Ivan Janiga, Jana Gabková,
Milada Omachelová, Daniela Richtáriková

ZÁKLADY ŠTATISTICKEJ ANALÝZY

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE

Ivan Janiga, Jana Gabková,
Milada Omachelová, Daniela Richtáriková

ZÁKLADY ŠTATISTICKEJ ANALÝZY

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2013

Recenzenti: prof. Ing. Ladislav Starek, PhD.
doc. RNDr. Karol Pastor, CSc.

Schválila Vedecká rada Strojníckej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-4023-4

Obsah

PREDHOVOR

Milí čitatelia,

skriptá sme napísali pre predmet Základy aplikovanej štatistiky, ktorý sa vyučuje v druhom ročníku bakalárskeho štúdia ako povinne voliteľný predmet. Text skrípt obsahuje kapitoly Pravdepodobnosť, Náhodné premenné, Viacrozmerné náhodné premenné, Tvorba náhodného výberu a opisná štatistika, Bodové odhadovanie, Štatistické intervaly a rozsahy výberov pri danej presnosti bodových odhadov, Testy hypotéz v jednom výbere a Indukčná štatistika pre dva výbery.

Pri písaní skrípt sme kládli dôraz na to, aby text bol čo najbližší k inžinierskemu mysleniu. Vyhýbali sme sa exaktným matematicky formulovaným definíciám. Nové termíny sme sa snažili definovať tak, aby boli zrozumiteľnejšie technikom a pritom nestrácali svoju „exaktnosť“. Každý termín preto vysvetľujeme aj na príkladoch a obrázkoch.

Chceme upozorniť na niektoré rozdiely od bežne dostupných slovenských a českých učebných textov z oblasti štatistiky. V prvej kapitole kladieme dôraz na štatistickú definíciu pravdepodobnosti, ktorá má v inžinierskej praxi veľký význam, obzvlášť v štatistickej regulácii produkčných a meracích procesoch. Číselné a grafické metódy opisnej štatistiky prezentujeme aj na konkrétnom príklade z praxe. Uvádzame tri druhy štatistických intervalov. Okrem intervalu spoľahlivosti pre parametre rozdelení sa zaoberáme predikčným intervalom ohraničujúcim hodnotu budúceho merania, ktoré chceme urobiť. Toto je niekedy veľmi dôležité pre rozhodovanie, či urobiť alebo neurobiť ďalšie meranie. Za veľmi dôležitý považujeme štatistický tolerančný interval, ktorý s danou spoľahlivosťou pokrýva aspoň zadaný podiel hodnôt celého základného súboru. Pomocou tohto intervalu sme prispeli k vyriešeniu závažného problému v dvoch firmách na Slovensku a jednej v USA. V tejto časti sa opierame o vlastné výsledky publikované v monografiách uvedených v prílohe. V testovaní hypotéz je v praxi veľmi dôležitá chyba druhého druhu a s ňou súvisiaca sila testu, ktorá pomáha detegovať odchýlky od menovitej hodnoty meranej veličiny. Toto má veľký význam v regulácii procesov. Nemalý význam má aj stanovenie rozsahu náhodného výberu, t. j. koľko meraní je potrebné urobiť, aby sme s danou spoľahlivosťou detegovali rozdiel medzi menovitou hodnotou a skutočnou hodnotou meranej veličiny. Na to slúžia najmä krivky operatívnej charakteristiky, ktoré sú uvedené v prílohe.

Hoci je text skrípt napísaný pre bakalárske štúdium, poslúži aj študentom inžinierskeho a doktorandského štúdia. Výskumníkom a pracovníkom z technickej praxe môže pomôcť pri spracovaní a vyhodnocovaní experimentálnych dát.

Skriptá obsahujú veľa riešených príkladov, na ktorých sú zrozumiteľne vysvetlené základné pojmy. Na konci skrípt sú uvedené najpotrebnejšie štatistické tabuľky.

Za pripomienky a vypracovanie recenzných posudkov ďakujeme prof. Ing. Ladislavovi Starekovi, CSc. a doc. RNDr. Karolovi Pastorovi, PhD.

Autori

1 PRAVDEPODOBNOSŤ

1.1 Náhodný experiment, výberový priestor a náhodná udalosť

Ciele výučby

- Vysvetliť termíny *náhodný experiment*, *výberový priestor* a *náhodná udalosť*.
- Definovať výberový priestor a náhodnú udalosť v náhodnom experimente.
- Definovať nové združené udalosti z existujúcich udalostí pomocou množinových operácií.
- Posúdiť, či sú udalosti disjunktné (vzájomne sa vylučujúce) a či tvoria úplný systém.

Náhodný experiment

Keď rôzne výsledky sa získajú v opakovaných pokusoch, experiment sa nazýva náhodný experiment. Niektoré zdroje variability výsledkov sú kontrolovateľné a iné sú nekontrolovateľné.
Napríklad, pri skúšaní životnosti žiaroviek k zdrojom premenlivosti (variability) patrí:

- materiál,
- výrobný postup,
- výrobné prostredie (teplota, vlhkosť atď.),
- merací prístroj,
- kolísanie elektrického prúdu,
- pozorovateľ (merač).

Výberový priestor *Ω*

Výberový priestor je množina možných výsledkov náhodného experimentu. Definujeme dva typy výberových priestorov.

1. **Diskrétny výberový priestor**: skladá sa z konečného (alebo spočítateľne nekonečného) počtu výsledkov. Napríklad hod mincou: $\Omega = \{\text{hlava}, \text{znak}\}$.
2. **Spojitý výberový priestor**: skladá sa z nekonečnej a nespočítateľnej množiny výsledkov. Napríklad dĺžka života úspornej žiarovky: $\Omega = \{x\colon x \geq 0\}$.

Náhodná udalosť *E*

Náhodná udalosť (ďalej len udalosť) je podmnožina výberového priestoru patriaceho k náhodnému experimentu.

Množinové operácie

Na stanovenie nových zložených udalostí z existujúcich udalostí sa používajú tri množinové operácie:

1. **zjednotenie** ($E_1 \cup E_2$): kombinácia všetkých výsledkov z E_1 a E_2,
2. **prienik** ($E_1 \cap E_2$): obsahuje spoločné výsledky, ktoré patria do E_1 a súčasne do E_2,
3. **doplnok** (E' alebo $\overline{E}$): obsahuje výsledky, ktoré nepatria do E. Všimnime si, že $(E')' = E$, pričom $E \cup E' = \Omega$.

Zákony pre množinové operácie

Pri množinových operáciách sa používajú nasledujúce zákony:

1. **komutatívny zákon**

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1, \qquad E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1,$$

2. **distributívny zákon**

$$\left(E_1 \cap E_2\right) \cup E_3 = \left(E_1 \cup E_3\right) \cap \left(E_2 \cup E_3\right),$$

$$\left(E_1 \cup E_2\right) \cap E_3 = \left(E_1 \cap E_3\right) \cup \left(E_2 \cap E_3\right),$$

3. **deMorganov zákon**

$$\left(E_1 \cap E_2\right)' = E_1' \cup E_2', \ \left(E_1 \cup E_2\right)' = E_1' \cap E_2'.$$

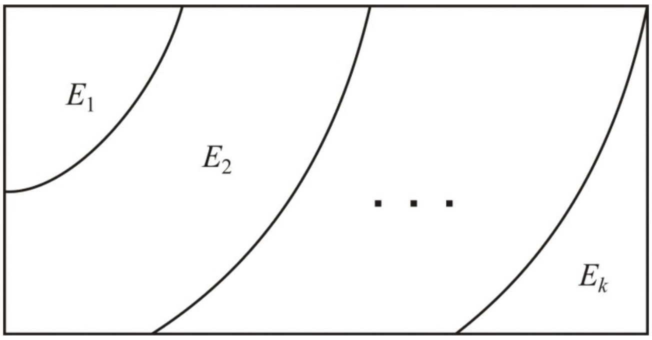
Disjunktné udalosti a úplný systém

Udalosti $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sú **disjunktné** (**vzájomne sa vylučujúce**), ak nemajú žiaden výsledok spoločný. Pre disjunktné udalosti platí:

$$E_i \cap E_j = \varnothing \quad \text{pre všetky dvojice } (i,j)\text{: } i \neq j\,.$$

Disjunktné udalosti $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tvoria **úplný systém**, ak sa ich zjednotenie rovná Ω, t. j.

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k = \Omega.$$



Obr. 1.1. *Vzájomne sa vylučujúce udalosti tvoriace úplný systém*

Príklad 1.1

V experimente sa merajú doby nábehu (jednotka: minúta) reaktora na dve dávky.

1. *Definujme výberový priestor experimentu.*

   $\Omega = \{x:\ x > 0\}$, kde x reprezentuje dobu nábehu reaktora

2. *Definujme udalosť* A, že doba nábehu reaktora z prvej dávky je menšia ako 55 minút a *udalosť* B, že doba nábehu reaktora z druhej dávky je väčšia ako 70 minút.

   $A = \{x: 0 < x < 55\}$

   $B = \{x:\ x > 70\}$

3. *Vyjadrime množinové operácie* $A \cup B$; $A \cap B$; B'.

   $A \cup B = \{x: 0 < x < 55 \vee x > 70\}$ – reaktor nabehne do 55 min alebo až po70-tich min.

   $A \cap B = \emptyset$ – reaktor nemôže nabehnúť do 55 min a súčasne po70-tich min.

   $A' = \{x: x \geq 55\}$ – reaktor nabehne najskôr za 55 min.

4. *Sú udalosti A a B vzájomne sa vylučujúce?*

   Áno, lebo $A \cap B = \emptyset$.

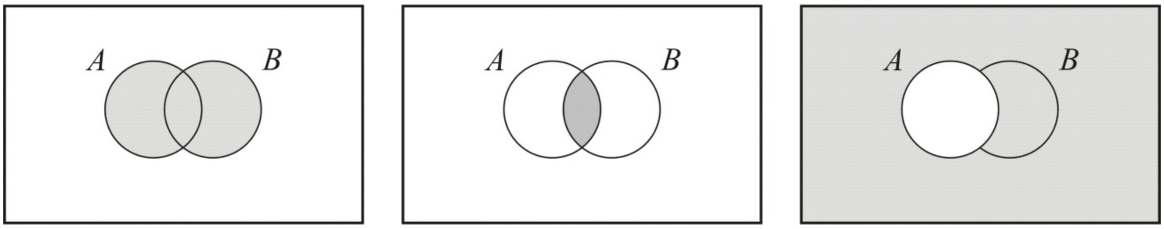
5. *Tvoria udalosti A a B úplný systém?*

   Nie, lebo $A \cup B \neq \Omega$.

Diagramy

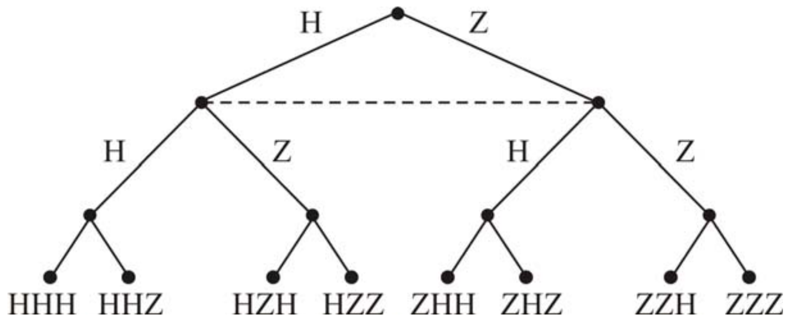
Diagramy sa často používajú na zobrazenie výberového priestoru a udalostí v danom náhodnom experimente

1. **Vennov diagram**: Obdĺžnik reprezentuje výberový priestor a kruhy označujú jednotlivé udalosti, ako vidieť na nasledujúcom obrázku.



Obr. 1.2. *Vennove diagramy zjednotenie, prienik a doplnok*

2. **Stromový diagram**: Vetvy reprezentujú možné výsledky, ako vidieť na nasledujúcom obrázku. Metóda stromového diagramu je užitočná, keď výberový priestor je vytvorený prostredníctvom viacerých krokov alebo stupňov.



Obr. 1.3. *Stromový diagram výsledkov pri hode tromi mincami naraz*
(*H – padne hlava, Z – padne znak*)

1.2 Pojem pravdepodobnosti

Ciele výučby

- Vysvetliť termín pravdepodobnosť.
- Definovať pravdepodobnosť udalosti.

Pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť udalosti znamená možnosť nastania udalosti v náhodnom experimente. Keď Ω označuje výberový priestor, potom platia nasledujúce podmienky:

1. $P(\Omega)=1$
2. $0 \le P(A) \le 1$, kde A je ľubovoľná udalosť,
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots$, pričom udalosti $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sú disjunktné.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Ak sa výberový priestor skladá z n výsledkov, ktoré majú rovnakú možnosť nastania, tak pravdepodobnosť každého výsledku je $1/n$. Pravdepodobnosť ľubovoľnej udalosti A obsahujúcej k rovnako možných výsledkov je potom

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Poznámka. Pre ľubovoľnú udalosť A platí, že $P(A') = 1 - P(A)$.

Štatistická definícia pravdepodobnosti

Keď nezávisle n krát opakujeme pokusy v danom náhodnom experimente a sledovaná udalosť A nastane k krát, potom relatívna početnosť nastania udalosti A je $h_n(A) = \frac{k(n)}{n}$; ak pre $n \to \infty$ bude relatívna početnosť kolísať v stále užších medziach okolo určitého čísla, môžeme predpokladať, že toto číslo je pravdepodobnosť udalosti A, t. j. $P(A) = \lim_{n\to\infty} h_n(A)$. Hodnotu $P(A)$ odhadneme pomocou relatívnej početnosti

$$P(A) \approx h_n(A) = \frac{k(n)}{n}.$$

Poznámka. Rozdiel medzi klasickou a štatistickou definíciou je v tom, že pri klasickej definícii sme podiel priaznivých výsledkov k a všetkých možných výsledkov n, t. j. relatívnu početnosť, dostali na základe objektívnych vlastností skúmaných udalostí; vypočítali sme ju pred realizáciou náhodného experimentu. Pri použití štatistickej definície relatívnu početnosť vypočítame zo skutočne vykonaných pokusov v náhodnom experimente.

1.2.1 Pravdepodobnosť združených udalostí

Ciele výučby

- Nájsť pravdepodobnosť združenej udalosti za použitia pravdepodobností jednotlivých udalostí.

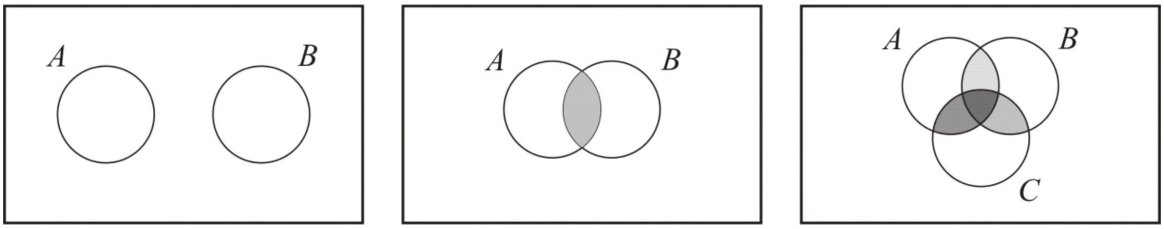
Pravdepodobnosť združenej udalosti

Pravdepodobnosť združenej udalosti možno často vypočítať použitím pravdepodobností jednotlivých udalostí. Keď pravdepodobnosti jednotlivých udalostí sú známe, na výpočet pravdepodobnosti združenej udalosti použijeme nasledujúce pravidlá:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ platí všeobecne;}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ platí, keď sú udalosti disjunktné, t. j. } A \cap B = \varnothing;$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$



Obr. 1.4. *Vennove diagramy pre pravdepodobnosti združených udalostí*

Príklad 1.2

Učiteľ štatistiky povedal študentom, že pravdepodobnosti získania hodnotenia A, B, C, D a horšie sú 1/5, 2/5, 3/10 a 1/10. Nájdeme pravdepodobnosti získania hodnotenia:

1. A alebo B;
2. B a horšie.

Riešenie

Nech E_1, E_2, E_3, E_4 označujú udalosti získania hodnotenia A, B, C, D a horšie. Tieto udalosti sú disjunktné a tvoria úplný systém, lebo

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 1.$$

1. *Udalosť získania hodnotenia* A *alebo* B je $E_1 \cup E_2$. Teda platí:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - 0 = \frac{3}{5}.$$

2. *Udalosť získania hodnotenia* B *alebo horšie* je $E_2 \cup E_3 \cup E_4$, čo sa rovná E_1'. Preto

$$P(E_2 \cup E_3 \cup E_4) = P(E_1') = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Príklad 1.3

Výsledky skúšky odolnosti proti poškrabaniu (OPP) a na otrasuvzdornosť (OV) 100 diskov z polykarbonátového plastu sú v Tab. 1.1.

Nech A označuje udalosť, že disk má <u>vysokú</u> odolnosť proti poškrabaniu (OPP), potom A' označuje udalosť, že disk má <u>nízku</u> OPP. Nech B označuje udalosť, že disk má <u>vysokú</u> otrasuvzdornosť (OV), potom B' označuje udalosť, že disk má <u>nízku</u> OV (Tab. 1.2).

Tab. 1.1

OPP	OV	
	Vysoká	Nízka
Vysoká	80	9
Nízka	6	5

Tab. 1.2

OPP	OV		$\sum$
	Vysoká (B)	Nízka (B')	
Vysoká (A)	80	9	89
Nízka (A')	6	5	11
$\sum$	86	14	**100**

1. Keď náhodne vyberieme disk, *aká je pravdepodobnosť,* že disk má vysokú OPP *aj* OV?

   $$P(A \cap B) = \frac{80}{100} = 0{,}8 = 80\,\%.$$

2. Keď náhodne vyberieme disk, *aká je pravdepodobnosť,* že disk má vysokú OPP *alebo* OV?

   Vieme, že $P(A) = \frac{89}{100}$, $P(B) = \frac{86}{100}$ a $P(A \cap B) = \frac{80}{100}$. Potom

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{89}{100} + \frac{86}{100} - \frac{80}{100} = \frac{95}{100} = 95\,\%.$$

3. Zoberme do úvahy udalosť, že disk má vysokú OPP, a udalosť, že disk má vysokú OV. *Sú tieto udalosti disjunktné (vzájomne sa vylučujúce)?*

   Pretože $P(A \cap B) = \frac{80}{100} \neq 0$, udalosti A a B nie sú disjunktné.

1.3 Podmienená pravdepodobnosť

Ciele výučby

- Vysvetliť termín podmienená pravdepodobnosť medzi udalosťami.

- Vypočítať podmienenú pravdepodobnosť udalostí.

Podmienená pravdepodobnosť

Podmienená pravdepodobnosť $P(B|A)$ je pravdepodobnosť udalosti B podmienená udalosťou A. Na výpočet podmienenej pravdepodobnosti sa používa nasledujúci vzorec:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ kde } P(A) > 0.$$

Príklad 1.4

Nová metóda monitorovania syndrómu karpálneho tunela (CTS) v pracovnom prostredí sa testuje na dvoch skupinách ľudí: 50 pracovníkov, ktorí majú CTS a 50 zdravých pracovníkov, ktorí nemajú CTS. Zhrnutie výsledkov testu je v nasledujúcej tabuľke (Tab. 1.3).

Tab. 1.3

Skupina	Výsledok testu	
	Negatívny	Pozitívny
CTS	10	40
Zdraví	45	5

Nech A označuje udalosť, že pracovník má CTS, a A' udalosť, že pracovník nemá CTS. Nech B označuje udalosť, že CTS test je pozitívny, a B' udalosť, že CTS test je negatívny (Tab. 1.4).

Tab. 1.4

Skupina	Výsledok testu		$\sum$
	Negatívny (B')	Pozitívny (B)	
CTS (A)	10	40	50
Zdraví (A')	45	5	50
$\sum$	55	45	**100**

1. Nájdime pravdepodobnosť, že CTS test je pozitívny (B), keď pracovník má CTS (A).

   Vieme, že $P(A) = \frac{50}{100}$, $P(B) = \frac{45}{100}$ a $P(A \cap B) = \frac{40}{100}$, potom platí:

   $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{40/100}{50/100} = \frac{4}{5} = 80\,\%.$$

2. Nájdime pravdepodobnosť, že pracovník má CTS (A), keď CTS test je pozitívny (B).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{40/100}{45/100} = \frac{40}{45} = 88{,}89\ \%.$$

1.4 Úplná pravdepodobnosť

Ciele výučby

- Vysvetliť pravidlo o násobení pravdepodobností.
- Vysvetliť pravidlá o úplnej pravdepodobnosti.

Pravidlo o násobení pravdepodobností

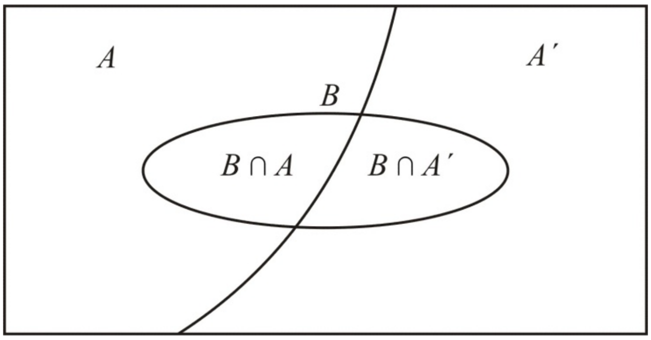
Z definície podmienenej pravdepodobnosti vyplýva nasledujúce pravidlo o násobení pravdepodobnosti

$$P(A \cap B) = P(B|A)\,P(A) = P(A|B)\,P(B) = P(B \cap A).$$

Pravidlá o úplnej pravdepodobnosti

1. Keď udalosť B je rozdelená na dve disjunktné udalosti $B \cap A$ a $B \cap A'$, potom platí:

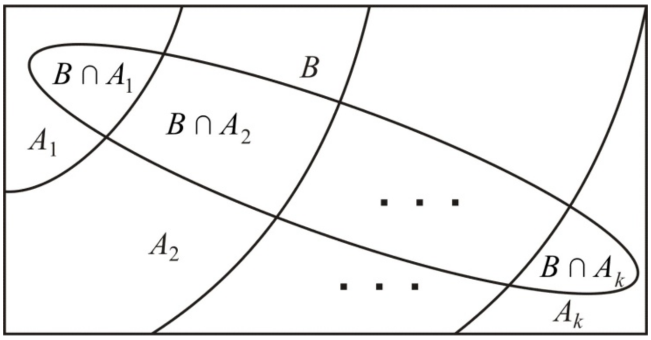
$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') = $$
$$= P(B|A)\,P(A) + P(B|A')\,P(A').$$



Obr. 1.5. *Rozdelenie udalosti B na dve vzájomne sa vylučujúce udalosti*

2. Nech $A_1, A_2, ..., A_k$ je úplný systém vzájomne sa vylučujúcich (disjunktných) udalostí, potom platí:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k) = \ldots$$
$$= P(B|A_1)\, P(A_1) + P(B|A_2)\, P(A_2) + \cdots + P(B|A_k)\, P(A_k).$$



Obr. 1.6. *Rozdelenie udalosti B na k vzájomne sa vylučujúci udalostí*

Príklad 1.5

V predchádzajúcom príklade opísaný experiment metódy monitorovania CTS naznačuje, že pravdepodobnosť monitorovania pracovníka, ktorý má CTS (A), ako pozitívneho (B) sa rovná 0,8. Pravdepodobnosť monitorovania pracovníka, ktorý nemá CTS (A'), ako pozitívneho (B) je 0,1. Z týchto tvrdení vyplýva, že

$$P(B|A) = 0{,}8 \quad \text{a} \quad P(B|A') = 0{,}1\,.$$

Predpokladajme, že výskyt CTS v priemysle má pravdepodobnosť $P(A) = 0{,}0017 = 0{,}17\,\%$. Nájdeme pravdepodobnosť, že náhodne vybraný pracovník má pozitívny CTS test (B) na pracovisku.

Vieme že $P(A) = 0{,}0017$, potom $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0{,}0017 = 0{,}9983$.

Použitím pravidla u úplnej pravdepodobnosti dostaneme:

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|A') \times P(A') =$$
$$= 0{,}8 \times 0{,}0017 + 0{,}1 \times 0{,}9983 = 0{,}101.$$

Príklad 1.6

Na vyhodnotenie predbežných návrhov produktov sa využívajú názory zákazníkov. V minulosti 95 % veľmi úspešných produktov, 60 % mierne úspešných produktov a 10 % slabých produktov získalo dobré hodnotenie. Okrem toho, 40 % dizajnov produktu bolo veľmi úspešných, 35 % mierne úspešných a 25 % dizajnov produktu bolo slabých. Nájdeme pravdepodobnosť, že produkt dostane dobré hodnotenie.

Riešenie

Nech A_1, A_2 a A_3 reprezentujú udalosti – „veľmi úspešný produkt“, „mierne úspešný produkt“ a „slabý produkt“. Označme G udalosť, získanie dobrého hodnotenia od zákazníkov. Potom

$$P(G|A_1) = 0{,}95\,; \quad P(G|A_2) = 0{,}60\,; \quad P(G|A_3) = 0{,}10\,;$$

$$P(A_1) = 0{,}40\,; \quad P(A_2) = 0{,}35 \quad \text{a} \quad P(A_3) = 0{,}25\,.$$

Udalosti A_1, A_2 a A_3 sú disjunktné a tvoria úplný systém, pretože platí:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$
$$= 0{,}40 + 0{,}35 + 0{,}25 = 1 = P(\Omega).$$

Keď použijeme pravidlo o úplnej pravdepodobnosti, dostaneme:

$$P(G) = P(G|A_1) \times P(A_1) + P(G|A_2) \times P(A_2) + P(G|A_3) \times P(A_3) =$$
$$= 0{,}95 \times 0{,}40 + 0{,}60 \times 0{,}35 + 0{,}10 \times 0{,}25 = 0{,}62 = 62\,\%.$$

1.5 Nezávislosť dvoch udalostí

Ciele výučby

- Vysvetliť termín nezávislosť medzi udalosťami.
- Posúdiť nezávislosť dvoch udalostí.

Nezávislosť udalostí

Dve udalosti A a B sú stochasticky nezávislé, keď výskyt udalosti A nemá účinok na pravdepodobnosť udalosti B a naopak. Inak povedané, dve udalosti A a B sú nezávislé vtedy, keď platí jeden z nasledujúcich vzťahov:

1. $P(A|B) = P(A)$
2. $P(B|A) = P(B)$
3. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Odvodenie vzťahu $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$:

Keď A a B sú nezávislé, potom platí:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\,.$$

Príklad 1.7

Pre CTS test (Príklad 1.4) sme vypočítali tieto pravdepodobnosti:

$$P(B) = \frac{45}{100} \quad \text{a} \quad P(B|A) = \frac{4}{5}.$$

Overíme, či udalosti A a B sú nezávislé. Pretože $P(B|A) = \frac{4}{5} \neq P(B) = \frac{45}{100}$, udalosti A a B nie sú nezávislé. To znamená, že informácia o výsledkoch CTS testu je užitočná pre monitorovanie pracovníkov majúcich CTS na pracovisku.

1.6 Bayesova veta

Ciele výučby

- Aplikovať Bayesovu vetu na nájdenie podmienenej pravdepodobnosti, keď udalosť je rozdelená na niekoľko disjunktných udalostí tvoriacich úplný systém.

Bayesova veta

Z definície podmienenej pravdepodobnosti dostaneme:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B \cap A) + P(B \cap A')} =$$
$$= \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|A')\,P(A')}.$$

Z pravidla o násobení pravdepodobností pre súbor *k* disjunktných udalostí $A_1, A_2, ..., A_k$ tvoriacich úplný systém Ω a ľubovoľnej udalosti B odvodíme všeobecný tvar Bayesovej vety:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k)} =$$
$$= \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2) + \cdots + P(B|A_k)\,P(A_K)}.$$

Príklad 1.8

V predchádzajúcich častiach (Príklad 1.4 a Príklad 1.5) sme vypočítali pravdepodobnosti:

$$P(B|A) = 0{,}8\,; \quad P(B|A') = 0{,}1\,; \quad P(A) = 0{,}0017 \quad \text{a} \quad P(B) = 0{,}101\,.$$

Nájdeme pravdepodobnosť, že náhodne vybraný pracovník má CTS (A), keď test je pozitívny (B).

Riešenie

Použitím Bayesovej vety dostaneme

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|A')\,P(A')} =$$

$$= \frac{0{,}8 \times 0{,}0017}{0{,}101} = 0{,}01344 = 1{,}344\ \%.$$

Pretože výskyt CTS v priemysle je malý (0,17 %), pravdepodobnosť, že nejaký pracovník má CTS, je tiež pomerne malá (1,344 %), hoci test je pozitívny.

Výpočet ukážeme s použitím nasledujúcej tabuľky:

Tab. 1.5

Udalosti A_i	Apriórne pravdepodobnosti $P(A_i)$	Podmienené pravdepodobnosti $P(B\|A_i)$	Pravdepodobnosti prienikov $P(A_i \cap B)$	Aposteriórne pravdepodobnosti $P(A_i\|B)$
A	0,0017	0,8	0,00136	0,01344
A'	0,9983	0,1	0,09983	0,98656
	1,0000		$P(B)$ = 0,10119	1,0000

2 NÁHODNÉ PREMENNÉ

Ciele výučby

- Vysvetliť termíny náhodná premenná *X*, obor hodnôt *X*.
- Vysvetliť rozdiel medzi diskrétnymi a spojitými náhodnými premennými.

Náhodná premenná

Náhodná premenná, označovaná veľkým písmenom ako napríklad *X*, priradí reálne čísla jednotlivým výsledkom náhodného experimentu. Všimnime si, že nameraná hodnota (pozorovanie, realizácia) sa označuje malým písmenom, napr. $x = 70$ mA.

Množina všetkých možných hodnôt premennej *X* tvorí **obor hodnôt** náhodnej premennej *X*. V závislosti od typu oboru hodnôt definujeme dve kategórie náhodných premenných:

1. **Diskrétna náhodná premenná**: má konečný (alebo spočítateľne nekonečný) obor hodnôt. Napr. hádzanie mincou (*X*) nadobúda dve hodnoty: $x = 0$ (padne hlava) a $x = 1$ (padne znak).
2. **Spojitá náhodná premenná**: obor hodnôt je interval reálnych čísel (konečný alebo nekonečný). Napr. dĺžka životnosti úspornej žiarovky *X* nadobúda hodnoty $x \geq 0$.

2.1 Diskrétne náhodné premenné

2.1.1 Rozdelenia pravdepodobnosti a pravdepodobnostné funkcie

Ciele výučby

- Vysvetliť termíny pravdepodobnostná funkcia a distribučná funkcia.
- Určiť pravdepodobnostnú funkciu diskrétnej náhodnej premennej.

Rozdelenie pravdepodobnosti

Rozdelenie pravdepodobnosti udáva ako sú pravdepodobnosti rozdelené na hodnotách *x*, ktoré nadobúda náhodná premenná *X*.

Na vyjadrenie rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej *X* sa používajú dva typy funkcií:

1. **pravdepodobnostná funkcia (p. f.):** vyjadruje pravdepodobnosť hodnoty náhodnej premennej *X*, t. j. $P(X = x_i)$,
2. **distribučná funkcia:** vyjadruje súčet pravdepodobností hodnôt premennej *X*, ktoré sú menšie ako špecifikovaná hodnota alebo sú rovné tejto hodnote, t. j. $P(X \le x_i)$.

Pravdepodobnostná funkcia (p. f.)

Pravdepodobnostná funkcia diskrétnej náhodnej premennej *X*, označovaná ako $f(x)$, je definovaná

$$f(x_i) = P(X = x_i),\ x_i = x_1, x_2, \dots, x_n,$$

čo môžeme vyjadriť tabuľkou

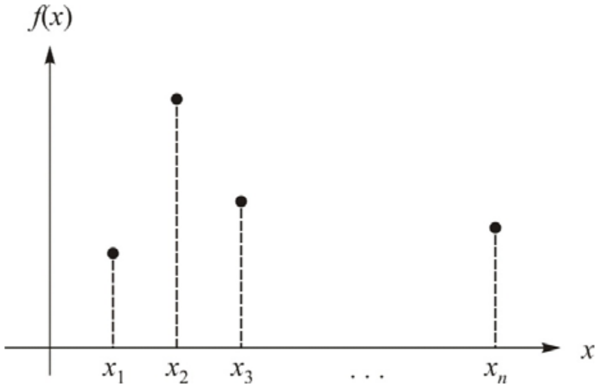
Tab. 2.1

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$

Pravdepodobnostná funkcia spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f(x_i) \ge 0$ pre všetky x_i
2. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

Potom jej graf je:



Obr. 2.1. *Pravdepodobnostná funkcia d. n. p. X*

Príklad 2.1

Známky $n = 50$ študentov zo štatistiky sú v nasledujúcej tabuľke (Tab. 2.2).

Určime pravdepodobnostnú funkciu *f*(*x*) náhodnej premennej *X* (známka z predmetu) a nakreslime jej graf.

Tab. 2.2

Známka	A	B	C	D	E	FX
Počet študentov	5	8	10	12	10	5

Riešenie

Nech náhodná premenná X (známka z predmetu) nadobúda hodnoty $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ reprezentujúce známky A, B, C, D , E a FX.

Tab. 2.3

x	1	2	3	4	5	6
Počet študentov	5	8	10	12	10	5

Najskôr vypočítajme hodnoty pravdepodobnostnej funkcie:

$$f(x_1) = P(X=1) = \frac{5}{50} = 0{,}1 \qquad f(x_2) = P(X=2) = \frac{8}{50} = 0{,}16 \qquad f(x_3) = P(X=3) = \frac{10}{50} = 0{,}2$$

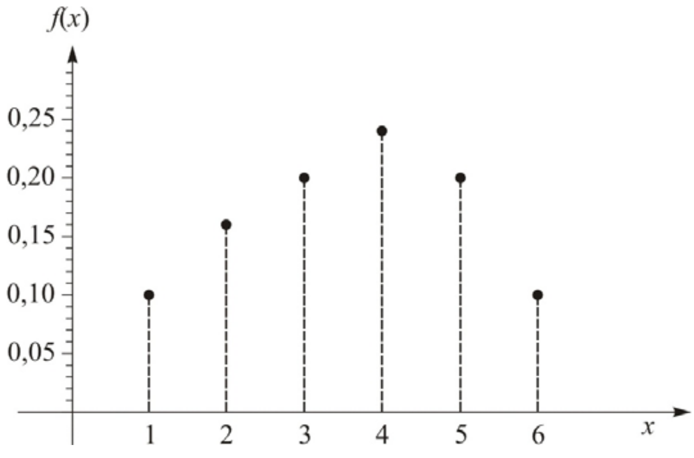
$$f(x_4) = P(X=4) = \frac{12}{50} = 0{,}24 \qquad f(x_5) = P(X=5) = \frac{10}{50} = 0{,}2 \qquad f(x_6) = P(X=6) = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

Potom

f(*x*) daná tabuľkou:

x	$f(x)$
1	0,10
2	0,16
3	0,20
4	0,24
5	0,20
6	0,10
$\sum$	1

f(*x*) daná grafom:



2.1.2 Distribučné funkcie

Ciele výučby

- Vysvetliť termín *distribučná funkcia* diskrétnej náhodnej premennej.
- Určiť distribučnú funkciu diskrétnej náhodnej premennej.

Distribučná funkcia (d. f.)

Distribučná funkcia diskrétnej náhodnej premennej *X*, označovaná $F(x)$, je definovaná

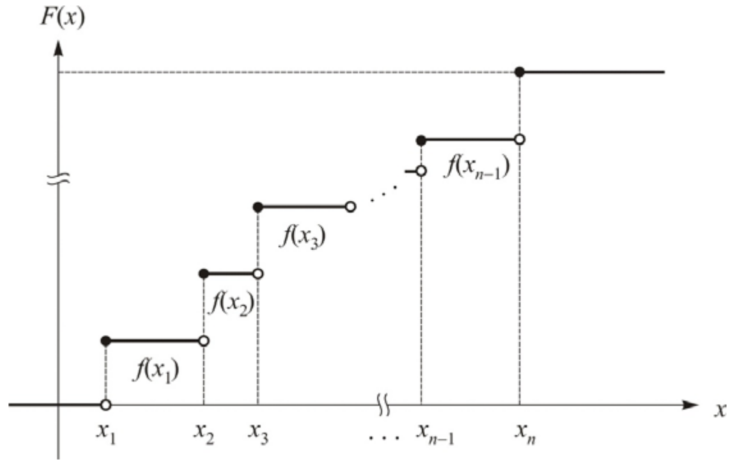
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i),$$

čo môžeme vyjadriť

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \le x < x_3 \\ \dots & \dots \\ f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{i-1}), & x_{i-1} \le x < x_i \\ 1, & x_i \le x \end{cases}$$

Distribučná funkcia má nasledovné vlastnosti:

1. $0 \le F(x) \le 1$ pre ľubovoľné reálne *x*,
2. $F(x_1) \le F(x_2)$ pre $x_1 < x_2$,
3. $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.



Obr. 2.2. *Distribučná funkcia*

Príklad 2.2

V predchádzajúcom príklade sme vypočítali tieto pravdepodobnosti:

$$P(X = 1) = 0{,}10; \quad P(X = 2) = 0{,}16; \quad P(X = 3) = 0{,}20;$$

$$P(X = 4) = 0{,}24; \quad P(X = 5) = 0{,}20; \quad P(X = 6) = 0{,}10.$$

Určíme distribučnú funkciu $F(x)$ premennej *X* a nakreslíme jej graf.

Riešenie

Použitím pravdepodobnostnej funkcie n. p. X dostaneme:

– *hodnoty d. f. v jednotlivých bodoch*:

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 1) = 0{,}1$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}16 = 0{,}26$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 0{,}10 + 0{,}16 + 0{,}20 = 0{,}46$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = 0{,}10 + 0{,}16 + 0{,}20 + 0{,}24 = 0{,}70$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = 0{,}10 + 0{,}16 + 0{,}20 + 0{,}24 + 0{,}20 = 0{,}90$$

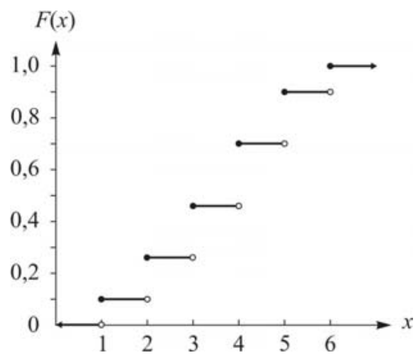
$$F(6) = P(X \leq 6) = 0{,}10 + 0{,}16 + 0{,}20 + 0{,}24 + 0{,}20 + 0{,}10 = 1{,}00$$

$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 0{,}26 - 0{,}10 = 0{,}16$$

– *funkčný zápis (tvar) d. f.*:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0{,}10 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}26 & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}46 & 3 \leq x < 4 \\ 0{,}70 & 4 \leq x < 5 \\ 0{,}90 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases}$$

– *graf d. f.*:



Obr. 2.3. *Distribučná funkcia n. p. X*

2.1.3 Číselné charakteristiky diskrétnej náhodnej premennej

Ciele výučby

- Vypočítať strednú (očakávanú) hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku.

Stredná (očakávaná) hodnota d. n. p. *X*

Stredná hodnota d. n. p. *X*, označovaná ako μ alebo $E(X)$, znamená očakávanú hodnotu *X* a definovaná je vzťahom

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x).$$

Rozptyl (disperzia) d. n. p. *X*

Rozptyl d. n. p. *X* je miera variability rozdelenia označovaná ako σ^2 alebo $D(X)$ a definovaná vzťahom

$$\sigma^2 = D(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2.$$

Smerodajná odchýlka

Smerodajná odchýlka d. n. p. *X* je miera variability rozdelenia označovaná ako σ a definovaná vzťahom

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sum_x (x-\mu)^2 f(x)} = \sqrt{\sum_x x^2 f(x) - \mu^2}.$$

Príklad 2.3

Určíme strednú hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku d. n. p. *X*.

Pravdepodobnosti hodnôt d. n. p. *X*, ktoré sme už vypočítali (Príklad 2.1), sú

x	1	2	3	4	5	6
f(*x*)	0,10	0,16	0,20	0,24	0,20	0,10

Potom

$$\mu = \sum_x xf(x) = 1\times 0,10 + 2\times 0,16 + 3\times 0,20 + 4\times 0,24 + 5\times 0,20 + 6\times 0,10 = 3,58$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \left(\sum_x x^2 f(x)\right) - \mu^2 = \\ &= \left(1^2\times 0,10 + 2^2\times 0,16 + 3^2\times 0,20 + 4^2\times 0,24 + 5^2\times 0,20 + 6^2\times 0,10\right) - 3,58^2 = \\ &= 14,98 - 12,8164 = \\ &= 2,1636\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,1636} = 1,47092.$$

2.1.4 Diskrétne rovnomerné rozdelenie

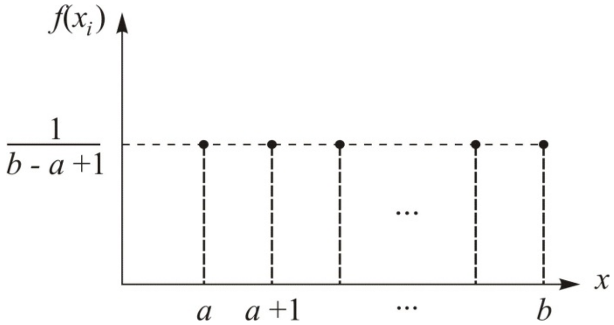
Ciele výučby

- Opísať rozdelenie pravdepodobnosti diskrétnej rovnomernej náhodnej premennej.
- Určiť pravdepodobnostnú funkciu, strednú hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku diskrétnej náhodnej premennej.

Pravdepodobnostná funkcia diskrétneho rovnomerného rozdelenia

Diskrétna rovnomerná náhodná premenná X nadobúda každú celočíselnú hodnotu z oboru hodnôt $\{a, a+1, a+2, \ldots, b\}$ pre $a < b$ s rovnakou pravdepodobnosťou. Teda **pravdepodobnostná funkcia** X má tvar

$$f(x) = \frac{1}{b-a+1} \quad \text{pre} \quad x = a, a+1, \ldots, b.$$



Obr. 2.4. *Pravdepodobnostná funkcia diskrétneho rovnomerného rozdelenia*

Stredná hodnota a rozptyl premennej X sú dané vzťahmi:

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \text{a} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

Príklad 2.4

V experimente spočívajúcom v hode kockou šesť možných výsledkov má rovnakú možnosť nastania.

1. *Pravdepodobnostná funkcia diskrétneho rovnomerného rozdelenia*

Určíme pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej X pri hode kockou.

Vieme, že X nadobúda hodnoty $x = 1, 2, \ldots, 6$, $a = 1$ a $b = 6$. Teda pravdepodobnostná funkcia X je

$$f(x) = \frac{1}{b-a+1} = \frac{1}{6-1+1} = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

2. *Pravdepodobnosť*

Nájdeme pravdepodobnosť, že počet bodov pri hode kockou X je väčší ako dva.

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{6} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

3. *Stredná hodnota, rozptyl a smerodajná odchýlka*

Vieme, že $a = 1$ a $b = 6$, potom platí:

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{1+6}{2} = 3{,}5$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} = \frac{(6-1+1)^2 - 1}{12} = 2{,}917 = 1{,}708^2$$

$$\sigma = \sqrt{2{,}917} = 1{,}708.$$

2.1.5 Binomické rozdelenie

Ciele výučby

- Vysvetliť termíny Bernoulliho pokus a binomický experiment.
- Opísať rozdelenie pravdepodobnosti binomickej náhodnej premennej.
- Určiť pravdepodobnostnú funkciu, strednú hodnotu a rozptyl binomickej náhodnej premennej.

Binomický experiment

Binomický experiment zodpovedá náhodnému experimentu obsahujúcemu n opakujúcich sa pokusov, ktoré vyhovujú nasledovným podmienkam:

1. Pokusy sú nezávislé, t. j. výsledok žiadneho pokusu neovplyvní výsledky iných pokusov.
2. Každý pokus má iba dva výsledky označované ako „áno“ a „nie“.
3. Pravdepodobnosť výsledku „áno“ každého pokusu je konštantná a rovná sa *p*.

Binomický experiment sa teda skladá zo série n nezávislých Bernoulliho pokusov s konštantnou pravdepodobnosťou pre „áno“ v každom z pokusov.

Bernoulliho pokus

Bernoulli sa zameral na pokusy, ktoré majú len <u>dva</u> možné výsledky. Napríklad:

– hod mincou: $\Omega = \{\text{hlava, znak}\}$,

– pravdivosť odpovede: $\Omega = \{\text{správna, chybná}\}$,

- stav stroja: $\Omega = \{\text{pracuje}, \text{pokazený}\}$,
- kvalita produktu: $\Omega = \{\text{dobrá}, \text{zlá}\}$,
- výsledok úlohy: $\Omega = \{\text{úspešný}, \text{neúspešný}\}$.

Pravdepodobnostná funkcia Bernoulliho náhodnej premennej X je

$$f(x) = \begin{cases} 1-p, & x=0 \\ p, & x=1. \end{cases}$$

Stredná hodnota, rozptyl a smerodajná odchýlka Bernoulliho náhodnej premennej X sú

$$\mu = p\,, \qquad \sigma^2 = p(1-p)\,, \qquad \sigma = \sqrt{p(1-p)}\,.$$

Odvodenie vzťahov pre μ a σ^2 Bernoulliho náhodnej premennej:

$$\mu = \sum_x x f(x) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$\sigma^2 = \left(\sum_x x^2 f(x)\right) - \mu^2 = \left(0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p\right) - p^2 = p(1-p).$$

Binomická náhodná premenná

Binomická náhodná premenná X reprezentuje počet pokusov, ktorých výsledok je „áno“ z n pokusov v binomickom experimente, s pravdepodobnosťou výsledku „áno“ rovnou p. Vlastnosti binomického rozdelenia opisuje tabuľka (Tab. 2.4)

Všeobecný zápis binomického rozdelenia je $X \sim Bi(n, p)$.

Pravdepodobnostná funkcia premennej X je

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Všeobecný zápis pre binomické rozdelenie je $X \sim Bi(n, p)$.

Poznámka. Počet kombinácií x z n sa rovná: $C_x^n = \binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$.

Stredná hodnota a rozptyl premennej X sú dané vzťahmi:

$$\mu = np\,, \qquad \sigma^2 = np(1-p)\,.$$

Tab. 2.4. *Vlastnosti binomického rozdelenia*

Rozdelenie	Rozsah základného súboru*	Parametre		
		Pravdepodobnosť pre „áno"	Počet pokusov n	Početnosť pre „áno"
binomické	nekonečný	p = konštanta °	konštantný	premenná X

* Keď sa jednotka vybraná zo základného súboru vráti späť do súboru pred nasledujúcim pokusom, rozsah základného súboru sa považuje za nekonečný i keď môže byť konečný.

° Keď je pravdepodobnosť p konštantná, pokusy sa považujú za nezávislé, v opačnom prípade sú pokusy závislé.

Príklad 2.5

Test obsahuje 50 otázok. Každá otázka obsahuje štyri odpovede, z ktorých je iba jedna správna. Predpokladajme, že študent svoje odpovede jednoducho háda.

1. *Pravdepodobnostná funkcia binomického rozdelenia*

Určíme pravdepodobnostnú funkciu počtu správnych odpovedí X, ktoré študent odpovie v teste.

Vieme, že $n = 50$ a pravdepodobnosť správnej odpovede na každú otázku je $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Teda pravdepodobnostná funkcia X je daná vzťahom:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{50}{x} \times 0{,}25^x \times 0{,}75^{50-x}, \quad x = 0,1,\ldots,50$$

2. *Pravdepodobnosť*

Nájdeme pravdepodobnosť, že študent odpovie aspoň na 30 otázok správne.

$$P(X \geq 30) = 1 - P(X < 30) = 1 - \sum_{x=0}^{29} \binom{50}{x} \times 0{,}25^x \times 0{,}75^{50-x} = 1{,}6 \times 10^{-7}$$

3. *Stredná hodnota, rozptyl a smerodajná odchýlka správnych odpovedí*

Počítajme:

$$\mu = n\,p = 50 \times 0{,}25 = 12{,}5$$

$$\sigma^2 = n\,p(1-p) = 50 \times 0{,}25 \times 0{,}25 = 9{,}375$$

$$\sigma = \sqrt{9{,}375} = 3{,}0619.$$

2.1.6 Hypergeometrické rozdelenie

Ciele výučby

- Opísať rozdelenie pravdepodobnosti hypergeometrickej náhodnej premennej.
- Určiť pravdepodobnostnú funkciu, strednú hodnotu a rozptyl hypergeometrickej náhodnej premennej.

Hypergeometrická náhodná premenná

Hypergeometrická náhodná premenná X reprezentuje počet úspechov, t. j. „áno“, vo výbere o rozsahu n jednotiek vykonaného náhodne bez opakovania z konečného základného súboru o rozsahu N, ktorý obsahuje M úspechov („áno“) a $(N-M)$ neúspechov („nie“). Pretože jednotka vybraná zo základného súboru sa nevracia späť do súboru, výsledok pokusu závisí od výsledku predchádzajúceho pokusu. Teda pravdepodobnosť úspešného výsledku („áno“) p nie je konštanta v každom pokuse.

Pravdepodobnostná funkcia premennej X je daná vzťahom:

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}; \quad x = \max\{0, n+M-N\}, \ldots, \min\{M, n\}$$

kde N, M, n sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $1 \le n < N, \quad 1 \le M < N$.

Všeobecný zápis pre hypergeometrické rozdelenie je $X \sim H(N, M, n)$.

Stredná hodnota a rozptyl premennej X sú dané vzťahmi:

$$\mu = np\,, \quad \sigma^2 = np\,(1-P)\frac{N-n}{N-1}, \text{ kde } \; p = \frac{M}{N}\,.$$

Poznámka. Rozptyl hypergeometrickej náhodnej premennej sa líši od rozptylu binomickej náhodnej premennej o člen $(N-n)/(N-1)$, ktorý sa nazýva **korekčný člen pre konečný základný súbor**.

