x}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{[\ln(x^2+4)]'}{[x]'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x}{x^2+4}}{1}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+4}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{[2x]'}{[x^2+4]'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2x}=0.$$

c)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{[\ln x]'}{[\operatorname{cotg} x]'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin^2 x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{[-\sin^2 x]'}{[x]'}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2\sin x\cos x}{1}=0.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 27.}}$ Vypočítajme

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$, **b)** $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, **c)** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}\right)$.

Riešenie: Limity v tomto príklade sú tvaru „$\infty-\infty$“. Preto musíme funkciu, limitu ktorej máme počítať, upravíme najskôr na taký tvar, aby sme mohli použiť L'Hospitalovo pravidlo.

a) Pretože

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=-\infty+\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\infty-\infty,$$

dostávame neurčitý výraz a nevieme jednoznačne rozhodnúť o jeho hodnote. Preto funkciu najskôr upravme. Úpravou, ktorá sa priam ponúka, dostaneme:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x-x}{x\,\sin x}.$$

Potom

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\,\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-x]'}{[x\,\sin x]'}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\,\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to0}\frac{[\cos x-1]'}{[\sin x+x\,\cos x]'}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\,\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

b) Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\Big[\infty-\infty\Big]=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{[e^x-1-x]'}{[x(e^x-1)]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{[e^x-1]'}{[e^x-1+xe^x]'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

c) Najskôr funkciu upravme.

$$\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x-1}{\cos x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}\right)=\Big[\infty-\infty\Big]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{[\sin x-1]'}{[\cos x]'}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

Príklad 28. Vypočítajme

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$, **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$, **c)** $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotg}^2 x$, **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{arccotg} 3x$.

Riešenie Pri počítaní týchto limít dostaneme limity typu „$0\,.\,(\pm\infty)$“. Aby sme mohli použiť L'Hospitalovo pravidlo, musíme funkciu vhodne upraviť.

a)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\Big[0\,.\,(-\infty)\Big]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln x]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=-\lim_{x\to 0^+}x=0.$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=\Big[\infty\,.\,0\Big]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LHP}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{[x^2]'}{[e^{-x}]'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]\overset{LHP}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{[2x]'}{[-e^{-x}]'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0.$$

c) Upravme najskôr funkciu. Pre $x\in\widetilde{O}(0)$ platí

$$(1-\cos x)\operatorname{cotg}^2 x=\frac{1-\cos x}{\frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\mathrm{cotg}^2 x = \Big[\, 0\,.\,\infty \,\Big] = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\mathrm{tg}^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos x]'}{[\mathrm{tg}^2 x]'} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\,\mathrm{tg}\, x\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\,\dfrac{\sin x}{\cos x}\,.\,\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x}{2} = \frac{1}{2}.$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} x\,.\,\mathrm{arccotg}\,3x = \Big[\,\infty\,.\,0\,\Big] = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{arccotg}\,3x}{\dfrac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{[\mathrm{arccotg}\,3x]'}{\left[\dfrac{1}{x}\right]'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{3}{1+9x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{1+9x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{[3x^2]'}{([1+9x^2]'} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{18x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 29.}}$ Vypočítajme

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{2-x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie: Ak pri výpočte limity

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$$

počítame zvlášť $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a dostaneme neurčité výrazy „0^0“, „1^∞“ alebo „∞^0“ a $f(x)>0$ na nejakom okolí $\widetilde{O}(a)$ bodu a, tak funkciu $(f(x))^{g(x)}$ upravíme na tvar:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\,\ln f(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\,\ln f(x)},$$

za predpokladu, že $\lim\limits_{x\to a} g(x)\,\ln f(x)$ existuje (vlastná alebo nevlastná). Posledná limita je potom typu „$0\,.\,(\pm\infty)$“. Takéto limity sme počítali v Príklade 28.

a)

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x = \left[\,0^0\,\right], \qquad \text{a preto upravíme} \qquad (\sin x)^x = e^{x\,\ln\sin x}.$$

Vypočítajme teda limitu exponentu.

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\ln\sin x = \Big[\,0\,.\,(-\infty)\,\Big] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\dfrac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln\sin x]'}{\left[\dfrac{1}{x}\right]'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2\,\cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{[-x^2\,\cos x]'}{[\sin x]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x\,\cos x + x^2 \sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Potom

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x = e^0 = 1.$$

b)

$$\lim_{x\to 2^-} (3x-5)^{\frac{1}{2-x}} = \left[1^\infty\right], \qquad \lim_{x\to 2^+} (3x-5)^{\frac{1}{2-x}} = \left[1^{-\infty}\right]$$

a

$$(3x-5)^{\frac{1}{2-x}} = e^{\frac{1}{2-x}\,\cdot\,\ln(3x-5)} = e^{\frac{\ln(3x-5)}{2-x}}.$$

Pretože

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(3x-5)}{2-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to 2} \frac{[\ln(3x-5)]'}{[2-x]'} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{3}{3x-5}}{-1} = \lim_{x\to 2} \frac{-3}{3x-5} = -3,$$

tak

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{2-x}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.$$

c)

$$\lim_{x\to\infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] \qquad \text{a} \qquad (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\,\cdot\,\ln(e^x+x)} = e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}}.$$

Limita exponenta je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{[\ln(e^x+x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=}$$

$$\overset{LHP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{[e^x+1]'}{[e^x+x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{[e^x]'}{[e^x+1]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

a

$$\lim_{x\to\infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

5.5 Cvičenia

1. Vypočítajte deriváciu funkcie:

   a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$, **b**) $f(x) = 4\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, **c**) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$,

   d) $f(x) = (e^x + e)\,(x^2 - 2)$, **e**) $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x+1}$, **f**) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sin x}$.

2. Vypočítajte deriváciu funkcie:

   a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}$, **b**) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, **c**) $f(x) = \log_2 (\operatorname{tg} x)$,

   d) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, **e**) $f(x) = \cos^3 x + \cos x^3$, **f**) $f(x) = \dfrac{1}{\arccos^2 x}$.

3. Vypočítajte deriváciu funkcie:
   a) $f(x) = (\cos x) \,.\, \log 3x$, **b**) $f(x) = 2^x \,.\, \sin \dfrac{1}{x}$, **c**) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{e^{x^2}}$,
   d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{cotg}^3 x}{x^2 + 2x}$, **e**) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, **f**) $f(x) = \mathrm{tg}\sqrt[3]{e^x - 1}$.
4. Vypočítajte deriváciu funkcie: **a**) $f(x) = x^x$, **b**) $(\cos x)^x$.
5. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2}$ v bode dotyku $T = [-2, ?]$.
6. Vypočítajte $n-$tú deriváciu funckie f, ak
   a) $f(x) = \sqrt{2x+3},\ n = 3$, **b**) $f(x) = x \ln x,\ n = 4$, **c**) $f(x) = \sin^2 x,\ n = 4$.
7. Vypočítajte diferenciál funkcie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bode $x_0 = -1$.
8. Pomocou diferenciálu vypočítajte približnú hodnotu $0,98^6$.
9. Nájdite tretí Taylorov polynóm funkcie $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$ so stredom v bode $x_0 = 0$.
10. Vypočítajte limity:
    a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, **b**) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - x}{\sqrt[4]{x} - x}$, **c**) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$, **d**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$,
    e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\mathrm{tg}\, 3x}$, **f**) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{7x^2 - 4}{3x - x^2}$, **g**) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$, **h**) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{x^2}}{x}$.

VÝSLEDKY

1. **a**) $f'(x) = 6x^2 - 8x + 1$, **b**) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, **c**) $f'(x) = \mathrm{arctg}\, x + \dfrac{x}{1+x^2}$,
   d) $f'(x) = e^x(x^2-2) + 2x(e^x + e)$, **e**) $f'(x) = \dfrac{1 - x \ln x}{x(x+1)^2}$, **f**) $\dfrac{2x \sin x - (x^2+1)\cos x}{\sin^2 x}$.
2. **a**) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$, **b**) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$, **c**) $f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x \,.\, \ln 2 \,.\, \cos^2 x}$,
   d) $f'(x) = -\dfrac{2^{\frac{1}{x}} \ln 2}{x^2}$, **e**) $f'(x) = -3\cos^2 x \sin x - 3x^2 \sin x^3$, **f**) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}\arccos^3 x}$.
3. **a**) $f'(x) = -\sin x \,.\, \log 3x + \dfrac{\cos x}{x \ln 10}$, **b**) $f'(x) = 2^x \left(\ln 2 \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\right)$,
   c) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2x \arcsin x}{e^{x^2}}$, **d**) $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{3\mathrm{cotg}^2 x}{\sin^2 x}(x^2+2x) - (2x+2)\mathrm{cotg}^3 x}{(x^2+2x)^2}$,
   e) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, **f**) $f'(x) = \dfrac{e^x}{3\sqrt[3]{(e^x-1)^2}\cos^2(e^x - 1)}$.
4. **a**) $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$, **b**) $f'(x) = (\cos x)^x\left(\ln(\cos x) - x\, \mathrm{tg}\, x\right)$.
5. $x + 4y + 5 = 0$.
6. **a**) $f'''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{(2x+3)^5}}$, **b**) $f^{(4)} = \dfrac{2}{x^3}$, **c**) $f^{(4)}(x) = -8\cos 2x$.
7. $df_{-1}(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)$.
8. $0,88$.
9. $T_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$.
10. **a**) $-\dfrac{3}{2}$, **b**) $\dfrac{8}{9}$, **c**) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, **d**) 1 **e**) $\dfrac{1}{3}$, **f**) -7, **g**) 0, **h**) ∞.

6

Použitie derivácií na vyšetrovanie priebehu funkcie

6.1 Monotónnosť, lokálne a globálne extrémy funkcie

Funkcia f, ktorá je na intervale J spojitá a v každom vnútornom bode intervalu J má deriváciu f', je na intervale J rastúca (klesajúca) práve vtedy, ak pre každé x z vnútra intervalu J platí $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), pričom rovnosť môže platiť iba v bodoch, ktoré netvoria interval $J_1 \subset J$.

Poznámka: Z predchádzajúceho tvrdenia vyplýva, že ak chceme nájsť intervaly monotónnosti funkcie, ktorá má na intervale J spojitú deriváciu, tak stačí nájsť nulové body prvej derivácie a tými rozdeliť daný interval na čiastkové intervaly. Zo spojitosti derivácie potom vyplýva, že derivácia f' na čiastkových intervaloch nemení znamienko, t. j. je buď kladná, alebo záporná vo všetkých bodoch, a preto stačí zistiť znamienko derivácie v ľubovoľnom vnútornom bode čiastkového intervalu.

Nech funkcia f je definovaná v bode x_0. Funkčná hodnota $f(x_0)$ sa nazýva **lokálne maximum** (**minimum**) funkcie f, ak existuje také okolie $O(x_0) \subset D(f)$ bodu x_0, že pre každé $x \in O(x_0)$ platí $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$).
Ak $\forall x \in O(x_0),\ x \neq x_0$ platí $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$), hovoríme o ostrom lokálnom maxime (minime) funkcie f.
Lokálne maximum a lokálne minimum majú spoločný názov **lokálne extrémy**.
Bod, v ktorom má funkcia lokálny extrém, sa nazýva bod lokálneho extrému.

<u>Nutná podmienka existencie lokálneho extrému</u>
Ak má funkcia f v bode x_0 lokálny extrém a má v tomto bode deriváciu $f'(x_0)$, tak $f'(x_0) = 0$.

Bod x_0, v ktorom $f'(x_0) = 0$, sa nazýva **stacionárny bod**.

Dôsledok: Funkcia f môže (ale nemusí) mať lokálny extrém v stacionárnom bode, alebo v bode kde prvá derivácia neexistuje.

Postačujúce podmienky existencie lokálneho extrému

1. Nech funkcia f je spojitá v bode x_0. Ak existuje ľavé okolie bodu x_0, kde $\forall x \in O^-(x_0)$ je $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) a pravé okolie bodu x_0, kde $\forall x \in O^-(x_0)$ je $f'(x_0) < 0$ ($f'(x_0) > 0$), tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum (minimum).

2. Nech $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Potom funkcia f má v bode x_0 ostrý lokálny extrém, a to ostré lokálne maximum, ak $f''(x_0) < 0$, ostré lokálne minimum, ak $f''(x_0) > 0$.

Nech funkcia f je definovaná na intervale J a nech $x_0 \in J$. Funkčná hodnota $f(x_0)$ sa nazýva **globálne maximum** (**minimum**) funkcie f na intervale J, ak pre každé $x \in J$ platí $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$).
Globálne maximum a globálne minimum majú spoločný názov **globálne extrémy**.

Príklad 1. Nájdime intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 2$.

Riešenie: Funkcia f je definovaná na množine R a má na nej aj deriváciu

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16x,$$

ktorá je spojitá na $D(f) = R$. Budeme hľadať intervaly, na ktorých derivácia f' nadobúda kladné, resp. záporné hodnoty. Najskôr zistime, kedy je

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 + 12x^2 - 16x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x(x^2 + 3x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x+4)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{alebo} \quad x = -4 \quad \text{alebo} \quad x = 1.$$

Nulovými bodmi prvej derivácie rozdelíme definičný obor na intervaly a zistíme znamienko prvej derivácie na jednotlivých intervaloch, a to tak, že do výrazu v príslušnom riadku, dosadíme ľubovoľné číslo z daného intervalu, napr. pomocou bodov $-5 \in (-\infty, -4)$, $-1 \in (-4, 0)$, $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ a $2 \in (1, \infty)$. Pretože
$f'(-5) = 4 \,.\, (-5)^3 + 12 \,.\, (-5)^2 - 16 \,.\, (-5) = -120 < 0$,
$f'(-1) = 4 \,.\, (-1)^3 + 12 \,.\, (-1)^2 - 16 \,.\, (-1) = 24 > 0$,
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 12 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 16 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2} < 0$,
$f'(2) = 4 \,.\, 2^3 + 12 \,.\, 2^2 - 16 \,.\, 2 = 48 > 0$,
platí:

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcia je rastúca na intervaloch $\langle -4, 0 \rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesajúca na intervaloch $(-\infty, -4\rangle$ a $\langle 0, 1 \rangle$.(To, že funkcia je na danom intervale rastúca, sme v tabuľku zapísali pomocou znaku $\nearrow$, že je klesajúca znakom $\searrow$).

V bode $x = -4$ má funkcia f lokálne minimum (pretože v ľavom okolí bodu je $f'(x) < 0$ a v pravom $f'(x) > 0$) rovné $f(-4) = (-4)^4 + 4(-4)^3 - 8(-4)^2 - 2 = -130$.
V bode $x = 0$ má funkcia lokálne maximumu (v ľavom okolí bodu je $f'(x) > 0$ a v pravom $f'(x) < 0$) o hodnote $f(0) = -2$.
V bode $x = 1$ má funkcia lokálne minimum, (v ľavom okolí bodu je $f'(x) < 0$ a v pravom $f'(x) > 0$) ktoré sa rovná $f(1) = 1 + 4 - 8 - 2 = -5$.

Príklad 2. Nájdime intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie $f(x) = 2 + \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Riešenie: Definičný obor funkcie $D(f) = R$.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}.$$

Derivácia funkcie $f'(x)$ neexistuje pre $x = -1$. Funkcia nemá stacionárne body, lebo $f'(x) \neq 0$ pre každé reálne číslo. Vytvorme tabuľku, $D(f)$ rozdelíme na dva intervaly pomocou bodu $x = -1$, v ktorom neexistuje f'.
Napr. pre $x = -2$ je $f'(-2) = -\dfrac{2}{3} < 0$ a pre $x = 0$ je $f'(0) = \dfrac{2}{3} > 0$.
Preto platí

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty, -1\rangle$, rastúca na intervale $\langle -1, \infty)$.

Pretože v bode $x = -1$ je funkcia definovaná aj spojitá, má v ňom lokálne minimum o hodnote $f(-1) = 2 + \sqrt[3]{(-1+1)^2} = 2$.

Príklad 3. Nájdime intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

Riešenie: $D(f) = \{x \in R;\ x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Keďže monotónnosť funkcie vyšetrujeme pomocou prvej derivácie, vypočítajme ju a nájdime nulové body derivácie.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

Prvá derivácia existuje pre každé $x \in D(f)$. Ak má funkcia f lokálne extrémy, tak iba v stacionárnych bodoch.

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3 \qquad \vee \qquad x = -1.$$

Vytvorme tabuľku na zistenie znamienka derivácie tak, že nulovými bodmi prvej derivácie rozdelíme definičný obor na intervaly. Vyberieme ľubovoľné vnútorné body týchto intervalov, napr. $x = -2 \in (-\infty, -1)$, $x = 0 \in (-1, 1)$, $x = 2 \in (1, 3)$ a $x = 4 \in (3, \infty)$.

Potom

$$f'(-2) = \frac{5}{9} > 0, \qquad f'(0) = -3 < 0, \qquad f'(2) = -3 < 0, \qquad f'(4) = \frac{5}{9} > 0.$$

Preto platí

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcia f na intervaloch, kde sme zisťovali znamienko derivácie je definovaná a spojitá, teda funkcia je rastúca na intervale $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 3, \infty)$. Klesajúca je na intervale $\langle -1, 1)$ a $(1, 3\rangle$.
V bode $x = -1$ má funkcia lokálne maximum rovné $f(-1) = -2$.
V bode $x = 3$ má funkcia lokálne minimum rovné $f(3) = 6$.

Príklad 4. Nájdime intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Riešenie: $D(f) = \{x \in R;\ x > 0\ \wedge\ \ln x \neq 0\}$.

$$\ln x \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \neq 1, \qquad \text{teda} \qquad D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty).$$

Nájdeme deriváciu

$$f'(x) = \frac{\ln x - x\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x},$$

ktorá existuje pre každé $x \in D(f)$ a je spojitá.

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = e.$$

Definičný obor funkcie rozdelíme nulovým bodom derivácie na intervaly a zistíme pomocou tabuľky znamienko derivácie. ($\ln^2 x > 0\ \forall x \in D(f)$, teda stačí zistiť iba znamienko čitateľa derivácie $f'(x)$.) Vyberieme ľubovoľné vnútorné body čiastkových intervalov tak, aby sme v nich vedeli vypočítať hodnoty logaritmov, napr. $\dfrac{1}{e} = e^{-1} \in (0, 1)$, $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \in (1, e)$, $e^2 \in (e, \infty)$.
Potom
$\ln e^{-1} - 1 = -1 - 1 = -2 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right) < 0, \qquad \ln e^{\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(\sqrt{e}) < 0,$
$\ln e^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow f'(e^2) > 0$
a platí

	$(0, 1)$	$(1, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcia je klesajúca na intervale $(0, 1)$ a $(1, e)$, rastúca na intervale (e, ∞).

V bode $x = e$ má funkcia lokálne minimum o hodnote $f(e) = \dfrac{e}{\ln e} = e$.

Príklad 5. Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x) = x - 2\operatorname{arctg}(x-1)$.

Riešenie: Definičný obor funkcie f je $D(f) = R$. Jej derivácia

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2-2x+2} = \frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$$

je definovaná a spojitá na celom $D(f)$. Ak funkcia f má lokálne extrémy, tak jedine v stacionárnych bodoch. Nájdime ich.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 2.$$

Pomocou druhej derivácie zistíme, či v stacionárnych bodoch má funkcia lokálny extrém.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x+2)-(x^2-2x)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{4(x-1)}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Pretože $f''(0) = -1 < 0$, tak funkcia f má v bode $x = 0$ lokálne maximum o hodnote $f(0) = -2\operatorname{arctg}(-1) = \dfrac{\pi}{2}$. Hodnota $f''(2) = 1 > 0$, teda funkcia f má v bode $x = 2$ lokálne minimum o hodnote $f(2) = 2 - 2\operatorname{arctg} 1 = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

Príklad 6. Nájdime najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$ na intervale $\langle -2, 3\rangle$.

Riešenie: Funkcia je definovaná na množine R, teda je spojitá, a preto je spojitá aj na intervale $\langle -1, 3\rangle$. Z vlastností spojitej funkcie vyplýva, že na tomto intervale určite nadobúda maximálnu a minimálnu hodnotu. Stačí teda nájsť body, v ktorých môžu existovať lokálne extrémy vnútri intervalu a potom vypočítať funkčné hodnoty v týchto bodoch a v krajných bodoch intervalu. Najväčšie z týchto čísel je globálne maximum a najmenšie globálne minimum funkcie na danom intervale. Teda

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \quad \text{a} \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 2.$$

Potom

$$f(-2) = 4 + 8 + 4 = 16, \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4},$$

$$f(2) = 4 - 8 + 4 = 0, \qquad f(3) = \frac{81}{4} - 27 + 9 = \frac{9}{4}.$$

Na intervale $\langle -2, 3\rangle$ má funkcia f maximum

$$\max_{x \in \langle -2,\, 3\rangle} f = f(-2) = 16$$

a minimum

$$\min_{x \in \langle -2,\, 3\rangle} f = f(0) = f(2) = 0.$$

Príklad 7. Nech $f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$. Nájdime
a) lokálne extrémy funkcie f na $D(f)$,
b) najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie f na intervale $\langle 0,\, 3\rangle$,
c) obor hodnôt funkcie f na intervale $\langle 0,\, 3\rangle$, t. j. $f(\langle 0\, 3\rangle)$.

Riešenie:
a) $D(f) = R$. Vypočítajme deriváciu funkcie

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,(-x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2),$$

ktorá je definovaná a spojitá na $D(f)$. Pretože

$$e^{-\frac{x^2}{2}} > 0\ \forall x \in R, \qquad \text{teda} \qquad f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad (1 - x)(1 + x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 \qquad \vee \qquad x = -1.$$

Funkcia má teda stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$. Pomocou druhej derivácie overíme, či v nich nastáva lokálny extrém.

$$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)(1 - x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}}(-2x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 3),$$

$$f''(-1) = -e^{-\frac{1}{2}}\,.\,(-2) = \frac{2}{\sqrt{e}} > 0 \qquad \text{a} \qquad f''(1) = e^{-\frac{1}{2}}\,.\,(-2) = -\,\frac{2}{\sqrt{e}} < 0.$$

Keďže $f''(-1) > 0$, funkcia má lokálne minimum v bode $x = -1$ o hodnote $f(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} = -\,\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. $f''(1) < 0$, a preto funkcia f má v bode $x = 1$ lokálne maximum o hodnote $f(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

b) Funkcia je na intervale spojitá, teda nadobúda na ňom maximum a minimum. Vnútri intervalu leží iba jeden stacionárny bod, a to $x = 1$. Takže vypočítajme funkčné hodnoty v tomto bode a koncových bodoch intervalu.

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0,606531, \qquad f(3) = 3e^{-\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{e^9}} \doteq 0,033327,$$

a preto

$$\max_{x\in\langle 0,\,3\rangle} f = f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad \text{a} \qquad \min_{x\in\langle 0,\,3\rangle} f = f(0) = 0.$$

c) Obrazom uzavretého intervalu spojitej funkcie je opäť uzavretý interval a platí

$$f\left(\langle 0,\ 3\rangle\right) = \left\langle \min_{x\in\langle 0,\,3\rangle} f,\ \max_{x\in\langle 0,\,3\rangle} f \right\rangle = \left\langle 0,\ \frac{1}{\sqrt{e}} \right\rangle.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 8.}}$ Aké majú byť rozmery otvorenej nádrže, ktorej objem má byť $64\,m^3$ a ktorá má mať štvorcové dno, aby na jej vymurovanie bolo treba minimálne množstvo materiálu?

Riešenie: Označme dĺžku strany dna x a výšku nádrže y, $x > 0$, $y > 0$. Plocha, ktorú máme vymurovať je

$$S = x^2 + 4xy.$$

Objem nádrže je

$$V = x^2 y, \quad \text{zo zadania pozmáme} \quad V = 64, \quad \text{takže medzi} \quad x \quad \text{a} \quad y \quad \text{platí}$$

$$x^2 y = 64 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{64}{x^2}.$$

Potom

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\,.\,\frac{64}{x^2} = x^2 + \frac{256}{x}, \qquad \text{teda} \qquad S = f(x) = x^2 + \frac{256}{x}.$$

Máme vlastne nájsť globálne minimum funkcie f pre $x > 0$.

$$f'(x) = 2x - \frac{256}{x^2}, \qquad \text{teda} \qquad f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x - \frac{256}{x^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2x^3 - 256 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 = 128 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2\,.\,64} = 4\sqrt[3]{2}.$$

$$f''(x) = 2 + \frac{512}{x^3} \qquad \text{a} \qquad f''(4\sqrt[3]{2}) = 2 + \frac{512}{128} > 0,$$

z čoho vyplýva, že f má v $x = 4\sqrt[3]{2}$ lokálne minimum, ktoré je jediné a funkcia je spojitá pre $x > 0$, teda je to globálne minimum.
Aby na vymurovanie otvorenej nádrže so štvorcovým dnom bolo treba minimálne množstvo materiálu pri objeme $64\,m^3$, tak jej rozmery sú

$$x = 4\sqrt[3]{2}\,m \qquad \text{a} \qquad y = \frac{64}{(4\sqrt[3]{2})^2} = \frac{64}{16\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{16} = 2\,\sqrt[3]{2}\,m.$$

6.2 Konvexnosť, konkávnosť a inflexné body funkcie

Nech f je funkcia, ktorá je spojitá na intervale J a v každom vnútornom bode tohto intervalu má deriváciu. Hovoríme, že funkcia f je **konvexná** (**konkávna**) na intervale J, ak pre každú dotyčnicu k jej grafu na intervale J platí, že všetky body grafu okrem dotykového bodu ležia nad (pod) touto dotyčnicou.

Funkcia f, ktorá je na intervale J spojitá a v každom vnútornom bode intervalu J má druhú deriváciu, je na intervale J konvexná (konkávna) práve vtedy, ak pre každé x z vnútra intervalu J platí $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), pričom rovnosť môže platiť iba v bodoch, ktoré netvoria interval $J_1 \subset J$.

Nech funkcia f je spojitá v bode x_0 a nech existuje derivácia funkcie f v bode x_0. Bod x_0 nazývame **inflexný bod** funkcie f, ak v niektorom ľavom okolí bodu x_0 je funkcia f konvexná (konkávna) a v niektorom pravom okolí bodu x_0 konkávna (konvexná).

Príklad 9. Nájdime intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body funkcie $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 2x - 1$.

Riešenie: $D(f) = R$. Aby sme zistili, kde je funkcia konvexná a kde je konkávna, potrebujeme nájsť intervaly, na ktorých je druhá derivácia funkcie kladná, resp. záporná podobne ako pri vyšetrovaní intervalov monotónnosti.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 2, \qquad f''(x) = 12x^2 - 12x - 24.$$

Druhá derivácia je definovaná a spojitá na celom definičnom obore, teda najskôr zistime, kde je $f''(x) = 0$. Výsledky zapíšeme do tabuľky, ak funkcia na intervale bude konvexná, použijeme označenie $\cup$, ak konkávna $\cap$.

$$12x^2 - 12x - 24 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x+1)(x-2) = 0,$$

teda

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 2.$$

Nulovými bodmi druhej derivácie rozdelíme definičný obor na čiastkové intervaly. Napr.
pre $x = -2 \in (-\infty,\ -1)$ je $f''(-2) = 12\,.\,(-2)^2 - 12\,.\,(-2) - 24 = 48 > 0$,
pre $x = 0 \in (-1,\ 2)$ je $f''(0) = -24 < 0$
a pre $x = 3 \in (2,\ \infty)$ je $f''(3) = 12\,.\,(3)^2 - 12\,.\,3 - 24 = 48 > 0$,
takže platí

	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ 2)$	$(2,\ \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkcia je konvexná na intervale $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 2, \infty)$, konkávna na intervale $\langle -1, 2\rangle$.

Inflexné body sú $x = -1$, v ľavom okolí tohto bodu je funkcia konvexná, v pravom konkávna a $x = 2$, v ľavom okolí tohto bodu je funkcia konkávna, v pravom konvexná.

Príklad 10. Nájdime intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body funkcie $f(x) = x^6 - 5x^4$.

Riešenie: Budeme postupovať ako v predchádzajúcom príklade. $D(f) = R$.

$$f'(x) = 6x^5 - 20x^3, \qquad f''(x) = 30x^4 - 60x^2.$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 30x^4 - 60x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 30x^2(x^2 - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 30x^2(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{2} \ \vee \ x = -\sqrt{2}.$$

Vyberme z čiastkových intervalov napr. body $x = -2 \in (-\infty, -\sqrt{2})$, $x = -1 \in (-\sqrt{2}, 0)$, $x = 1 \in (0, \sqrt{2})$, $x = 2 \in (\sqrt{2}, \infty)$ a vypočítajme v nich hodnoty druhej derivácie, ktorá je definovaná a spojitá na $D(f)$. Pretože

$$f''(-2) = 240, \qquad f''(-1) = -30, \qquad f''(1) = -30, \qquad f''(2) = 240,$$

tak platí

	$(-\infty,\,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},\,0)$	$(0,\,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Funkcia je konvexná na intervale $(-\infty,\,-\sqrt{2}\rangle$ a $\langle\sqrt{2},\,\infty)$. Konkávna je na intervale $\langle-\sqrt{2},\,\sqrt{2}\rangle$, pretože na ňom je funkcia f spojitá a $f''(x)\le 0$, pričom $f''(x)=0$ iba v jedinom bode $x=0$.

Inflexné body funkcie sú $x=-\sqrt{2}$ a $x=\sqrt{2}$.

Príklad 11. Nájdime intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body funkcie $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

Riešenie: $D(f)=\{x\in R;\ x^2-4\neq 0\}=(-\infty,\,-2)\cup(-2,\,2)\cup(2,\,\infty)$.

$$f'(x)=\frac{x^2-4-x\,.\,2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2-4)^2+(x^2+4)\,.\,2(x^2-4)\,.\,2x}{(x^2-4)^4}=\frac{2x(x^2-4)(-x^2+4+2x^2+8)}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}= \quad\Leftrightarrow\quad x=0,$$

pretože

$$x^2+12>0 \quad \forall\, x\in D(f).$$

Rozdelíme definičný obor nulovým bodom druhej derivácie na intervaly a zistíme znamienko druhej derivácie na čiastkových intervaloch. Vyberme napr. $x=-3\in(-\infty,\,-2)$, $x=-1\in(-2,\,0)$, $x=1\in(0,\,2)$ a $x=3\in(2,\,\infty)$. Keďže

$$f''(-3)<0,\qquad f''(-1)>0,\qquad f''(1)<0,\qquad f''(3)>0,$$

tak platí:

	$(-\infty,\,-2)$	$(-2,\,0)$	$(0,\,2)$	$(2,\,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkcia je konvexná na intervale $(-2,\,0\rangle$ a $(2,\,\infty)$, konkávna na intervale $(-\infty,\,-2)$ a $\langle0,\,2)$.

Funkcia má jeden inflexný bod $x=0$.

6.3 Priebeh funkcie

Pri priebehu funkcie určujeme:

1. Definičný obor a spojitosť funkcie.
2. Nulové body, t. j. body, v ktorých graf funkcie pretína súradnicové osi.
3. Párnosť a nepárnosť funkcie, prípadne periodičnosť.
4. Asymptoty grafu funkcie.
5. Intervaly monotónnosti a lokálne extrémy.
6. Intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexné body.
7. Graf funkcie a obor hodnôt.

Príklad 12. Vyšetrime priebeh funkcie $f(x) = x - \dfrac{2}{x-1}$.

Riešenie:

1. $D(f) = \{x \in R;\ x - 1 \neq 0\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Funkcia je elementárna, teda je spojitá na $D(f)$.

2. $x-$ové súradnice bodov, v ktorých graf pretína os x nájdeme z podmienky $f(x) = 0$, t. j.
$$x - \frac{2}{x-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x - 2}{x-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2.$$
V bodoch $X_1 = [-1, 0]$ a $X_2 = [2, 0]$ pretína graf funkcie súradnicovú os x.
Priesečník grafu funkcie so súradnicovou osou y je bod $Y = [0, f(0)] = [0, 2]$.

3. Keďže $-1 \in D(f)$ a $1 \notin D(f)$, tak nie je splnená podmienka, že pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$. Z toho vyplýva, že funkcia nie je ani párna ani nepárna.

4. Funkcia nie je definovaná v bode $x = 1$, ale je definovaná na rýdzom okolí tohto bodu, tak priamka $x = 1$ môže, ale nemusí, byť asymptota bez smernice. Vypočítajme preto jednostranné limity v tomto bode.
$$\lim_{x \to 1^-} \left(x - \frac{2}{x-1} \right) = \left[1 - \frac{2}{0^-} = 1 + \infty \right] = \infty \quad \Rightarrow$$
$$\text{priamka} \quad x = 1 \quad \text{je asymptota bez smernice.}$$
Pri výpočte druhej jednostrannej limity dostaneme
$$\lim_{x \to 1^+} \left(x - \frac{2}{x-1} \right) = \left[1 - \frac{2}{0^+} = 1 - \infty \right] = -\infty.$$
Aj z tohto výsledku vyplýva, že priamka $x = 1$ je asymptota bez smernice.
Nájdime asymptotu so smernicou, teda priamku $y = kx + q$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \dfrac{2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2}{x(x-1)}\right) = 1,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - \frac{2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{2}{x-1}\right) = 0.$$

Priamka $y = x$ je asymptota so smernicou pre $x \to \pm\infty$.

5. Vypočítajme deriváciu funkcie a zistime intervaly monotónnosti a lokálne extrémy.

$$f'(x) = \left[x - \frac{2}{x-1}\right]' = 1 + 2(x-1)^{-2} = 1 + \frac{2}{(x-1)^2},$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{pre každé} \quad x \in D(f), \quad \text{lebo} \quad (x-1)^2 > 0 \;\Rightarrow\; 1 + \frac{2}{(x-1)^2} > 0,$$

teda funkcia je rastúca na intervale $(-\infty,\, 1)$ a na intervale $(1,\, \infty)$. Lokálne extrémy nemá.

6. Vypočítajme druhú deriváciu.

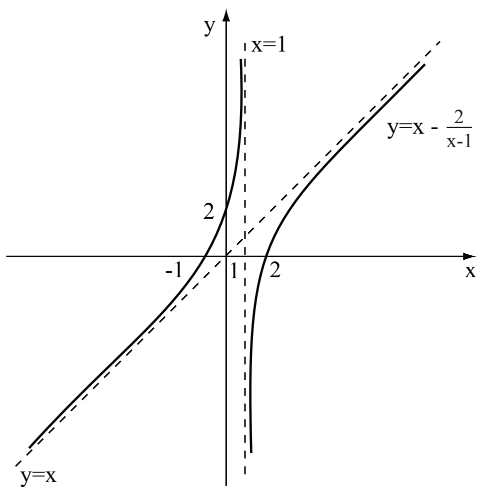
$$f''(x) = \left[1 + \frac{2}{(x-1)^2}\right]' = -4(x-1)^{-3} = -\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Zistime znamienko druhej derivácie. Pre $x = 0 \in (-\infty,\, 1)$ je $f''(0) = 4 > 0$ a pre $x = 2 \in (1,\, \infty)$ je $f''(2) = -4 < 0$. Preto platí

	$(-\infty,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Funkcia je konvexná na intervale $(-\infty,\, 1)$ a konkávna na intervale $(1,\, \infty)$. Inflexné body funkcia nemá.

7. Na základe získaných výsledkov nakreslíme graf (obr. 6.1).



Obr. 6.1

Z výsledkov vyplýva, že obor hodnôt $H(f) = R$.

Príklad 13. Vyšetrime priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Riešenie:

1. $D(f) = R$, funkcia je spojitá na $D(f)$.

2. Zistíme nulové body:

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x}{x^2+1} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0,$$

3.
$$\left.\begin{array}{l} D(f) = R \quad \Rightarrow x \text{ aj } -x \text{ patria do } D(f) \\ f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1} = -f(x) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{funkcia } f \text{ je nepárna.}$$

4. Funkcia je spojitá na R, teda nemá asymptoty bez smernice.

   Nájdeme asymptoty so smernicou, t. j. priamku $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \left[\frac{\pm\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

   Priamka $y = 0$ je asymptota so smernicou pre $x \to \pm\infty$.