Hypergeometrické rozdelenie verzus binomické rozdelenie

V hypergeometrickom rozdelení je základný súbor konečný a pravdepodobnosť úspešného výsledku („áno“) p sa mení, kým v binomickom rozdelení je základný súbor nekonečný a pravdepodobnosť úspešného výsledku („áno“) p je konštantná.

Tab. 2.5. *Vlastnosti binomického rozdelenia a hypergeometrického rozdelenia*

Rozdelenie	Rozsah základného súboru*	Parametre		
		Pravdepodobnosť pre „áno“	Počet pokusov n	Početnosť pre „áno“
Binomické	nekonečný	p = konštanta °	konštantný	premenná X
Hypergeometrické	konečný	p sa mení °	konštantný	premenná X

* Keď sa jednotka vybraná zo základného súboru vráti späť do súboru pred nasledujúcim pokusom, rozsah základného súboru sa považuje za nekonečný i keď môže byť konečný.

° Keď je pravdepodobnosť p konštantná, pokusy sa považujú za nezávislé, v opačnom prípade sú pokusy závislé.

Príklad 2.6

Vyučujúci predmetu Telesná výchova pripravil interview pre výber 10 študentov, ktorých náhodne vybral z triedy. Trieda pozostáva z 30 študentov, z ktorých 20 je futbalistov a 10 je basketbalistov.

1. *Pravdepodobnostná funkcia hypergeometrického rozdelenia*

Určíme pravdepodobnostnú funkciu počtu basketbalistov X vo výbere.

Vieme, že rozsah základného súboru je $N = 30.$ a počet vybraných študentov je $n = 10.$ Pretože počet basketbalistov je 10, $M = 10.$

Vypočítame rozpätie počtu basketbalistov X vo výbere:

$$\max\{0, n-(N-M)\} = \max\{0, 10-(30-10)\} = \max\{0, -10\} = 0,$$

$$\min\{M, n\} = \min\{10, 10\} = 10.$$

Teda pravdepodobnostná funkcia n. p. X je daná vzťahom:

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{x}\cdot\binom{30-10}{10-x}}{\binom{30}{10}} = \frac{\binom{10}{x}\cdot\binom{20}{10-x}}{\binom{30}{10}};\ x = 1, 2, \ldots, 10.$$

2. *Pravdepodobnosť*

Nájdeme pravdepodobnosť, že vo výbere je aspoň jeden basketbalista.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{10}{0}\cdot\binom{20}{10-0}}{\binom{30}{10}} = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$$

3. *Stredná hodnota, rozptyl a smerodajná odchýlka počtu basketbalistov vo výbere*

Počítame:

$$p = \frac{M}{N} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$\mu = n\,p = 10 \times \frac{1}{3} = 3{,}333$$

$$\sigma^2 = n\,p\,(1-P)\frac{N-n}{N-1} = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{30-10}{30-1} = 1{,}532567 = 1{,}2379^2$$

2.1.7 Poissonovo rozdelenie

Ciele výučby

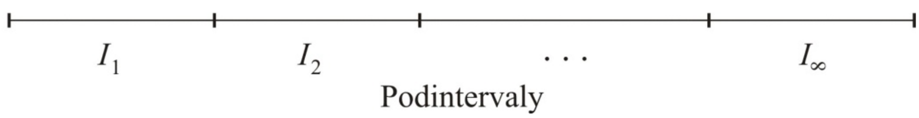
- Vysvetliť termín *Poissonov proces*
- Opísať rozdelenie pravdepodobnosti Poissonovej náhodnej premennej.
- Určiť pravdepodobnostnú funkciu, strednú hodnotu a rozptyl Poissonovej náhodnej premennej.
- Porovnať Poissonovo rozdelenie s binomickým.

Poissonov proces

Predpokladajme, že výskyt udalosti na intervale (časovom, dĺžkovom, plošnom, priestorovom, atď.) je spočítateľný a interval možno rozdeliť na <u>čiastkové intervaly</u>. Potom náhodný experiment sa nazýva Poissonov proces (Obr. 2.5), keď platí:

1. Pravdepodobnosť viac ako jedného výskytu v čiastkovom intervale je približne nulová.
2. Výskyty udalosti v neprekrývajúcich sa čiastkových intervaloch sú stochasticky nezávislé.
3. Pravdepodobnosť výskytu jednej udalosti v čiastkovom intervale je <u>rovnaká</u> pre všetky čiastkové intervaly a <u>proporcionálna</u> dĺžke čiastkového intervalu.

Možné výsledky udalostí	0	1	0	1	. . .	0	1
Pravdepodobnosť ich výskytu	1-p	p	1-p	p		1-p	p



Obr. 2.5. *Poissonov proces*

Inými slovami povedané, Poissonov proces je binomický experiment s nekonečným počtom n pokusov. Napríklad: počet nezhodných produktov, počet zákazníkov v obchode, počet automobilových nehôd, počet prijatých e-mailov.

Poissonova náhodná premenná

Poissonova náhodná premenná X reprezentuje počet výskytov udalosti, o ktorú sa zaujímame, v zadanom jednotkovom intervale (časovom, priestorovom a pod.)

Pravdepodobnostná funkcia d. n. p. X je daná vzťahom:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Stredná hodnota a rozptyl d. n. p. X sú dané vzťahmi:

$$\mu = \lambda \quad \text{a} \quad \sigma^2 = \lambda\,.$$

Poznámka. Na definovanie Poissonovej náhodnej premennej X a zodpovedajúceho parametra λ použite konzistentné jednotky. Napríklad:

X **Počty/jednotkový interval**	λ **Priemerné počty/jednotkový interval**
Počet kazov na disku	1
Počet kazov na 10 diskoch	10
Počet kazov na 100 diskoch	100

Poissonovo rozdelenie verzus binomické rozdelenie

V Poissonovom rozdelení je počet pokusov nekonečný, kým v binomickom rozdelení je počet pokusov konečný (pozri tabuľku 2.3). Inak povedané, Poissonovo rozdelenie s $E(X) = \lambda$ je limitný prípad binomického rozdelenia s $E(X) = n\,p$

$$\lim_{x\to\infty} Bi(n,p) = \lim_{x\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \lim_{x\to\infty}\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Dôkaz.

Nech X je binomická náhodná premenná s parametrami n a p, a nech $\lambda = n\,p$.

Potom

$$\lim_{x\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}.$$

Keď n rastie nad všetky medze, potom platí:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(-n/\lambda)}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda}=e^{-\lambda}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}=1.$$

Preto

$$\lim_{x\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Tab. 2.6 *Vlastnosti binomického rozdelenia a Poissonovho rozdelenia*

Rozdelenie	Rozsah základného súboru*	Parametre		
		Pravdepodobnosť pre „áno“	Počet pokusov n	Početnosť pre „áno“
Binomické	nekonečný	p = konštanta °	konštantný	premenná X
Poissonovo	nekonečný	$p=\lambda/n$ = konštanta	nekonečný	premenná X

* Keď sa jednotka vybraná zo základného súboru vráti späť do súboru pred nasledujúcim pokusom, rozsah základného súboru sa považuje za nekonečný i keď môže byť konečný.

° Keď je pravdepodobnosť p konštantná, pokusy sa považujú za nezávislé, v opačnom prípade sú pokusy závislé.

Príklad 2.7

Počet zákazníkov, ktorí nakupujú v miestnom obchode sa riadi Poissonovým rozdelením so strednou hodnotou 5 zákazníkov každých 10 minút.

1. *Pravdepodobnostná funkcia Poissonovho rozdelenia*

Určíme pravdepodobnostnú funkciu počtu zákazníkov X, ktorí prídu nakupovať každú hodinu.

Stredná hodnota d. n. p. X je

$\lambda=E(X)=5$ zákazníkov/10 minút × 60 minút = 30 zákazníkov/hodina.

Teda pravdepodobnostná funkcia d. n. p. X je daná vzťahom:

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-30}30^x}{x!},\quad x=0,1,2,\dots.$$

2. *Pravdepodobnosť*
Nájdite pravdepodobnosť, že do obchodu príde práve 40 zákazníkov za hodinu.

$$f(40) = P(X = 40) = \frac{e^{-30}30^{40}}{40!} = 0{,}014 = 1{,}4\ \%$$

3. *Stredná hodnota, rozptyl a smerodajná odchýlka* počtu zákazníkov za hodinu
Počítajme:

$$\mu = \lambda = 30$$

$$\sigma^2 = \lambda = 30$$

$$\sigma = \sqrt{30} = 5{,}478.$$

2.2 Spojité náhodné premenné

2.2.1 Rozdelenia pravdepodobnosti a hustoty

Ciele výučby

- Vysvetliť termíny *hustota* (pravdepodobnosti) s. n. p. *X*.
- Stanoviť pravdepodobnosť spojitej náhodnej premennej pomocou zodpovedajúcej hustoty.

Rozdelenie pravdepodobnosti

Rozdelenie pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej (s. n. p.) X je jednoznačne definované pomocou **hustoty (pravdepodobnosti)** $f(x)$ alebo **distribučnej funkcie** $F(x)$

Hustota (pravdepodobnosti)

Hustota $f(x)$ spojitej náhodnej premennej X spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,
3. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ pre ľubovoľné x_1 a x_2
4. $P(X = x) = 0$.

Z vlastnosti hustoty vyplýva, že

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2)\,.$$

Príklad 2.8

Predpokladajme, že s. n. p. X má hustotu

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{inde.} \end{cases}$$

Vypočítame nasledujúce *pravdepodobnosti*: $P(X<2)$, $P(2\le X<4)$ a $P(X\ge 4)$.

a) $P(X<2)=\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^2 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^2=0{,}86$;

b) $P(2\le X<4)=\int\limits_2^4 f(x)dx=\int\limits_2^4 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_2^4=-e^{-4}+e^{-2}=0{,}12$;

c) $P(X\ge 4)=\int\limits_4^\infty f(x)dx=\int\limits_4^\infty e^{-x}dx=\lim\limits_{x\to\infty}(-e^{-x})+e^{-4}=0{,}02$.

Poznámka. $P(X<2)+P(2\le X<4)+P(X\ge 4)=1$

2.2.2 Distribučné funkcie

Ciele výučby

- Vysvetliť termíny *distribučná funkcia s. n. p.* X .
- Stanoviť distribučnú funkciu spojitej náhodnej premennej.

Distribučná funkcia (d. f.)

Distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X je

$$F(x)=P(X\le x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)du$$

a spĺňa nasledujúce vlastnosti:

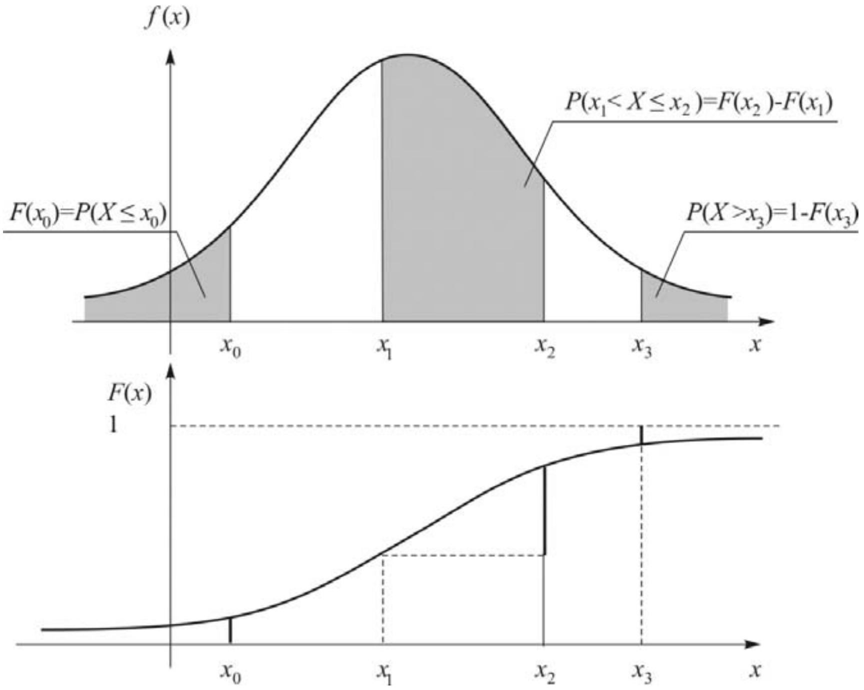
1. $0\le F(x)\le 1$,
2. $F(x_1)\le F(x_2)$ ak $x_1<x_2$,
3. $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$ pre všetky x, pre ktoré existuje derivácia,
4. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ a $F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$.

Ďalšie vlastnosti hustoty a distribučnej funkcie

1. $P(X \le x_0) = F(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$

2. $P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

3. $P(X \ge x_3) = 1 - F(x_3) = \int\limits_{x_3}^{\infty} f(x)dx$



Obr. 2.6. *Vlastnosti hustoty a distribučnej funkcie*

Príklad 2.9

Nech definovaná hustota premennej *X* (Príklad 2.8) je:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inde.} \end{cases}$$

Určíme *distribučnú funkciu* premennej *X*. Pri výpočte použijeme hustotu premennej X . Potom platí:

$$F(x) = P(X \le x) = \int\limits_0^x f(u)du = \int\limits_0^x e^{-u}du = \left[-e^{-u}\right]_0^x = -e^{-x} + e^{-0} = 1 - e^{-x}.$$

Preto

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & 0\le x.\end{cases}$$

2.2.3 Číselné charakteristiky spojitej náhodnej premennej

Ciele výučby

- Vypočítať strednú hodnotu, rozptyl, smerodajnú odchýlku, kvantily, medián a modus s. n. p. X.

Stredná hodnota X (μ)

Stredná hodnota (očakávaná hodnota) s. n. p. X je daná vzťahom:

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx\,.$$

Rozptyl (disperzia) X (σ^2)

Rozptyl s. n. p. X je daný vzťahom:

$$\sigma^2=D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\mu^2\,.$$

Smerodajná odchýlka X (σ)

Smerodajná odchýlka s. n. p. X je daná vzťahom:

$$\sigma=\sqrt{D(X)}\,.$$

Príklad 2.10

Hustota premennej X je definovaná (Príklad 2.8)

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{inde.}\end{cases}$$

Určíme strednú hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku premennej X.

1. *Stredná hodnota* premennej X je

$$\mu=\int_0^{\infty}x\,f(x)dx=\int_0^{\infty}x\,e^{-x}dx\,.$$

Použijeme integráciu metódou per-partes a dostaneme:

$$\mu = \int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{x\to\infty}\left(-xe^{-x}\right) + \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{x\to\infty}(e^{-x}) + e^0 = 1.$$

2. *Rozptyl premennej* X je

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 f(x)dx - \mu^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx - \mu^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx - 1.$$

Integrál vypočítame metódou per-partes:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = \lim_{x\to\infty}(-x^2e^{-x}) + 0^2 e^{-0} + \int_0^\infty 2xe^{-x}dx = 2\int_0^\infty xe^{-x}dx = 2\times 1 = 2.$$

Preto

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx - 1 = 2 - 1 = 1.$$

3. *Smerodajná odchýlka* premennej X je $\sigma = 1$.

2.2.4 Spojité rovnomerné rozdelenie

Ciele výučby

- Vysvetliť rozdelenie pravdepodobnosti spojitej rovnomernej náhodnej premennej (s. r. n. p.) *X*.
- Stanovenie hustoty, distribučnej funkcie, strednej hodnoty, rozptylu a smerodajnej odchýlky s. r. n. p. *X*.

Hustota

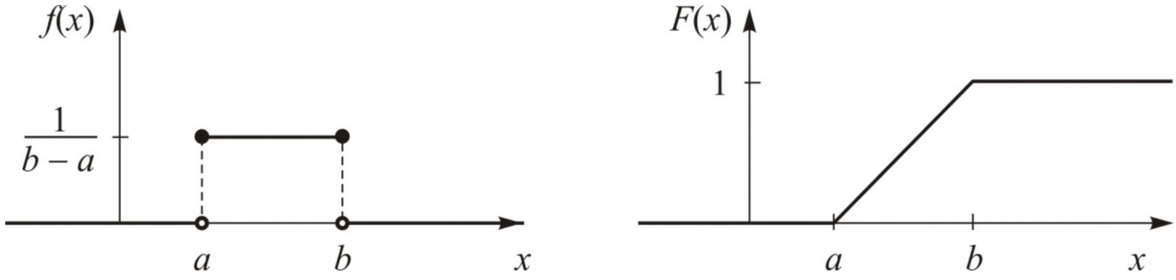
Spojitá rovnomerne rozdelená náhodná premenná *X* má konštantnú **hustotu**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{pre } a \le x \le b \\ 0, & \text{inde.} \end{cases}$$

Distribučná funkcia

Spojitá rovnomerne rozdelená náhodná premenná *X* má **distribučnú funkciu**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & b \le x. \end{cases}$$



Obr. 2.7. *Spojité rovnomerné rozdelenie*

Stredná hodnota a rozptyl premennej X sú dané vzťahmi

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \text{a} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, \text{ kde } a \le x \le b.$$

Príklad 2.11

Predpokladáme, že generátor náhodných čísel produkuje reálne čísla, ktoré sú rovnomerne rozdelené medzi číslami 0 a 100. Stanovíme hustotu, distribučnú funkciu, pravdepodobnosť, strednú hodnotu a rozptyl vygenerovanej náhodnej premennej X.

1. *Hustota*

Vieme, že $a = 0$ a $b = 100$. Potom platí:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{100-0} = \frac{1}{100}, \quad 0 \le x \le 100.$$

2. *Distribučná funkcia*

Pre $0 < x < 100$ platí, že $F(x) = \int_0^x \frac{1}{100-0}\,du = \frac{x}{100-0} - \frac{0}{100-0} = \frac{x}{100}$, potom

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{100}, & 0 \le x < 100 \\ 1, & 100 \le x. \end{cases}$$

3. *Pravdepodobnosť*

Nájdeme pravdepodobnosť, že vygenerovaná náhodná premenná X nadobúda hodnoty medzi 10 a 90.

$$P(10 \le X \le 90) = \int_{10}^{90} f(x)\,dx = \int_{10}^{90} \frac{1}{100}\,dx = \frac{1}{100} \times [x]_{10}^{90} = \frac{1}{100} \times (90-10) = \frac{4}{5}.$$

4. *Stredná hodnota a rozptyl*

Vypočítame strednú hodnotu a rozptyl vygenerovanej náhodnej premennej *X*.

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+100}{2} = 50\,,$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(100-0)^2}{12} = 833{,}333 = 28{,}8675^2\,.$$

2.2.5 Normálne a normované normálne rozdelenie

Ciele výučby

- Opísať vlastnosti normálneho rozdelenia.
- Normovať normálnu náhodnú premennú.
- Použiť štatistické tabuľky na výpočet pravdepodobností.

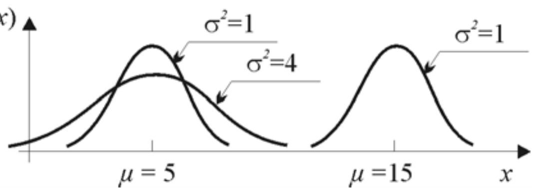
Hustota

Normálna náhodná premenná so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2 má **hustotu**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,, \text{ kde } -\infty \le x \le \infty$$

Normálne (Laplaceovo – Gaussovo) rozdelenie so **strednou hodnotou** μ a **rozptylom** σ^2, označované ako $N(\mu,\sigma^2)$, je symetrické okolo μ a má tvar zvona (Obr. 2.8). Zo symetrie grafu normálneho rozdelenia vyplýva

$$P(X < \mu) = P(X > \mu) = 0{,}5$$

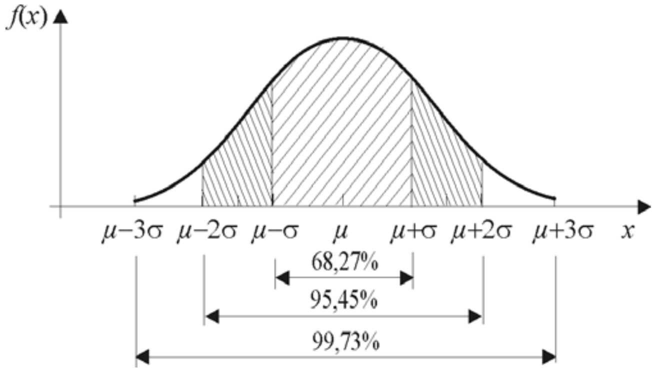


Obr. 2.8. *Gaussové krivky pre vybrané hodnoty parametrov* μ *a* σ^2

Parametre μ a σ^2 určujú stred (polohu) a tvar normálnej (Gaussovej) krivky. Na Obr. 2.8 vidieť, že čím je väčšia stredná hodnota μ, tým viac vpravo je lokalizovaný stred Gaussovej krivky; čím je menší rozptyl σ^2, tým je špicatejšia Gaussova krivka.

Pravdepodobnosti normálneho rozdelenia

Na obr. 2.9 sú prezentované vybrané pravdepodobnosti normálneho rozdelenia. Plocha pod Gaussovou krivkou mimo intervalu $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ je pomerne malá (menšia ako 0,003). Pretože 99,73 % možných hodnôt premennej X leží vnútri intervalu $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$, rozpätie 6σ sa považuje za **šírku normálneho rozdelenia**.



Obr. 2.9. *Pravdepodobnosti normálneho rozdelenia*

Normovaná normálna náhodná premenná

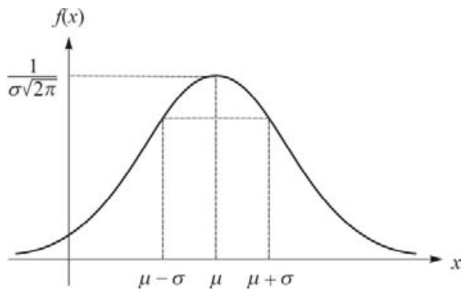
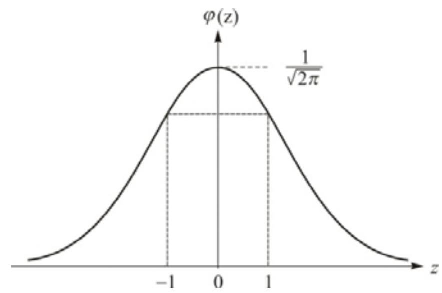
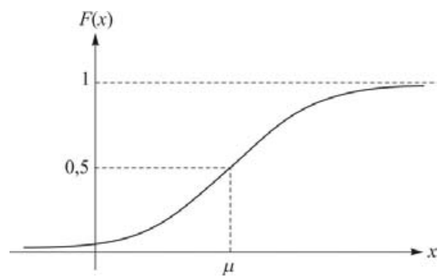
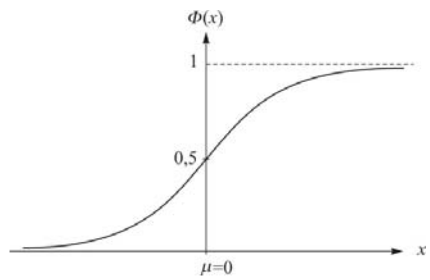
Ľubovoľnú normálnu náhodnú premennú X s parametrami μ a σ^2 možno transformovať na <u>normovanú normálnu náhodnú premennú</u> Z s parametrami $\mu = 1$ a $\sigma^2 = 1$, označovanú ako $Z \sim N(0,1)$.

Tab. 2.7. *Vzťah medzi distribučnými funkciami*

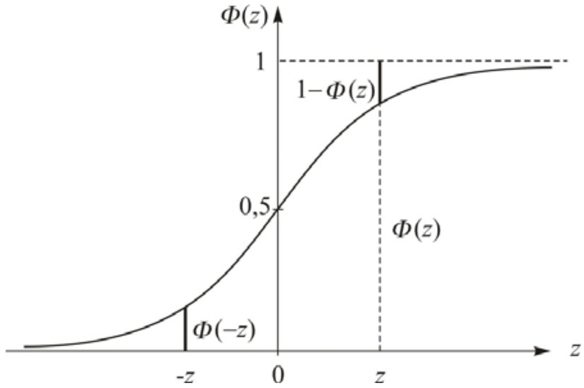
Transformácia		
$N(\mu,\sigma^2)$	$\rightarrow$	$N(0,1)$
X	$\rightarrow$	$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$
x	$\rightarrow$	$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$
$F(x) = P(X \le x)$	$\rightarrow$	$\Phi(z) = P(Z \le z)$
$F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$		

Poznámka. Hodnotu z nazývame **z-skóre**.

Tab. 2.8. *Stručný prehľad porovnania normálneho a normovaného normálneho rozdelenia*

Rozdelenie	normálne	normované normálne
označenie	$N(\mu,\sigma^2)$	$N(0,1)$
náhodná premenná (n. p.)	X	$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$
hodnota n. p.	x	$z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$
stredná hodnota	$\mu=E(X)\in R$	$\mu=0$
rozptyl	$\sigma^2=D(X)\in R^+$	$\sigma^2=1$
hustota	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ pre $-\infty<x<\infty$  	$\varphi(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$ pre $-\infty<z<\infty$ 
distribučná funkcia	$F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t$ pre $-\infty<x<\infty$  	$\Phi(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ pre $-\infty<z<\infty$ 
vlastnosti rozdelenia	– symetrické okolo μ – má tvar zvona $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=68{,}27\,\%$ $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=95{,}45\,\%$ $P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=99{,}73\,\%$	– symetrické okolo nuly – má tvar zvona $P(-1<Z<1)=68{,}27\,\%$ $P(-2<Z<2)=95{,}45\,\%$ $P(-3<X<3)=99{,}73\,\%$

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(-z) + \Phi(z) = 1$



Obr. 2.10. *Graf distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia*

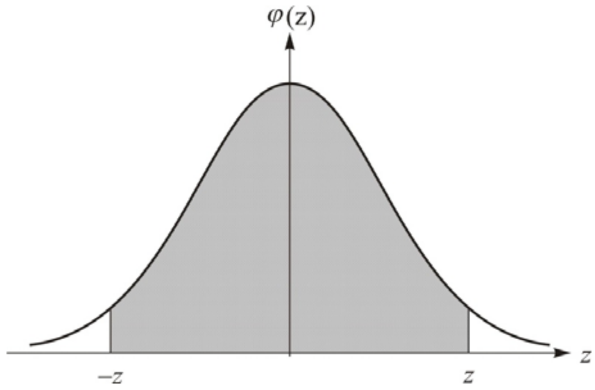
Na výpočet pravdepodobností používame **štatistické tabuľky**, v ktorých sú uvedené hodnoty distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ pre dané z.

Príklad 2.12

1. Vypočítajme nasledovné *pravdepodobnosti*:
   a) $P(Z > 2{,}11) = 1 - P(Z \le 2{,}11) = 1 - 0{,}98257 = 0{,}01743$
   b) $P(Z < -0{,}41) = P(Z > 0{,}41) = 1 - P(Z \le 0{,}41) = 1 - 0{,}65910 = 0{,}3409$
   c) $P(Z > -2.91) = P(Z < 2{,}91) = 0{,}99819$
   d) $P(-1{,}09 < Z < 2{,}37) = \Phi(2{,}37) - \Phi(-1{,}09) =$
   $$= \Phi(2{,}37) - \left(1 - \Phi(1{,}09)\right) =$$
   $$= 0{,}99111 - (1 - 0{,}86214) =$$
   $$= 0{,}99111 - 0{,}13786 = 0{,}85325$$
   e) $P(Z \le -4{,}6)$ – nie je v bežne uvádzaných tabuľkách. Na jej výpočet použijeme niektorý zo štatistických softvérov Statgraphics, Minitab, Statistica, SPSS, SPlus a ďalších. Použitím Statgraphics je $P(Z \le -4{,}6) = 2{,}11464 \cdot 10^{-6}$.

2. Nájdime *hodnotu z* tak, aby $P(Z > z) = 0{,}02$ Tento výraz môžeme prepísať ako $1 - P(Z \le z) = 0{,}02 \ \Leftrightarrow \ P(Z \le z) = 0{,}98$. Teraz použijeme tabuľky opačne. Vyhľadáme pravdepodobnosť, ktorá je najbližšia hodnote 0,98. Pretože v tabuľkách nenájdeme presnú hodnotu 0,98, najbližšia hodnota pravdepodobnosti je 0,98030. Zodpovedá jej hodnota $z = 2{,}06$.

3. Nájdime *hodnotu z*, pre ktorú platí: $P(-z < Z < z) = 0,98$. Zo symetrie normovaného normálneho rozdelenia vyplýva nasledovné: ak vyznačená plocha na Obr. 2.11 je rovná 0,98, zvyšná plocha na každej strane musí byť $(1\text{-}0,98)/2 = 0,01$. Preto hodnota z zodpovedá pravdepodobnosti 0,99. K nej najbližšia tabuľková hodnota pravdepodobnosti je 0,99010, ktorej zodpovedá hodnota $z = 2,33$.



Obr. 2.11

Príklad 2.13

Šírka linky vyrábaného polovodiča má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0,5 μm (mikrometrov) a smerodajnou odchýlkou 0,05 μm.

1. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že šírka linky je väčšia ako 0,62 μm.

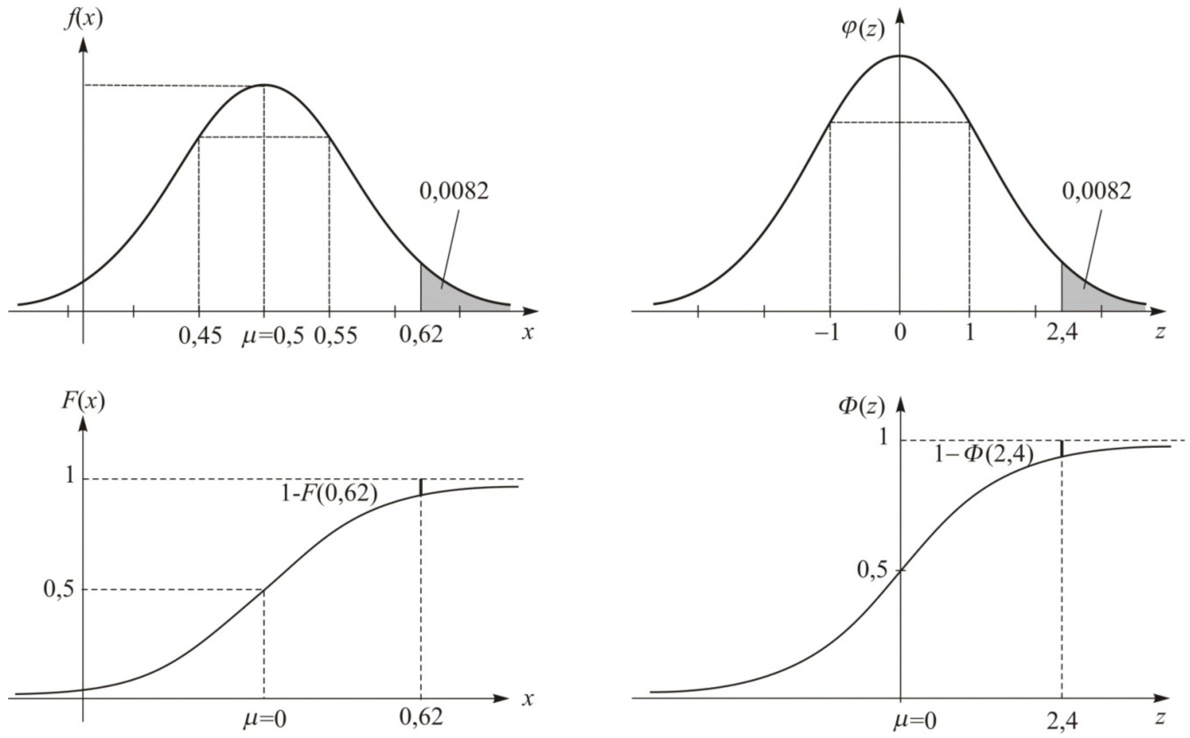
Keď označíme šírku linky ako X, potom jej rozdelenie je $X \sim N(0,5; 0,05^2)$. Vypočítame nasledujúcu pravdepodobnosť (Obr. 2.12):

$$P(X > 0,62) = 1 - P(X \leq 0,62) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0,62 - 0,5}{0,05} \right) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 2,4) = 1 - \Phi(2,4) =$$
$$= 1 - 0,9918 = 0,0082 = 0,82\,\%$$

2. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že šírka linky je medzi 0,47 μm a 0,63 μm.

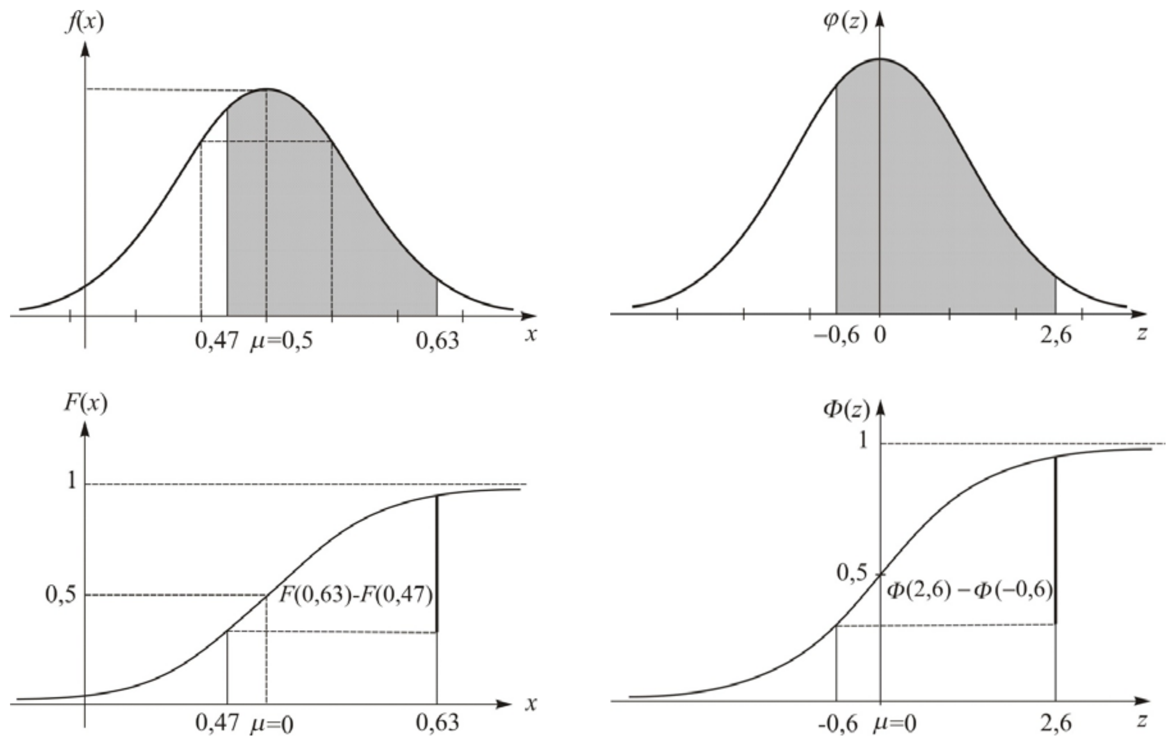
Počítame nasledujúcu pravdepodobnosť (Obr. 2.13):

$$P(0,47 \leq X \leq 0,63) = P\left(\frac{0,47 - 0,5}{0,05} \leq Z \leq \frac{0,63 - 0,5}{0,05} \right) = P(-0,6 \leq Z \leq 2,6) =$$
$$= \Phi(2,6) - (1 - \Phi(0,6) = 0,9953 - 1 + 0,7257 = 0,721 = 72,1\,\%$$



a) b)

Obr. 2.12



a) b)

Obr. 2.13

3. Chceme nájsť takú hodnotu x, že pravdepodobnosť výskytu hodnôt z výberu menších ako x, je 90 % (Obr. 2.14)

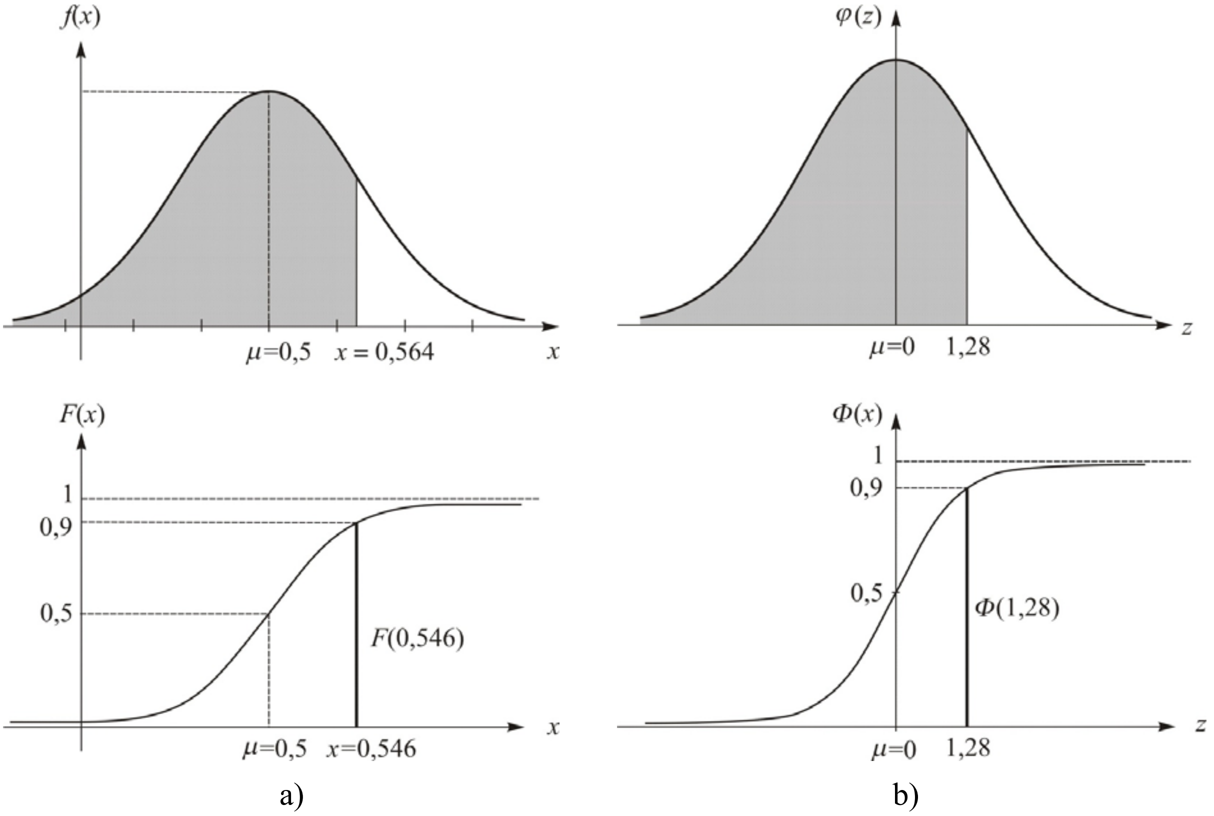
Hľadáme hodnotu x, pre ktorú platí:

$$P(X < x) = 0,90$$

$$P\left(Z < \frac{x - 0,5}{0,05}\right) = P(Z < z) = 0,90$$

Najbližšia hodnota pravdepodobnosti k hodnote 0,90, ktorú sme našli v štatistických tabuľkách, je 0,8997. Zodpovedá jej hodnota $z = 1,28$.

Potom $\frac{x - 0,5}{0,05} = 1,28$, odkiaľ $x = 1,28 \times 0,05 + 0,5 = 0,064 + 0,5 = 0,564$.



Obr. 2.14

3 VIACROZMERNÉ NÁHODNÉ PREMENNÉ

3.1 Dve diskrétne náhodné premenné

Ciele výučby

- Určiť združené, marginálne a podmienené pravdepodobnosti pre dve diskrétne náhodné premenné X a Y pomocou zodpovedajúcich rozdelení pravdepodobnosti.
- Vypočítať strednú hodnotu a rozptyl premenných X a Y pomocou zodpovedajúcich marginálnych rozdelení pravdepodobnosti.
- Vypočítať podmienenú strednú hodnotu a podmienený rozptyl premenných X a Y pomocou zodpovedajúcich podmienených rozdelení pravdepodobnosti.
- Posúdiť nezávislosť premenných X a Y.

Rozdelenia pravdepodobnosti dvoch náhodných premenných

Na opis stochastických vlastností dvoch náhodných premenných X a Y sa používajú tri druhy rozdelení pravdepodobnosti:

1. združené rozdelenie pravdepodobnosti,
2. marginálne rozdelenie pravdepodobnosti,
3. podmienené rozdelenie pravdepodobnosti.

Združená pravdepodobnostná funkcia

Združená pravdepodobnostná funkcia (p. f.) $f_{XY}(x,y)$ dvoch diskrétnych náhodných premenných X a Y spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $f_{XY}(x,y) \geq 0$,
2. $\sum\limits_x \sum\limits_y f_{XY}(x,y) = 1$,
3. $f_{XY}(x,y) = P\big(X = x, Y = y\big)$.

Združená distribučná funkcia

Združená distribučná funkcia $F_{XY}(x,y)$ dvoch diskrétnych náhodných premenných X a Y je definovaná

$$F(x,\ y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i,\ Y = y_j)$$

Udáva pravdepodobnosť <u>súčasného</u> nastania dvoch udalostí $\{X \le x\}$ a $\{Y \le y\}$.
Spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$ pre ľubovoľné reálne čísla x a y,
2. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$,
3. $F(\infty, \infty) = \lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y) = 1$,
4. $P\left(x_1 < X \le x_2,\, y_1 < Y \le y_2\right) = F\left(x_2, y_2\right) + F\left(x_1, y_1\right) - F\left(x_2, y_1\right) - F\left(x_1, y_2\right)$.

Poznámka. $F(x, y)$ je neklesajúca funkcia vzhľadom k obidvom premenným

Stredná hodnota a rozptyl premenných X a Y sú

$$E(X,Y) = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot f_{XY}(x,y),$$

$$D\left(X,Y\right) = \sigma_{XY}^2 = E(X^2,Y^2) - \left(E(X,Y)\right)^2.$$

Marginálna pravdepodobnostná funkcia

Marginálne pravdepodobnostné funkcie dvoch diskrétnych náhodných premenných X a Y so združenou p. f. $f_{XY}(x,y)$ sú

$$f_X(x) = P\left(X = x\right) = \sum_{R_x} f_{XY}(x,y),$$

$$f_Y(y) = P\left(Y = y\right) = \sum_{R_y} f_{XY}(x,y),$$

kde R_X je množina všetkých bodov v obore hodnôt náhodného vektora (X, Y) pre $X = x$ a R_y je množina všetkých bodov v obore hodnôt náhodného vektora (X, Y) pre $Y = y$.

Marginálna p. f. $f_X(x)$ spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f_X(x) = P(X = x) \ge 0$,
2. $\sum\limits_x f_X(x) = 1$.

Podobné vzťahy platia pre $f_Y(y)$.

Stredná hodnota a rozptyl premennej X sú

$$E(X) = \mu_X = \sum_x x f_X(x),$$

$$D\left(X\right) = \sigma_X^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x) = \sum_x x^2 f_X(x) - \mu_X^2.$$

Marginálna distribučná funkcia

Marginálne distribučné funkcie dvoch diskrétnych náhodných premenných X a Y sú

$$F_X(x) = P\left(X \le x,\ Y \in R\right) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j} f_{XY}(x_i, y_j)\,,$$

$$F_Y(y) = P\left(X \in R,\ Y \le y\right) = \sum_{x_i} \sum_{y_j \le y} f_{XY}(x_i, y_j)\,.$$

Podmienená pravdepodobnostná funkcia

Pripomenieme vzorec pre podmienenú pravdepodobnosť: $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$. Podobne podmienená pravdepodobnostná funkcia premennej X za podmienky $Y = y$, označovaná ako $f_{X|y}(x)$, so združenou p. f. $f_{XY}(x, y)$ je

$$f_{X|y}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Podmienená p. f. $f_{X|y}(x)$ spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f_{X|y}(x) \ge 0$,
2. $\sum_x f_{X|y}(x) = 1$.

Podobné vzťahy platia pre $f_{Y|x}(y)$.

Podmienená stredná hodnota a podmienený rozptyl premennej X za podmienky $Y = y$ sú

$$E(X|y) = \mu_{X|y} = \sum_x x f_{X|y}(x)\,,$$

$$D\left(X|y\right) = \sigma^2_{X|y} = \sum_x (x - \mu_{X|y})^2 f_{X|y}(x) = \sum_x x^2 f_{X|y}(x) - \mu^2_{X|y}\,.$$

Podobné vzťahy platia pre $E(Y|x), D(Y|x)$.

Nezávislosť náhodných premenných

Dve náhodné premenné X a Y sú nezávislé, keď znalosť premennej X nemá žiadny vplyv na ľubovoľné pravdepodobnosti premennej Y a naopak. Teda dve nezávislé náhodné premenné X a Y spĺňajú niektorý z nasledujúcich vzťahov:

1. $f_{X|y}(x) = f_X(x)$,
2. $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$,
3. $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Príklad 3.1

Skúmame počet chýb na prednej strane (X) dreveného panela a počet chýb na zadnej strane (Y) dreveného panela.

1. Predpokladajme, že *združená p. f. premenných* X a Y je

$$f_{XY}(x,y) = c(x+y)\,,\ x = 1,2,3 \text{ a } y = 1,2,3\,.$$

Určíme hodnotu c.

Združená p. f. $f_{XY}(x,y)$ musí spĺňať nasledujúce vlastnosti:

a) $f_{XY}(x,y) = c(x+y) \geq 0$,

b) $\sum_x \sum_y f_{XY}(x,y) = 1$.

Z prvej vlastnosti vyplýva, že $c \geq 0$, pretože $x > 0$ a $y > 0$.

Z druhej vlastnosti dostaneme:

$$\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} f(x,y) = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} c(x+y) = 36c = 1 \Rightarrow c = 1/36\,.$$

Potom združená p. f. premennej X a Y je

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{36}(x+y)\,,\ x = 1,2,3 \text{ a } y = 1,2,3\,.$$

2. *Určíme marginálnu p. f. premennej X. Nájdeme strednú hodnotu a rozptyl premennej X.*

Marginálne pravdepodobnosti premennej X sú:

$$f_X(1) = \sum_{y=1}^{3} f_{XY}(1,y) = \sum_{y=1}^{3} \frac{1}{36}(1+y) = \frac{1}{36}\cdot 9 = \frac{1}{4}\,,$$

$$f_X(2) = \sum_{y=1}^{3} f_{XY}(2,y) = \sum_{y=1}^{3} \frac{1}{36}(2+y) = \frac{1}{36}\cdot 12 = \frac{1}{3}\,,$$

$$f_X(3) = \sum_{y=1}^{3} f_{XY}(3,y) = \sum_{y=1}^{3} \frac{1}{36}(3+y) = \frac{1}{36}\cdot 15 = \frac{5}{12}\,.$$

Všimnime si, že $\sum_x f_X(x) = f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) = 1$.

Stredná hodnota a rozptyl sú

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = 1\cdot f_X(1) + 2\cdot f_X(2) + 3\cdot f_X(3) =$$

$$= 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{5}{12} = 2{,}17$$

$$D(X) = \sigma_X^2 = \left(\sum_{x=1}^{3} x^2 f_X(x)\right) - \mu_X^2 =$$

$$=\left(1^2\cdot f_X(1)+2^2\cdot f_X(2)+3^2\cdot f_X(3)\right)-2{,}17^2=$$

$$=\left(1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{5}{12}\right)-2{,}17^2=0{,}80^2$$

3. *Určíme podmienenú p. f. premennej Y za podmienky* $X=2$. *Nájdeme podmienenú strednú hodnotu a podmienený rozptyl premennej Y za podmienky* $X=2$.

Podmienené pravdepodobnosti premennej *Y* za podmienky $X=2$ sú:

$$f_{Y|2}(1)=\frac{f_{XY}(2,1)}{f_X(2)}=\frac{(1/36)(2+1)}{1/3}=\frac{1}{4},$$

$$f_{Y|2}(2)=\frac{f_{XY}(2,2)}{f_X(2)}=\frac{(1/36)(2+2)}{1/3}=\frac{1}{3},$$

$$f_{Y|2}(3)=\frac{f_{XY}(2,3)}{f_X(2)}=\frac{(1/36)(2+3)}{1/3}=\frac{5}{12}.$$

Všimnime si, že $\sum_y f_{Y|2}(y)=f_{Y|2}(1)+f_{Y|2}(2)+f_{Y|2}(3)=1$.

Podmienená stredná hodnota a podmienený rozptyl premennej *Y* za podmienky $X=2$ sú:

$$E(Y|2)=\mu_{Y|2}=\sum_{y=1}^{3} yf_{Y|2}(y)=1\cdot f_{Y|2}(1)+2\cdot f_{Y|2}(2)+3\cdot f_{Y|2}(3)=$$

$$=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{5}{12}=2{,}17,$$

$$D(Y|2)=\sigma^2_{Y|2}=\left(\sum_{y=1}^{3} y^2 f_{Y|2}(y)\right)-\mu^2_{Y|2}=$$

$$=\left(1^2\cdot f_{Y|2}(1)+2^2\cdot f_{Y|2}(2)+3^2\cdot f_{Y|2}(3)\right)-2{,}17^2=$$

$$=\left(1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{5}{12}\right)-2{,}17^2=0{,}80^2.$$

4. *Overíme, či počet chýb na prednej strane (* X *) dreveného panela a počet chýb na zadnej strane panela (* Y *) sú nezávislé.*

Overíme, či

$$f_{XY}(1,1)=f_X(1)\cdot f_Y(1).$$

Vieme, že $f_{XY}(1,1)=\frac{1}{36}(1+1)=\frac{1}{18}$, $f_X(1)=\frac{1}{4}$ a $f_Y(1)=\frac{1}{4}$, potom

$$\left(f_{XY}(1,1)=\frac{1}{18}\right)\neq\left(f_X(1)f_Y(1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\right).$$

Z toho vyplýva, že počet chýb na prednej strane (X) dreveného panela a počet chýb na zadnej strane (Y) dreveného panela nie sú nezávislé.

3.2 Viacrozmerné diskrétne náhodné premenné

3.2.1 Združené rozdelenia pravdepodobnosti

Ciele výučby

- Vysvetliť združené, marginálne a podmienené rozdelenie pravdepodobnosti viacrozmerných diskrétnych náhodných premenných.
- Vysvetliť nezávislosť viacrozmerných diskrétnych náhodných premenných.

Združená pravdepodobnostná funkcia

Združená pravdepodobnostná funkcia *n* diskrétnych náhodných premenných $X_1, X_2, ..., X_n$ je daná vzťahom

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n)$$

a definovaná pre všetky $x_1, x_2, ..., x_n$ z oboru hodnôt premenných $X_1, X_2, ..., X_n$.

Marginálna pravdepodobnostná funkcia

Nech diskrétne náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ majú združenú p. f. $f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$, potom marginálna pravdepodobnostná funkcia premennej X_i je

$$f_{X_i}(x_i) = P(X_i = x_i) = \sum_{R(x_i)} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) ,$$

kde $R(x_i)$ je množina bodov z oboru hodnôt premenných $X_1, X_2, ..., X_n$, pre ktoré $X_i = x_i$.

Nezávislosť náhodných premenných

Diskrétne náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé vtedy a len vtedy, ak

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) \text{ pre všetky } x_1, x_2, ..., x_n .$$

3.2.2 Multinomické rozdelenia pravdepodobnosti

Ciele výučby

- Opísať rozdelenie pravdepodobnosti multinomických náhodných premenných.
- Určiť marginálne rozdelenie pravdepodobnosti multinomických náhodných premenných.

Multinomické náhodné premenné

Predpokladajme, že

1. náhodný experiment sa skladá z n pokusov;
2. výsledok každého pokusu možno zatriediť do jednej z k tried;
3. multinomické náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_k$ reprezentujú počet výsledkov, ktoré patria do tried $Tr_1, Tr_2, \ldots, Tr_k$;
4. $p_1, p_2, \ldots, p_k$ označujú pravdepodobnosti výsledkov patriacich do tried $Tr_1, Tr_2, \ldots, Tr_k$;
5. $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sú konštanty v priebehu n opakovaných pokusov.

Potom $X_1, X_2, ..., X_k$ majú multinomické rozdelenie so **združenou p. f.**

$$f_K(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_1^{x_1} \cdots p_1^{x_1},$$

kde $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ a $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

Všimnime si, že **marginálna p. f.** premennej X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ má binomické rozdelenie so strednou hodnotou a rozptylom

$$E(X_i) = \mu_{X_i} = np_i,$$

$$D(X_i) = \sigma_{X_i}^2 = np_i(1 - p_i).$$

Príklad 3.2

Maximálna sila stisku rúk v Newtonoch u dospelých ľudí je roztriedená do jednej z troch skupín: „malá“ − menej ako 222,4 N, „stredná“ − od 222,4 N do 444,8 N, „veľká“ – nad 444,8 N. Nech pravdepodobnosti, že dospelý človek patrí do skupiny „malá“, „stredná“ a „veľká“ sú 0,1; 0,7 a 0,2. Na skupine $n = 50$ ľudí sa merala sila stisku.

1. *Združená p. f. multinomického rozdelenia*

Chceme nájsť pravdepodobnosť, že 6 ľudí má malú silu stisku, 36 má strednú silu stisku a 8 ľudí má veľkú silu stisku.

Nech X_1, X_2, X_3 označujú počet ľudí, ktorý majú malú, strednú a veľkú silu stisku. Pretože $n = 50$, $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}7$ **a** $p_3 = 0{,}2$, **združená p. f. premenných** X_1, X_2, X_3 je

$$f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} = \frac{50!}{x_1!x_2!x_3!} 0{,}1^{x_1} 0{,}7^{x_2} 0{,}2^{x_3},$$

kde $x_1 + x_2 + x_3 = 50$.

Teda

$$f_{X_1X_2X_3}(6,36,8) = \frac{50!}{6!36!8!} 0{,}1^6 \times 0{,}7^{36} \times 0{,}2^8 = 0{,}019.$$

2. *Marginálna p. f. multinomického rozdelenia*

Nájdeme pravdepodobnosť, že 36 ľudí v skupine má strednú silu stisku.

Marginálna p. f. premennej X_2 má binomické rozdelenie s parametrami $n = 50$ a $p_2 = 0{,}7$.

Potom

$$f_{X_2}(x_2) = \binom{n}{x_2} p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n - x_2} = \binom{50}{x_2} 0{,}7^{x_2} 0{,}3^{50 - x_2}, \; x_2 = 0, 1, \ldots, 50.$$

Teda

$$f_{X_2}(36) = \binom{50}{36} 0{,}7^{36} \times 0{,}3^{50-36} = 0{,}119.$$

3.3 Dve spojité náhodné premenné

Ciele výučby

- Určiť združené, marginálne a podmienené pravdepodobnosti pre dve spojité náhodné premenné X a Y pomocou zodpovedajúcich rozdelení pravdepodobnosti.
- Vypočítať strednú hodnotu a rozptyl premenných X a Y pomocou zodpovedajúcich marginálnych rozdelení pravdepodobnosti.
- Vypočítať podmienenú strednú hodnotu a podmienený rozptyl premennej X za podmienky $Y = y$ a premennej Y za podmienky $X = x$ pomocou zodpovedajúcich podmienených rozdelení pravdepodobnosti.
- Posúdiť nezávislosť premenných X a Y.

Združená hustota

Združená hustota dvoch spojitých náhodných premenných X a Y spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f_{XY}(x,y) \geq 0$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$.

Marginálna hustota

Marginálne hustoty premenných X a Y so združenou hustotou $f_{XY}(x,y)$ sú

$$f_X(x) = \int\limits_y f_{XY}(x,y)dy,$$

$$f_Y(y) = \int\limits_x f_{XY}(x,y)dx.$$

Marginálne hustota premennej X spĺňa vlastnosti:

1. $f_X(x) \geq 0$,
2. $\int\limits_x f_X(x)dx = 1$.

Stredná hodnota a **rozptyl** premennej X sú

$$E(X) = \mu_X = \int\limits_x x f_X(x)dx,$$

$$D(X) = \sigma_X^2 = \int\limits_x (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx = \int\limits_x x^2 f_X(x)dx - \mu_X^2.$$

Podmienené rozdelenie pravdepodobnosti

Podmienená hustota premennej X za podmienky $Y = y$ so združenou hustotou $f_{XY}(x,y)$ je

$$f_{X|y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Podmienená hustota $f_{X|y}(x)$ spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f_{X|y}(x) \geq 0$,
2. $\int\limits_x f_{X|y}(x)dx = 1$.

Podmienená stredná hodnota a podmienený rozptyl premennej X za podmienky $Y = y$ sú

$$E(X|y) = \mu_{X|y} = \int\limits_x x f_{X|y}(x)dx,$$

Podobné vzťahy platia pre $f_Y(y), E(Y), D(Y), f(Y|x), E(Y|x), D(Y|x)$.

Nezávislosť náhodných premenných

Dve spojité náhodné premenné X a Y sú nezávislé práve vtedy, keď jedno z nasledujúcich tvrdení je správne:

1. $f_{X|y}(x) = f_X(x)$,
2. $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$,
3. $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Príklad 3.3

Na posúdenie povrchovej hladkosti papierového produktu sa používajú dve meracie metódy. Nech X a Y označujú merania každej z dvoch metód.

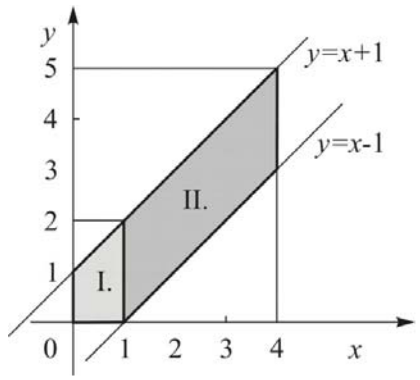
1. Predpokladajme, že *združená hustota* X a Y je

$$f_{XY}(x, y) = c, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < y, \; x - 1 < y < x + 1.$$

Určíme hodnotu c.

Obory hodnôt X a Y sú na nasledujúcom obrázku. Všimnime si, že oblasť integrácie pre premennú X je rozdelená na dve časti:

I. $0 < x \le 1$, $0 < y < x + 1$ a II. $1 < x < 4$, $x - 1 < y < x + 1$



Obr. 3.1

Združená hustota premenných X a Y musí spĺňať:

a) $f_{XY}(x, y) = c \ge 0$,

b) $\int\limits_y \int\limits_x f_{XY}(x, y) dxdy = 1$.

V prvej podmienke $c \ge 0$, pretože $x > 0$ a $y > 0$.

Podľa druhej podmienky počítame:

$$\int\limits_y \int\limits_x f_{XY}(x, y) dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x+1} c dydx + \int\limits_1^4 \int\limits_{x-1}^{x+1} c dydx = c\int\limits_0^1 (x+1) dx + c\int\limits_1^4 2dx =$$

$$= c\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1\right) + c\left(\left[2x\right]_1^4\right) = \frac{3}{2}c + 6c = 7{,}5c = 1$$

$c = 1/7{,}5 = 2/15$

Potom združená hustota premenných X a Y je

$$f_{XY}(x,y) = \frac{2}{15}, \quad 0 < x < 4, \quad x-1 < y < x+1.$$

2. *Nájdeme marginálnu hustotu, strednú hodnotu a rozptyl premennej X.*

Marginálna hustota premennej X je

$$f_X(x) = \int_y f_{XY}(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{x+1} \frac{2}{15}dy = \frac{2}{15}(x+1), & 0 < x \le 1 \\ \int_{x-1}^{x+1} \frac{2}{15}dy = \frac{2}{15}\times 2 = \frac{4}{15}, & 1 < x < 4. \end{cases}$$

Stredná hodnota a rozptyl premennej X sú

$$E(X) = \mu_X = \int_x xf(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{15}x(x+1)dx + \int_1^4 \frac{4}{15}xdx =$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right) + \frac{2}{15}\left(\left[x^2\right]_1^4\right) = \frac{2}{15}\cdot\frac{5}{6} + \frac{2}{15}\cdot 15 = \frac{19}{9} = 2{,}11$$

$$D(X) = \sigma_X^2 = \left(\int_x x^2 f(x)dx\right) - \mu_X^2 = \left(\int_0^1 \frac{2}{15}x^2(x+1)dx + \int_1^4 \frac{4}{15}x^2dx\right) - \left(\frac{19}{9}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right) + \frac{4}{15}\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4\right) - \left(\frac{19}{9}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{15}\cdot\frac{7}{12} + \frac{4}{15}\cdot\frac{63}{3} - \left(\frac{19}{9}\right)^2 = \frac{989}{810} = 1{,}221 = 1{,}11^2$$

3. *Nájdeme podmienenú hustotu, podmienenú strednú hodnotu a podmienený rozptyl premennej Y za podmienky* $X = 2$.

Podmienená hustota Y za podmienky $X = 2$ je

$$f_{Y|2}(y) = \frac{f_{XY}(2,y)}{f_X(2)} = \frac{2/15}{4/15} = \frac{1}{2}, \quad 1 < y < 3.$$

Podmienená stredná hodnota a podmienený rozptyl premennej Y za podmienky $X = 2$ sú

$$E(Y|2) = \mu_{Y|2} = \int_1^3 yf_{Y|2}(y)dy = \frac{1}{2}\int_1^3 ydy = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^3\right) = \frac{1}{4}\cdot(3^2-1) = 2,$$

$$D(Y\,|\,2) = \sigma_{Y|2}^2 = \int_1^3 y^2 f_{Y|2}(y)dy - \mu_{Y|2}^2 = \frac{1}{2}\int_1^3 y^2 dy - 2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^3\right) - 2^2 = \frac{1}{6}\cdot(3^3-1) - 2^2 = 0{,}33 = 0{,}58^2\,.$$

4. *Nezávislosť náhodných premenných*

Overte, či $f_{Y|2}(y) = f_Y(y)$:

$$f_{Y|2}(y) = \frac{f_{XY}(2,y)}{f_X(2)} = \frac{1}{2}, \quad 1 < y < 3\,.$$

Všimnime si, že obor hodnôt *X* pre $1 < y < 3$ je $y-1 < x < y+1$.

Potom marginálna hustota *Y* pre $1 < y < 3$ je

$$f_Y(y) = \int_x f_{XY}(x,y)dx = \int_{y-1}^{y+1} \frac{2}{15}dx = \frac{2}{15}\left([x]_{y-1}^{y+1}\right) = \frac{4}{15}, \quad 1 < y < 3\,.$$

Pretože $\left(f_{Y|2}(y) = \frac{1}{2}\right) \neq \left(f_Y(y) = \frac{4}{15}\right)$, merania dvomi metódami *X* a Y nie sú nezávislé.

3.4 Viacrozmerné spojité náhodné premenné

Ciele výučby

- Vysvetliť združené, marginálne a podmienené rozdelenie pravdepodobnosti viacrozmerných spojitých náhodných premenných.
- Vysvetliť nezávislosť viacrozmerných spojitých náhodných premenných.

Združená hustota

Združená hustota *n* spojitých náhodných premenných $X_1, X_2, ..., X_n$ spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n = 1$.

Marginálna hustota

Keď $f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ je združená hustota spojitých náhodných premenných X_1, X_2, ... X_n, potom marginálna hustota premennej X_i je

$$f_{X_i}(x_i)=\iint\limits_{R(x_i)}\cdots\int f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n\ ,$$

kde $R(x_i)$ je množina všetkých bodov oboru hodnôt premenných $X_1,X_2,...,X_n$, pre ktoré $X=x_i$.

Stredná hodnota a rozptyl

Pre **strednú hodnotu** premennej X_i platí vzťah

$$E(X_i)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_i f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

a pre **rozptyl** platí, že

$$D(X_i)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_i-\mu_{X_i})^2 f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n\ .$$

Nezávislosť náhodných premenných

Spojité náhodné premenné $X_1,X_2,...,X_n$ sú nezávislé vtedy a len vtedy keď platí:

$$f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,...,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\ldots f_{X_n}(x_n)$$

pre všetky $x_1,x_2,...,x_n$.

3.5 Kovariancia a korelácia

Ciele výučby

- Vysvetliť termíny *kovariancia* a *korelácia* medzi dvoma náhodných premenných *X* a *Y*.
- Vypočítať kovarianciu a korelačný koeficient náhodných premenných *X* a *Y*.

Kovariancia

Kovariancia $\mathrm{cov}(X,Y)$ alebo σ_{XY} medzi dvoma náhodnými premennými *X* a *Y* naznačuje lineárny vzťah medzi *X* a *Y*:

$$\sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = E(XY) - \mu_X\mu_Y, \quad -\infty < \sigma_{XY} < \infty.$$

Odvodenie vzťahu

$$\begin{aligned} E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] &= E\left[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X\mu_Y\right] = \\ &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X\mu_Y = \\ &= E(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y = \\ &= E(XY) - \mu_X\mu_Y \end{aligned}$$

Vlastnosti kovariancie:

1. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$
2. $\operatorname{cov}(X,Y) \le D(X)\cdot D(Y)$
3. Kovariancia σ_{XY} závisí od jednotiek *X* a *Y* a od ich variabilít.

Korelačný koeficient

Korelácia medzi dvoma náhodnými premennými *X* a *Y* reprezentuje normalizovaný lineárny vzťah (σ_{XY} normalizovaný pomocou σ_X a σ_Y) medzi *X* a *Y*:

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y},$$

Vlastnosti korelačného koeficientu:

1. $\rho_{XY} \in [-1;1]$,
2. $\rho_{XY} = 1$ – priama lineárna závislosť, s rastúcimi hodnotami *X* rastú aj hodnoty *Y*,
3. $\rho_{XY} = -1$ – nepriama lineárna závislosť, s rastúcimi hodnotami *X* hodnoty *Y* klesajú,
4. ρ_{XY} je bezrozmerný.

Nezávislosť *X* a *Y*

Keď *X* a *Y* sú nezávislé, potom

$$\sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0.$$

Žiaľ $\sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0$ je nutná (nie postačujúca) podmienka pre nezávislosť *X* a *Y*. Inak povedané, aj keď $\sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0$, nemôžeme tvrdiť, že *X* a *Y* sú nezávislé.

Kovariančná matica

Kovarianciu náhodných premenných *X* a *Y* sme definovali vyššie. Keď zoberieme do úvahy náhodný vektor $(X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$, môžeme definovať kovariančnú maticu.

Kovariančná matica náhodného vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ je

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

kde

$\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2, ..., n,\ i \neq j$ sú kovariancie medzi zložkami náhodného vektora;

$\sigma_{ii} = \operatorname{cov}(X_i, X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, ..., n$ sú rozptyly jednotlivých zložiek náhodného vektora.

Kovariančná matica je štvorcová a symetrická matica. Keď sú zložky náhodného vektora po dvoch nezávislé alebo aspoň nekorelované, potom kovariančná matica je diagonálna t. j. nediagonálne prvky sú rovné 0. Ak naviac rozptyly všetkých premenných X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ sú rovnaké t. j. $D(x_i) = \sigma^2$ $(i = 1, 2, ..., n)$, potom kovariančná matica náhodného vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ má tvar $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica t. j. diagonálne prvky sa rovnajú 1 a nediagonálne sa rovnajú 0.

Korelačná matica

Korelačná matica náhodného vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ je

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

kde

$\rho_{ij} = \dfrac{\operatorname{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, $i, j = 1, 2, ..., n,\ i \neq j$ je korelačný koeficient medzi i-tou a j-tou zložkou náhodného vektora;

$\rho_{ii} = \dfrac{\operatorname{cov}(X_i, X_i)}{\sigma_i \sigma_j} = \dfrac{\sigma_{ii}}{\sigma_i \sigma_i} = 1$, $i = 1, 2, ..., n$ je korelačný koeficient medzi i-tou a i-tou zložkou náhodného vektora.

Korelačná matica je štvorcová a symetrická matica. Keď sú zložky náhodného vektora po dvoch nezávislé alebo aspoň nekorelované, potom korelačná matica je jednotková matica, t. j. diagonálne prvky sa rovnajú 1 a nediagonálne sa rovnajú 0.

Príklad 3.4

Skúmame počet chýb na prednej strane (X) dreveného panela a počet chýb na zadnej strane (Y) dreveného panela (Príklad 3.1). Vypočítame hodnotu kovariancie a korelačného koeficienta.

Vieme, že združená p. f. X a Y je $f_{XY}(x,y)=\frac{1}{36}(x+y)$, $x=1,2,3$ a $y=1,2,3$, potom platí:

$$E(XY)=\sum_{y=1}^{3}\sum_{x=1}^{3}xyf_{XY}(x,y)=\frac{1}{36}\sum_{y=1}^{3}\sum_{x=1}^{3}xy(x+y)=$$

$$=\frac{1}{36}\big[1\cdot1\cdot(1+1)+2\cdot1\cdot(2+1)+3\cdot1\cdot(3+1)+\cdots$$

$$+1\cdot3\cdot(1+3)+2\cdot3\cdot(2+3)+3\cdot3\cdot(3+3)\big]=\frac{1}{36}\times168=4,67$$

Zo symetrie $f_{XY}(x,y)$ vieme, že $\mu_X=\mu_Y$ a $\sigma_X=\sigma_Y$. V príklade 3.1 sme vypočítali $\mu_X=2{,}17$ a $\sigma_X=0{,}80$. Preto

$$\sigma_{XY}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=4{,}67-2{,}17\times2{,}17=-0{,}04,$$

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-0{,}04}{0{,}80\times0{,}80}=-0{,}06.$$

Teda existuje slabá záporná korelácia medzi počtom chýb na prednej strane (X) dreveného panela a počtom chýb na zadnej strane (Y) dreveného panela.

Príklad 3.5

Zoberme do úvahy dve meracie metódy (Príklad 3.3).

a) Vypočítame hodnotu kovariancie a korelačného koeficienta.

b) Určíme kovariačnú a korelačnú maticu.

Merania X a Y majú združenú hustotu $f_{XY}(x,y)=\frac{2}{15}$, $0<x<4$, $x-1<y<x+1$, potom platí:

$$E(XY)=\int_0^4\int_{x-1}^{x+1}xy\frac{2}{15}dydx=\frac{2}{15}\int_0^4 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-1}^{x+1}dx=\frac{4}{15}\int_0^4 x^2dx=$$

$$= \frac{4}{15}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4}{15}\cdot\frac{64}{3} = \frac{256}{45} = 5{,}68888.$$

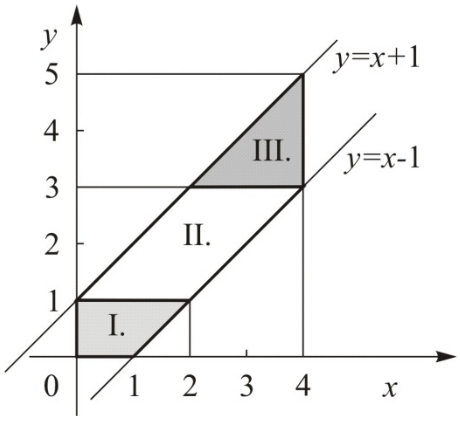
Strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X sme vypočítali v príklade 3.3: $\mu_X = 2{,}11$ a $\sigma_X = 1{,}11$. Aby sme mohli vypočítať hodnotu kovariancie a korelačného koeficienta, treba ešte vypočítať μ_Y a σ_Y.

Oblasť integrácie pre premennú Y je rozdelená na tri časti:

I. $0 < y \le 1$, $0 < x < y+1$;

II. $1 < y \le 3$, $y-1 < x < y+1$;

III. $3 < y < 5$, $y-1 < x < 4$.



Obr. 3.2

Marginálna hustota premennej Y je

$$f_Y(y) = \int_x f_{XY}(x,y)dx = \begin{cases} \int\limits_0^{y+1} \frac{2}{15}dx = \frac{2}{15}(y+1), & 0 < y \le 1 \\ \int\limits_{y-1}^{y+1} \frac{2}{15}dx = \frac{2}{15}\times 2 = \frac{4}{15}, & 1 < y \le 3 \\ \int\limits_{y-1}^{4} \frac{2}{15}dx = \frac{2}{15}(5-y), & 3 < y < 5 \end{cases}$$

Stredná hodnota a rozptyl premennej Y sú

$$E(Y) = \mu_Y = \int_y yf(y)dy = \int_0^1 \frac{2}{15}y(y+1)dy + \int_1^3 \frac{4}{15}y\,dy + \int_3^5 \frac{2}{15}y(5-y)dy =$$

$$= \frac{2}{15}\left(\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1\right) + \frac{2}{15}\left(\left[y^2\right]_1^3\right) + \frac{2}{15}\left(\left[\frac{5}{2}y^2\right]_3^5 - \left[\frac{1}{3}y^3\right]_3^5\right) =$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{16}{15}+\frac{44}{45}=\frac{97}{45}=2{,}1556$$

$$D(Y)=\sigma_Y^2=\left(\int_y y^2 f(y)\,dy\right)-\mu_y^2=\int_0^1\frac{2}{15}y^2(y+1)dy+\int_1^3\frac{4}{15}y^2\,dy+\int_3^5\frac{2}{15}y^2(5-y)dy-\left(\frac{97}{45}\right)^2=$$

$$=\int_0^1\frac{2}{15}y^2(y+1)dy+\int_1^3\frac{4}{15}y^2\,dy+\int_3^5\frac{2}{15}y^2(5-y)dy-\left(\frac{97}{45}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{15}\left(\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1\right)+\frac{4}{15}\left(\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^3\right)+\frac{2}{15}\left(\left[\frac{5}{3}y^3\right]_3^5-\left[\frac{1}{4}y^4\right]_3^5\right)-\left(\frac{97}{45}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{7}{90}+\frac{104}{45}+\frac{164}{45}\right)-\left(\frac{97}{45}\right)^2=\frac{5617}{4050}=1{,}38691=1{,}17767^2$$

a) Potom hodnota kovariancie je

$$\sigma_{XY}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=\frac{256}{45}-\frac{190}{90}\cdot\frac{97}{45}=\frac{461}{405}=1{,}13827$$

a hodnota korelačného koeficientu je

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\frac{461}{405}}{\sqrt{\frac{989}{810}}\times\sqrt{\frac{5647}{4050}}}=0{,}872386$$

b) Z vypočítaných hodnôt určíme pre náhodný vektor $(X,\ Y)^T=\boldsymbol{X}^T$

korelačnú maticu

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & \rho_{XY}\\ \rho_{YX} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0{,}87\\ 0{,}87 & 1\end{pmatrix}$$

a kovariančnú maticu

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{XX} & \sigma_{XY}\\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \sigma_{XY}\\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}11^2 & 1{,}14\\ 1{,}14 & 1{,}18^2\end{pmatrix}$$

3.6 Dvojrozmerné normálne rozdelenie

Ciele výučby

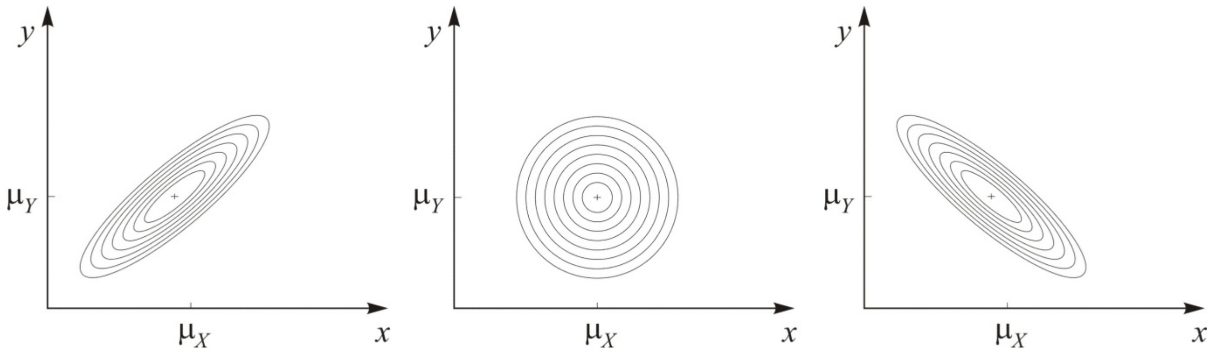
- Vysvetliť združenú hustotu dvojrozmerných normálnych náhodných premenných.
- Určite združené, marginálne a podmienené pravdepodobnosti dvojrozmerných normálnych náhodných premenných.

Dvojrozmerné normálne náhodné premenné

Združená hustota dvoch normálnych náhodných premenných *X* a *Y* so strednými hodnotami μ_X a μ_Y, rozptylmi σ_X^2 a σ_Y^2 a korelačným koeficientom ρ_{XY} $(-1 < \rho_{XY} < 1)$ je

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{2\rho_{XY}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\},\ -\infty < x, y < \infty\,.$$



Obr. 3.3. *Dvojrozmerné normálne rozdelenie s rozdielnymi* ρ_{XY}

Marginálne rozdelenia

Marginálne rozdelenia *X* a *Y* sú normálne so strednými hodnotami μ_X a μ_Y a rozptylmi σ_X^2 a σ_Y^2.

Podmienené rozdelenie

Podmienené rozdelenie premennej *Y* za podmienky $X = x$ je normálne so strednou hodnotou

$$E(Y|x) = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$$

a rozptylom

$$D(Y|x) = \sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)\,.$$

Príklad 3.6

Nech X a Y reprezentujú dva rozmery injekčného lisovaného diela. Predpokladajme, že X a Y majú dvojrozmerné normálne rozdelenie s parametrami $\mu_X = 3{,}00$; $\mu_Y = 7{,}70$; $\sigma_X^2 = 0{,}04^2$ a $\sigma_Y^2 = 0{,}08^2$. Ďalej predpokladáme, že X a Y sú nezávislé, t. j. $\rho_{XY} = 0$. Vypočítame pravdepodobnosť, že $2{,}95 < X < 3{,}05$ a $7{,}60 < Z < 7{,}80$.

Pretože X a Y sú nezávislé,

$$P(2{,}95 < X < 3{,}05; 7{,}60 < Y < 7{,}80) = P(2{,}95 < X < 3{,}05)P(7{,}60 < Y < 7{,}80)\,.$$

Normovaním X a Y dostaneme:

$$P(2{,}95 < X < 3{,}05) = P\left(\frac{2{,}95-3{,}00}{0{,}04} < \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} < \frac{3{,}05-3{,}00}{0{,}04}\right) =$$

$$= P(-1{,}25 < Z < 1{,}25) = P(Z < 1{,}25) - P(Z < -1{,}25) =$$

$$= 0{,}894 - 0{,}106 = 0{,}789$$

$$P(7{,}60 < Y < 7{,}80) = P\left(\frac{7{,}60-7{,}70}{0{,}08} < \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} < \frac{7{,}80-7{,}70}{0{,}08}\right) =$$

$$= P(-1{,}25 < Z < 1{,}25) = 0{,}789\,.$$

Potom

$$P(2{,}95 < X < 3{,}05; 7{,}60 < Y < 7{,}80) = 0{,}789 \times 0{,}789 = 0{,}623\,.$$

3.7 Lineárne kombinácie náhodných premenných

Ciele výučby

- Vysvetliť termín *lineárne kombinácie* náhodných premenných.
- Určiť strednú hodnotu a rozptyl lineárnej kombinácie náhodných premenných.

Lineárna kombinácie

Náhodná premenná Y sa niekedy definuje pomocou lineárnej kombinácie niekoľkých náhodných premenných $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$Y = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_nX_n\,,\ \text{kde } k_i \text{ sú konštanty.}$$

Pravidlá pre lineárne kombinácie

Nasledujúce pravidlá sú užitočné pri určení <u>strednej hodnoty</u> a <u>rozptylu</u> lineárnej kombinácie X a Y.

1. Pravidlá pre stredné hodnoty

a) $E(b) = b$

b) $E(aX) = aE(X)$

c) $E(aX + b) = aE(X) + b$

d) $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$

e) $E\left((aX)^k\right) = a^k E(X^k)$,

kde a, b, k sú konštanty.

2. Pravidlá pre rozptyly

a) $D(b) = 0$

b) $D(aX) = a^2 D(X)$

c) $D(aX + b) = a^2 D(X) + D(b) = a^2 D(X)$

d) $D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) \pm 2ab \operatorname{cov}(X, Y)$

$D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$, keď X a Y sú nezávislé

Poznámka. Všimnime si, že $\operatorname{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y$

Pravidlá 1d) a 2d) možno rozšíriť pre $Y = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_n X_n$ takto:

$$E(Y) = k_1 E(X_1) + k_2 E(X_2) + \ldots + k_n E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i E(X_i),$$

$$D(Y) = k_1^2 E(X_1) + k_2^2 E(X_2) + \ldots + k_n^2 E(X_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} k_i k_j \operatorname{cov}(X_i, X_j) =$$

$$= k_i^2 \sum_{i=1}^{n} E(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} k_i k_j \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

Príklad 3.7

Šírka rámu X a šírka dverí Y (obe premenné v centimetroch) sú normálne rozdelené so strednými hodnotami $\mu_X = 60{,}9600$ cm a $\mu_Y = 60{,}6425$ cm a smerodajnými odchýlkami $\sigma_X = 0{,}31750$ cm a $\sigma_Y = 0{,}15875$ cm. Predpokladajme, že šírka rámu X a šírka dverí Y sú nezávislé. Určíme strednú hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku <u>rozdielu</u> medzi šírkou rámu X a šírkou dverí Y.

$X \sim N(0{,}61;0{,}0030^2),\ \ Y \sim N(0{,}51;0{,}0015^2)$

$\text{cov}(X,Y) = 0,$ pretože X a Y sú nezávislé

Preto

$\mu_{X-Y} = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 60{,}9600 - 60{,}6425 = 0{,}3175\,\text{cm}$

$\sigma^2_{X-Y} = D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2\,\text{cov}(X,Y) = 0{,}31750^2 + 0{,}15875^2 - 0 = 0{,}126$

$\sigma_{X-Y} = 0{,}355$

3.8 Momentové vytvárajúce funkcie

Ciele výučby

- Vysvetliť termín momentová vytvárajúca funkcia.
- Určiť momentovú vytvárajúcu funkciu a *k*-té momenty náhodnej premennej *X*.
- Nájsť strednú hodnotu a rozptyl premennej *X* pomocou jej prvého a druhého momentu.

Momentová vytvárajúca funkcia

Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej *X* je stredná hodnota premennej e^{tX} :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum\limits_i e^{tx_i} f(x_i), & \text{keď } X \text{ je diskrétna,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, & \text{keď } X \text{ je spojitá.} \end{cases}$$

Keď existuje momentová vytvárajúca funkcia n. p. *X*, potom je <u>jedinečná</u> a úplne určuje rozdelenie pravdepodobnosti n. p. *X*. Teda keď dve náhodné premenné majú rovnakú momentovú vytvárajúcu funkciu, potom majú rovnaké rozdelenie.

Moment

Keď $M_X^{(k)}(t)$ označuje *k*-tú deriváciu $M_X(t)$, *k*-tý moment n. p. *X* v bode $t = 0$ je

$$E(X^k) = M_X^{(k)}(0) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k f(x_i), & \text{keď } X \text{ je diskrétna,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, & \text{keď } X \text{ je spojitá.} \end{cases}$$

Odvodenie vzťahu

Vieme, že *k*-tá derivácia $M_X(t)$ je

$$M_X^{(k)}(t) = \frac{d^k M_X(t)}{dt^k} = \begin{cases} \sum_x x^k e^{tx} f(x), & \text{keď } X \text{ je diskrétna,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f(x)dx, & \text{keď } X \text{ je spojitá.} \end{cases}$$

Aplikácia momentov

Stredná hodnota a rozptyl n. p. X sa dajú určiť pomocou prvého a druhého momentu n. p. X:

$$\mu_X = E(X) = M'_X(0),$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = M''_X(0) - \left[M'_X(0)\right]^2.$$

Príklad 3.8

Geometrická náhodná premenná X má pravdepodobnostnú funkciu

$$f(x) = p(1-p)^{x-1}, \ \ x = 1,2,\ldots,n.$$

1. *Nájdeme momentovú vytvárajúcu funkciu n. p. X.*

Z definície momentovej vytvárajúcej funkcie vyplýva, že

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} p(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} pe^t \left[(1-p)e^t\right]^{x-1}.$$

Všimnime si, že súčet nekonečnej geometrickej postupnosti $(a, ar, ar^2, \ldots)$ je

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \text{ kde } |r| < 1.$$

Teda

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}.$$

2. *Určíme strednú hodnotu a rozptyl n. p. X pomocou prvého a druhého momentu n. p. X v bode nula.*

Prvý moment n. p. X v bode $t = 0$ je

$$M'_X(0) = \left[\frac{dM_X(t)}{dt}\right]_{t=0} = \left[\frac{d\left\{pe^t\left[1-(1-p)e^t\right]^{-1}\right\}}{dt}\right]_{t=0} =$$

$$= \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} + \frac{p(1-p)e^{2t}}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}\right]_{t=0} = \frac{p}{1-(1-p)} + \frac{p(1-p)}{\left[1-(1-p)\right]^2} =$$

$$= \frac{p}{p} + \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Druhý moment n. p. X v bode $t = 0$ je

$$M_X''(0) = \left[\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = \left[\frac{dM_X'(t)}{dt} \right]_{t=0} =$$

$$= \left[\frac{d\left\{ pe^t \left[1-(1-p)e^t \right]^{-1} \right\}}{dt} \right]_{t=0} + \left[\frac{d\left\{ p(1-p)e^{2t} \left[1-(1-p)e^t \right]^{2} \right\}}{dt} \right]_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{p} + \left[\frac{2p(1-p)e^{2t}}{\left[1-(1-p)e^t \right]^2} + \frac{2p(1-p)^2 e^{2t}}{\left[1-(1-p)e^t \right]^3} \right]_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{2p(1-p)}{\left[1-(1-p) \right]^2} + \frac{2p(1-p)^2}{\left[1-(1-p) \right]^3} = \frac{1}{p} + \frac{2p(1-p)}{p^2} + \frac{2p(1-p)^2}{p^3} =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p} + \frac{2(1-p)^2}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Teda stredná hodnota a rozptyl n. p. X sú

$$\mu_X = E(X) = M_X'(0) = \frac{1}{p},$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \left[E(X) \right]^2 = M_X''(0) - \left[M_X'(0) \right]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p} \right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

3.9 Čebyševova nerovnosť

Ciele výučby

- Vysvetliť použitie Čebyševovej nerovnosti.
- Ohraničiť pravdepodobnosť náhodnej premennej X použitím Čebyševovej nerovnosti a porovnať ohraničenie pravdepodobnosti so zodpovedajúcou skutočnou pravdepodobnosťou.

Čebyševova nerovnosť

Vzťah medzi strednou hodnotou a rozptylom n. p. X s ľubovoľným rozdelením pravdepodobnosti odvodil Čebyšev a formuloval takto:

$$P\left(\left|X-\mu\right|\geq c\sigma\right)\leq\frac{1}{c^2},\; c>0\,.$$

Pomocou Čebyševovej nerovnosti možno určiť ohraničenie pravdepodobnosti akejkoľvek náhodnej premennej. V tabuľke (Tab. 3.1) sú prezentované ohraničenia pravdepodobností normálnej náhodnej premennej X s parametrami μ a σ^2 a zodpovedajúce skutočné pravdepodobnosti.

Tab. 3.1. *Porovnanie ohraničenia pravdepodobnosti so zodpovedajúcou skutočnou pravdepodobnosťou pre normálnu n. p. X*

c	Pravdepodobnostná podmienka $P\left(\left\|X-\mu\right\|\geq c\sigma\right)$	Ohraničenie pravdepodobnosti ($1/c^2$)	Skutočná pravdepodobnosť
1,5	$P\left(\left\|X-\mu\right\|\geq 1{,}5\sigma\right)$	0,444	0,134
2	$P\left(\left\|X-\mu\right\|\geq 2\sigma\right)$	0,250	0,046
3	$P\left(\left\|X-\mu\right\|\geq 3\sigma\right)$	0,111	0,003
4	$P\left(\left\|X-\mu\right\|\geq 4\sigma\right)$	0,063	< 0,001

Skutočnú pravdepodobnosť vypočítame tak, že upravíme pravdepodobnostný vzťah takto:

$$P\left(\left|X-\mu\right|\geq c\sigma\right)=P\left(\frac{\left|X-\mu\right|}{\sigma}\geq c\right)=P\left(\left|Z\right|\geq c\right)=1-P\left(\left|Z\right|<c\right)=$$
$$=1-P(-c<Z<c)$$

Keď do posledného vzťahu dosadíme postupne za c hodnoty 1,5; 2; 3; 4 a urobíme výpočet, dostaneme hodnoty skutočných pravdepodobností (Tab. 3.1).

Príklad 3.9

Predpokladajme, že fotorezistná hrúbka X vo výrobe polovodičov má spojité rovnomerné rozdelenie so strednou hodnotou 10 μm a smerodajnou odchýlkou 2,31 μm na obore hodnôt $6<x<14$ μm. Ohraničíme pravdepodobnosť, že fotorezistná hrúbka je menšia ako 7 alebo väčšia ako13 μm. Potom porovnáme ohraničenú pravdepodobnosť so skutočnou pravdepodobnosťou.

Hustota rovnomernej n. p. X je

$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{14-6}=\frac{1}{8},\quad 6<x<14\,.$$

Použitím Čebyševovej nerovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned}P(X<7)+P(X>13)&=P(X-10<7-10)+P(X-10>13-10)=\\&=P(X-10<-3)+P(X-10>3)=\\&=P\left(\left|X-10\right|>3\right)<1/c^2,\end{aligned}$$

odkiaľ $3=c\cdot\sigma=c\cdot 2{,}31 \quad\Rightarrow\quad c=\dfrac{3}{2{,}31}\doteq 1{,}3\,.$

Potom ohraničenie pravdepodobnosti sa rovná

$$P\left(\left|X-10\right|>3\right)<\left(\frac{1}{c^2}=\frac{1}{1{,}30^2}=0{,}59\right)$$

a skutočná pravdepodobnosť

$$P(X<7)+P(X>13)=1-P(7<X<13)=1-\int_7^{13}\frac{1}{8}dx=1-\frac{1}{8}\left[x\right]_7^{13}=1-\frac{6}{8}=0{,}25.$$

Skutočná pravdepodobnosť je menšia ako ohraničenie pravdepodobnosti, čo je v súlade s Čebyševovou nerovnosťou.

4 TVORBA NÁHODNÉHO VÝBERU A OPISNÁ ŠTATISTIKA

Ciele

- Rozpoznať rozdiel medzi základným súborom a náhodným výberom.
- Definovať termíny *náhodný výber* a *štatistika (výberová charakteristika)*.
- Rozlišovať medzi termínmi štatistika a hodnota štatistiky.
- Rozlišovať medzi termínmi usporiadaný náhodný výber, poriadková štatistika a hodnota poriadkovej štatistiky.
- Vysvetliť, prečo vyberanie reprezentatívneho náhodného výberu je dôležité vo výskume.

Základný súbor

Rozdelenie pravdepodobnosti často používame ako **model** pre základný súbor. Základný súbor, ktorý má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2, nazývame **normálny základný súbor** alebo **základný súbor s normálnym rozdelením**. Konštrukčný inžinier môže považovať za normálny základný súbor napríklad všetky hodnoty vnútorného priemeru piestneho krúžku automobilového motora.

Náhodný výber

Náhodný výber je výber zo skúmaného základného súboru, ktorý sa vytvorí pomocou určitého náhodného mechanizmu, aby sa zamedzilo systémovej chybe (nad- alebo podhodnotenie).

Zoberme do úvahy náhodnú premennú X s distribučnou funkciou $F(x)$ a experiment, ktorého výsledky môžeme považovať za hodnoty tejto náhodnej premennej. Keď urobíme n pokusov v danom experimente nezávisle a za rovnakých podmienok, dostaneme n pozorovaní $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktoré predstavujú hodnoty náhodných premenných $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Exaktne je náhodný výber definovaný takto:

Náhodné premenné $X_1, X_2, \dots, X_n$ tvoria **náhodný výber** rozsahu n, keď platí, že:

1. sú vzájomne nezávislé,
2. majú rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti $f(x)$.

Teda pre združenú hustotu (pravdepodobnostnú funkciu) platí:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n).$$

Štatistika (výberová charakteristika)

Funkciu náhodných premenných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z náhodného výberu, ktorá nezávisí od parametrov rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X, nazývame **štatistika** alebo **výberová charakteristika**. Zrejmé je, že štatistika je viacrozmerná náhodná premenná a označujeme ju $T(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Hodnota štatistiky

Hodnotu, ktorú môže nadobudnúť štatistika $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ pri jednej realizácii náhodného výberu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nazývame **hodnota štatistiky** a označujeme $T(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Usporiadaný náhodný výber a jeho realizácie

Majme pozorovania $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktoré sú realizáciami náhodného výberu $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Keď usporiadame pozorovania podľa veľkosti vzostupne dostaneme $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$, čo sú realizácie usporiadaného náhodného výberu $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$.

Poriadková štatistika a jej hodnota

Premenná $X_{(i)}$ z usporiadaného náhodného výberu predstavuje *i*-tú poriadkovú štatistiku a hodnota $x_{(i)}$ je hodnotu *i*-tej poriadkovej štatistiky.

4.1 Číselné metódy opisnej štatistiky

Ciele

- Prezentovať základné štatistické charakteristiky a ich hodnoty používané v opisnej štatistike.

Najčastejšie používané štatistiky a ich hodnoty

- **Výberový priemer $\overline{X}$**

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Hodnota výberového priemeru $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Výberový priemer charakterizuje centrálnu polohu dát.

- **Výberový rozptyl** S^2 **Hodnota výberového rozptylu** s^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}{n-1}$$

Výberový rozptyl charakterizuje variabilitu dát.

- **Výberová smerodajná odchýlka** S **Hodnota výberovej smerodajnej odchýlky** s

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \qquad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Výberová smerodajná odchýlka charakterizuje variabilitu dát.

- **Výberová smerodajná chyba** **Hodnota výberovej smerodajnej chyby**

$$\frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \qquad \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Výberová smerodajná chyba charakterizuje variabilitu priemeru dát.

Ďalšie používané základné štatistické charakteristiky

- **Hodnota výberového mediánu** $x_{\mathrm{med}} = \tilde{x}$

rozdeľuje usporiadaný dátový súbor $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ na dve rovnaké časti. V tomto súbore dát výberový medián predstavuje aj kvantil $x_{0,50}$ a súčasne aj druhý kvartil q_2, t. j. $x_{\mathrm{med}} = \tilde{x} = x_{0,50} = q_2$.

- **Kvantil** x_p

Postup výpočtu hodnoty p–kvantilu x_p z n nameraných dát $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$

Krok 1: vypočítame polohové čísla r použitím n a p

$$r = \begin{cases} np, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \\ (n+1)p & \text{ak } n \text{ je párne} \end{cases}$$

Krok 2: stanovíme x_p na základe polohového čísla r

$$x_p = \begin{cases} x_{(r)}, & \text{ak } r \text{ je celé číslo} \\ x_{(\lfloor r \rfloor)} + (x_{(\lceil r \rceil)} - x_{(\lfloor r \rfloor)})(r - \lfloor r \rfloor), & \text{ak } r \text{ nie je celé číslo,} \end{cases}$$

kde značka $\lceil r \rceil$ znamená „zaokrúhľovanie nahor“ a $\lfloor r \rfloor$ „zaokrúhľovanie nadol“.

Hodnota kvantilu x_p pre $p = \{0,25; 0,50; 0,75\}$ sa nazýva **kvartil** množiny dát:

– prvý (dolný) kvartil : $q_1 = x_{0,25}$

– druhý (stredný) kvartil (medián) : $q_2 = x_{0,50}$

– tretí (horný) kvartil : $q_3 = x_{0,75}$

- **Hodnota výberového modusu** $x_{\text{mod}} = \hat{x}$
  je najčastejšie sa vyskytujúca hodnota v dátach. Súbor dát môže mať žiadny modus, jeden modus (unimodálny), alebo viac modusov (bimodálny, trimodálny atď.).
- **Minimum** $x_{\min}$
  je najmenšia hodnota realizácie výberu, t. j. množiny dát $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$.
- **Maximum** $x_{\max}$
  je najväčšia hodnota realizácie výberu, t. j. množiny dát $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$.
- **Rozpätie (variačné rozpätie)**
  je rozdiel medzi najväčšou a najmenšou hodnotou množiny dát $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = x_{(n)} - x_{(1)}$$

- **Hodnota dolného (prvého) kvartilu** $q_1 = x_{0,25}$
  je hodnota rozdeľujúca množinu dát $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ na 2 časti tak, že 25 % hodnôt nie je väčších ako táto hodnota a 75 % hodnôt nie je menších ako táto hodnota.
- **Hodnota horného (tretieho) kvartilu** $q_3 = x_{0,75}$ je hodnota rozdeľujúca množinu dát $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ na 2 časti tak, že 75 % hodnôt nie je väčších ako táto hodnota a 25 % hodnôt nie je menších ako táto hodnota.
- **Medzikvartilové rozpätie IQR** množiny dát je rozdiel medzi horným kvartilom a dolným kvartilom:

$$\text{IQR} = q_3 - q_1 = x_{0,75} - x_{0,25}.$$

- **Výberová šikmosť** vyjadruje asymetriu rozdelenia početností súboru dát $x_1, x_2, \dots, x_n$. Mierou tejto asymetrie je **výberový koeficient šikmosti**:

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3}, \text{ pre } n \geq 3 \text{ a } s \neq 0.$$

- **Výberový normovaný koeficient šikmosti** má normálne rozdelenie $N(0,1)$ pre $n > 150$:

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3} \Bigg/ \sqrt{\frac{6}{n}}.$$

Poznámka. Pre symetrické rozdelenia početností sa tento koeficient rovné nule. Pre rozdelenia zošikmené doľava je koeficient záporný. Pre rozdelenia zošikmené doprava je koeficient kladný.

- **Výberová špicatosť** vyjadruje špicatosť rozdelenia početností súboru dát $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mierou tejto špicatosti je **výberový koeficient špicatosti**:

$$\frac{n(n+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)s^4}-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \text{ pre } n \geq 4 \text{ a } s \neq 0.$$

- **Výberový normovaný koeficient špicatosti** je daný vzťahom:

$$\left(\frac{n(n+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)s^4}-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}\right)\Big/\sqrt{\frac{24}{n}}.$$

Poznámka. Koeficient sa pre hodnoty z normálneho rozdelenia rovná približne nule. V porovnaní s normálnym rozdelením kladná hodnota koeficientu znamená, že rozdelenie je špicatejšie, naopak záporná hodnota svedčí o rozdelení plochejšom.

- **Výberový variačný koeficient** (v %) je mierou relatívneho rozdelenia dát a je daný vzťahom

$$\frac{s}{\overline{x}}\times 100=\frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}{\overline{x}}\times 100.$$

4.2 Grafické metódy opisnej štatistiky

Ciele výučby

- Vysvetliť použitie diagramu *stonka s listami*.
- Vysvetliť konštruovanie diagramu stonka s listami a konštrukciu prezentovať na dátovej množine.
- Vysvetliť termíny *početnosť, relatívna početnosť, kumulatívna početnosť a relatívna kumulatívna početnosť*.
- Vysvetliť konštruovanie *tabuľky početností*.
- Vysvetliť konštruovanie *histogramu* a *polygónu* z tabuľky početností.
- Vysvetliť použitie *obdĺžnikového diagramu s fúzami*.
- Vysvetliť použitie *normálneho pravdepodobnostného diagramu*.