5. Zistime intervaly monotónnosti a lokálne extrémy.

$$f'(x) = \left[\frac{x}{x^2+1}\right]' = \frac{x^2+1-x\,.\,2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (1-x)(1+x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 \quad \vee \quad x = -1.$$

   Pre $x = -2 \in (-\infty, -1)$ platí $f'(-2) = -\dfrac{3}{25} < 0$, pre $x = 0 \in (-1, 1)$ je $f'(0) = 1 > 0$ a pre $x = 2 \in (1, \infty)$ je $f'(2) = -\dfrac{3}{25} < 0$. Preto platí

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

   Funkcia je rastúca na intervale $\langle -1, 1\rangle$, klesajúca na intervale $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$. V bode $x = -1$ má funkcia lokálne minimum rovné $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, v $x = 1$ má funkcia lokálne maximum rovné $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

6. Nájdeme intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body.

$$f''(x) = \left[\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right]' \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)\,.\,2(x^2+1)\,.\,2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1)(-x^2-1-2+2x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -\sqrt{3}.$

Pretože

$$f''(-2) = -\frac{4}{125} < 0, \quad f''(-1) = \frac{1}{2} > 0, \quad f''(1) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f''(2) = \frac{4}{125} > 0,$$

tak platí

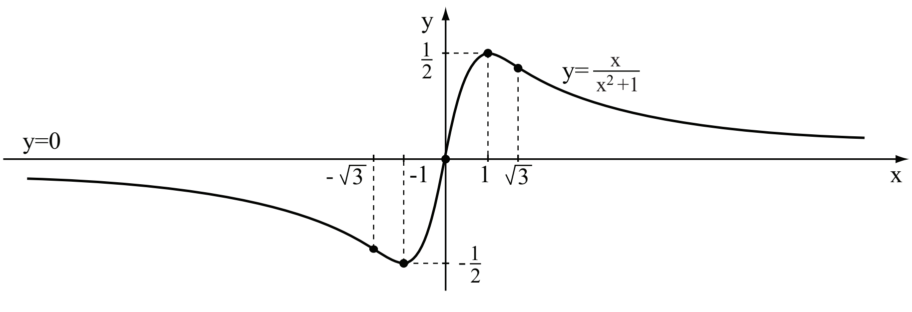
	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkcia je konvexná na intervale $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ a $\langle \sqrt{3}, \infty)$, konkávna na intervale $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$.
Inflexné body funkcie sú $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. Vypočítajme ešte funkčné hodnoty v inflexných bodoch, aby sme ich mohli znázorniť na grafe.

$$f(-\sqrt{3}) = -f(\sqrt{3}) \quad \text{lebo funkcia je nepárna, teda}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad f(0) = 0.$$

7. Nakreslime graf funkcie (obr. 6.2).



Obr. 6.2

$$H(f) = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Príklad 14. Vyšetrime priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}$.

Riešenie:

1. $D(f) = \{x \in R;\ 4 - x \geq 0 \ \wedge\ x > 0\} = \{x \in R;\ 4 \geq x \ \wedge\ x > 0\} = (0, 4\rangle$. Funkcia je elementárna, teda je spojitá na svojom $D(f)$.

2. Nájdeme nulové body:

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{4-x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 4.$$

V bode 0 funkcia nie je definovaná, teda graf nepretína súradnicvú os y.

3. Funkcia nie je ani párna ani nepárna, nie je splnená prvá podmienka, t. j. napríklad $1 \in D(f)$ a $-1 \notin D(f)$.

4. Funkcia je definovaná v pravom okolí bodu 0, v bode 0 však nie je definovaná. Priamka $x = 0$ môže, ale nemusí byť, asymptota bez smernice. Vypočítajme

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{je asymptota bez smernice.}$$

Funkcia je definovaná na ohraničenom intervale, teda nemá asymptoty so smernicou.

5. Nájdeme intervaly monotónnosti a lokálne extrémy. Pre $x \in D(f)$ platí

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{4-x}{x}} = \left(\frac{4-x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Potom

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4-x}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-x-4+x}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{\sqrt{4-x}\,\sqrt{x^3}}.$$

Pretože

$$\sqrt{4-x} \geq 0 \quad \text{a} \quad \sqrt{x^3} > 0 \quad \forall x \in (0,\,4) \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0,\,4),$$

teda funkcia je klesajúca na celom $D(f) = (0,\,4\rangle$ a má globálne minimum v bode $x = 4$ o hodnote $f(4) = 0$.

6. Vypočítajme druhú deriváciu. Opäť je výhodné si najskôr upraviť deriváciu funkcie na tvar

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4-x}\,\sqrt{x^3}} = \frac{-2}{\sqrt{(4-x)\,x^3}} = \frac{-2}{\sqrt{4x^3-x^4}} = -2\left(4x^3-x^4\right)^{-\frac{1}{2}},$$

takže

$$f''(x) = -2\left(-\frac{1}{2}\left(4x^3-x^4\right)^{-\frac{3}{2}}\left(12x^2-4x^3\right)\right) = \frac{4x^2(3-x)}{\left(\sqrt{x^3(4-x)}\right)^3} = \frac{4x^2(3-x)}{\sqrt{x^9}\,\sqrt{(4-x)^3}} =$$

$$= \frac{4(3-x)}{\sqrt{x^5}\,\sqrt{(4-x)^3}}.$$

$$f''(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3.$$

Určíme znamienko druhej derivácie na intervale $(0,\,3)$ a $(3,\,4)$. Pretože

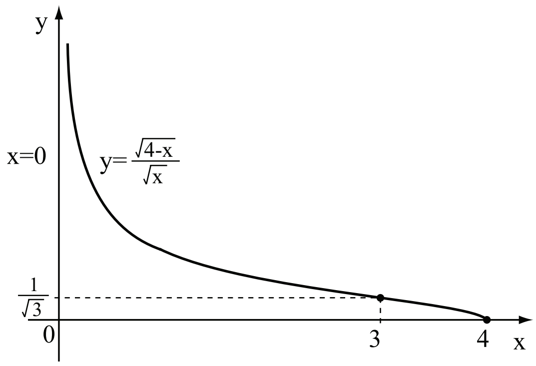
$$f''(1) = \frac{8}{\sqrt{3^3}} > 0 \qquad \text{a} \qquad f''(3,5) = \frac{-2}{\sqrt{(3,5)^5}\,\sqrt{(0,5)^3}} < 0,$$

platí

	$(0,\ 3)$	$(3,\ 4)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Funkcia je konvexná na intervale $(0,\ 3\rangle$ a konkávna na intervale $\langle 3,\ 4\rangle$.
Bod $x = 3$ je inflexný bod funkcie. Vypočítajme aj hodnotu $f(3) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ktorá pomôže pri kreslení grafu funkcie.

7. Na základe získaných výsledkov nakreslíme graf (obr. 6.3).



Obr. 6.3

Potom

$$H(f) = \langle 0,\ \infty).$$

$\boxed{\textbf{Príklad 15.}}$ Vyšetrime priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Riešenie:

1. $D(f) = \{x \in R;\ x \neq 0\} = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ \infty)$ a funkcia je spojitá na $D(f)$.

2. Nulové body funkcia nemá, pretože $e^x > 0$ pre každé $x \in R$ a $f(0)$ neexistuje, lebo $0 \notin D(f)$.

3. Ak
$$x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \in D(f).$$
Pretože
$$f(-1) = -\frac{1}{e}, \quad f(1) = e \qquad \Rightarrow \qquad f(-1) \neq f(1) \quad \text{a} \quad f(-1) \neq -f(1),$$
teda neplatí pre každé $x \in D(f)$, že $f(-x) = f(x)$ alebo $f(-x) = -f(x)$, a preto funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

4. Funkcia môže mať asymtotu bez smernice priamku $x = 0$, lebo je definovaná na rýdzom okolí tohto bodu. Vypočítajme jednostranné limity v bode 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty.$$

Teda priamka $\quad x = 0 \quad$ je asymptota bez smernice.

Poznamenajme, že stačilo, aby jedna jednostranná limita bola nevlastná. Obe limity sme počítali iba preto, aby sme vedeli, ako sa funkcia „správa“ v okolí bodu 0 a aby sme vedeli nakresliť graf funkcie.

Nájdime asymptoty so smernicou, teda priamky $y = kx + q$. Pretože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty,$$

limita je nevlastná a funkcia nemá asymptotu so smernicou pre $x \to \infty$.

Nájdime, ak existuje, asyptotu so smernicou pre $x \to -\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0.$$

Priamka $\quad y = 0 \quad$ je asymptota so smernicou pre $\quad x \to -\infty$.

5.

$$f'(x) = \left[\frac{e^x}{x}\right]' = \frac{e^x \,.\, x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x - 1 = 0, \quad \text{lebo} \quad e^x > 0 \;\forall x \in R, \qquad \text{teda} \qquad x = 1.$$

Rozdeľme $D(f)$ pomocou stacionárneho bodu $x = 1$ na intervaly a zistime znamienko derivácie na týchto intervaloch. Vyberme napr. body $-1 \in (-\infty,\, 0)$, $0,5 \in (0,\, 1)$ a $2 \in (1,\, \infty)$ Potom

$$f'(-1) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0, \qquad f'(0,5) = \frac{-0,5e^{0,5}}{(0,5)^2} = -\frac{2}{\sqrt{e}} < 0, \qquad f'(2) = \frac{e^2}{4} > 0.$$

Preto platí

	$(-\infty,\, 0)$	$(0,\, 1)$	$(1,\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty,\, 0)$ a $(0,\, 1\rangle$, rastúca na intervale $\langle 1,\, \infty)$. V $x = 1$ má lokálne minimum, ktoré sa rovná $f(1) = e$.

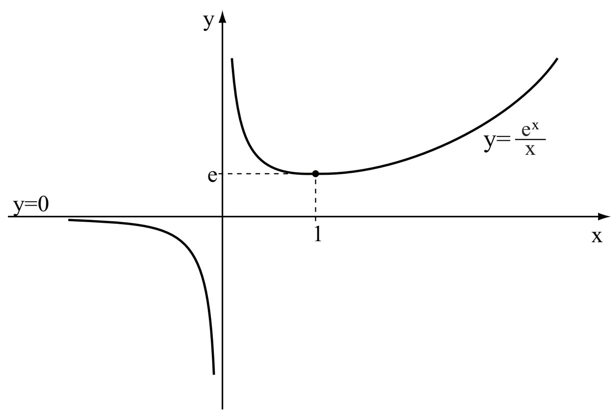
6.
$$f''(x) = \left[\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right]' = \frac{(e^x(x-1)+e^x)x^2 - e^x(x-1)\,.\,2x}{x^4} =$$
$$= \frac{x\,.\,e^x(x^2-2x+2)}{x^4} = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

Pretože
$$x^2 - 2x + 2 \neq 0 \quad \text{pre každé} \quad x \in R,$$
lebo diskriminant kvadratickej rovnice $x^2 - 2x + 2 = 0$ je záporný $(D = -4)$ a $e^x > 0$, tak $f''(x) \neq 0$ na definičnom obore funkcie. Zistime teda znamienko druhej derivácie na $D(f)$. Zvolíme napríklad body $x = -1 \in (-\infty, 0)$ a $x = 1 \in (0, \infty)$. Pretože
$$f''(-1) = -\frac{5}{e} < 0, \qquad f''(1) = e > 0$$
(a f'' je spojitá funkcia) platí aj

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Funkcia je konkávna na intervale $(-\infty, 0)$ a konvexná na intervale $(0, \infty)$. Inflexné body nemá.

7. Na základe získaných výsledkov nakreslíme graf funkcie (obr. 6.4).



Obr. 6.4

Z výsledkov vyplýva, že
$$H(f) = (-\infty, 0) \cup \langle e, \infty) \,.$$

Príklad 16. Vyšetrime priebeh funkcie $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

Riešenie:

1. $D(f) = \{x \in R;\ x^2 - 4 > 0\}$.

$$x^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \ \vee \ x > 2,$$

teda

$$D(f) = (-\infty,\ -2) \cup (2,\ \infty)$$

a funkcia je spojitá na $D(f)$.

2.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{5}.$$

Graf funkcie pretína os x v bodoch $X_1 = [-\sqrt{5},\ 0]$ a $X_2 = [\sqrt{5},\ 0]$.

3. Definičný obor je množina, ktorá je symetrická podľa bodu 0, teda

$$\left.\begin{array}{l} x \in D(f) \text{ aj } -x \in D(f) \\ f(-x) = \ln((-x)^2 - 4) = \ln(x^2 - 4) = f(x) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{funkcia } f \text{ je párna,}$$

graf funkcie bude symetrický podľa súradnicovej osi y.

4. Funkcia nie je definovaná v bode 2, ale je definovaná v pravom okolí bodu 2, teda priamka $x = 2$ môže (ale nemusí), byť asymptota bez smernice. Vypočítajme teda jednostrannú limitu.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \ln(\underbrace{x^2 - 4}_{0^+}) = -\infty,$$

teda priamka $x = 2$ je asymptota bez smernice.

Keďže funkcia je párna, tak aj priamka symetrická podľa osi y s priamkou $x = 2$, t. j. priamka

$x = -2$, je druhá asymptota bez smernice.

Ak opäť využijeme to, že funkcia je párna, tak stačí nám vypočítať, ak existuje, iba asymptotu so smernicou pre $x \to \infty$. Pre druhú asymptotu potom môžeme využiť symetriu podľa súradnicovej osi y.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2 - 4)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^2 - 4} = 0,$$

$$q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \ln(x^2 - 4) = \infty.$$

Pretože $q = \infty$ asymptota so smernicou pre $x \to \infty$ neexistuje, a teda ani pre $x \to -\infty$.

5.
$$f'(x) = \left[\ln(x^2-4)\right]' = \frac{2x}{x^2-4}, \qquad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \notin D(f).$$

Nájdeme intervaly monotónnosti. Využijeme napríklad body $x = -3 \in (-\infty,\, -2)$ a $x = 3 \in (2,\, \infty)$. Pretože

$$f'(-3) = -\frac{6}{5} < 0 \qquad \text{a} \qquad f'(3) = \frac{6}{5} > 0,$$

platí

	$(-\infty,\, -2)$	$(2,\, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty,\, -2)$, rastúca na $(2,\, \infty)$. Lokálne extrémy funkcia nemá.

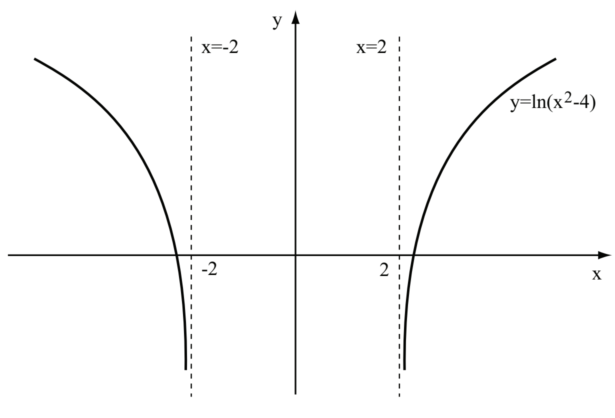
6.
$$f''(x) = \left[\frac{2x}{x^2-4}\right]' = \frac{2(x^2-4) - 2x\,.\,2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2(x^2-4-2x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}.$$

Pretože

$$x^2+4 > 0 \qquad \text{a} \qquad (x^2-4)^2 > 0, \qquad \text{tak} \qquad f''(x) < 0 \qquad \text{pre každé } x \in D(f).$$

Takže funkcia je konkávna na intervale $(-\infty,\, -2)$ a $(2,\, \infty)$. Inflexné body funkcia nemá.

7. Nakreslíme graf funkcie (obr. 6.5).



Obr. 6.5

$$H(f) = (-\infty,\, \infty),$$

čo vyplýva z grafu funkcie a z toho, že

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(x^2-4) = \infty.$$

Príklad 17. Vyšetrime priebeh funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

Riešenie:

1. $D(f) = \{x \in R;\ x \neq 0\} = (-\infty,\, 0) \cup (0,\, \infty)$, funkcia je spojitá na svojom definičnom obore.

2. Nájdeme $x-$ové súradnice priesečníkov grafu so súradnicovou osou x, t. j. vyriešime rovnicu $f(x) = 0$.
$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x} = 0.$$
Táto rovnica však nemá riešenie, a preto graf funkcie nepretína os x. Keďže 0 nepatrí do definičného oboru, tak nemá zmysel hľadať priesečník grafu funkcie s osou y.

3. Nech
$$x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \in D(f).$$
Potom
$$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{-x} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$
pretože funkcia $\operatorname{arctg} x$ je nepárna. Teda
$$\left.\begin{array}{l} x \text{ aj } -x \text{ patria do definičného oboru funkcie} \\ f(-x) = f(x) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{funkcia } f \text{ je nepárna.}$$

4. Keďže funkcia nie je definovaná v bode 0 ale je definovaná na rýdzom okolí tohto bodu, tak priamka $x = 0$ môže byť asymptota bez smenice. Vypočítajme jednostranné limity funkcie v tomto bode.
$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty} = -\frac{\pi}{2}.$$
Keďže jednostanné limity sú vlastné, funkcia nemá asymptoty bez smernice.
Nájdime asymptoty so smernicou $y = kx + q$, kde
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} = \left[\frac{\operatorname{arctg} 0}{\pm\infty}\right] = 0, \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$
Teda priamka
$$y = 0 \qquad \text{je asymptota grafu funkcie pre} \qquad x \to \pm\infty.$$

5. Vypočítajme deriváciu funkcie.
$$f'(x) = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right]' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} \left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

$$-\frac{1}{x^2+1} < 0 \quad \forall x \in D(f), \quad \text{pretože} \quad x^2+1 > 0 \quad \forall x \in R.$$

Funkcia je teda klesajúca na intevale $(-\infty,\, 0)$ a na intervale $(0,\, \infty)$. Lokálne extrémy funkcia nemá.

6. Zistime intervaly konvexnosti a konkávnosti.

$$f''(x) = \left[-\frac{1}{x^2+1}\right]' = \left[-(x^2+1)^{-1}\right]' = (x^2+1)^{-2}\, 2x = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Nájdeme nulové body druhej derivácie

$$f''(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \notin D(f).$$

Určíme znamienko druhej derivácie na definičnom obore v intervale $(-\infty,\, 0)$ a $(0,\, \infty)$. Použime napr. body $x = -1$ a $x = 1$. Pretože

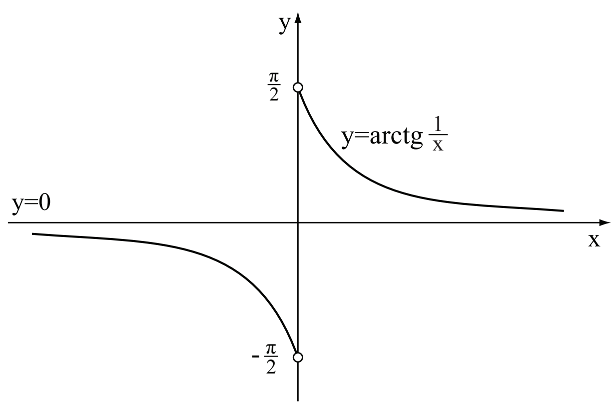
$$f''(-1) = -\frac{1}{2} < 0 \qquad \text{a} \qquad f''(1) = \frac{1}{2} > 0,$$

platí aj

	$(-\infty,\, 0)$	$(0,\, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Funkcia je konvexná na intervale $(0,\, \infty)$, konkávna na intervale $(-\infty,\, 0)$. Inflexné body nemá, pretože konkávnosť sa mení na konvexnosť v bode 0, ktorý nepatrí do definičného oboru funkcie.

7. Na základe získaných výsledkov nakreslíme graf funkcie (obr. 6.6).



Obr. 6.6

Z grafu vyplýva, že obor hodnôt $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2},\, 0\right) \cup \left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)$.

6.4 Cvičenia

1. Nájdite intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie
   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, **b)** $f(x) = x^2 - 2\ln x$.
2. Nájdite maximum a minimum funkcie $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ na intervale $\langle -3,\, 0\rangle$ a obor hodnôt funkcie f na intervale $\langle -3,\, 0\rangle$.
3. Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexné body funkcie
   a) $f(x) = x^4 - 4x^3$, **b)** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
4. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$.
5. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = e^{-x^2}$.
6. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = x\,\ln x$.
7. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$.

<u>Výsledky</u>

1. a) $D(f) = R$, rastúca na $(-\infty,\, -1\rangle$ a $\langle 3,\, \infty)$, klesajúca na $\langle -1,\, 3\rangle$. V $x = -1$ má lokálne maximum $f(-1) = 7$, v $x = 3$ má lokálne minimum $f(3) = -25$.
   b) $D(f) = (0,\, \infty)$, rastúca na $\langle 1, \infty)$, klesajúca na $(0,\, 1\rangle$, v $x = 1$ má lokálne minimum $f(1) = 1$.
2. $\max\limits_{x\in\langle -3,\,0\rangle} = f(-2) = 21$, $\min\limits_{x\in\langle -3,\,0\rangle} = f(0) = 1$, $f\left(\langle -3,\, 0\rangle\right) = \langle 1,\, 21\rangle$.
3. a) $D(f) = R$, konvexná na $(-\infty,\, 0\rangle$ a $\langle 2,\, \infty)$, konkávna na $\langle 0,\, 2\rangle$. Inflexné body $x = 0$, $x = 2$.
   b) $D(f) = R - \{0\}$, konvexná na $\left\langle -\dfrac{1}{2},\, 0\right)$ a $(0,\, \infty)$, konkávna na $\left(-\infty,\, -\dfrac{1}{2}\right\rangle$. Inflexný bod $x = -\dfrac{1}{2}$.
4. $D(f) = R - \{0\}$, priesečník s osou x $X = [1, 0]$, nie je párna ani nepárna, $x = 0$ je ABS, $y = -x$ je ASS, rastúca na $\left\langle -\sqrt[3]{2},\, 0\right)$, klesajúca na $\left(-\infty,\, -\sqrt[3]{2}\right\rangle$ a $(0,\, \infty)$, v $x = -\sqrt[3]{2}$ má lokálne minimum $f\left(-\sqrt[3]{2}\right\rangle = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$, konvexná na $(-\infty,\, 0)$ a $(0,\, \infty)$, inflexné body nemá, $H(f) = R$.
5. $D(f) = R$, priesečník s osou y $Y = [0, 1]$, párna, $y = 0$ je ASS, rastúca na $(-\infty,\, 0\rangle$, klesajúca na $\langle 0,\, \infty)$, v $x = 0$ má lokálne minimum $f(0) = 1$, konvexná na $\left(-\infty,\, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ a $\left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}},\, \infty\right)$, konkávna na $\left\langle -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$, inflexné body $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $H(f) = (0,\, 1\rangle$.
6. $D(f) = (0,\, \infty)$, priesečník s osou x $X = [1, 0]$, nie je párna ani nepárna, nemá asymptoty, rastúca na $\left\langle \dfrac{1}{e},\, \infty\right)$, klesjúca na $\left(0,\, \dfrac{1}{e}\right\rangle$, v $x = \dfrac{1}{e}$ má lokálne minimum $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$, konvexná na $D(f)$, inflexné body nemá, $H(f) = \left\langle -\dfrac{1}{e}, \infty\right)$.
7. $D(f) = R$, prechádza začiatkom súradnicového systému, nepárna, $y = x - \pi$ je ASS pre $x \to \infty$, $y = x + \pi$ je ASS pre $x \to -\infty$, rastúca na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1,\, \infty)$, klesajúca na $\langle -1,\, 1\rangle$, v $x = -1$ má lokálne maximumu $f(-1) = -1 + \dfrac{\pi}{2}$, v $x = 1$ má lokálne minimum $f(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$, konvexná na $\langle 0,\, \infty)$, konkávna na $(-\infty,\, 0\rangle$, inflexný bod $x = 0$, $H(f) = R$.

7

Neurčitý integrál

7.1 Primitívna funkcia a základné integrály

Funkcia F sa nazýva **primitívna funkcia** k funkcii f na intervale $(a,\, b)$ práve vtedy, ak pre každé $x \in (a,\, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Platí:

- Nech funkcia F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale $(a,\, b)$. Funkcia G je primitívna k funkcii f práve vtedy, ak existuje také $c \in R$, že pre každé $x \in (a,\, b)$ platí $G(x) = F(x) + c$.
- Ak je funkcia f na intervale $(a,\, b)$ spojitá, tak k nej existuje primitívna funkcia na intervale $(a,\, b)$.

Ak uvažujeme ľubovoľnú z primitívnych funkcií k funkcii f na intervale $(a,\, b)$, hovoríme, vzhľadom na predchádzajúce tvrdenie, o **neurčitom integrále** funkcie f a píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ \forall x \in (a,\, b),\ c \in R, \quad \text{kde} \quad F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a,\, b).$$

Konštantu c nazývame **integračná konštanta**.

<u>ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI NEURČITÉHO INTEGRÁLU</u>

Ak funkcie f a g majú na intervale $(a,\, b)$ neurčité integrály a $k \in R$ tak aj funkcie $f + g$, $k\,.\,f$ majú na $(a,\, b)$ neurčité integrály $\forall x \in (a,\, b)$ a platí:

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$
- $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx.$

<u>ZÁKLADNÉ VZORCE INTEGROVANIA</u>

1. $\displaystyle\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1, \quad \alpha \in R,$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,$

3. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c,$

4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

5. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$

6. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + c,$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c,$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c,$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad a > 0,$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c, \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \quad a > 0,$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + c, \quad k \neq 0,$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c, \quad a > 0,$

13. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$

Poznámka: Všetky uvedené vzorce platia na ľubovoľnom otvorenom intervale, ktorý je podmnožinou definičného oboru funkcie, ktorú integrujeme.

Príklad 1. Ukážme, že funkcia $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x^2 - 6x + 5$ na intervale $(-\infty, \infty)$.

Riešenie: Funkcia f aj F sú definované na intervale $(-\infty, \infty)$. Pretože

$$F'(x) = 6x^2 - 6x + 5, \quad \text{tak} \quad F'(x) = f(x) \; \forall x \in (-\infty, \infty),$$

teda funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale $(-\infty, \infty)$.

Príklad 2. Ukážme, že funkcie $F(x) = \dfrac{\cos 2x}{2}$ a $G(x) = \cos^2 x$ sú primitívne funkcie k tej istej funkcii na intervale $(-\infty, \infty)$.

Riešenie: Definičmé obory funkcií F a G sú $D(F) = D(G) = R$. Vypočítajme derivácie funkcií F a G.

$$F'(x) = \frac{1}{2}(-\sin 2x)\, 2 = -\sin 2x, \qquad G'(x) = 2\cos x(-\sin x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x.$$

$$F'(x) = G'(x) = -\sin 2x \qquad \forall x \in (-\infty,\, \infty),$$

preto funkcie F a G sú primitívne k funkcii $f(x) = -\sin 2x,\; x \in (-\infty,\, \infty)$.
Ak funkciu F upravíme, dostaneme:

$$F(x) = \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)\right) = \cos^2 x - \frac{1}{2} = G(x) - \frac{1}{2},$$

resp. $F(x) = G(x) - \dfrac{1}{2}$.
Našli sme konštantu $c = -\dfrac{1}{2}$, o ktorú sa líšia funkcie F a G na intervale $(-\infty,\, \infty)$.

$\boxed{\textbf{Príklad 3.}}$ Ukážme, že funkcie $F(x) = \operatorname{arccotg} x$ a $G(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ sú primitívne funkcie k tej istej funkcii na intervale $(0,\, \infty)$. Nájdime konštantu c, o ktorú sa líšia.

Riešenie: $D(F) = R$ a $D(G) = R - \{0\}$, teda funkcie F a G sú definované aj na intervale $(0,\, \infty)$. Vypočítajme ich derivácie.

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad G'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Derivácie funkcií F a G sú tiež definované na intervale $(0,\, \infty)$ a pre každé $x \in (0,\, \infty)$, platí

$$F'(x) = G'(x) = -\frac{1}{1+x^2},$$

teda funkcie F a G sú primitívne k funkcii $f(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ pre $x \in (0,\, \infty)$. To ale znamená, že existuje taká konštanta $c \in R$, že pre každé $x \in (0,\, \infty)$ platí

$$F(x) = G(x) + c.$$

Zvoľme napr. $x = 1$ a vypočítajme konštantu c. Platí

$$F(1) = G(1) + c \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccotg} 1 = \operatorname{arctg} 1 + c \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + c \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Takže platí

$$\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \qquad x \in (0,\, \infty).$$

Poznámka: Ďalšie príklady budú venované technike výpočtu neurčitých integrálov pomocou základných integračných vzorcov. Všetky rovnosti budú platiť na ľubovoľnom otvorenom podintervale definičného oboru, na ktorom je integrovaná funkcia spojitá. Nad znamienkom rovnosti v prvých príkladoch budeme v zátvorke uvádzať aj čísla vzorcov, ktoré pri integrovaní použijeme. Ak pri výpočte budeme robiť úpravy (prirátame vhodnú nulu, resp. vynásobíme vhodnou jednotkou), tak tieto úpravy zaznačíme a zapíšeme ich **výraznejšie**.

Príklad 4. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int (x^5 + 4x^3 - 5x^2 + 2)dx$, **b)** $\displaystyle\int (x+3)(x-6)\,dx$,

c) $\displaystyle\int \left(x^4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx$, **d)** $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right) dx$,

e) $\displaystyle\int (x^2 - 5x)\sqrt{x}\,dx$, **f)** $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 5\sqrt{x}}{x^2}\,dx$.

Riešenie: **a)** Máme integrovať lineárnu kombináciu funkcií, teda využijeme vlastnosti neurčitého integrálu.

$$\int (x^5 + 4x^3 - 5x^2 + 2)dx = \int x^5\,dx + 4\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + 2\int x^0 dx \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4\frac{x^{3+1}}{3+1} - 5\frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\frac{x^{0+1}}{0+1} + c = \frac{x^6}{6} + x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x + c.$$

b) Funkciu najskôr upravíme a potom budeme pokračovať ako v predchádzajúcom príklade.

$$\int (x+3)(x-6)dx = \int (x^2 - 3x - 18)dx = \int x^2 dx - 3\int x\,dx - 18\int dx \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 18x + c.$$

c) Rozpíšme daný integrál na súčet integrálov a upravme integrovanú funkciu tak, aby sme vedeli použiť základné integračné vzorce.

$$\int \left(x^4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int x^4 dx - \int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-2} dx \overset{(1,2)}{=} \frac{x^5}{5} - \ln|x| + 2\frac{x^{-1}}{-1} + c =$$

$$= \frac{x^5}{5} - \ln|x| - \frac{2}{x} + c.$$

d) Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade.

$$\int \left(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2\int x^{\frac{1}{3}} dx - 5\int x^{-\frac{1}{2}} dx + 3\int x^{-\frac{1}{4}} dx \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} - 10\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x^3} + c.$$

e) Upravme najskôr funkciu.

$$\int (x^2 - 5x)\sqrt{x}\,dx = \int (x^2 - 5x)\,x^{\frac{1}{2}} dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx - 5\int x^{\frac{3}{2}} dx \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 5\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} - 2\sqrt{x^5} + c.$$

f) Funkcia je podielom dvoch funkcií, preto ju najskôr upravme.

$$\int \frac{x^3 - 2x + 5\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \left(x - 2\frac{1}{x} + 5x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \int x\,dx - 2\int \frac{1}{x}dx + 5\int x^{-\frac{3}{2}}dx \overset{(1,2)}{=}$$

$$\overset{(1,2)}{=} \frac{x^2}{2} - 2\ln x + 5\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{x^2}{2} - 2\ln x - \frac{10}{\sqrt{x}} + c.$$

Integrovaná funkcia je definovaná na intervale $(0, \infty)$, tak sme mohli namiesto $\ln|x|$ písať $\ln x$.

$\boxed{\textbf{Príklad 5.}}$ Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int (x^2 + 2^x + e^x + e^2)dx$, **b)** $\displaystyle\int (2^x + 3^x)^2 dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{6^x + 4^x}{3^x}dx$.

Riešenie: Máme vypočítať integrály exponenciálnych funkcií. Až bude potrebné, funkcie naskôr upravíme.

a)

$$\int (x^2+2^x+e^x+e^2)dx = \int x^2dx+\int 2^xdx+\int e^xdx+e^2\int dx \overset{(1,3,4)}{=} \frac{x^3}{3}+\frac{2^x}{\ln 2}+e^x+e^2\,x+c.$$

b)

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx = \int \left((2^x)^2 + 2\,.\,2^x\,3^x + (3^x)^2\right) dx = \int \left((2^2)^x + 2(2\,.\,3)^x + (3^2)^x\right) =$$

$$= \int 4^x dx + 2\int 6^x dx + \int 9^x dx \overset{(4)}{=} \frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c.$$

c)

$$\int \frac{6^x + 4^x}{3^x}dx = \int \left(\frac{6^x}{3^x} + \frac{4^x}{3^x}\right) dx = \int \left(\left(\frac{6}{3}\right)^x + \left(\frac{4}{3}\right)^x\right) dx =$$

$$= \int 2^x dx + \int \left(\frac{4}{3}\right)^x dx \overset{(4)}{=} \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln\frac{4}{3}} + c = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{4^x}{3^x\ln\frac{4}{3}} + c.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 6.}}$ Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int (3\sin x - 5\cos x)dx$, **b)** $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\,\cos^2 x}dx$.

Riešenie: Máme vypočítať integrály goniometrických funkcií. Prvý integrál vypočítame- pomocou základných vzorcov a vlastností. Funkcie v ďalších integráloch budeme musieť najskôr upraviť.

a)

$$\int (3\sin x - 5\cos x)dx = 3\int \sin x dx - 5\int \cos x\, dx \overset{(5,6)}{=} 3(-\cos x) - 5\sin x + c =$$
$$= -3\cos x - 5\sin x + c.$$

b)

$$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \overset{(1,7)}{=} \mathrm{tg}\, x - x + c.$$

c)

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\, \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\, \cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\, \cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\, \cos^2 x}\right) dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx \overset{(7,8)}{=} -\mathrm{cotg}\, x - \mathrm{tg}\, x + c.$$

Príklad 7. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, **b**) $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2}\, dx$, **c**) $\displaystyle\int \frac{1}{2+x^2}\, dx$, **d**) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\, dx$.

Riešenie: Funkcie najskôr uravíme.

a)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + \mathbf{1} - \mathbf{1}}{1+x^2} dx = \int \left(\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$
$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \overset{(1,10)}{=} x - \mathrm{arctg}\, x + c.$$

b)

$$\int \frac{1}{4+x^2}\, dx = \int \frac{1}{2^2+x^2}\, dx \overset{(10)}{=} \frac{1}{2} \mathrm{arctg} \frac{x}{2} + c.$$

c)

$$\int \frac{1}{2+x^2}\, dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + x^2}\, dx \overset{(10)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{arctg}\, \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

d)

$$\int \frac{1}{x^2-4}\, dx = \int \frac{1}{x^2-2^2}\, dx \overset{(12)}{=} \frac{1}{2\,.\,2} \ln \left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c = \frac{1}{4} \ln \left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c.$$

Príklad 8. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, **b**) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$, **c**) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$, **d**) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

Riešenie: Funkcie najskôr uravíme.

a)

$$\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)dx \overset{(1,9)}{=} \arcsin x - x + c.$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}}\,dx \overset{(9)}{=} \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + c.$$

c)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx \overset{(11)}{=} \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + c.$$

d)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+(-4)}}\,dx \overset{(11)}{=} \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + c.$$

Príklad 9. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{2}{2x+3}\,dx$, **b**) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}\,dx$, **c**) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}, dx$, **d**) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x}{x^5+5x^2}\,dx$.

Riešenie: Ak sa pozorne pozrieme na funkcie, ktoré máme integrovať, všimneme si, že v čitateli zlomku je buď derivácia menovateľa, alebo čitateľ sa dá upraviť na deriváciu menovateľa.

a) Pretože $[2x+3]' = 2$, tak

$$\int \frac{2}{2x+3}\,dx = \int \frac{[2x+3]'}{2x+3}\,dx \overset{(13)}{=} \ln|2x+3| + c.$$

b) Opäť $[x^2-3]' = 2x$, teda

$$\int \frac{2x}{x^2-3}\,dx = \int \frac{[x^2-3]'}{x^2-3}\,dx \overset{(13)}{=} \ln\left|x^2-3\right| + c.$$

c) Keďže $[x^3+1]' = 3x^2$, najskôr upravíme čitateľa funkcie a až potom vypočítame integrál.

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \mathbf{\frac{1}{3}} \int \frac{\mathbf{3}x^2}{x^3+1}\,dx \overset{(13)}{=} \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right| + c.$$

d) Podobne $[x^5+5x^2]' = 5x^4+10x = 5(x^4+2x)$, teda

$$\int \frac{x^4+2x}{x^5+5x^2}\,dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\int \frac{\mathbf{5}(x^4+2x)}{x^5+5x^2}\,dx \overset{(13)}{=} \frac{1}{5}\ln\left|x^5+5x^2\right|+c.$$

Príklad 10. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{2^x}{2^x+3}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{3e^x}{1+2e^x}\,dx$, **d)** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x-4}\,dx$.

Riešenie: V čitateli každej funkcie je „skoro“ derivácia menovateľa. V tomto príklade budeme postupovať trochu rýchlejšie.

a)

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\mathbf{1}\,.\int \frac{-\mathbf{1}\,.\,\sin x}{1+\cos x}\,dx \overset{(13)}{=} -\ln|1+\cos x|+c.$$

b)

$$\int \frac{2^x}{2^x+3}\,dx = \frac{\mathbf{1}}{\ln \mathbf{2}}\,.\int \frac{2^x\,.\ln \mathbf{2}}{2^x+3}\,dx \overset{(13)}{=} \frac{1}{\ln 2}\ln|2^x+3|+c = \frac{\ln(2^x+3)}{\ln 2}+c,$$

lebo $2^x+3>0\ \forall x\in R \quad\Rightarrow\quad |2^x+3| = 2^x+3$.

c)

$$\int \frac{3e^x}{1+2e^x}\,dx = 3\int \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx = \frac{3}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2}e^x}{1+2e^x}\,dx \overset{(13)}{=} \frac{3}{2}\ln|1+2e^x|+c = \frac{3\ln(1+2e^x)}{2}+c,$$

lebo $1+2e^x>0\ \forall x\in R \quad\Rightarrow\quad |1+2e^x| = 1+2e^x$.

d) Pretože $[\sin^2 x-4]' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, tak

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x-4}\,dx \overset{(13)}{=} \ln\left|\sin^2 x-4\right|+c.$$

Príklad 11. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(\operatorname{tg} x-3)\cos^2 x}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx$, **d)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\arcsin x}\,dx$.

Riešenie: Každá z funkcií, ktorú máme integrovať, sa dá napísať tak, aby v čitateli bola derivácia menovateľa. V poslednom príklade potrebujeme urobiť aj malú úpravu.

a)

$$\int \frac{1}{(\operatorname{tg} x-3)\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x-3}\,dx \overset{(13)}{=} \ln|\operatorname{tg} x-3|+c.$$

b)

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx \overset{(13)}{=} \ln|\ln x| + c.$$

c)

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x}\,dx \overset{(13)}{=} \ln|\operatorname{arctg} x| + c.$$

d)

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\arcsin x}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\,dx \overset{(13)}{=} \ln|\arcsin x| + c.$$

7.2 Integrovanie substitučnou metódou

Nech F je primitívna funkcia k spojitej funkcii f na intervale $(a,\, b)$. Nech funkcia φ má na intervale $(\alpha,\, \beta)$ spojitú deriváciu φ' a nech pre každé $x \in (\alpha,\, \beta)$ je $\varphi(x) \in (a,\, b)$. Potom platí:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c.$$

Postup pri substitučnej metóde môžeme symbolicky zapísať

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{array} \right| = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c.$$

Poznámka 1: Substitučná metóda sa používa, ak za integrálom je súčin dvoch funkcií, pričom jedna je zložená a druhá je deriváciou vedľajšej zložky, prípadne sa dá na deriváciu vedľajšej zložky upraviť. Všetky výpočty platia na intervale, kde sú splnené predpoklady danej metódy. Násobenie vhodnou jednotkou budeme zapisovať **výraznejším písmom**. Ak bude nutné túto úpravu urobiť, tak ju zapíšeme za substitúciu do zátvorky. Substitúciu budeme zapisovať medzi dve vertikálne čiary.

Poznámka 2: Pri výpočte neurčitého integrálu sa používa ešte jedna substitúcia, ak nevieme vypočítať $\int f(x)\,dx$ ale vieme vypočítať $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. V tomto prípade, použijeme druhé pravidlo o substitúcii, ktoré zapíšeme iba symbolicky. Presné znenie je v každej učebnici základov matematickej analýzy, napr. pozri [1], [5], [7].

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \ \Rightarrow \ t = \varphi^{-1}(x) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(t) + c = \Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right) + c.$$

Príklad 12. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int (2x-1)^9\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \sqrt{3-x}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{3}{(x+4)^5}\,dx$, **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-5}}\,dx$,

e) $\displaystyle\int \sin(4x-3)\,dx$, **f)** $\displaystyle\int e^{5x}\,dx$, **g)** $\displaystyle\int \frac{3}{\cos^2(1-2x)}\,dx$, **h)** $\displaystyle\int \operatorname{tg}(2x+1)\,dx$.

Riešenie:

a) Daný integrál môžeme vypočítať tak, že použijeme binomickú vetu na umocnemie a polynóm už vieme integrovať. Oveľa jednoduchšie a efektívnejšie je použiť substitúciu. Pri tomto príklade substitúciu podrobne rozpíšeme, v ďalších príkladoch budeme pokračovať rýchlejšie.

$$\int (2x-1)^9\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x-1 \\ \dfrac{dt}{dx} = [2x-1]' \quad \Rightarrow \quad dt = 2\,dx \end{array} \right| .$$

Aby sme mohli použiť túto substitúciu, najskôr potrebujeme funkciu za integrálom trochu upraviť, aby sme tam mali deriváciu vedľajšej zložky. Teda

$$\int (2x-1)^9\,dx = \frac{1}{\mathbf{2}}\int (2x-1)^9\,.\,\mathbf{2}\,dx = \frac{1}{2}\int t^9\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{10}}{10} + c = \frac{(2x-1)^{10}}{20} + c.$$

b)

$$\int \sqrt{3-x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 3-x \\ dt = -1\,dx \end{array} \right| = \left(-\mathbf{1}\int \sqrt{3-x}\,.\,(-\mathbf{1})dx\right) = -\int \sqrt{t}\,dt = -\int t^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + c = -\frac{2\sqrt{t^3}}{3} + c = -\frac{2t\sqrt{t}}{3} + c = -\frac{2(3-x)\sqrt{3-x}}{3} + c.$$

c)

$$\int \frac{3}{(x+4)^5}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x+4 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{3}{t^5}\,dt = 3\int t^{-5}\,dt = 3\frac{t^{-4}}{-4} + c = -\frac{3}{4t^4} + c =$$

$$= -\frac{3}{4(x+4)^4} + c.$$

d)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-5}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x-5 \\ dt = 3\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{1}{\mathbf{3}}\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-5}}\,\mathbf{3}\,dx\right) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2} + c = \frac{\sqrt[3]{t^2}}{2} + c = \frac{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}{2} + c.$$

e)

$$\int \sin(4x-3)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x-3 \\ dt = 4\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{1}{\mathbf{4}}\int \sin(4x-3)\,\mathbf{4}\,dx\right) = \frac{1}{4}\int \sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}(-\cos t) + c = -\frac{\cos(4x-3)}{4} + c.$$

f)

$$\int e^{5x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 5x \\ dt = 5\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{1}{\mathbf{5}} \int e^{5x}\,\mathbf{5}\,dx \right) = \frac{1}{5}\int e^t\,dt = \frac{1}{5}e^t + c = \frac{e^{5x}}{5} + c.$$

g)

$$\int \frac{3}{\cos^2(1-2x)}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 1-2x \\ dt = -2\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{3}{\mathbf{-2}} \int \frac{1}{\cos^2(1-2x)}\,(\mathbf{-2})\,dx \right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = -\frac{3}{2}\mathrm{tg}\,t + c = -\frac{3\mathrm{tg}\,(1-2x)}{2} + c.$$

h)

$$\int \mathrm{tg}\,(2x+1)\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 2x+1 \\ dt = 2\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{1}{\mathbf{2}} \int \mathrm{tg}\,(2x+1)\,\mathbf{2}\,dx \right) = \frac{1}{2}\int \mathrm{tg}\,t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\mathbf{1}\,.\,\frac{1}{2}\int \frac{(\mathbf{-1})\sin t}{\cos t}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|\cos t| + c = -\frac{\ln|\cos(2x+1)|}{2} + c.$$

Poznámka: Substitúcia, ktorú sme používali v Príklade 12 sa dá zovšeobecniť pri výpočte integrálu $\int f(kx+b)\,dx$, $k \neq 0$. Potom

$$\int f(kx+b)\,dx = \left| \begin{array}{c} t = kx+b \\ dt = k\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{k}\int f(t)\,dt = \frac{1}{k}F(t) + c = \frac{F(kx+b)}{k} + c,$$

ak $F'(t) = f(t)$. Špeciálne:

$$\int \sin(kx)\,dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + c, \qquad \int \cos(kx)\,dx = \frac{\sin(kx)}{k} + c, \qquad \int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + c.$$

Tieto integrály sa často používajú v technickej praxi.

Príklad 13. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+4}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int 3x\,e^{-x^2}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}\,dx$, **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$, **f)** $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Riešenie:

a)

$$\int 2x\sqrt{x^2+4}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2+4 \\ dt = 2x\,dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2t\sqrt{t}}{3} + c =$$

$$= \frac{2(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}{3} + c.$$

b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{1}{\mathbf{-2}} \int \frac{\mathbf{-2}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \right) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\,.\,2t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c.$$

c)

$$\int 3x\,e^{-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{3}{\mathbf{-2}} \int e^{-x^2}\,(\mathbf{-2})\,dx \right) = -\frac{3}{2} \int e^t\,dt = -\frac{3}{2}e^t + c =$$

$$= -\frac{3e^{-x^2}}{2} + c.$$

d)

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3-5 \\ dt = 3x^2\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{2}{\mathbf{3}} \int \frac{\mathbf{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}\,dx \right) = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3} \int t^{-\frac{2}{3}}\,dt = \frac{2}{3}\,.\,3t^{\frac{1}{3}} + c = 2\sqrt[3]{t} + c = 2\sqrt[3]{x^3-5} + c.$$

e)

$$\int \frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{1}{x} \\ dt = -\dfrac{1}{x^2}\,dx \end{array} \right| = \left(\mathbf{-1} \int \frac{\mathbf{-1}}{x^2} \cos\frac{1}{x}\,dx \right) = -\int \cos t\,dt = -\sin t + c =$$

$$= -\sin\frac{1}{x} + c.$$

f)

$$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{array} \right| = \left(\mathbf{2} \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\mathbf{2}\sqrt{x}}\,dx \right) = 2 \int 2^t\,dt = 2\,\frac{2^t}{\ln 2} + c = \frac{2\,.\,2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} + c.$$

Príklad 14. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{x}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x + 3}{x}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{arctg}^3 x\,(1+x^2)}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x + 2)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, **e)** $\displaystyle\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^x}}\,dx$, **f)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

Riešenie:

a)

$$\int \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \ln x + 1 \\ dt = \dfrac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2t\sqrt{t}}{3} + c =$$

$$= \frac{2(\ln x + 1)\sqrt{\ln x + 1}}{3} + c.$$

b)

$$\int \frac{\ln^2 x + 3}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int (t^2 + 3)\,dt = \frac{t^3}{3} + 3t + c = \frac{\ln^3 x}{3} + 3\ln x + c.$$

c)

$$\int \frac{1}{\operatorname{arctg}^3 x\,(1 + x^2)}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^3}\,dt = \int t^{-3}\,dt = \frac{t^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2t^2} + c =$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{arctg}^2 x} + c.$$

d)

$$\int \frac{(\arcsin x + 2)^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \arcsin x + 2 \\ dt = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \end{array} \right| = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(\arcsin x + 2)^3}{3} + c.$$

e)

$$\int \frac{3^x}{\sqrt{1 - 3^x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 1 - 3^x \\ dt = -3^x\,\ln 3\,dx \end{array} \right| = \left(\frac{1}{-\ln \mathbf{3}} \int \frac{3^x\,.\,(-\ln \mathbf{3})}{\sqrt{1 - 3^x}}\,dx \right) = -\frac{1}{\ln 3} \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\ln 3} \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{2t^{\frac{1}{2}}}{\ln 3} + c = -\frac{2\sqrt{t}}{\ln 3} + c = -\frac{2\sqrt{1 - 3^x}}{\ln 3} + c.$$

f)

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{1 + t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg} e^x + c.$$

Príklad 15. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\,\cos x\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2 - \cos^2 x}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 x}}\,dx$, **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\sqrt{(\operatorname{cotg} x - 1)^3}}\,dx$.

Riešenie:

a)

$$\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\,\cos x\,dx = \left|\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right| = \int \sqrt[3]{t^2}\,dt = \int t^{\frac{2}{3}}\,dt = \frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + c = \frac{3\,\sqrt[3]{t^5}}{5} + c =$$

$$= \frac{3\,\sqrt[3]{\sin^5 x}}{5} + c.$$

b)

$$\int \frac{\sin x}{2-\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right| = \left(-\mathbf{1}\int \frac{-\mathbf{1}\,\sin x}{2-\cos^2 x}\,dx\right) = -\int \frac{1}{2-t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^2-2}\,dt = \int \frac{1}{t^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}\right| + c.$$

c)

$$\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{array}\right| = \int 2^t\,dt = \frac{2^t}{\ln 2} + c = \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\ln 2} + c.$$

d)

$$\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}\,dx = \left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{array}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \arcsin\frac{t}{2}+c = \arcsin\frac{\operatorname{tg} x}{2}+c.$$

e)

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\sqrt{(\operatorname{cotg} x-1)^3}}\,dx = \left|\begin{array}{c} t = \operatorname{cotg} x - 1 \\ dt = \dfrac{-1}{\sin^2 x}\,dx \end{array}\right| = -\mathbf{1}\int \frac{-\mathbf{1}}{\sin^2 x\sqrt{(\operatorname{cotg} x-1)^3}}\,dx =$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\,dt = -\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt = -\,t^{-\frac{1}{2}}\,.\,(-2) + c = \frac{2}{\sqrt{t}} + c = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{cotg} x - 1}} + c.$$

7.3 Integrovanie metódou per-partes

Nech u a v sú funkcie, ktoré majú na intervale $(a,\,b)$ spojité derivácie u', v'. Potom na intervale $(a,\,b)$ platí

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Poznámka: Metóda per-partes sa používa, ak za integrálom máme súčin dvoch funkcií a pri správnej voľbe funkcií u a v' dostaneme jednoduchší integrál. Metódu per-partes môžeme použiť aj viackrát za sebou. Všetky výpočty platia na intervale, kde funkcie u' a v' sú spojité.

Príklad 16. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int (x+1)2^x\,dx,$ **c)** $\displaystyle\int (1-2x)\sin x\,dx,$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx,$ **e)** $\displaystyle\int (x^2+2x)\cos x\,dx.$

Riešenie: Prvý príklad urobíme podrobne, ďalšie budeme zapisovať skrátene. Keďže za integrálom máme súčin polynómu a funkcie, ktorej integrál vieme vypočítať, výhodné je zvoliť za funkciu u polynóm, pretože derivovaním sa stupeň polynómu znižuje.

a)

zvolíme si	vypočítame
$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v'(x) = e^x$	$v(x) = \int e^x dx = e^x$

Túto voľbu pri výpočte zapíšeme do riešenia nasledovne:

$$\int x\,e^x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = \int e^x\,dx = e^x \end{array} \right| = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c.$$

b)

$$\int (x+1)2^x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = x+1 & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2^x & \Rightarrow & v(x) = \int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right| = (x+1)\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx =$$

$$= \frac{2^x(x+1)}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\,\frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x(x+1)}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + c.$$

c)

$$\int (1-2x)\sin x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = 1-2x & \Rightarrow & u'(x) = -2 \\ v'(x) = \sin x & \Rightarrow & v(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= (1-2x)(-\cos x) - \int -2\,(-\cos x)\,dx =$$

$$= (2x-1)\cos x - 2\int \cos x\,dx = (2x-1)\cos x - 2\sin x + c.$$

d)

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \int x\,.\,\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} & \Rightarrow & v(x) = \int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x \end{array} \right| =$$

$$= x(-\operatorname{cotg} x) - \int -\operatorname{cotg} x\,dx = -x\operatorname{cotg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -x\operatorname{cotg} x + \ln|\sin x| + c.$$

e)

$$\int (x^2+2x)\cos x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = x^2+2x & \Rightarrow & u'(x) = 2x+2 \\ v'(x) = \cos x & \Rightarrow & v(x) = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2+2x)\sin x - \int (2x+2)\sin x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = 2x+2 & \Rightarrow\ u'(x) = 2 \\ v'(x) = \sin x & \Rightarrow\ v(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2+2x)\sin x - \left[(2x+2)(-\cos x) - \int 2(-\cos x)\, dx \right] =$$

$$= (x^2+2x)\sin x + (2x+2)\cos x - 2\int \cos x\, dx = (x^2+2x)\sin x + (2x+2)\cos x - 2\sin x + c =$$

$$= (x^2+2x-2)\sin x + (2x+2)\cos x + c.$$

Pri výpočte sme použili dvakrát po sebe metódu per-partes.

$\boxed{\textbf{Príklad 17.}}$ Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int x \log_3 x\, dx$, **b**) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$, **c**) $\displaystyle\int x \ln^2 x\, dx$, **d**) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Riešenie: Za každým integrálom máme súčin dvoch funkcií, pričom primitívnu funkciu k jednej z nich nevieme priamo určiť. Preto túto funkciu budeme voliť za nederivovanú funkciu u.

a)

$$\int x \log_3 x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \log_3 x & \Rightarrow\ u'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3} \\ v'(x) = x & \Rightarrow\ v(x) = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log_3 x - \int \frac{1}{x\ln 3} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2 \log_3 x}{2} - \frac{1}{2\ln 3}\int x\, dx = \frac{x^2 \log_3 x}{2} - \frac{1}{2\ln 3} \cdot \frac{x^2}{2} + c =$$

$$= \frac{x^2 \log_3 x}{2} - \frac{x^2}{4\ln 3} + c.$$

b)

$$\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & \Rightarrow\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = \sqrt{x} & \Rightarrow\ v(x) = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \end{array} \right| = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\, dx =$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}\, \ln x}{3} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2x\sqrt{x}\, \ln x}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2x\sqrt{x}\, \ln x}{3} - \frac{4x\sqrt{x}}{9} + c.$$

c)

$$\int x \ln^2 x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln^2 x & \Rightarrow\ u'(x) = 2\ln x \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v'(x) = x & \Rightarrow\ v(x) = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2\ln x}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x \ln x\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & \Rightarrow \; u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x & \Rightarrow \; v(x) = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\,dx \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c =$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right) + c.$$

V tomto príklade sme použili metódu per-partes dvakrát za sebou.

d)

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \operatorname{arctg} x & \Rightarrow \; u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = x & \Rightarrow \; v(x) = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 + \mathbf{1} - \mathbf{1}}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + c = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + c.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 18.}}$ Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \ln x\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \operatorname{arccotg} x\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$,

d) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$, **e)** $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$,

Riešenie: Za integrálom je iba jedna funkcia, jej primitívnu funkciu však nepoznáme. Aby sme mohli použiť metódu per-partes, zvolíme druhú funkciu rovnajúcu sa 1.

a)

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \,.\, \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & \Rightarrow \; u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow \; v(x) = \int 1\,dx = x \end{array} \right| = x\,\ln x - \int \frac{1}{x} \,.\, x\,dx =$$

$$= x\,\ln x - \int dx = x\,\ln x - x + c.$$

b)

$$\int \operatorname{arccotg} x\,dx = \int 1 \,.\, \operatorname{arccotg} x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \operatorname{arccotg} x & \Rightarrow \; u'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow \; v(x) = \int 1\,dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x \operatorname{arccotg} x - \int -\frac{1}{1+x^2} \, . \, x \, dx = x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2}x}{1+x^2} \, dx =$$
$$= x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

c)

$$\int \ln^2 x \, dx = \int 1 \, . \, \ln^2 x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln^2 x & \Rightarrow \; u'(x) = 2 \ln x \, . \, \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow \; v(x) = \int 1 \, dx = x \end{array} \right| =$$
$$= x \, \ln^2 x - \int 2 \ln x \, . \, \frac{1}{x} \, . \, x \, dx = x \, \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx \overset{\textbf{(a)}}{=} x \, \ln^2 x - 2x \, \ln x + 2x + c.$$

Pri výpočte sme použili dvakrát metódu per-partes. Keďže posledný integrál je vypočítaný v príklade **a)**, tak sme využili tento výsledok.

d)

$$\int \operatorname{arctg} 2x \, dx = \int 1 \, . \operatorname{arctg} 2x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \operatorname{arctg} 2x & \Rightarrow \; u'(x) = \frac{2}{1+4x^2} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow \; v(x) = \int 1 \, dx = x \end{array} \right| =$$
$$= x \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2}{1+4x^2} \, . \, x \, dx = x \operatorname{arccotg} 2x + \frac{1}{\mathbf{4}} \int \frac{\mathbf{4} \, . \, 2x}{1+4x^2} \, dx =$$
$$= x \operatorname{arccotg} 2x + \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + c.$$

e)

$$\int \ln(x^2+1) \, dx = \int 1 \, . \, \ln(x^2+1) \, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln(x^2+1) & \Rightarrow \; u'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow \; v(x) = \int 1 \, dx = x \end{array} \right| =$$
$$= x \, \ln(x^2+1) - \int \frac{2x}{x^2+1} \, . \, x \, dx = x \, \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2 + \mathbf{1} - \mathbf{1}}{x^2+1} \, dx =$$
$$= x \, \ln(x^2+1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x \, \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + c.$$

Príklad 19. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int e^x \, \sin 2x \, dx,$ **b)** $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} \, dx.$

Riešenie:

a) Na výpočet použijeme dvakrát metódu per-partes.

$$\int e^x \sin 2x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \sin 2x & \Rightarrow\ u'(x) = 2\cos 2x \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow\ v(x) = \int e^x\, dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \cos 2x & \Rightarrow\ u'(x) = -2\sin 2x \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow\ v(x) = \int e^x\, dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \sin 2x - 2\left(e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x\, dx\right) = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x\, dx.$$

Dopracovali sme sa k tomu istému integrálu, ktorý sme mali vypočítať, čiže platí

$$\int e^x \sin 2x\, dx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x\, dx,$$

a preto

$$5\int e^x \sin 2x\, dx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x$$

$$\int e^x \sin 2x\, dx = \frac{e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x}{5} + c.$$

Podobne sa počítajú aj integrály typu $\displaystyle\int a^{kx} \sin(qx)\, dx$ a $\displaystyle\int a^{kx} \cos(qx)\, dx$.

b)

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int 1\,.\,\sqrt{1-x^2}\, dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \sqrt{1-x^2} & \Rightarrow\ u'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow\ v(x) = \int\, dx = x \end{array} \right| =$$

$$x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \left(\sqrt{1-x^2}\, dx - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \arcsin x.$$

Takže

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \arcsin x$$

$$2\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + c.$$

7.4 Integrovanie niektorých špeciálnych typov funkcií

Integrály niektorých racionálnych funkcií

Funkcia $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q sú polynómy sa nazýva **racionálna funkcia**. Budeme pracovať s takými racionálnymi funkciami, ktoré majú v menovateli najviac polynóm druhého stupňa. Každá racionálna funkcia sa dá rozložiť na súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie (stupeň polynómu v čitateli je menší ako stupeň polynómu v menovateli). Tento rozklad dostaneme pomocou delenia polynómov P a Q. Keďže polynóm už vieme integrovať, a tiež už vieme vypočítať integrál typu $\int \dfrac{1}{ax+b}\,dx,\ a,\ b \in R$, stačí, ak si ukážeme, ako integrovať funkcie v tvare

$$\frac{A}{x^2+px+q} \qquad \text{a} \qquad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \qquad A, B, p, q \in R.$$

Integrály týchto rýdzoracionálnych funkcií vypočítame tak, že najskôr doplníme menovateľa na úplný štvorec a potom vhodnou substitúciou dostaneme integrály typu

$$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx, \quad \text{kde} \quad a > 0.$$

Prvý integrál vypočítame doplnením čitateľa na deriváciu menovateľa a môžeme použiť vzorec na integrovanie 13 a ďalšie tri integrály sú základné integračné vzorce 1, 10 a 12. Podrobnejšie to ukážeme na príkladoch.

Poznámka: Úpravu menovateľa na úplný štvorec zaznačíme v priebehu riešenia medzi dve vertikálne čiary.

Príklad 20. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-4x+4}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+5}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x-5}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,dx$, **e)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-4x+8}\,dx$, **f)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx$.

Riešenie:

a)

$$\int \frac{2}{x^2-4x+4}\,dx = \left| \, x^2-4x+4=(x-2)^2 \, \right| = 2\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2}\,dt = 2\int t^{-2}\,dt = -t^{-1} + c = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x-2} + c.$$

b)

$$\int \frac{1}{x^2+3x+5}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+3x+5 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = \\ = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{3}{2} \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{11}{4}}\right)^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{11}} + c = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{11}} + c = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + c.$$

c)

$$\int \frac{1}{x^2-4x-5}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2-4x-5 = (x-2)^2 - 2^2 - 5 = \\ = (x-2)^2 - 9 \end{array} \right| = \int \frac{1}{(x-2)^2-9}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2-3^2}\,dt = \frac{1}{2\,.\,3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + c = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-2-3}{x-2+3} \right| + c =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-5}{x+1} \right| + c.$$

d)

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,dx = \left| \, x^2+2x+1 = (x+1)^2 \, \right| = \int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x+1 \;\Rightarrow\; x = t-1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t-1-1}{t^2}\,dt = \int \frac{t-2}{t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - 2\int t^{-2}\,dt =$$

$$\ln|\,t\,| - 2\frac{t^{-1}}{-1} + c = \ln|\,t\,| + \frac{2}{t} + c = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c.$$

e)

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+8}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2-4x+8 = (x-2)^2 - 2^2 + 8 = \\ = (x-2)^2 + 4 \end{array} \right| = \int \frac{2x+1}{(x-2)^2+4}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x-2 \;\Rightarrow\; x = t+2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{2(t+2)+1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{2t+5}{t^2+4}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+4}\,dt + 5\int \frac{1}{t^2+2^2}\,dt = \ln(t^2+4) + 5\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + c =$$

$$= \ln((x-2)^2+4) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + c = \ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + c.$$

f)

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+5x+6 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \\ = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{array} \right| = \int \frac{x}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x+\frac{5}{2} \;\Rightarrow\; x = t-\frac{5}{2} \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t-\frac{5}{2}}{t^2-\frac{1}{4}}\,dt = \int \frac{t}{t^2-\frac{1}{4}}\,dt - \frac{5}{2}\int \frac{1}{t^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2}t}{t^2-\frac{1}{4}}\,dt - \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{1}{4}\right| - \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right| - \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+5x+6\right| - \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + c.$$

Príklad 21. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-8x+6}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+3}{x^2+2x+2}\,dx$.

Riešenie:

a) V menovateli nemáme polynóm druhého stupňa v tvare x^2+px+q. Aby sme mohli použiť predchádzajúci postup, najskôr menovateľa upravme.

$$\int \frac{1}{2x^2-8x+6}\,dx = \int \frac{1}{2(x^2-4x+3)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-4x+3)}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2-4x+3 = \\ = (x-2)^2-1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-2)^2-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + c.$$

b) Zadaná funkcia nie je rýdzoracionálna. Ak chceme daný integrál vypočítať, najskôr musíme vydeliť čitateľa menovateľom. Dostaneme polynóm a rýdzoracionálnu funkciu.

$$\begin{array}{l} x^3 : (x+1) = x^2 - x + 1 \\ \underline{-(x^3+x^2)} \\ \quad -x^2 \\ \quad \underline{-(-x^2-x)} \\ \qquad\quad x \\ \qquad \underline{-(x+1)} \\ \qquad\quad -1 \end{array}$$

Dostali sme
$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1},$$
teda
$$\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + c.$$

c) Po vydelení čitateľa menovateľom dostaneme
$$\frac{x^4 + x^3 + 3}{x^2 + 2x + 2} = x^2 - x + \frac{2x+3}{x^2+2x+2},$$
a preto
$$\int \frac{x^4 + x^3 + 3}{x^2 + 2x + 2}\,dx = \int (x^2 - x)\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx.$$
Druhý integrál je integrál typu, aké sme počítali v Príklade 20. Keďže
$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+2x+2 = \\ = (x+1)^2+1 \end{array} \right| = \int \frac{2x+3}{(x+1)^2+1}\,dx =$$
$$= \left| \begin{array}{l} t = x+1 \Rightarrow \ x = t-1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{2(t-1)+3}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$
$$= \ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t + c = \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + c,$$
tak
$$\int \frac{x^4 + x^3 + 3}{x^2 + 2x + 2}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + c.$$

Integrály niektorých iracionálnych funkcií

V tejto časti si ukážeme výpočet neurčitých integrálov dvoch typov.

1. Za integrálom je funkcia, kde sa nachádzajú odmocniny rôzneho stupňa toho istého lineárneho člena. Zvolíme takú substitúciu, aby sme odstránili odmocniny, ktoré sa vo výraze vyskytujú, a tým ich prevedieme na integrály racionálnych funkcií. Podrobnejšie si to ukážeme na príkladoch.
2. Integrály typu $\int \frac{1}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx \quad A,\ B,\ C \in R$. Po doplnení kvadratického trojčlena na úplný štvorec a po vhodnej substitúcii dostaneme integrály typu
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\,dx,$$
čo sú základné integračné vzorce 9 a 11.

$\boxed{\textbf{Príklad 22.}}$ Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,dx,$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

Riešenie:

a)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t}{1+t}\,dt = 2\int \frac{t+\mathbf{1}-\mathbf{1}}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,dt = 2\,(t - \ln|t+1|) + c = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + c.$$

Využili sme, že $|\sqrt{x}+1| = \sqrt{x}+1$, lebo $\sqrt{x}+1 > 0$.

b)

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} 1-3x = t^3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{1-t^3}{3} \\ dx = -t^2\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1-t^3}{3}}{t}\,(-t^2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(-t^2)(1-t^3)}{t}\,dt = \frac{1}{3}\int \left(t^4 - t\right)\,dt = \frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(1-3x)^5}}{15} - \frac{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}{6} + c.$$

c)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^3+t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^5}{t^2(t+1)}\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt.$$

Posledný integrál máme vypočítaný v Príklade 21.b). Využijeme tento výsledok a dostávame

$$\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + c.$$

Pretože $\quad x = t^6 \;\Rightarrow\; t = \sqrt[6]{x}, \qquad t^2 = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2 = \sqrt[3]{x}, \qquad t^3 = \left(\sqrt[6]{x}\right)^3 = \sqrt{x},\quad$ a teda

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x}+1|\right) + c =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + c.$$

Príklad 23. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+6}}\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}\,dx,$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-6x-x^2}}\,dx.$

Riešenie:

a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+6}}\,dx = \left| \begin{array}{c} x^2+3x+6 = \\ = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4} \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = x + \dfrac{3}{2} \\ dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{15}{4}}}\, dt = \ln\left| t + \sqrt{t^2 + \frac{15}{4}} \right| + c = \ln\left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} \right| + c =$$

$$= \ln\left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 6} \right| + c.$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 4x - 6}}\, dx = \left| \begin{array}{l} 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = \\ = 2\left[(x-1)^2 - 4\right] \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\left[(x-1)^2 - 4\right]}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 - 4}}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 4}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| t + \sqrt{t^2 - 4} \right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right| + c.$$

c)

$$\int \frac{1}{\sqrt{5 - 6x - x^2}}\, dx = \left| \begin{array}{l} 5 - 6x - x^2 = -(x^2 + 6x - 5) = \\ = -\left[(x+3)^2 - 14\right] = 14 - (x+3)^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{14 - (x+3)^2}}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = x + 3 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{14}\right)^2 - t^2}}\, dx = \arcsin \frac{t}{\sqrt{14}} + c =$$

$$= \arcsin \frac{x+3}{\sqrt{14}} + c.$$

Integrály niektorých goniometrických funkcií

$\boxed{\textbf{Príklad 24.}}$ Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \sin^3 x \, \cos x \, dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}}\, dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x}\, dx$,

d $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x \, dx$.

Riešenie: V nasledujúcich príkladoch máme vypočítať integrály goniometrických funkcií. Všetky integrované funkcie sú v tvare $f(\sin x)\cos x$ alebo $f(\cos x)\sin x$, prípadne sa dajú na takýto tvar upraviť. Integrály takýchto funkcií sa pre vhodné f dajú počítať substitúciou $t = \sin x$, resp. $t = \cos x$.

a)

$$\int \sin^3 x \, \cos x \, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c.$$

b)

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x+2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\sin x+2 \\ dt=\cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \int t^{-\frac{1}{3}}\,dt = \frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2}+c = \frac{3\sqrt[3]{t^2}}{2}+c =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(\sin x+2)^2}}{2}+c.$$

c)

$$\int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{array} \right| = -\mathbf{1}\int \frac{-\mathbf{1}\,.\,\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{4+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+c = \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2}+c.$$

d)

$$\int e^{\cos x}\,\sin x\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{array} \right| = -\mathbf{1}\int e^{\cos x}\,.\,(-\mathbf{1})\,.\,\sin x\,dx = -\int e^t\,dt = -e^t+c =$$

$$= -e^{\cos x}+c.$$

Príklad 25. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$,

d) $\displaystyle\int \sin 2x\,\sin 5x\,dx$, **e)** $\displaystyle\int \sin 2x\,\cos 3x\,dx$, **f)** $\displaystyle\int \cos 3x\,\cos 5x\,dx$.

Riešenie: Integrály týchto typov sa často vyskytujú v technickej praxi. Ich výpočet sa zjednoduší použitím nasledujúcich vzorcov goniometrických funkcií:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Potom dostaneme integrály typu

$$\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k}+c \qquad \text{a} \qquad \int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k}+c,$$

s ktorými sme sa stretli pri substitučnej metóde.
Skôr, ako začneme integrály počítať, poznamenajme ešte, že funkcia sínus je nepárna a kosínus párna, teda

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \text{a} \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

a)

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)+c = \frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c.$$

b)

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\,\sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\,\sin x\,dx = \left|\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right| =$$

$$= -\mathbf{1}\int (1-\cos^2 x)\,.\,(-\mathbf{1})\,.\,\sin x\,dx = -\int (1-t^2)\,dt = \int (t^2-1)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + c =$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$$

c) Pretože

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(2+4\cos 2x+1+\cos 4x\right) = \frac{1}{8}\left(3+4\cos 2x+\cos 4x\right),$$

tak

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int \left(3+4\cos 2x+\cos 4x\right)\,dx = \frac{1}{8}\left(3x + \frac{4\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c.$$

d)

$$\int \sin 2x\,\sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos(2x-5x) - \cos(2x+5x))\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos(-3x) - \cos 7x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 3x - \cos 7x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 7x}{7}\right) + c = \frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 7x}{14} + c.$$

e)

$$\int \sin 2x\,\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin(2x+3x) + \sin(2x-3x))\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin(-x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - (-\cos x)\right) + c = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + c.$$

f)

$$\int \cos 3x\,\cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos(3x+5x)+\cos(3x-5x))\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x+\cos(-2x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos 8x + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c = \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Na záver uvedieme ešte niekoľko príkladov, ktoré sa nedajú vypočítať iba jednou substitúciou alebo iba metódou per-partes.

Príklad 26. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$, **b**) $\displaystyle\int (\ln\sin x)\cos x\,dx$, **c**) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-4}}{x+4\sqrt{x-4}}\,dx$.

Riešenie:

a) Keďže nepoznáme primitívnu funkciu k funkcii $\arcsin x$, použijeme metódu per-partes.

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1\,.\,\arcsin x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u(x) = \arcsin x & \Rightarrow\ u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow\ v(x) = x \end{array}\right| =$$

$$= x\ \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (\text{požijeme substitúciu}) \left|\begin{array}{c} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{array}\right| =$$

$$= \left(x\ \arcsin x + \frac{1}{\mathbf{2}}\int \frac{-\mathbf{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right) = x\ \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = x\ \arcsin x + \frac{1}{2}\,.\,2\sqrt{t} + c =$$

$$= x\ \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

b)

$$\int (\ln\sin x)\cos x\,dx = \left|\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right| = \int 1\,.\,\ln t\,dt = \left|\begin{array}{ll} u(t) = \ln t & \Rightarrow\ u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & \Rightarrow\ v(t) = t \end{array}\right| =$$

$$= t\ \ln t - \int dt = t\ \ln t - t + c = t\,(\ln t - 1) + c = \sin x\,(\ln\sin x - 1) + c.$$

c) Najskôr doplňme kvadratický trojčlen na úplný štvorec.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = \left|\begin{array}{l} 5+4x-x^2 = -(x^2-4x-5) = \\ = -\left[(x-2)^2-9\right] = 9-(x-2)^2 \end{array}\right| = \int \frac{x+1}{\sqrt{9-(x-2)^2}}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t = x-2 \Rightarrow\ x = t+2 \\ dt = dx \end{array}\right| = \int \frac{t+2+1}{\sqrt{9-t^2}}\,dt = \int \frac{t}{\sqrt{9-t^2}}\,dt + 3\int \frac{1}{\sqrt{9-t^2}}\,dt =$$

$$(\text{prvý integrál vypočítame substitúciou}) \left|\begin{array}{c} z = 9-t^2 \\ dz = -2t\,dt \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz + 3\arcsin\frac{t}{3} =$$

$$= -\sqrt{z} + 3\arcsin\frac{t}{3} + c = -\sqrt{9-t^2} + 3\arcsin\frac{t}{3} + c = -\sqrt{5+4x-x^2} + 3\arcsin\frac{x-2}{3} + c.$$

d)

$$\int \frac{\sqrt{x-4}}{x-4\sqrt{x-4}}\,dx = \left| \begin{array}{c} x-4=t^2 \Rightarrow x=t^2+4 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2+4-4t}\,.\,2t\,dt =$$

$$\int \frac{2t^2}{(t-2)^2}\,dt = \left| \begin{array}{c} t-2=z \Rightarrow t=z+2 \\ dt=dz \end{array} \right| = 2\int \frac{(z+2)^2}{z^2}\,dz = 2\int \frac{z^2+4z+4}{z^2}\,dz =$$

$$= 2\int \left(1+\frac{4}{z}+\frac{4}{z^2}\right)dz = 2\left(z+4\ln|z|-\frac{4}{z}\right)+c = 2(t-2)+8\ln|t-2|-\frac{8}{t-2}+c =$$

$$= 2\left(\sqrt{x-4}-2\right)+8\ln\left|\sqrt{x-4}-2\right|-\frac{8}{\sqrt{x-4}-2}+c.$$

Poznámka: Aj keď ku každej spojitej funkcii existuje primitívna funkcia, nie vždy ju vieme vyjadriť pomcou konečného počtu základných elementárnych funkcií. Napríklad neurčité integrály

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int e^{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

sa nedajú vyjadriť konečným počtom elementárnych funkcií.