Stonka s listami

Diagram stonka s listami je dobrý nástroj na grafické zobrazenie dátovej množiny $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$, kde každé číslo x_i obsahuje aspoň dve číslice. Konštruovanie diagramu stonka s listami sa skladá z nasledujúcich krokov:

krok 1: definujeme stonky a listy,

krok 2: zapíšeme stonky do stĺpca od najmenšej hodnoty po najväčšiu hodnotu,

krok 3: prechádzame cez jednotlivé dáta a list každého pozorovania dáme do riadku prislúchajúceho stonke tohto pozorovania

Príklad 4.1

Z nasledujúcich dát (Tab. 4.1) zostrojíme diagram stonka s listami a diagram rozdelenia početností zodpovedajúci tomuto diagramu.

Tab. 4.1

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	24,0	5	22,3	9	21,8	13	23,2
2	22,4	6	22,6	10	32,2	14	23,9
3	22,4	7	25,2	11	23,9	15	23,8
4	24,3	8	24,1	12	23,5	16	21,7

Riešenie

Najskôr usporiadajme náhodný výber:

Tab. 4.2

i	$x_{(i)}$	i	$x_{(i)}$	i	$x_{(i)}$	i	$x_{(i)}$
1	21,7	5	22,4	9	23,5	13	24,0
2	21,8	6	22,6	10	23,8	14	24,1
3	22,3	7	23,2	11	23,9	15	24,3
4	22,4	8	23,2	12	23,9	16	25,2

Nech prvé dve číslice uvedených dát tvoria stonky. Hodnoty stoniek zapíšeme do stĺpca od najmenšej po najväčšiu zhora nadol. Potom urobíme vertikálnu čiaru a zapíšeme list každého pozorovania do riadku príslušnej stonky. Takto získame nasledovný výsledok.

Stonky	Listy
21.	7 8
22.	3 4 4 6
23.	2 2 5 8 9 9
24.	0 1 3
25.	2

Obr. 4.1. *Diagram stonka s listami*

Keď otočíme diagram na bočnú ľavú stranu a pozrieme sa na stĺpce čísiel nad čiarou, vidíme tvar rozdelenia.

Listy			9		
			9		
		6	8		
		4	5	3	
	8	4	2	1	
	7	3	2	0	2
Stonky	21.	22.	23.	24.	25.

Obr. 4.2. *Tvar rozdelenia*

Poznámka. V prípade potreby sa dá stonka s listami:

a) zahustiť zlúčením susedných riadkov do jedného riadku (spoločnej triedy), napríklad pozri Obr. 4.3.

50	0 1
51	4
52	5 6
53	3 6 8
54	2 4 5 7
55	3 4 9 9
56	0 1 2 7
57	3 5 8
58	1 2 6 9
59	1 7

→

50 – 51	0 1 * 4
52 – 53	5 6 * 3 6 8
54 – 55	2 4 5 7 * 3 4 9 9
56 – 57	0 1 2 7 * 3 5 8
58 – 59	1 2 6 9 * 1 7

581 591

Obr. 4.3. *Zahustenie stonky s listami*

V zhustenom diagrame sú číslice listov v každom riadku oddelené znakom „* “ na dve skupiny. Prvá skupina číslic patrí prvému číslu príslušnej stonky a skupina číslic vpravo od

„*“, patrí druhému číslu príslušnej stonky. Každý riadok zhusteného diagramu musí obsahovať práve jeden znak „*“, aby nedošlo k skresleniu tvaru rozdelenia.

b) rozšíriť rozdelením riadku do dvoch riadkov (tried), napríklad pozri Obr. 4.4.

51	6 8 9 9
52	0 3 4 7
53	3 7 8 8

$\longrightarrow$

51*	
51°	6 8 9 9
52*	0 3 4
52°	7
53*	3
53°	7 8 8

Obr. 4.4. *Rozšírenie stonky s listami*

Prvú triedu s číslicami 0 až 4 označíme „$*$“ a druhú s číslicami 5 až 9 označíme „$\circ$ “.

Tabuľka početností

Vytváranie tabuľky početností je dobrá metóda na opis veľkej množiny dát. Pôvodné dáta sa zatrieďujú (grupujú) do tried (kategórií) a zisťujú sa početnosti jednotlivých tried, čím sa vytvorí rozdelenie početností.

Postup konštruovania tabuľky početností sa skladá z nasledujúcich krokov:

1. Určíme počet tried *k*, ktoré bude obsahovať tabuľka početností. Ak nevieme určiť počet tried, pomôže nám jeden z nasledujúcich vzorcov

   $k = 1 + 3{,}322 \cdot \log(n)$ (Sturgesovo pravidlo) alebo $k = \sqrt{n}$.

2. Určíme najmenšiu $x_{\min}$ a najväčšiu $x_{\max}$ hodnotu množiny dát.

3. Šírku triedy h určíme takto:

   $$h \geq \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{R}{k}$$

   Výsledok zaokrúhľujeme nahor na vhodné celé číslo tak, aby každá hodnota z dát bola obsiahnutá v tabuľke početností.

4. Vytvoríme triedy.

   Dolnú hranicu (medzu) prvej triedy t_0 volíme buď najmenšiu hodnotu v množine dát, alebo hodnotu trocha menšiu ako najmenšia hodnota. Hornú hranicu (medzu) poslednej *k*-tej triedy t_k volíme buď najväčšiu hodnotu v množine dát, alebo hodnotu trocha väčšiu ako najväčšia hodnota. V tabuľke je $t_0 \leq x_{\min}$, $t_k \geq x_{\max}$.

Každú triedu bude reprezentovať interval $[t_i, t_{i+1})$ o dĺžke h, pričom $t_{i+1} = t_i + h$, kde $i = 0,1,...,k-1$. Napríklad: prvá trieda: $[t_0, t_1)$, druhá trieda: $[t_1, t_2) = [t_0 + h, t_1 + h)$ atď.

5. Triedny znak $\bar{t}_i$ je stred i-tého intervalu (i-tej triedy), t. j. $\bar{t}_i = \dfrac{t_{i-1} + t_i}{2}$.
6. Každú hodnotu množiny dát zaznamenáme do riadku príslušnej triedy.
7. Spočítame počty dát v jednotlivých triedach. Dostaneme tak *početnosti jednotlivých tried* n_i, ktoré zaznamenáme v príslušnom stĺpci.
8. Vypočítame relatívne početnosti, kumulatívne početnosti, kumulatívne relatívne početnosti a zapíšeme ich do ďalších troch stĺpcov.
   Takto sme vytvorili celú tabuľku početností (Tab. 4.3).

Tab. 4.3. *Tabuľka početností*

Číslo triedy	Dolná medza	Horná medza	Triedny znak	Absolútna početnosť	Relatívna početnosť	Kumulatívna početnosť	Relat. kum. početnosť
1.	t_0	t_1	$\bar{t}_1$	n_1	$f_1 = n_1 / n$	n_1	f_1
2.	t_1	t_2	$\bar{t}_2$	n_2	$f_2 = n_2 / n$	$n_1 + n_2$	$f_1 + f_2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	t_{k-1}	t_k	$\bar{t}_k$	n_k	$f_k = n_k / n$	$n = \sum_i n_i$	$\sum_i f_i = 1$
				$\sum_i n_i = n$	$\sum_i f_i = 1$		

Poznámka. Pri zaokrúhľovaní hodnôt relatívnej početnosti treba dbať na to, aby sa súčet zaokrúhlených hodnôt rovnal jednej.

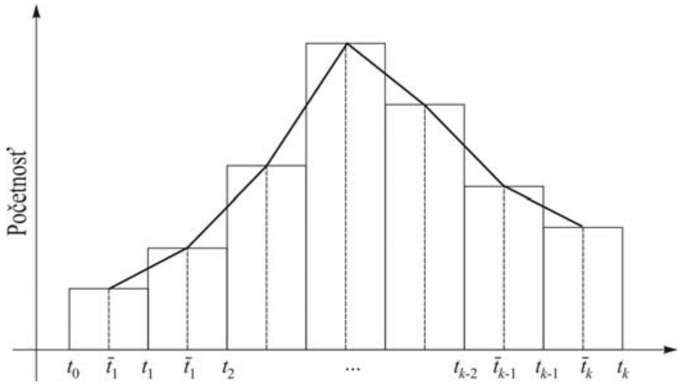
Pomocou tabuľky početností môžeme konštruovať histogram početností, polygón početností, polygón relatívnych početností, polygón kumulatívnych početností a polygón kumulatívnych relatívnych početností. Všetky tieto grafy nám svojím spôsobom ukazujú rozdelenie početností nameraných dát.

Histogram početností

Histogram rozdelenia početností je stĺpcový graf tvorený obdĺžnikmi, kde jedna strana je na osi x a má dĺžku h intervalov $[t_i, t_{i+1})$, a druhá strana je rovnobežná s osou y a má veľkosť príslušnej absolútnej (n_i) alebo relatívnej (f_i) početnosti zvolenej triedy.

Polygón početností

Polygón rozdelenia početností je lomená čiara, ktorá prechádza bodmi $[\overline{t}_i; n_i]$, resp. $[\overline{t}_i; f_i]$, kde $\overline{t}_i$ sú stredy intervalov $[t_i, t_{i+1})$ a n_i, resp. f_i sú príslušné absolútne, resp. relatívne početnosti vo zvolených triedach.



Obr. 4.5

Stonka s listami a histogram poskytujú všeobecný vizuálny pohľad na dátovú množinu, zatiaľ čo hodnoty ako $\overline{x}$ a s poskytujú číselné informácie o charakteristických vlastnostiach množiny dát.

Obdĺžnikový diagram s fúzami

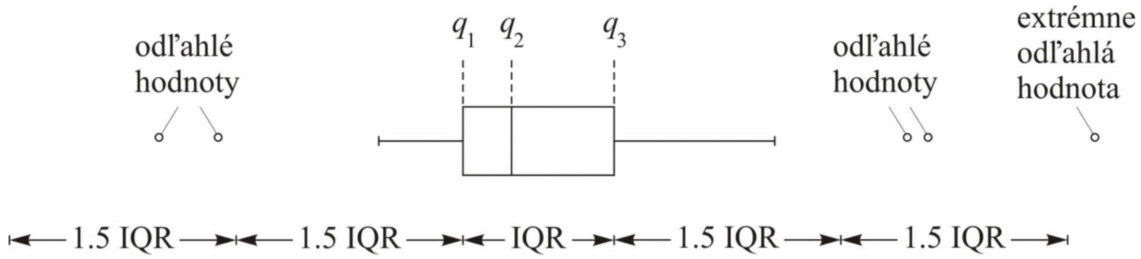
Obdĺžnikový diagram s fúzami je graf, ktorý zobrazuje niekoľko charakteristických vlastností (znakov) dátovej množiny súčasne. Ľahko sa dá z neho určiť napríklad rozpätie, symetria, či identifikovať nezvyčajné pozorovania alebo odľahlé hodnoty (outliers).

Opis obdĺžnikového diagramu s fúzami (pozri Obr. 4.6):

- diagram zobrazuje tri kvartily, minimálnu hodnotu a maximálnu hodnotu dát;
- obdĺžnik predstavuje medzikvartilové rozpätie (IQR) s dolnou hranicou v prvom (dolnom) kvartile $q_1 = x_{0,25}$ a hornou hranicou v treťom (hornom) kvartile;
- v obdĺžniku je úsečka rovnobežná z dolnou a hornou hranicou, ktorá predstavuje druhý kvartil (medián) $q_2 = x_{0,5} = x_{\text{med}} = \widetilde{x}$;
- na oboch stranách obdĺžnika sú fúzy v podobe úsečiek:
  a) *dolný fúz* je úsečka od dolného kvartilu do najmenšej hodnoty dát, avšak iba v rozsahu $1{,}5 \times \text{IQR}$ od dolného kvartilu,
  b) *horný fúz* je úsečka od horného kvartilu do najväčšej hodnoty dát, avšak iba v rozsahu $1{,}5 \times \text{IQR}$ od horného kvartilu;
- dáta vzdialenejšie od obdĺžnika ako sú zakreslené fúzy sa vyznačia ako jednotlivé body; bod, ktorý sa nachádza pod dolným fúzom alebo nad horným fúzom vo vzdialenosti

menšej ako $3 \times \mathrm{IQR}$ od hrany obdĺžnika, sa nazýva **vybočujúca (odľahlá) hodnota** (**outlier**), t. j. odľahlé hodnoty ležia v intervale $\left(x_{0,25} - 3 \times \mathrm{IQR}, x_{0,25} - 1,5 \times \mathrm{IQR}\right)$ alebo $\left(x_{0,75} + 1,5 \times \mathrm{IQR}, x_{0,75} + 3 \times \mathrm{IQR}\right)$;

– bod, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti väčšej ako $3 \times \mathrm{IQR}$ od niektorej hrany obdĺžnika sa nazýva **extrémne vybočujúca (odľahlá) hodnota** (**extreme outlier**): t. j. extrémne odľahlé hodnoty ležia v intervale $\left(-\infty, x_{0,25} - 3 \times \mathrm{IQR}\right)$ alebo $\left(x_{0,75} + 3 \times \mathrm{IQR}, \infty\right)$.



Obr. 4.6. *Opis obdĺžnikového diagramu s fúzami*

Poznámka. Odľahlé a extrémne odľahlé hodnoty sú hodnoty relatívne veľmi malé alebo veľmi veľké vzhľadom na ostatné dáta v súbore. Zvyčajne vznikajú z troch príčin:

a) hodnota je nameraná, zaznamenaná alebo vložená do počítača chybne,
b) nameraná hodnota patrí do iného základného súboru,
c) hodnota je nameraná a zaznamenaná správne, ale reprezentuje zriedkavú udalosť, ktorá môže nastať.

Vzhľadom na uvedené príčiny je potrebné zvážiť, či tieto hodnoty v náhodnom výbere dát ponecháme alebo ich vyradíme.

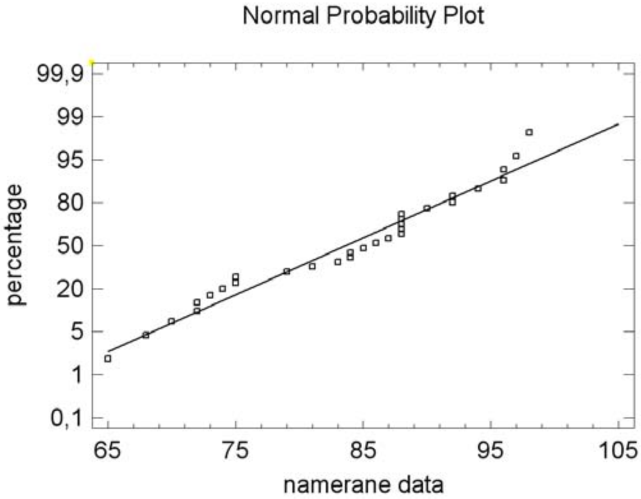
Normálny pravdepodobnostný graf

Tento graf je špeciálnym prípadom pravdepodobnostného grafu a umožňuje vizuálne posúdiť, či dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia.

Jeho konštrukcia spočíva v tom, že na horizontálnu os (os „x“) sa vynesú usporiadané hodnoty $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ a na vertikálnu os (os „y“) hodnoty $\frac{j - 0,375}{n + 0,25} \times 100$ (v percentách).

Grafom je potom množina bodov $X_j = \left[x_{(j)}; \frac{j - 0,375}{n + 0,25} \times 100\right]$, $j = 1,2,...,n$, ktorú aproximujeme v zmysle metódy najmenších štvorcov lineárnou funkciou – priamkou. Čím menej sa body odchyľujú od aproximačnej priamky, tým je väčší predpoklad, že namerané dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia.

Ak chceme mať istotu, že namerané dáta skutočne pochádzajú zo základného súboru s normálnym rozdelením, je potrebné vykonať test normality nameraných dát, napr. Shapirov–Wilkov (pozri kap. 7.6.2).



Obr. 4.7

4.3 Prezentácia číselných a grafických metód opisnej štatistiky na dátach z náhodného výberu

Príklad 4.2

Stroj Alfa vyrezáva súčiastku používanú v špeciálnych bezpečnostných vložkách spoločnosti Mul T Lock na potrebnú šírku 8,500 mm. Náhodne vyberieme 30 súčiastok a jedným meradlom skontrolujeme ich predpísanú šírku.

Na meraných dátach (Tab. 4.4) prezentujeme číselné a grafické metódy opisnej štatistiky.

Tab. 4.4

i	x_i	*i*	x_i	*i*	x_i	*i*	x_i	*i*	x_i	*i*	x_i
1	8,462	6	8,505	11	8,482	16	8,493	21	8,511	26	8,497
2	8,489	7	8,519	12	8,499	17	8,510	22	8,496	27	8,506
3	8,500	8	8,486	13	8,498	18	8,502	23	8,470	28	8,501
4	8,486	9	8,502	14	8,462	19	8,526	24	8,539	29	8,49
5	8,504	10	8,498	15	8,534	20	8,498	25	8,514	30	8,479

Riešenie

Prv než pristúpime k základnému spracovaniu dát, usporiadame merania šírky súčiastky vzostupne. Takto usporiadané hodnoty šírky súčiastky predstavujú hodnoty poriadkových štatistík (Tab. 4.5).

Tab. 4.5

i	$x_{(i)}$	i	$x_{(i)}$	i	$x_{(i)}$	i	$x_{(i)}$	i	$x_{(i)}$	i	$x_{(i)}$
1	8,462	6	8,486	11	8,497	16	8,499	21	8,504	26	8,514
2	8,462	7	8,486	12	8,497	17	8,500	22	8,505	27	8,519
3	8,470	8	8,489	13	8,498	18	8,501	23	8,506	28	8,526
4	8,479	9	8,493	14	8,498	19	8,502	24	8,510	29	8,534
5	8,482	10	8,496	15	8,498	20	8,502	25	8,511	30	8,539

1. *Číselné metódy opisnej štatistiky*

Výpočet základných štatistických (výberových) charakteristík, ktoré vypočíta aj bežný štatistický softvér.

Hodnota výberového priemeru:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \frac{(8{,}462 + 8{,}462 + 8{,}467 ... + 8{,}539)}{30} = 8{,}49883$$

Hodnota výberového rozptylu:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{(8{,}462 - 8{,}49883)^2 + (8{,}462 - 8{,}49883)^2 + ... + (8{,}539 - 8{,}49883)^2}{29} = 0{,}00322006$$

Hodnota výberovej smerodajnej odchýlky:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{0{,}00322006} = 0{,}0179445$$

Hodnota výberovej smerodajnej chyby:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{0{,}00322006}{30}} = 0{,}00327621$$

Hodnota výberového mediánu (druhého kvartilu) $x_{\mathrm{med}} = \tilde{x}\left(= q_2 = x_{0{,}50}\right)$:

Pre $n = 30$ vypočítané $r = (n+1)p = (30+1)\times 0{,}5 = 15{,}5$ nie je celé číslo.

$$x_{0,5} = x_{(\lfloor r \rfloor)} + (x_{(\lceil r \rceil)} - x_{(\lfloor r \rfloor)})(r - \lfloor r \rfloor) =$$

$$= x_{(\lfloor 15,5 \rfloor)} + (x_{(\lceil 15,5 \rceil)} - x_{(\lfloor 15,5 \rfloor)})(15,5 - \lfloor 15,5 \rfloor) =$$

$$= x_{(15)} + (x_{(16)} - x_{(15)})(15,5 - 15) = 8,498 + (8,499 - 8,498) \times 0,5 = 8,4985$$

$$x_{\text{med}} = x_{0,50} = \tilde{x} = 8,4985$$

Hodnota výberového modusu $x_{\text{mod}} = \hat{x}$:

Najčastejšie sa vyskytujúcou hodnotou v dátach (3-krát) je len jedna hodnota, a to 8,498. Súbor má preto jeden modus – je unimodálny.

$$x_{\text{mod}} = \hat{x} = 8,498$$

Minimum: $x_{\min} = x_{(1)} = 8,462$

Maximum: $x_{\max} = x_{(30)} = 8,539$

Rozpätie**:** $R = x_{\max} - x_{\min} = 8,539 - 8,462 = 0,077$

Hodnota dolného (prvého) kvartilu $q_1 = x_{0,25}$:

Pre $n = 30$ vypočítané $r = (n+1)p = (30+1) \times 0,25 = 7,75$ nie je celé číslo.

$$q_1 = x_{0,25} = x_{(\lfloor r \rfloor)} + (x_{(\lceil r \rceil)} - x_{(\lfloor r \rfloor)})(r - \lfloor r \rfloor) =$$

$$= x_{(\lfloor 7,75 \rfloor)} + (x_{(\lceil 7,75 \rceil)} - x_{(\lfloor 7,75 \rfloor)})(7,75 - \lfloor 7,75 \rfloor) =$$

$$= x_{(7)} + (x_{(8)} - x_{(7)})(7,75 - 7) = 8,486 + (8,489 - 8,486) \times 0,75 = 8,48825$$

$$q_1 = x_{0,25} = 8,48825 \approx 8,489$$

Hodnota horného (tretieho) kvartilu $q_3 = x_{0,75}$:

Pre $n = 30$ vypočítané $r = (n+1)p = (30+1) \times 0,75 = 23,25$ nie je celé číslo.

$$q_3 = x_{0,75} = x_{(\lfloor r \rfloor)} + (x_{(\lceil r \rceil)} - x_{(\lfloor r \rfloor)})(r - \lfloor r \rfloor) =$$

$$= x_{(\lfloor 23,25 \rfloor)} + (x_{(\lceil 23,25 \rceil)} - x_{(\lfloor 23,25 \rfloor)})(23,25 - \lfloor 23,25 \rfloor) =$$

$$= x_{(23)} + (x_{(24)} - x_{(23)})(23,25 - 23) = 8,506 + (8,510 - 8,506) \times 0,25 = 8,5061$$

$$q_3 = x_{0,75} = 8,5061 \approx 8,506$$

Medzikvartilové rozpätie: $\text{IQR} = q_3 - q_1 = x_{0,75} - x_{0,25} = 8,506 - 8,489 = 0,017$

Výberový normovaný koeficient šikmosti: $n = 30 \geq 3$, $s = 0,0179445 \neq 0$

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3} \Bigg/ \sqrt{\frac{6}{n}} =$$

$$= \frac{30\left((8,462-8,49883)^3+(8,462-8,49883)^3+\ldots+(8,539-8,49883)^3\right)}{29\cdot 28\cdot 0,0179445^3} \Bigg/ \sqrt{\frac{6}{30}} =$$

$$= 0,0306566 > 0$$

Hodnota výberového normovaného koeficientu šikmosti je kladná a veľmi malá, znamená to, že naše rozdelenie dát má približne symetrické rozdelenie, ktoré je jemne zošikmené doprava.

Tab. 4.6. *Prehľad základných štatistických (výberových) charakteristík vypočítaných pomocou štatistického softvéru Statgraphics Centurion XV*

		Vysvetlivky
Count	30	rozsah súboru
Average	8,49883	hodnota výberového priemeru
Median	8,4985	hodnota výberového mediánu
Mode	8,498	hodnota výberového modusu
Variance	0,000322006	hodnota výberového rozptylu
Standard deviation	0,0179445	hodnota výberovej smerodajnej odchýlky
Coeff. of variation	0,211141 %	hodnota výberového variačného koeficientu
Standard error	0,00327621	hodnota smerodajnej chyby
Minimum	8,462	minimálna hodnota
Maximum	8,539	maximálna hodnota
Range	0,077	hodnota rozpätia
Lower quartile	8,489	hodnota dolného kvartilu
Upper quartile	8,506	hodnota horného kvartilu
Interquartile range	0,017	hodnota medzikvartilového rozpätia (IQR)
Stnd. skewness	0,0306566	výberový normovaný koeficient šikmosti
Stnd. kurtosis	0,66439	výberový normovaný koeficient špicatosti

Výberový normovaný koeficient špicatosti: $n = 30 \geq 4$, $s = 0,0179445 \neq 0$

$$\left(\frac{n(n+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)s^4} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \right) \Bigg/ \sqrt{\frac{24}{n}} =$$

$$= \left(\frac{30\cdot 31\left((8,462-8,49883)^4+(8,462-8,49883)^4+\ldots+(8,539-8,49883)^4\right)}{29\cdot 28\cdot 27\cdot 0,0179445^4} - \frac{3\cdot 29^2}{28\cdot 27} \right) \Bigg/ \sqrt{\frac{24}{30}} =$$

$$= 0,66439 > 0$$

Hodnota výberového normovaného koeficientu špicatosti je kladná, znamená to, že naše rozdelenie dát je v porovnaní s normálnym rozdelením špicatejšie.

Výberový variačný koeficient (v %):

$$\frac{s}{\overline{x}}\times 100=\frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}{\overline{x}}\times 100=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{(8,462-8,49883)^2+(8,462-8,49883)^2+...+(8,539-8,49883)^2}{29}}}{8,49883}\times 100=$$

$$=0,21114$$

Miera relatívneho rozdelenia našich dát je 0,21114 %.

2. *Grafické metódy opisnej štatistiky*

Všetky uvedené grafy vrátane tabuľky početností uvádzame aj v Statgraphics Centurion XV.

Stonka s listami

Nech prvé tri číslice dát tvoria stonky.

Stonka	Listy
8,46	22
8,47	09
8,48	2669
8,49	36778889
8,50	0122456
8,51	0149
8,52	6
8,53	49

Obr. 4.8. *Stonka s listami*

Stem-and-Leaf Display for Šírka: unit = 0,001 1|2 represents 0,012

```
          LO|8,462 8,462

   2   846|
   4   847|09
   8   848|2669
  (8)  849|36778889
  14   850|0122456
   7   851|0149
   3   852|6

          HI|8,534 8,539
```

Obr. 4.9. *Stonka s listami v Statgraphics Centurion XV*

Poznámka. V tomto type grafu Statgraphics Centurion XV vyznačil odľahlé hodnoty:

– dolné: LO|8,462 8,462 t. j. $x_{(1)}=x_{(2)}=8,462$

– horné: HI|8,534 8,539 t. j. $x_{(29)}=8,534$ a $x_{(30)}=8,539$

Overíme ich ešte na obdĺžnikovom diagrame s fúzami a stanovíme, či tieto hodnoty sú len odľahlé, alebo extrémne odľahlé.

Tabuľka početností

a) Určíme počet tried k:

b) $k=1+3,322\log\left(n\right)=1+3,322\log(30)=5,907\approx 6$ alebo $k=\sqrt{n}=\sqrt{30}=5,477\approx 6$.

c) Vypočítame šírku triedy: $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \dfrac{0{,}077}{6} = 0{,}012833 \approx 0{,}015$.

d) Volíme $t_0 = 8{,}45 < x_{\min} = 8{,}462$, $t_6 = 8{,}54 > x_{\max} = 8{,}539$.

e) Zostrojíme tabuľku početností (Tab. 4.7).

Tab. 4.7. *Tabuľka početností*

Číslo triedy	Dolná medza	Horná medza	Triedny znak	Absolút, početnosť	Relatívna početnosť	Kumulatívna početnosť	Relat. kum. početnosť
1.	8,450	8,465	8,4575	2	0,0667	2	0,0667
2.	8,465	8,480	8,4725	2	0,0667	4	0,1334
3.	8,480	8,495	8,4875	5	0,1667	9	0,3001
4.	8,495	8,510	8,5025	14	0,4666	23	0,7667
5.	8,510	8,525	8,5175	4	0,1333	27	0,9000
6.	8,525	8,540	8,5325	3	0,1000	30	1,0000
				$\sum_i n_i = 30$	$\sum_i f_i = 1$		

Poznámka. V zaokrúhľovaní hodnôt relatívnej početnosti treba dbať na to, aby sa súčet zaokrúhlených hodnôt bol rovnal jednej.

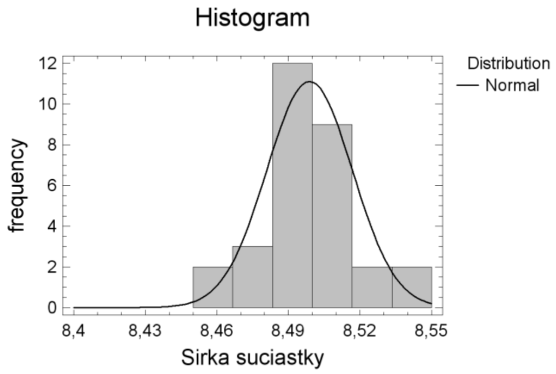
Tab. 4.8. *Tabuľka početností v Statgraphics Centurion XV*

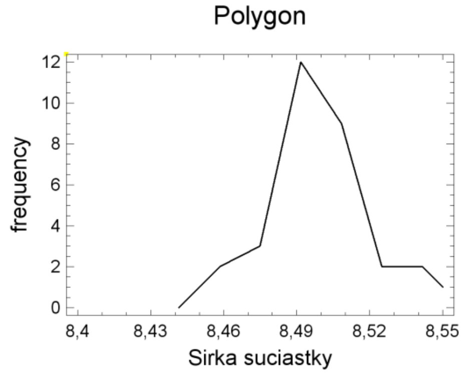
Frequency Tabulation for Šírka súčiastky

Class	*Lower Limit*	*Upper Limit*	*Midpoint*	*Frequency*	*Relative Frequency*	*Cumulative Frequency*	*Cum. Rel. Frequency*
	at or below	8,45		0	0,0000	0	0,0000
1	8,45	8,46667	8,45833	2	0,0667	2	0,0667
2	8,46667	8,48333	8,475	3	0,1000	5	0,1667
3	8,48333	8,5	8,49167	12	0,4000	17	0,5667
4	8,5	8,51667	8,50833	9	0,3000	26	0,8667
5	8,51667	8,53333	8,525	2	0,0667	28	0,9333
6	8,53333	8,55	8,54167	2	0,0667	30	1,0000
	above	8,55		0	0,0000	30	1,0000

Mean = 8,49883   Standard deviation = 0,0179445

Histogram a polygón početností

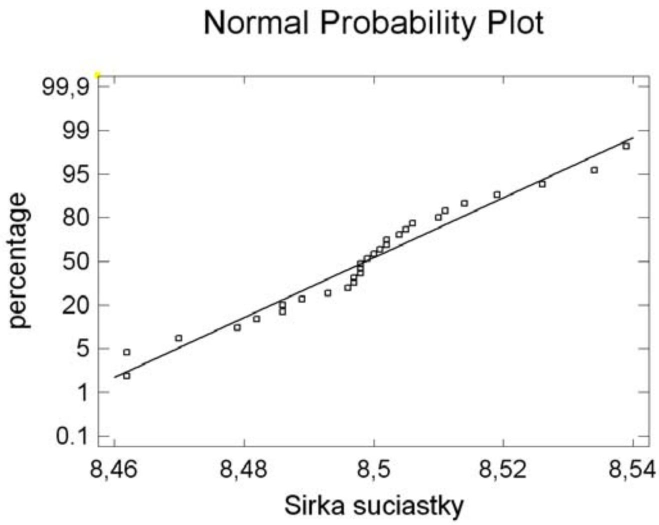




Obr. 4.10. *Histogram spolu s krivkou normálneho rozdelenia (Gaussova krivka) a polygón početností v Statgraphics Centurion XV*

Z oboch grafov je zrejmý charakter rozdelenia početností – namerané dáta môžu pochádzať z normálneho rozdelenia.

Normálny pravdepodobnostný graf

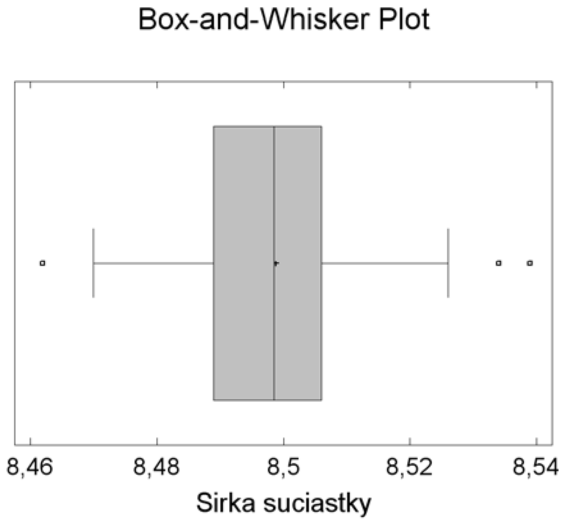


Obr. 4.11. *Normálny pravdepodobnostný graf v Statgraphics Centurion XV*

Zobrazené body (Obr. 4.11) sa len minimálne odchyľujú od aproximačnej priamky.

Z posledných troch grafov usudzujeme, že namerané dáta môžu pochádzať z normálneho rozdelenia. V prípade potreby, napr. testovania hypotéz, to preveríme testom normality dát (napr. Shapirov–Wilkov test, pozri podkapitola. 7.6.2**)**.

Obdĺžnikový diagram s fúzami



Obr. 4.12. *Obdĺžnikový diagram s fúzami v Statgraphics Centurion XV*

Bod v obdĺžniku predstavuje výberový priemer $\bar{x} = 8,49883$.

Aj v tomto type grafu sú vyznačené odľahlé hodnoty:

- dolné: $x_{(1)} = x_{(2)} = 8,462$,
- horné: $x_{(29)} = 8,534$ a $x_{(30)} = 8,539$.

Zistíme, či sú to hodnoty len odľahlé alebo extrémne odľahlé. Vypočítame príslušné intervaly:

- interval pre dolné odľahlé hodnoty:

$$\left(x_{0,25} - 3 \times \mathrm{IQR}\ ;\ x_{0,25} - 1,5 \times \mathrm{IQR}\right) = \left(8,489 - 3 \times 0,017; 8,489 - 1,5 \times 0,017\right) = \\ = (8,435; 8,4635)$$

- interval pre dolné extrémne odľahlé hodnoty:

$$\left(-\infty, x_{0,25} - 3 \times \mathrm{IQR}\right) = \left(-\infty; 8,489 - 3 \times 0,017\right) = (-\infty; 8,435)$$

- interval pre horné odľahlé hodnoty:

$$\left(x_{0,75} + 1,5 \times \mathrm{IQR}; x_{0,75} + 3 \times \mathrm{IQR}\right) = \left(8,506 + 1,5 \times 0,017; 8,506 + 3 \times 0,017\right) = \\ = (8,5315; 8,557)$$

- interval pre horné extrémne odľahlé hodnoty:

$$\left(x_{0,75} + 3 \times \mathrm{IQR}; \infty\right) = \left(8,506 + 3 \times 0,017; \infty\right) = (8,557; \infty)$$

Hodnoty $x_{(1)} = x_{(2)} = 8,462$ sú z intervalu $(8,435;\ 8,4635)$, t. j. sú to dolné odľahlé hodnoty. Hodnoty $x_{(29)} = 8,534$ a $x_{(30)} = 8,539$ sú z intervalu $(8,5315;\ 8,557)$, sú to horné odľahlé hodnoty. Na základe príčin vzniku týchto hodnôt je potrebné zvážiť, či tieto hodnoty v náhodnom výbere dát ponecháme alebo ich vyradíme. Pretože dolné odľahlé hodnoty sa nachádzajú vo veľmi tesnej blízkosti hornej hranice intervalu $(8,435;\ 8,4635)$ a horné odľahlé hodnoty zasa vo veľmi tesnej blízkosti dolnej hranice intervalu $(8,5315;\ 8,557)$, rozhodli sme sa ich v náhodnom výbere dát ponechať.

5 BODOVÉ ODHADOVANIE

Ciele

- Definovanie termínov *parameter*, *bodový odhad* a *hodnota bodového odhadu*.
- Identifikovať dve hlavné oblasti štatistickej indukcie.
- Rozpoznať rozdiel medzi bodovým odhadovaním a intervalovým odhadovaním.
- Stanoviť bodový odhad parametra.

Parameter (θ)

Parameter θ reprezentuje číselnú charakteristiku (znak) základného súboru (ZS), ktorý skúmame. Vo väčšine prípadov je parameter neznáma konštanta, napr. stredná hodnota (μ), rozptyl (σ^2), podiel (p), korelačný koeficient (ρ) alebo regresný koeficient (β).

Štatistická indukcia

Pomocou štatistickej indukcie robíme rozhodnutia alebo závery o základnom súbore analyzovaním náhodného výberu z tohto základného súboru. Dve hlavné oblasti štatistickej indukcie sú:

1. **odhadovanie parametrov**: odhaduje hodnotu parametra θ. Napr. $\mu = 150$,
2. **testovanie hypotéz**: testuje tvrdenie o parametri θ. Napr. H_0: $\mu = 150$.

Odhadovanie parametra

Odhadovanie parametra sa delí na dve oblasti:

1. **bodové odhadovanie**: odhaduje presnú polohu parametra θ. Napr. $\mu = 150$,
2. **intervalové odhadovanie**: stanoví interval, ktorý obsahuje skutočnú hodnotu parametra θ s vopred danou pravdepodobnosťou $1-\alpha$, kde α sa zvyčajne rovná 0,1; 0,05; 0,01. Napr. $P(145 < \mu < 155) = 0,95$.

Bodový odhad ($\hat{\Theta}$)

Bodový odhad **($\hat{\Theta}$)** je štatistika (funkcia náhodného výberu), ktorá sa použije na odhadnutie hodnoty parametra θ. Bodový odhad je náhodná premenná. Napríklad bodovým odhadom parametra μ je výberový priemer $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$.

<u>Číselná hodnota</u> štatistiky $\hat{\Theta}$ stanovená z príslušného náhodného výberu sa nazýva **hodnota bodového odhadu** parametra θ a označuje sa ako $\hat{\theta}$.

Príklad 5.1

Predpokladajme, že životnosť žiarovky X má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2. Skúmajme náhodný výber rozsahu $n = 25$ žiaroviek, v ktorom súčet životností bol 14 900 hodín. Odhadneme *strednú hodnotu* životnosti (μ) žiarovky.

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{14900}{25} = 745 \text{ hodín}$$

5.1 Všeobecné termíny bodového odhadovania

Ciele

- Vysvetliť termíny *nevychýlený odhad*, *najlepší nevychýlený odhad* (NNO), *smerodajná chyba* a *stredná kvadratická chyba* (MSE) *odhadu*.
- Vybrať vhodný bodový odhad parametra θ, ktorý je nevychýlený a má najmenší rozptyl.

Nevychýlený odhad

Nevychýlený odhad je bodový odhad ($\hat{\Theta}$), ktorého stredná hodnota sa rovná skutočnej hodnote parametra θ, t. j.

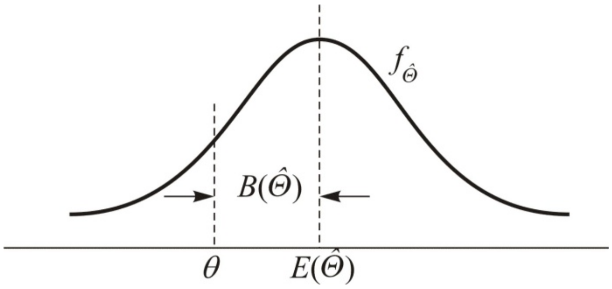
$$E(\hat{\Theta}) = \theta .$$

Možno stanoviť niekoľko nevychýlených odhadov daného parametra θ.

Vychýlenie (bias)

Vychýlenie bodového odhadu $\hat{\Theta}$ je rozdiel medzi strednou hodnotou odhadu $\hat{\Theta}$ a skutočnou hodnotou parametra θ:

$$B(\hat{\Theta}) = E(\hat{\Theta}) - \theta .$$



Obr. 5.1. *Vychýlenie bodového odhadu* $\hat{\Theta}$

Príklad 5.2.

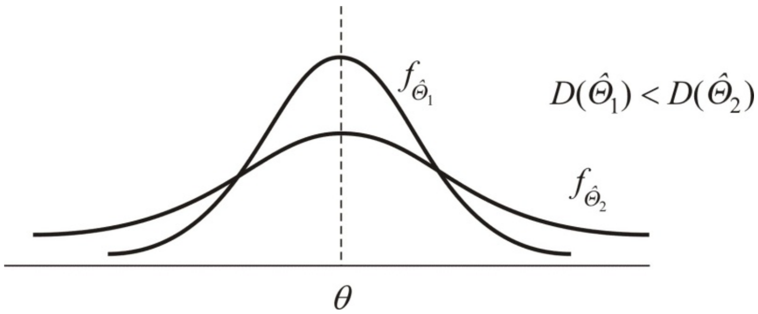
1. Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber z rozdelenia pravdepodobnosti so strednou hodnotou $E(X) = \mu$ a rozptylom $D(X) = \sigma^2$. Ukážeme, že výberový priemer $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ je *nevychýlený odhad strednej hodnoty* základného súboru μ:

$$E(\overline{X}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i / n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu .$$

Výberový priemer $\overline{X}$ je nevychýlený odhad parametra μ, pretože $E(\overline{X}) = \mu$.

Najlepší nevychýlený odhad (NNO)

Najlepší nevychýlený odhad parametra θ je nevychýlený odhad $\hat{\Theta}$, ktorý má medzi všetkými nevychýlenými odhadmi daného parametra najmenší rozptyl. Ak použijeme NNO neznámeho parametra θ, parameter θ je odhadnutý s najväčšou <u>správnosťou</u> a <u>presnosťou</u>.



Obr. 5.2. *Rozptyly nevychýlených odhadov* θ

Príklad 5.3

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu $n > 1$ zo základného súboru s $E(X) = \mu$ a $D(X) = \sigma^2$. Nevychýleným odhadom μ je X_1 aj $\overline{X}$, pretože ich stredné hodnoty sa rovnajú μ. Chceme zistiť, ktorý z dvoch odhadov parametra μ je lepší a prečo.

Rozptyly X_1 a $\bar{X}$ sú:

$$D(X_1) = \sigma^2,$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\sum_i X_i / n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Pre $n > 1$ je $\left(D(X_1) = \sigma^2\right) > \left(D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\right)$ a teda pre $n > 1$ je $\bar{X}$ lepším odhadom μ s vyššou presnosťou.

Smerodajná chyba ($\sigma_{\hat{\Theta}}$)

Smerodajná chyba je smerodajná odchýlka bodového odhadu $\hat{\Theta}$. Dá sa použiť ako miera udávajúca **presnosť** bodového odhadovania.
Ak $\sigma_{\hat{\Theta}}$ obsahuje neznáme parametre, ktoré treba odhadnúť, pri výpočte $\sigma_{\hat{\Theta}}$ sa použijú odhady neznámych parametrov, pričom dostaneme **odhad smerodajnej chyby** $s_{\hat{\Theta}}$.

Príklad 5.4

Náhodná premenná X (Príklad 5.1) má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2. Skúmame náhodný výber rozsahu $n = 25$.

1. *Smerodajná chyba*

Predpokladajme, že $\sigma^2 = 40^2$. Určite smerodajnú chybu výberového priemeru ($\bar{X}$). Všimnite si, že $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{40}{\sqrt{25}} = 8\,\mathrm{h}$$

2. *Odhad smerodajnej chyby*

Predpokladajme, že σ^2 je neznáme a výberový rozptyl je $s_X^2 = 35^2$. Vypočítajte odhad smerodajnej chyby výberového priemeru ($\bar{X}$).

$$s_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s_X}{\sqrt{n}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = 7\,\mathrm{h}$$

Stredná kvadratická chyba (MSE) **odhadu**

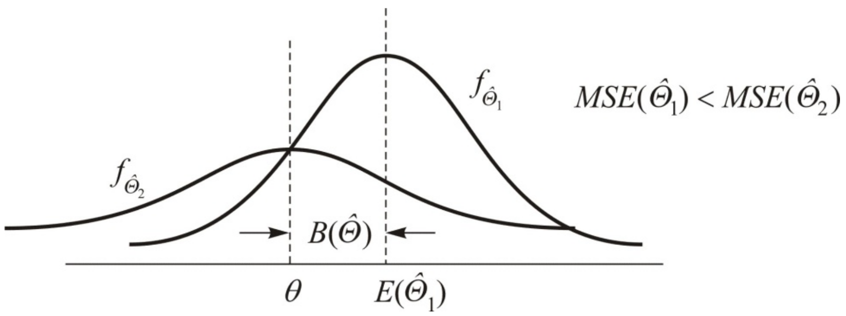
Stredná kvadratická chyba (*MSE* angl. Mean Squared Error) bodového odhadu $\hat{\Theta}$ je stredná hodnota štvorca (druhej mocniny) rozdielu medzi $\hat{\Theta}$ a θ:

$$MSE(\hat{\Theta}) = E\left((\hat{\Theta}-\theta)^2\right) = E\left(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})\right)^2 + \left(\theta - E(\hat{\Theta})\right)^2 =$$
$$= D(\hat{\Theta}) + B^2(\hat{\Theta})$$
$$= D(\hat{\Theta}) \quad \text{pre nevychýlený odhad } \hat{\Theta}, \text{ pretože } B(\hat{\Theta}) = 0.$$

Odvodenie vzorca:

$$MSE(\hat{\Theta}) = E\left((\hat{\Theta}-\theta)^2\right) = E\left(\left(\left(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})\right)-\left(\theta-E(\hat{\Theta})\right)\right)^2\right) =$$
$$= E\left(\left(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})\right)^2 - 2\left(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})\right)\left(\theta-E(\hat{\Theta})\right) + \left(\theta-E(\hat{\Theta})\right)^2\right) =$$
$$= E\left(\left(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})\right)^2\right) - 2E\left(\left(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})\right)\left(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})\right)\right) + E\left(\left(\theta-E(\hat{\Theta})\right)^2\right) =$$
$$= E\left(\left(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})\right)^2\right) + E\left(\left(\theta-E(\hat{\Theta})\right)^2\right) =$$
$$= D(\hat{\Theta}) + B^2(\hat{\Theta})$$

Poznámka. Vychýlený odhad parametra θ s najmenšou chybou MSE (má najväčšiu presnosť) sa niekedy použije namiesto nevychýleného odhadu s menšou presnosťou.



Obr. 5.3. *Vychýlený odhad $\hat{\Theta}_1$ s menšou strednou kvadratickou odchýlkou ako nevychýlený odhad $\hat{\Theta}_2$*

Príklad 5.5

Stanovte *strednú kvadratickú chybu odhadu* ak predpokladáme, že stredné hodnoty a rozptyly štatistík $\hat{\Theta}_1$ a $\hat{\Theta}_2$ sú $E(\hat{\Theta}_1) = \theta$, $E(\hat{\Theta}_2) = 0{,}9\theta$, $D(\hat{\Theta}_1) = 5$ a $D(\hat{\Theta}_2) = 4$.

Riešenie

Pre $\hat{\Theta}_1$

$$B(\hat{\Theta}_1) = E(\hat{\Theta}_1) - \theta = \theta - \theta = 0,$$
$$MSE(\hat{\Theta}_1) = D(\hat{\Theta}_1) + B^2(\hat{\Theta}_1) = 5 + 0 = 5.$$

Pre $\hat{\Theta}_2$

$$B(\hat{\Theta}_2) = E(\hat{\Theta}_2) - \theta = 0{,}9\theta - \theta = -0{,}1\theta ;$$

$$MSE(\hat{\Theta}_2) = D(\hat{\Theta}_2) + B^2(\hat{\Theta}_2) = 4 + 0{,}01\theta^2 .$$

Odpočítaním $MSE(\hat{\Theta}_2)$ od $MSE(\hat{\Theta}_1)$ dostaneme:

$$MSE(\hat{\Theta}_1) - MSE(\hat{\Theta}_2) = 5 - (4 + 0{,}01\theta^2) = 1 - 0{,}01\theta^2 .$$

Odhad parametra θ stanovujeme vzhľadom na presnosť štatistík $\hat{\Theta}_1$ a $\hat{\Theta}_2$, ktoré závisia od intervalu hodnôt parametra θ. Preferujeme

a) $\hat{\Theta}_1$, ak $\theta \geq 10$, pretože $MSE(\hat{\Theta}_1) \leq MSE(\hat{\Theta}_2)$, pričom $\hat{\Theta}_1$ je nevychýlený odhad,

b) $\hat{\Theta}_2$, ak $\theta < 10$, pretože $MSE(\hat{\Theta}_1) > MSE(\hat{\Theta}_2)$.

5.2 Metódy bodového odhadovania

Ciele

- Vysvetliť užitočnosť *metódy maximálnej vierohodnosti*.
- Nájsť bodový odhad parametra θ použitím metódy maximálnej vierohodnosti.

Metóda maximálnej vierohodnosti

Metóda maximálnej vierohodnosti sa používa na stanovenie bodového odhadu parametra θ. Touto metódou nájdeme **maximálne vierohodný odhad** parametra θ, ktorý maximalizuje funkciu vierohodnosti náhodného výberu $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta) ,$$

kde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé náhodné premenné s rovnakou funkciou hustoty $f(x;\theta)$.

Príklad 5.6

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu n z exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ. Nájdite *maximálne vierohodný odhad* parametra λ.

Riešenie

Funkcia hustoty pravdepodobnosti exponenciálneho rozdelenia je

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} .$$

Potom funkcia vierohodnosti premenných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je

$$L(\lambda) = f(x_1;\lambda) f(x_2;\lambda) \cdots f(x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} .$$

Logaritmus funkcie vierohodnosti ($L(\lambda) > 0$) je

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Derivácia $\ln L(\lambda)$ je

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Keď položíme deriváciu $\ln L(\lambda)$ rovnú nule, dostaneme bodový odhad parametra λ, ktorý maximalizuje $L(\lambda)$ a má tvar

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}} .$$

5.3 Výberové rozdelenia výberových priemerov

Ciele

- Vysvetliť termín výberové rozdelenie.
- Vysvetliť centrálnu limitnú vetu (CLV).
- Nájsť rozdelenie výberového priemeru použitím centrálnej limitnej vety.

Výberové rozdelenie

Rozdelenie pravdepodobnosti nejakej štatistiky (funkcie náhodných premenných ako je výberový priemer a výberový rozptyl) sa nazýva *výberové rozdelenie*. Výberové rozdelenie štatistiky závisí od

– rozdelenia základného súboru,
– rozsahu výberu,
– metódy vyberania.