7.5 Cvičenia

1. Vypočítajte:
   a) $\int (6x^2+2x-5)\,dx$, **b)** $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+2}{x^3}\,dx$, **c)** $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$,
   d) $\int \frac{1}{3x-1}\,dx$, **e)** $\int \frac{2x+1}{x^2+4}\,dx$, **f)** $\int \operatorname{cotg} x\,dx$.
2. Vypočítajte:
   a) $\int (3x+2)^{10}\,dx$, **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$ **c)** $\int x\,\sin(x^2+5)\,dx$,
   d) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+2)}\,dx$, **e)** $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, **f)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$.
3. Vypočítajte:
   a) $\int (1-x)\cos x\,dx$, **b)** $\int 2x\,e^{2x}\,dx$, **c)** $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$, **d)** $\int \operatorname{arccotg} 3x\,dx$.
4. Vypočítajte:
   a) $\int \frac{2x-1}{x^2-4x+4}\,dx$, **b)** $\int \frac{3x+2}{x^2-2x+5}\,dx$, **c)** $\int \frac{x}{x^2+5x+4}\,dx$.
5. Vypočítajte:
   a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}\,dx$, **b)** $\int \frac{2}{\sqrt{5+2x-x^2}}\,dx$, **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx$.
6. Vypočítajte:
   a) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$, **b)** $\int \cos^3 x\,\sin x\,dx$, **c)** $\int \cos^2 x\,dx$, **d)** $\int \sin x\,\cos 2x\,dx$.

Výsledky

1. **a)** $2x^3 + x^2 - 5x + c$, **b)** $\ln|x| - \dfrac{3}{2\sqrt{x^3}} - \dfrac{1}{x^2} + c$, **c)** $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$,
d) $\dfrac{\ln|3x-1|}{3} + c$, **e)** $\ln(x^2+4) + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + c$, **f)** $\ln|\sin x| + c$.
2. **a)** $\dfrac{(3x+2)^{11}}{33} + c$, **b)** $2\sqrt{x-3} + c$, **c)** $-\dfrac{\cos(x^2+5)}{2} + c$, **d)** $\dfrac{\operatorname{tg}(x^3+2)}{3} + c$,
e) $\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + c$, **f)** $\arcsin e^x + c$.
3. **a)** $(1-x)\sin x - \cos x + c$, **b)** $e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c$, **c)** $-\dfrac{\ln x + 1}{x} + c$,
d) $x \operatorname{arccotg} 3x + \dfrac{\ln(9x^2+1)}{6} + c$.
4. **a)** $2\ln|x-2| - \dfrac{3}{x-2} + c$, **b)** $\dfrac{5}{2}\left(\ln(x^2-2x+5) + \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}\right) + c$,
c) $\dfrac{4\ln|x+4|}{3} - \dfrac{\ln|x+1|}{3} + c$.
5. **a)** $6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + c$, **b)** $2\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{6}} + c$, **c)** $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right| + c$.
6. **a)** $-\dfrac{1}{3\sin^3 x} + c$, **b)** $-\dfrac{\cos^4 x}{4} + c$, **c)** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + c$, **d)** $\dfrac{\cos x}{2} - \dfrac{\cos 3x}{6} + c$.

8

Určitý integrál

8.1 Výpočet určitého integrálu

Definíciu a vlastnosti určitého integrálu nebudeme uvádzať, čitateľ ich nájde v každej základnej literatúre matematickej analýzy. Sústredíme sa iba na výpočet určitého integrálu. Základom je Newtonov-Leibnizov vzorec, ktorý vyjadruje vzťah medzi neurčitým a určitým integrálom.

<u>Newtonov-Leibnizov vzorec</u>
Nech funkcia f je integrovateľná a funkcia F spojitá na intervale $\langle a,\, b\rangle$ a nech funkcia F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale $(a,\, b)$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Newtonov-Leibnizov vzorec dáva návod na výpočet určitého integrálu. Základom je nájsť jednu primitívnu funkciu a dosadiť do vzorca.

Poznámka: Kým pri neurčitom integrále sa dal získaný výsledok overiť pomocou derivácie výsledku, pri výpočte určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$, ktorého výsledkom je reálne číslo, to už nie je možné. Preto musíme v priebehu výpočtu kontrolovať, či sú splnené predpoklady používaných postupov. V príkladoch, ktoré budeme počítať, sú všetky predpoklady splnené. Riadne ich overíme v prvom príklade, v ďalších ich nebudeme overovať, môžu sa overiť pri samoštúdiu.

$\boxed{\textbf{Príklad 1.}}$ Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} (x-3)\ dx$, **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, **d)** $\displaystyle\int_0^2 (e^{2x}-\sqrt{x})\,dx$,

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-4}\,dx$, **f)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$, **g)** $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x-1|\,dx$, **h)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx$.

Riešenie:
a) Funkcia $f(x) = x-3$ je spojitá na intervale $\langle -2,\, 3\rangle$, teda je integrovateľná na intervale $\langle -2,\, 3\rangle$. Jej primitívna funkcia $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x$ je tiež spojitá na intervale $\langle -2,\, 3\rangle$. Preto platí

$$\int\limits_{-2}^{3} (x-3)\; dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-2}^{3} = \frac{3^2}{2} - 3\,.\,3 - \left(\frac{(-2)^2}{2} - 3\,.\,(-2)\right) = \frac{9}{2} - 9 - 2 - 6 = -\frac{25}{2}.$$

b)

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

c)

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\operatorname{arctg} x]_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$$

d)

$$\int\limits_{0}^{2} (e^{2x} - \sqrt{x})\, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^2 = \frac{e^4}{2} - \frac{2\,.\,2\,.\,\sqrt{2}}{3} - \frac{e^0}{2} + \frac{0}{3} =$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{e^4-1}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

e)

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{x^2-4}\, dx = \frac{1}{\mathbf{2}}\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathbf{2}x}{x^2-4}\, dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2-4|\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln|-3| - \ln|-4|) = \frac{1}{2}\,.\,\ln\frac{3}{4} =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{3}{4}} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

f)

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\mathbf{1}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\mathbf{1}\,.\,\sin x}{\cos x}\, dx = [-\ln|\cos x|\,]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + \ln|\cos 0| =$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\sqrt{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \frac{\ln 2}{2}.$$

g) Aby sme mohli integrál vypočítať, potrebujeme najskôr odstrániť absolútnu hodnotu. Využijeme pri tom definíciu absolútnej hodnoty.

$$\int_{-1}^{2} |x-1|\,dx = \left| \begin{array}{lllll} x-1\le 0 & \Leftrightarrow & x\le 1 & \Rightarrow & |x-1| = -(x-1) \quad x\in\langle -1,\,1\rangle \\ x-1\ge 0 & \Leftrightarrow & x\ge 1 & \Rightarrow & |x-1| = x-1 \qquad\;\; x\in\langle 1,\,2\rangle \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{2} =$$

$$= 1 - \frac{1^2}{2} - (-1) + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{2^2}{2} - 2 - \frac{1^2}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

h) Funkciu najskôr upravíme.

$$\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\sin^2 x}\,dx = \int_{0}^{2\pi} |\sin x|\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lllll} \sin x\le 0 & \Leftrightarrow & x\in\langle \pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi\rangle & \Rightarrow & |\sin x| = -\sin x \quad x\in\langle \pi,\,2\pi\rangle \\ \sin x\ge 0 & \Leftrightarrow & x\in\langle 2k\pi,\,\pi+2k\pi\rangle & \Rightarrow & |\sin x| = \sin x \qquad x\in\langle 0,\,\pi\rangle \end{array} \right| =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi =$$

$$= -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4.$$

Ak máme počítať napr. $\int_{1}^{4} x\sqrt{x^2+4}\,dx$, tak primitívnu funkciu nájdeme substitučnou metódou, pri výpočte integrálu $\int_{0}^{1} x\,e^x\,dx$ použijeme metódu per-partes. Tieto metódy sa pri výpočte určitého integrálu dajú použiť aj priamo.

Substitučná metóda určitý integrál

Ak sa integrovaná funkcia na intervale $\langle a,\,b\rangle$ dá vyjadriť v tvare $f\,(\varphi(x))\;\varphi'(x)$, kde φ' je spojitá funkcia na $\langle a,\,b\rangle$ a zároveň funkcia f je spojitá v každom bode $t=\varphi(x)$, $x\in\langle a,\,b\rangle$, tak platí

$$\int_{a}^{b} f\,(\varphi(x))\;\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

Metóda per-partes pre určitý integrál

Nech u a v sú funkcie, ktoré majú na intervale $\langle a,\,b\rangle$ spojité derivácie u', v'. Potom platí

$$\int_{a}^{b} u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_{a}^{b} u'(x)\,v(x)\,dx.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 2.}}$ Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int_1^4 x\sqrt{x^2+4}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+4}{(x^3+4x+1)^3}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x}\,dx$, **e)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\cos x}\sin x\,dx$, **f)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}\,dx$,

g) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$, **h)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, **i)** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$.

Riešenie: Je potrebné si uvedomiť, že pokiaľ by sme počítali neurčité integrály, tak by sme na výpočet použili substitučnú metódu. Preto ju použijeme aj na výpočet určitých integrálov. Pozor, nezabudnime zmeniť hranice.

a) Opäť prvý príklad urobíme podrobnejšie, v ostatných sú predpoklady substitučnej metódy splnené, môžu sa overiť pri štúdiu.
Ak položíme

$$\varphi(x) = x^2 + 4 = t,$$

tak funkcia za integrálom sa dá napísať v tvare

$$\frac{1}{2}\sqrt{\varphi(x)}\,\varphi'(x),$$

pretože $\varphi'(x) = 2x$. Funkcia φ' je spojitá pre každé reálne číslo, teda je spojitá aj na intervale $\langle 1,\, 4\rangle$. Potrebujeme ešte zmeniť hranice. Ak

$$\begin{aligned} x &= 1 \quad \Rightarrow \quad t = \varphi(1) = 1^2 + 4 = 5 \\ x &= 4 \quad \Rightarrow \quad t = \varphi(4) = 4^2 + 4 = 20. \end{aligned}$$

Funkcia

$$f(t) = \frac{\sqrt{t}}{2}$$

je spojitá v každom bode $t = x^2 + 4$, kde $x \in \langle 1,\, 4\rangle$. Takže môžeme písať

$$\int_1^4 x\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_5^{20}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_5^{20} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_5^{20} = \frac{1}{3}\left(20\,.\,\sqrt{20} - 5\,.\,\sqrt{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(20\,.\,2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}\right) = \frac{35\sqrt{5}}{3}.$$

Tento výpočet zapíšeme skrátene

$$\int_1^4 x\sqrt{x^2+4}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t = x^2+4 & x = 1 \Rightarrow t = 5 \\ dt = 2x\,dx & x = 4 \Rightarrow t = 20 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_5^{20}\sqrt{t}\,dt = \ldots = \frac{35\sqrt{5}}{3}.$$

b)

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = x+1 & x=0 \Rightarrow t=1 \\ dt = dx & x=3 \Rightarrow t=4 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 =$$

$$= 2\left[\sqrt{t}\right]_1^4 = 2\left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right) = 2.$$

c)

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{(x^3+4x+3)^3}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = x^3+4x+1 & x=0 \Rightarrow t=1 \\ dt = (3x^2+4)\,dx & x=1 \Rightarrow t=6 \end{array} \right| = \int_1^6 \frac{1}{t^3}\,dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^6 =$$

$$= \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^6 = \frac{-1}{2\,.\,6^2} + \frac{1}{2\,.\,1^2} = \frac{-1}{72} + \frac{1}{2} = \frac{35}{72}.$$

d)

$$\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \ln x & x=1 \Rightarrow t=\ln 1 = 0 \\ dt = \frac{1}{x}\,dx & x=e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - 0 = \frac{4}{3}.$$

e)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\cos x}\,\sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \cos x & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ dt = -\sin x\,dx & x = \pi \;\Rightarrow t = \cos\pi = -1 \end{array} \right| = -\int_0^{-1} e^t\,dt = \int_{-1}^0 e^t\,dt =$$

$$= \left[e^t\right]_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}.$$

f)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg} x + 1 & x = 0 \;\Rightarrow t = \operatorname{tg} 0 + 1 = 1 \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx & x = \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 1 = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \sqrt[3]{t}\,dt = \left[\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{3}{4}\left[t\,\sqrt[3]{t}\right]_1^2 = \frac{3}{4}\left(2\,\sqrt[3]{2} - 1\right).$$

g)

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 & x=0 \Rightarrow t=0 \\ \qquad\quad dx = 2tdt & x=4 \Rightarrow t=2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{t}{1+t}\,2t\,dt = \int_0^2 \frac{2t^2}{1+t}\,dt.$$

Po vydelení čitateľa menovateľom dostaneme $\dfrac{2t^2}{t+1} = 2t - 2 + \dfrac{2}{t+1}$. Potom

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 \left(2t - 2 + \frac{2}{t+1}\right)\,dt = \left[t^2 - 2t + 2\ln|t+1|\right]_0^2 =$$

$$= 2^2 - 2\,.\,2 + 2\ln(2+1) - 0 - 2\ln 1 = 2\ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9.$$

h)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{arctg} x & x = 0 \quad \Rightarrow t = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ dt = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx & x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,.\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{72}.$$

i)

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 - 1^2 + 2 = \\ = (x-1)^2 + 1 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} t = x - 1 & x = 0 \Rightarrow t = -1 \\ dt = dx & x = 2 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = [\operatorname{arctg} t]_{-1}^1 =$$

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Príklad 3. Vypočítajme:

a) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_0^\pi (2x-1)\,\sin 2x\,dx$, **c)** $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\ln x\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arccotg} x\,dx$, **e)** $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$, **f)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} 3x\,dx$.

Riešenie: Ak by sme počítali neurčité integrály, tak by sme použili metódu per-partes. Preto aj pri výpočte určitých itegrálov použijeme túto metódu.

a)

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = x & \Rightarrow \ u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow \ v(x) = e^x \end{array} \right| = [x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 1\,.\,e^1 - 0 - [e^x]_0^1 =$$

$$= e - (e^1 - e^0) = 1.$$

b)

$$\int_0^{\pi} (2x-1)\,\sin 2x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = 2x-1 & \Rightarrow & u'(x) = 2 \\ v'(x) = \sin 2x & \Rightarrow & v(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \left[-(2x-1)\,\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx =$$

$$= -(2\pi-1)\,.\,\frac{\cos 2\pi}{2} + (-1)\,.\,\frac{\cos 0}{2} + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = -\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2} = -\pi.$$

c)

$$\int_1^2 x^2\,\ln x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = \ln x & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 & \Rightarrow & v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \left[\frac{x^3}{3}\,\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx =$$

$$\frac{2^3}{3}\,.\,\ln 2 - \frac{1^3}{3}\,.\,\ln 1 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8\ln 2}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{8\ln 2}{3} - \frac{7}{9}.$$

d)

$$\int_0^1 x\,\mathrm{arccotg}\,x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = \mathrm{arccotg}\,x & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2} \\ v'(x) = x & \Rightarrow & v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arccotg}\,x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1^2}{2}\,.\,\mathrm{arccotg}\,1 - 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\,[x - \mathrm{arctg}\,x]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\,(1 - \mathrm{arctg}\,1 - 0 + \mathrm{arctg}\,0) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

e)

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = \ln x & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow & v(x) = x \end{array} \right| = [x\,\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e\,.\,\ln e - 1\,.\,\ln 1 - [x]_1^e =$$

$$= e - (e-1) = 1.$$

f)

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \mathrm{arctg}\,3x\,dx = \left| \begin{array}{lll} u(x) = \mathrm{arctg}\,3x & \Rightarrow & u'(x) = \dfrac{3}{1+9x^2} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow & v(x) = x \end{array} \right| =$$

$$[x \operatorname{arctg} 3x]_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\mathbf{6}} \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{\mathbf{6}\,.\,3x}{1+9x^2}\,dx = \frac{1}{3}\,.\operatorname{arctg} 1 - 0 - \frac{1}{6}\left[\ln(1+9x^2)\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\,.\,\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\left[\ln\left(1+9\,.\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - \ln(1+0)\right] = \frac{\pi}{12} - \frac{\ln 2}{6}.$$

8.2 Aplikácie určitého integrálu

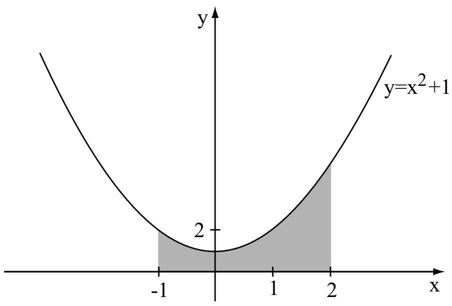
8.2.1 Plošný obsah rovinnej oblasti

Množinu $EO = \{[x,\, y];\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$, kde $f,\ g$ sú spojité funkcie na intervale $\langle a,\, b\rangle$, nazývame **elementárna oblasť**. Pre plošný obsah elementárnej oblasti platí:

$$P = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\;dx.$$

Príklad 4. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = x^2 + 1$ a osou x na intervale $\langle -1,\, 2\rangle$. Nakreslime danú oblasť.

Riešenie: Najskôr danú množinu nakreslíme (obr. 8.1). Grafom funkcie f je parabola, ktorá má vrchol v bode $[0, 1]$.



Obr. 8.1

Množina je elementárnou oblasťou, resp. je to špeciálny typ elementárnej oblasti – krivočiary lichobežník. Môžeme ju vyjadriť v tvare:

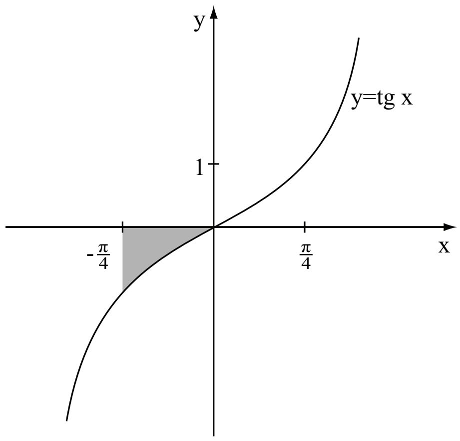
$$EO = \{[x,\, y];\ -1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2 + 1\}.$$

Potom

$$P = \int\limits_{-1}^{2} \left(x^2 + 1 - 0\right)\,dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(x^2 + 1\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{-1}{3} - 1\right) = 6.$$

Príklad 5. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \operatorname{tg} x$ a osou x na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{4}, 0 \right\rangle$. Nakreslime danú oblasť.

Riešenie: Množinu nakreslíme (obr. 8.2). Je to elementárna oblasť, dá sa vyjadriť v tvare:



Obr. 8.2

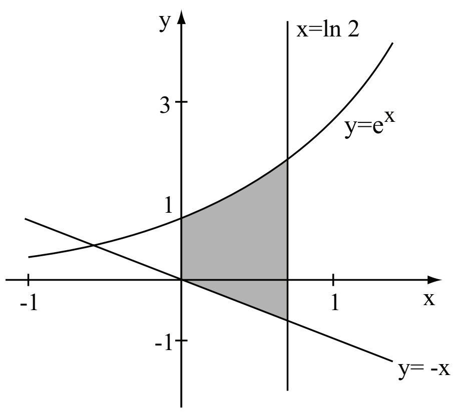
$$EO = \left\{ [x, y];\ -\frac{\pi}{4} \le x \le 0,\ \operatorname{tg} x \le y \le 0 \right\}.$$

Takže

$$P = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (0 - \operatorname{tg} x)\ dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-\sin x}{\cos x}\ dx = [\ln|\cos x|\,]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{2}.$$

Príklad 6. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = e^x$ a priamkami $g(x) = -x$, $x = 0$ a $x = \ln 2$. Nakreslime danú oblasť.

Riešenie: Nakreslíme danú množinu (obr. 8.3).



Obr. 8.3

Je to elementárna oblasť, ktorá sa dá vyjadriť v tvare:

$$EO = \{[x,\, y];\ 0 \le x \le \ln 2,\ -x \le y \le e^x\}.$$

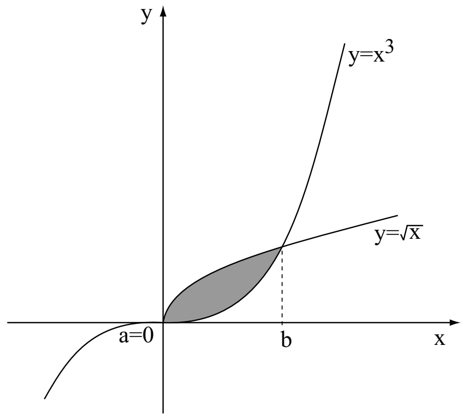
Potom

$$P = \int_0^{\ln 2} (e^x - (-x))\ dx = \int_0^{\ln 2} (e^x + x)\ dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} + \frac{\ln^2 2}{2} - e^0 - 0 =$$

$$= 2 + \frac{\ln^2 2}{2} - 1 = \left(1 + \frac{\ln^2 2}{2}\right).$$

Príklad 7. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = x^3$. Nakreslime danú oblasť.

Riešenie: Nakreslíme množinu (obr. 8.4).



Obr. 8.4

Aby sme danú množinu mohli zapísať pomocou nerovností, potrebujeme nájsť x-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií, t. j. potrebujeme nájsť reálne riešenia rovnice $\sqrt{x} = x^3$.

$$\sqrt{x} = x^3 \quad \Rightarrow \quad x = x^6 \quad \Rightarrow x^6 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^5 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\ \vee\ x = 1,$$

čiže

$$a = 0, \quad b = 1.$$

Potom

$$EO = \{[x,\, y];\ 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le \sqrt{x}\}$$

a

$$P = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)\ dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Príklad 8. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f(x) = x^2 - 2x - 3$ a $g(x) = -x^2 + 4x + 5$. Nakreslime danú oblasť.

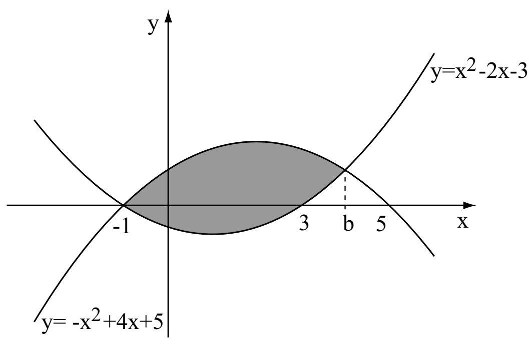
Riešenie: Kvôli správnemu znázorneniu množiny môžeme nájsť nulové body funkcií. Platí:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 3.$$

Ďalej

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 4x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \vee\, x = 5.$$

To znamená, že parabola $y = x^2 - 2x - 3$ pretína os x v bodoch $[-1, 0]$ a $[3, 0]$ a parabola $y = -x^2 + 4x + 5$ v bodoch $[-1, 0]$ a $[5, 0]$, pozri (obr. 8.5).



Obr. 8.5

Vypočítajme x-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií.

$$x^2 - 2x - 3 = -x^2 + 4x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 6x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \ \vee \ x = 4, \quad \text{t. j.} \quad b = 4.$$

Potom

$$EO = \{[x,\, y];\ -1 \le x \le 4,\ x^2 - 2x - 3 \le y \le -x^2 + 4x + 5\}$$

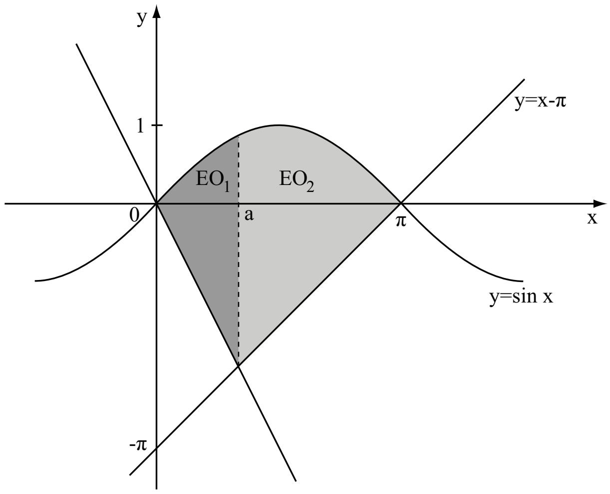
a

$$P = \int_{-1}^{4} \big(-x^2 + 4x + 5 - (x^2 - 2x - 3)\big)\, dx = \int_{-1}^{4} \big(-2x^2 + 6x + 8\big)\, dx =$$

$$= \left[\frac{-2x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-1}^{4} = -\frac{128}{3} + 48 + 32 - \frac{2}{3} - 3 + 8 = \frac{125}{3}.$$

Príklad 9. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \sin x$ a priamkami $y = x - \pi$ a $y = -2x$. Nakreslime danú oblasť.

Riešenie: Nakreslíme množinu (8.6). Priamka $y = -2x$ prechádza začiatkom súradnicového systému, priamka $y = x - \pi$ pretína os x v bode $[\pi, 0]$ a os y v bode $[0, -\pi]$.



Obr. 8.6

Daná množina je zložená z dvoch elementárnych oblastí EO_1 a EO_2. Priamka $y = -2x$ a graf funkcie $f(x) = \sin x$ sa pretínajú na súradnicovej osi x v bode $[0, 0]$, podobne priamka $y = x - \pi$ a graf funkcie pretína graf funkcie $f(x) = \sin x$ pretínajú os x v bode $[\pi, 0]$. Potrebujeme ešte vypočítať x-ovú súradnicu priesečníka priamok $y = -2x$ a $y = x - \pi$ označenú v obrázku ako a, teda

$$-2x = x - \pi \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

Teraz môžeme vyjadriť elementárne oblasti v tvare:

$$EO_1 = \left\{[x,\, y];\; 0 \le x \le \frac{\pi}{3},\; -2x \le y \le \sin x\right\}$$

a

$$EO_2 = \left\{[x,\, y];\; \frac{\pi}{3} \le x \le \pi,\; x - \pi \le y \le \sin x\right\}.$$

Vypočítajme plošné obsahy týchto elementárnych oblastí.

$$P_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - (-2x))\; dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + 2x)\; dx = \left[-\cos x + x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{9} + 1 - 0 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{9}$$

a

$$P_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - (x - \pi))\; dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - x + \pi)\; dx = \left[-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

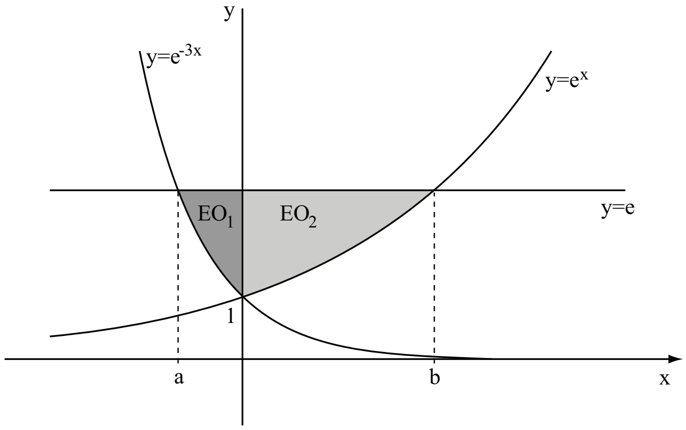
$$= 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{18} - \frac{\pi^2}{3} = \frac{3}{2} + \frac{2\pi^2}{9}.$$

Potom

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{9} + \frac{3}{2} + \frac{2\pi^2}{9} = \left(2 + \frac{\pi^2}{3}\right).$$

Príklad 10. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f(x) = e^{-3x}$, $g(x) = e^x$ a priamkou $y = e$. Nakreslime danú oblasť.

Riešenie: Najskôr nakreslíme množinu (obr. 8.7). Grafmi funkcií f a g sú exponenciálne krivky, ktoré prechádzajú bodom $[0, 1]$.



Obr. 8.7

Opäť je množina zložená z dvoch elementárnych oblastí. Grafy funkcií sa pretínajú na súradnicovej osi y, teda v bode s x-ovou súradnicou 0. Nájdime x-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií a priamky $y = e$.

$$a: \qquad e^{-3x} = e \quad \Leftrightarrow \quad -3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3},$$

$$b: \qquad e^{x} = e \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Zapíšme elementárne oblasti

$$EO_1 = \left\{[x,\, y];\ -\frac{1}{3} \le x \le 0,\ e^{-3x} \le y \le e\right\},$$

$$EO_2 = \{[x,\, y];\ 0 \le x \le 1,\ e^{x} \le y \le e\}$$

a vypočítajme ich plošné obsahy.

$$P_1 = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \left(e - e^{-3x}\right)\, dx = \left[e\,x + \frac{e^{-3x}}{3}\right]_{-\frac{1}{3}}^{0} = 0 + \frac{e^0}{3} + \frac{e}{3} - \frac{e}{3} = \frac{1}{3}$$

a

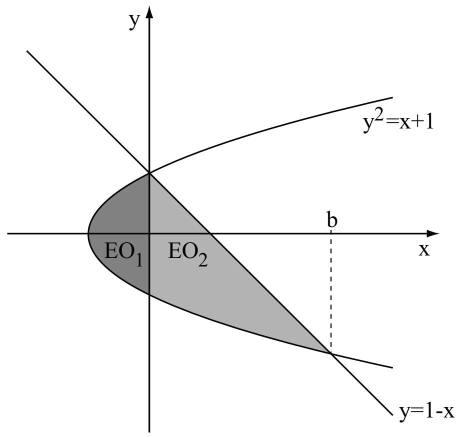
$$P_2 = \int_{0}^{1} \left(e - e^{x}\right)\, dx = \left[e\,x - e^{x}\right]_0^1 = e - e - 0 + e^0 = 1,$$

teda

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 11.}}$ Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej parabolou $y^2 = x + 1$ a priamkou $y = 1 - x$. Nakreslime danú oblasť.

Riešenie: Množinu nakreslíme (obr. 8.8). Parabola $y^2 = x + 1$ má vrchol v bode $[-1, 0]$ a jej osou je súradnicová os x. Priamka $y = 1 - x$ pretína súradnicové osi v bodoch $[0, 1]$ a $[1, 0]$.



Obr. 8.8

Aby sme množinu zapísali pomocou nerovností, rozdelíme ju na dve elementárne oblasti EO_1 a EO_2. Nájdeme x-ové súradnice priesečníkov paraboly a priamky.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x + 1 \\ y = 1 - x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (1-x)^2 = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x + x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 3 = b.$$

Parabola $y^2 = x+1$ však nie je grafom žiadnej funkcie ale skladá sa z grafov dvoch funkcií, a to $y = \sqrt{x+1}$ (časť paraboly nad osou x) a $y = -\sqrt{x+1}$ (časť paraboly pod osou x). Teraz môžeme elementárne oblasti zapísať v tvare:.

$$EO_1 = \left\{[x,\, y];\ -1 \le x \le 0,\ -\sqrt{x+1} \le y \le \sqrt{x+1}\right\},$$

a

$$EO_2 = \left\{[x,\, y];\ 0 \le x \le 3,\ -\sqrt{x+1} \le y \le 1 - x\right\}.$$

Potom

$$P_1 = \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1})\right)\, dx = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\, dx = \left| \begin{array}{ll} t = x+1 & x = -1 \Rightarrow t = 0 \\ dt = dx & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{t}\, dt = 2\left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_0^1 = \frac{4}{3},$$

$$P_2 = \int_{0}^{3} \left(1 - x - (-\sqrt{x+1})\right)\, dx = \int_{0}^{3} (1-x)\, dx + \int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\, dx =$$

$$\text{(druhý integrál vypočítame substitúciou)} = \left| \begin{array}{ll} t = x+1 & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ dt = dx & x = 3 \Rightarrow t = 4 \end{array} \right| =$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 + \int_1^4 \sqrt{t}\, dt = 3 - \frac{9}{2} - 0 + \left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^4 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\left[t\sqrt{t} \right]_1^4 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\,.\,(8-1) =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{14}{3} = \frac{19}{6}$$

a

$$P = P_1 + P_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

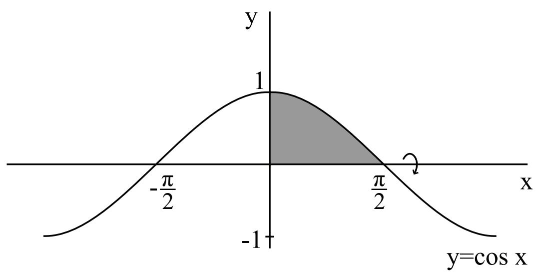
8.2.2 Objem rotačného telesa

Nech elementárna oblasť $EO = \{[x, y];\ a \le x \le b,\ 0 \le g(x) \le y \le f(x)\}$ rotuje okolo osi x. Pre objem takto vzniknutého rotačného telesa platí:

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx.$$

Príklad 12. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou časti roviny ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \cos x$ a súradnicovou osou x na intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ okolo osi x. Danú množinu nakreslime.

Riešenie: Najskôr množinu nakreslíme (obr. 8.9).



Obr. 8.9

Je to elementárna oblasť

$$EO = \left\{ [x, y];\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \cos x \right\}.$$

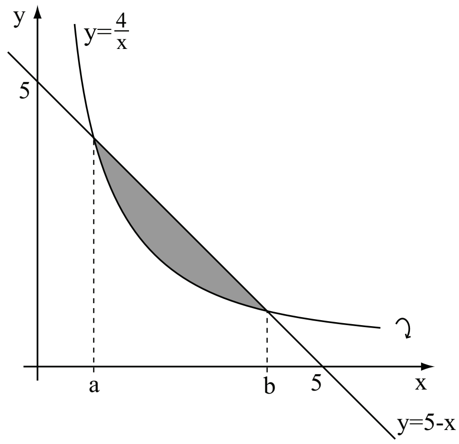
Potom

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Príklad 13. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou časti roviny ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \dfrac{4}{x}$ a priamkou $y = 5 - x$ okolo osi x. Danú množinu nakreslime.

Riešenie: Grafom funkcie f (obr. 8.10) je hyperbola, súradnicové osi sú jej asymptoty. Priamka $y = 5 - x$ vytína na súradnicových osiach úseky, ktoré sa rovnajú 5.



Obr. 8.10

Daná množina je elementárna oblasť, aby sme ju vyjadrili, potrebujeme nájsť x-ové súradnice priesečníkov týchto dvoch kriviek, teda

$$\frac{4}{x} = 5 - x \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 5x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 4, \quad t.\ j. \quad a = 1, \quad b = 4.$$

Potom

$$EO = \left\{ [x,\, y];\ 1 \le x \le 4,\ \frac{4}{x} \le y \le 5 - x \right\}$$

a

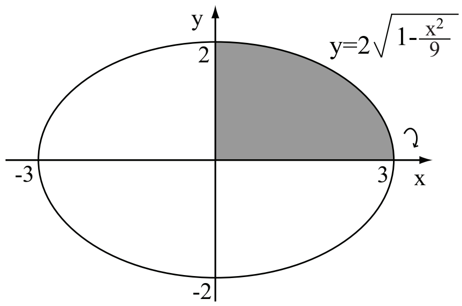
$$V = \pi \int_1^4 \left((5-x)^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 \right) dx = \pi \int_1^4 \left(25 - 10x + x^2 - \frac{16}{x^2} \right) dx =$$

$$= \pi \left[25x - 5x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{16}{x} \right]_1^4 = \pi \left(100 - 80 + \frac{64}{3} + 4 - 25 + 5 - \frac{1}{3} - 16 \right) =$$

$$= \pi \left(-12 + \frac{63}{3} \right) = \pi\,(-12 + 21) = 9\pi.$$

Príklad 14. Vypočítajme objem rotačného elipsoidu, ktorý vznikne rotáciou elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ okolo osi x. Elipsu nakreslime a vyznačme množinu, ktorá bude rotovať.

Riešenie: Elipsa (obr. 8.11) je v základnom tvare, stred má súradnice $S = [0,\, 0]$, jej osi sú súradnicové osi a dĺžky poloosí sú $a = 3$, $b = 2$.



Obr. 8.11

Elipsa je symetrická krivka, preto necháme rotovať iba časť, ktorá leží v prvom kvadrante a objem elipsoidu sa potom bude rovnať dvojnásobku objemu vzniknutého telesa. V prvom kvadrante časť elipsy sa dá vyjadriť v tvare $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ a táto časť elipsy je potom grafom funkcie $f(x) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, $x \in \langle 0,\, 3\rangle$. Množina, ktorá bude rotovať, je elementárna oblasť

$$EO = \left\{ [x,\, y];\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \right\}$$

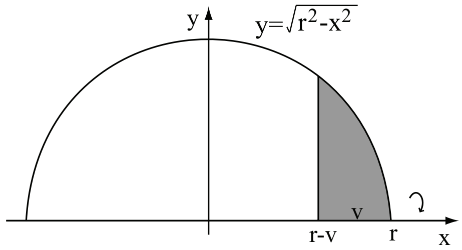
a jej objem

$$V_1 = \pi \int_0^3 \left(2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \right)^2 dx = \pi \int_0^3 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx = 4\pi \left[x - \frac{x^3}{27} \right]_0^3 = 4\pi(3-1) = 8\pi.$$

Potom objem elipsoidu je $V = 2V_1 = 16\pi[j^3]$, kde j označuje používanú jednotku dĺžky.

Príklad 15. Odvoďme vzorec pre objem guľového vrchlíka s výškou $v\,cm$.

Riešenie: Guľový vrchlík vznikne rotáciou časti roviny, ktorá je ohraničená časťou kružnice so stredom $S = [0, 0]$ a polomerom $r\,cm$, ktorá je grafom funkcie $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervale $\langle r - v,\, r\rangle$ a osou x. Táto množina je znázornená na nasledujúcom obrázku (obr. 8.12).



Obr. 8.12

Okolo osi x bude teda rotovať elementárna oblasť

$$EO = \left\{[x,\, y];\ r - v \leq x \leq r,\ 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\right\}$$

a objem takto vzniknutého telesa je

$$V = \pi \int\limits_{r-v}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\, dx = \pi \int\limits_{r-v}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} =$$

$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2(r - v) + \frac{(r - v)^3}{3}\right) =$$

$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^3 + r^2 v + \frac{r^3 - 3r^2 v + 3rv^2 - v^3}{3}\right) = \pi \left(rv^2 - \frac{v^3}{3}\right) cm^3.$$

8.2.3 Dĺžka rovinnej krivky a plošný obsah rotačnej plochy

Nech existuje spojitá derivácia f' funkcie f na intervale $\langle a,\, b\rangle$ a nech krivka $K = \{[x,\, y];\ a \leq x \leq b,\ y = f(x)\}$. Potom pre dĺžku krivky K platí

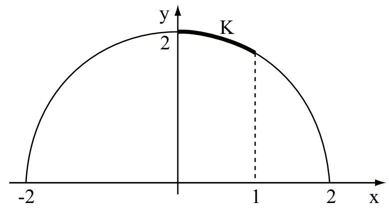
$$L = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

a pre plošný obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou uvedenej krivky K okolo osi x platí

$$S = 2\pi \int\limits_{a}^{b} |\, f(x)\, | \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 16.}}$ Vypočítajme dĺžku krivky K určenej grafom funkcie $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ pre $x \in \langle 0,\, 1\rangle$. Nakreslime danú krivku.

Riešenie: Grafom funkcie f je množina bodov v rovine, pre ktoré platí $y = \sqrt{4 - x^2}$, pričom $x \in D(f) = \langle -2,\, 2\rangle$. Ak rovnicu $y = \sqrt{4 - x^2}$ umocníme, dostaneme $y^2 = 4 - x^2$, resp. $x^2 + y^2 = 4$, čo je rovnica kružnice so stredom v začiatku súradnicového systému a polomerom $r = 2$. Keďže $f(x) \geq 0$ pre $x \in D(f)$, grafom funkcie f (obr. 8.13) je polkružnice so stredom $[0, 0]$ a polomerom $r = 2$ nachádzajúca sa nad osou x. Krivka K je zvýraznená.



Obr. 8.13

Vypočítajme deriváciu

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}},$$

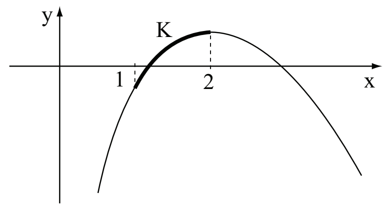
ktorá je spojitá na $D(f') = (-2,\, 2)$, teda je spojitá aj na intervale $\langle 0,\, 1\rangle \subset D(f)$. Potom dĺžka krivky K je

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = 2\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = 2\left(\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0\right) = 2\,.\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 17.}}$ Vypočítajme dĺžku krivky K určenej grafom funkcie $f(x) = \ln x - \dfrac{x^2}{8}$ na intervale $\langle 1,\, 2\rangle$.

Riešenie: Na nakreslenie krivky využijeme softvérové možnosti (obr. 8.14).



Obr. 8.14

Derivácia funkcie

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$$

je spojitá na intervale $\langle 1,\, 2\rangle$ a dĺžka danej krivky je

$$L=\int\limits_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)^2}\,dx=\int\limits_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}}\,dx=\int\limits_1^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}}\,dx=$$

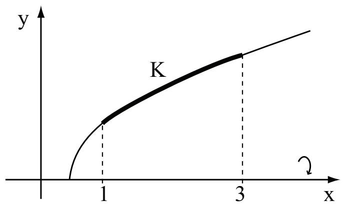
$$=\int\limits_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)^2}\,dx=\int\limits_1^2\left|\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right|\,dx=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)\,dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{8}\right]_1^2=$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}-\ln 1-\frac{1}{8}=\ln 2+\frac{3}{8}.$$

Pri výpočte sme využili, že $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{4}>0$ na intervale $\langle 1,\,2\rangle$, a teda $\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{4}\right|=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{4}$.

$\boxed{\textbf{Príklad 18.}}$ Vypočítajme plošný obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou časti paraboly určenej rovnicou $y=\sqrt{2x-1}$ na intervale $\langle 1,\,3\rangle$.

Riešenie: Nakreslime krivku, ktorá bude rotovať (obr. 8.15).



Obr. 8.15

Krivka je grafom funkcie $f(x)=\sqrt{2x-1}$ pre $x\in\langle 1,\,3\rangle$. Derivácia funkcie f

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

je spojitá na intervale $\left(\dfrac{1}{2},\,\infty\right)$, teda aj na intervale $\langle 1,\,3\rangle$. Funkcia $f(x)\geq 0\ \forall x\in\langle 1,\,3\rangle$ a plošný obsah rotačnej plochy je

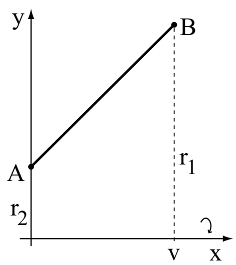
$$S=2\pi\int\limits_1^3\sqrt{2x-1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)^2}\,dx=2\pi\int\limits_1^3\sqrt{2x-1}\sqrt{1+\frac{1}{2x-1}}\,dx=$$

$$=2\pi\int\limits_1^3\sqrt{2x-1}\sqrt{\frac{2x-1+1}{2x-1}}\,dx=2\pi\int\limits_1^3\sqrt{2x-1}\,\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-1}}\,dx=2\sqrt{2}\,\pi\int\limits_1^3\sqrt{x}\,dx=$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^3=\frac{4\sqrt{2}\,\pi}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_1^3=\frac{4\sqrt{2}\,\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right).$$

Príklad 19. Vypočítajme plošný obsah plášťa zrezaného kužeľa s polomermi podstáv $r_1 = 3\,dm$, $r_2 = 1\,dm$ a výškou $v = 2\,dm$.

Riešenie: Plášť zrezaného kužeľa so zadanými parametrami vznikne napríklad rotáciou úsečky, ktorá je nakreslená na nasledujúcom obrázku (obr. 8.16).



Obr. 8.16

Potrebujeme napísať rovnicu úsečky, ktorá je časťou priamky. Využijeme smernicový tvar rovnice priamky, t. j. $y = kx + q$. Keďže priamka prechádza bodom $A = [0,\,1]$, tak po dosadení do rovnice priamky za x a y dostávame

$$1 = k\,.\,0 + q \qquad \Rightarrow \qquad q = 1,$$

teda $y = kx + 1$. Priamka prechádza však aj bodom $B = [2,\,3]$, takže

$$3 = k\,.\,2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad k = 1.$$

Rovnica priamky je $y = x+1$, a preto rovnica úsečky AB je $y = x+1,\ \ x \in \langle 0,\,2\rangle$. Úsečka je grafom funkcie $f(x) = x + 1$ a $f'(x) = 1$. Derivácia f' je spojitá na itervale $\langle 0,\,2\rangle$ a obsah plášťa sa rovná

$$S = 2\pi \int_0^2 (x+1)\sqrt{1+1^2}\,dx = 2\sqrt{2}\,\pi \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = 2\sqrt{2}\,\pi(2+2) = 8\sqrt{2}\,\pi\,dm^3.$$

8.3 Cvičenia

1. Vypočítajte:

   a) $\displaystyle\int_0^2 (x^2-3)\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int_0^3 \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{3x}\right)dx,$ **c)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx,$ **d)** $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2 x}\,dx.$

2. Vypočítajte:

   a) $\displaystyle\int_3^5 \sqrt{x-3}\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,$ **c)** $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx,$ **d)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx.$

3. Vypočítajte:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,\cos x\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, **d)** $\displaystyle\int_1^{e} \ln^2 x\,dx$.

4. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej
   a) grafom funkcie $f(x) = \sqrt{2x+1}$ a osou x na intervale $\langle 0,\, 4\rangle$,
   b) grafom funkcie $f(x) = \cos x$ a priamkami $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ a $x = -\dfrac{\pi}{2}$.,
   c) grafmi funkcií $f(x) = x^2 - 2x$ a $g(x) = 4 - x^2$,
   d) grafmi funkcií $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2\ln x$ a priamkou $y = \ln 4$.
5. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou časti roviny ohraničnej
   a) grafom funkcie $f(x) = e^x$ a osou x na intervale $\langle 0,\, 1\rangle$,
   b) grafmi funkcií $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x^2$.
6. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa s polomermi základní $r_1 = 4\,cm$, $r_2 = 2\,cm$ a výškou $v = 3\,cm$.
7. Vypočítajte dĺžku krivky určenej grafom funkcie $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ pre $x \in \langle -2,\, 2\rangle$.

<u>Výsledky</u>

1. **a)** $-\dfrac{10}{3}$, **b)** $6 + \dfrac{9\sqrt[3]{3}}{4}$, **c)** $\dfrac{\pi}{3}$, **d)** 2.
2. **a)** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, **b)** $\sqrt{2} - 1$, **c)** $\dfrac{3}{2}$, **d)** $\dfrac{4}{3}$.
3. **a)** -2, **b)** $\dfrac{\pi - \ln 4}{4}$, **c)** $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, **d)** $e - 2$.
4. **a)** $\dfrac{26}{3}$, **b)** $2 + \dfrac{\pi^2}{2}$, **c)** 9, **d)** 1.
5. **a)** $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - 1)$, **b)** $\dfrac{16\,\pi}{3}$.
6. $28\,\pi\,cm^3$.
7. $e^2 - \dfrac{1}{e^2}$.

9

Nevlastný integrál

9.1 Nevlastný integrál na neohraničenom intervale

Nech funkcia f je definovaná na intervale $\langle a, \infty)$, resp. $(-\infty, b\rangle$ a integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ pre každé $a < b$. Ak existuje vlastná

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

tak túto limitu nazveme **nevlastný integrál** funkcie f na intervale $\langle a, \infty)$, resp. $(-\infty, b\rangle$ a píšeme

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx, \qquad \text{resp.} \qquad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx.$$

Teda

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{resp.} \qquad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Poznámka: Ak uvedené limity existujú, hovoríme, že nevlastný integrál konverguje. V opačnom prípade (ak limita je nevlastná, prípadne neexistuje) hovoríme, že nevlastný integrál diverguje.

Nech funkcia f je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$ a nech nevlastné integrály

$$\int\limits_{-\infty}^c f(x)\,dx, \qquad \int\limits_c^\infty f(x)\,dx, \qquad c \in (-\infty, \infty)$$

konvergujú. Potom ich súčet nazveme **nevlastný integrál** funkcie f na intervale $(-\infty, \infty)$. Teda

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int\limits_c^\infty f(x)\,dx, \quad c \in (-\infty, \infty).$$

Príklad 1. Vyšetrime konvergenciu nevlastného integrálu

a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$, **b)** $\int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$, **c)** $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$, **d)** $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x+1}\,dx$, **e)** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \cos x\,dx$.

Riešenie: Všetky funkcie sú definované na intervaloch, na ktorých máme počítať nevlastné integrály. Pri riešení príkladov využijeme definíciu a vypočítame limitu určitého integrálu.

a)

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{b}}+\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = 2.$$

Limita je vlastná, teda

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = 2.$$

b)

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_{-1}^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-1}^b = \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg}(-1)\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Limita existuje a na základe definície

$$\int\limits_{-1}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{-1}^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3\pi}{4}.$$

c)

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_e^b \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t=\ln x & x=e\Rightarrow t=1 \\ dt=\frac{1}{x}\,dx & x=b\Rightarrow t=\ln b \end{array}\right| = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{\ln b} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\ln b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{1}\right) = 0+1 = 1.$$

Limita je vlastná a

$$\int\limits_e^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_e^b \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = 1.$$

d)

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_2^b \frac{1}{x+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x+1)\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(\ln(b+1)-\ln 3\right) = \infty.$$

Keďže limita je nevlastná, nevlastný integrál je divergentný.

e)

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b}\cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(\sin b - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{b\to\infty}(\sin b - 1)\,.$$

Pretože

$$\lim_{b\to\infty}\sin b \quad \text{neexistuje, neexistuje ani} \quad \lim_{b\to\infty}(\sin b - 1)\,,$$

a preto nevlastný integrál je divergentný.

Príklad 2. Vyšetrime konvergenciu nevlastného integrálu

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\,dx,$ **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{2x}{1+x^2}\,dx.$

Riešenie: Funkcie sú definované na daných intervaloch. Opäť pri výpočte využijeme definíciu nevlastného integrálu.

a)

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}[e^x]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) = \lim_{a\to-\infty}(1 - e^a) = 1.$$

Limita je vlastná, a teda

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x\,dx = 1.$$

b)

$$\int_{-\infty}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right]_a^{2\sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{12}.$$

Limita existuje a je vlastná, čiže nevlastný integrál je konvergentný a platí

$$\int_{-\infty}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{5\pi}{12}.$$

c)

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(0 - \ln(a^2+1)\right) = -\infty.$$

Limita je nevlastná, nevlastný integrál je divergentný.

Príklad 3. Vyšetrime konvergenciu nevlastného integrálu

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{3x}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2x\sqrt{x^2+2}\,dx$.

Riešenie: Všetky funkcie sú definované na intervale $(-\infty, \infty)$.

a) Zvoľme v definícii nevlastného integrálu $c = 0$. Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx,$$

ak obidva nevlastné integrály na pravej strane budú konvergentné. Ak jeden z týchto nevlastných integrálov je divergentný, tak aj integrál na ľavej strane je divergentný. Počítajme

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t = x+1 & x = a \Rightarrow t = a+1 \\ dt = dx & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a+1}^{1} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{a\to-\infty}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{a+1}^{1} = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(a+1)\right) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

teda

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t = x+1 & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ dt = dx & x = b \Rightarrow t = b+1 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b+1} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{1}^{b+1} = \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

a

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Keďže nevlastné integrály sú konvergentné, tak platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

b) Opäť položme $c = 0$. Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{3x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{3x}\,dx,$$

ak existujú nevlastné integrály na pravej strane rovnosti.

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{3x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^0}{3}-\frac{e^{3a}}{3}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

teda

$$\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{3x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{3b}}{3}-\frac{e^0}{3}\right) = \infty,$$

a preto nevlastný integrál $\int\limits_{0}^{\infty} e^{3x}\,dx$ je divergentný a je divergentný aj nevlastný integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{3x}\,dx$.

c) Zase, nech $c = 0$. Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2x\sqrt{x^2+2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} 2x\sqrt{x^2+2}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2x\sqrt{x^2+2}\,dx,$$

ak obidva nevlastné integrály sú konvergentné.
Keďže

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} 2x\sqrt{x^2+2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t = x^2+2 & x = a \Rightarrow t = a^2+2 \\ dt = 2x\,dx & x = 0 \Rightarrow t = 2 \end{array}\right| = \lim_{a\to-\infty}\int_{a^2+2}^{2} \sqrt{t}\,dt =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{2}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_{a^2+2}^{2} = \lim_{a\to-\infty}\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - (a^2+2)\sqrt{a^2+2}\right) = -\infty,$$

tak nevlastný integrál $\int\limits_{-\infty}^{0} 2x\sqrt{x^2+2}\,dx$ je divergentný, a preto aj nevlastný integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2x\sqrt{x^2+2}\,dx$ je divergentný.

9.2 Nevlastný integrál z neohraničenej funkcie

Nech funkcia f je definovaná na intervale $\langle a,\, b)$, resp. $(a,\, b\rangle$, nech $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ a nech f je integrovateľná na intervale $\langle a,\, c\rangle$, resp. $\langle c,\, b\rangle$ pre každé $c \in (a,\, b)$. Ak existuje vlastná

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx,$$

tak túto limitu nazveme **nevlastný integrál** funkcie f na intervale $\langle a,\, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \text{resp.} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Poznámka: V prípade, že funkcia f je neohraničená v oboch koncových bodoch, tak nevlastný integrál sa bude rovnať súčtu dvoch nevlastných integrálov (ak budú oba konvergentné) na vhodne zvolených intervaloch, podobne ako v prípade neohraničeného intervalu. Ak funkcia bude neohraničená vo vnútornom bode intervalu $(a,\, b)$, tak pomocou tohto bodu rozdelíme interval na dva podintervaly a daný nevlastný integrál je opäť definovaný ako súčet nevlastných integrálov na týchto podintervaloch (ak oba konvergujú).

Príklad 4. Vyšetrime konvergenciu nevlastného integrálu

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx,$ **c)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{cotg} x\,dx.$

Riešenie:

a) Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je $D(f) = (-1,\, 1)$, teda funkcia nie je definovaná v bode 1. Na svojom $D(f)$ je spojitá, a preto aj integrovateľná na ľubovoľnom intervale $\langle 0,\, c\rangle$ pre $c \in (0,\, 1)$. Ďalej

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty,$$

čiže integrál treba skúmať ako nevlastný integrál z neohraničenej funcie. Pretože

$$\lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 1^-} [\arcsin x]_0^c = \lim_{c\to 1^-} (\arcsin c - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2},$$

tak

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

a nevlastný integrál je konvergentný.

b) Funkcia je definovaná na $D(f) = (-\infty, 2)$, t. j. v bode 2 nie je definovaná. Funkcia je spojitá, a teda integrovateľná, na ľubovoľnom intervale $\langle 0, c\rangle$ pre $c \in (0, 2)$ a naviac

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \infty.$$

Keďže

$$\lim_{c\to 2^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = 2-x & x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ dt = -\,dx & x = c \Rightarrow t = 2-c \end{array} \right| = \lim_{c\to 2^-} \int_2^{2-c} -\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \lim_{c\to 2^-} \left[-2\sqrt{t}\right]_2^{2-c} = \lim_{c\to 2^-} \left(-2\sqrt{2-c} + 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2},$$

tak nevlastný integrál je konvergentný a platí

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{c\to 2^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2\sqrt{2}.$$

c) Funkcia je definovaná pre každé $x \neq k\pi,\quad k \in Z$, teda v bode π nie je definovaná. Na intervale $\left\langle \frac{\pi}{2}, c\right\rangle$, $c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ je spojitá, a teda aj integrovateľná a naviac

$$\lim_{x\to\pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty.$$

Limita

$$\lim_{c\to\pi^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^c \operatorname{cotg} x\,dx = \lim_{c\to\pi^-} \int_{\frac{\pi}{2}}^c \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \lim_{c\to\pi^-} \left[\ln|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{2}}^c =$$

$$= \lim_{c\to\pi^-} \left(\ln|\sin c| - \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|\right) = -\infty,$$

teda je nevlastná a nevlastný integrál $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{cotg} x\,dx$ je divergentný.

$\boxed{\textbf{Príklad 5.}}$ Vyšetrime konvergenciu nevlastného integrálu

a) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

Riešenie:
a) Funkcia je definovaná pre každé $x \neq 0$. Na každom intervale $\langle c, 8\rangle$, $c \in (0, 8)$ je spojitá. Ďalej

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty.$$

Pretože

$$\lim_{c\to 0^+}\int\limits_c^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[3\sqrt[3]{x}\right]_c^8 = \lim_{c\to 0^+}\left(3\,.\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{c}\right) = 6,$$

tak nevlastný integrál je konvergentný a platí

$$\int\limits_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int\limits_c^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 6.$$

b) Definičný obor funkcie je $D(f) = (-1,\ \infty)$. Funkcia je spojitá, a teda aj integrovateľná, na intervale $\langle c,\ 0\rangle$ pre každé $c \in (-1,\ 0)$. Taktiež

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = \infty.$$

Vypočítajme limitu integrálu

$$\lim_{c\to -1^+}\int\limits_c^0 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t = x+1 & x = c \Rightarrow t = c+1 \\ dt = dx & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right| = \lim_{c\to -1^+}\int\limits_{c+1}^1 \frac{t-1+2}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \lim_{c\to -1^+}\int\limits_{c+1}^1 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt = \lim_{c\to -1^+}\left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{t}\right]_{c+1}^1 = \lim_{c\to -1^+}\left[\frac{2t\sqrt{t}}{3} + 2\sqrt{t}\right]_{c+1}^1 =$$

$$\lim_{c\to -1^+}\left(\frac{2}{3} + 2 - \frac{2(c+1)\sqrt{c+1}}{3} - 2\sqrt{c+1}\right) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}.$$

Limita je vlastná, teda nevlastný integrál je kovergentný a podľa definície platí

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{c\to -1^+}\int\limits_c^0 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{8}{3}.$$

c) $D(f) = (0,\ 1) \cup (1,\ \infty)$. Funkcia je definovaná a spojitá, teda aj integrovateľná, na intervale $\left\langle c,\ \frac{1}{2}\right\rangle$ pre každé $c \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{c\to 0^+}\frac{1}{x\ \ln x} = \lim_{c\to 0^+}\frac{x^{-1}}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] \overset{LHP}{=} \lim_{c\to 0^+}\frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{c\to 0^+}\frac{-1}{x} = -\infty$$

a

$$\lim_{c\to 0^+}\int\limits_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ \ln x}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int\limits_c^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[\ln|\ln x|\right]_c^{\frac{1}{2}} = \lim_{c\to 0^+}\left(\ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| - \ln|\ln c|\right) = -\infty.$$

Keďže posledná limita je nevlastná, tak nevlastný integrál $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ \ln x}\,dx$ je divergentný.

Príklad 6. Vyšetrime konvergenciu nevlastného integrálu

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx,$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx,$ **c)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx,$ **d)** $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx.$

Riešenie:
a) Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}$ je $D(f) = (0,\ 3)$, teda funkcia nie je definovaná v bodoch 0 a 3. Rozdeľme interval $(0,\ 3)$ na dva intervaly, napr. $(0,\ 1\rangle$ a $\langle 1,\ 3)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}} = -\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}} = \infty,$$

teda funkcia nie je ohraničená na okolí bodov 0 a 3. Nevlastný integrál bude konvergentný, ak budú konvergentné nevlastné integrály

$$\int_0^1 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx \qquad \text{a} \qquad \int_1^3 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx.$$

Potom bude platiť

$$\int_0^3 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx + \int_1^3 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx.$$

Pretože

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = 3x-x^2 & x = c \Rightarrow t = 3c-c^2 \\ dt = (3-2x)dx & x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| = \lim_{c\to 0^+} \int_{3c-c^2}^2 \frac{-1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \left[-2\sqrt{t}\right]_{3c-c^2}^2 = \lim_{c\to 0^+} \left(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{3c-c^2}\right) = -2\sqrt{2},$$

tak

$$\int_0^1 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = -2\sqrt{2}.$$

Ďalej

$$\lim_{c\to 3^-} \int_1^c \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = 3x-x^2 & x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ dt = (3-2x)dx & x = c \Rightarrow t = 3c-c^2 \end{array} \right| = \lim_{c\to 3^-} \int_2^{3c-c^2} \frac{-1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \lim_{c\to 3^-} \left[-2\sqrt{t}\right]_2^{3c-c^2} = \lim_{c\to 3^-} \left(-2\sqrt{3c-c^2} + 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2},$$

a preto

$$\int_1^3 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 3^-} \int_1^c \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = 2\sqrt{2}.$$

Keďže obidva nevlastné integrály sú konvergentné, tak

$$\int_0^3 \frac{2x-3}{\sqrt{3x-x^2}}\,dx = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0.$$

b) Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$ je $D(f) = R - \{0,\,1\}$, funkcia teda nie je definovaná v bodoch 0 a 1.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-1}{x^2-x} = \infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{x^2-x} = -\infty,$$

teda funkcia f nie je ohraničená na okolí bodov 0 a 1. Rozdeľme interval $(0,\,1)$ na dva intervaly, napr. $\left(0,\,\dfrac{1}{2}\right\rangle$ a $\left\langle\dfrac{1}{2},\,1\right)$. Nevlastný integrál bude konvergentný, ak budú konvergentné nevlastné integrály

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx \qquad \text{a} \qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx.$$

Pretože

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \big[\ln|x^2-x|\big]_c^{\frac{1}{2}} = \lim_{c\to 0^+} \left(\ln\left|-\frac{1}{4}\right| - \ln|c^2-c|\right) = \infty,$$

tak nevlastný integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$ je divergentný, a preto aj nevlastný integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$ je divergentný.

c) Funkcia $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ nie je definovaná v bode 0, ktorý je vnútorným bodom intervalu $\langle -1,\,2\rangle$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty,$$

teda funkcia je v okolí bodu 0 neohraničená. Nevlastný integrál $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ bude konvergentný práve vtedy, ak budú konvergentné nevlastné integrály $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ a $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Potom bude platiť

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Pretože

$$\lim_{c\to 0^-}\int\limits_{-1}^{c}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\lim_{c\to 0^-}\left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{-1}^{c}=\lim_{c\to 0^-}\left(\frac{3\sqrt[3]{c^2}}{2}-\frac{3\sqrt[3]{(-1)^2}}{2}\right)=-\frac{3}{2},$$

tak

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\lim_{c\to 0^-}\int\limits_{-1}^{c}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=-\frac{3}{2}.$$

Ďalej

$$\lim_{c\to 0^+}\int\limits_{c}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\lim_{c\to 0^+}\left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{c}^{2}=\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{2}-\frac{3\sqrt[3]{c^2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

a

$$\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\lim_{c\to 0^+}\int\limits_{c}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Potom

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}=\frac{3\sqrt[3]{4}-3}{2}.$$

d) Funkcia $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ je definovaná na $D(f)=R-\{2\}$, teda nie je definovaná v bode 2, ktorý patrí do intervalu $\langle 0,\,4\rangle$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty,$$

teda funkcia v okolí bodu 0 nie je ohraničená. Nevlastný integrál $\displaystyle\int\limits_{0}^{4}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ bude konvergentný práve vtedy, ak budú konvergentné nevlastné integrály $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ a $\displaystyle\int\limits_{2}^{4}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$.

Pretože

$$\lim_{c\to 2^-}\int\limits_{0}^{c}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx=\left|\begin{array}{ll} t=x-2 & x=0\Rightarrow t=-2\\ dt=dx & x=c\Rightarrow t=c-2\end{array}\right|=\lim_{c\to 2^-}\int\limits_{-2}^{c-2}\frac{1}{t^2}\,dt=$$

$$=\lim_{c\to 2^-}\left[-\frac{1}{t}\right]_{-2}^{c-2}=\lim_{c\to 2^-}\left(-\frac{1}{c-2}+\frac{1}{-2}\right)=\infty,$$

nevlastný integrál $\int\limits_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ je divergentný, a preto je divergentný aj nevlastný integrál $\int\limits_0^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$.

9.3 Cvičenia

Vyšetrite konvergenciu nevlastného integrálu:

1. **a)** $\int\limits_3^\infty \frac{1}{\sqrt{(x-2)^3}}\,dx$, **b)** $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$, **c)** $\int\limits_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$, **d)** $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$, **e)** $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{3x}{x^2+4}\,dx$.

2. **a)** $\int\limits_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$, **b)** $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, **c)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$, **d)** $\int\limits_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, **e)** $\int\limits_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$.

<u>Výsledky</u>

1. **a)** 2, **b)** divergentný (∞), **c)** $\frac{3}{4}\pi$, **d)** $1-\frac{1}{e}$, **e)** divergentný.

2. **a)** 2, **b)** 3, **c)** divergentný (∞), **d)** π, **e)** divergentný.

10

Diferenciálne rovnice prvého rádu

10.1 Základné pojmy

Diferenciálna rovnica prvého rádu je rovnica, ktorá vyjadruje vzťah medzi nezávisle premennou x z intervalu $J \subset R$, neznámou funkciou $y = f(x)$ a jej deriváciou y'.
Riešením diferenciálnej rovnice prvého rádu na intervale J, nazývame ľubovoľnú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá je na intervale J definovaná, má na J deriváciu a vyhovuje danej rovnici.
Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu je množina riešení danej diferenciálnej rovnice, ktoré vo svojom vyjadrení obsahujú aj konštantu $c \in R$.
Partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu vznikne zo všeobecného riešenia konkrétnou voľbou konštanty c.
Singulárne riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu je také riešenie, ktoré nemožno dostať zo všeobecného riešenia pri žiadnej hodnote konštanty c.
Dve diferenciálne rovnice sú **ekvivalentné**, ak každé riešenie jednej je súčasne riešením i druhej na tom istom intervale a naopak.
Graf riešenia diferenciálnej rovnice sa nazýva **integrálna krivka**.

Príklad 1. Ukážme, že funkcia $y = x\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$ je riešením diferenciálnej rovnice $2x^3 - x + yy' = 0$.

Riešenie: Funkcia $y = x\sqrt{1-x^2}$ je definovaná na intervale $\langle -1, 1\rangle$, teda aj na intervale $(-1, 1)$. Jej derivácia

$$y' = \sqrt{1-x^2} + x \,.\, \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

existuje na intervale $(-1, 1)$. Dosaďme danú funkciu a jej deriváciu do diferenciálnej rovnice. Ľavá strana rovnice

$$L = 2x^3 - x + x\sqrt{1-x^2}\,\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2x^3 - x + x(1-2x^2) = 2x^3 - x + x - 2x^3 = 0.$$

Pravá strana rovnice $P = 0$, teda funkcia vyhovuje danej rovnici na intervale $(-1, 1)$, a preto je riešením danej diferenciálnej rovnice.

Metódami na riešenie diferenciálnych rovníc vždy nájdeme všeobecné riešenie. V praxi však veľakrát potrebujeme riešenie, ktoré spĺňa isté podmienky.
Úloha nájsť partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu, ktoré vyhovuje podmienke $y(x_0) = y_0,\ x_0 \in J$ a y_0 je dané reálne číslo sa nazýva **Cauchyho začiatočná úloha**. Podmienka $y(x_0) = y_0$ sa nazýva **Cauchyho začiatočná podmienka**.

Poznámka: Nájsť všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu nie je triviálna úloha. Existujú diferenciálne rovnice, ktoré vieme riešiť iba približnými metódami, nevieme nájsť ich exaktné riešenie. V tejto kapitole sa budeme zaoberať iba niektorými základnými typmi diferenciálnych rovníc prvého rádu, ktoré vieme riešiť a ktoré sa často vyskytujú v technickej praxi.

10.2 Diferenciálne rovnice so separovanými premennými

Diferenciálnu rovnicu tvaru

$$p(x) + q(y)y' = 0,$$

kde p je spojitá funkcia na intervale $(a,\, b)$ a q na $(c,\, d)$ nazývame **diferenciálna rovnica so separovanými premennými**.

Každé riešenie diferenciálnej rovnice $p(x) + q(y)y' = 0$ má tvar

$$\int p(x)\, dx + \int q(y)\, dy = c, \quad c \in R.$$

Poznámka: Ak $q(y) \neq 0$ na $(c,\, d)$, tak každým bodom množiny $G = (a,\, b) \times (c,\, d)$ prechádza práve jedna integrálna krivka tejto diferenciálnej rovnice.

Príklad 2. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $e^x + y' = 0$.

Riešenie: Diferenciálna rovnica je rovnica so separovanými premennými. Podľa úvodného označenia

$$p(x) = e^x \qquad \text{a} \qquad q(y) = 1.$$

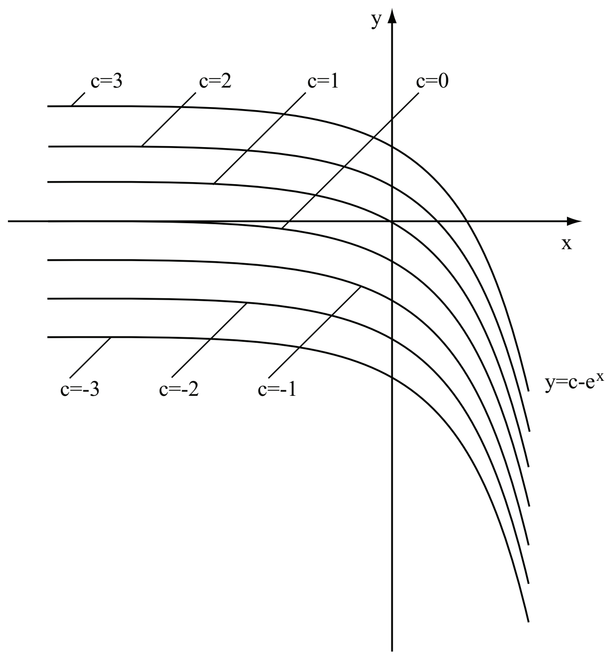
Obe funkcie sú spojité na intervale $(-\infty,\, \infty)$. Nájdime riešenie.

$$\begin{aligned} e^x + y' &= 0 \\ \int e^x\, dx + \int 1\, dy &= c, \qquad c \in R \\ e^x + y &= c \\ y &= c - e^x \end{aligned}$$

Všetky riešenia diferenciálnej rovnice sú tvaru

$$y = c - e^x, \qquad x \in R,$$

kde c je ľubovoľné reálne číslo. K tomuto všeobecnému riešeniu prislúcha systém integrálnych kriviek (obr. 10.1), ktorými sú posunuté grafy exponenciálnych funkcií.



Obr. 10.1

$\boxed{\textbf{Príklad 3.}}$ Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $2x+2y\,y' = 0$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(1) = \sqrt{2}$.

Riešenie: Funkcie $p(x) = 2x$, $q(y) = 2y$ sú spojité na $(-\infty, \infty)$. Nájdime najskôr všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice.

$$
\begin{aligned}
2x + 2y\,y' &= 0 \\
\int 2x\,dx + \int 2y\,dy &= c, && c \in R \\
x^2 + y^2 &= c, && c \geq 0, \text{ lebo ľavá strana rovnice je nezáporná} \\
y^2 &= c - x^2 \\
|y| &= \sqrt{c - x^2} \\
y &= \pm\sqrt{c - x^2}
\end{aligned}
$$

Dostávame dva typy funkcií, ktoré sú všeobecným riešením danej diferenciálnej rovnice, a to

$$y_1 = \sqrt{c - x^2} \quad \text{a} \quad x \in \left(-\sqrt{c},\, \sqrt{c}\right),$$

resp.

$$y_2 = -\sqrt{c - x^2} \quad \text{a} \quad x \in \left(-\sqrt{c},\, \sqrt{c}\right).$$

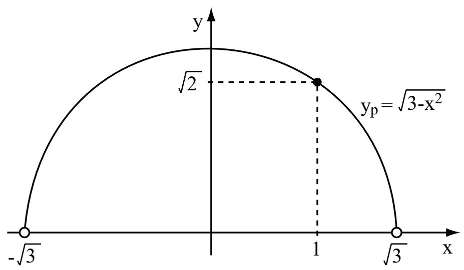
Keďže hodnota partikulárneho riešenia, ktoré hľadáme v bode $x_0 = 1$ je $y_0 = \sqrt{2} > 0$, tak dosadíme do všeobecného riešenia typu $y_1 = \sqrt{c - x^2}$. Položíme $x = 1$ a $y_1 = \sqrt{2}$. Potom

$$\sqrt{2} = \sqrt{c - 1^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2 = c - 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = 3.$$

Hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = \sqrt{3 - x^2} \qquad x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right).$$

Riešenia sú definované iba na otvorených intervaloch, pretože musí existovať aj derivácia funkcií, ktoré sme dostali a tá neexistuje v koncových bodoch intervalu, t. j. v bodoch $-\sqrt{c}$, $\sqrt{c}$. Integrálna krivka je polkružnica so stredom $S = [0, 0]$ a polomerom $r = \sqrt{3}$ bez koncových bodov, ležiaca v polrovine $y > 0$. Je znázornená na nasledujúcom obrázku (obr. 10.2).



Obr. 10.2

Príklad 4. Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\, y' = 0$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = 1$.

Riešenie: Funkcia $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá na $(-1, \infty)$, funkcia $q(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ je spojitá na $(0, \infty)$. Nájdime všeobecné riešenie.

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\, y' = 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = c, \qquad c \in R$$

$$2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{y} = c$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{y} = \frac{c}{2}$$

Ak položíme konštantu $\dfrac{c}{2} = c_1$, tak $c_1 \in R$, lebo $c \in R$. Potom všeobecné riešenie je určené rovnicou

$$\sqrt{y} = \sqrt{x+1} - c_1.$$

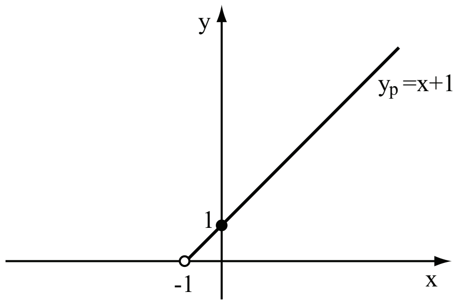
Nájdime konštantu c_1 zodpovedajúcu hľadanému partikulárnemu riešeniu. Platí

$$\sqrt{1} = \sqrt{0+1} - c_1 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 0,$$

t. j.

$$\sqrt{y} = \sqrt{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad y = x + 1, \quad x \in (-1, \infty).$$

Integrálna krivka je polpriamka znázornemá na nasledujúcom obrázku (obr. 10.3).