Výberové rozdelenie štatistiky $\overline{X}$

Predpokladajme, že máme náhodný výber rozsahu n z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2. Potom výberové rozdelenie výberového priemeru je

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Odvodenie vzťahu

Pretože $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé a normálne rozdelené s tou istou strednou hodnotou $E(X) = \mu$ a rozptylom $D(X) = \sigma^2$, rozdelenie náhodnej premennej $\overline{X}$ je normálne so strednou hodnotou a rozptylom:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[E(X_1) + E(X_2) + \cdots E(X_n)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu\,,$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left[D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2) = \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Centrálna limitná veta (CLV)

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu n zo základného súboru (X) so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2. Potom limitný tvar rozdelenia výberového priemeru $\overline{X}$ je

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

ak sa n blíži do nekonečna ($n \to \infty$). Táto aproximácia výberového priemeru $\overline{X}$ normálnym rozdelením sa nazýva *centrálna limitná veta* (CLV).

Na Obr. 5.4 vidieť, že rozdelenia výberových priemerov zo základných súborov s rozdelením rovnomerným, binomickým a exponenciálnym možno považovať za normálne, keď rozsah výberu n je dostatočne veľký. Vo väčšine prípadov pre $n \geq 30$ je normálna aproximácia $\overline{X}$ dobrá nezávisle od rozdelenia X. V prípadoch, keď rozdelenie X je blízke normálnemu, normálna aproximácia $\overline{X}$ bude dobrá aj pre $n < 30$.

Na základe centrálnej limitnej vety pre výberové rozdelenie výberového priemeru $\overline{X}$ môžu nastať dve situácie:

1. **základný súbor má normálne rozdelenie**, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom

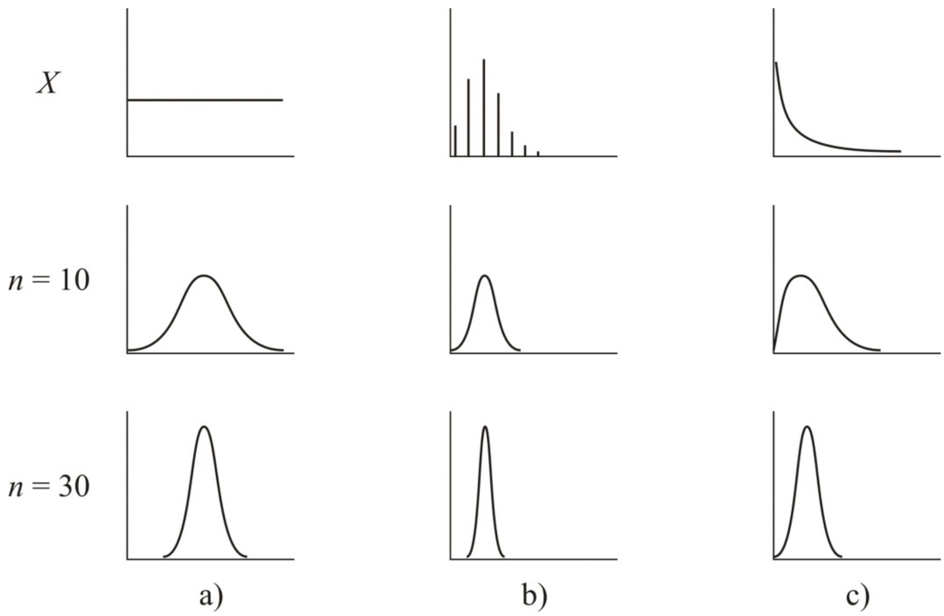
$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

kde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$,

2. **základný súbor** s parametrami μ, σ^2 **nemá normálne rozdelenie** a aproximácia normálnym rozdelením je

   a) **aplikovateľná**, potom $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, ak $n \geq 30$ alebo rozdelenie premennej X je blízke normálnemu rozdeleniu;

   b) **neaplikovateľná**, potom ak sa rozdelenie premennej X významne líši od normálneho rozdelenia a $n < 30$, aproximácia rozdelenia štatistiky $\overline{X}$ normálnym rozdelením sa nedá korektne urobiť. V tomto prípade sa použijú pri štatistickej indukcii neparametrické štatistiky.



Obr. 5.4. *Rozdelenie* $\overline{X}$ *: a)* $X \sim R(0, b)$ *; b)* $X \sim Bi(n, 0{,}2)$ *; c)* $X \sim E(\lambda = 1)$

Príklad 5.7

Predpokladajme, že doba čakania (premenná X v minútach) zákazníka na vyzdvihnutie predpísaného lieku v lekárni má exponenciálne rozdelenie s $E(X) = 20$ min a $D(X) = 400$ min^2. Skúmame náhodný výber rozsahu $n = 40$ pozorovaní zákazníkov. *Aké je rozdelenie výberového priemeru?*

Pretože $n \geq 30$, aproximácia normálnym rozdelením je aplikovateľná na $\overline{X}$ aj keď X má *exponenciálne* rozdelenie. Teda výberové rozdelenie $\overline{X}$ je

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N(20, \frac{400}{40}) = N(20,10) \, .$$

6 ŠTATISTICKÉ INTERVALY A ROZSAHY VÝBEROV PRI DANEJ PRESNOSTI BODOVÝCH ODHADOV

Ciele

- Rozpoznať rozdiel medzi intervalom spoľahlivosti, predikčným a štatistickým tolerančným intervalom.
- Interpretovať $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti (IS).
- Vysvetliť vzťah medzi dĺžkou IS a presnosťou odhadovania.
- Určiť chybu (E) pri odhadovaní skutočného parametra.

Štatistické intervaly

Kým bodový odhad odhaduje skutočnú hodnotu (polohu) parametra (θ), intervalový odhad stanovuje hranice pre možné hodnoty θ. Existujú tri typy intervalov:

1. **interval spoľahlivosti (IS):** ohraničuje <u>parameter základného súboru</u>.
   Napríklad keď $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom 90 % IS pre μ udáva, že daný IS obsahuje hodnotu μ s 90 % spoľahlivosťou.
2. **predikčný interval (PI):** ohraničuje <u>budúce pozorovanie</u>.
   Napríklad, keď $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom 90 % PI udáva, že daný PI obsahuje nové pozorovanie s 90 % spoľahlivosťou.
3. **štatistický toleračný interval (TI):** ohraničuje vybraný <u>podiel rozdelenia základného súboru</u>.
   Napríklad 95 % TI pre X s 90 % spoľahlivosťou udáva, že daný TI obsahuje 95 % hodnôt z X s 90 % spoľahlivosťou.

Interval spoľahlivosti

$100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti parametra θ má dolnú a hornú ($l \le \theta \le u$), resp. dolnú ($l \le \theta$) alebo hornú hranicu ($\theta \le u$), ktoré sa vypočítajú z výberu zo základného súboru. Pretože rôzne výbery produkujú rôzne hodnoty l a u, dolnú a hornú hranicu považujeme za náhodné premenné L a U, pre ktoré platí:

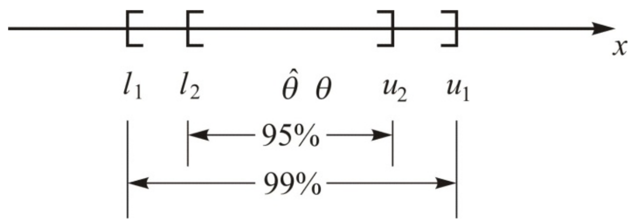
$$P(L \le \theta \le U) = 1-\alpha = 100(1-\alpha), \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Pretože L a U sú náhodné premenné, IS je náhodný interval. $100(1-\alpha)\%$ IS naznačuje, že keby sa stanovili IS z nekonečného počtu náhodných výberov, $100(1-\alpha)\%$ z nich by obsahovalo skutočnú hodnotu parametra θ.
Existujú dva typy intervalov spoľahlivosti:

1. **dvojstranný (obojstranný) symetrický IS**: špecifikuje dolnú aj hornú hranicu spoľahlivosti parametra θ tak, že $l \le \theta \le u$. Napríklad $730 \le \mu_X \le 750$ hodín, kde X je životnosť úspornej žiarovky,
2. **jednostranný IS**: definuje dolnú alebo hornú hranicu spoľahlivosti parametra θ tak, že $l \le \theta$ alebo $\theta \le u$. Napríklad $730 \le \mu_X$ alebo $\mu_X \le 750$ hodín, kde X je životnosť úspornej žiarovky.

Dĺžka IS a presnosť odhadovania

Dĺžka IS je vzdialenosť medzi hornou a dolnou hranicou ($u-l$). Čím je IS širší, tým je väčšia spoľahlivosť (pravdepodobnosť), že tento interval naozaj obsahuje skutočnú hodnotu θ (pozri Obr. 6.1), avšak menšia informovanosť o tom, kde sa v skutočnosti hodnota θ nachádza.



Obr. 6.1. *Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu životnosti*

Dĺžka IS pre θ je v inverznom vzťahu s **presnosťou** odhadovania parametra θ: čím je IS širší, tým je presnosť odhadovania θ menšia.

Chyba *E* pri odhadovaní parametra θ

$$E = \left|\hat{\theta} - \theta\right|,$$

kde $\hat{\theta}$ je bodový odhad skutočnej hodnoty parametra θ.

6.1 Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu normálneho rozdelenia so známym rozptylom

Ciele

- Určiť bodový odhad parametra μ, keď σ^2 je známy, a výberové rozdelenie bodového odhadu.
- Určiť $100(1-\alpha)\%$ IS pre parameter μ, keď σ^2 je známy.
- Určiť rozsah výberu, ktorý zodpovedá vopred danej chybe (E) pri odhadovaní μ.
- Nájsť kritickú hodnotu normálneho rozdelenia v tabuľkách.

Indukčné súvislosti

- **Bodový odhad** parametra μ: $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, kde σ^2 je známe
- **Štatistika** $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, kde $N(0,1)$ je normované normálne rozdelenie

Vzorec pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ IS pre μ, keď σ^2 je známe, platí:

$$\overline{X} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ pre dvojstranný (obojstranný) IS,

$$\overline{X} - k_{2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu$$ pre jednostranný IS s dolnou hranicou,

$$\mu \le \overline{X} + k_{2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ pre jednostranný IS s hornou hranicou,

kde k_α a $k_{2\alpha}$ sú kritické hodnoty rozdelenia $N(0,1)$ (pozri prílohu)

Odvodenie vzorca pre dvojstranný IS

Keď použijeme štatistiku $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, potom

$$P\left(-k_\alpha \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le k_\alpha\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha .$$

Pre dolnú hranicu L a hornú hranicu U platí:

$$L = \overline{X} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{a} \quad U = \overline{X} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Voľba rozsahu výberu

Pri stanovení $100(1-\alpha)\%$ IS pre μ, ktorého polovica šírky nepresiahne preddefinovanú hodnotu chyby $E = |\overline{x} - \mu|$ pri odhadovaní μ, sa rozsah výberu určí pomocou vzorca

$$n = \left(\frac{k_\alpha \sigma}{E} \right)^2.$$

Poznámka. Ak n nie je celé číslo, zaokrúhľuje sa nahor.

Príklad 6.1

Predpokladajme, že doba životnosti úspornej žiarovky X má *normálne rozdelenie so strednou hodnotou* μ a rozptylom $\sigma^2 = 40^2$, t. j. $X \sim N(\mu, 40^2)$. Skúmajme životnosť náhodne vybratých 30 žiaroviek (Tab. 6.1), pričom hodnota výberového priemeru je $\overline{x} = 780$ hodín.

Tab. 6.1

Číslo	Životnosť	Číslo	Životnosť	Číslo	Životnosť
1	727	11	831	21	725
2	755	12	742	22	735
3	714	13	784	23	770
4	840	14	807	24	792
5	772	15	820	25	765
6	750	16	812	26	749
7	814	17	804	27	829
8	820	18	754	28	821
9	753	19	715	29	816
10	796	20	845	30	743

1. *Interval spoľahlivosti pre* μ, σ^2 *je známe*

Nájdime 95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu životnosti (μ) úspornej žiarovky.

$$P(l \le \mu \le u) = 1 - \alpha = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}05.$$

95 % obojstranný IS pre μ:

$$\overline{X} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$780 - k_{0,05} \frac{40}{\sqrt{30}} \le \mu \le 780 + k_{0,05} \frac{40}{\sqrt{30}}$$

$$780 - 1{,}96 \times \frac{40}{\sqrt{30}} \le \mu \le 780 + 1{,}96 \times \frac{40}{\sqrt{30}}$$

$$765{,}686 \le \mu \le 794{,}314$$

2. *Voľba rozsahu výberu*

Nájdime *rozsah výberu* n, pri ktorom dostaneme obojstranný 95 % interval spoľahlivosti pre μ s chybou 20 hodín.

$$n = \left(\frac{k_\alpha \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{k_{0,05} \times 40}{20}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \times 40}{20}\right)^2 = 15{,}3664 \approx 16$$

6.2 Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu normálneho rozdelenia s neznámym rozptylom

Ciele

- Určiť bodový odhad parametra μ, keď parameter σ^2 je neznámy a výberové rozdelenie bodového odhadu.
- Určiť $100(1-\alpha)\%$ IS pre parameter μ, keď parameter σ^2 je neznámy.
- Nájsť kritickú hodnotu t- rozdelenia v tabuľkách v prílohe.

Indukčné súvislosti

- **Parameter normálneho rozdelenia:** μ
- **Bodový odhad** parametra μ: $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, kde σ^2 je neznáme
- **Štatistika:** $T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$, kde S je odhad σ a $t(n-1)$ je *t*–rozdelenie (Studentovo) so stupňami voľnosti $n-1$ (Janiga, 2013, podkapitola 3.8.2).

Vzorec pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ IS pre μ, keď σ^2 je neznáme, platí:

$$\overline{X} - t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{pre dvojstranný (obojstranný) IS,}$$

$$\overline{X} - t(n-1;2\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \quad \text{pre jednostranný IS s dolnou hranicou,}$$

$$\mu \le \overline{X} + t(n-1;2\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{pre jednostranný IS s hornou hranicou,}$$

kde $t(n-1;\alpha)$ a $t(n-1;2\alpha)$ sú kritické hodnoty *t*–rozdelenia so stupňami voľnosti $n-1$ (pozri prílohu).

Odvodenie vzorca pre *dvojstranný IS*

$$P\left(-t(n-1;\alpha) \le T \le t(n-1;\alpha)\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t(n-1;\alpha) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t(n-1;\alpha)\right) = 1-\alpha\,,$$

$$P\left(\overline{X} - t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha\,.$$

Pre dolnú hranicu *L* a hornú hranicu *U* platí:

$$L = \overline{X} - t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{a} \quad U = \overline{X} + t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}\,.$$

Príklad 6.2

Predpokladajme, že doba životnosti úspornej žiarovky X je normálne rozdelená s neznámymi parametrami. Teda platí: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, pričom μ a σ^2 *sú neznáme*. Nájdeme 95 % *obojstranný interval spoľahlivosti* pre strednú hodnotu životnosti (μ) úspornej žiarovky.

Uvažujme realizáciu náhodného výberu z časti Príklad 6.1. Z údajov o životnosti žiaroviek s rozsahom $n = 30$ sme získali hodnoty bodových odhadov $\bar{x} = 780$ a $s = 40{,}0164$ potrebných na výpočet intervalového odhadu:

$$P\left(l \le \mu \le u\right) = 0{,}95 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$

95 % obojstranný IS pre μ:

$$\overline{X} - t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$780 - t(29;0{,}05)\frac{40{,}0164}{\sqrt{30}} \le \mu \le 780 + t(29;0{,}05)\frac{40{,}0164}{\sqrt{30}}$$
$$780 - 2{,}045 \times \frac{40{,}0164}{\sqrt{30}} \le \mu \le 780 + 2{,}045 \times \frac{40{,}0164}{\sqrt{30}}$$
$$765{,}059 \le \mu \le 794{,}941$$

Všimnite si, že IS založený na t-rozdelení ($765{,}059 \le \mu \le 794{,}941$) je širší ako zodpovedajúci interval založený na normálnom rozdelení ($765{,}686 \le \mu \le 794{,}314$).

6.3 Interval spoľahlivosti pre rozptyl normálneho rozdelenia

Ciele

- Určiť bodový odhad parametra σ^2 a výberové rozdelenie bodového odhadu.
- Určiť $100(1-\alpha)\%$ IS pre parameter σ^2.
- Nájsť kritickú hodnotu χ^2 - rozdelenia v tabuľkách v prílohe.

Indukčné súvislosti

- **Parameter** normálneho rozdelenia: σ^2
- **Bodový odhad** parametra σ^2: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$, pričom $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber z $N(\mu, \sigma^2)$
- **Štatistika:** $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, kde S^2 je odhad σ^2 a $\chi^2(n-1)$ označuje chí–kvadrát rozdelenie so stupňami voľnosti $n-1$ (Janiga, 2013,, podkapitola 3.8.1).

Vzorec pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ IS pre μ, keď σ^2 je známe, platí:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha/2)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha/2)}$$ pre dvojstranný (obojstranný) IS,

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha)} \le \sigma^2$$ pre jednostranný IS s dolnou hranicou,

$$\sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha)}$$ pre jednostranný IS s hornou hranicou,

kde $\chi^2(n-1;\alpha/2)$, $\chi^2(n-1;1-\alpha/2)$, $\chi^2(n-1;\alpha)$ a $\chi^2(n-1;1-\alpha)$ sú kritické hodnoty rozdelenia $\chi^2(n-1)$ (pozri prílohu).

Odvodenie vzorca pre dvojstranný IS

$$P\left(\chi^2(n-1;1-\alpha/2)\le \chi^2 \le \chi^2(n-1;\alpha/2)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\chi^2(n-1;1-\alpha/2)\le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2(n-1;\alpha/2)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha/2)}\le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha/2)}\right)=1-\alpha$$

Pre dolnú hranicu *L* a hornú hranicu *U* platí:

$$L=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha/2)} \quad \text{a} \quad U=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha/2)}.$$

Príklad 6.3

Nech doba životnosti úspornej žiarovky *X má normálne rozdelenie so strednou hodnotou* μ *a rozptylom* σ^2, *ktoré sú neznáme*. Pri skúmaní životnosti náhodného výberu žiaroviek o rozsahu $n=30$ sa zistila hodnota výberového rozptylu $s^2=40{,}0164^2$. Nájdime 95 % *dvojstranný interval spoľahlivosti* pre rozptyl doby životnosti úspornej žiarovky σ^2.

$$P\left(l\le\sigma^2\le u\right)=0{,}95=1-\alpha \;\Rightarrow\; \alpha=0{,}05$$

95 % obojstranný IS pre σ^2:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha/2)}\le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha/2)}$$

$$\frac{(30-1)\times 40{,}0164^2}{\chi^2(29;0{,}05/2)}\le \sigma^2 \le \frac{(30-1)\times 40{,}0164^2}{\chi^2(29;1-0{,}05/2)}$$

$$\frac{46438{,}1}{45{,}7}\le \sigma^2 \le \frac{46438{,}1}{16{,}0}$$

$$1016{,}70\le \sigma^2 \le 2902{,}38$$

$$31{,}88^2\le \sigma^2 \le 53{,}87^2$$

6.4 Interval spoľahlivosti z veľkého výberu pre podiel v základnom súbore s danou vlastnosťou

Ciele

- Určiť bodový odhad parametra p a výberové rozdelenie bodového odhadu.
- Určiť $100(1-\alpha)\%$ IS pre parameter p.
- Určiť rozsah výberu, ktorý zodpovedá vopred danej chybe (E) pri odhadovaní p.

Indukčné súvislosti

- **Parameter** binomického rozdelenia: p
- **Bodový odhad** parametra p: $\hat{P} = \dfrac{X}{n}$, kde $X \sim B(n,p)$ je známe
- **Štatistika:** $Z = \dfrac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$, keď $np(1-p) > 9$; $\hat{P}$ je odhad p

Výberové rozdelenie odhadu $\hat{P}$

Stredná hodnota a rozptyl binomickej náhodnej premennej $X \sim B(n,p)$ sú

$$E(X) = np \quad \text{a} \quad D(X) = np(1-p).$$

Teda

$$E(\hat{P}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p,$$

$$D(\hat{P}) = D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(X) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Podmienky pre aproximácie binomického rozdelenia $B(n,p)$ rozdelením normálnym sú splnené, pretože p nie je ani blízko nuly ani blízko jednotky a n je relatívne veľké, takže $np(1-p) > 9$.

Preto aproximácia rozdelenia $\hat{P}$ je

$$\hat{P} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \approx N(0,1).$$

Vzorec pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ IS pre p platí:

$$\hat{P}-k_\alpha\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\le p\le \hat{P}+k_\alpha\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$ pre dvojstranný (obojstranný) IS,

$$\hat{P}-k_{2\alpha}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\le p$$ pre jednostranný IS s dolnou hranicou,

$$p\le \hat{P}+k_{2\alpha}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$ pre jednostranný IS s hornou hranicou.

Odvodenie vzorca pre dvojstranný IS

$$P\left(-k_\alpha\le Z\le k_\alpha\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-k_\alpha\le\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\le k_\alpha\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\hat{P}-k_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\le p\le \hat{P}+k_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)=1-\alpha$$

Použijeme odhad $\hat{P}$ neznámeho parametra p

$$P\left(\hat{P}-k_\alpha\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\le p\le \hat{P}+k_\alpha\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right)=1-\alpha$$

Potom pre dolnú hranicu L a hornú hranicu U platí:

$$L=\hat{P}-k_\alpha\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\quad\text{a}\quad U=\hat{P}+k_\alpha\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

Výpočet rozsahu výberu

Pri odhadovaní p sa používajú nasledujúce vzorce na výpočet rozsahu výberu, pri ktorom sa neprekročí vopred definovaná chyba odhadu:

$$n=\left(\frac{k_\alpha}{E}\right)^2 p(1-p),\quad \text{ak } p \text{ je známe,}$$

$$n=\left(\frac{k_\alpha}{E}\right)^2 \times 0{,}25,\quad \text{ak } p \text{ je neznáme.}$$

Príklad 6.4

Náhodný výber $n=40$ mostov sa v istom kraji testoval na koróziu kovu. Zistilo sa, že $x=28$ mostov je skorodovaných.

1. Nájdime 95 % *obojstranný interval spoľahlivosti* pre podiel skorodovaných mostov p v danom kraji.

$$P(l \le p \le u) = 0,95 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \qquad \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{28}{40} = 0,7$$

Pretože aj $n\hat{p} = 40 \times 0,7 = 28$ aj $n(1-\hat{p}) = 40 \times 0,3 = 12$ sú väčšie ako päť, výberové rozdelenie bodového odhadu $\hat{P}$ je približne normálne.
95 % obojstranný IS pre p je:

$$\hat{p} - k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0,7 - k_{0,05} \sqrt{\frac{0,7 \times (1-0,7)}{40}} \le p \le 0,7 + k_{0,05} \sqrt{\frac{0,7 \times (1-0,7)}{40}}$$

$$0,7 - 1,96 \times 0,07 \le p \le 0,7 + 1,96 \times 0,07$$

$$0,5628 \le p \le 0,8372$$

$$0,56 \le p \le 0,84$$

2. Nájdime *rozsah výberu* n na stanovenie 95 % obojstranného intervalu spoľahlivosti pre p s chybou 0,05.

$$n = \left(\frac{k_\alpha}{E}\right)^2 \times 0,25 = \left(\frac{k_{0,05}}{0,05}\right)^2 \times 0,25 = \left(\frac{1,96}{0,05}\right)^2 \times 0,25 = 384,2 \approx 385$$

6.5 Predikčný interval pre budúce pozorovanie

Ciele

- Určiť rozdelenie predikčnej chyby $X_{n+1} - \overline{X}$.
- Určiť $100(1-\alpha)\%$ predikčný interval (PI) pre nové pozorovanie.

Výberové rozdelenie predikčnej chyby $E = X_{n+1} - \overline{X}$

Nech $X_1, X_2, \dots, X_n$ je náhodný výber z $N(\mu, \sigma^2)$. Chceme predikovať nové pozorovanie X_{n+1}. Keď použijeme $\overline{X}$ ako bodový odhad X_{n+1}, potom rozdelenie zodpovedajúcej predikčnej chyby E je

$$E = X_{n+1} - \overline{X} \sim N\left(0, \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n}\right]\right),$$

kde $X_{n+1} \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ a X_{n+1}, $\overline{X}$ sú nezávislé náhodné premenné.

Preto štatistika

$$Z = \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim N\left(0, 1^2\right), \text{ keď } \sigma^2 \text{ je známe,}$$

$$T = \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim t(n-1), \text{ keď } \sigma^2 \text{ je neznáme.}$$

Vzorec pre dvojstranný predikčný interval

$$\overline{X} - k_\alpha \sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}} \le X_{n+1} \le \overline{X} + k_\alpha \sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}, \ \sigma^2 \text{ je známe}$$

$$\overline{X} - t(n-1;\alpha)\, S\sqrt{1+\frac{1}{n}} \le X_{n+1} \le \overline{X} + t(n-1;\alpha)\, S\sqrt{1+\frac{1}{n}}, \ \sigma^2 \text{ je neznáme}$$

Príklad 6.5 (Predikčný interval pre X_{n+1}, σ^2 neznáme)

Z dát pre úspornú žiarovku sme získali hodnoty: $n = 30$, $\bar{x} = 780$ a $s^2 = 40^2$. Nájdite 95 % *dvojstranný predikčný interval* pre životnosť ďalšej skúšanej úspornej žiarovky X_{31}.

$$P\left(l \le p \le u\right) = 0,95 = 1 - \alpha \ \Rightarrow \ \alpha = 0,05$$

95 % obojstranný PI:(σ^2 neznáme) pre X_{31}

$$\overline{X} - t(n-1;\alpha) S\sqrt{1+\frac{1}{n}} \le X_{n+1} \le \overline{X} + t(n-1;\alpha) S\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$780 - t(29; 0,05) \times 40,0164 \times \sqrt{1+\frac{1}{30}} \le X_{31} \le 780 + t(29; 0,05) \times 40,0164 \times \sqrt{1+\frac{1}{30}}$$

$$780 - 2,045 \times 40,677873 \le X_{31} \le 780 + 2,045 \times 40,677873$$

$$780 - 83,18625 \le X_{31} \le 780 + 83,18625$$

$$696,81375 \le X_{31} \le 863,18625$$

Všimnime si, že PI $\left[696,81375;\ 863,18625\right]$ založený na *t*-rozdelení je <u>širší</u> ako IS $\left[765,065;\ 794,935\right]$ pre μ založený na *t*-rozdelení (Príklad 6.2).

6.6 Štatistické toleračné intervaly pre normálne rozdelenie s neznámymi parametrami

Ciele

- Stanoviť p-toleračný interval so $100(1-\alpha)\%$ spoľahlivosťou pre normálne rozdelený základný súbor s neznámymi parametrami μ a σ^2.

Štatistický toleračný interval

Predpokladajme, že doba životnosti úspornej žiarovky X má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 780$ a rozptylom $\sigma^2 = 40^2$. Potom interval

$$(\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma) = (780 - 1{,}96 \times 40; 780 + 1{,}96 \times 40)$$

obsahuje 95 % hodnôt základného súboru úspornej žiarovky z hľadiska doby životnosti. Interval $(\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma)$ sa nazýva **štatistický toleračný interval**.

Keď μ a σ^2 sú neznáme, môžeme použiť dáta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z náhodného výberu rozsahu n na výpočet hodnôt výberového priemeru $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ a výberovej smerodajnej odchýlky $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, potom vytvoríme interval $(\bar{x} - 1{,}96s; \bar{x} + 1{,}96s)$. Vzhľadom na výberovú variabilitu je pravdepodobné, že tento interval bude obsahovať menej ako 95 % hodnôt zo základného súboru. Riešenie tohto problému spočíva v nahradení hodnoty 1,96 nejakou inou hodnotou, ktorá vytvorí interval obsahujúci podiel 95 % hodnôt zo základného súboru s nejakou úrovňou spoľahlivosti.

Definícia dvojstranného a jednostranného štatistického toleračného intervalu

$100(1-\alpha)$ % **dvojstranný** štatisticky toleračný interval (Garaj, I., Janiga, I., 2002) je interval

$$(\bar{x} - ks; \bar{x} + ks),$$

pre ktorý platí

$$P\left[P(\bar{x} - ks < X < \bar{x} + ks) \geq p\right] = 1 - \alpha.$$

kde $k = k(n, p, 1-\alpha)$ je toleračný faktor (Príloha), $1-\alpha$ spoľahlivosť a p je podiel hodnôt z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$.

$100(1-\alpha)$ % **jednostranný** štatisticky tolerančný interval (Garaj, I., Janiga, I., 2005) je interval

$$(-\infty, \bar{x}+ks) \text{ alebo } (\bar{x}-ks, \infty),$$

pre ktorý platí

$$P\left[P(X<\bar{x}+ks) \geq p\right]=1-\alpha \quad \text{alebo} \quad P\left[P(\bar{x}-ks<X) \geq p\right]=1-\alpha .$$

kde $k=k(n, p, 1-\alpha)$ je tolerančný faktor (Príloha), $1-\alpha$ spoľahlivosť a p je podiel hodnôt z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$.

Príklad 6.6

Z dát o životnosti úsporných žiaroviek, ktoré pochádzajú z normálneho rozdelenia, sme získali hodnoty: $n=30$, $\bar{x}=780$ a $s=40,0164$.

Zostrojme 90 % dvojstranný štatistický tolerančný interval, ktorý pokrýva aspoň 95 % hodnôt životnosti úsporných žiaroviek zo základného súboru. Pre $n=30$, $p=0,95$ a $1-\alpha=0,90$ nájdeme v príslušnej tabuľke (pozri prílohu) hodnotu $k=2,4166$. Uvedené hodnoty dosadíme do vzťahu $(\bar{x}-ks, \bar{x}+ks)$ a dostaneme:

$$(780-2,4166 \times 40,0164 ; 780+2,4166 \times 40,0164)$$

$$(780-96,7036 ; 780+96,7036)$$

$$(683,2964 ; 876,7036) .$$

Po zaokrúhlení dolnej hranice nadol a hornej hranice nahor dostaneme interval

$$(683,29 ; 876,71) .$$

Chceme nájsť 90 % jednostranný štatistický tolerančný interval s dolnou hranicou, ktorý obsahuje aspoň 95 % hodnôt zo základného súboru. Pre $n=30$, $p=0,95$ a $1-\alpha=0,90$ nájdeme v príslušnej tabuľke (pozri prílohu) hodnotu $k=2,0799$. Uvedené hodnoty dosadíme do vzťahu $(\bar{x}-ks, \infty)$ a dostaneme:

$$(780-2,0799 \times 40,0164 ; \infty)$$

$$(780-83,2301 ; \infty)$$

$$(696,7698896 ; \infty) .$$

Po zaokrúhlení dolnej hranice nadol na tri desatinné miesta dostaneme interval

$$(696,769 ; \infty) .$$

7 TESTY HYPOTÉZ V JEDNOM VÝBERE

7.1 Testovanie hypotézy

Ciele

- Vysvetliť termíny *nulová hypotéza*, *alternatívna hypotéza*, *testovacia štatistika*, *oblasť prijatia*, *oblasť zamietnutia*, *kritická hodnota*, *pravdepodobnosť chyby I. druhu* (α), *pravdepodobnosť chyby II. druhu* (β) a *sila testu*.
- Stanoviť oblasť prijatia a oblasť zamietnutia pre test hypotézy na úrovni významnosti α.
- Určiť pravdepodobnosť chyby II. druhu a silu testu.
- Vysvetliť vzťah medzi α a β.
- Určiť postup testovania hypotézy.

Hypotéza

Hypotéza je tvrdenie o parametroch jedného alebo viacerých skúmaných základných súborov. Existujú dva druhy hypotéz:

1. **Nulová hypotéza** $\left(H_0 : \theta = \theta_0\right)$

   Uvádza predpokladanú (hypotetickú) hodnotu θ_0 neznámeho parametra θ (na základe experimentu, teórie, návrhu špecifikácií, regulácie alebo zmluvného záväzku), ktorá bude platná dovtedy kým neexistujú pádne dôkazy proti jej zamietnutiu. Všimnime si, že H_0 by mala vždy určiť presnú hodnotu θ. Napríklad: $H_0 : \mu_X = 750$ h, kde X je životnosť úspornej žiarovky.

2. **Alternatívna hypotéza (** H_1 **):**

   Uvádza inú hodnotu parametra θ, ktorá sa uvažuje pri zamietnutí H_0. Existujú tieto typy alternatív:

   – **dvojstranná** $H_1 : \theta \neq \theta_0$ neoznačuje žiadne smerovanie hodnoty parametra θ. Napríklad: $H_1 : \mu_X \neq 750$ h,

   – **jednostranná** $H_1 : \theta < \theta_0$ alebo $H_1 : \theta > \theta_0$ označuje smerovanie hodnoty parametra θ. Napríklad dolná $H_1 : \mu_X < 750$ h alebo horná $H_1 : \mu_X > 750$ h.

Testovacia štatistika

Testovacia štatistika je funkcia náhodného výberu (štatistika), ktorá sa použije pri štatistickej indukcii o parametri θ. Napríklad testovacia štatistika pri indukcii o parametre μ, kde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a σ^2 je známy je

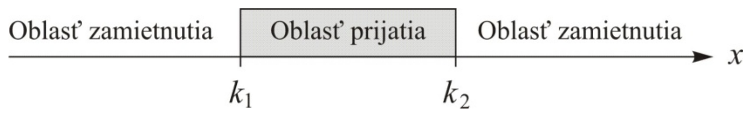
$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ alebo } Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Oblasti testovania

Stanovené sú dve oblasti testovacej štatistiky (Obr. 7.1) pre testovanie H_0 oproti H_1**:**

- **oblasť prijatia (** $\bar{K}$ **):** oblasť testovacej štatistiky, ktorá vedie k <u>nezamietnutiu</u> H_0.
- **oblasť zamietnutia (kritická oblasť** *K***):** oblasť testovacej štatistiky, ktorá vedie k <u>zamietnutiu</u> H_0.

Hranice medzi oblasťami nezamietnutia a zamietnutia sa nazývajú **kritické hodnoty (**k_1, k_2**).** Potom $\bar{K} = [k_1, k_2]$ a $K = (-\infty, k_1) \cup (k_2, \infty)$



Obr. 7.1. *Oblasti prijatia a zamietnutia* H_0

Chyby testu

Vzhľadom na to, že testovanie hypotézy je založené na náhodnom výbere, pri svojom rozhodovaní o zamietnutí alebo nezamietnutí H_0 sa môžeme dopustiť jednej z dvoch chýb:

1. ak zamietneme nulovú hypotézu vtedy, keď je správna, urobíme tzv. *chybu prvého druhu*,
2. ak nezamietneme nulovú hypotézu vtedy, keď nie je správna, urobíme tzv. *chybu druhého druhu*.

Tab. 7.1. *Rozhodovacia matica v testovaní hypotéz*

	H_0 sa nezamietne	H_0 sa zamietne
H_0 je správna	Správne rozhodnutie	**Chyba 1. druhu**
H_0 je nesprávna	**Chyba 2. druhu**	Správne rozhodnutie

Pravdepodobnosti nastania týchto dvoch druhov chýb sú podmienené pravdepodobnosti:

$$\alpha = P(\text{chyba 1. druhu}) = P(\ H_0 \text{ zamietam} | H_0 \text{ je správna})$$

$$\beta = P(\text{chyba 2. druhu}) = P(H_0 \text{ nezamietam} | H_0 \text{ nie je správna})$$

Pravdepodobnosť chyby 1. druhu α sa nazýva **úroveň (hladina) významnosti testu**. Najviac sa používajú hodnoty $\alpha = 0{,}05$ a $\alpha = 0{,}01$.

Sila testu

Sila testu vyjadruje pravdepodobnosť zamietnutia H_0, keď H_0 je nesprávna a označuje schopnosť (citlivosť) testu zamietnuť H_0.

$$\begin{aligned}\text{Sila testu} &= P(H_0 \text{ zamietame} | H_0 \text{ je nesprávna}) = \\ &= 1 - P(H_0 \text{ nezamietneme} | \mathrm{H}_0 \text{ je nesprávna}) \\ &= 1 - \beta\end{aligned}$$

Oblasti testovania, hypotézy, α, β a sila testu

Oblasti testovania, hypotézy, α, β a sila testu sú vzájomne závislé. <u>Oblasti nezamietnutia a zamietnutia</u> testovacej štatistiky $\hat{\Theta}$ závisia od α a od hypotetickej hodnoty θ (označovanej ako θ_0). Nech L a U označujú dolnú a hornú hranicu oblasti nezamietnutia pri testovaní $H_0 : \theta = \theta_0$, potom oblasť nezamietnutia pre $\hat{\Theta}$ sa určí takto:

$$1 - \alpha = P(H_0 \text{ nezamietneme} | H_0 \text{ je správna}) = P(H_0 \text{ nezamietneme} | \theta = \theta_0) =$$

$$= \begin{cases} P(L \le \hat{\Theta} \le U | \theta = \theta_0), \text{ pre obojstrannú } H_1 \\ P(L \le \hat{\Theta} | \theta = \theta_0), \qquad \text{pre dolnú jednostrannú } H_1 \\ P(\hat{\Theta} \le U | \theta = \theta_0), \qquad \text{pre hornú jednostrannú } H_1 \end{cases}$$

Na základe oblasti nezamietnutia testu a skutočnej hodnote θ sa β a <u>sila testu</u> $1 - \beta$ určujú takto:

$$\beta = P(H_0 \text{ nezamietneme} | H_0 \text{ je nesprávna}) = P(H_0 \text{ nezamietneme} | \theta \ne \theta_0) =$$

$$= \begin{cases} P(L \le \hat{\Theta} \le U | \theta \ne \theta_0), \text{ pre obojstrannú } H_1 \\ P(L \le \hat{\Theta} | \theta \ne \theta_0), \qquad \text{pre dolnú jednostrannú } H_1 \\ P(\hat{\Theta} \le U | \theta \ne \theta_0), \qquad \text{pre hornú jednostrannú } H_1 \end{cases}$$

a

$$\text{sila testu} = 1 - \beta.$$

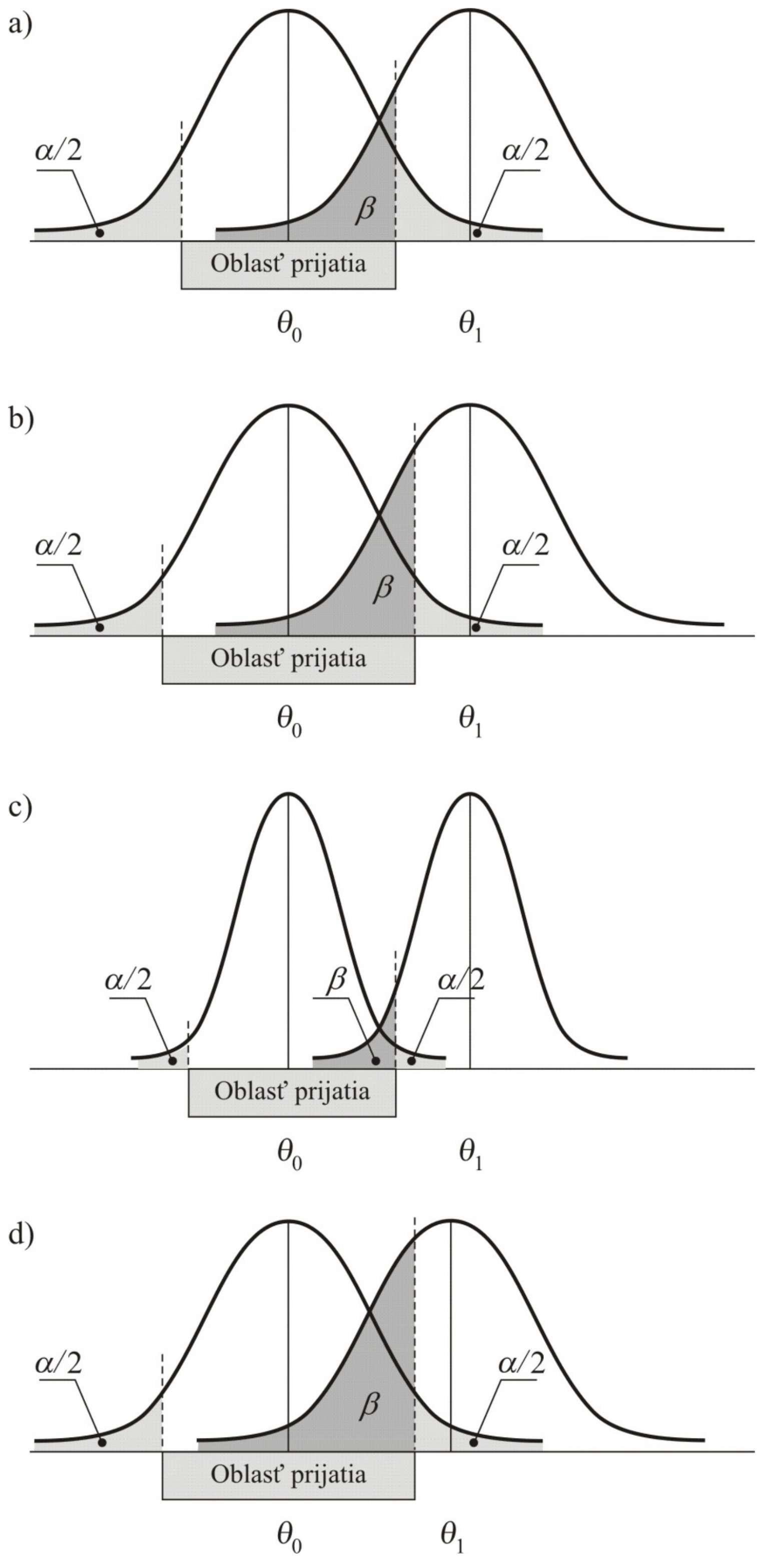
Vzťah medzi α a β

Hypotetické rozdelenie výberového priemeru $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$ pre hypotézy
$H_0 : \theta = \theta_0$ a $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 \neq \theta_0$

<u>Pre *n* fixné platí:</u>
ak oblasť prijatia sa <u>rozširuje</u>, tak α sa <u>zmenšuje</u> a β sa <u>zväčšuje</u>.

<u>Pre konštantné kritické hodnoty platí:</u>
ak *n* <u>rastie</u>, tak α a β <u>klesajú</u>.

$H_0 : \theta = \theta_0$ <u>je nesprávna:</u>
ak θ sa <u>blíži</u> k θ_0, β sa <u>zväčšuje</u> a opačne.



Obr. 7.2. *Vzťah medzi α a β*

Príklad 7.1

Predpokladajme, že doba životnosti úspornej žiarovky X má normálne rozdelenie s rozptylom $\sigma^2 = 40^2$, $X \sim N(\mu;40^2)$. Chceme testovať hypotézu H_0: $\mu_X = 750$ oproti H_1: $\mu_X \neq 750$, pričom náhodný výber má rozsah $n = 30$ úsporných žiaroviek.

Riešenie

1. *Oblasť prijatia a oblasť zamietnutia*

Vytvorme oblasť prijatia a oblasť zamietnutia testu o strednej hodnote μ na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$

Testovacia štatistika pre μ je výberový priemer s výberovým rozdelením

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{40^2}{30}\right).$$

Oblasť prijatia $l \leq \bar{X} \leq u$ pre H_0: $\mu_X = 750$ oproti H_1: $\mu_X \neq 750$ spĺňa

$$1-\alpha = 1-0,05 = 0,95 = P(H_0 \text{ nezamietame} | \mu{=}750)$$

$$0,95 = P(l \leq \bar{X} \leq u | \mu{=}750) =$$

$$= P\left(\frac{l-\mu}{40/\sqrt{30}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{40/\sqrt{30}} \leq \frac{u-\mu}{40/\sqrt{30}} | \mu{=}750\right) =$$

$$= P\left(\frac{l-750}{40/\sqrt{30}} \leq Z \leq \frac{u-750}{40/\sqrt{30}}\right) = P\left(-k_\alpha \leq Z \leq k_\alpha\right) =$$

$$= P\left(-1,96 \leq Z \leq 1,96\right)$$

Teda kritické hodnoty sú

$$\frac{l-750}{40/\sqrt{30}} = -1,96 \Rightarrow l = 750 - 1,96 \times \frac{40}{\sqrt{30}} = 735,686$$

$$\frac{u-750}{40/\sqrt{30}} = 1,96 \Rightarrow u = 750 + 1,96 \times \frac{40}{\sqrt{30}} = 764,314$$

Preto

oblasť prijatia H_0: $735,686 \leq \bar{x} \leq 764,314$

oblasť zamietnutia H_0: $\bar{x} < 735,686$ a $\bar{x} > 764,314$

2. *β a sila testu*

Predpokladajme, že skutočná hodnota je $\mu_X = 730$ hodín. Nájdeme β a silu testu, keď oblasť prijatia je $735,686 \leq \bar{x} \leq 764,314$.

$$\beta = P(H_0 \text{ nezamietame} | H_0 \text{ nesprávna}) = P(735,686 \le \overline{X} \le 764,314 | \mu = 730) =$$

$$= P\left(\frac{735,686-\mu}{40/\sqrt{30}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{40/\sqrt{30}} \le \frac{764,314-\mu}{40/\sqrt{30}} | \mu{=}730 \right) =$$

$$= P\left(\frac{735,686-730}{40/\sqrt{30}} \le Z \le \frac{764,314-730}{40/\sqrt{30}} \right) = P(0,77859 \le Z \le 4,69864) =$$

$$= P(Z \le 4,70) - P(Z \le 0,78) = 1 - 0,7823 = 0,2177$$

Sila testu $= 1-\beta = 0,7823$.

Postup pri testovaní hypotéz

1. Formulujeme nulovú hypotézu H_0 a alternatívnu hypotézu H_1 (obojstrannú alebo jednostrannú).
2. Zvolíme testovaciu štatistiku a určíme jej rozdelenie.
3. Vypočítame hodnotu testovacej štatistiky.
4. Zvolíme úroveň (hladinu) významnosti α .
5. V štatistických tabuľkách nájdeme kritické hodnoty (resp. kvantily) rozdelenia testovacej štatistiky pre zvolenú hodnotu α , ktoré závisia od alternatívnej hypotézy H_1 a vymedzujú kritickú oblasť.
6. Urobíme konečné rozhodnutie, t. j. zamietneme alebo nezamietneme H_0 na danej úrovni významnosti α podľa toho, či sa vypočítaná hodnota testovacej štatistiky nachádza alebo nenachádza v kritickej oblasti.

7.2 Testy o strednej hodnote normálneho rozdelenia, rozptyl je známy

Ciele

- Testovať hypotézu o strednej hodnote μ, keď rozptyl σ^2 je známy (z-test).
- Vypočítať P-hodnotu pre z-test.
- Pri vyhodnocovaní výsledkov testu hypotézy porovnať prístup s hodnotou α s prístupom s P-hodnotou.
- Vysvetliť vzťah medzi odhadom intervalu spoľahlivosti a testovaním hypotézy.
- Určiť rozsah výberu pri z-teste o parametri μ pomocou vzorca pre rozsah výberu a krivky operatívnej charakteristiky (OC).
- Vysvetliť účinok rozsahu náhodného výberu n na štatistickú významnosť a silu testu.
- Rozlišovať štatistickú významnosť od praktického významu.

Indukčné súvislosti

- **Parameter**: μ
- **Bodový odhad** parametra μ: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$; σ^2 je známy
- **Testovacia štatistika** parametra μ: $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Postup testovania (z-test):

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy** t. j. H_0 a H_1,

H_0: $\mu = \mu_0$ $\quad$ H_1: $\mu \neq \mu_0$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$\mu > \mu_0$ pre jednostranný test,

$\mu < \mu_0$ pre jednostranný test.

krok 2: stanovenie t**estovacej štatistiky** a jej hodnoty

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}, \qquad z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

k_α pre obojstranný test,

$k_{2\alpha}$ pre jednostranný test.

krok 4: určenie **výsledku testovania hypotézy**: Nulová hypotéza H_0 sa *zamietne*, ak

$|z_0| > k_\alpha$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$z_0 > k_{2\alpha}$ pre horný jednostranný test,

$z_0 < -k_{2\alpha}$ pre dolný jednostranný test.

***P*-hodnota v testovaní hypotéz**

P-hodnota je pravdepodobnosť, že testovacia štatistika za platnosti nulovej hypotézy H_0 nadobudne extrémnejšiu hodnotu, ako je pozorovaná hodnota testovacej štatistiky.

Pre výpočet *P*-hodnoty v prípade *z*-testu platí:

$$P = \begin{cases} 2[1 - \Phi(|z_0|)] & \text{pre dvojstranný test,} \\ 1\text{-}\Phi(z_0) & \text{pre horný jednostranný test,} \\ \Phi(z_0) & \text{pre dolný jednostranný test.} \end{cases}$$

Prístup s hodnotou α verzus *P*-hodnota

Na vyhodnotenie výsledkov testu hypotézy sa používajú dva prístupy:

1. **Prístup s hodnotou α**, ktorá uvádza výsledky testu vzhľadom na vopred zvolenú hodnotu α. Tento prístup neposkytuje silu dôkazov proti (na zamietnutie) H_0.
2. **Prístup s *P*-hodnotou**, ktorá špecifikuje, ako ďaleko je hodnota testovacej štatistiky od kritickej hodnoty (kritických hodnôt). Keď je *P*-hodnota známa, potom možno vyvodiť záver pri každej špecifikovanej úrovni významnosti α takto:

- zamietni H_0 na úrovni významnosti α, ak $P \leq \alpha$;
- nezamietni H_0 na úrovni významnosti α, inak.

Treba si všimnúť, že prístup s *P*-hodnotou je viac <u>flexibilný a informatívny</u> ako prístup s hodnotou α.

Vzorce pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\,\%$ interval spoľahlivosti pre μ, keď σ^2 je známy, platí:

$$\overline{X} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{pre dvojstranný IS,}$$

$$\overline{X} - k_{2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \quad \text{pre jednostranný IS s dolnou hranicou,}$$

$$\mu \leq \overline{X} + k_{2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{pre jednostranný IS s hornou hranicou.}$$

Testovanie hypotézy pomocou intervalu spoľahlivosti

Nulovú hypotézu $H_0\colon \mu = \mu_0$ zamietame na úrovni významnosti α, ak platí:

$$\mu_0 \notin \left[\overline{X} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{pre dvojstranný test,}$$

$$\mu_0 > \overline{X} + k_{2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{pre jednostranný test s dolnou hranicou,}$$

$$\mu_0 < \overline{X} - k_{2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{pre jednostranný test s hornou hranicou.}$$

Predpokladajme napríklad, že 95 % IS pre μ je $751 \leq \mu \leq 779$ a testujeme $H_0\colon \mu = 750$ oproti alternatíve $H_1\colon \mu \neq 750$ na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$. Pretože IS pre μ neobsahuje testovanú hodnotu $\mu = 750$, hypotézu H_0 zamietneme na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$.