Obr. 10.3

Ak rovnicu $\sqrt{y} = \sqrt{x+1} - c_1$, ktorou je určené všeobecné riešenie umocníme, dostaneme vyjadrenie vyjadrenie všeobecného riešenie v explicitnom tvare

$$y = \left(\sqrt{x+1} - c_1\right)^2, \qquad x \in (-1,\, \infty) \quad \wedge \quad \sqrt{x+1} - c_1 > 0.$$

Príklad 5. Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y-1}\, y' = 0$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(-1) = 2$.

Riešenie: Funkcia $p(x) = \dfrac{1}{x}$ je spojitá na itervale $(-\infty,\, 0)$ a tiež aj na intervale $(0,\, \infty)$. Funkcia $q(y) = \dfrac{1}{y-1}$ je spojitá na intervale $(-\infty,\, 1)$ a $(1,\, \infty)$. Nájdime najskôr všeobecné riešenie.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y-1}\, y' = 0$$
$$\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{y-1}\, dy = c \qquad c \in R$$
$$\ln|x| + \ln|y-1| = c$$

V prípade, že na ľavej strane sa vyskytne funkcia y ako vnútorná zložka logaritmickej funkcie, je výhodné aj konštantu $c \in R$ napísať pomocou logaritmu, a to $c = \ln e^c$. Teda

$$\ln|x| + \ln|y-1| = \ln e^c$$
$$\ln|y-1| = \ln e^c - \ln|x|$$
$$\ln|y-1| = \ln \frac{e^c}{|x|}$$
$$|y-1| = \frac{e^c}{|x|}$$
$$y - 1 = \pm\frac{e^c}{x}$$

Položme $\pm e^c = c_1$. Keďže $e^c > 0 \;\Rightarrow\; -e^c < 0$, teda $c_1 \neq 0$. Potom

$$y = 1 + \frac{c_1}{x}, \qquad c_1 \neq 0$$

je všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice definované na intervale $(-\infty,\, 0)$ alebo $(0,\, \infty)$.

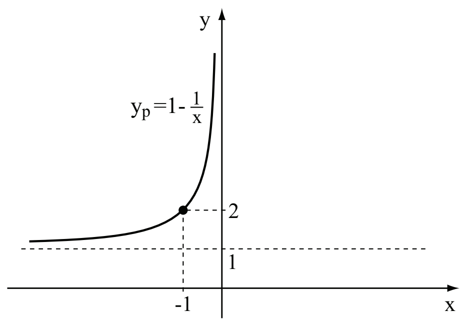
Skôr, ako začneme riešiť Cauchyho úlohu, je dobre si uvedomiť, že partikulárne riešenie, ktoré máme nájsť bude definované na intervale $(-\infty, 0)$, prípadne na jeho podintervale, pretože hľadáme riešenie, ktoré spĺňa podmienku $y(-1) = 2$ a $-1 \in (-\infty, 0)$. Dosaďme do všeobecného riešenia $x = -1$ a $y = 2$. Potom

$$2 = 1 + \frac{c_1}{-1} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1.$$

Hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = 1 - \frac{1}{x}, \qquad \text{pre} \qquad x \in (-\infty, 0).$$

Integrálna krivka je na nasledujúcom obrázku (obr. 10.4).



Obr. 10.4

$\boxed{\textbf{Príklad 6.}}$ Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2y}{y^2+1}\, y' = 0$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(2) = -1$.

Riešenie: Funkcia $p(x) = \dfrac{1}{x-1}$ je spojitá na intervale $(-\infty, 1)$ aj $(1, \infty)$ a $q(y) = -\dfrac{2y}{y^2+1}$ je definovaná a spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$. Nájdime všeobecné riešenie rovnice.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2y}{y^2+1}\, y' = 0$$

$$\int \frac{1}{x-1}\, dx - \int \frac{2y}{y^2+1}\, dy = c \qquad\qquad c \in R$$

$$\ln|x-1| - \ln|y^2+1| = \ln e^c$$

$$\ln(y^2+1) = \ln|x-1| - \ln e^c$$

$$\ln(y^2+1) = \ln \frac{|x-1|}{e^c}$$

$$y^2 + 1 = \frac{|x-1|}{e^c}$$

$$y^2 = \pm \frac{1}{e^c}\,(x-1) - 1$$

Položme

$$\pm\frac{1}{e^c} = c_1 \neq 0, \quad \text{lebo} \quad e^c > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e^c} > 0 \quad \text{a} \quad -\frac{1}{e^c} < 0, \quad \text{teda} \pm\frac{1}{e^c} \neq 0.$$

Potom

$$y^2 = c_1(x-1) - 1.$$

Dostaneme dva typy všeobecného riešenia, a to

$$y_1 = \sqrt{c_1(x-1)-1} \qquad \text{a} \qquad y_2 = -\sqrt{c_1(x-1)-1},$$

pričom riešenia sú definované na podintervaloch intervalov $(-\infty,\, 1)$ alebo $(1,\, \infty)$, na ktorých súčasne platí $c_1(x-1)-1>0$, aby riešenia a ich derivácie boli definované.

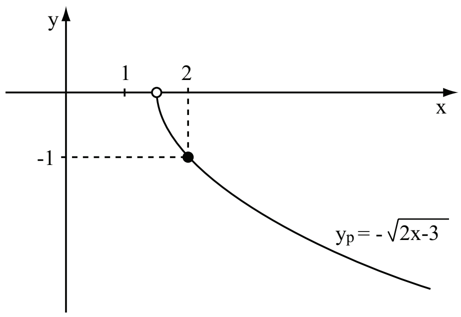
Nájdime partikulárne riešenie. Bude definované na podintervale intervalu $(1,\, \infty)$, lebo $2 \in (1,\, \infty)$. Keďže hodnota partikulárneho riešenia je záporná, vyhovuje nám riešenie y_2. Potom

$$-1 = -\sqrt{c_1(2-1)-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = c_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2$$

a partikulárne riešenie

$$y_p = -\sqrt{2(x-1)-1} = -\sqrt{2x-3}, \qquad x \in \left(\frac{3}{2},\, \infty\right).$$

Graf partikulárneho riešenia je na nasledujúcom obrázku (obr. 10.5).



Obr. 10.5

10.3 Diferenciálne rovnice so separovateľnými premennými

Diferenciálna rovnica tvaru

$$p_1(x)\, q_1(y) + p_2(x)\, q_2(y)\, y' = 0,$$

kde $p_1,\ p_2$ sú spojité funkcie na intervale $(a,\, b)$ a $q_1,\ q_2$ na $(c,\, d)$ sa nazýva **diferenciálna rovnica so separovateľnými premennými**.

Riešením diferenciálnej rovnice so separovateľnými premennými sú všetky funkcie určené rovnicou

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,dx + \int \frac{q_2(y)}{q_1(y)}\,dy = c, \qquad c \in R$$

a všetky konštantné funkcie

$$y_i = b_i, \qquad \text{pre ktoré} \qquad q_1(y_i) = 0.$$

Poznámka: Ak chceme teda riešiť diferenciálnu rovnicu so separovateľnými premenných, tak ju najskôr upravíme na separovanú, ktorú už vieme riešiť. Nesmieme však zabudnúť na konštantné funkcie, ktoré získame riešením rovnice $q_1(y) = 0$.

Príklad 7. Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $3y - (x+2)y' = 0$.

Riešenie: Ak porovnáme rovnicu so základným tvarom, tak môžeme napríklad položiť

$$p_1(x) = 3, \qquad p_2(x) = x+2, \qquad q_1(y) = y, \qquad q_2(y) = -1.$$

Všetky funkcie sú spojité na $(-\infty,\, \infty)$. Urobme najskôr separáciu premenných a potom vyriešme rovnicu so separovanými premennými.

$$\begin{aligned}
3y - (x+2)y' = 0 \Big/ \cdot \frac{1}{y\,(x+2)}\,, &\quad y \neq 0, \quad x+2 \neq 0 \\
\frac{3}{x+2} - \frac{1}{y}\,y' &= 0 \\
\int \frac{3}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{y}\,dy &= c \qquad c \in R \\
3\ln|x+2| - \ln|y| &= \ln e^c \\
\ln|y| &= \ln|(x+2)^3| - \ln e^c \\
\ln|y| &= \ln \frac{|(x+2)^3|}{e^c} \\
|y| &= \frac{|(x+2)^3|}{e^c} \\
y &= \pm\frac{1}{e^c}\,(x+2)^3, \qquad \pm\frac{1}{e^c} = c_1 \neq 0 \\
y &= c_1(x+2)^3
\end{aligned}$$

Dostali sme všeobecné riešenie $y = c_1(x+2)^3,\ c_1 \neq 0$, ktoré je definované buď na intervale $(-\infty,\, -2)$ alebo na intervale $(-2,\, \infty)$.
Diferenciálna rovnica $3y-(x+2)y' = 0$, ktorú riešime, je však definovaná pre každé $x \in R$, teda aj pre $x = -2$. Pretože hodnota všeobecného riešenia $y = c_1(x+2)^3$ v bode $x = -2$ je

$$y(-2) = c_1(-2+2)^3 = 0,$$

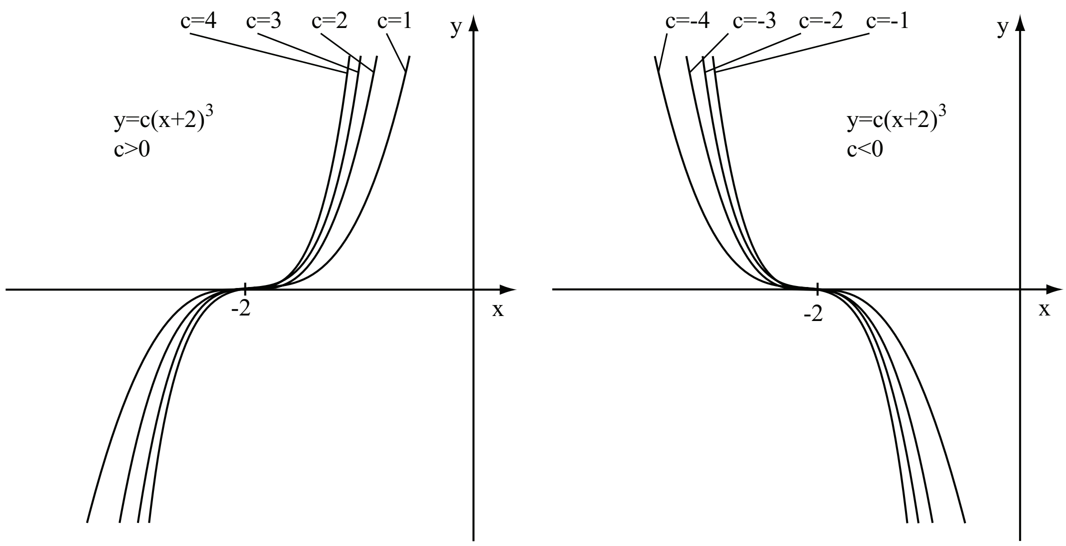
a teda má zmysel, tak riešenia diferenciálnej rovnice so separovateľnými premennými sú

$$y = c_1(x+2)^2, \qquad c_1 \neq 0, \qquad x \in R.$$

Pri separácii premenných vypadlo riešenie $y = 0$, ktoré však môžeme napísať v tvare $y = 0\,.\,(x+2)^3$, čiže všetky riešenia majú tvar

$$y = k(x+2)^3, \qquad k \in R, \qquad x \in R.$$

Na nasledujúcom obrázku (obr. 10.6) sú nakreslené integrálne krivky.



Obr. 10.6

Príklad 8. Nájdime všetky riešenia diferenciálnej rovnice $(y+1)\,x + x^2y' = 0$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(2) = 0$.

Riešenie: Funkcie $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, $q_1(y) = y+1$, $q_2(y) = 1$ sú definované a spojité na intervale $(-\infty, \infty)$. Urobme separáciu premenných a nájdime všeobecné riešenie separovanej diferenciálnej rovnice.

$$\begin{aligned}
(y+1)\,x + x^2y' = 0 \Big/ \cdot \frac{1}{x^2(y+1)} \qquad & x \neq 0, \quad y+1 \neq 0 \\
\frac{1}{x} + \frac{1}{y+1}\,y' = 0 & \\
\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{y+1}\,dy = \ln e^c, \qquad & c \in R \\
\ln|x| + \ln|y+1| = \ln e^c & \\
\ln|y+1| = \ln e^c - \ln|x| & \\
\ln|y+1| = \ln \frac{e^c}{|x|} & \\
|y+1| = \frac{e^c}{|x|} & \\
y+1 = \frac{\pm e^c}{x}, \qquad & \pm e^c = c_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice so separovanými premennými je potom

$$y = -1 + \frac{c_1}{x}, \qquad c_1 \neq 0, \qquad x \in (-\infty,\, 0) \quad \text{alebo} \quad x \in (0,\, \infty).$$

Toto riešenie je súčasne aj všeobecným riešením rovnice so separovateľnými premennými, ale riešením pôvodnej rovnice je aj funkcia $y = -1,\ x \in R$, ktorá z množiny riešení vypadla pri separácii. Toto riešenie však vzhľadom na definičný obor sa nedá zapísať v tvare všeobecného riešenie, ktoré sme dostali. Takže všetky riešenia pôvodnej rovnice sú

$$y = -1 + \frac{c_1}{x}, \qquad c_1 \neq 0, \qquad x \in (-\infty,\, 0) \quad \text{alebo} \quad x \in (0,\, \infty)$$

a

$$y = -1, \quad x \in R.$$

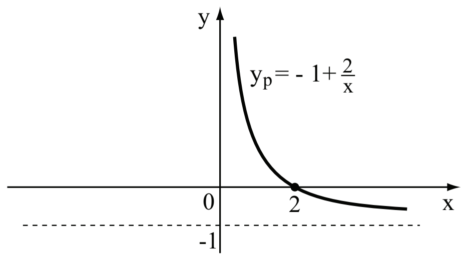
Nájdeme partikulárne riešenie, ktoré bude definované na intervale $(0,\, \infty)$, lebo $2 \in (0,\, \infty)$. Keďže

$$y(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + \frac{c_1}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2,$$

hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = -1 + \frac{2}{x}, \qquad x \in (0,\ \infty).$$

Graf partikulárneho riešenia je na nasledujúcom obrázku (obr. 10.7).



Obr. 10.7

$\boxed{\textbf{Príklad 9.}}$ Nájdime všetky riešenia diferenciálnej rovnice $\dfrac{y^2-1}{x} - 2y\,y' = 0$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku

a) $y(-1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, **b**) $y(4) = \sqrt{2}$.

Riešenie: Funkcie $p_1(x) = \dfrac{1}{x}$ a $p_2(x) = -1$ sú definované a spojité na intervaloch $(-\infty,\, 0)$ a $(0,\, \infty)$. Funkcie $q_1(y) = y^2 - 1$ a $q_2(y) = 2y$ sú spojité na $(-\infty,\, \infty)$. Urobme separáciu premenných.

$$\begin{aligned}
\frac{y^2-1}{x} - 2y\,y' &= 0 \Big/ \cdot \frac{1}{(-1)(y^2-1)}\,, \qquad y^2-1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y \neq \pm 1 \\
-\frac{1}{x} + \frac{2y}{y^2-1}\,y' &= 0 \\
-\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2y}{y^2-1}\,dy &= c, \qquad c \in R \\
-\ln|x| + \ln|y^2-1| &= \ln e^c \\
\ln|y^2-1| &= \ln e^c + \ln|x| \\
\ln|y^2-1| &= \ln\left(e^c\,|x|\right) \\
|y^2-1| &= e^c\,|x| \\
y^2-1 &= \pm e^c\,x, \qquad \pm e^c = c_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Potom

$$y^2 = 1 + c_1 x.$$

Dostávame dva typy riešení, a to

$$y_1 = \sqrt{c_1 x + 1} \qquad \text{a} \qquad y_2 = -\sqrt{c_1 x + 1},$$

ktoré sú definované na podintervale intervalov

$$(-\infty,\, 0) \quad \text{alebo} \quad (0,\, \infty), \qquad \text{kde} \qquad c_1 x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{1}{c_1}, \qquad c_1 \neq 0.$$

Pri separácii premenných sme vylúčili riešenie dve riešenia $y = \pm 1$, ktoré sú definované na intervale $(-\infty,\, 0)$ alebo $(0,\, \infty)$. Tieto riešenia sa dajú zapísať pomocou všeobecného riešenia, a to tak, že konštanta sa bude rovnať 0. Potom všetky riešenia sú

$$y_1 = \sqrt{kx+1}, \quad k \in R \qquad \text{alebo} \qquad y_2 = -\sqrt{kx+1}, \quad k \in R$$

definované pre

$$x \in (-\infty,\, 0) \quad \text{alebo} \quad x \in (0,\, \infty) \qquad \text{pričom pre} \quad k \neq 0 \quad \text{súčasne} \quad x > -\frac{1}{k}.$$

Nájdime partikulárne riešenia. Keďže $y(-1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$ a $y(4) = \sqrt{2} > 0$, vyhovuje nám všeobecné riešenie y_1.

a) Pretože $-1 \in (-\infty,\, 0)$, partikulárne riešenie môže byť definované na podintervale tohto intervalu.

$$y(-1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{k\,.\,(-1)+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} = -k+1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}.$$

Ak sa pozrieme na definičný obor všeobecného riešenia, tak $x > -\dfrac{1}{k}$, teda partikulárne riešenie je definované pre

$$x > -4 \quad \text{a súčasne} \quad x \in (-\infty,\, 0) \qquad \Rightarrow \qquad x \in (-4,\, 0).$$

Potom hľadané partikulárne riešenie je

$$y_{p1} = \sqrt{\frac{x}{4} + 1}, \qquad x \in (-4,\, 0).$$

Graf partikulárneho riešenia je časťou paraboly $y = \sqrt{\frac{x}{4} + 1}$ a je zvýraznený vľavo na obrázku 10.8.

b) V začiatočnej podmienke $x_0 = 4 > 0$, teda partikulárne riešenie bude definované na intervale $(0,\, \infty)$, resp. na podintervale intervalu $(0,\, \infty)$.

$$y(4) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} = \sqrt{k\,.\,4 + 1} \quad \Rightarrow \quad 2 = 4k + 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}.$$

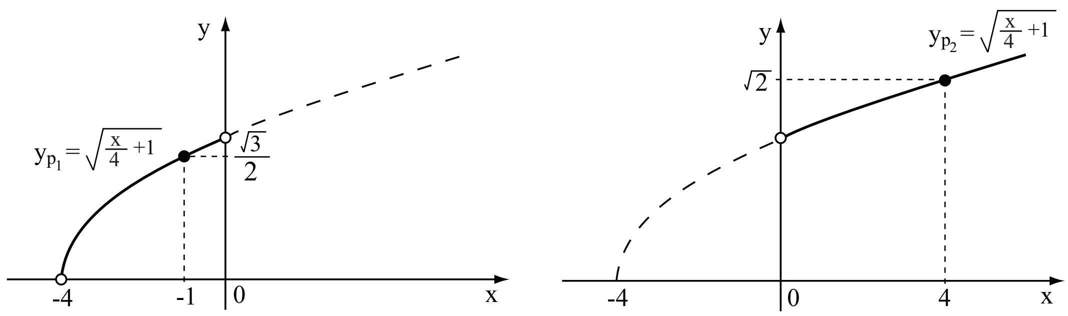
Definičný obor partikulárneho riešenia je určený podmienkami

$$x > -4 \quad \text{a súčasne} \quad x \in (0,\, \infty) \qquad \Rightarrow \qquad x \in (0,\, \infty).$$

Potom partikulárne riešenie je

$$y_{p2} = \sqrt{\frac{x}{4} + 1}, \qquad x \in (0,\, \infty).$$

Graf partikulárneho riešenia je zvýraznený vpravo na obrázku 10.8.



Obr. 10.8

Všimnime si, že obidve partikulárne riešenia majú ten istý predpis, ale rôzne definičné obory. Pri riešení diferenciálnych rovníc je potrebné už na začiatku rozobrať úlohu a aj v priebehu riešenia treba dávať pozor na možné zúženie definičného oboru.

$\boxed{\textbf{Príklad 10.}}$ Nájdime všetky riešenie diferenciálnej rovnice $y \cos x - \sin x\, y' = 0$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$.

Riešenie: Je to diferenciálna rovnica so separovateľnými premennými, kde $p_1(x) = \cos x$, $p_2(x) = -\sin x$, $q_1(y) = y$, $q_2(y) = 1$. Všetky tieto funkcie sú definované a spojité na $(-\infty,\, \infty)$. Urobme separáciu premenných.

$$
\begin{aligned}
y\cos x - \sin x\, y' = 0 \Big/ \cdot \frac{1}{y(-\sin x)}, &\qquad y \neq 0, \quad \sin x \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq k\pi,\ k \in Z \\
-\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{y}\, y' &= 0 \\
-\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx + \int \frac{1}{y}\, dy &= \ln e^c, \qquad c \in R \\
-\ln|\sin x| + \ln|y| &= \ln e^c \\
\ln|y| &= \ln e^c + \ln|\sin x| \\
\ln|y| &= \ln e^c |\sin x| \\
|y| &= e^c |\sin x| \\
y &= \pm e^c \sin x, \qquad \pm e^c = c_1 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Všeobecné riešenie separovanej diferenciálnej rovnice je teda

$$y = c_1 \sin x, \qquad x \in (k\pi,\ (k+1)\pi),\ k \in Z.$$

Sú to parciálne funkcie $y = c_1 \sin x$ definované na intervaloch dĺžky π, kde $\sin x \neq 0$. Našou úlohou je však nájsť riešenie separovateľnej diferenciálnej rovnice, kde funkcie p_1, p_2 sú spojité na R. Pretože hodnota všeobecného riešenia y v bodoch $k\pi$ je

$$y = c_1 \sin(k\pi) = 0,$$

a teda má zmysel, všeobecné riešenie pôvodnej rovnice je

$$y = c_1 \sin x, \qquad c_1 \neq 0, \qquad x \in R.$$

V priebehu separácie premenných však vypadlo riešenie $y = 0$. Ak vo všeobecnom riešení konštanta sa bude rovnať nule, tak aj toto riešenie sa dá vnoriť do množiny všetkých riešení. Takže všeobecné riešenie je tvaru

$$y = c_2 \sin x, \quad c_2 \in R, \quad x \in R.$$

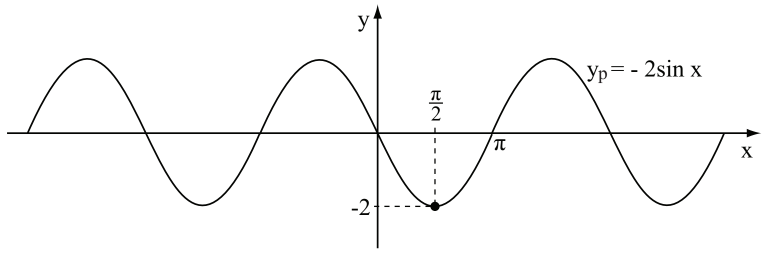
Partikulárne riešenie dostaneme dosadením $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = -2$ do všeobecného riešenia. Potom

$$-2 = c_2 \sin\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad -2 = c_2$$

a hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = -2\sin x, \qquad x \in R.$$

Integrálna krivka je na nasledujúcom obrázku (obr. 10.9).



Obr. 10.9

Príklad 11. Nájdime všetky riešenia diferenciálnej rovnice $\sqrt{y^2-4}+y\,y'=0$ a všetky partikulárne riešenia, ktoré spĺňajú začiatočnú podmienku $y(0)=2$.

Riešenie: Funkcie $p_1(x)=1$, $p_2(x)=1$ sú spojité na $(-\infty,\infty)$, funkcia $q_2(y)=y$ je spojitá na R a funkcia $q_1(x)=\sqrt{y^2-4}$ je spojitá, ak $y^2-4\geq 0$, t. j. na intervaloch $(-\infty,-2\rangle$ a $\langle 2,\infty)$. Urobme separáciu premenných a vyriešme rovnicu so separovanými premennými.

$$\sqrt{y^2-4}+yy'=0 \Big/ \cdot\frac{1}{\sqrt{y^2-4}} \qquad y^4-4\neq 0 \ \Rightarrow\ y\neq\pm 2$$

$$1+\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\,y'=0$$

$$\int dx+\int\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\,dy=c \qquad c\in R$$

Aby sme mohli pokračovať v riešení ďalej, nájdime jednu primitívnu funkciu k funkcii $\dfrac{y}{\sqrt{y^2-4}}$, teda

$$\int\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\,dy=\left|\begin{array}{c} t=y^2-4\\ dt=2y\,dy\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}2\sqrt{t}+c_1=\sqrt{y^2-4}+c_1.$$

Potom dostaneme

$$\begin{aligned} x+\sqrt{y^2-4}&=c\\ \sqrt{y^2-4}&=c-x,\quad c-x>0\quad\Rightarrow\quad x<c\\ y^2-4&=(c-x)^2\\ y^2&=4+(c-x)^2\\ |y|&=\sqrt{4+(c-x)^2}\ \Rightarrow\ \left\langle\begin{array}{l} y_1=\sqrt{4+(c-x)^2},\quad x<c,\ c\in R,\\ \\ y_2=-\sqrt{4+(c-x)^2},\quad x<c,\ c\in R.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Funkcie y_1 a y_2 sú všeobecným riešením separovanej diferenciálnej rovnice. Keďže

$$y_1(c)=2 \qquad \text{a} \qquad y_2(c)=-2,$$

tak riešenia diferenciálnej rovnice so separovateľnými riešeniami sú definované pre $x\in(-\infty,c\rangle$, $c\in R$. V priebehu separácie nám však vypadli dve riešenia, a to konštantné funkcie $y_3=2$ a $y_4=-2$, ktoré sa však nedajú vnoriť do množiny všeobecných riešení, sú to singulárne riešenia. Teda všetky riešenia pôvodnej diferenciálnej rovnice sú

$$y_1 = \sqrt{4 + (c - x)^2},\ x \le c,\ c \in R, \qquad y_2 = -\sqrt{4 + (c - x)^2},\ x \le c,\ c \in R$$
$$y_3 = 2, \quad x \in R \qquad y_4 = -2, \quad x \in R.$$

Teraz nájdeme všetky riešenia, ktoré spĺňajú podmienku $y(0) = 2$. Jedno z takýchto riešení je konštantné riešenie

$$y_3 = 2, \qquad x \in R$$

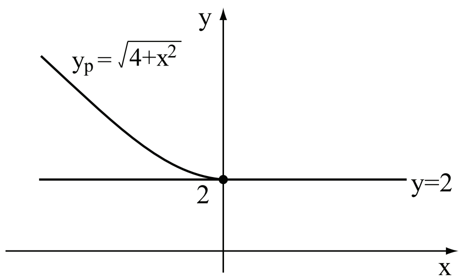
a ďalšie nájdeme voľbou konštanty vo všeobecnom riešení. Keďže $y(0) = 2 > 0$, tak vyhovuje riešenie y_1. Potom

$$2 = \sqrt{4 + (c - 0)^2} \quad \Rightarrow \quad 4 = 4 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Druhé partikulárne riešenie je

$$y_p = \sqrt{4 + (0 - x)^2} = \sqrt{4 + x^2} \qquad \text{pre} \qquad x \in (-\infty, 0\rangle.$$

Grafy partikulárnych riešení sú na nasledujúcom obrázku (obr. 10.10), graf y_p je časťou hyperboly $-x^2 + y^2 = 4$.



Obr. 10.10

10.4 Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu

Diferenciálna rovnica tvaru

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kde p a q sú spojité funkcie na intervale $(a,\, b)$ sa nazýva **lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu.**

Ak $q(x) = 0$, $\forall x \in (a,\, b)$ rovnica sa nazýva **homogénna**, v opačnom prípade **nehomogénna**.

Všeobecné riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice má tvar

$$y_h = c\, e^{-\int p(x)\, dx}, \qquad c \in R.$$

PRINCÍP RIEŠENIA NEHOMOGÉNNEJ LINEÁRNEJ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE

1. Nájdeme všobecné riešenie y_h honogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice, t. j.
$$y' + p(x)y = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_h = c\, e^{-\int p(x)\,dx}, \ c \in R.$$
2. Nájdeme jedno riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice metódou variácie konštánt, t. j. hľadáme ho v tvare
$$\widetilde{y} = c(x)\, e^{-\int p(x)\,dx}, \qquad c(x) \text{ je neznáma funkcia.}$$
3. Všeobecné riešenie nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice je
$$y_v = y_h + \widetilde{y}.$$

Príklad 12. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' - 2xy = e^{x^2}$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = -1$.

Riešenie: Ak porovnáme direnciálnu rovnicu so základným tvarom, tak $p(x) = -2x$, $q(x) = e^{x^2}$. Funkcie p a q sú definované a spojité na množine R. Nájdime všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice.
$$y_h = c\, e^{-\int -2x\,dx} = c\, e^{\int 2x\,dx} = c\, e^{x^2}, \quad c \in R, \quad x \in R.$$
Metóda variácie konštánt spočíva v tom, že konštantu, ktorú máme vo všeobecnom riešení y_h nahradíme neznámou funkciou $c(x)$, to znamená v našom prípade
$$\widetilde{y} = c(x)\, e^{x^2}.$$
Túto funkciu určíme tak, aby funkcia $\widetilde{y}$ bola riešením danej rovnice, teda musí platiť:
$$\widetilde{y}\,' - 2x\,\widetilde{y} = e^{x^2}.$$
Vypočítajme deriváciu $\widetilde{y}\,'$ a dosaďme do poslednej rovnice.
$$\widetilde{y}\,' = \left[c(x)\, e^{x^2}\right]' = c'(x)\, e^{x^2} + c(x)\, e^{x^2}\, 2x$$
a
$$\begin{aligned} c'(x)\, e^{x^2} + c(x)\, e^{x^2}\, 2x - 2x\, c(x)\, e^{x^2} &= e^{x^2} \\ e^{x^2}\, c'(x) &= e^{x^2} \ \Big/ : e^{x^2} \end{aligned}$$
Táto úprava je ekvivalentná, pretože $e^{x^2} \neq 0, \ \forall x \in R$. Teda
$$c'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad c(x) = \int 1\,dx = x.$$
(Vhodnú funkciu $c(x)$ budeme určovať ako základnú primitívnu funkciu, t. j. s nulovou integračnou konštantou.)

Dosadíme do riešenia $\widetilde{y}$ za nezámu funkciu $c(x)$,

$$\widetilde{y} = x\, e^{x^2}$$

a všeobecné riešenie je

$$y_v = c\, e^{x^2} + x\, e^{x^2} = e^{x^2}(c + x), \qquad c \in R, \qquad x \in R.$$

Nájdime partikulárne riešenie.

$$y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = e^0(c + 0) \quad \Rightarrow \quad c = -1,$$

takže partikulárne riešenie je

$$y_p = e^{x^2}(x - 1), \qquad x \in R.$$

Príklad 13. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' + \dfrac{y}{x} = 1$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Riešenie: Funkcie $p(x) = \dfrac{1}{x}$ a $q(x) = 1$ sú spojité na intervale $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Všeobecné riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice je

$$y_h = c\, e^{-\int \frac{1}{x}\, dx} = c\, e^{-\ln|x|} = c\, e^{\ln|x|^{-1}} = c\, e^{\ln \frac{1}{|x|}} = c\, \frac{1}{|x|}.$$

Teda

$$y_h = \frac{\pm c}{x} = \frac{C}{x}, \qquad C = \pm c, \quad C \in R.$$

Riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice budeme hľadať v tvare

$$\widetilde{y} = \frac{C(x)}{x}, \qquad \text{kde} \qquad C(x) \qquad \text{je neznáma funkcia.}$$

Vypočítajme deriváciu $\widetilde{y}\,'$ a dosaďme do rovnice $y' + \dfrac{y}{x} = 1$.

$$\widetilde{y}\,' = \frac{C'(x)\, x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2},$$

a teda

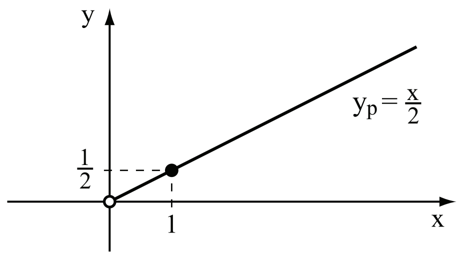
$$\begin{aligned} \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} &= 1 \\ \frac{C'(x)}{x} &= 1 \\ C'(x) &= x. \end{aligned}$$

Potom

$$C(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$

a
$$\widetilde{y} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2}.$$
Všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je
$$y_v = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}, \qquad C \in R, \qquad x \in (-\infty,\, 0) \quad \text{alebo} \quad x \in (0,\, \infty).$$

Nájdime partikulárne riešenie definované na intervale $(0,\, \infty)$, lebo $x_0 = 1 \in (0,\, \infty)$.
$$y(1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{C}{1} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 0,$$
teda
$$y_p = \frac{0}{x} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}, \qquad x \in (0,\, \infty).$$
Integrálna krivka je časťou grafu funkcie $f(x) = \dfrac{x}{2}$ a je na nasledujúcom obrázku (obr. 10.11).



Obr. 10.11

$\boxed{\textbf{Príklad 14.}}$ Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' - \dfrac{1}{x-1}\, y = (x-1)^3$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = \dfrac{1}{3}$.

Riešenie: Funkcie $p(x) = -\dfrac{1}{x-1}$ a $q(x) = (x-1)^3$ sú spojité na intervale $(-\infty,\, 1)$ a na intervale $(1,\, \infty)$. Nájdime všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice.
$$y_h = c\, e^{-\int -\frac{1}{x-1}\, dx} = c\, e^{\int \frac{1}{x-1}\, dx} = c\, e^{\ln|x-1|} = c\, |x-1|, \quad c \in R.$$
Odstráňme absolútnu hodnotu
$$y_h = \pm c\, (x-1), \qquad \text{a položme} \qquad \pm\, c = C, \qquad C \in R.$$
Keďže
$$y_h = C\,(x-1) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{y} = C(x)\,(x-1) \quad \text{a} \quad \widetilde{y}\,' = C\,'(x)\,(x-1) + C(x).$$
Funkcia $\widetilde{y}$ má byť riešením diferenciálnej rovnice $y' - \dfrac{1}{x-1}\, y = (x-1)^3$, teda dosaďme a nájdime neznámu funkciu $C(x)$.

$$\begin{aligned} C'(x)\,(x-1) + C(x) - \frac{1}{x-1}\,C(x)\,(x-1) &= (x-1)^3 \\ C'(x)\,(x-1) + C(x) - C(x) &= (x-1)^3 \\ C'(x) &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

Urobili sme ekvivalentnú úpravu, pretože $x \neq 1$. Potom

$$C(x) = \int (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{3},$$

$$\widetilde{y} = \frac{(x-1)^3}{3}(x-1) = \frac{(x-1)^4}{3}$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = C(x-1) + \frac{(x-1)^4}{3}, \qquad C \in R, \qquad x \in (-\infty,\,1) \quad \text{alebo} \quad x \in (1,\,\infty).$$

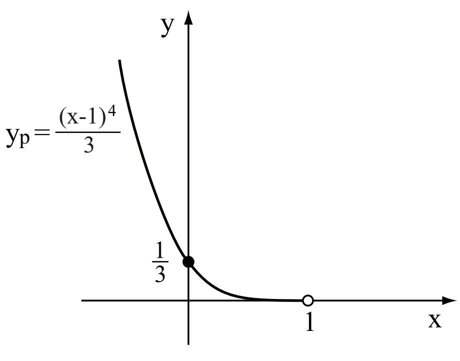
Partikulárne riešenie bude definované na intervale $(-\infty,\,1)$ pretože 0 patrí iba do tohto intervalu. Nájdime toto riešenie.

$$y(0) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = C\,.\,(-1) + \frac{(-1)^4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = -C + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

a

$$y_p = \frac{(x-1)^4}{3}, \qquad x \in (-\infty,\,1).$$

Integrálna krivka je nakreslená na nasledujúcom obrázku (obr. 10.12).



Obr. 10.12

Príklad 15. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' + \operatorname{tg} x\, y = x\cos^2 x$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = 0$.

Riešenie: Funkcie $p(x) = \operatorname{tg} x$ a $q(x) = x\cos^2 x$ sú spojité na každom z intervalov $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$. Vypočítajme všeobecné riešenie homogénnej rovnice.

$$y_h = c\,e^{-\int \operatorname{tg} x\,dx} = c\,e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx} = c\,e^{\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx} = c\,e^{\ln|\cos x|} = c\,|\cos x|, \quad c \in R.$$

Odstráňme absolútnu hodnotu. Potom

$$y_h = \pm c\,\cos x = C\cos x, \quad \pm c = C \in R$$

a jedno riešenie rovnice s pravou stranou má tvar

$$\widetilde{y} = C(x)\,\cos x.$$

Nájdime neznámu funkciu $C(x)$ tak, že dosadíme funkciu $\widetilde{y}$ do diferenciálnej rovnice $y' + \operatorname{tg} x\, y = x\cos^2 x$. Najskôr však musíme vypočítať deriváciu $\widetilde{y}\,'$.

$$\widetilde{y}\,' = C'(x)\,\cos x + C(x)\,(-\sin x) = C'(x)\,\cos x - C(x)\,\sin x$$

a potom

$$\begin{aligned} C'(x)\,\cos x - C(x)\,\sin x + \operatorname{tg} x\, C(x)\,\cos x &= x\cos^2 x \\ C'(x)\,\cos x - C(x)\,\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\,C(x)\,\cos x &= x\cos^2 x \\ C'(x)\,\cos x - C(x)\,\sin x + \sin x\, C(x) &= x\cos^2 x \\ C'(x)\,\cos x &= x\cos^2 x \\ C'(x) &= x\cos x. \end{aligned}$$

Takže

$$C(x) = \int x\cos x\, dx = \begin{vmatrix} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos x & \Rightarrow & v(x) = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x\, dx =$$

$$= x\sin x + \cos x$$

a

$$\widetilde{y} = (x\sin x + \cos x)\cos x = x\sin x\cos x + \cos^2 x.$$

Všeobecné riešenie potom je

$$y_v = C\cos x + x\sin x\cos x + \cos^2 x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad k \in Z.$$

Nájdeme partikulárne riešenie, ktoré bude definované na intervale $\left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$, lebo $x_0 = 0$ patrí do tohto intervalu.