Vzorce pre rozsah náhodného výberu

Vzorce sa používajú na určenie rozsahu výberu pre príslušný test a danú úroveň β (alebo silu testu $=1-\beta$), α a $\delta\,(=|\mu-\mu_0|)$, čo je rozdiel medzi skutočnou hodnotou a hypotetickou strednou hodnotou.
V prípade *z*-testu pre jeden výber platia vzorce pre rozsah výberu:

$$n = \frac{(k_\alpha + k_{2\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} \quad \text{pre dvojstranný test,}$$

$$n = \frac{(k_{2\alpha} + k_{2\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} \quad \text{pre obidva jednostranné testy.}$$

Treba si všimnúť, že rozsah výberu rastie, keď α, β a δ klesajú a σ rastie.

Krivka operatívnej charakteristiky (OC)

Krivky operatívnej charakteristiky (OC) uvedené v štatistických tabuľkách zobrazujú β ako funkciu *d* (pre *z*-test), rôznych rozsahov výberu *n* a dvoch úrovní významnosti $\alpha = 0{,}01$ a $\alpha = 0{,}05$ t. j.

$$\beta = f(n, d, \alpha)\,.$$

Tab. 7.2. *Operatívne charakteristiky pre z-test* (*jeden náhodný výber*)

Test		α	Krivka OC*	OC parameter
z-test	dvojstraný	0,05	OC–a	$d = \dfrac{\lvert\mu-\mu_0\rvert}{\sigma} = \dfrac{\lvert\delta\rvert}{\sigma}$
		0,01	OC–b	
	jednostranný	0,05	OC–c	
		0,01	OC–d	

*Pozri v prílohe.

Účinok rozsahu výberu

Keď rozsah výberu *n* rastie, štatistická významnosť (opak *P*-hodnoty) a sila testu ($1-\beta$) rastú. Napríklad v Tab. 7.3 sú uvedené *P*-hodnoty a sily testov parametra μ za podmienok:

- $\bar{X} \sim N\left(\mu; \dfrac{2^2}{n}\right)$ a $\bar{x} = 50{,}5$;
- H_0: $\mu = 50$ oproti H_1: $\mu \neq 50$;
- $\alpha = 0{,}05$ a skutočná hodnota $\mu = 50{,}5$.

Pre rovnakú hodnotu výberového priemeru $\bar{x} = 50{,}5$ uvažovanú v Tab. 7.3 v stĺpci s *P*-hodnotami vidieť, že

- pre $n = 100$ sa H_0 <u>zamietne</u> na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, pretože $P \le \alpha$, zatiaľ čo
- pre $n \le 50$ sa H_0 <u>nezamietne</u> na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, pretože $P > \alpha$.

Tab. 7.3. *P-hodnoty a sily testov parametra μ pre vybrané rozsahy výberov*

Rozsah výberu (*n*)		**1 - *P***	***P*-hodnota**	**Sila testu** $(1-\beta)$	
.	10	.	0,43	.	0,124
.	25	.	0,21	.	0,240
.	50	↓	0,08	.	0,424
↓	100	narastajúca	0,01	↓	0,705
narastajúci	400	štatistická	$5{,}73 \times 10^{-7}$	narastajúca	0,998
rozsah výberu	1000	významnosť	$2{,}57 \times 10^{-15}$	sila testu	>0,999

Štatistická významnosť verzus praktický význam

Štatistická významnosť testu <u>nenaznačuje</u> nevyhnutne jeho praktický význam. Keď napríklad rozsah výberu narastá, potom aj sila testu narastá. V prípade veľkého rozsahu výberu sa akýkoľvek malý posun od testovanej hodnoty deteguje (inými slovami $H_0\colon \mu = \mu_0$ sa zamietne), hoci tento posun má malý praktický význam. Analytik by preto mal overiť, či výsledok štatistického testu má tiež praktický význam.

Príklad 7.2

Pre dáta o životnosti úsporných žiaroviek (Tab. 6.1) sa získali tieto výsledky: $n = 30$, $\bar{x} = 780$, $\sigma^2 = 40^2$.

1. *Test hypotézy pre μ, σ^2 je známe; dvojstranný test*

Na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujme, či stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky je 765 hodín.

Postup:

krok 1: stanovíme H_0 a H_1

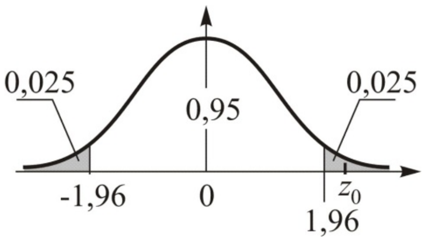
$$H_0\colon \mu = 765 \qquad H_1\colon \mu \ne 765$$

krok 2: určíme hodnotu testovacej štatistiky

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{780 - 765}{40/\sqrt{30}} = 2{,}05396$$

krok 3: určíme kritickú hodnotu pre α

$$k_\alpha = k_{0{,}05} = 1{,}96.$$



Obr. 7.3

krok 4: určíme výsledok testovania hypotézy

Pretože $|z_0| = 2,05396 > k_{0.05} = 1,96$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

2. *Prístup s P-hodnotou*

Nájdime *P*-hodnotu pre dvojstranný *z*-test.

$$P = 2[1-\Phi(|z_0|)] = 2[1-\Phi(|2,05396|)] = 2[1-0,98001] = 0,03998$$

Pretože $P = 0,03998 \le \alpha = 0,05$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

S pravdepodobnosťou 95 % môžeme tvrdiť, že stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky nie je 765 hodín.

3. *Vzťah medzi IS a testom hypotézy*

Testujeme $H_0: \mu = 765$ oproti $H_1: \mu \neq 765$ na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$, na základe 95 % dvojstranného IS pre μ. *Pretože 95 % dvojstranný IS pre* μ, $765,686 \le \mu \le 794,314$, *neobsahuje testovanú hodnotu 765,* H_0 *zamietame na úrovni významnosti* $\alpha = 0,05$.

4. *Určenie rozsahu výberu*

Určíme vhodný rozsah výberu pre dvojstranný *z*-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočnej strednej hodnoty rovnej 785 hodín so silou testu 0,9.

a) Vzorec pre rozsah výberu

$$\text{Sila testu} = P(H_0 \text{ zamietame} | H_0 \text{ nesprávna}) = 1-\beta = 0,9 \Rightarrow \beta = 0,1 \Rightarrow 2\beta = 0,2$$

$$\delta = \mu - \mu_0 = 785 - 765 = 20$$

$$n = \frac{(k_\alpha + k_{2\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} = \frac{(k_{0,05} + k_{0,2})^2 40^2}{20^2} = \frac{(1,96+1,28)^2 40^2}{20^2} = 41,9904 \approx 42$$

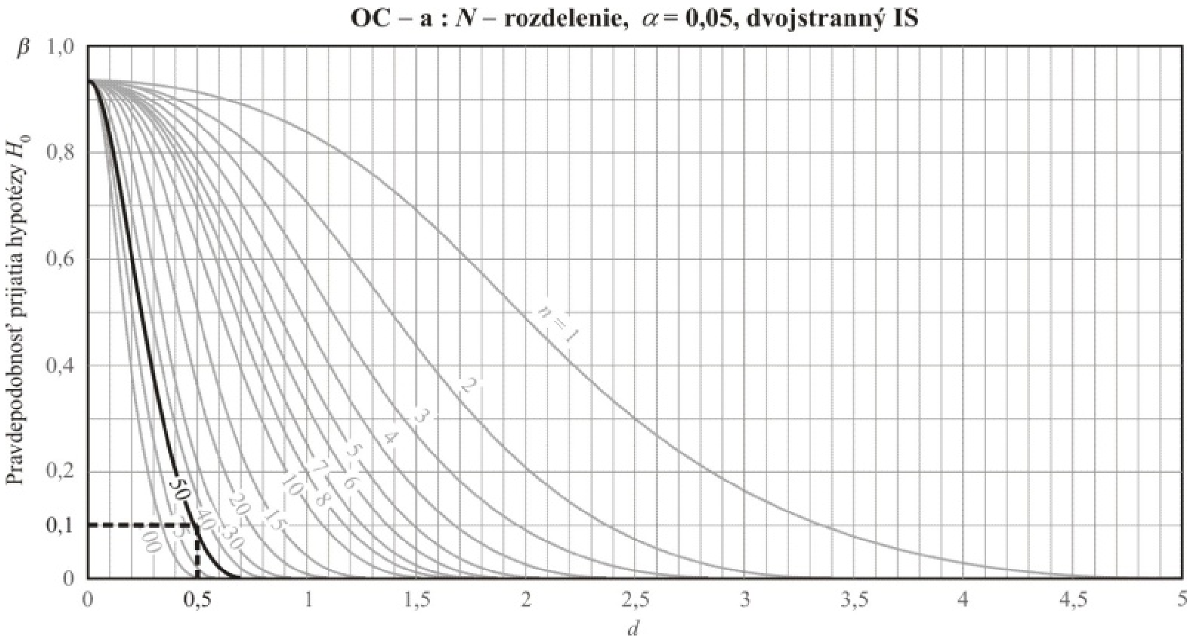
b) Krivka OC

Pre dvojstranný *z*-test na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ a pre jeden výber vypočítame hodnotu parametra d:

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma} = \frac{|20|}{40} = 0,5$$

Pre $d = 0,5$ a $\beta = 0,1$, príslušná krivka OC–a (Obr. 7.4, pozri tiež v prílohe) poskytne rozsah náhodného výberu $n = 44$, čo je blízke hodnote $n = 42$ vypočítanej pomocou vzorca.

Na detegovanie skutočnej strednej hodnoty doby životnosti úspornej žiarovky, ktorej veľkosť je 785 hodín, so silou testu 0,9 je potrebné náhodne vybrať 42 úsporných žiaroviek.



Obr. 7.4. *OC-a pre dvojstranný normálny test s rôznymi n a* $\alpha = 0,05$

7.3 Testy o strednej hodnote normálneho rozdelenia, rozptyl neznámy

Ciele

- Testovať hypotézu o μ, keď σ^2 je neznámy (*t*-test).
- Určiť rozsah náhodného výberu pri *t*-teste o parametri μ pomocou vhodnej krivky operatívnej charakteristiky (OC).

Indukčné súvislosti

Parameter: μ

Bodový odhad parametra μ: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$; σ^2 je neznámy

Testovacia štatistika parametra μ: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Postup testovania (*z*-test):

krok 1: určenie nulovej a alternatívnej hypotézy, t. j. H_0 a H_1.

H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu \neq \mu_0$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$\mu < \mu_0$ pre dolný jednostranný test,

$\mu > \mu_0$ pre horný jednostranný test.

krok 2: stanovenie testovacej štatistiky a jej hodnoty

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}, \qquad t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

krok 3: stanovenie kritickej hodnoty pre α

$t(n-1;\alpha)$ pre obojstranný test,

$t(n-1;2\alpha)$ pre jednostranný test.

krok 4: stanovenie výsledku testovania hypotézy**.** Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$|t_0| > t(n-1;\alpha)$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$t_0 < -t(n-1;2\alpha)$ pre dolný jednostranný test,

$t_0 > t(n-1;2\alpha)$ pre horný jednostranný test.

Vzorce pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre μ, keď σ^2 je neznámy, platí:

$$\overline{X} - t(n-1,\ \alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \ \le\ \mu\ \le\ \overline{X} + t(n-1,\ \alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$$ pre dvojstranný IS,

$$\overline{X} - t(n-1,\ 2\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \ \le\ \mu$$ pre jednostranný IS s dolnou hranicou,

$$\mu \le \overline{X} + t(n-1,\ 2\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$$ pre jednostranný IS s hornou hranicou.

Testovanie hypotézy pomocou intervalu spoľahlivosti

Nulovú hypotézu $H_0\!: \mu = \mu_0$ zamietame na úrovni významnosti α, ak platí:

$$\mu_0 \notin \left[\overline{X} - t(n-1,\ \alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + t(n-1,\ \alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$ pre dvojstranný test,

$$\mu_0 > \overline{X} + t(n-1,\ 2\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$$ pre jednostranný test s dolnou hranicou,

$$\mu_0 < \overline{X} - t(n-1,\ 2\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$$ pre jednostranný test s hornou hranicou.

Krivka operatívnej charakteristiky (OC)

Krivky operatívnej charakteristiky (OC) uvedené v štatistických tabuľkách zobrazujú β ako funkciu d (pre t-test), rôznych rozsahov výberu n a dvoch úrovní významnosti $\alpha = 0,01$ a $\alpha = 0,05$ t. j.

$$\beta = f(n, d, \alpha).$$

Tab. 7.4. *Operatívne charakteristiky pre t-test (jeden náhodný výber)*

Test		α	Krivka OC°	OC parameter
t-test	dvojstraný	0,05	OC–e	$d = \dfrac{\lvert\mu - \mu_0\rvert}{\hat{\sigma}} = \dfrac{\lvert\delta\rvert}{\hat{\sigma}}^{*}$
		0,01	OC–f	
	jednostranný	0,05	OC–g	
		0,01	OC–h	

∗ Ako $\hat{\sigma}$ použite výberovú smerodajnú odchýlku. °Pozri v prílohe.

Príklad 7.3

Pre dáta o životnosti úsporných žiaroviek (Tab. 6.1) sme získali tieto výsledky: $n = 30$, $\bar{x} = 780$, $s^2 = 40,0164^2$.

1. *Test hypotézy pre* μ, σ^2 *je neznáme; dvojstranný test*

Na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ testujme, či sa stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky je 765 hodín.

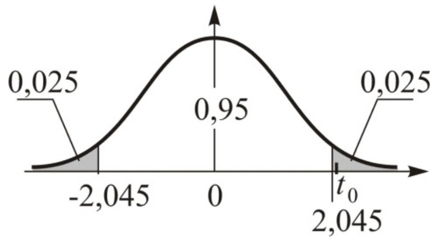
Postup:

krok 1: stanovíme H_0 a H_1

$$H_0: \mu = 765 \qquad H_1: \mu \neq 765$$

krok 2: určíme hodnotu testovacej štatistiky

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{780 - 765}{40,0164/\sqrt{30}} = 2,05312$$



Obr. 7.5

krok 3: určíme kritickú hodnotu pre α

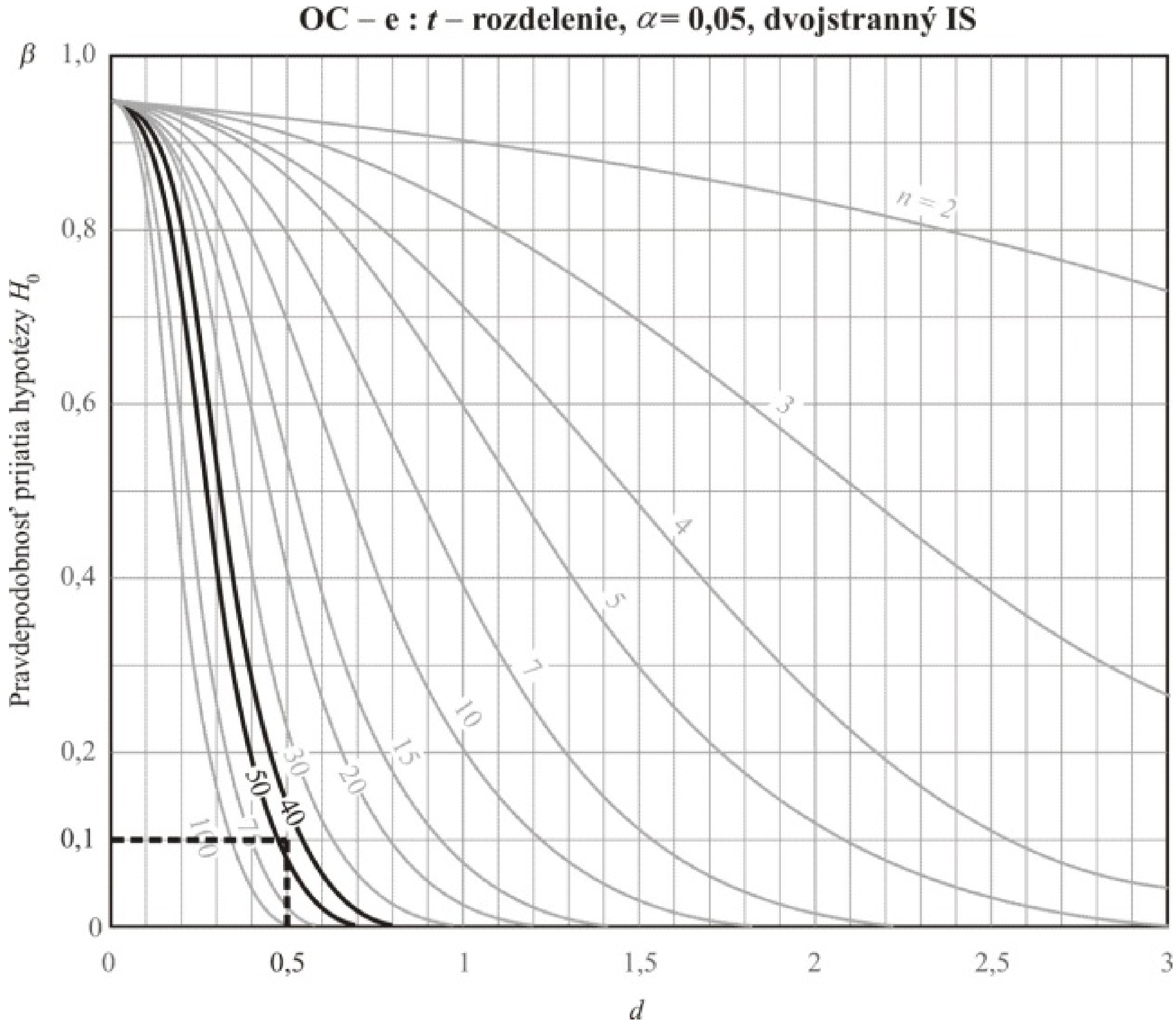
$$t(n-1;\alpha) = t(30-1;0,05) = t(29;0,05) = 2,045$$

krok 4: určíme výsledok testovania hypotézy

Pretože $|t_0| = 2,05312 > t(29;0,05) = 2,045$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. *S pravdepodobnosťou 95 % môžeme tvrdiť, že stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky nie je 765 hodín.*

2. *Určenie rozsahu náhodného výberu*

Určíme rozsah náhodného výberu pre dvojstranný t-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočnej strednej hodnoty doby životnosti úspornej žiarovky rovnej 785 hodín so silou testu 0,9. Použijeme vhodnú krivku OC.



Obr. 7.6. *OC−e pre dvojstranný t-test s rôznymi n a* $\alpha = 0,05$

Sila testu $= P(H_0 \text{ zamietame} | H_0 \text{ nesprávna}) = 1 - \beta = 0,9 \Rightarrow \beta = 0,1$

$\delta = \mu - \mu_0 = 785 - 765 = 20$

Pre dvojstranný t-test na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ a pre jeden výber sa vypočíta hodnota parametra d :

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\hat{\sigma}} = \frac{|\delta|}{s} = \frac{|20|}{40,0164} = 0,499795$$

Pre $d = 0,5$ a $\beta = 0,1$ príslušná krivka OC–e poskytne rozsah výberu $n = 45$.

Na detegovanie skutočnej strednej hodnoty doby životnosti úspornej žiarovky, ktorej veľkosť je 785 hodín, so silou testu 0,9 je potrebné náhodne vybrať 45 úsporných žiaroviek.

7.4 Testy hypotéz o rozptyle normálne rozdeleného základného súboru

Ciele

- Testovať hypotézu o σ^2 (χ^2-test).
- Určiť rozsah náhodného výberu pri χ^2-teste o parametri σ^2 pomocou vhodnej krivky operatívnej charakteristiky (OC).

Indukčné súvislosti

- **Parameter**: σ^2
- **Bodový odhad** parametra σ^2: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$
- **Testovacia štatistika** parametra σ^2: $X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

Postup testovania (χ^2-test):

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad$ H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$\sigma^2 < \sigma_0^2$ pre dolný jednostranná test,

$\sigma^2 > \sigma_0^2$ pre horný jednostranný test.

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky** a jej hodnoty

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \qquad \chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

$\chi^2(n-1; 1-\alpha/2)$ a $\chi^2(n-1; \alpha/2)$ pre dvojstranný test,

$\chi^2(n-1; 1-\alpha)$ pre dolný jednostranný test,

$\chi^2(n-1; \alpha)$ pre horný jednostranný test.

krok 4: určenie **výsledku testovania hypotézy.** Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$\chi_0^2 < \chi^2(n-1; 1-\alpha/2)$ alebo $\chi_0^2 > \chi^2(n-1; \alpha/2)$ pre dvojstranný test,

$\chi_0^2 < \chi^2(n-1; 1-\alpha)$ pre dolný jednostranný test,

$\chi_0^2 > \chi^2(n-1; \alpha)$ pre horný jednostranný test.

Vzorce pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre σ^2 platí:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha/2)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha/2)} \quad \text{pre dvojstranný IS,}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha)} \le \sigma^2 \quad \text{pre jednostranný IS s dolnou hranicou,}$$

$$\sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha)} \quad \text{pre jednostranný IS s hornou hranicou.}$$

Testovanie hypotézy pomocou intervalu spoľahlivosti

Nulovú hypotézu H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ zamietame na úrovni významnosti α, ak platí:

$$\sigma_0^2 \notin \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha/2)}\right] \quad \text{pre obojstranný test,}$$

$$\sigma_0^2 > \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha)} \quad \text{pre dolný jednostranný test,}$$

$$\sigma_0^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha)} \quad \text{pre horný jednostranný test.}$$

Krivka operatívnej charakteristiky (OC)

Krivky operatívnej charakteristiky (OC) uvedené v štatistických tabuľkách zobrazujú parameter λ pre χ^2-test o parametri σ^2.

Tab. 7.5. *Operatívne charakteristiky pre χ^2-test (jeden náhodný výber)*

Test		**α**	**Krivka OC***	**OC parameter**
χ^2-test	dvojstraný	0,05 0,01	OC–i OC–j	$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0}$
	horný jednostranný	0,05 0,01	OC–k OC–l	
	dolný jednostranný	0,05 0,01	OC–m OC–n	

*Pozri v prílohe.

Príklad 7.4

Pre dáta o životnosti úsporných žiaroviek (Tab. 6.1 a Príklad 6.3) sme získali tieto výsledky: $n = 30$, $s^2 = 40{,}0164^2$; 95 % dvojstranný IS pre σ^2 : $31{,}88^2 \le \sigma^2 \le 53{,}87^2$.

1. *Test hypotézy pre* σ^2 *; dvojstranný test*

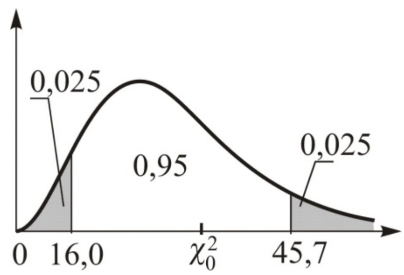
Na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujme hypotézu, či rozptyl doby životnosti úspornej žiarovky je 40^2 hodín.

krok 1: stanovíme H_0 a H_1

$$H_0: \sigma^2 = 40^2 \qquad H_1: \sigma^2 \neq 40^2$$

krok 2: určíme hodnotu testovacej štatistiky

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(30-1)\cdot 40{,}0164^2}{40^2} = 29{,}0238$$



Obr. 7.7

krok 3: určíme kritickú hodnotu pre α

$$\chi^2(n-1; \alpha/2) = \chi^2(29; 0{,}025) = 45{,}7$$

$$\chi^2(n-1; 1/\alpha/2) = \chi^2(29; 0{,}975) = 16{,}0$$

krok 4: určíme výsledok testovania hypotézy

Pretože $\chi_0^2 = 29{,}0238 \in (16{,}0; 45{,}7)$, H_0 nezamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, t.j. *na úrovni významnosti* $\alpha = 0{,}05$ *môžeme tvrdiť, že rozptyl dĺžky životnosti úspornej žiarovky je* 40^2 *hodín.*

2. *Vzťah medzi IS a testom hypotézy*

Testujeme $H_0: \sigma^2 = 40^2$ oproti $H_1: \sigma^2 \neq 40^2$ na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, na základe 95 % dvojstranného IS pre σ^2 . *Pretože 95 % dvojstranný IS pre* σ^2 *,* $31{,}88^2 \le \sigma^2 \le 53{,}87^2$ *, obsahuje testovanú hodnotu* 40^2 *,* H_0 *nezamietame na úrovni významnosti* $\alpha = 0{,}05$.

3. *Určenie rozsahu náhodného výberu*

Určíme rozsah výberu *n* pre dvojstranný χ^2-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočnej hodnoty smerodajnej odchýlky rovnej 50 hodín so silou testu 0,8. Použijeme vhodnú krivku OC.

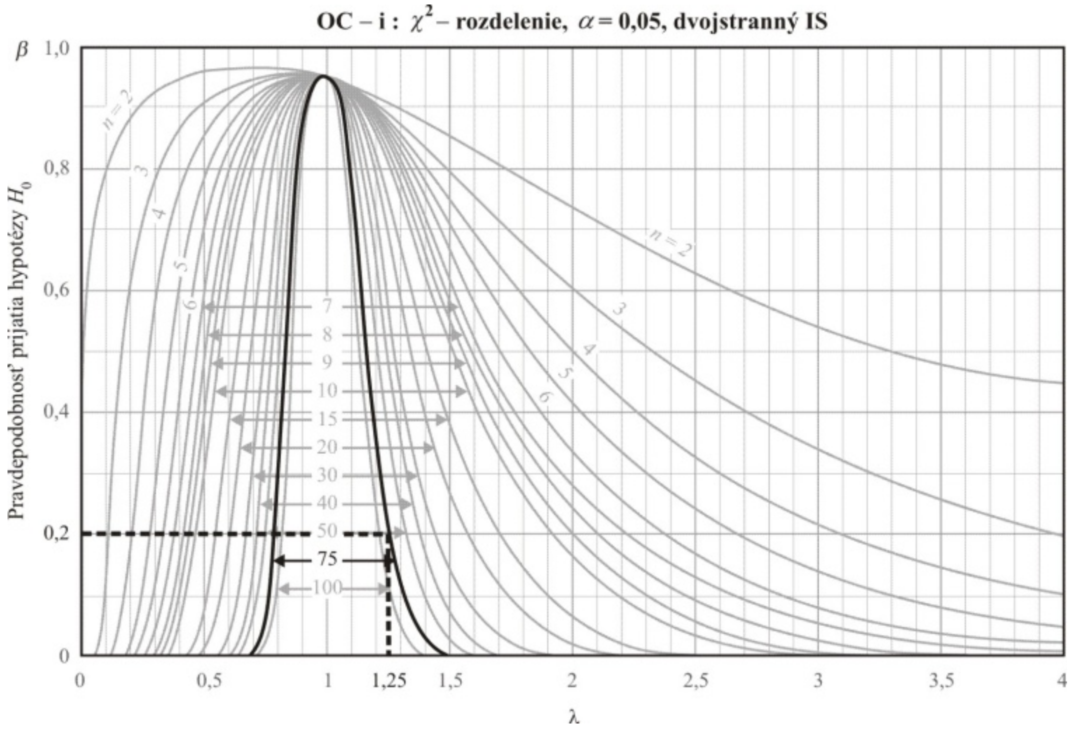
$$\text{Sila testu} = P(H_0 \text{ zamietame} | H_0 \text{ nesprávna}) = 1 - \beta = 0{,}8 \Rightarrow \beta = 0{,}2$$

Pre dvojstranný χ^2-test na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pre jeden výber vypočítame hodnota parametra λ :

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{50}{40} = 1{,}25$$

Pre $\lambda = 1{,}25$ a $\beta = 0{,}2$, príslušná krivka OC-i poskytne rozsah výberu $n = 75$.

Na detegovanie skutočnej hodnoty smerodajnej odchýlky doby životnosti úspornej žiarovky, ktorej veľkosť je 50 hodín, so silou testu 0,8 je potrebné náhodne vybrať 75 úsporných žiaroviek.



Obr. 7.8. *OC−i pre dvojstranný chi-kvadrát test s rôznymi n a* $\alpha = 0{,}05$

7.5 Testy hypotéz o podieli jednotiek v základnom súbore s danou vlastnosťou

Ciele

- Testovať hypotézu o parametri p (z-test) v prípade veľkého výberu.
- Určiť rozsah náhodného výberu pre štatistickú indukciu o parametri p pomocou vhodného vzorca pre rozsah náhodného výberu.

Indukčné súvislosti

- **Parameter**: p
- **Bodový odhad** parametra: $\hat{P} = \dfrac{X}{n}$, kde $X \sim B(n, p)$
- **Testovacia štatistika** parametra: $Z = \dfrac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$, $np(1-p) > 9$

Postup testovania (z-test):

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1

H_0: $p = p_0$ H_1: $p \neq p_0$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$p < p_0$ pre dolný jednostranný test,

$p > p_0$ pre horný jednostranný test.

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky** a jej hodnoty

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \qquad z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

k_α pre obojstranný test,

$k_{2\alpha}$ pre jednostranný test.

krok 4: určenie **výsledku testovania hypotézy.** Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$|z_0| > k_\alpha$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$z_0 < -k_{2\alpha}$ pre dolný jednostranný test,

$z_0 > k_{2\alpha}$ pre horný jednostranný test.

Vzorce pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ IS pre parameter p, platí:

$$\hat{P} - k_\alpha\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq p \leq \hat{P} + k_\alpha\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$ pre dvojstranný IS,

$$\hat{P} - k_{2\alpha}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq p$$ pre jednostranný IS s dolnou hranicou,

$$p \leq \hat{P} + k_{2\alpha}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$ pre jednostranný IS s hornou hranicou.

Testovanie hypotézy pomocou intervalu spoľahlivosti

Nulovú hypotézu H_0: $p = p_0$ zamietame na úrovni významnosti α, ak platí:

$$p_0 \notin \left[\hat{P} - k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \; ; \; \hat{P} + k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \right] \text{pre dvojstranný test,}$$

$$p_0 > \hat{P} + k_{2\alpha} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \qquad \text{pre jednostranný test s dolnou hranicou,}$$

$$p_0 < \hat{P} - k_{2\alpha} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \qquad \text{pre jednostranný test s hornou hranicou.}$$

Vzorce pre rozsah náhodného výberu

Pri testovaní hypotézy o parametri p sa používajú nasledovné vzorce na určenie rozsahu výberu:

$$n = \left(\frac{k_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} + k_{2\beta} \sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right)^2 \quad \text{pre \underline{dvojstranný test}}$$

$$n = \left(\frac{k_{2\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)} + k_{2\beta} \sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right)^2 \quad \text{pre \underline{jednostranný test}}$$

Príklad 7.5

Pre dáta skorodovaných mostov (Príklad 6.4) sme získali výsledky: $n = 40$ a $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{28}{40} = 0,7$.

1. *Testovanie hypotézy o parametri p; dvojstranný test*

Testujme na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$, či podiel skorodovaných mostov v istom kraji je 0,5.

krok 1: stanovíme H_0 a H_1

$$H_0 \!: p = 0,5 \qquad H_1 \!: p \neq 0,5$$

krok 2: určíme hodnotu testovacej štatistiky

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,7 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \times (1-0,5)}{40}}} = 2,5316$$

krok 3: určíme kritickú hodnotu pre α

$$k_\alpha = k_{0,05} = 1,96$$

krok 4: určíme výsledok testovania hypotézy:

Pretože $|z_0| = 2,5316 > k_{0,05} = 1,96$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

S pravdepodobnosťou 95 % môžeme tvrdiť, že podiel skorodovaných mostov istom kraji je väčší alebo menší ako 50 %.

Určenie rozsahu náhodného výberu

Určíme rozsah výberu *n* pre dvojstranný *z*-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočnej hodnoty podielu *p*, ktorá sa rovná 70 % so silou testu 0,9. Použijeme vhodný vzorec pre rozsah výberu.

$p = 70\ \% = 0,7$

Sila testu $= P(H_0 \text{ zamietame} | H_0 \text{ nesprávna}) = 1 - \beta = 0,9 \Rightarrow \beta = 0,1$

$$n = \left(\frac{k_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} + k_{2\beta}\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right)^2 = \left(\frac{k_{0,05}\sqrt{0,5 \times (1-0,5)} + k_{0,2}\sqrt{0,7 \times (1-0,7)}}{0,7 - 0,5} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1,96 \times 0,25 + 1,28 \times 0,45826}{0,2} \right)^2 = 61,3535 \approx 62$$

Na detegovanie skutočnej hodnoty podielu skorodovaných mostov, ktorého veľkosť je 70 %, so silou testu 0,9 je potrebné náhodne testovať 62 mostov.

7.6 Testy dobrej zhody

Štatistické testy, ktoré umožňujú testovať hypotézu o type rozdelenia, sa nazývajú *testy zhody*. V tejto časti uvedieme tri rôzne testy zhody.

7.6.1 Pearsonov chí-kvadrát test

Ciele

- Vysvetliť termín *kategorizované premenné*.
- Rozlišovať nominálnu premennú od ordinálnej premennej.
- Vysvetliť, prečo pri teste dobrej zhody musí byť očakávaná početnosť každého triedneho intervalu aspoň tri.
- Vykonať test dobrej zhody na hypotetickom rozdelení.

Kategorizovaná premenná

Kategorizovaná premenná tvorí súbor kategórií. Definujeme dva typy kategorizovaných premenných.

1. **Nominálna premenná:** Poradie zoznamu kategórií nemá zmysel. Napríklad pohlavie (muž, žena) alebo dominancia ruky (ľavák, pravák, obojručný).
2. **Ordinálna premenná:** Poradie zoznamu kategórií má zmysel. Napríklad vzdelanie (menej ako 9 rokov, 9 až 12 rokov, viac ako 12 rokov), symptóm náročnosti (žiadny, mierny, stredný, vážny).

Indukčné súvislosti

Rozdelenie pravdepodobnosti základného súboru je neznáme. Preto chceme otestovať, aké rozdelenie má základný súbor.

Napríklad $H_0 : X \sim P_0(\lambda)$ (Poissonovo diskrétne rozdelenie)

$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (spojité rozdelenie)

Testovacia štatistika

Pri týchto testoch sa vychádza z triedneho delenia náhodného výberu rozsahu n . Ako miera nesúladu medzi pozorovanými triednymi početnosťami a očakávanými (t. j. teoretickými) triednymi početnosťami sa berie testovacia štatistika

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(r - s - 1), \text{ kde}$$

r je počet triednych intervalov,

n_i – absolútna triedna početnosť i-tého intervalu,

$n_i p_i$ – očakávaná triedna početnosť, pričom $p_i = P(t_{i-1} < X \le t_i | H_0 \text{ je správna})$,

s – počet parametrov hypotetického rozdelenia v nulovej hypotéze.

Tab. 7.6. *Tabuľka testu dobrej zhody*

Triedne intervaly i	Pozorovaná početnosť n_i	Pravdepodobnosť p_i	Očakávaná početnosť np_i	$p_i - np_i$	$\frac{n_i - np_i}{np_i}$
1					
2					
$\vdots$					
r					

Poznámka. *Minimálna očakávaná početnosť*

Keď očakávaná početnosť je veľmi malá, hodnota X^2 môže byť neoprávnene veľká v dôsledku veľkého rozdielu medzi pozorovanou početnosťou a očakávanou početnosťou

$(n_i - np_i)$. Hoci neexistuje dohoda o hodnote minimálnej očakávanej početnosti, hodnoty 3, 4 alebo 5 sú vo veľkej miere používané ako *minimálne očakávané početnosti.*
Keď očakávaná početnosť je menšia ako 3, aby sa vyhlo tomuto nežiaducemu prípadu, zodpovedajúci triedny interval sa kombinuje so susediacim triednym intervalom a počet triednych intervalov r sa zmenší o jeden.

Jedným z najpoužívanejších testov, ktorý umožňuje testovať typ spojitého aj diskrétneho rozdelenia, je Pearsonov chí-kvadrát test **(χ^2-test)** dobrej zhody.

Postup testovania (χ^2-test)

krok 1: určenie nulovej a alternatívnej hypotézy, t. j. H_0 a H_1

$$H_0 : X \sim \text{príslušné rozdelenie} \quad \text{oproti} \quad H_1 : X \text{ nemá príslušné rozdelenie}$$

krok 2: stanovenie testovacej štatistiky a jej hodnoty

a) Odhadneme parametre hypotetického rozdelenia, ak ich hodnoty nie sú k dispozícii.
b) Definujeme triedne intervaly a priradíme k ním príslušné pozorované početnosti.
c) Odhadneme pravdepodobnosti (p_i) v triednych intervaloch.
d) Vypočítame očakávané početnosti (np_i) v triednych intervaloch. Ak očakávaná početnosť nejakej triedy je menšia ako 3, kombinujeme ju zo susedným triednym intervalom. Potom opakujeme kroky 2a) až 2b)
e) Vypočítame hodnotu testovacej štatistiky $X_0^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$

krok 3: stanovenie kritickej hodnoty pre α

$$\chi^2(r-s-1,\alpha)$$

krok 4: určenie výsledku testovania hypotézy**.** Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$\chi_0^2 > \chi^2(r-s-1,\alpha).$$

Poznámka. Vzhľadom na to, že hodnota testovacej štatistiky X_0^2 je menšia v prípade, že hypotetické rozdelenie je „dobré“, dolná hranica testu dobrej zhody neexistuje.

Príklad 7.6

O počte e-mailov za hodinu (X), ktoré prišli istej firme na e-mailový účet, sa predpokladá, že má Poissonovo rozdelenie. Početnosti e-mailov za hodinu získané počas 100 hodín sú v nasledujúcej tabuľke (Tab. 7.7).

Tab. 7.7

Počet mailov za hodinu (X)	0	1	2	3
Početnosť	60	28	7	5

Testujme na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$, že počet e-mailov prichádzajúcich za hodinu sa riadi Poissonovým rozdelením. Použijeme test dobrej zhody.

Riešenie

Krok 1: *určíme* H_0 *a* H_1

$$H_0: X \sim Po(\lambda) \qquad H_1: X \not\sim Po(\lambda)$$

Krok 2: *stanovíme hodnotu testovacej štatistiky*

a) Odhadneme parametre hypotetického rozdelenia.

$$\hat{\lambda} = \widehat{E(X)} = \frac{0 \times 60 + 1 \times 28 + 2 \times 7 + 3 \times 5}{100} = 0,57$$

Počet odhadovaných parametrov $s = 1$.

b) Definujeme triedne intervaly a priradíme k nim príslušné pozorované početnosti (Tab. 7.8)

c) Odhadneme pravdepodobnosti (p_i) v triednych intervaloch.

$$\hat{p}_1 = P(X=0) = \frac{e^{-0,57}(0,57)^0}{0!} = 0,57 \qquad \hat{p}_2 = P(X=1) = \frac{e^{-0,57}(0,57)^1}{1!} = 0,32$$

$$\hat{p}_3 = P(X=2) = \frac{e^{-0,57}(0,57)^2}{2!} = 0,09 \qquad \hat{p}_4 = P(X=3) = \frac{e^{-0,57}(0,57)^3}{3!} = 0,02$$

d) Vypočítame očakávané početnosti ($n_i p_i$)v triednych intervaloch (Tab. 7.8).

Tab. 7.8

X	Pozorovaná početnosť n_i	Pravdepodobnosť $\hat{p}_i$	Očakávaná početnosť $n\hat{p}_i$	$n_i - n\hat{p}_i$	$\frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
0	60	0,57	57		
1	28	0,32	32		
2	7	0,09	9		
3 a viac	5	0,02	2		

Ak očakávaná početnosť nejakej triedy je menšia ako 3, kombinujeme ju zo susedným triednym intervalom.

Pretože očakávaná početnosť v poslednom triednom intervale v uvedenej tabuľke je menšia ako 3, zlúčime posledné dva riadky (Tab. 7.9).

Tab. 7.9

e-maily za hodinu X	Pozorovaná početnosť n_i	Pravdepodobnosť $\hat{p}_i$	Očakávaná početnosť $n\hat{p}_i$	$n_i - n\hat{p}_i$	$\frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
0	60	0,57	57	3	0,15789
1	28	0,32	32	−4	0,50000
2 a viac	12	0,11	11	1	0,09000

e) Vypočítame hodnotu testovacej štatistiky: $X_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(n_i - n\hat{p}_i\right)^2}{n\hat{p}_i} = 0,7488$.

Krok 3: stanovíme kritickú hodnotu pre α

$$\chi^2(r-s-1,\alpha) = \chi^2(3-1-1;0,05) = \chi^2(1;0,05) = 3,84$$

Krok 4: Výsledok testovania hypotézy

Pretože $\chi_0^2 = 0,7488 < \chi^2(1,0,05) = 3,84$, nulová hypotéza H_0 na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ sa nezamieta, t. j. *počet e-mailov prichádzajúcich za hodinu sa riadi Poissonovým rozdelením na úrovni významnosti* $\alpha = 0,05$.

Príklad 7.7 (Test dobrej zhody; spojité rozdelenie)

Konečné výsledky študentov ($n = 40$) zo štatistiky sú v tabuľke Tab. 7.10. Náhodná premenná X má strednú hodnotu 83 a rozptyl $11,874^2$. Testujeme na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$, či normálne rozdelenie je vhodné pre konečné výsledky.

Tab. 7.10

Konečné výsledky (X)	$x < 60$	$60 \le x < 70$	$70 \le x < 80$	$80 \le x < 90$	$90 \le x$
Početnosť	3	2	9	12	14

Riešenie

Krok 1: určíme H_0 a H_1

$$H_0: X \sim N(83;11,874^2) \qquad H_1: X \not\sim N(83;11,874^2)$$

Krok 2: stanovíme testovaciu štatistiku a jej hodnotu

a) Odhadneme parametre hypotetického rozdelenia.

Pretože μ a σ^2 sú známe, preskočíme tento krok a počet odhadovaných parametrov je $s = 0$.

b) Definujeme triedne intervaly a priradíme k ním príslušné pozorované početnosti (Tab. 7.11).

Tab. 7.11

X	Pozorovaná početnosť n_i	Pravdepodobnosť $\hat{p}_i$	Očakávaná početnosť $n\hat{p}_i$
$x < 60$	3	0,0263725	1
$60 \leq x < 70$	2	0,1104295	4
$70 \leq x < 80$	9	0,2634650	11
$80 \leq x < 90$	12	0,321979	13
$90 \leq x$	14	0,277754	11

c) V triednych intervaloch odhadneme pravdepodobnosti. $\hat{p}_i$:

$$\hat{p}_1 = P(X < 60) = P\left(Z \leq \frac{60_i - 83}{11,874}\right) = P(Z < -1,937) = 1 - \Phi(1,937) = 0,0263725$$

$$\hat{p}_2 = P(60 \leq X < 70) = P\left(\frac{60-83}{11,874} \leq Z \leq \frac{70-83}{11,874}\right) =$$
$$= P(-1,937 \leq Z < -1,0948) = \Phi(-1,0948) - \Phi(-1,937) = 0,1104295$$

$$\hat{p}_3 = P(70 \leq X < 80) = P(-1,0948 \leq Z < -0,25265) = 0,263465$$

$$\hat{p}_4 = P(80 \leq X < 90) = P(-0,25265 \leq Z < 0,589523) = 0,321979$$

$$\hat{p}_5 = P(90 \leq X) = P(0,589523 \leq Z) = 0,277754$$

d) Vypočítame očakávané početnosti (np_i) v triednych intervaloch (Tab. 7.11). Ak očakávaná početnosť nejakej triedy je menšia ako 3, kombinujeme ju zo susedným triednym intervalom.
Pretože očakávaná početnosť v prvom triednom intervale v uvedenej tabuľke je menšia ako 3, zlúčime prvé dva riadky (Tab. 7.12)

Tab. 7.12

X	Pozorovaná početnosť n_i	Pravdepodobnosť $\hat{p}_i$	Očakávaná početnosť $n\hat{p}_i$
$x < 70$	5	0,136802	5
$70 \leq x < 80$	9	0,2634650	11
$80 \leq x < 90$	12	0,321979	13
$90 \leq x$	14	0,277754	11

e) Vypočítame hodnotu <u>testovacej štatistiky</u> $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 1,2586$

Tab. 7.13

X	Pozorovaná početnosť n_i	Očakávaná po-četnosť $n\hat{p}_i$	$n_i - n\hat{p}_i$	$\frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
$x < 70$	5	5	0	0
$70 \leq x < 80$	9	11	–2	0,3636
$80 \leq x < 90$	12	13	–1	0,0769
$90 \leq x$	14	11	3	0,8181

Krok 3: stanovíme kritickú hodnotu pre α

$$\chi^2(r - s - 1, \alpha) = \chi^2(4 - 0 - 1; 0,05) = \chi^2(3; 0,05) = 7,81$$

Krok 4: určíme výsledok testovania hypotézy

Pretože $\chi_0^2 = 1,2586 < \chi^2(3; 0,05) = 7,81$, H_0 na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ sa nezamieta, t.j. *na úrovni významnosti* $\alpha = 0,05$ *prijímame hypotézu, že sa konečné výsledky študentov zo štatistiky riadia normálnym rozdelením.*

7.6.2 Shapirov-Wilkov test normality

Pri rozsahu náhodného výberu $2 \leq n \leq 2000$ použijeme test podľa Shapira-Wilka. Tento test je vhodný iba pre jednotlivé namerané hodnoty (nie pre triedené údaje ako v Pearsonovom teste).

Majme namerané údaje $x_1, x_2, ..., x_n$, ktoré sú realizáciami náhodného výberu $X_1, X_2, ..., X_n$. Usporiadajme merania podľa veľkosti vzostupne a dostaneme $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$, čo sú realizácie usporiadaného náhodného výberu $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$.

Postup testovania hypotézy

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy,** t. j. H_0 a H_1

$$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ oproti } H_1 : X \not\sim N(\mu, \sigma^2), \text{ kde } \mu, \sigma^2 \text{ sú neznáme.}$$

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky**

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i(n)(X_{(n-i+1)} - X_{(i)})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2},$$

kde

- $a_i(n)$ sú príslušné koeficienty dané tabuľkou (pozri v prílohe);
- $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;
- $m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pre } n \text{ párne,} \\ \frac{n\text{-}1}{2} & \text{pre } n \text{ nepárne.} \end{cases}$

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

$W_\alpha(n)$ je tabuľková hodnota pre dané n a $\alpha = 0{,}01$ alebo $\alpha = 0{,}05$ (pozri v prílohe).

krok 4: určenie **výsledku testovania hypotézy**

Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$W \le W_\alpha(n)$$

Poznámka. V štatistických tabuľkách pre Shapirov-Wilkov test sú kritické hodnoty $W_\alpha(n)$ uvedené len pre rozsah súboru $n \in \{1, 2, ..., 30\}$. V prípade väčšieho rozsahu súboru je potrebné kritické hodnoty $W_\alpha(n)$ určiť pomocou Statgraphics Centurion XV.

Statgraphics Centurion XV poskytuje viacero testov normality dát, pričom výsledok testu hypotézy vyhodnocuje pomocou *P*–hodnoty.

7.7 Testy nezávislosti a homogenity v kontingenčných tabuľkách

Ciele

- Opísať kontingenčnú tabuľku.
- Vykonať test nezávislosti/homogenity s kontingenčnou tabuľkou pre kategorizované premenné.

Kontingenčná tabuľka $r \times c$

Majme dvojrozmerný náhodný vektor $\boldsymbol{Z} = (X, Y)^{\mathrm{T}}$ kategizovaných premenných takých, že X môže nadobúdať hodnoty $1, 2, \ldots, r$ a Y hodnoty $1, 2, \ldots, c$ ($r > 1$, $c > 1$). Označme

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j), \quad p_{i.} = P(X = i) = \sum_{j=1}^{c} p_{ij}, \quad p_{.j} = P(Y = j) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij} .$$

Budeme predpokladať, že platí $p_{ij} > 0$ pre všetky dvojice (i, j).

Uvažujme vyber o rozsahu n z rozdelení s pravdepodobnosťami p_{ij}. Tento výber možno opísať *multinomickým* rozdelením o rc triedach tvorených dvojicami (i, j). Keď označíme n_{ij} počet tých prípadov, pri ktorých súčasne nastalo $X = i$ a $Y = j$, môžeme výsledky zapísať v tvare tzv. *kontingenčnej tabuľky*:

Tab. 7.14. *Kontingenčná tabuľka* $r \times c$

X	Y			
	1	2	$\cdots$	c
1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1c}
2	n_{21}	n_{21}	$\cdots$	n_{11}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rc}

Indukčné súvislosti

Chceme testovať asociáciu medzi dvomi kategorizovanými premennými X a Y pomocou kontingečnej tabuľky $r \times c$ na nezávislosť alebo homogénnosť.

– **Nezávislosť:** Pri skúmaní nezávislosti X a Y sa urobí reprezentatívny výber z jedného základného súboru a každá jednotka vo výbere sa klasifikuje do jednej z r kategórií X a jednej z c kategórií Y.
  Napríklad klasifikujeme výber obyvateľov Rohožníka podľa pohlavia X a zamestnania Y.
– **Homogénnosť:** Pri skúmaní homogénnosti základných súborov X_i, $1, 2, \ldots, r$ vzhľadom k Y, reprezentatívne výbery sa realizujú z r základných súborov a potom prvky každého výberu sa klasifikujú do c kategórií Y.
  Napríklad klasifikujeme päť výberov obyvateľov z rôznych krajov X vzhľadom k zamestnaniu Y.