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C\,.\,\cos 0 + 0\,.\,\sin 0\,.\,\cos 0 + \cos^2 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C + 1 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

a hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = -\cos x + x\sin x\cos x + \cos^2 x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right).$$

$\boxed{\textbf{Príklad 16.}}$ Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(1) = 3$.

Riešenie: Funkcie $p(x) = q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sú spojité na intervale $(0, \infty)$. Nájdeme všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice.

$$y_h = c\,e^{-\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx} = c\,e^{-2\sqrt{x}}, \qquad c \in R.$$

Jedno riešenie nehomogénnej rovnice sa dá aj odhadnúť. Ľahko sa presvedčíme, že funkcia $\widetilde{y} = 1$ je riešením danej rovnice. Pokiaľ to však nie je zrejmé, tak pokračujeme ďalej metódou variácie konštánt a hľadáme ho v tvare

$$\widetilde{y} = c(x)\,e^{-2\sqrt{x}}, \qquad \text{kde} \quad c(x) \quad \text{je neznáma funkcia.}$$

Funkcia $\widetilde{y}$ má byť riešením, teda musí vyhovovať danej rovnici. Pomocou tejto podmienky nájdeme neznámu funkciu.

$$\widetilde{y}\,' = c\,'(x)\,e^{-2\sqrt{x}} + c(x)\,e^{-2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

a keď dosadíme do pôvodnej rovnice $y = \widetilde{y}$ a $y' = \widetilde{y}\,'$ dostaneme

$$\begin{aligned} c\,'(x)\,e^{-2\sqrt{x}} + c(x)\,e^{-2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + c(x)\,e^{-2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \\ c\,'(x)\,e^{-2\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \\ c\,'(x) &= e^{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Potom

$$c(x) = \int e^{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 2\sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx \end{array} \right| = \int e^t\,dt = e^t = e^{2\sqrt{x}}$$

a

$$\widetilde{y} = e^{2\sqrt{x}}\,e^{-2\sqrt{x}} = e^0 = 1.$$

Všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice potom je

$$y_v = c\,e^{-2\sqrt{x}} + 1, \qquad c \in R, \qquad x \in (0, \infty).$$

Nájdeme partikulárne riešenie.

$$y(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = c\,e^{-2\sqrt{1}} + 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = c\,e^{-2} \quad \Rightarrow \quad c = 2e^2,$$

teda

$$y_p = 2e^2\,e^{-2\sqrt{x}} + 1 = 2e^{2-2\sqrt{x}} + 1, \qquad x \in (0, \infty).$$

10.5 Cvičenia

Nájdite najskôr všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice a potom partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku, ak

1. **a)** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y-1}\, y' = 0,\quad y(-1) = 2,$ **b)** $1 + e^y\, y' = 0,\quad y(1) = 0,$
   c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2y}{1-y^2}\, y' = 0,\quad y(1) = -2,$ **d)** $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{y}\, y' = 0,\quad y(0) = 1.$
2. **a)** $2y - y' = 0,\quad y(0) = -1,$ **b)** $\sqrt{y} - \sqrt{x}\, y' = 0,\qquad y(4) = 1,$
   c) $y \ln y + x\, y' = 0,\quad y(1) = 1,$ **d)** $y^2 + 1 + x\, y\, y' = 0,\quad y(1) = \sqrt{3}.$
3. **a)** $y' - y = e^{2x},\quad y(0) = 1,$ **b)** $y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{3}{x^2},\qquad y(1) = 2,$
   c) $y' - y\cos x = \cos x,\quad y(0) = -1,$ **d)** $y' - \operatorname{cotg}\, x\; y = \sin^3 x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

<u>Výsledky</u>

1. **a)** $y = 1 + cx,\ x \in (-\infty, 0)\ \vee\ x \in (0, \infty),\ c \neq 0,\quad y_p = 1 - x,\ x \in (-\infty, 0),$
   b) $y = \ln(c - x),\ x \in (-\infty, c),\ c \in R,\quad y_p = \ln(2 - x),\ x \in (-\infty, 2),$
   c) $y_1 = \sqrt{1 + cx},\ y_2 = -\sqrt{1 + cx},\ x \in \left(-\dfrac{1}{c}, 0\right),\ c > 0\ \vee\ x \in (0, \infty),\ c > 0\ \vee$ $x \in (-\infty, 0),\ c < 0\ \vee,\ x \in \left(0, -\dfrac{1}{c}\right),\ c < 0,\quad y_p = -\sqrt{1 + 3x},\ x \in (0, \infty),$
   d) $y = c\cos x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in Z,\ c \neq 0,\quad y_p = \cos x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right).$
2. **a)** $y = ce^{2x},\ x \in R,\ c \in R,\quad y_p = -e^{2x},\ x \in R$
   b) $y = (c + \sqrt{x})^2,\ x \in (0, \infty),\ c \in R\ \wedge\ y = 0,\ x \in \langle 0, \infty),\quad y_p = (\sqrt{x} - 1)^2,$ $x \in (0, \infty),$
   c) $y = e^{\frac{c}{x}},\ x \in (-\infty, 0)\ \vee\ x \in (0, \infty),\ c \neq 0,\ \wedge\ y = 1,\ x \in R,\quad y_p = 1,\ x \in R,$
   d) $y_1 = \sqrt{\dfrac{c}{x^2} - 1},\ y_2 = -\sqrt{\dfrac{c}{x^2} - 1},\ x \in (-\sqrt{c}, 0),\ \vee\ x \in (0, \sqrt{c}),\ c > 0,$ $y_p = \sqrt{\dfrac{4}{x^2} - 1},\ x \in (0, 2).$
3. **a)** $y = ce^x + e^{2x},\ x \in R,\ c \in R,\quad y_p = e^{2x},\ x \in R,$
   b) $y = cx^2 - \dfrac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0)\ \vee\ x \in (0, \infty),\ c \in R,\quad y_p = 3x^2 - \dfrac{1}{x},\ x \in (0, \infty),$
   c) $y = ce^{\sin x} - 1,\ x \in R,\ c \in R,\quad y_p = -1,\ x \in R,$
   d) $y = c\sin x + \dfrac{1}{2}x\sin x - \dfrac{\sin 2x \sin x}{4},\ x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in Z,\ c \in R,$ $y_p = -\dfrac{\pi}{4}\sin x + \dfrac{1}{2}x\sin x - \dfrac{\sin 2x \sin x}{4},\ x \in (0, \pi).$

11

Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientmi

11.1 Základné pojmy

Diferenciálna rovnica tvaru

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x),$$

kde $p_1,\ p_2 \in R$ a q je spojitá funkcia na $(a,\, b)$, sa nazýva **lineárna diferenciálna rovnica** (ozn. LDR) **druhého rádu s konštantnými koeficientmi**.

Ak $q(x) = 0,\ \forall x \in (a,\, b)$ rovnica sa nazýva **homogénna** (bez pravej stany), v opačnom prípade **nehomogénna** (s pravou stranou).

Riešením LDR druhého rádu na intervale $J \subset (a,\, b)$, nazývame takú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá je na intervale J definovaná, má na J prvú a druhú deriváciu a vyhovuje danej rovnici.
Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice druhého rádu je množina všetkých riešení danej diferenciálnej rovnice, ktoré vo svojom vyjadrení obsahujú aj dve konštanty $c_1,\ c_2 \in R$.
Partikulárne riešenie LDR druhého rádu vznikne zo všeobecného riešenia nejakou konkrétnou voľbou konštánt $c_1,\ c_2$.
Úloha nájsť partikulárne riešenie LDR druhého rádu, ktoré vyhovuje podmienke $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ x_0 \in (a,\, b)$ a $y_0,\ y_1$ sú dané reálne čísla, sa nazýva **Cauchyho začiatočná úloha**. Podmienky $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$ sa nazývajú **Cauchyho začiatočné podmienky**.

Poznámka: Existuje práve jedno riešenie LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi, ktoré spĺňa začiatočné podmienky $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ x_0 \in (a,\, b)$.

Príklad 1. Ukážme, že funkcia $y = 2\cos 3x,\ x \in R$ je riešením diferenciálnej rovnice $y'' - y' + 9y = 6\sin 3x$.

Riešenie: Funkcia $y = 2\cos 3x$ je definovaná na množine R. Jej derivácie

$$y' = -6\sin 3x, \qquad y'' = -18\cos 3x$$

sú tiež definované na R. Dosaďme do rovnice. Pre každé x je ľavá strana

$$L = -18\cos 3x - (-6\sin 3x) + 9\,.\,(2\cos 3x) = 6\sin 3x,$$

pravá strana

$$P = 6 \sin 3x,$$

teda $L = P$, z čoho vyplýva, že funkcia $y = 2 \cos 3x$ je riešením danej diferenciálnej rovnice na intervale $(-\infty, \infty)$.

<u>Princíp riešenia nehomogénnej LDR druhého rádu</u>

1. Nájdeme všobecné riešenie y_h homogénnej LDR, t. j. rovnice $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$.
2. Nájdeme jedno riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej LDR.
3. Všeobecné riešenie nehomogénnej LDR je

$$y_v = y_h + \widetilde{y}.$$

11.2 Homogénna LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi

Dve riešenia $y_1,\ y_2$ homogénnej LDR $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ sú **lineárne nezávislé** na R, ak žiadne z nich nie je násobkom druhého.
Nech funkcie $y_1,\ y_2$ sú definované na intervale $(a,\, b)$ a majú tam derivácie $y_1',\ y_2'$. Determinant $\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ nazývame Wronského determinant funkcií $y_1,\ y_2$ (wronskián) a označujeme

$$W(y_1,\, y_2) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Riešenia $y_1,\ y_2$ homogénnej LDR sú lineárne nezávislé na intervale $(a,\, b)$ práve vtedy, ak $W(y_1,\, y_2) \neq 0\ \forall x \in (a,\, b)$.
Systém dvoch lineárne nezávislých riešení homogénnej LDR sa nazýva **fundamentálny systém riešení** tejto rovnice.
Ak $y_1,\ y_2$ tvoria fundamentálny systém riešení homogénnej LDR $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$, tak jej všeobecné riešenie má tvar

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad c_1,\ c_2 \in R.$$

<u>Riešenie homogénnej LDR druhého rádu s konštantnými koficientmi</u>
Diferenciálnej rovnici

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \qquad \text{priradíme kvadratickú rovnicu} \qquad r^2 + p_1 r + p_2 = 0.$$

Kvadratická rovnica

$$r^2 + p_1 r + p_2 = 0$$

sa nazýva **charakteristická rovnica** prislúchajúca diferenciálnej rovnici

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0.$$

Keďže charakteristická rovnica je kvadratická, tak môžu nastať tieto prípady:

1. Charakteristická rovnica má dva rôzne reálne korene $r_1,\ r_2$. Potom

$$\begin{array}{lcl} r_1 & \mapsto & y_1 = e^{r_1 x} \\ r_2 & \mapsto & y_2 = e^{r_2 x}. \end{array}$$

2. Charakteristická rovnica má dvojnásobný reálny koreň $r_1 = r_2 = r$. Potom

$$\begin{array}{lcl} r & \mapsto & y_1 = e^{rx} \\ & & y_2 = xe^{rx}. \end{array}$$

3. Charakteristická rovnica má komplexne združené korene $r_1 = a + bi,\ r_2 = a - bi$, Potom stačí zobrať iba koreň

$$\begin{array}{lcl} r_1 = a + ib & \mapsto & y_1 = e^{ax} \cos bx \\ & & y_2 = e^{ax} \sin bx. \end{array}$$

Vo všetkých troch prípadoch funkcie $y_1,\ y_2$ tvoria fundamentálny systém riešení homogénnej LDR.

$\boxed{\textbf{Príklad 2.}}$ Nájdime všeobecné riešenie LDR

a) $y'' + 2y' - y = 0$, **b**) $y'' + 2y' = 0$, **c**) $y'' - 4y = 0$,
d) $y'' + 6y' + 9y = 0$, **e**) $y'' + 4y' + 5y = 0$, **f**) $y'' + 4y = 0$.

Riešenie: Najskôr diferenciálnej rovnici priradíme charakteristickú rovnicu, nájdeme jej korene a potom podľa typu koreňov nájdeme fundamentálny systém riešení.

a) Koeficienty rovnice $y'' + 2y' - y = 0$ sú $p_1 = 2,\ p_2 = -1$, teda chakteristická rovnica je

$$r^2 + 2r - 1 = 0.$$

Jej diskriminant

$$D = 2^2 - 4\,.\,(-1) = 8 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Charakteristická rovnica má dva rôzne reálne korene, takže

$$\begin{array}{lcl} r_1 = -1 + \sqrt{2} & \mapsto & y_1 = e^{(-1+\sqrt{2})x} \\ r_2 = -1 - \sqrt{2} & \mapsto & y_2 = e^{(-1-\sqrt{2})x}. \end{array}$$

Funkcie y_1 a y_2 tvoria fundamentálny systém riešení a všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice je

$$y_h = c_1 e^{(-1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{2})x}, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

b) Koeficienty rovnice $y'' + 2y' = 0$ sú $p_1 = 2,\ p_2 = 0$ a charakteristická rovnica je

$$r^2 + 2r = 0.$$

Vyriešme ju.

$$r^2 + 2r = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r(r+2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r_1 = 0 \quad \vee \quad r_2 = -2.$$

Potom

$$\begin{array}{lll} r_1 = 0 & \mapsto & y_1 = e^{0\,.\,x} = 1 \\ r_2 = -2 & \mapsto & y_2 = e^{-2x}, \end{array}$$

a všeobecné riešenie

$$y_h = c_1\,.\,1 + c_2 e^{-2x} = c_1 + c_2 e^{-2x}, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

c) Rovnica $y'' - 4y = 0$ má koeficienty $p_1 = 0,\ p_2 = -4$ a charakteristická rovnica je

$$r^2 - 4 = 0.$$

Vyriešme ju.

$$r^2 - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (r-2)(r+2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r_1 = 2 \quad \vee \quad r_2 = -2.$$

Potom

$$\begin{array}{lll} r_1 = 2 & \mapsto & y_1 = e^{2x} \\ r_2 = -2 & \mapsto & y_2 = e^{-2x} \end{array}$$

a všeobecné riešenie

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

d) Koeficienty rovnice $y'' + 6y' + 9y = 0$ sú $p_1 = 6,\ p_2 = 9$, teda charakteristicá rovnica má tvar

$$r^2 + 6r + 9 = 0.$$

Nájdime jej korene.

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (r+3)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = -3.$$

Charakteristické rovnica má jeden dvojnásobný koreň, teda

$$\begin{array}{lll} r = -3 & \mapsto & y_1 = e^{-3x} \\ & & y_2 = xe^{-3x} \end{array}$$

a všeobecné riešenie

$$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

e) Rovnica $y'' + 4y' + 5y = 0$ má koeficienty $p_1 = 4,\ p_2 = 5$ a charakteristická rovnica má tvar

$$r^2 + 4r + 5 = 0.$$

Nájdime korene kvadratickej rovnice.

$$D = 16 - 20 = -4 < 0,$$

čiže rovnica má dva komplexne združené korene

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{|-4|}}{2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i,$$

teda

$$r_1 = -2 + i \qquad \text{a} \qquad r_2 = -2 - i.$$

Koreň r_2 nebudeme uvažovať, dve lineárne nezávislé riešenia dostaneme pomocou koreňa r_1, a to

$$r_1 = -2 + 1\,.\,i \quad \mapsto \quad \begin{aligned} y_1 &= e^{-2x}\cos x \\ y_2 &= e^{-2x}\sin x. \end{aligned}$$

Potom všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 e^{-2x}\cos x + c_2 e^{-2x}\sin x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

f) Koeficienty rovnice $y'' + 4y = 0$ sú $p_1 = 0,\ p_2 = 4$, teda charakteristická rovnica je

$$r^2 + 4 = 0.$$

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad r_{1,2} = \pm 2i.$$

Opäť charakteristická rovnica má komplexne združené korene, a to

$$r_1 = 2i \qquad \text{a} \qquad r_2 = -2i.$$

Druhý koreň neuvažujeme a je potrebné si uvedomiť, že $r_1 = 2i = 0 + 2i$, a preto

$$r_1 = 2i \quad \mapsto \quad \begin{aligned} y_1 &= e^{0\,.\,x}\cos 2x = \cos 2x \\ y_2 &= e^{0\,.\,x}\sin 2x = \sin 2x. \end{aligned}$$

Potom všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 3.}}$ Nájdime najskôr všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - y' - 6y = 0$ a potom partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Riešenie: Charakteristická rovnica prislúchajúca danej diferenciálnej rovnici je

$$r^2 - r - 6 = 0.$$

Vyriešme ju.

$$r^2 - r - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r-3)(r+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = 3 \ \vee \ r_2 = -2.$$

Určíme fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice.

$$\begin{array}{lcl} r_1 = 3 & \mapsto & y_1 = e^{3x} \\ r_2 = -2 & \mapsto & y_2 = e^{-2x} \end{array}$$

a všeobecné riešenie je

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Aby sme využili začiatočné podmienky a určili partikulárne riešenie, potrebujeme vypočítať deriváciu všeobecného riešenia, teda

$$y_h' = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x}.$$

Ak

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = c_1 e^{3\,.\,0} + c_2 e^{-2\,.\,0} \quad \Rightarrow \quad 1 = c_1 + c_2$$

a ak

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3c_1 e^{3\,.\,0} - 2c_2 e^{-2\,.\,0} \quad \Rightarrow \quad 0 = 3c_1 - 2c_2.$$

Dostali sme systém dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorý má vždy jediné riešenie. Vyriešme ho.

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 &=& 1 \\ 3c_1 - 2c_2 &=& 0 \end{array}$$

Vynásobme prvú rovnicu dvomi a sčítajme ich. Potom

$$5c_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{2}{5}.$$

Ak za c_1 dosadíme vypočítanú hodnotu napr. do prvej rovnice, dostaneme

$$\frac{2}{5} + c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{3}{5}.$$

Potom hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{-2x}, \qquad x \in R.$$

Príklad 4. Nájdime najskôr všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 2y' + y = 0$ a potom partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku, $y(1) = 0,\ y'(1) = 2e$.

Riešenie: Prislúchajúca charakteristická rovnica je

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Vyriešme ju.

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1.$$

Charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň. Potom fundamentálny systém riešení je

$$r = 1 \quad \mapsto \quad \begin{array}{l} y_1 = e^x \\ y_2 = xe^x \end{array}$$

a všeobecné riešenie

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Nájdime partikulárne riešenie, najskôr vypočítajme deriváciu všeobecného riešenia.

$$y_h' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x,$$

potom

$$\begin{aligned} y(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = c_1\, e + c_2\, e \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 + c_2, \\ y'(1) = 2e \quad &\Rightarrow \quad 2e = c_1\, e + c_2\, e + c_2\, e \quad \Rightarrow \quad 2 = c_1 + 2c_2. \end{aligned}$$

Dostali sme systém dvoch rovníc o dvoch neznámych. Ak od druhej rovnice odčítame prvú, dostaneme

$$c_2 = 2 \quad \text{a po dosadení do prvej rovnice} \quad 0 = c_1 + 2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2.$$

Hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = -2e^x + 2xe^x, \qquad x \in R.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 5.}}$ Nájdime najskôr všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 2y' + 2y = 0$ a potom partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Riešenie: Charakteristická rovnica je

$$r^2 + 2r + 2 = 0.$$

Jej diskriminant

$$D = 4 - 8 = -4,$$

teda riešením sú dva komplexne združené korene

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{|-4|}}{2} = \frac{-2 \pm i2}{2} = -1 \pm i.$$

Aby sme našli fundamentálny systém riešení, stačí zobrať riešenie $r_1 = -1 + i$. Teda

$$r = -1 + i \quad \mapsto \quad \begin{array}{l} y_1 = e^{-x} \cos x \\ y_2 = e^{-x} \sin x \end{array}$$

a všeobecné riešenie

$$y_h = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Vypočítajme deriváciu všeobecného riešenia

$$y_h' = -c_1 e^{-x}\cos x - c_1 e^{-x}\sin x - c_2 e^{-x}\sin x + c_2 e^{-x}\cos x.$$

Využijeme začiatočné podmienky a vypočítame konštanty c_1 a c_2.

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \sin 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1,$$

$$y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = -c_1 e^0 \cos 0 - c_1 e^0 \sin 0 - c_2 e^0 \sin 0 + c_2 e^0 \cos 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = -c_1 + c_2.$$

Pretože

$$c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1$$

a hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = e^{-x}\sin x, \qquad x \in R.$$

11.3 Nehomogénna LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi – špeciálna pravá strana

Homogénnu LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi už vieme riešiť. K tomu, aby sme našli všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice, potrebujeme ešte nájsť jedno konkrétne riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej rovnice. Niekedy sa toto riešenie dá odhadnúť, a to v prípade, ak pravá strana rovnice má tvar

$$q(x) = e^{\alpha x} P(x) \tag{1}$$

alebo

$$q(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right), \tag{2}$$

kde α, β sú reálne čísla, P a Q sú polynómy. Funkcia typu (1) alebo (2) sa nazýva **špeciálna pravá strana LDR s konštantnými koeficientmi**.

Príklad 6. Zistime, či funkcia q je špeciálna pravá strana typu (1). Určíme číslo α a polynóm P.

a) $q(x) = 4$, **b**) $q(x) = x^2 + 5x$, **c**) $q(x) = 5e^{3x}$,

d) $q(x) = (x+1)e^{-2x}$, **e**) $q(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$, **f**) $q(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$.

Riešenie: Pokúsime sa vyjadriť funkciu q v tvare $q(x) = e^{\alpha x}P(x)$. Je potrebné si uvedomiť, že

$$e^{0\,.\,x} = e^0 = 1.$$

Tento tvar jednotky budeme často využívať.

a)

$$q(x) = 4 = e^{0\,.\,x}\,.\,4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \qquad \text{a} \qquad P(x) = 4.$$

Daná funkcia je špeciálna pravá strana.

b)

$$q(x) = x^2 + 5x = e^{0\,.\,x}(x^2 + 5x) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \qquad P(x) = x^2 + 5x.$$

Funkcia je špeciálna praná strana.

c)

$$q(x) = 5e^{3x} = e^{3x}\,.\,5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3, \qquad P(x) = 5,$$

funkcia je špeciálna pravá strana.

d)

$$q(x) = (x+1)e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2, \qquad P(x) = x + 1.$$

Funkcia q je špeciálna pravá strana.

e)

$$q(x) = \frac{x-2}{e^x} = (x-2)e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1, \qquad P(x) = x - 2,$$

teda q je špeciálna pravá strana.

f)

$$q(x) = \frac{e^{2x}}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2, \qquad \text{ale} \qquad \frac{1}{x^2+1} \quad \text{nie je polynóm,}$$

teda funkcia q nie je špeciálna pravá strana.

Príklad 7. Zistime, či funkcia q je špeciálna pravá strana typu (2). Určime čísla α, β a polynómy P, Q.

a) $q(x) = 2\cos 3x - \sin 3x$, **b)** $q(x) = (x^2+1)\cos 2x$, **c)** $q(x) = \dfrac{\sin x}{e^{2x}}$,

d) $q(x) = e^x\left((x+1)\cos x + \sin x\right)$, **e)** $q(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sin 3x}$.

Riešenie: Pokúsme sa vyjadriť, funkciu q v tvare $q(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$.

a)

$$q(x) = 2\cos 3x - \sin 3x = e^{0\,.\,x}\left(2\cos 3x + (-1)\,.\,\sin 3x\right),$$

teda

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 3, \qquad P(x) = 2, \qquad Q(x) = -1.$$

Funkcia q je špeciálna pravá strana.

b)

$$q(x) = (x^2+1)\cos 2x = e^{0\,.\,x}\left((x^2+1)\cos 2x + 0\,.\,\sin 2x\right),$$

a preto

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 2, \qquad P(x) = x^2 + 1, \qquad Q(x) = 0,$$

čiže funkcia q je špeciálna pravá strana.

c)

$$q(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}} = e^{-2x} \sin x = e^{-2x} \left(0 \,.\, \cos x + 1 \,.\, \sin x\right),$$

čiže

$$\alpha = -2, \qquad \beta = 1, \qquad P(x) = 0, \qquad Q(x) = 1.$$

Funkcia q je špeciálna pravá strana.

d)

$$q(x) = e^x \left((x+1)\cos x + \sin x\right) = e^x \left((x+1)\cos x + 1 \,.\, \sin x\right)$$

a

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad P = x + 1, \qquad Q(x) = 1.$$

Funkcia q je špeciálna pravá strana.

e) Funkcia

$$q(x) = \frac{e^{2x}}{\sin 3x}$$

nie je špeciálna pravá strana, lebo sa nedá zapísať v tvare (2).

Pre odhad riešenia $\widetilde{y}$ platí:

1. Ak pravá strana nehomogénnej LDR má tvar

   $$q(x) = e^{\alpha x} P(x),$$

   kde $\alpha \in R$ a P je polynóm, tak riešenie $\widetilde{y}$ má tvar

   $$\widetilde{y} = x^k e^{\alpha x} P^*(x).$$

   Číslo k udáva koľkonásobným koreňom príslušnej charakteristickej rovnice je číslo α a P^* je neznámy polynóm toho istého stupňa ako polynóm P.

   Keďže charakteristická rovnica je druhého stupňa, tak $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$, a to, ak
   α nie je koreň, tak $k = 0$,
   α je jednoduchý koreň, tak $k = 1$,
   α je dvojnásobný koreň, tak $k = 2$.
   Pri určovaní neznámeho polynómu P^* postupujeme nasledovne. Ak polynóm
   $P(x)$ je konštanta, tak $P^*(x) = A$,
   $P(x)$ je prvého stupňa, tak $P^*(x) = Ax + B$,
   $P(x)$ je druhého stupňa, tak $P^*(x) = Ax^2 + Bx + C$,
   … atď.

2. Ak pravá strana nehomogénnej LDR má tvar

   $$q(x) = e^{\alpha x} \left(P(x)\cos \beta x + Q(x) \sin \beta x\right),$$

   kde $\alpha,\ \beta \in R$ a $P,\ Q$ sú polynómy, tak riešenie $\widetilde{y}$ má tvar

   $$\widetilde{y} = x^k e^{\alpha x} \left(P^*(x)\cos \beta x + Q^*(x) \sin \beta x\right).$$

Číslo k udáva koľkonásobným koreňom príslušnej charakteristickej rovnice je komplexné číslo $\alpha + \beta i$ a P^*, Q^* sú neznáme polynómy rovnakého stupňa, ktorý sa rovná vyššiemu zo stupňa polynómov P a Q.

V tomto prípade môže byť $k \in \{0,\ 1\}$, pretože kvadratická rovnica, ak má riešenie v množine komplexných čísel, tak sú to dva navzájom komplexne združené korene. Teda, ak
$\alpha + \beta i$ nie je koreň, tak $k = 0$,
$\alpha + \beta i$ je koreň, tak $k = 1$.
Pri určovaní neznámych polynómov postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade, teda, ak napríklad jeden polynóm je konštanta a druhý polynóm prvého stupňa, tak $P^*(x) = Ax + B$ a $Q^*(x) = Cx + D$.

Pri určovaní koeficientov neznámych polynómov použijeme metódu neurčitých koeficientov (vysvetlenie v príkladoch) a využijeme fakt, že funkcia $\widetilde{y}$ má byť riešením diferenciálnej rovnice.

Príklad 8. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 3y' - 4y = q(x)$, ak
a) $q(x) = 2$, **b**) $q(x) = 3e^{4x}$, **c**) $q(x) = e^{-x}(2x+1)$,
d) $q(x) = e^{-4x}$, **e**) $q(x) = 10xe^{x}$, **f**) $q(x) = \cos x$.

Riešenie: Najskôr nájdeme všeobecné riešenie homogénnej LDR

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Prislúchajúca charakteristická rovnica je

$$r^2 + 3r - 4 = 0.$$

Nájdime jej riešenie, fundamentálny systém riešení a všeobecné riešenie.

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r+4)(r-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = -4 \ \vee \ r_2 = 1.$$

$$\left.\begin{array}{lll} r_1 = -4 & \mapsto & y_1 = e^{-4x} \\ r_2 = 1 & \mapsto & y_2 = e^{x} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y_h = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}.$$

Aby sme našli všeobecné riešenie nehomogénnej LDR, stačí nájsť ešte jedno riešenie $\widetilde{y}$ LDR s pravou stranou. Všetky funkcie q sú špeciálne pravé strany typu (1), až na poslednú, ktorá je typu (2).

a) Funkcia $q(x) = 2 = 2e^{0\cdot x}$, teda

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0 & \Rightarrow & k = 0, \quad \text{lebo 0 nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 2 & \Rightarrow & P^*(x) = A \in R. \end{array}$$

Potom

$$\widetilde{y} = x^k e^{\alpha x} P^*(x) = x^0 e^{0\cdot x} A = A.$$

Funkcia $\widetilde{y}$ má byť riešením diferenciálnej rovnice, teda musí platiť

$$\widetilde{y}'' + 3\widetilde{y}' - 4\widetilde{y} = 2.$$

Vypočítajme prvú a druhú deriváciu a dosaďme.

$$\widetilde{y}' = 0, \quad \widetilde{y}'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 3\,.\,0 - 4A = 2 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{1}{2}.$$

Potom riešenie

$$\widetilde{y} = -\frac{1}{2}$$

a všeobecné riešenie nehomogénnej LDR je

$$y_v = y_h + \widetilde{y} = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{2}, \quad c_1,\ c_2 \in R, \quad x \in R.$$

b) Funkcia $q(x) = 3\,e^{4x}$ je špeciálna pravá strana,

$$\begin{array}{lcl} \alpha = 4 & \Rightarrow & k = 0, \quad \text{lebo 4 nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 3 & \Rightarrow & P^*(x) = A \in R \end{array}$$

a

$$\widetilde{y} = x^0 e^{4x} A = Ae^{4x}.$$

Potom

$$\widetilde{y}' = 4Ae^{4x}, \qquad \widetilde{y}'' = 16Ae^{4x}$$

a po dosadení do rovnice s pravou stranou dostaneme

$$16Ae^{4x} + 3\,.\,4Ae^{4x} - 4Ae^{4x} = 3e^{4x}.$$

Vyriešme túto rovnicu

$$\begin{aligned} 16Ae^{4x} + 12Ae^{4x} - 4Ae^{4x} &= 3e^{4x} \\ 24Ae^{4x} &= 3e^{4x} \\ 24A &= 3 \\ A &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Teda

$$\widetilde{y} = \frac{1}{8}\,e^{4x}$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{8}\,e^{4x}, \quad c_1,\ c_2 \in R, \quad x \in R.$$

c) Pravá strana $q(x) = e^{-x}(2x+1)$, čiže

$$\begin{array}{lcl} \alpha = -1 & \Rightarrow & k = 0, \quad \text{lebo } -1 \text{ nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 2x + 1 & \Rightarrow & P^*(x) = Ax + B. \end{array}$$

Potom

$$\widetilde{y} = x^0 e^{-x}(Ax + B) = e^{-x}(Ax + B).$$

Nájdeme neznáme koefickienty $A,\ B$ dosadením funkcie $\widetilde{y}$ do rovnice s pravou stranou. Teda

$$\widetilde{y}' = -e^{-x}(Ax+B) + e^{-x}A = e^{-x}(-Ax+A-B),$$
$$\widetilde{y}'' = -e^{-x}(-Ax+A-B) + e^{-x}(-A) = e^{-x}(Ax-2A+B)$$

a

$$e^{-x}(Ax-2A+B) + 3e^{-x}(-Ax+A-B) - 4e^{-x}(Ax+B) = e^{-x}(2x+1).$$

Najskôr upravme ľavú stranu rovnice a potom rovnicu vyriešme.

$$\begin{aligned} e^{-x}(Ax-2A+B-3Ax+3A-3B-4Ax-4B) &= e^{-x}(2x+1) \\ -6Ax+A-6B &= 2x+1. \end{aligned}$$

Pretože dva polynómy sa sebe rovnajú, ak sa rovnajú koeficienty pri rovnakých mocninách, porovnajme tieto koeficienty.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pri } x: & -6A = 2 \\ \text{absolútny člen}: & A-6B = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{3} \ \Rightarrow \ -\frac{1}{3} - 6B = 1 \ \Rightarrow \ B = -\frac{2}{9}.$$

Takže

$$\widetilde{y} = e^{-x}\left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right)$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1e^{-4x} + c_2e^{x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right), \quad c_1,\ c_2 \in R, \quad x \in R.$$

d) Funkcia $q(x) = e^{-4x} = 1\,.\,e^{-4x}$, čiže

$$\begin{array}{lll} \alpha = -4 & \Rightarrow & k = 1, \quad \text{lebo } -4 \text{ je jednoduchý koreň charakteristickej rovnice}, \\ P(x) = 1 & \Rightarrow & P^*(x) = A \in R \end{array}$$

a

$$\widetilde{y} = x^1e^{-4x}\,.\,A = Axe^{-4x}.$$

Vypočítajme derivácie

$$\widetilde{y}' = Ae^{-4x} - 4Axe^{-4x} = e^{-4x}(-4Ax+A),$$

$$\widetilde{y}'' = -4e^{-4x}(-4Ax+A) + e^{-4x}(-4A) = e^{-4x}(16Ax-8A)$$

a dosaďme do rovnice s pravou stranou

$$e^{-4x}(16Ax-8A) + 3e^{-4x}(-4Ax+A) - 4Axe^{-4x} = e^{-4x}.$$

Najskôr upravíme ľavú stranu rovnice a zjednodušíme ju.

$$\begin{aligned} e^{-4x}(16Ax-8A-12Ax+3A-4Ax) &= e^{-4x} \\ -5A &= 1 \\ A &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Dostali sme
$$\widetilde{y} = -\frac{1}{5}xe^{-4x},$$
a preto
$$y_v = c_1e^{-4x} + c_2e^x - \frac{1}{5}xe^{-4x}, \quad c_1,\ c_2 \in R, \quad x \in R.$$

e) Pravá strana $q(x) = 10xe^x$, teda

$$\begin{array}{lcl} \alpha = 1 & \Rightarrow & k = 1, \quad \text{lebo 1 je jednoduchý koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 10x & \Rightarrow & P^*(x) = Ax + B \end{array}$$

a
$$\widetilde{y} = x^1e^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx).$$
Derivácie sú
$$\widetilde{y}\,' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B) = e^x\left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right),$$
$$\widetilde{y}\,'' = e^x\left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right) + e^x\left(2Ax + 2A + B\right) = e^x\left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right).$$
Dosaďme do rovnice s pravou stranou
$$e^x\left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right) + 3e^x\left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right) - 4e^x(Ax^2 + Bx) = 10xe^x.$$
Najskôr upravme ľavú stranu a potom ju zjednodušme.
$$\begin{aligned} e^x\left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B + 3Ax^2 + (6A + 3B)x + 3B - 4Ax^2 - 4Bx\right) &= 10xe^x \\ 10Ax + 2A + 5B &= 10x \end{aligned}$$

Porovnajme koeficienty pri rovnakých mocninách

$$\left.\begin{array}{lr} \text{pri } x: & 10A = 10 \\ \text{absolútny člen}: & 2A + 5B = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\,.\,1 + 5B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{2}{5}.$$

Potom
$$\widetilde{y} = e^x\left(x^2 - \frac{2}{5}x\right)$$
a
$$y_v = c_1e^{-4x} + c_2e^x + e^x\left(x^2 - \frac{2}{5}x\right), \quad c_1,\ c_2 \in R, \quad x \in R.$$

f) Funkcia $q(x) = \cos x = e^{0\,.\,x}\,(1\,.\,\cos x + 0\,.\,\sin x)$, čiže máme špeciálnu pravú stranu typu (2) a

$$\begin{array}{lcl} \alpha = 0,\ \beta = 1 \ \Rightarrow\ \alpha + i\beta = i & \Rightarrow & k = 0, \quad \text{lebo } i \text{ nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 1,\ Q(x) = 0 & \Rightarrow & P^*(x) = A,\ Q^*(x) = B, \quad A,\ B \in R, \\ & & \text{lebo } P(x) \text{ a } Q(x) \text{ sú konštanty.} \end{array}$$

Potom
$$\widetilde{y} = x^0e^{0\,.\,x}\,(A\cos x + B\sin x) = A\cos x + B\sin x.$$

Vypočítajme derivácie a dosaďme do nehomogénnej rovnice.

$$\widetilde{y}' = -A\sin x + B\cos x, \qquad \widetilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x$$

a

$$-A\cos x - B\sin x + 3(-A\sin x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\sin x) = \cos x$$

Upravme ľavú stranu rovnice tak, že dáme spolu koeficienty pri funkcii $\cos x$ a pri funkcii $\sin x$.

$$\begin{aligned} -A\cos x - B\sin x - 3A\sin x + 3B\cos x - 4A\cos x - 4B\sin x &= \cos x \\ (-5A+3B)\cos x + (-3A-5B)\sin x &= \cos x. \end{aligned}$$

Ak porovnáme koeficienty pri funkcii $\cos x$ a pri funkcii $\sin x$, dostaneme

$$\begin{array}{ll} \text{pri } \cos x: & -5A+3B=1 \\ \text{pri } \sin x: & -3A-5B=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{array}{r} -25A+15B=5 \\ -9A-15B=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow -34\,A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{34}.$$

Po dosadení do prvej rovnice dostaneme

$$-5\left(-\frac{5}{34}\right) + 3B = 1 \quad\Rightarrow\quad 3B = 1 - \frac{25}{34} \quad\Rightarrow\quad 3B = \frac{9}{34} \quad\Rightarrow\quad B = \frac{3}{34}.$$

Hľadané riešenie

$$\widetilde{y} = -\frac{5}{34}\cos x + \frac{3}{34}\sin x$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x - \frac{5}{34}\cos x + \frac{3}{34}\sin x, \quad c_1,\ c_2 \in R, \quad x \in R.$$

Príklad 9. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 2y' + y = q(x)$, ak
a) $q(x) = x^2 + 3x$, **b**) $q(x) = e^{-x}$, **c**) $q(x) = e^x$,
d) $e^x(x+4)$, **e**) $q(x) = 2x\cos x$, **f**) $q(x) = e^{2x}\sin x$.