Pripomeňme si, že pre dve nezávislé udalosti A a B platí:

$$P(A|B) = P(A),\ P(B|A) = P(B) \text{ a } P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Podobne dve kategorizované premenné sa považujú za nezávislé/homogénne, keď platí:

1. $P(X = x_i|Y) = P(X = x_i) = p_{i.}$,
2. $P(Y = y_j|X) = P(Y = y_j) = p_{.j}$,
3. $P(X = x_i,\ Y = y_j) = p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_{i.}p_{.j}$,

   kde $P(X = x_i|Y)$ a $P(Y = y_j|X)$ sú podmienené pravdepodobnosti,

$P(X = x_i)$ a $P(Y = y_j)$ sú marginálne pravdepodobnosti,

$P(X = x_i,\ Y = y_j)$ je združená pravdepodobnosť X a Y.

Testovacia štatistika

$$X^2 = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_{ij} - np_{ij}\right)^2}{np_{ij}} \sim \chi^2(\nu),\ \nu = (r-1)(c-1)$$

kde

n_{ij} je pozorovaná početnosť v bunke ij,

$np_{ij} = n(p_{i.} \times p_{.j}) = n\dfrac{n_{i.} \times n_{.j}}{n \times n} = \dfrac{n_{i.} \times n_{.j}}{n}$ je očakávaná početnosť v bunke ij.

Tab. 7.15. *Testovacia tabuľka pre nezávislosť/homogénnosť*

X	Y				Súčty
	1	2	…	c	
1	n_{11} np_{11}	n_{12} np_{12}	…	n_{1c} np_{1c}	$n_{1.}$
2	n_{21} np_{21}	n_{21} np_{21}	…	n_{2c} np_{2c}	$n_{2.}$
…	…	…	…	…	…
r	n_{r1} np_{r1}	n_{r2} np_{r2}	…	n_{rc} np_{rc}	$n_{r.}$
Súčty	$n_{.1}$	$n_{.2}$	…	$n_{.c}$	n

Poznámka. Minimálna očakávaná početnosť

Podobne ako pri teste dobrej zhody, keď očakávaná početnosť je veľmi malá, hodnota X^2 môže byť neoprávnene veľká v dôsledku veľkého rozdielu medzi pozorovanou početnosťou a očakávanou početnosťou $\left(n_{ij} - np_{ij}\right)$. Preto každá kategória, ktorej očakávaná početnosť je menšia ako 3 sa kombinuje so susediacou kategóriou.

Postup testovania (χ^2-test)

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1

1. Testovanie **nezávislosti**

   $H_0: X$ a Y sú nezávislé

   $H_1: X$ a Y nie sú nezávislé

2. Testovanie **homogénnosti**

H_0: X_i $(1,2,\ldots,r)$ sú homogénne vzhľadom k Y

H_1: X_i $(1,2,\ldots,r)$ nie sú homogénne vzhľadom k Y

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky** a jej hodnoty

$$X_0^2 = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_{ij} - np_{ij}\right)^2}{np_{ij}} \sim \chi^2((r-1)(c-1)), \text{ kde } np_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$$

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

$$\chi^2((r-1)(c-1),\alpha)$$

krok 4: určenie **výsledku testovania hypotézy**. Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$\chi_0^2 > \chi^2((r-1)(c-1),\alpha).$$

Poznámka. Keď nulová hypotéza nezávislosti/homogénnosti je správna, testovacia štatistika X_0^2 nadobúda malú hodnotu, preto žiadna dolná kritická hodnota pri tomto teste neexistuje, existuje len **horná kritická oblasť**.

Príklad 7.8

Hodnotenia ergonómie X a hodnotenia štatistiky Y sto študentov sú zhrnuté v tabuľke (Tab. 7.16). Pomocou kontingenčnej tabuľky testujeme nezávislosť hodnotenia ergonómie X a hodnotenia štatistiky Y na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

Tab. 7.16

Hodnotenie ergonómie	Hodnotenie štatistiky Y		
X	A	B	Iné
A	12	5	4
B	10	19	17
Iné	4	8	21

Riešenie

Krok 1: určíme nulovú a alternatívnu hypotézu, H_0 *a* H_1.

H_0: Hodnotenia ergonómie X a hodnotenia štatistiky Y sú nezávislé

H_1: Hodnotenia ergonómie X a hodnotenia štatistiky Y nie sú nezávislé

Krok 2: stanovíme testovaciu štatistiku a jej hodnotu

Tab. 7.17

Hodnotenie ergonómie X	Hodnotenie štatistiky Y			Súčty
	A	B	Iné	
A	12 5,46	5 6,72	4 8,82	21
B	10 11,96	19 14,72	17 19,32	46
Iné	4 8,58	8 10,56	21 13,86	33
Súčty	26	32	42	100

kde napr. $np_{23} = n\dfrac{n_{2.} \times n_{.3}}{n \times n} = \dfrac{n_{2.} \times n_{.3}}{n} = \dfrac{46 \times 42}{100} = 19,32$.

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\left(n_{ij} - np_{ij}\right)^2}{np_{ij}} =$$

$$= \frac{(n_{11} - np_{11})^2}{np_{11}} + \frac{(n_{12} - np_{12})^2}{np_{12}} + \frac{(n_{13} - np_{13})^2}{np_{13}} + \frac{(n_{21} - np_{21})^2}{np_{21}} + \ldots + \frac{(n_{33} - np_{33})^2}{np_{33}} =$$

$$= \frac{(12-5,46)^2}{5,46} + \frac{(5-6,72)^2}{6,72} + \frac{(4-8,82)^2}{8,82} + \frac{(10-11,96)^2}{11,96} + \ldots + \frac{(21-13,86)^2}{13,86} =$$

$$= 19,4958 \approx 19,5$$

Krok 3: stanovíme kritickú hodnotu pre α

$$\chi^2((r-1)(c-1),\alpha) = \chi^2((3-1)(3-1);0,05) = \chi^2(4;0,05) = 9,49$$

Krok 4: výsledok testovania hypotézy

Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, pretože $\chi_0^2 = 19,5 > \chi^2(4;0,05) = 9,49$, t. j.
s pravdepodobnosťou 95 % môžeme tvrdiť, že hodnotenia predmetov z ergonómie a štatistiky nie sú nezávislé.

Príklad 7.9

Náhodný výber o rozsahu 300 dospelých s rôznymi veľkosťami rúk hodnotí dva návrhy myší. Výsledky hodnotenia sú zhrnuté v tabuľke Tab. 7.18. Pomocou kontingenčnej tabuľky testujeme hypotézu na úrovni $\alpha = 0,05$, či skupiny s rôznymi veľkosťami rúk majú homogénne názory na návrh myší.

Tab. 7.18

veľkosti rúk (X)	návrhy myší (Y)	
	konvenčný	nový
malá	35	65
stredná	20	80
veľká	30	70

Riešenie

Krok 1: určíme nulovú a alternatívnu hypotézu t. j. H_0 *a* H_1.

H_0 : Skupiny používateľov s rôznymi veľkosťami rúk sú homogénne v zmysle názoru na návrhy myší

H_1 : Skupiny používateľov s rôznymi veľkosťami rúk nie sú homogénne v zmysle názoru na návrhy myší

Krok 2: stanovíme hodnotu testovacej štatistiky

Tab. 7.19

veľkosti rúk (X)	návrhy myší (Y)		Súčet
	konvenčný	nový	
malá	35 / 28,3	65 / 71,7	100
stredná	20 / 28,3	80 / 71,7	100
veľká	30 / 28,3	70 / 71,7	100
súčet	85	215	300

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(n_{ij} - np_{ij}\right)^2}{np_{ij}} = 5,74981 \approx 5,75$$

Krok 3: stanovíme kritickú hodnotu pre α

$$\chi^2((r-1)(c-1),\alpha) = \chi^2((3-1)(2-1);0,05) = \chi^2(2;0,05) = 5,99$$

Krok 4: výsledok testovania hypotézy

Nulová hypotéza H_0 sa nezamietne, pretože $\chi_0^2 = 5,7 < \chi^2(2;0,05) = 5,99$, t.j. *na úrovni významnosti* $\alpha = 0,05$ *možno tvrdiť, že skupiny používateľov s rôznymi veľkosťami rúk nemajú významne rozdielny názor na návrhy myší.*

8 INDUKČNÁ ŠTATISTIKA PRE DVA VÝBERY

8.1 Indukcie pre rozdiel stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, rozptyly sú známe

Ciele

- Testovať hypotézu o $\mu_1 - \mu_2$, keď σ_1^2 a σ_2^2 sú známe (*z*-test).
- Určiť rozsah náhodného výberu *z*-testu pri štatistickej indukcii o $\mu_1 - \mu_2$ pomocou vzorca pre rozsah náhodného výberu a krivky operatívnej charakteristiky (OC).
- Stanoviť $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti (IS) pre $\mu_1 - \mu_2$, keď σ_1^2 a σ_2^2 sú známe.
- Určiť rozsah náhodného výberu pre *z*-test, ktorý spĺňa hodnotu chyby E pri odhadovaní $\mu_1 - \mu_2$.

Indukčné súvislosti

- **Parameter**: $\mu_1 - \mu_2$
- **Bodový odhad** parametra: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$, kde
  - $\overline{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$, $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a sú nezávislé;
  - $\overline{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$, $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ a sú nezávislé;
  - $\overline{X}_1$ a $\overline{X}_2$ sú <u>nezávislé</u>;
  - σ_1^2 a σ_2^2 sú <u>známe</u>.
- **Testovacia štatistika** parametra: $Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Odvodenie vzťahu $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

Vieme, že $\overline{X}_1$ a $\overline{X}_2$ sú nezávislé a normálne rozdelené so strednými hodnotami $E(\overline{X}_1)$, $E(\overline{X}_2)$ a rozptylmi $D(\overline{X}_1) = \sigma_1^2 / n_1$, $D(\overline{X}_2) = \sigma_2^2 / n_2$, potom $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou a rozptylom

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$D(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = D(\bar{X}_1) + D(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Postup testovania (z-test):

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1,

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $\quad$ H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$ pre dvojstranný test,

$\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$ pre dolný jednostranný test,

$\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ pre horný jednostranný test,

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky a jej hodnoty**

$$Z_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \qquad z_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

k_α pre obojstranný test,

$k_{2\alpha}$ pre jednostranný test,

krok 4: určenie **výsledku testovania hypotézy.** Nulová hypotéza H_0 sa *zamietne*, ak

$|z_0| > k_\alpha$ pre dvojstranný test,

$z_0 < -k_{2\alpha}$ pre dolný jednostranný test,

$z_0 > k_{2\alpha}$ pre horný jednostranný test.

Vzorce pre rozsah náhodného výberu

Predpokladajme, že nulová hypotéza $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ nie je správna a skutočný rozdiel stredných hodnôt je $\mu_1 - \mu_2 = \delta$, pričom $\delta > \delta_0$. Dá sa odvodiť vzorec pre rozsah náhodného výberu, ktorý sa požaduje na získanie určitej hodnoty pravdepodobnosti chyby druhého druhu β pre daný rozdiel stredných hodnôt δ a úroveň významnosti α.

Pre dvojstrannú alternatívnu hypotézu s úrovňou významnosti α platí, že rozsah výberu $n_1 = n_2 = n$ požadovaný na detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt δ so silou testu aspoň $1-\beta$ je

$$n = \frac{(k_\alpha + k_{2\beta})^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\delta - \delta_0)^2}$$

Odvodenie vzťahu.

Pre $n_1 = n_2 = n$ platí:

$$\beta = \Phi\left(k_\alpha - \frac{\delta - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}\right) - \Phi\left(-k_\alpha - \frac{\delta - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}\right)$$

Pretože $\Phi\left(-k_\alpha - (\delta - \delta_0)\sqrt{n} / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$ je veľmi malé v porovnaní s β, platí:

$$\beta \approx \Phi\left(k_\alpha - \frac{\delta - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}\right) \Rightarrow -k_{2\beta} \approx k_\alpha - \frac{(\delta - \delta_0)\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$ z čoho dostaneme vzťah pre n.

Pre jednostrannú alternatívnu hypotézu s úrovňou významnosti α platí, že rozsah náhodného výberu $n_1 = n_2 = n$ požadovaný na detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt $\delta\,(\neq \delta_0)$ so silou testu aspoň $1 - \beta$ je

$$n = \frac{(k_{2\alpha} + k_{2\beta})^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\delta - \delta_0)^2}$$

Krivka operatívnej charakteristiky (OC)

Krivky operatívnej charakteristiky (OC) uvedené v štatistických tabuľkách zobrazujú β ako funkciu

$$\beta = f(n, d, \alpha)$$

premenných rôznych rozsahov výberu $n\ (= n_1 = n_2)$, parametra d (z-test pre $\mu_1 - \mu_2$) a dvoch úrovní významnosti $\alpha = 0{,}01$ a $\alpha = 0{,}05$.

Tab. 8.1. *Operatívne charakteristiky pre z-test s dvomi náhodnými výbermi*

Test		α	Krivka OC*	OC parameter
z-test	dvojstraný	0,05	OC–a	$d = \frac{\lvert\delta - \delta_0\rvert}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$
		0,01	OC–b	
	jednostranný	0,05	OC–c	
		0,01	OC–d	

*Pozri v prílohe.

Vzorce pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$, keď σ_1^2 a σ_2^2 sú známe, platí:

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \quad \text{pre dvojstranný IS,}$$

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - k_{2\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \le \mu_1 - \mu_2 \quad \text{pre jednostranný IS s dolnou hranicou,}$$

$$\mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + k_{2\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \quad \text{pre jednostranný IS s hornou hranicou.}$$

<u>Odvodenie vzorca pre dvojstranný IS</u>

Keď použijeme testovaciu štatistiku $Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$, potom

$$P(-k_\alpha \le Z \le k_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-k_\alpha \le \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \le k_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

Teda dolná hranica a horná hranica dvojstranného IS sú:

$$l = \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad \text{a} \quad u = \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Testovanie hypotézy pomocou intervalu spoľahlivosti

Nulovú hypotézu $H_0\!: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ zamietame na úrovni významnosti α, ak platí:

$$\delta_0 \notin \left[\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] \quad \text{pre dvojstranný test,}$$

$$\delta_0 > \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + k_{2\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad \text{pre jednostranný test s dolnou hranicou,}$$

$$\delta_0 < \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - k_{2\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$ pre jednostranný test hornou hranicou.

Vzorec pre rozsah náhodného výberu pri vopred stanovenej chybe

Pri stanovení $100(1-\alpha)\%$ IS pre $\mu_1 - \mu_2$, ktorý nepresiahne vopred definovanú chybu E, sa rozsah náhodného výberu určí pomocou vzorca

$$n = \left(\frac{k_\alpha}{E}\right)^2 \times (\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \text{ kde } n_1 = n_2 = n$$

Príklad 8.1

Predpokladajme, že doba životnosti úspornej a večnej žiarovky má normálne rozdelenie s rozptylmi $\sigma_1^2 = 40^2$ (úsporná žiarovka) a $\sigma_2^2 = 30^2$ (večná žiarovka). Skúmame náhodný výber zo základného súboru o rozsahu 30 úsporných žiaroviek a 25 večných žiaroviek. Hodnoty životností oboch žiaroviek sú uvedené v Tab. 8.2.

Tab. 8.2

i	životnosť žiarovky		i	životnosť žiarovky		i	životnosť žiarovky	
	úsporná	večná		úsporná	večná		úsporná	večná
1	727	789	11	831	755	21	725	837
2	755	835	12	742	813	22	735	798
3	714	765	13	784	828	23	770	837
4	840	796	14	807	771	24	792	841
5	772	797	15	820	829	25	765	766
6	750	776	16	812	756	26	749	
7	814	769	17	804	787	27	829	
8	820	836	18	754	788	28	821	
9	753	847	19	715	794	29	816	
10	796	769	20	845	822	30	743	

Označme:

Úsporná žiarovka:

X_1 – doba životnosti

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$\sigma_1^2 = 40^2$

Večná žiarovka:

X_2 – doba životnosti

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\sigma_2^2 = 30^2$

Z náhodných výberov sme získali hodnoty:

Úsporná žiarovka:

$n_1 = 30$

$\bar{x}_1 = 780$

Večná žiarovka:

$n_2 = 25$

$\bar{x}_2 = 800,04$

1. *Test hypotézy pre* $\mu_1 - \mu_2$*, keď* σ_1^2 *a* σ_2^2 *sú známe; dvojstranný test*

Na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ testujme, či sa stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky líši od strednej hodnoty doby životnosti večnej žiarovky.

krok 1: stanovíme H_0 a H_1

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

krok 2: určíme hodnotu testovacej štatistiky

$$z_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(780 - 800,04) - 0}{\sqrt{\dfrac{40^2}{30} + \dfrac{30^2}{25}}} = -2,12$$

krok 3: určíme kritickú hodnotu pre α

$$k_\alpha = k_{0,05} = 1,96$$

krok 4: výsledok testovania hypotézy

Pretože $|z_0| = 2,12 > k_{0.05} = 1,96$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

S pravdepodobnosťou 95 % môžeme tvrdiť, že stredná hodnota životnosti úspornej žiarovky sa líši od strednej hodnoty životnosti večnej žiarovky.

2. *Určenie rozsahu náhodného výberu pre danú silu testu*

Určíme rozsah náhodného výberu pre dvojstranný z-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt dĺžok životností žiaroviek o veľkosti 20 hodín s danou silou testu 0,8. Použijeme vhodný vzorec pre rozsah náhodného výberu a vhodnú krivku OC.

a) Vzorec pre rozsah náhodného výberu

Skutočný rozdiel : $\delta = \mu_1 - \mu_2 = 20$

Hypotetický rozdiel : $\delta_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$

Sila testu $= P(H_0 \text{ zamietame} | H_0 \text{ nesprávna}) = 1 - \beta = 0,8 \Rightarrow \beta = 0,2 \Rightarrow 2\beta = 0,4$

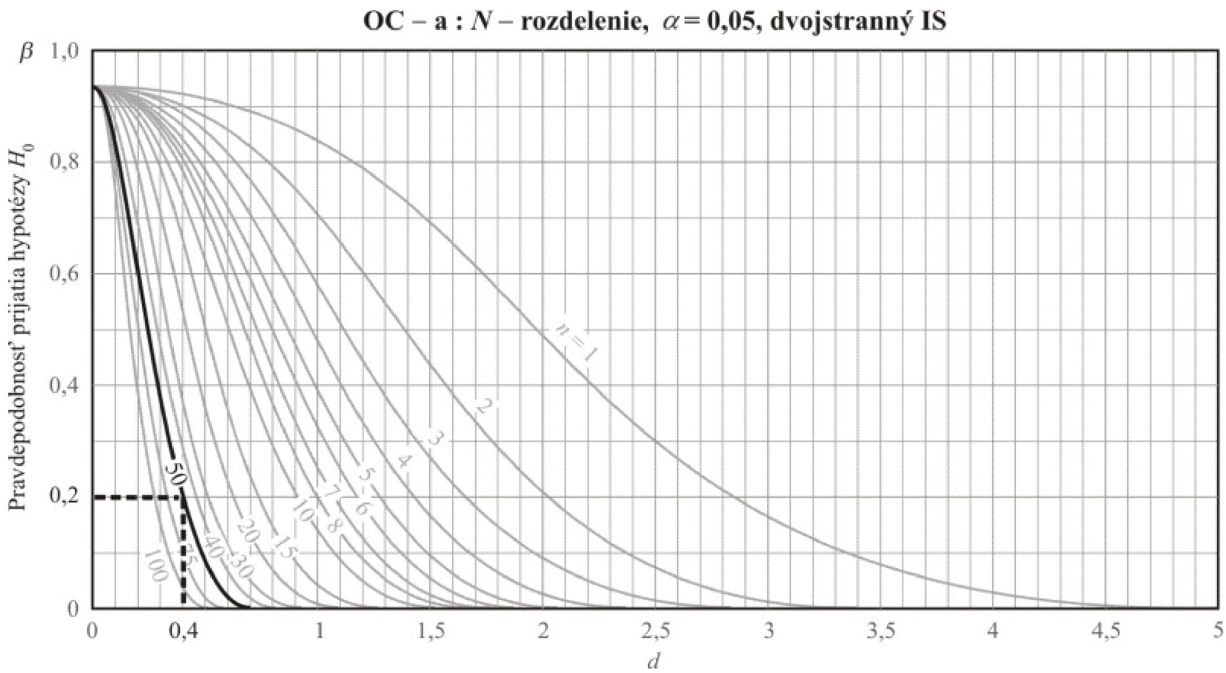
$$n = \frac{(k_\alpha + k_{2\beta})^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\delta - \delta_0)^2} = \frac{(k_{0,05} + k_{0,4})^2(40^2 + 30^2)}{(20-0)^2} == \frac{(1,96 + 0,84)^2 \times (40^2 + 30^2)}{(20-0)^2} \approx 50$$

b) Krivka OC

Pre dvojstranný *z*-test na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ a pre dva náhodné výbery sa vypočíta hodnota parametra d :

$$d = \frac{|\delta - \delta_0|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{|20-0|}{\sqrt{40^2 + 30^2}} = 0,4$$

Pre $d = 0,4$ a $\beta = 0,2$, príslušná krivka OC–a poskytne rozsah výberu $n = 50$, čo je rovnaké ako vypočítaná hodnota pomocou vzorca.



Obr. 8.1. *OC-a pre dvojstranný normálny test s rôznymi n a* $\alpha = 0,05$

Pre detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt dĺžok životností oboch žiaroviek o veľkosti 20 hodín so silou testu 0,8 je potrebné náhodne vybrať 50 úsporných a 50 večných žiaroviek.

3. *Dvojstranný interval spoľahlivosti*

Zostrojíme 95 % dvojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu rozdielu dĺžok životností $\mu_1 - \mu_2$. Na základe tohoto IS testujme $H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0$ oproti $H_1\colon \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

$$P(l \le \mu_1 - \mu_2 \le u) = 0,95 = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0,05$$

95 % dvojstranný IS pre $\mu_1 - \mu_2$:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + k_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\left(780-800,04\right)-k_{0,05}\sqrt{\frac{40^2}{30}+\frac{30^2}{25}}\leq\mu_1-\mu_2\leq\left(780-800,04\right)+k_{0,05}\sqrt{\frac{40^2}{30}+\frac{30^2}{25}}$$

$$-20,04-1,96\times\sqrt{\frac{40^2}{30}+\frac{30^2}{25}}\leq\mu_1-\mu_2\leq-20,04+1,96\times\sqrt{\frac{40^2}{30}+\frac{30^2}{25}}$$

$$-38,56\leq\mu_1-\mu_2\leq-1,51$$

Pretože tento 95 % dvojstranný IS pre $\mu_1-\mu_2$ neobsahuje hypotetickú hodnotu $\delta_0=0$, H_0 sa zamieta na úrovni významnosti $\alpha=0,05$.

4. *Určenie rozsahu náhodného výberu pre vopred definovanú chybu*
Nájdime rozsah náhodného výberu potrebného na zostrojenie 95 % dvojstranného IS pre strednú hodnotu rozdielu dĺžok životností úspornej a večnej žiarovky $\mu_1-\mu_2$ s chybou nie väčšou ako 20 hodín.

$$\sigma_1^2=40^2,\ \sigma_2^2=30^2,\ 1-\alpha=0,95\ \Rightarrow\ \alpha=0,05,\ E=20$$

$$n=\left(\frac{k_\alpha}{E}\right)^2\times(\sigma_1^2+\sigma_2^2)=\left(\frac{k_{0,05}}{20}\right)^2\times(40^2+30^2)=\left(\frac{1,96}{20}\right)^2\times2500=24,01\approx25$$

Potrebné je náhodne vybrať 25 úsporných a 25večných žiaroviek, aby sme sa pri výpočte hraníc 95 % dvojstranného IS pre strednú hodnotu rozdielu dĺžok životností úspornej a večnej žiarovky nedopustili chyby väčšej ako 20 hodín.

8.2 Indukcie pre rozdiel stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, rozptyly sú neznáme

Ciele

- Testovať hypotézu o $\mu_1-\mu_2$, keď σ_1^2 a σ_2^2 sú neznáme (*t*-test).
- Určiť rozsah náhodného výberu *t*-testu pri štatistickej indukcii o $\mu_1-\mu_2$ pomocou vhodnej krivky operatívnej charakteristiky (OC).
- Stanoviť $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti (IS) pre $\mu_1-\mu_2$, keď σ_1^2 a σ_2^2 sú neznáme.

Indukčné súvislosti

- **Parameter:** $\mu_1 - \mu_2$
- **Bodový odhad** parametra: $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$, kde

  – $\overline{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$, $\overline{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$,

  – $\overline{X}_1$ a $\overline{X}_2$ sú nezávislé,

  – σ_1^2 a σ_2^2 sú neznáme.

- **Testovacia štatistika** parametra:

$$T_0 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(\nu) \text{ pre } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$T_0 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(\nu) \text{ pre } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Poznámka. Rovnosť rozptylov $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (resp. $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$) overíme F-testom.

Postup testovania (*t*-test):

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$ pre dvojstranný test,

$\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$ pre dolný jednostranný test,

$\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ pre horný jednostranný test,

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky** a jej hodnoty

a) Rovnaké rozptyly ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)

$$T_0 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(\nu), \qquad t_0 = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - \delta_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(\nu),$$

kde $\nu = n_1 + n_2 - 2$,

$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ je združený odhad spoločného rozptylu σ^2.

b) Rôzne rozptyly ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

$$T_0 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(\nu) \quad , \quad t_0 = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(\nu),$$

kde $\nu = \dfrac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$ je aproximácia stupňov voľnosti.

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre *α*

$t(\nu;\alpha)$ pre obojstranný test,

$t(\nu;2\alpha)$ pre jednostranný test,

krok 4: určenie **výsledku testovania hypotézy**. Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$|t_0| > t(\nu;\alpha)$ pre dvojstranný test,

$t_0 < -t(\nu;2\alpha)$ pre dolný jednostranný test,

$t_0 > t(\nu;2\alpha)$ pre horný jednostranný test.

Tab. 8.3. *Operatívne charakteristiky pre t-test (dva náhodné výbery)*

Test		α	Krivka OC*	OC parameter
t-test	dvojstraný	0,05	OC–e	$d = \dfrac{\lvert\delta - \delta_0\rvert}{2\hat{\sigma}}^{\circ}$
		0,01	OC–f	
	jednostranný	0,05	OC–g	
		0,01	OC–h	

° Namiesto $\hat{\sigma}$ použijeme s_P (združenú smerodajnú odchýlku) alebo subjektívny odhad.

* Pozri v prílohe.

Krivka operatívnej charakteristiky (OC)

V Tab. 8.3 je uvedený zoznam kriviek operatívnych charakteristík (OC) a vzorec parametra *d* pre *t*-test parametra $\mu_1 - \mu_2$, kde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ a $n_1 = n_2 = n$. Všimnite si, že krivky OC nie sú k dispozícii pre *t*-test, keď $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, pretože zodpovedajúce *t*-rozdelenie nie je známe. V takomto prípade postupujeme nasledovne. V Tab. 8.3 nájdeme vhodnú krivku OC pre príslušný *t*-test. Rozsah náhodného výberu n^*, získaný z krivky OC, sa použije na určenie rozsahu výberu $n (= n_1 = n_2)$:

$$n = \frac{n^* + 1}{2}, \text{ kde } n^* \text{ je z krivky OC.}$$

Vzorec pre interval spoľahlivosti

$100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$, keď σ_1^2 a σ_2^2 sú neznáme, závisí od σ_1^2 a σ_2^2 takto:

a) <u>Rovnaké rozptyly</u> ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t(\nu;\alpha) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t(\nu;\alpha) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$ pre dvojstranný IS

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t(\nu;2\alpha) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2$$ pre jednostranný IS s dolnou hranicou

$$\mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t(\nu;2\alpha) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$ pre jednostranný IS s hornou hranicou

b) <u>Rôzne rozptyly</u> ($\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$)

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t(\nu;\alpha) \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t(\nu;\alpha) \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$ pre dvojstranný IS

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t(\nu;2\alpha) \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2$$ pre jednostranný IS s dolnou hranicou

$$\mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t(\nu;\alpha) \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$ pre jednostranný IS s hornou hranicou

Testovanie hypotézy pomocou intervalu spoľahlivosti

Nulovú hypotézu $H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ zamietame na úrovni významnosti α, ak platí:

a) <u>Rovnaké rozptyly</u> ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$);

$$\delta_0 \notin \left[\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t(\nu;\alpha) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t(\nu;\alpha) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$ pre dvojstranný test

$$\delta_0 > \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t(\nu;2\alpha) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$ pre jednostranný test s dolnou hranicou

$$\delta_0 < \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t(\nu;2\alpha) S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$ pre jednostranný test s hornou hranicou

b) Rôzne rozptyly ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$);

$$\delta_0 \notin \left[\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t(\nu;\alpha)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t(\nu;\alpha)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$ pre dvojstranný test,

$$\delta_0 > \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t(\nu;2\alpha)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$ pre jednostranný test s dolnou hranicou,

$$\delta_0 < \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t(\nu;2\alpha)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$ pre jednostranný test s hornou hranicou.

IS a testovanie hypotézy pre veľký rozsah náhodného výberu

Keď sú rozsahy výberov veľké ($n_1 \geq 30$ a $n_2 \geq 30$) možno použiť vzorce pre IS a testy hypotéz založené na normálnom rozdelení.

Tab. 8.4

i	životnosť žiarovky		i	životnosť žiarovky		i	životnosť žiarovky	
	úsporná	večná		úsporná	večná		úsporná	večná
1	727	789	11	831	755	21	725	837
2	755	835	12	742	813	22	735	798
3	714	765	13	784	828	23	770	837
4	840	796	14	807	771	24	792	841
5	772	797	15	820	829	25	765	766
6	750	776	16	812	756	26	749	
7	814	769	17	804	787	27	829	
8	820	836	18	754	788	28	821	
9	753	847	19	715	794	29	816	
10	796	769	20	845	822	30	743	

Príklad 8.2

Predpokladajme, že životnosť úspornej a večnej žiarovky má normálne rozdelenie. Skúmame náhodný výber zo základného súboru o rozsahu 30 úsporných žiaroviek a 25 večných žiaroviek. Hodnoty životností oboch žiaroviek sú uvedené v tabuľke (Tab. 8.4).

Označme:

Úsporná žiarovka:

X_1 – doba životnosti

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

Večná žiarovka:

X_2 – doba životnosti

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Z náhodných výberov sme získali hodnoty:

Úsporná žiarovka:

$n_1 = 30$

$\overline{x}_1 = 780$

$s_1^2 = 40,0164^2$

Večná žiarovka:

$n_2 = 25$

$\overline{x}_2 = 800,04$

$s_2^2 = 30,0048^2$

Rozptyly sú rovnaké ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)

1. *Test hypotézy pre $\mu_1 - \mu_2$, keď $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ sú neznáme; dvojstranný test*

Za predpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ testujme na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, či sa stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky líši od strednej hodnoty doby životnosti večnej žiarovky.

krok 1: Stanovíme H_0 a H_1

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad H_1\colon \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

krok 2: Určíme hodnotu testovacej štatistiky

$$t_0 = \frac{\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - \delta_0}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{\left(780 - 800,04\right) - 0}{35,83\sqrt{\dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{25}}} = -2,065$$

$$s_p^2 = \frac{\left(n_1 - 1\right)s_1^2 + \left(n_2 - 1\right)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} - 2 = \frac{(30-1)40,0164^2 + (25-1)30,0048^2}{30 + 25 - 2} = 1283,87$$

$$\Rightarrow s_p = 35,83$$

krok 3: Určíme kritickú hodnotu pre α

$$t(\nu, \alpha) = t(53, 0, 05) = 2,006 \quad , \quad \nu = n_1 + n_2 - 2 = 30 + 25 - 2 = 53$$

krok 4: Výsledok testovania hypotézy:

Pretože $|t_0| = 2,065 > t(53; 0,05) = 2,006$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, t. j. *s pravdepodobnosťou 95 % môžeme tvrdiť, že stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky sa líši od strednej hodnoty doby životnosti večnej žiarovky.*

2. *Určenie rozsahu náhodného výberu ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)*

Za predpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ určíme rozsah náhodného výberu pre dvojstranný t-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt dĺžok životností oboch žiaroviek o veľkosti 20 hodín s danou silou testu 0,8. Použijeme vhodnú krivku OC.

Skutočný rozdiel : $\delta = \mu_1 - \mu_2 = 20$

Hypotetický rozdiel : $\delta_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$

Pre dvojstranný t-test na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pre dva výbery sa vypočíta hodnota parametra d :

$$d = \frac{|\delta - \delta_0|}{2\hat{\sigma}} = \frac{|\delta - \delta_0|}{2s_P} = \frac{|20-0|}{2 \times 35{,}83} \approx 0{,}28$$

kde

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(30-1)\times 40{,}0164^2 + (25-1)\times 30{,}0048^2}{30+25-2} = 1283{,}0 = 35{,}83^2$$

Pre $d = 0{,}28$ a $\beta = 0{,}2$ dostaneme z krivky OC–e hodnotu $n = 100$.

Pre detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt dĺžok životností oboch žiaroviek o veľkosti 20 hodín so silou testu 0,8 je potrebné náhodne vybrať 100 úsporných a 100 večných žiaroviek.

3. *Interval spoľahlivosti pre* $\mu_1 - \mu_2$, *keď* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ *sú neznáme; dvojstranný IS*

Za predpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ zostrojíme 95 % dvojstranný interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt životnosti $\mu_1 - \mu_2$. Na základe IS testujeme $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ oproti $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$.

$$P(l \le \mu_1 - \mu_2 \le u) = 0{,}95 = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}05$$

$$\nu = n_1 + n_2 - 2 = 30 + 25 - 2 = 53; \quad s_P^2 = 35{,}83^2$$

95 % dvojstranný IS pre $\mu_1 - \mu_2$:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t(\nu;\alpha)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t(\nu;\alpha)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\left(780 - 800{,}04\right) - t(53;0{,}05)\times 35{,}83\sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{25}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(780 - 800{,}04\right) + t(53;0{,}05)\times 35{,}83\sqrt{\frac{1}{30} + \frac{1}{25}}$$

$$-20{,}04 - 2{,}065 \times 9{,}703 \le \mu_1 - \mu_2 \le -20{,}04 + 2{,}065 \times 9{,}703$$

$$-39{,}502 \le \mu_1 - \mu_2 \le -0{,}577995$$

$$-39{,}5 \le \mu_1 - \mu_2 \le -0{,}600$$

Všimnime si, že IS $[-39{,}5\ ;\ -0{,}600]$ založený na t-rozdelení je širší ako odpovedajúci IS $[38{,}56\ ;\ -1{,}51]$ založený na rozdelení $N(0{,}1)$ (Príklad 8.1).

Rôzne rozptyly ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

1. *Test hypotézy pre* $\mu_1 - \mu_2$*, keď* $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ *sú neznáme; dvojstranný test*

Za predpokladu $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ testujme na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, či sa stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky líši od strednej hodnoty doby životnosti večnej žiarovky.

krok 1: Stanovíme H_0 a H_1

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

krok 2: Určíme hodnotu testovacej štatistiky

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(780 - 800{,}04) - 0}{\sqrt{\dfrac{40{,}0164^2}{30} + \dfrac{30{,}0084^2}{25}}} = -2{,}12$$

$$\nu = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2 = \frac{(40{,}0164^2/30 + 30{,}0048^2/25)^2}{\dfrac{(40{,}0164^2/30)^2}{30+1} + \dfrac{(30{,}0048^2/25)^2}{25+1}} - 2 = 56{,}3552 \approx 57$$

krok 3: Určíme kritickú hodnotu pre α

$$t(\nu;\alpha) = t(57;0{,}05) = 2{,}00$$

krok 4: Výsledok testovania hypotézy

Pretože $|t_0| = 2{,}12 > t(57;0{,}05) = 2{,}00$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$. *S pravdepodobnosťou 95 % môžeme tvrdiť, že stredná hodnota doby životnosti úspornej žiarovky sa líši od strednej hodnoty doby životnosti večnej žiarovky.*

2. *Určenie rozsahu náhodného výberu (*$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$*)*

Za predpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ určíme rozsah náhodného výberu pre dvojstranný t-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt dĺžok životností oboch žiaroviek o veľkosti 20 hodín s danou silou testu 0,8. Použijeme vhodnú krivku OC.

Skutočný rozdiel : $\delta = \mu_1 - \mu_2 = 20$

Hypotetický rozdiel : $\delta_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$

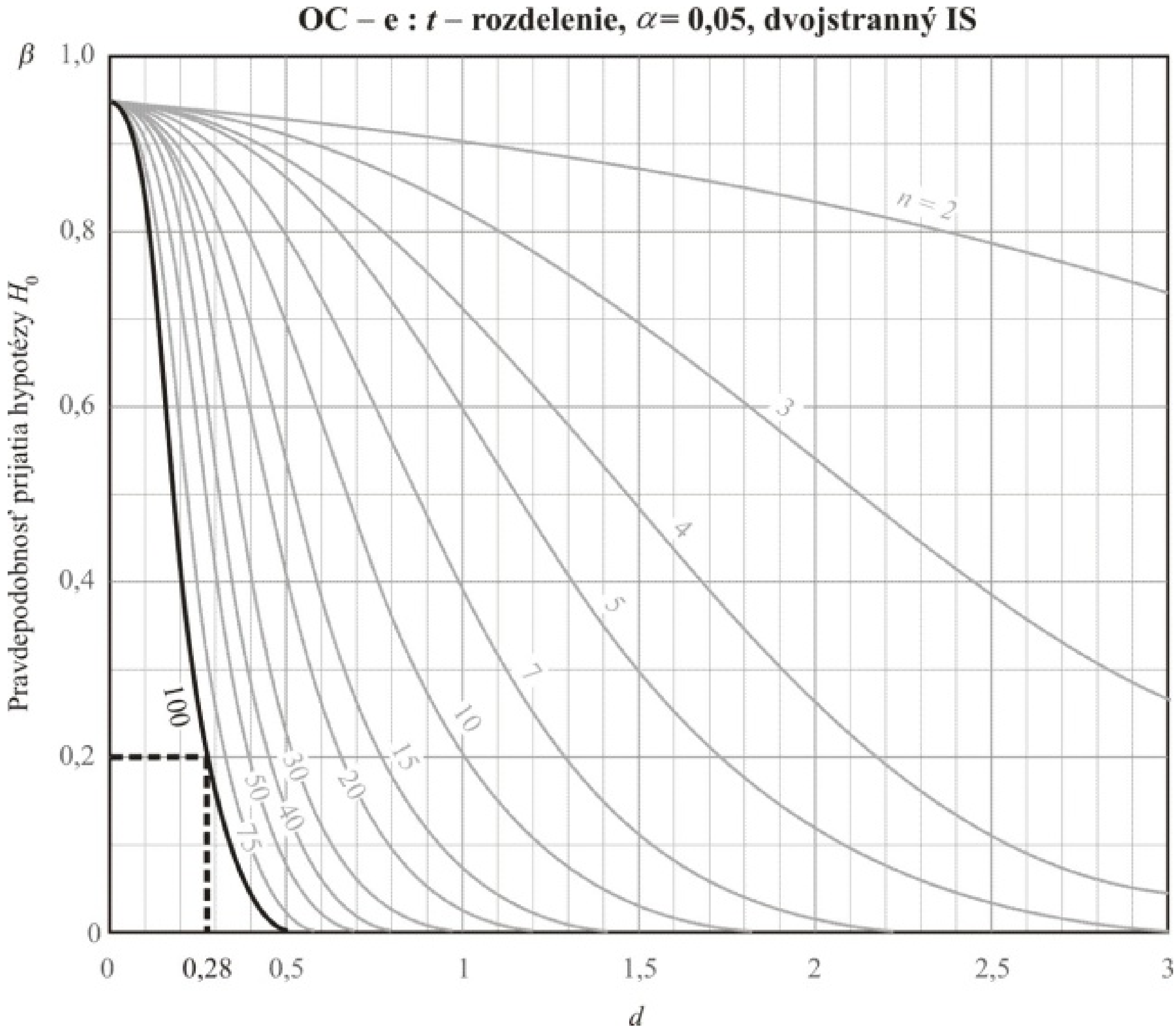
Pre dvojstranný t-test na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pre dva náhodné výbery sa vypočíta hodnota parametra d :

$$d = \frac{|\delta - \delta_0|}{2\hat{\sigma}} = \frac{|\delta - \delta_0|}{2s_P} = \frac{|20 - 0|}{2 \times 35{,}8} \approx 0{,}28$$

kde

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(30-1)\times 40,0164^2+(25-1)\times 30,0048^2}{30+25-2} = 1283,0 = 35,8^2$$

Pre $d = 0,28$ a $\beta = 0,2$ dostaneme z krivky OC–e hodnotu $n^* = 100$.



Obr. 8.2. OC−e pre dvojstranný *t*-test s rôznymi *n* a $\alpha = 0,05$

Teda požadovaný rozsah výberu *n* je

$$n = \frac{n^*+1}{2} = \frac{100+1}{2} = 50,5 \approx 51$$

Pre detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt dĺžok životností oboch žiaroviek o veľkosti 20 hodín so silou testu 0,8 je potrebné náhodne vybrať 51 úsporných a 51 večných žiaroviek.

Poznámka. Všimnime si, že keď neznáme rozptyly sú rovnaké ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), rozsah náhodného výberu (n = 100) je približne dvojnásobný vzhľadom na rozsah náhodného výberu (n = 51), keď neznáme rozptyly sú rôzne ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).

3. *Interval spoľahlivosti pre* $\mu_1 - \mu_2$, *keď* $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ *sú neznáme; dvojstranný IS*

Za predpokladu $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ zostrojme 95 % dvojstranný interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt životnosti $\mu_1 - \mu_2$. Na základe tohto IS testujme $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ oproti $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$.

$$P(l \leq \mu_1 - \mu_2 \leq u) = 0{,}95 = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}05$$

$$\nu = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2 \approx 57$$

95 % dvojstranný IS pre $\mu_1 - \mu_2$:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t(\nu;\alpha)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t(\nu;\alpha)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t(57;0{,}05)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t(57;0{,}05)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$\left(780 - 800{,}04\right) - 2{,}00\sqrt{\frac{40{,}0164^2}{30} + \frac{30{,}0048^2}{25}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \left(780 - 800{,}04\right) + 2{,}00\sqrt{\frac{40{,}0164^2}{30} + \frac{30{,}0048^2}{25}}$$

$$-20{,}04 - 2{,}00 \times 18{,}9091 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -20{,}04 + 2{,}00 \times 18{,}9091$$

$$-39{,}0079 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -1{,}07207$$

$$-39{,}0 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -1{,}1$$

Pretože 95 % dvojstranný IS pre $\mu_1 - \mu_2$, *keď* $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ *sú neznáme, neobsahuje hypotetickú hodnotu* $\delta_0 = 0$, H_0 *zamietame na úrovni významnosti* $\alpha = 0{,}05$.

8.3 Párový *t*-test

Ciele

- Vysvetliť párový experiment a jeho cieľ.
- Testovať hypotézu o μ_D pre párové pozorovania, keď σ_D^2 je neznámy (párový *t*-test).
- Stanoviť $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti (IS) pre μ_D pre párové pozorovania, keď σ_D^2 je neznámy.

Párový experiment

Párový experiment zhromažďuje dvojice pozorovaní (X_1 a X_2) z každej skúšobnej jednotky (vzorky) a analyzuje ich rozdiel namiesto pôvodných dát. Párový test sa používa, keď existuje heterogenita medzi skúšobnými jednotkami a táto heterogenita môže významne ovplyvňovať X_1 a X_2; inak povedané X_1 a X_2 <u>nie sú</u> nezávislé.

Indukčné súvislosti

- **Parameter**: μ_D
- **Bodový odhad** parametra: $\bar{D} = \overline{X_1 - X_2} \sim N(\mu_D; \frac{\sigma_D^2}{n})$,

  kde σ_D^2 je neznámy, $\bar{X}_1$ a $\bar{X}_2$ <u>nie sú</u> nezávislé
- **Testovacia štatistika** parametra: $T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Postup testovania (*t*-test):

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1

H_0: $\mu_D = \delta_0$ $\quad$ H_1: $\mu_D \neq \delta_0$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$\mu_D < \delta_0$ pre dolný jednostranný test,

$\mu_D > \delta_0$ pre horný jednostranný test,

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky** a jej hodnoty

$$T_0 = \frac{\bar{D} - \delta_0}{S_D / \sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad , \quad t_0 = \frac{\bar{d} - \delta_0}{s_D / \sqrt{n}}$$

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

$t(n-1; \alpha)$ pre obojstranný test,

$t(n-1; 2\alpha)$ pre jednostranný test, krok 4: určenie **výsledku testovania** hypotézy. Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$|t_0| > t(n-1;\alpha)$ pre dvojstranný (obojstranný) test,

$t_0 < -t(n-1;2\alpha)$ pre dolný jednostranný test,

$t_0 > t(n-1;2\alpha)$ pre horný jednostranný test.

Vzorce pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ IS pre μ_D, keď σ_D^2 je neznámy, platí:

$$\bar{D} - t(n-1;\alpha)\frac{S_D}{\sqrt{n}} \le \mu_D \le \bar{D} + t(n-1;\alpha)\frac{S_D}{\sqrt{n}}$$ pre dvojstranný IS,

$$\bar{D} - t(n-1;2\alpha)\frac{S_D}{\sqrt{n}} \le \mu_D$$ pre jednostranný IS s dolnou hranicou,

$$\mu_D \le \bar{D} + t(n-1;2\alpha)\frac{S_D}{\sqrt{n}}$$ pre jednostranný IS s hornou hranicou.

IS a test hypotézy pre veľký rozsah náhodného výberu

Keď je rozsah výberu veľký ($n \ge 30$), možno podľa centrálnej limitnej vety použiť normované normálne rozdelenie na konštruovanie IS a testovanie H_0: $\mu_D = \delta_0$.

Tab. 8.5

i	**Pred** (X_1)	**Po** (X_2)	***i***	**Pred** (X_1)	**Po** (X_2)	***i***	**Pred** (X_1)	**Po** (X_2)
1	72,575	69,400	**11**	71,668	63,503	**21**	77,111	69,853
2	78,018	72,575	**12**	92,986	88,904	**22**	98,883	96,616
3	69,853	61,689	**13**	74,389	71,668	**23**	66,678	60,781
4	95,254	89,811	**14**	102,058	93,894	**24**	78,471	71,668
5	78,471	75,296	**15**	84,368	82,554	**25**	88,451	84,822
6	65,771	61,689	**16**	70,307	67,585	**26**	99,790	94,801
7	89,811	82,554	**17**	83,461	79,832	**27**	97,522	93,440
8	74,843	72,575	**18**	78,471	70,760	**28**	93,440	91,172
9	81,647	80,739	**19**	81,193	75,750	**29**	74,843	70,760
10	78,018	77,564	**20**	76,204	68,946	**30**	77,111	69,853

Príklad 8.3

Hmotnosti (jednotka: kg) 30 účastníkov pred diétnym programom a po ňom sú uvedené v Tab. 8.5. Z dát uvedených v tabuľke sme zistili tieto údaje:
rozsah výberu: $n = 30$, výberový priemer: $\overline{d} = 4{,}687$, kde $d = \text{"PRED} - \text{PO"}$, výberový rozptyl: $s_D^2 = 5{,}297.$

1. *Test hypotézy pre* μ_D, σ_D^2 *je neznámy; dvojstranný test*

Testujme na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, či diétny program má významný účinok na stratu hmotnosti účastníkov programu.

krok 1: Stanovíme H_0 a H_1

$$H_0: \mu_D = 0 \qquad H_1: \mu_D \neq 0$$

krok 2: Určíme hodnotu testovacej štatistiky

$$t_0 = \frac{\overline{d} - \delta_0}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{4{,}687 - 0}{2{,}3015 / \sqrt{30}} = 11{,}15436$$

krok 3: Určíme kritickú hodnotu pre α

$$t(n-1; \alpha) = t(30-1; 0{,}05) = t(29; 0{,}05) = 2{,}045$$

krok 4: Výsledok testovania hypotézy

Pretože $|t_0| = 11{,}15436 > t(29; 0{,}05) = 2{,}045$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$. *Na úrovni významnosti* $\alpha = 0{,}05$ *môžeme tvrdiť, že diétny program má významný účinok na stratu hmotnosti účastníkov programu.*

2. *Interval spoľahlivosti pre* μ_D, σ_D^2 *je neznámy; dvojstranný IS*

Zostrojme 95 % dvojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu straty hmotnosti μ_D spôsobenú diétnym programom. Použitím tohto IS testujme $H_0: \mu_D = 0$ oproti $H_1: \mu_D \neq 0$ na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$.

$$P(l \le \mu_D \le u) = 0{,}95 = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}05 \ ; \ n-1 = 30-1 = 29$$

95 % obojstranný IS pre μ_D:

$$\overline{d} - t(n-1;\alpha)\frac{s_D}{\sqrt{n}} \le \mu_D \le \overline{d} + t(n-1;\alpha)\frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

$$4{,}687 - t(29;0{,}05)\frac{2{,}3015}{\sqrt{30}} \le \mu_D \le 4{,}687 + t(29;0{,}05)\frac{2{,}3015}{\sqrt{30}}$$

$$4{,}687 - 2{,}045 \times 0{,}4202 \le \mu_D \le 4{,}687 + 2{,}045 \times 0{,}4202$$

$$2{,}968382 \le \mu_D \le 6{,}405618$$

$$2{,}968 \le \mu_D \le 6{,}406$$

Pretože 95 % dvojstranný IS pre μ_D neobsahuje hypotetickú hodnotu $\delta_0 = 0$, H_0 zamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$.

8.4 Indukcie pre rozptyly dvoch normálnych rozdelení

Ciele

- Testovať hypotézu o podiele dvoch rozptylov σ_1^2 / σ_2^2 (F-test).
- Určiť rozsah výberu F-testu pri štatistickej indukcii o σ_1^2 / σ_2^2 pomocou vhodnej krivky operatívnej charakteristiky (OC).
- Stanoviť $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti (IS) pre σ_1^2 / σ_2^2.