Riešenie: Najskôr nájdeme všeobecné riešenie homogénnej LDR, teda rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Jej charakteristická rovnica je

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

ktorá má dvojnásobný koreň $r = 1$. Potom fundamentálny systém riešení je

$$r = 1 \quad\mapsto\quad \begin{array}{l} y_1 = e^x \\ y_2 = xe^x \end{array}$$

a všeobecné riešenie

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Nájdeme jedno riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej LDR so špeciálnou pravou stranou, teda rovnice $y'' - 2y' + y = q(x)$, pričom postupne budeme pravú stranu meniť.

a) $q(x) = x^2 + 3x = e^{0\,\cdot\,x}(x^2 + 3x)$ je špeciálna pravá strana typu (1), teda

$$\begin{array}{lcl} \alpha = 0 & \Rightarrow & k = 0, \quad \text{lebo 0 nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = x^2 + 3x & \Rightarrow & P^*(x) = Ax^2 + Bx + C \end{array}$$

a

$$\widetilde{y} = x^0 e^{0\,\cdot\,x}(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C.$$

Aby sme mohli dosadiť do rovnice a nájsť konštanty, najskôr riešenie zderivujeme

$$\widetilde{y}\,' = 2Ax + B, \qquad \widetilde{y}\,'' = 2A.$$

Potom

$$2A - 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 3x.$$

Teda

$$Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B + C = x^2 + 3x$$

Porovnajme koeficienty pri rovnakých mocninách. Dostaneme

$$\left.\begin{array}{lr} \text{pri } x^2: & A = 1 \\ \text{pri } x: & -4A + B = 3 \\ \text{absolútny člen}: & 2A - 2B + C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl} A = 1 & \\ -4 + B = 3 & \Rightarrow\; B = 7 \\ 2 - 14 + C = 0 & \Rightarrow\; C = 12 \end{array}$$

Riešenie

$$\widetilde{y} = x^2 + 7x + 12$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 7x + 12, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

b) Funkcia $q(x) = e^{-x} = 1\,.\,e^{-x}$ je špeciálna pravá strana typu (1) a

$$\begin{array}{lcl} \alpha = -1 & \Rightarrow & k = 0, \quad \text{lebo } -1 \text{ nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 1 & \Rightarrow & P^*(x) = A. \end{array}$$

Navrhneme riešenie

$$\widetilde{y} = x^0 e^{-x} A = Ae^{-x}$$

a vypočítame derivácie

$$\widetilde{y}\,' = -Ae^{-x}, \qquad \widetilde{y}\,'' = Ae^{-x}.$$

Dosadíme do rovnice s pravou stranou

$$Ae^{-x} - 2(-Ae^{-x}) + Ae^{-x} = e^{-x}$$

a získanú rovnicu upravíme a vyriešime.

$$\begin{aligned} e^{-x}(A + 2A + A) &= e^{-x} \\ 4A &= 1 \\ A &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Potom

$$\widetilde{y} = \frac{1}{4}\, e^{-x}$$

a všeobecné riešenie je

$$y_v = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{4}\, e^{-x}, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

c) Hľadáme jedno riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Funkcia $q(x) = e^x = 1 \,.\, e^x$ je špeciálna pravá strana typu (1).

$$\begin{array}{lcl} \alpha = 1 & \Rightarrow & k = 2, \quad \text{lebo 1 je dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 1 & \Rightarrow & P^*(x) = A. \end{array}$$

Potom riešenie

$$\widetilde{y} = x^2 e^x A = A x^2 e^x.$$

Vypočítajme derivácie

$$\widetilde{y}\,' = 2Axe^x + Ax^2e^x = e^x(Ax^2 + 2Ax),$$

$$\widetilde{y}\,'' = e^x(Ax^2 + 2Ax) + e^x(2Ax + 2A) = e^x(Ax^2 + 4Ax + 2A),$$

dosaďme do diferenciálnej rovnice

$$e^x(Ax^2 + 4Ax + 2A) - 2e^x(Ax^2 + 2Ax) + Ax^2e^x = e^x$$

a nájdime neznámu konštantu A.

$$\begin{aligned} e^x(Ax^2 + 4Ax + 2A - 2Ax^2 - 4Ax + Ax^2) &= e^x \\ 2A &= 1 \\ A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Potom

$$\widetilde{y} = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

d) Hľadáme jedno riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^x(x + 4).$$

$q(x) = e^x(x + 4)$ je špeciálna pravá strana typu (1).

$$\begin{array}{lcl} \alpha = 1 & \Rightarrow & k = 2, \quad \text{lebo 1 je dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = x + 4 & \Rightarrow & P^*(x) = Ax + B, \end{array}$$

teda

$$\widetilde{y} = x^2e^x(Ax + B) = e^x(Ax^3 + Bx^2).$$

Zderivujme

$$\widetilde{y}\,' = e^x(Ax^3 + Bx^2) + e^x(3Ax^2 + 2Bx) = e^x(Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx),$$

$$\begin{aligned}\widetilde{y}\,'' &= e^x(Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 2Bx) + e^x(3Ax^2 + 6Ax + 2Bx + 2B) = \\ &= e^x(Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax + 4Bx + 2B),\end{aligned}$$

dosaďme do rovnice

$$e^x(Ax^3+6Ax^2+Bx^2+6Ax+4Bx+2B)-2e^x(Ax^3+3Ax^2+Bx^2+2Bx)+e^x(Ax^3+Bx^2) = \\ = e^x(x+4)$$

a nájdime konštanty $A,\ B$.

$$e^x(Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax + 4Bx + 2B - 2Ax^3 - 6Ax^2 - 2Bx^2 - 4Bx + Ax^3 + Bx^2) = \\ = e^x(x+4) \\ 6Ax + 2B = x + 4$$

Porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách x, teda

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pri } x: & 6A = 1 \\ \text{absolútny člen}: & 2B = 4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = \dfrac{1}{6} \\ B = 2 \end{array}$$

Potom riešenie

$$\widetilde{y} = e^x\left(\frac{1}{6}x^3 + 2x^2\right)$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1e^x + c_2xe^x + e^x\left(\frac{1}{6}x^3 + 2x^2\right), \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

e) Nájdeme jedno riešenie rovnice

$$y'' - 2y' + y = 2x\cos x.$$

Funkcia $q(x) = 2x\cos x = e^{0\cdot x}(2x\cos x + 0\sin x)$ je špeciálna pravá strana typu (2),

$\alpha = 0,\ \beta = 1\ \Rightarrow\ \alpha + i\beta = i \quad \Rightarrow \quad k = 0,$ lebo i nie je koreň charakteristickej rovnice,
$P(x) = 2x,\ Q(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad P^*(x) = Ax + B,\ Q^*(x) = Cx + D,$
lebo $P(x)$ je polynóm prvého stupňa
a $Q(x)$ je iba konštanta.

Potom

$$\widetilde{y} = x^0e^{0\cdot x}((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x) = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$$

a

$$\begin{aligned}\widetilde{y}\,' &= A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x = \\ &= (Cx+A+D)\cos x + (-Ax-B+C)\sin x, \\ \widetilde{y}\,'' &= C\cos x - (Cx+A+D)\sin x + (-A)\sin x + (-Ax-B+C)\cos x = \\ &= (-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x.\end{aligned}$$

Keď dosadíme do diferenciálnej rovnice za funkciu y odhadnuté riešenie a jeho derivácie, dostaneme

$$(-Ax-B+2C)\cos x+(-Cx-2A-D)\sin x-2[(Cx+A+D)\cos x+(-Ax-B+C)\sin x]+$$

$$+(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x = 2x\cos x.$$

Upravme

$$(-2Cx-2A+2C-2D)\cos x + (2Ax-2A+2B-2C)\sin x = 2x\cos x$$

a nájdime neznáme konštanty.

$$\begin{array}{ll} \text{pri } \cos x: & -2Cx-2A+2C-2D = 2x \\ \text{pri } \sin x: & 2Ax-2A+2B-2C = 0 \end{array}\Bigg\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -Cx-A+C-D = x \\ Ax-A+B-C = 0 \end{array}$$

Ak porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách x v prvej rovnici, dostaneme

$$\begin{array}{ll} \text{pri } x: & -C = 1 \ \Rightarrow\ C = -1 \\ \text{absolútny člen}: & -A+C-D = 0 \end{array}$$

v druhej rovnici

$$\begin{array}{ll} \text{pri } x: & A = 0 \\ \text{absolútny člen}: & -A+B-C = 0 \end{array}$$

Po dosadení už vypočítaných hodnôt do druhých rovníc v systémoch dostaneme

$$\begin{array}{l} 0-1-D \quad\;\, = 0 \\ 0+B-(-1) = 0 \end{array}\Bigg\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} D = -1 \\ B = -1 \end{array}$$

a teda

$$\widetilde{y} = -\cos x - (x+1)\sin x.$$

Potom všeobecné riešenie je

$$y_v = c_1e^x + c_2xe^x - \cos x - (x+1)\sin x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

f) Potrebujeme nájsť jedno riešenie $\widetilde{y}$ rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}\sin x.$$

Funkcia $q(x) = e^{2x}\sin x = e^{2x}(0\,.\,\cos x + 1\,.\,\sin x)$ je špeciálna pravá strana typu (2).

$\alpha = 2,\ \beta = 1 \ \Rightarrow\ \alpha + i\beta = 2+i \quad \Rightarrow \quad k = 0,$
lebo $2+i$ nie je koreň charakteristickej rovnice,
$P(x) = 0,\ Q(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad P^*(x) = A,\ Q^*(x) = B,$
lebo $P(x)$ a $Q(x)$ sú konštanty.

Takže

$$\widetilde{y} = x^0 e^{2x}(A\cos x + B\sin x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$$

a derivácie

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}\,' &= 2e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) = \\
&= e^{2x}[(2A+B)\cos x + (-A+2B)\sin x], \\
\widetilde{y}\,'' &= 2e^{2x}[(2A+B)\cos x + (-A+2B)\sin x] + e^{2x}[-(2A+B)\sin x + (-A+2B)\cos x] = \\
&= e^{2x}[(3A+4B)\cos x + (-4A+3B)\sin x].
\end{aligned}$$

Dosaďme do rovnice a upravme

$$\begin{aligned}
e^{2x}[(3A+4B)\cos x + (-4A+3B)\sin x] - \\
-2e^{2x}[(2A+B)\cos x + (-A+2B)\sin x] + e^{2x}(A\cos x + B\sin x) = e^{2x}\sin x
\end{aligned}$$

$$(3A + 4B - 4A - 2B + A)\cos x + (-4A + 3B + 2A - 4B + B)\sin x = \sin x$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = \sin x$$

Porovnáme koeficienty pri sínusoch a kosínusoch.

$$\begin{aligned}
&\text{pri } \cos x: \qquad 2B = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \\
&\text{pri } \sin x: \quad -2A = 1 \;\Rightarrow\; A = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

teda

$$\widetilde{y} = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\cos x + 0\,.\,\sin x\right) = -\frac{1}{2}\,e^{2x}\cos x.$$

Potom všeobecné riešenie je

$$y_v = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2}\,e^{2x}\cos x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

$\boxed{\textbf{Príklad 10.}}$ Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + y = q(x)$ ak

a) $q(x) = 2x^2 - 3$, **b**) $q(x) = e^{-2x}$, **c**) $q(x) = 4xe^x$,
d) $q(x) = 3\sin x$, **e**) $q(x) = 2\cos 2x - \sin 2x$.

Riešenie: Najskôr nájdeme všeobecné riešenie homogénnej LDR, t. j. rovnice

$$y'' + y = 0.$$

Jej charakteristická rovnica je

$$r^2 + 1 = 0,$$

ktorá má komplexne združené korene $r_1 = i$ a $r_2 = -i$. Fundamentálny systém riešení získame pomocou koreňa r_1, a to

$$r = i = 0 + 1\,.\,i \quad \mapsto \quad \begin{aligned} y_1 &= e^{0\,.\,x}\cos x = \cos x \\ y_2 &= e^{0\,.\,x}\sin x = \sin x \end{aligned}$$

a všeobecné riešenie

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Teraz postupne nájdeme jedno riešenie nehomogénnej LDR $\widetilde{y}$.

a) Riešime rovnicu

$$y'' + y = 2x^2 - 3.$$

$q(x) = 2x^2 - 3 = e^{0\,.\,x}(2x^2 - 3)$ je špeciálna pravá strana typu (1),

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0 & \Rightarrow & k = 0, \quad \text{lebo 0 nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 2x^2 - 3 & \Rightarrow & P^*(x) = Ax^2 + Bx + C. \end{array}$$

Potom

$$\widetilde{y} = x^0 e^{0\,.\,x}(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$$

a

$$\widetilde{y}\,' = 2Ax + B, \qquad \widetilde{y}\,'' = 2A.$$

Dosaďme do nehomogénnej diferenciálnej rovnice. Potom

$$2A + Ax^2 + Bx + C = 2x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad Ax^2 + Bx + 2A + C = 2x^2 + 0\,.\,x - 3.$$

Porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách.

$$\begin{array}{lllll} \text{pri } x^2: & A = 2 & & & \\ \text{pri } x: & B = 0 & & & \\ \text{absolútny člen}: & 2A + C = -3 & \Rightarrow \quad 2\,.\,2 + C = -3 & \Rightarrow & C = -7 \end{array}$$

Takže

$$\widetilde{y} = 2x^2 - 7$$

a všeobecné riešenie je

$$y_v = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2x^2 - 7, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

b) Hľadáme riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej LDR

$$y'' + y = e^{-2x}.$$

Funkcia $q(x) = e^{-2x} = e^{-2x}\,.\,1$ je špeciálna pravá strana typu (1) a

$$\begin{array}{lll} \alpha = -2 & \Rightarrow & k = 0, \quad \text{lebo } -2 \text{ nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 1 & \Rightarrow & P^*(x) = A. \end{array}$$

Potom riešenie

$$\widetilde{y} = x^0 e^{-2x}\,.\,A = Ae^{-2x}$$

a derivácie

$$\widetilde{y}\,' = -2Ae^{-2x}, \qquad \widetilde{y}\,'' = 4Ae^{-2x}.$$

Po dosadení do zadanej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 4Ae^{-2x} + Ae^{-2x} &= e^{-2x} \\ 5A &= 1 \\ A &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

teda

$$\widetilde{y} = \frac{1}{5}e^{-2x}$$

a

$$y_v = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{5}e^{-2x}, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

c) Riešime rovnicu

$$y'' + y = 4xe^x.$$

Pravá strana $q(x) = 4xe^x$ je špeciálna pravá strana typu (1),

$$\begin{aligned} &\alpha = 1 && \Rightarrow && k = 0, \quad \text{lebo 1 nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ &P(x) = 4x && \Rightarrow && P^*(x) = Ax + B. \end{aligned}$$

Potom

$$\widetilde{y} = x^0 e^x(Ax + B) = e^x(Ax + B)$$

a derivácie

$$\begin{aligned} \widetilde{y}\,' &= e^x(Ax + B) + e^x \,.\, A = e^x(Ax + A + B), \\ \widetilde{y}\,'' &= e^x(Ax + A + B) + e^x \,.\, A = e^x(Ax + 2A + B). \end{aligned}$$

Využijeme fakt, že $\widetilde{y}$ má byť riešením danej rovnice a nájdeme konštanty. Po dosadení do rovnice a úprave dostaneme

$$\begin{aligned} e^x(Ax + 2A + B) + e^x(Ax + B) &= 4xe^x \\ 2Ax + 2A + 2B &= 4x \end{aligned}$$

Ak porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách, tak

$$\begin{aligned} &\text{pri } x: && 2A = 4 && \Rightarrow && A = 2 \\ &\text{absolútny člen}: && 2A + 2B = 0 && \Rightarrow && 2 \,.\, 2 + 2B = 0 && \Rightarrow && B = -2 \end{aligned}$$

Potom

$$\widetilde{y} = e^x(2x - 2)$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x(2x - 2), \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

d) Máme vyriešiť rovnicu

$$y'' + y = 3 \sin x.$$

Pavá strana $q(x) = 3\sin x = e^{0\,.\,x}(0\,.\,\cos x + 3\sin x)$ je špeciálna pravá stana typu (2),

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0,\ \beta = 1\ \Rightarrow\ \alpha + i\beta = i & \Rightarrow & k = 1, \\ & & \text{lebo } i \text{ je jednoduchý koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 0,\ Q(x) = 1 & \Rightarrow & P^*(x) = A,\ Q^*(x) = B, \\ & & \text{lebo } P(x) \text{ a } Q(x) \text{ sú konštanty.} \end{array}$$

Potom

$$\widetilde{y} = e^{0\,.\,x}x^1(A\cos x + B\sin x) = Ax\cos x + Bx\sin x$$

a derivácie

$$\begin{aligned} \widetilde{y}\,' &= A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x = (Bx + A)\cos x + (-Ax + B)\sin x, \\ \widetilde{y}\,'' &= B\cos x - (Bx + A)\sin x - A\sin x + (-Ax + B)\cos x = \\ &= (-Ax + 2B)\cos x + (-Bx - 2A)\sin x. \end{aligned}$$

Dosaďme do diferenciálnej rovnice, upravme

$$\begin{aligned} (-Ax + 2B)\cos x + (-Bx - 2A)\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x &= 3\sin x \\ 2B\cos x - 2A\sin x &= 3\sin x \end{aligned}$$

a porovnajme koeficienty pri sínusoch a kosínusoch.

$$\begin{array}{lrl} \text{pri } \cos x: & 2B = 0 & \Rightarrow\ B = 0 \\ \text{pri } \sin x: & -2A = 3 & \Rightarrow\ A = -\dfrac{3}{2} \end{array}$$

Teda

$$\widetilde{y} = -\frac{3}{2}x\cos x$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

e) Nakoniec nájdime riešenie $\widetilde{y}$ rovnice

$$y'' + y = 2\cos 2x - \sin 2x.$$

Funkcia $q(x) = 2\cos 2x - \sin 2x = e^{0\,.\,x}(2\cos 2x + (-1)\sin 2x)$ je špeciálna pravá strana typu (2),

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0,\ \beta = 2\ \Rightarrow\ \alpha + i\beta = 2i & \Rightarrow & k = 0, \\ & & \text{lebo } 2i \text{ nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 2,\ Q(x) = -1 & \Rightarrow & P^*(x) = A,\ Q^*(x) = B, \\ & & \text{lebo } P(x) \text{ a } Q(x) \text{ sú konštanty.} \end{array}$$

Potom

$$\widetilde{y} = x^0e^{0\,.\,x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

a derivácie

$$\widetilde{y}\,' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \qquad \widetilde{y}\,'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Dosaďme do rovnice, upravme

$$\begin{aligned} -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x &= 2\cos 2x - \sin 2x \\ -3A\cos 2x - 3B\sin 2x &= 2\cos 2x - \sin 2x \end{aligned}$$

a porovnajme koeficienty pri sínusoch a kosínusoch.

$$\begin{array}{llll} \text{pri } \cos 2x: & -3A = 2 & \Rightarrow & A = -\dfrac{2}{3} \\ \text{pri } \sin 2x: & -3B = -1 & \Rightarrow & B = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

Takže

$$\widetilde{y} = -\frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 2x$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 2x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Príklad 11. Nájdime partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 3y' = 9x^2 + 3x - 4$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Riešenie: Najskôr nájdeme všeobecné riešenie danej rovnice, teda v prvom rade hľadáme všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice, t. j. rovnice

$$y'' + 3y' = 0.$$

Prislúchajúca chrakteristická rovnica je

$$r^2 + 3r = 0.$$

Riešme ju.

$$r^2 + 3r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(r+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \ \vee \ r = -3.$$

Potom fundamentálny systém riešení je

$$\begin{array}{lll} r_1 = 0 & \mapsto & y_1 = e^{0\,\cdot\,x} = 1 \\ r_2 = -3 & \mapsto & y_2 = e^{-3x} \end{array}$$

a všeobecné riešenie homogénnej LDR

$$y_h = c_1 + c_2e^{-3x}.$$

Nájdeme jedno riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej LDR, teda rovnice

$$y'' + 3y' = 2x^2 + 3x - 4,$$

ktorej pravá strana $q(x) = 9x^2 + 3x - 4 = e^{0\,\cdot\,x}(9x^2 + 3x - 4)$ je špeciálna pravá strana typu (1), pričom

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0 & \Rightarrow & k = 1, \ \text{ lebo 0 je jednoduchý koreň charakteristickej rovnice,} \\ P(x) = 9x^2 + +3x - 4 & \Rightarrow & P^*(x) = Ax^2 + Bx + C. \end{array}$$

Takže

$$\widetilde{y} = x^1 e^{0 \cdot x}(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

a derivácie

$$\widetilde{y}\,' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad\qquad \widetilde{y}\,'' = 6Ax + 2B.$$

Aby sme našli neznáme koeficienty $A,\ B,\ C$, dosaďme do nehomogénnej LDR, upravme ju a porovnajme koeficienty pri rovnakých mocninách x.

$$\begin{gathered} 6Ax^2B + 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = 9x^{+}3x - 4 \\ 9Ax^2 + (6A + 6B)x + 2B + 3C = 9x^2 + 3x - 4 \end{gathered}$$

a

$$\begin{array}{lllll} \text{pri } x^2: & 9A = 9 & \Rightarrow & A = 1 & \\ \text{pri } x: & 6A + 6B = 3 & \Rightarrow & 6 + 6B = 3 & \Rightarrow \quad B = -\dfrac{1}{2} \\ \text{absolútny člen}: & 2B + 3C = -4 & \Rightarrow & -1 + 3C = -4 & \Rightarrow \quad C = -1 \end{array}$$

Potom

$$\widetilde{y} = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$$

a všeobecné riešenie danej rovnice je

$$y_v = c_1 + c_2 e^{-3x} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Teraz nájdeme partikulárne riešenie, ktoré spĺňa podmienky $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$. Keďže je daná aj hodnota prvej derivácie, najskôr vyjadríme deriváciu y_v'.

$$y_v' = -3c_2 e^{-3x} + 3x^2 - x - 1$$

$$\left.\begin{array}{lll} y(0) = 1 & \Rightarrow & 1 = c_1 + c_2 e^0 \\ y'(0) = 2 & \Rightarrow & 2 = -3c_2 e^0 - 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = -3c_2 - 1. \end{array}$$

Z druhej rovnice ddostávame $c_2 = -1$ a po dosadení do prvej rovnice $1 = c_1 - 1$ dostaneme $c_1 = 2$. Takže hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = 2 - e^{-3x} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x, \qquad x \in R.$$

Príklad 12. Nájdime partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 4y' + 5y = \cos 2x$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Riešenie: Nájdime najskôr všeobecné riešenie homogénnej LDR

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Jej prislúchajúca charakteristická rovnica je

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Keďže diskriminant $D = 16 - 20 = -4 < 0$, rovnica má komplexne združené korene

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Určíme fundamentálny systém riešení,

$$\begin{aligned} r_1 = 2 + i \quad \mapsto \quad & y_1 = e^{2x} \cos x \\ & y_2 = e^{2x} \sin x \end{aligned}$$

a všeobecné riešenie homogénnej LDR je

$$y_h = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x.$$

Jedno riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej LDR, t. j rovnice

$$y'' - 4y' + 5y = \cos 2x$$

odhadneme. Funkcia $q(x) = \cos 2x = e^{0 \cdot x}(1 \,.\, \cos 2x + 0 \,.\, \sin 2x)$ je špeciálna pravá strana typu (2).

$$\begin{aligned} &\alpha = 0,\ \beta = 2 \ \Rightarrow\ \alpha + i\beta = 2i && \Rightarrow && k = 0, \\ &&&&& \text{lebo } 2i \text{ nie je koreň charakteristickej rovnice,} \\ &P(x) = 1,\ Q(x) = 0 && \Rightarrow && P^*(x) = A,\ Q^*(x) = B, \\ &&&&& \text{lebo } P(x) \text{ a } Q(x) \text{ sú konštanty.} \end{aligned}$$

Potom

$$\widetilde{y} = x^0 e^{0 \cdot x}(A \cos 2x + B \sin 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

a derivácie

$$\widetilde{y}\,' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \qquad \widetilde{y}\,'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Dosaďme do nehomogénnej LDR a upravme.

$$\begin{aligned} -4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + 5(A \cos 2x + B \sin 2x) &= \cos 2x \\ (-4A - 8B + 5A) \cos x + (-4B + 8A + 5B) \sin 2x &= \cos 2x \\ (A - 8B) \cos 2x + (8A + B) \sin 2x &= \cos 2x \end{aligned}$$

Porovnajme koeficienty pri sínusoch a kosínusoch.

$$\begin{aligned} \text{pri } \cos 2x: \quad & A - 8B = 1 \\ \text{pri } \sin 2x: \quad & 8A + B = 0 \end{aligned}$$

Ak druhú rovnicu vynásobíme 8 a sčítame s prvou, dostaneme $65A = 1 \ \Rightarrow\ A = \dfrac{1}{65}$ a po dosadení za A do druhej rovnice dostaneme $B = -\dfrac{8}{65}$. Potom

$$\widetilde{y} = \frac{1}{65} \cos 2x - \frac{8}{65} \sin 2x$$

a všeobecné riešenie

$$y_v = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x + \frac{1}{65}\cos 2x - \frac{8}{65}\sin 2x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Aby sme našli partikulárne riešenie, potrebujeme aj deriváciu všeobecného riešenia.

$$y_v' = 2c_1 e^{2x}\cos x - c_1 e^{2x}\sin x + 2c_2 e^{2x}\sin x + c_2 e^{2x}\cos x - \frac{2}{65}\sin 2x - \frac{16}{65}\cos 2x.$$

Využijme začiatočné podmienky, hneď budeme aj počítať hodnoty jednotlivých výrazov a zapíšeme iba nenulové hodnoty.

$$\begin{array}{llllll} y(0)=0 & \Rightarrow & 0 = c_1 + \dfrac{1}{65} & \Rightarrow & c_1 = -\dfrac{1}{65} & \\ y'(0)=0 & \Rightarrow & 0 = 2c_1 + c_2 - \dfrac{16}{65} & \Rightarrow & 0 = -\dfrac{2}{65} + c_2 - \dfrac{16}{65} & \Rightarrow \quad c_2 = \dfrac{18}{65} \end{array}$$

Hľadané partikulárne riešenie potom je

$$y_p = -\frac{1}{65}e^{2x}\cos x + \frac{18}{65}e^{2x}\sin x + \frac{1}{65}\cos 2x - \frac{8}{65}\sin 2x, \qquad x \in R.$$

11.4 Nehomogénna LDR druhého rádu s konštantnými koeficientmi – metóda variácie konštánt

Ak pravá strana LDR nie je špeciálna pravá strana, tak jedno riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej LDR nájdeme metódou variácie konštánt.

Metóda variácie konštánt

Nech všeobecné riešenie homogénnej LDR $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ je v tvare

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad c_1,\ c_2 \in R.$$

Potom riešenie $\widetilde{y}$ nehomogénnej LDR $y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x)$ má tvar

$$\widetilde{y} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2,$$

kde

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\,dx \qquad \text{a} \qquad c_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\,dx$$

a

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix}, \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0, & y_2 \\ q(x), & y_2' \end{vmatrix}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} y_1, & 0 \\ y_1', & q(x) \end{vmatrix}.$$

Poznámka: Metóda variácie konštánt je univerzálna metóda, môžeme ju použiť, aj keď máme špeciálnu pravú stranu. Je potrebné si však uvedomiť, že pri metóde variácie konštánt, aby sme našli neznáme funkcie musíme integrovať a nie ku každej funkcii vieme nájsť primitívnu funkciu. Derivovať však vieme každú funkciu, a preto, pokiaľ pravá strana rovnice je špeciálna pravá strana, tak riešenie $\widetilde{y}$ je výhodnejšie odhadnúť pomocou tvaru špeciálnej pravej strany.

Príklad 13. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$.

Riešenie: Najskôr nájdeme všobecné riešenie homogénnej LDR, teda rovnice

$$y'' - 4y' + y = 0.$$

Jej charakteristická rovnica

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

má dvojnásobný koreň $r = 2$. Nájdime fundamentálny systém riešení.

$$r = 2 \quad \mapsto \quad \begin{aligned} y_1 &= e^{2x} \\ y_2 &= xe^{2x} \end{aligned}$$

Potom všeobecné riešenie homogénnej LDR je

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Riešenie $\widetilde{y}$ teda hľadáme v tvare

$$\widetilde{y} = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)xe^{2x}.$$

Wronskián

$$W = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x}, & xe^{2x} \\ [e^{2x}]', & [xe^{2x}]' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x}, & xe^{2x} \\ 2e^{2x}, & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x},$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0, & y_2 \\ q(x), & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & xe^{2x} \\ \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}, & [xe^{2x}]' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & xe^{2x} \\ \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}, & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = -\frac{xe^{4x}}{x^2+1},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1, & 0 \\ y_1' & q(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x}, & 0 \\ [e^{2x}]', & \dfrac{e^{2x}}{x^2+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x}, & 0 \\ 2e^{2x}, & \dfrac{e^{2x}}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{4x}}{x^2+1}.$$

Potom

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\,dx = \int \frac{-\dfrac{xe^{4x}}{x^2+1}}{e^{4x}}\,dx = -\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1),$$

$$c_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\,dx = \int \frac{\dfrac{e^{4x}}{x^2+1}}{e^{4x}}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x.$$

Našli sme neznáme funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$, ktoré sú v riešení $\widetilde{y}$, takže

$$\widetilde{y} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)e^{2x} + (\operatorname{arctg} x)xe^{2x} = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + x\operatorname{arctg} x\right).$$

Všeobecné riešenie danej LDR je

$$y_v = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + x\operatorname{arctg} x\right), \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in R.$$

Príklad 14. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Riešenie: Pretože $\sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\,\frac{\pi}{2},\ k \in Z$, funkcia $q(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$ je spojitá na intervaloch $J_k = \left(k\,\frac{\pi}{2},\ (k+1)\frac{\pi}{2}\right),\ k \in Z$. Najskôr riešime rovnicu

$$y'' + 4y = 0.$$

K nej prislúchajúca charakteristická rovnica

$$r^2 + 4 = 0$$

má dva komplexne združené korene $r_{1,2} = \pm 2i$. Potom

$$r_1 = 2i \quad \mapsto \quad \begin{aligned} y_1 &= e^{0\cdot x}\cos 2x = \cos 2x \\ y_2 &= e^{0\cdot x}\sin 2x = \sin 2x \end{aligned}$$

a všeobecné riešenie homogénnej LDR je

$$y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x, \qquad c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in \left(k\frac{\pi}{2},\ (k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in Z$$

Riešenie $\widetilde{y}$, keďže pravá strana nie je špeciálna, hľadáme v tvare

$$\widetilde{y} = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x.$$

Vypočítajme

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x, & \sin 2x \\ -2\sin 2x, & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2(\underbrace{\cos^2 2x + \sin^2 2x}_{1}) = 2,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0, & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\sin 2x}, & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{\sin 2x}{\sin 2x} = -1,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x, & 0 \\ -2\sin 2x, & \dfrac{1}{\sin 2x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x}.$$

Potom

$$c_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\,dx = \int \frac{-1}{2}\,dx = -\frac{x}{2},$$

$$c_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\,dx = \int \frac{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\,dx = \frac{1}{4}\ln|\sin 2x|$$

a

$$\widetilde{y} = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\ln|\sin 2x|\right)\sin 2x.$$

Všeobecné riešenie nehomogénnej LDR je

$$y_v = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\ln|\sin 2x|,$$

$$c_1,\ c_2 \in R, \qquad x \in \left(k\frac{\pi}{2},\ (k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in Z.$$

Keďže hľadáme partikulárne riešenie v bode $x_0 = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tak na tomto intervale je $\sin 2x > 0$, a preto $\ln|\sin 2x| = \ln(\sin 2x)$ pre $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vypočítajme deriváciu všeobecného riešenia, aby sme mohli využiť začiatočné podmienky.

$$y_v' = -2c_1\sin 2x + 2c_2\cos 2x - \frac{\cos 2x}{2} + x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\ln(\sin 2x) + \frac{1}{4}\sin 2x\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}.$$

Skôr ako dosadíme za x a y do všeobecného riešenie a do deriváce, uvedomme si, že

$$\text{ak} x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{tak} \quad \cos 2x_0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{a} \quad \sin 2x_0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Teda

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = -2c_1 + \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

Hľadané partikulárne riešenie je

$$y_p = \sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\ln(\sin 2x), \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

11.5 Cvičenia

1. Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice
   a) $y'' - y' - 6y = 4$, **b)** $y'' + y' = 6x - 1$, **c)** $y'' + y = 5e^{3x}$,
   d) $y'' - 4y = 4e^{2x}$, **e)** $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$.
2. Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice
   a) $y'' + 4y' = \cos x + \sin x$, **b)** $y'' - 4y' + 5y = \sin 2x$, **c)** $y'' + 4y = \cos 2x$.

3. Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice
   a) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, **b)** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
4. Nájdite partikulárne riešenie diferenciálej rovnice, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku
   a) $y'' + y' = 4x + 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3$,
   b) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \cos x},\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.

VÝSLEDKY

1. **a)** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \dfrac{2}{3},\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in R$,
   b) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + 3x^2 - 7x,\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in R$,
   c) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \dfrac{1}{2} e^{3x},\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in R$,
   d) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + x e^{2x},\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in R$,
   e) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 2x^2 e^{-x},\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in R$.
2. **a)** $y = c_1 + c_2 e^{-4x} - \dfrac{5}{17} \cos x + \dfrac{3}{17} \sin x,\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in R$,
   b) $y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + \dfrac{8}{65} \cos 2x + \dfrac{1}{65} \sin 2x,\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in R$,
   c) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4} x \sin 2x,\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in R$,
3. **a)** $y = \cos x\,(c_1 + \ln|\cos|) + \sin x\,(c_2 + x)\,,\ c_1, c_2 \in R$,
   $x \in J_k = \left(\dfrac{\pi}{2}(1 + 2k), \dfrac{\pi}{2}(3 + 2k)\right),\ k \in Z$,
   b) $y = e^x(c_1 + c_2 x - x + x \ln|x|),\ c_1,\ c_2 \in R,\ x \in (-\infty, 0)\ \vee\ x \in (0, \infty)$.
4. **a)** $y_p = 2x^2 - 3x + 1,\ x \in R$,
   b) $y_p = e^{-x}\,(-\cos x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x)\,,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Literatúra

[1] Dicsoová A., Pekárková R., Poláková V.: Matematika I. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2002.
[2] Eliaš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 1. Bratislava: Alfa, 1971.
[3] Eliaš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. Bratislava: Alfa, 1972.
[4] Eliaš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 3. Bratislava: Alfa, 1980.
[5] Ivan J.: Matematika I. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 1998.
[6] Ivan J.: Matematika II. Bratislava: Alfa, 1989.
[7] Kluvánek I., Mišík L., Švec, M.: Matematika I. Bratislava: SVTL, 1959.
[8] Kluvánek I., Mišík L., Švec, M.: Matematika II. Bratislava: SVTL, 1965.
[9] Záhonová V. a kol.: Úvod do štúdia Matematiky I. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2010.

RNDr. Viera Záhonová, CSc.

MATEMATIKA I
Riešené príklady

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2012.

Edícia skrípt

Rozsah 233 strán, 42 obrázkov, 16,018 AH, 16,349 VH, 1. vydanie,
edičné číslo 5643, tlač Nakladateľstvo STU v Bratislave.

85 – 244 – 2012

ISBN 978-80-227-3731-9