Indukčné súvislosti

- **Parameter**: $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
- **Bodový odhad** parametra: $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$, kde
  - $S_1^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2}{n_1 - 1}$ a $S_2^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{n_2 - 1}$;
  - $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;
  - X_1 a X_2 sú nezávislé.
- **Testovacia štatistika** parametra: $F_0 = \dfrac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

Postup testovania (*F*-test):

krok 1: určenie nulovej a alternatívnej hypotézy, t. j. H_0 a H_1

$H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \dfrac{\sigma_{1,0}^2}{\sigma_{2,0}^2}$ $\qquad H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \dfrac{\sigma_{1,0}^2}{\sigma_{2,0}^2}$ pre dvojstranný test,

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \dfrac{\sigma_{1,0}^2}{\sigma_{2,0}^2}$ pre dolný jednostranný test,

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \dfrac{\sigma_{1,0}^2}{\sigma_{2,0}^2}$ pre horný jednostranný test, krok 2: stanovenie testovacej štatistiky a jej hodnoty

$$F_0 = \frac{S_1^2/\sigma_{1,0}^2}{S_2^2/\sigma_{2,0}^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_{2,0}^2}{\sigma_{1,0}^2} \sim F(n_1-1; n_2-1) \quad ; \quad f_0 = \frac{s_1^2/\sigma_{1,0}^2}{s_2^2/\sigma_{2,0}^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_{2,0}^2}{\sigma_{1,0}^2}$$

krok 3: stanovenie kritickej hodnoty pre α

$f(n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2)$ a $f(n_1-1, n_2-1, \alpha/2)$ pre obojstranný test,

$f(n_1-1, n_2-1, 1-\alpha)$ $\left(= \dfrac{1}{f(n_2-1, n_1-1, \alpha)}\right)$ pre dolný jednostranný test,

$f(n_1-1, n_2-1, \alpha)$ pre horný jednostranný test,

krok 4: výsledok testovania hypotézy. Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$f_0 < f(n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2)$ alebo $f_0 > f(n_1-1, n_2-1, \alpha/2)$ pre obojstranný test,

$f_0 < f(n_1-1, n_2-1, 1-\alpha)$ pre dolný jednostranný test,

$f_0 > f(n_1-1, n_2-1, \alpha)$ pre horný jednostranný test.

Krivka operatívnej charakteristiky (OC)

Krivky operatívnej charakteristiky (OC) uvedené v štatistických tabuľkách zobrazujú parameter λ pre *F*-test o parametri σ_1^2/σ_2^2, pričom $n_1 = n_2 = n$. V Tab. 8.6 nájdeme vhodnú krivku OC pre daný *F*-test.

Tab. 8.6 *Operatívne charakteristiky pre F-test (dva náhodné výbery)*

Test		α	Krivka OC	OC parameter
F-test	dvojstranný	0,05	OC–o	$\lambda = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$
		0,01	OC–p	
	jednostranný	0,05	OC–q	
		0,01	OC–r	

Vzorce pre interval spoľahlivosti

Pre $100(1-\alpha)\%$ IS pre $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, platí:

dvojstranný IS

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f(n_1-1, n_2-1, \alpha/2)} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f(n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2)}$$

alebo

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_2-1, n_1-1, 1-\alpha/2) \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_2-1, n_1-1, \alpha/2)$$

<u>jednostranný IS s dolnou hranicou</u>

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1-1, n_2-1, \alpha)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad \text{alebo} \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_2-1, n_1-1, 1-\alpha) \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

<u>jednostranný IS s hornou hranicou</u>

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1-1, n_2-1, 1-\alpha)} \quad \text{alebo} \quad \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_2-1, n_1-1, \alpha)$$

<u>Odvodenie vzorca</u> pre dvojstranný interval spoľahlivosti pre σ_1^2 / σ_2^2.

Keď použijeme testovaciu štatistiku $F_0 = \dfrac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} \sim F(n_2-1, n_1-1)$

$$P\big(f(n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2) \leq F_0 \leq f(n_1-1, n_2-1; \alpha/2)\big) = 1-\alpha$$

$$P\left(f(n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2) \leq \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} \leq f(n_1-1, n_2-1; \alpha/2) \right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2) \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_1-1, n_2-1; \alpha/2) \right) = 1-\alpha$$

alebo

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1-1, n_2-1; \alpha/2)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2)} \right) = 1-\alpha$$

Potom

$$l = \frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_2-1, n_1-1; 1-\alpha) = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1-1, n_2-1; \alpha)}$$

$$u = \frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_2-1, n_1-1; \alpha) = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1-1, n_2-1; 1-\alpha)}$$

Príklad 8.4

Z dát (Tab. 8.2) o životnosti úspornej žiarovky (X_1) a večnej žiarovky (X_2) sme získali výberové hodnoty: $n_1 = 30$, $\bar{x}_1 = 780$, $s_1^2 = 40{,}0164^2$, $n_2 = 25$, $\bar{x}_2 = 800{,}04$, $s_2^2 = 30{,}0048^2$.

1. *Test hypotézy pre* σ_1^2 / σ_2^2 *; dvojstranný test*

Testujte na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$ hypotézu o rovnosti rozptylov životnosti úspornej žiarovky a večnej žiarovky.

krok 1: Určíme H_0 a H_1

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \qquad\qquad H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \text{ pre dvojstranný test,}$$

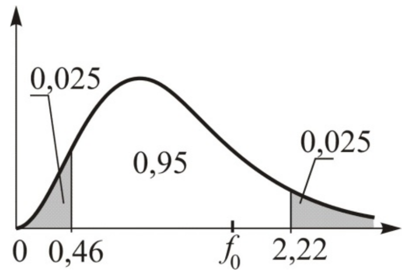
krok 2: Stanovíme hodnotu testovacej štatistiky

$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_{2,0}^2}{\sigma_{1,0}^2} = \frac{40{,}0164^2}{30{,}0048^2} \times 1 = 1{,}77867$$

krok 3:Určíme kritickú hodnotu pre α

$$f(n_1 - 1, n_2 - 1, 1 - \alpha/2) = f(29, 24, 0{,}975) = \frac{1}{f(24, 29, 0{,}025)} = 0{,}46$$

$$f(n_1 - 1, n_2 - 1, \alpha/2) = f(29, 24, 0{,}025) = 2{,}22$$



Obr. 8.3

krok 4: Výsledok testovania hypotézy

Pretože $f_0 = 1{,}78 > f(29, 24, 0{,}975) = 0{,}46$ a $f_0 = 1{,}78 < f(29, 24, 0{,}025) = 2{,}22$, nulová hypotéza H_0 sa nezamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, t. j. *s 95 % pravdepodobnosťou môžeme tvrdiť, že rozptyly životnosti úspornej žiarovky a večnej žiarovky sa nelíšia.*

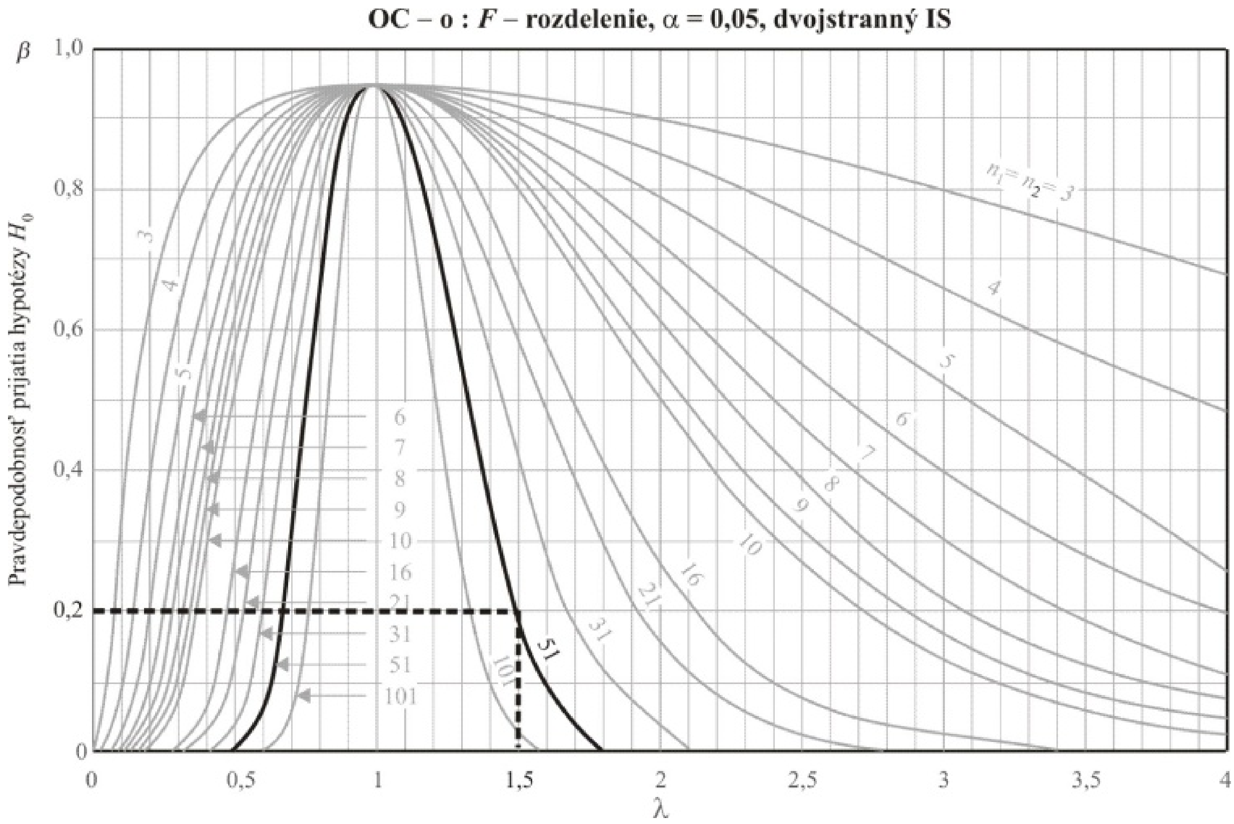
2. *Určenie rozsahu náhodného výberu*

Určíme rozsah náhodného výberu n $(= n_1 = n_2)$ pre požadovaný dvojstranný *F*-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočného podielu životnosti oboch žiaroviek σ_1^2 / σ_2^2 o veľkosti $1{,}5^2$ so silou testu 0,8. Použijeme vhodnú krivku OC.

Pre dvojstranný *F*-test na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$ sa vypočíta hodnota parametra

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1{,}5$$

Keď použijeme $\lambda = 1,5$ a $\beta = 0,2$ (pretože sila testu $= 1 - \beta = 0,8$), potom na príslušnej krivke OC–o nájdeme požadovaný rozsah náhodného výberu $n\,(= n_1 = n_2) = 50$.



Obr. 8.4. *OC−o pre dvojstranný F-test s rôznymi n a* $\alpha = 0,05$

Pre detegovanie skutočného podielu σ_1^2 / σ_2^2 *životnosti oboch žiaroviek o veľkosti* $1,5^2$ *so silou testu 0,8 je potrebné náhodne vybrať 50 úsporných a 50 večných žiaroviek.*

3. *Interval spoľahlivosti pre* σ_1^2 / σ_2^2*; dvojstranný IS*

Zostrojme 95 % dvojstranný interval spoľahlivosti pre σ_1^2 / σ_2^2. Použime tento IS na testovanie $H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$ oproti $H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$ na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$.

$$P(l \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq u) = 0,95 = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0,05$$

95 % dvojstranný IS pre σ_1^2 / σ_2^2:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1 - 1, n_2 - 1, \alpha/2)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1 - 1, n_2 - 1, 1 - \alpha/2)}$$

$$\frac{40{,}0164^2}{30{,}0048^2}\frac{1}{f(29;24;0{,}025)} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{40{,}0164^2}{30{,}0048^2}\frac{1}{f(29;24;0{,}975)}$$

$$\frac{40{,}0164^2}{30{,}0048^2}\frac{1}{2{,}22} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{40{,}0164^2}{30{,}0048^2}\frac{1}{0{,}46}$$

$$0{,}801201 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 3{,}86663$$

$$0{,}801 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 3{,}867$$

Pretože tento 95 % dvojstranný IS pre σ_1^2/σ_2^2, obsahuje hypotetickú hodnotu $\frac{\sigma_{1,0}^2}{\sigma_{2,0}^2} = 1$, H_0 nezamietame na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$.

8.5 Indukcie o dvoch podieloch v základných súboroch

Ciele

- Testovať hypotézu o rozdiele parametrov $p_1 - p_2$ (z-test).
- Určiť rozsah výberu z-testu pre štatistickú indukciu o $p_1 - p_2$ pomocou vhodného vzorca pre rozsah náhodného výberu.
- Stanoviť $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti (IS) pre rozdiel parametrov $p_1 - p_2$.

Indukčné súvislosti

Parameter: $p_1 - p_2$

Bodový odhad parametra: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$, kde

– $X_1 \sim B(n_1, p_1)$, $X_2 \sim B(n_2, p_2)$;

– X_1 a X_2 sú nezávislé;

– $n_1 p_1(1-p_1) > 9$ a $n_2 p_2(1-p_2) > 9$;

– $\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$ a $\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2} \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$;

– $\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ je odhad p.

Testovacia štatistika parametra: $Z = \dfrac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$ pre $p_1 \neq p_2$

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1) \text{ pre } p_1 = p_2 = p$$

Postup testovania (z-test):

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy**, t. j. H_0 a H_1.

H_0: $p_1 - p_2 = \delta_0$ $\quad$ H_1: $p_1 - p_2 \neq \delta_0$ pre dvojstranný test,

$p_1 - p_2 < \delta_0$ pre dolný jednostranný test,

$p_1 - p_2 > \delta_0$ pre horný jednostranný test,

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky**

a) Rôzne podiely ($p_1 \neq p_2$)

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}},$$

b) Rovnaké podiely ($p_1 = p_2 = p$)

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - 0}{\sqrt{p(1-p)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}, \quad \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

k_α pre obojstranný test,

$k_{2\alpha}$ pre jednostranný test,

krok 4: určenie **výsledku testovania** hypotézy.

Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$|z_0| > k_\alpha$ pre dvojstranný test,

$z_0 < -k_{2\alpha}$ pre dolný jednostranný test,

$z_0 > k_{2\alpha}$ pre horný jednostranný test.

Vzorce pre rozsah náhodného výberu

Pre test hypotézy o parametri $p_1 - p_2$ sa na určenie rozsahu náhodného výberu použijú tieto vzorce:

$$n = \left(\frac{k_\alpha \sqrt{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)/2} + k_{2\beta}\sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2}}{p_1 - p_2} \right)^2 \quad \text{pre dvojstranný test,}$$

$$n = \left(\frac{k_{2\alpha} \sqrt{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)/2} + k_{2\beta}\sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2}}{p_1 - p_2} \right)^2 \quad \text{pre jednostranný test,}$$

kde $n_1 = n_2 = n$, $q_1 = 1 - p_1$ a $q_2 = 1 - p_2$.

Vzorce pre interval spoľahlivosti (IS)

Tak ako testovacia štatistika pre $p_1 - p_2$ aj $100(1-\alpha)\%$ IS pre $p_1 - p_2$ závisí od p_1 a p_2 takto:

a) <u>Rôzne podiely</u> ($p_1 \neq p_2$)

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \le p_1 - p_2 \le (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

pre dvojstranný IS,

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - k_{2\alpha} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \le p_1 - p_2 \quad \text{pre jednostranný IS s dolnou hranicou,}$$

$$p_1 - p_2 \le (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + k_{2\alpha} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \quad \text{pre jednostranný IS s hornou hranicou.}$$

b) <u>Rovnaké podiely</u> ($p_1 = p_2 = p$)

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - k_\alpha \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \le p_1 - p_2 \le (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + k_\alpha \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

pre dvojstranný IS,

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - k_{2\alpha} \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \le p_1 - p_2 \quad \text{pre jednostranný IS s dolnou hranicou,}$$

$$p_1 - p_2 \le (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + k_{2\alpha} \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \quad \text{pre jednostranný IS s hornou hranicou.}$$

Príklad 8.5

V dvoch krajoch A a B sa testovali náhodné výbery mostov na koróziu kovov. Výsledky sú v Tab. 8.7:

Tab. 8.7

kraj	rozsah výberu	počet skorod. mostov (X)	výberový podiel $(\hat{p}_i = x_i / n_i)$
A	$n_1 = 40$	$x_1 = 28$	$\hat{p}_1 = 0,7$
B	$n_2 = 30$	$x_2 = 15$	$\hat{p}_2 = 0,5$

1. *Test hypotézy pre* $p_1 - p_2$*;* $p_1 \neq p_2$*; horný jednostranný test*

Za predpokladu $p_1 \neq p_2$ testujme na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$, či rozdiel podielov skorodovaných mostov v krajoch A a B je aspoň 0,1.

Výberové rozdelenie $\hat{P}_1$ a $\hat{P}_2$ je približne normálne, pretože všetky hodnoty

$$n_1\hat{p}_1 = 40 \times 0,7 = 28,\ n_1(1 - \hat{p}_1) = 40 \times 0,3 = 12,$$

$$n_2\hat{p}_2 = 30 \times 0,5 = 15,\ n_2(1 - \hat{p}_2) = 30 \times 0,5 = 15$$

sú väčšie ako päť.

krok 1: Určíme H_0 a H_1

H_0: $p_1 - p_2 \leq 0,1$ $\qquad H_1$: $p_1 - p_2 > 0,1$

krok 2: Stanovíme hodnotu testovacej štatistiky

$$z_0 = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0,7 - 0,5) - 0,1}{\sqrt{\dfrac{0,7 \times (1 - 0,7)}{40} + \dfrac{0,5 \times (1 - 0,5)}{30}}} = 0,86$$

krok 3: Určíme kritickú hodnotu pre α

$k_{2\alpha} = k_{0,1} = 1,645$

krok 4: Výsledok testovania hypotézy

Pretože $|z_0| = 0,86 < k_{0,1} = 1,645$, H_0 sa nezamietne na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. *Na úrovni významnosti* $\alpha = 0,05$ *môžeme tvrdiť, že rozdiel podielov skorodovaných mostov v krajoch A a B nie je väčší ako 0,1.*

2. *Určenie rozsahu náhodného výberu pre danú silu testu*

Predpokladajme, že $p_1 = 0,7$ a $p_2 = 0,5$. Určíme rozsah náhodného výberu $n\ (= n_1 = n_2)$ pre dvojstranný z-test, ktorý je potrebný na detegovanie skutočného rozdielu podielov skorodovaných mostov o veľkosti $0,2$ s danou silou testu 0,9.

$$\text{Sila testu} = P(H_0 \text{ zamietam} \,|\, H_0 \text{ je nesprávna}) = 1-\beta = 0,9 \Rightarrow \beta = 0,1$$

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,7 = 0,3 \text{ a } q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$n = \left(\frac{k_{2\alpha}\sqrt{(p_1+p_2)(q_1+q_2)/2} + k_{2\beta}\sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2}}{p_1 - p_2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{k_{0,1}\sqrt{(0,7+0,5)(0,3+0,5)/2} + k_{0,2}\sqrt{0,7\times 0,3 + 0,5\times 0,5}}{0,7-0,5} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1,645\times 0,69 + 1,28\times 0,68}{0,2} \right)^2 \approx 101$$

Pre detegovanie skutočného rozdielu podielov skorodovaných mostov v krajoch A a B o veľkosti 0,2 so silou testu 0,9 je potrebné náhodne vybrať 101 mostov v kraji A a 101 mostov v kraji B.

3. *Interval spoľahlivosti pre $p_1 - p_2$; nerovnaké podiely $p_1 \neq p_2$*

Za predpokladu, že $p_1 \neq p_2$, skonštruujeme 95 % jednostranný IS s hornou hranicou pre rozdiel dvoch podielov skorodovaných mostov $p_1 - p_2$.

95 % jednostranný IS pre $p_1 - p_2$:

$$p_1 - p_2 \leq (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + k_{2\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

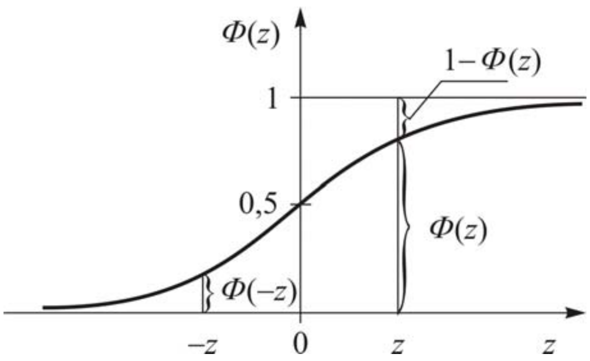
$$p_1 - p_2 \leq (0,7 - 0,5) + k_{0,1}\sqrt{\frac{0,7\times(1-0,7)}{40} + \frac{0,5\times(1-0,5)}{n_2}}$$

$$p_1 - p_2 \leq 0,2 + 1,645\times 0,117$$

$$p_1 - p_2 \leq 0,39$$

PRÍLOHY

DISTRIBUČNÁ FUNKCIA NORMOVANÉHO NORMÁLNEHO ROZDELENIA



$$F(x) = \Phi(z),\ \text{kde}\ z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

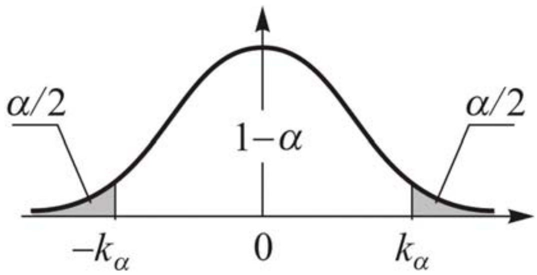
$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]
0.	0.50000	0.3	0.61791	0.6	0.72575	0.9	0.81594	1.2	0.88493
0.01	0.50399	0.31	0.62172	0.61	0.72907	0.91	0.81859	1.21	0.88686
0.02	0.50798	0.32	0.62552	0.62	0.73237	0.92	0.82121	1.22	0.88877
0.03	0.51197	0.33	0.62930	0.63	0.73565	0.93	0.82381	1.23	0.89065
0.04	0.51595	0.34	0.63307	0.64	0.73891	0.94	0.82639	1.24	0.89251
0.05	0.51994	0.35	0.63683	0.65	0.74215	0.95	0.82894	1.25	0.89435
0.06	0.52392	0.36	0.64058	0.66	0.74537	0.96	0.83147	1.26	0.89617
0.07	0.52790	0.37	0.64431	0.67	0.74857	0.97	0.83398	1.27	0.89796
0.08	0.53188	0.38	0.64803	0.68	0.75175	0.98	0.83646	1.28	0.89973
0.09	0.53586	0.39	0.65173	0.69	0.75490	0.99	0.83891	1.29	0.90147
0.1	0.53983	0.4	0.65542	0.7	0.75804	1.	0.84134	1.3	0.90320
0.11	0.54380	0.41	0.65910	0.71	0.76115	1.01	0.84375	1.31	0.90490
0.12	0.54776	0.42	0.66276	0.72	0.76424	1.02	0.84614	1.32	0.90658
0.13	0.55172	0.43	0.66640	0.73	0.76730	1.03	0.84849	1.33	0.90824
0.14	0.55567	0.44	0.67003	0.74	0.77035	1.04	0.85083	1.34	0.90988
0.15	0.55962	0.45	0.67364	0.75	0.77337	1.05	0.85314	1.35	0.91149
0.16	0.56356	0.46	0.67724	0.76	0.77637	1.06	0.85543	1.36	0.91309
0.17	0.56749	0.47	0.68082	0.77	0.77935	1.07	0.85769	1.37	0.91466
0.18	0.57142	0.48	0.68439	0.78	0.78230	1.08	0.85993	1.38	0.91621
0.19	0.57535	0.49	0.68793	0.79	0.78524	1.09	0.86214	1.39	0.91774
0.2	0.57926	0.5	0.69146	0.8	0.78814	1.1	0.86433	1.4	0.91924
0.21	0.58317	0.51	0.69497	0.81	0.79103	1.11	0.86650	1.41	0.92073
0.22	0.58706	0.52	0.69847	0.82	0.79389	1.12	0.86864	1.42	0.92220
0.23	0.59095	0.53	0.70194	0.83	0.79673	1.13	0.87076	1.43	0.92364
0.24	0.59483	0.54	0.70540	0.84	0.79955	1.14	0.87286	1.44	0.92507
0.25	0.59871	0.55	0.70884	0.85	0.80234	1.15	0.87493	1.45	0.92647
0.26	0.60257	0.56	0.71226	0.86	0.80511	1.16	0.87698	1.46	0.92785
0.27	0.60642	0.57	0.71566	0.87	0.80785	1.17	0.87900	1.47	0.92922
0.28	0.61026	0.58	0.71904	0.88	0.81057	1.18	0.88100	1.48	0.93056
0.29	0.61409	0.59	0.72240	0.89	0.81327	1.19	0.88298	1.49	0.93189

z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]
1.5	0.93319	1.8	0.96407	2.1	0.98214	2.4	0.99180	2.7	0.99653
1.51	0.93448	1.81	0.96485	2.11	0.98257	2.41	0.99202	2.71	0.99664
1.52	0.93574	1.82	0.96562	2.12	0.98300	2.42	0.99224	2.72	0.99674
1.53	0.93699	1.83	0.96638	2.13	0.98341	2.43	0.99245	2.73	0.99683
1.54	0.93822	1.84	0.96712	2.14	0.98382	2.44	0.99266	2.74	0.99693
1.55	0.93943	1.85	0.96784	2.15	0.98422	2.45	0.99286	2.75	0.99702
1.56	0.94062	1.86	0.96856	2.16	0.98461	2.46	0.99305	2.76	0.99711
1.57	0.94179	1.87	0.96926	2.17	0.98500	2.47	0.99324	2.77	0.99720
1.58	0.94295	1.88	0.96995	2.18	0.98537	2.48	0.99343	2.78	0.99728
1.59	0.94408	1.89	0.97062	2.19	0.98574	2.49	0.99361	2.79	0.99736
1.6	0.94520	1.9	0.97128	2.2	0.98610	2.5	0.99379	2.8	0.99744
1.61	0.94630	1.91	0.97193	2.21	0.98645	2.51	0.99396	2.81	0.99752
1.62	0.94738	1.92	0.97257	2.22	0.98679	2.52	0.99413	2.82	0.99760
1.63	0.94845	1.93	0.97320	2.23	0.98713	2.53	0.99430	2.83	0.99767
1.64	0.94950	1.94	0.97381	2.24	0.98745	2.54	0.99446	2.84	0.99774
1.65	0.95053	1.95	0.97441	2.25	0.98778	2.55	0.99461	2.85	0.99781
1.66	0.95154	1.96	0.97500	2.26	0.98809	2.56	0.99477	2.86	0.99788
1.67	0.95254	1.97	0.97558	2.27	0.98840	2.57	0.99492	2.87	0.99795
1.68	0.95352	1.98	0.97615	2.28	0.98870	2.58	0.99506	2.88	0.99801
1.69	0.95449	1.99	0.97670	2.29	0.98899	2.59	0.99520	2.89	0.99807
1.7	0.95543	2.	0.97725	2.3	0.98928	2.6	0.99534	2.9	0.99813
1.71	0.95637	2.01	0.97778	2.31	0.98956	2.61	0.99547	2.91	0.99819
1.72	0.95728	2.02	0.97831	2.32	0.98983	2.62	0.99560	2.92	0.99825
1.73	0.95818	2.03	0.97882	2.33	0.99010	2.63	0.99573	2.93	0.99831
1.74	0.95907	2.04	0.97932	2.34	0.99036	2.64	0.99585	2.94	0.99836
1.75	0.95994	2.05	0.97982	2.35	0.99061	2.65	0.99598	2.95	0.99841
1.76	0.96080	2.06	0.98030	2.36	0.99086	2.66	0.99609	2.96	0.99846
1.77	0.96164	2.07	0.98077	2.37	0.99111	2.67	0.99621	2.97	0.99851
1.78	0.96246	2.08	0.98124	2.38	0.99134	2.68	0.99632	2.98	0.99856
1.79	0.96327	2.09	0.98169	2.39	0.99158	2.69	0.99643	2.99	0.99861

z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]
3.	0.99865	3.5	0.99977	4.	0.99996833	4.5	0.99999660	5.	0.99999971
3.1	0.99903	3.6	0.99984	4.1	0.99997934	4.6	0.99999789	5.1	0.99999983
3.2	0.99931	3.7	0.99989	4.2	0.99998665	4.7	0.99999870	5.2	0.99999990
3.3	0.99952	3.8	0.99993	4.3	0.99999146	4.8	0.99999921	5.3	0.99999994
3.4	0.99966	3.9	0.99995	4.4	0.99999459	4.9	0.99999952	5.4	0.99999997
3.5	0.99977	4.	0.99997	4.5	0.99999660	5.	0.99999971	5.5	0.99999998

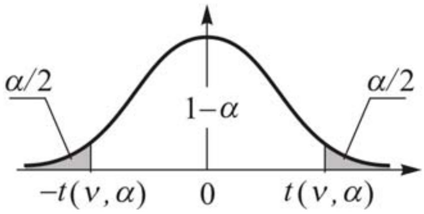
KRITICKÉ HODNOTY NORMÁLNEHO ROZDELENIA



$$P\left(|X| > k_\alpha\right) = \alpha$$

α	k_α	α	k_α	α	k_α
0,002	3,090	0,042	2,034	0,082	1,739
0,004	2,878	0,044	2,014	0,084	1,728
0,006	2,748	0,046	2,995	0,086	1,717
0,008	2,652	0,048	1,977	0,088	1,706
0,010	2,576	0,050	1,960	0,090	1,695
0,012	2,512	0,052	1,943	0,092	1,685
0,014	2,457	0,054	1,927	0,094	1,675
0,016	2,409	0,056	1,911	0,096	1,665
0,018	2,366	0,058	1,896	0,098	1655
0,020	2,326	0,060	1,881	0,100	1,645
0,022	2,290	0,062	1,866	0,110	1,598
0,024	2,257	0,064	1,852	0,120	1,555
0,026	2,226	0,066	1,838	0,130	1,514
0,028	2,197	0,068	1,825	0,140	1,476
0,030	2,170	0,070	1,812	0,150	1,440
0,032	2,144	0,072	1,799	0,160	1,405
0,034	2,120	0,074	1,787	0,170	1,372
0,036	2,097	0,076	1,774	0,180	1,341
0,038	2,075	0,078	1,762	0,190	1,311
0,040	2,054	0,080	1,751	0,200	1,282

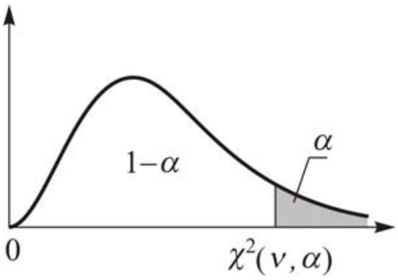
KRITICKÉ HODNOTY *t* – ROZDELENIA (Studentovho)



$$P\left(|T| > t(\nu, \alpha)\right) = \alpha$$

ν	α = 0,20	α = 0,10	α = 0,05	α = 0,02	α = 0,01
1	3,080	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	6,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,426	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

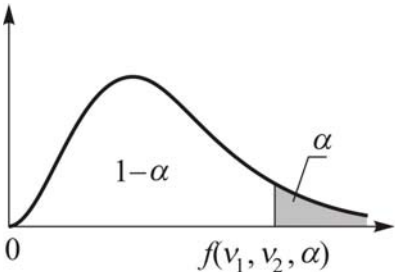
KRITICKÉ HODNOTY χ^2 - ROZDELENIA



$$P\left(X^2 > \chi^2(\nu,\alpha)\right) = \alpha$$

ν \ α	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1		0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1030	0,2110	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,1150	0,2160	0,3250	0,5840	6,25	7,82	9,35	11,30	12,80
4	0,2070	0,2970	0,4840	0,7110	1,0600	7,78	9,49	11,10	13,30	14,90
5	0,4120	0,5540	0,8310	1,1500	1,6100	9,24	11,10	12,80	15,10	16,70
6	0,6760	0,8720	1,2400	1,6400	2,2000	10,60	12,60	14,40	16,80	18,50
7	0,9890	1,2400	1,6900	2,1700	2,8300	12,00	14,10	16,00	18,50	20,30
8	1,3400	1,6500	2,1800	2,7300	3,4900	13,40	15,50	17,50	20,10	22,00
9	1,7300	2,0900	2,7000	3,3300	4,1700	14,70	16,90	19,00	21,70	23,60
10	2,1600	2,5600	3,2500	3,9400	4,8700	16,00	18,30	20,50	23,20	25,20
11	2,6000	3,0500	3,8200	4,5700	5,5800	17,30	19,70	21,90	24,70	26,80
12	3,0700	3,5700	4,4000	5,2300	6,3000	18,50	21,00	23,30	26,20	28,30
13	3,5700	4,1100	5,0100	5,8900	7,0400	19,80	22,40	24,70	27,70	29,80
14	4,0700	4,6600	5,6300	6,5700	7,7900	21,10	23,70	26,10	29,10	31,30
15	4,6000	5,2300	6,2600	7,2600	8,5500	22,30	25,00	27,50	30,60	32,80
16	5,1400	5,8100	6,9100	7,9600	9,3100	23,50	26,30	28,80	32,00	34,30
17	5,7000	6,4100	7,6500	8,6700	10,1000	24,80	27,60	30,20	33,40	35,70
18	6,2600	7,0100	8,2300	9,3900	10,9000	26,00	28,90	31,50	34,80	37,20
19	6,8400	7,6300	8,9100	10,1000	11,7000	27,20	30,10	32,90	36,20	38,60
20	7,4300	8,2600	9,5900	10,9000	12,4000	28,40	31,40	34,20	37,60	40,00
21	8,0300	8,9000	10,3000	11,6000	13,2000	29,60	32,70	35,50	38,90	41,40
22	8,6400	9,5400	11,0000	12,3000	14,0000	30,80	33,90	36,80	40,30	42,80
23	9,2600	10,2000	11,7000	13,1000	14,8000	32,00	35,20	38,10	41,60	44,20
24	9,8900	10,9000	12,4000	13,8000	15,7000	33,20	36,40	39,40	43,00	45,60
25	10,5000	11,5000	13,1000	14,6000	16,5000	34,40	37,70	40,60	44,30	46,90
26	11,2000	12,2000	13,8000	15,4000	17,3000	35,50	38,90	41,90	45,60	48,30
27	11,8000	12,9000	14,6000	16,2000	18,1000	36,70	40,10	43,20	47,00	49,60
28	12,5000	13,6000	15,3000	16,9000	18,9000	37,90	41,30	44,50	48,30	51,00
29	13,1000	14,3000	16,0000	17,7000	19,8000	39,10	42,60	45,70	49,60	52,30
30	13,8000	15,0000	16,8000	18,5000	20,6000	40,30	43,80	47,00	50,90	53,70

KRITICKÉ HODNOTY F – ROZDELENIA (Fisherovho – Snedecorovho)



$$P\big(F > f(\nu_1, \nu_2, \alpha)\big) = \alpha$$

α = 0,01

ν_2 \ ν_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	15,977020	15,52186	15,206860	14,975760	14,798890	14,65913	14,545900	14,452280	14,373590
5	11,391930	10,96702	10,672250	10,455510	10,289310	10,15776	10,051020	9,962648	9,888275
6	9,148301	8,745895	8,466125	8,259995	8,101651	7,976121	7,874119	7,789570	7,718333
7	7,846645	7,460435	7,191405	6,992833	6,840049	6,718752	6,620063	6,538166	6,469091
8	7,006077	6,631825	6,370681	6,177624	6,028870	5,910619	5,814294	5,734275	5,666719
9	6,422085	6,056941	5,801770	5,612865	5,467123	5,351129	5,256542	5,177890	5,111431
10	5,994339	5,636326	5,385811	5,200121	5,056693	4,942421	4,849147	4,771518	4,705870
11	5,668300	5,316009	5,069210	4,886072	4,744468	4,631540	4,539282	4,462436	4,397401
12	5,411951	5,064343	4,820574	4,639502	4,499365	4,387510	4,296054	4,219820	4,155258
13	5,205330	4,861621	4,620363	4,440997	4,302062	4,191078	4,100267	4,024518	3,960326
14	5,035378	4,694964	4,455820	4,277882	4,139946	4,029680	3,939396	3,864039	3,800141
15	4,893210	4,555614	4,318273	4,141546	4,004453	3,894788	3,804940	3,729902	3,666240
16	4,772578	4,437420	4,201634	4,025947	3,889572	3,780415	3,690931	3,616157	3,552687
17	4,668968	4,335939	4,101505	3,926719	3,790964	3,682242	3,593066	3,518512	3,455198
18	4,579036	4,247882	4,014637	3,840639	3,705422	3,597074	3,508162	3,433793	3,370608
19	4,500258	4,170767	3,938573	3,765269	3,630525	3,522503	3,433817	3,359605	3,296527
20	4,430690	4,102685	3,871427	3,698740	3,564412	3,456676	3,368186	3,294108	3,231120
21	4,368815	4,042144	3,811725	3,639590	3,505632	3,398147	3,309830	3,235867	3,172953
22	4,313429	3,987963	3,758301	3,586660	3,453034	3,345773	3,257606	3,183742	3,120891
23	4,263567	3,939195	3,710218	3,539024	3,405695	3,298634	3,210599	3,136822	3,074025
24	4,218445	3,895070	3,666717	3,495928	3,362867	3,255985	3,168069	3,094367	3,031615
25	4,177420	3,854957	3,627174	3,456754	3,323937	3,217217	3,129406	3,055771	2,993056
26	4,139960	3,818336	3,591075	3,420993	3,288399	3,181824	3,094108	3,020530	2,957848
27	4,105622	3,784770	3,557991	3,388219	3,255827	3,149385	3,061754	2,988228	2,925573
28	4,074032	3,753895	3,527559	3,358073	3,225868	3,119547	3,031992	2,958512	2,895881
29	4,044873	3,725399	3,499475	3,330252	3,198219	3,092009	3,004524	2,931084	2,868472
30	4,017877	3,699019	3,473477	3,304499	3,172624	3,066516	2,979094	2,905690	2,843095

$\alpha = 0{,}01$									
ν_2 \ ν_1	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
31	3,992811	3,674528	3,449341	3,280591	3,148863	3,042849	2,955484	2,882112	2,819532
32	3,969477	3,651731	3,426876	3,258338	3,126746	3,020818	2,933506	2,860163	2,797595
33	3,947701	3,630458	3,405914	3,237573	3,106108	3,000261	2,912997	2,839680	2,777122
34	3,927333	3,610562	3,386309	3,218154	3,086807	2,981033	2,893814	2,820521	2,757971
35	3,908241	3,591914	3,367935	3,199952	3,068716	2,963012	2,875833	2,802561	2,740018
36	3,890308	3,574399	3,350677	3,182858	3,051726	2,946086	2,858945	2,785692	2,723155
37	3,873433	3,557918	3,334440	3,166774	3,035738	2,930159	2,843053	2,769817	2,707284
38	3,857524	3,542383	3,319133	3,151612	3,020668	2,915145	2,828072	2,754851	2,692322
39	3,842502	3,527713	3,304681	3,137296	3,006438	2,900968	2,813925	2,740719	2,678192
40	3,828294	3,513840	3,291012	3,123757	2,992981	2,887560	2,800545	2,727352	2,664827
41	3,814835	3,500699	3,278067	3,110934	2,980234	2,874861	2,787871	2,714690	2,652167
42	3,802069	3,488235	3,265787	3,098771	2,968144	2,862814	2,775850	2,702679	2,640156
43	3,789942	3,476396	3,254125	3,087218	2,956661	2,851373	2,764431	2,691269	2,628747
44	3,778409	3,465137	3,243033	3,076232	2,945740	2,840491	2,753570	2,680418	2,617896
45	3,767427	3,454416	3,232472	3,065771	2,935341	2,830129	2,743229	2,670084	2,607562
46	3,756957	3,444196	3,222404	3,055798	2,925427	2,820251	2,733369	2,660232	2,597709
47	3,746964	3,434442	3,212796	3,046281	2,915966	2,810823	2,723960	2,650829	2,588305
48	3,737417	3,425123	3,203617	3,037188	2,906927	2,801816	2,714969	2,641845	2,579319
49	3,728286	3,416211	3,194838	3,028492	2,898283	2,793202	2,706371	2,633253	2,570725
50	3,719545	3,407680	3,186434	3,020168	2,890008	2,784956	2,698139	2,625026	2,562497
55	3,680897	3,369962	3,149283	2,983369	2,853424	2,748497	2,661744	2,588651	2,526110
60	3,649047	3,338884	3,118674	2,953049	2,823280	2,718454	2,631751	2,558670	2,496116
65	3,622349	3,312836	3,093020	2,927638	2,798015	2,693272	2,606607	2,533535	2,470966
70	3,599647	3,290689	3,071209	2,906032	2,776533	2,671859	2,585226	2,512158	2,449575
75	3,580106	3,271628	3,052437	2,887437	2,758044	2,653429	2,566821	2,493756	2,431158
80	3,563110	3,255049	3,036111	2,871265	2,741964	2,637398	2,550812	2,477747	2,415136
85	3,548191	3,240499	3,021782	2,857072	2,727851	2,623328	2,536759	2,463695	2,401070
90	3,534992	3,227626	3,009106	2,844515	2,715364	2,610879	2,524326	2,451260	2,388623
95	3,523230	3,216156	2,997811	2,833327	2,704238	2,599787	2,513246	2,440179	2,377530
100	3,512684	3,205872	2,987684	2,823295	2,694263	2,589841	2,503311	2,430242	2,367582
105	3,503174	3,196599	2,978553	2,814250	2,685268	2,580872	2,494352	2,421281	2,358610
110	3,494555	3,188194	2,970278	2,806052	2,677115	2,572743	2,486232	2,413158	2,350478
115	3,486707	3,180542	2,962743	2,798588	2,669692	2,565341	2,478838	2,405762	2,343072
120	3,479531	3,173545	2,955854	2,791764	2,662906	2,558574	2,472077	2,398999	2,336300
125	3,472945	3,167124	2,949531	2,785500	2,656676	2,552362	2,465871	2,392791	2,330083
129	3,468053	3,162354	2,944835	2,780848	2,652050	2,547748	2,461261	2,388179	2,325465

$\alpha = 0{,}01$									
v_2 \ v_1	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**60**	**80**	**100**
4	14,19820	14,01961	13,92906	13,83766	13,74538	13,68958	13,65220	13,60526	13,57699
5	9,722219	9,552646	9,466471	9,379329	9,291189	9,237811	9,202015	9,157029	9,129907
6	7,558994	7,395832	7,312721	7,228533	7,143222	7,091475	7,056737	7,013037	6,986667
7	6,314331	6,155438	6,074319	5,992010	5,908449	5,857682	5,823566	5,780605	5,754657
8	5,515125	5,359095	5,279264	5,198130	5,115610	5,065398	5,031618	4,989038	4,963296
9	4,962078	4,807995	4,728998	4,648582	4,566649	4,516715	4,483087	4,440656	4,414980
10	4,558140	4,405395	4,326929	4,246933	4,165287	4,115452	4,081855	4,039422	4,013719
11	4,250867	4,099046	4,020910	3,941132	3,859573	3,809716	3,776071	3,733533	3,707744
12	4,009619	3,858433	3,780485	3,700789	3,619181	3,569222	3,535473	3,492763	3,466845
13	3,815365	3,664609	3,586753	3,507042	3,425293	3,375176	3,341287	3,298357	3,272282
14	3,655697	3,505222	3,427387	3,347596	3,265641	3,215328	3,181274	3,138094	3,111842
15	3,522194	3,371892	3,294029	3,214110	3,131906	3,081371	3,047135	3,003683	2,977242
16	3,408947	3,258737	3,180811	3,100733	3,018248	2,967476	2,933046	2,889308	2,862669
17	3,311694	3,161518	3,083502	3,003241	2,920458	2,869437	2,834806	2,790774	2,763932
18	3,227286	3,077097	2,998974	2,918516	2,835420	2,784144	2,749309	2,704978	2,677930
19	3,153343	3,003109	2,924866	2,844201	2,760786	2,709251	2,674211	2,629578	2,602323
20	3,088041	2,937735	2,859363	2,778485	2,694749	2,642954	2,607708	2,562774	2,535313
21	3,029951	2,879556	2,801050	2,719955	2,635896	2,583844	2,548393	2,503160	2,475492
22	2,977946	2,827447	2,748802	2,667490	2,583111	2,530803	2,495149	2,449619	2,421747
23	2,931118	2,780504	2,701720	2,620191	2,535496	2,482935	2,447081	2,401258	2,373184
24	2,888732	2,737997	2,659072	2,577329	2,492321	2,439512	2,403461	2,357349	2,329076
25	2,850186	2,699325	2,620260	2,538305	2,452990	2,399937	2,363691	2,317296	2,288826
26	2,814982	2,663991	2,584787	2,502624	2,417007	2,363715	2,327279	2,280604	2,251941
27	2,782703	2,631580	2,552239	2,469872	2,383960	2,330434	2,293812	2,246863	2,218009
28	2,753000	2,601744	2,522268	2,439701	2,353501	2,299745	2,262941	2,215723	2,186682
29	2,725577	2,574188	2,494579	2,411817	2,325335	2,271355	2,234372	2,186890	2,157666
30	2,700180	2,548659	2,468921	2,385967	2,299211	2,245012	2,207854	2,160114	2,130710
31	2,676594	2,524942	2,445077	2,361937	2,274913	2,220500	2,183171	2,135178	2,105597
32	2,654632	2,502850	2,422861	2,339539	2,252253	2,197632	2,160136	2,111895	2,082141
33	2,634132	2,482222	2,402111	2,318613	2,231072	2,176247	2,138588	2,090105	2,060180
34	2,614952	2,462916	2,382687	2,299016	2,211227	2,156203	2,118384	2,069664	2,039573
35	2,596969	2,444810	2,364466	2,280626	2,192595	2,137377	2,099403	2,050450	2,020195
36	2,580074	2,427794	2,347337	2,263334	2,175068	2,119661	2,081534	2,032354	2,001938
37	2,564172	2,411773	2,331207	2,247044	2,158548	2,102957	2,064681	2,015278	1,984705
38	2,549177	2,396662	2,315989	2,231671	2,142952	2,087180	2,048759	1,999138	1,968411
39	2,535014	2,382385	2,301608	2,217140	2,128202	2,072255	2,033692	1,983858	1,952979
40	2,521616	2,368876	2,287998	2,203382	2,114232	2,058113	2,019411	1,969368	1,938341

α = 0,01									
v_2 \ v_1	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**60**	**80**	**100**
41	2,508922	2,356074	2,275097	2,190338	2,100981	2,044695	2,005857	1,955609	1,924436
42	2,496878	2,343924	2,262851	2,177953	2,088394	2,031944	1,992974	1,942526	1,911210
43	2,485436	2,332378	2,251211	2,166177	2,076423	2,019813	1,980713	1,930069	1,898612
44	2,474552	2,321392	2,240134	2,154968	2,065022	2,008257	1,969029	1,918193	1,886599
45	2,464185	2,310926	2,229580	2,144285	2,054151	1,997234	1,957883	1,906859	1,875129
46	2,454300	2,300945	2,219512	2,134091	2,043775	1,986709	1,947237	1,896028	1,864166
47	2,444863	2,291414	2,209897	2,124354	2,033860	1,976649	1,937058	1,885669	1,853677
48	2,435846	2,282305	2,200705	2,115043	2,024376	1,967023	1,927316	1,875749	1,843630
49	2,427220	2,273589	2,191910	2,106132	2,015295	1,957803	1,917982	1,866242	1,833997
50	2,418961	2,265243	2,183485	2,097593	2,006592	1,948964	1,909032	1,857122	1,824753
55	2,382427	2,2283000	2,146180	2,059761	1,967989	1,909727	1,869272	1,816559	1,783606
60	2,352297	2,197806	2,115364	2,028479	1,936018	1,877187	1,836259	1,782816	1,749328
65	2,327023	2,172206	2,089479	2,002175	1,909099	1,849753	1,808397	1,754286	1,720305
70	2,305517	2,150410	2,067425	1,979748	1,886115	1,826304	1,784557	1,729835	1,695398
75	2,286997	2,131626	2,048411	1,960396	1,866260	1,806024	1,763920	1,708635	1,673777
80	2,270879	2,115271	2,031847	1,943526	1,848932	1,788309	1,745877	1,690072	1,654822
85	2,256726	2,100901	2,017288	1,928688	1,833677	1,772697	1,729964	1,673677	1,638062
90	2,244198	2,088176	2,004390	1,915536	1,820141	1,758834	1,715821	1,659088	1,623133
95	2,233031	2,076829	1,992884	1,903797	1,808050	1,746440	1,703168	1,646019	1,609745
100	2,223015	2,066646	1,982556	1,893254	1,797181	1,735292	1,691780	1,634242	1,597669
105	2,213979	2,057458	1,973234	1,883733	1,787360	1,725210	1,681474	1,623572	1,586719
110	2,205788	2,049125	1,964777	1,875093	1,778440	1,716047	1,672102	1,613860	1,576742
115	2,198327	2,041533	1,957070	1,867216	1,770302	1,707684	1,663542	1,604980	1,567613
120	2,191504	2,034588	1,950018	1,860005	1,762849	1,700018	1,655693	1,596830	1,559227
125	2,185240	2,028210	1,943540	1,853380	1,755996	1,692967	1,648469	1,589322	1,551495
129	2,180586	2,023471	1,938726	1,848454	1,750899	1,687720	1,643091	1,583728	1,545731

$\alpha = 0{,}05$									
v_2 \ v_1	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
4	6,388233	6,256057	6,163132	6,094211	6,041044	5,998779	5,964371	5,935813	5,911729
5	5,192168	5,050329	4,950288	4,875872	4,818320	4,772466	4,735063	4,703967	4,677704
6	4,533677	4,387374	4,283866	4,206658	4,146804	4,099016	4,059963	4,027442	3,999935
7	4,120312	3,971523	3,865969	3,787044	3,725725	3,676675	3,636523	3,603037	3,574676
8	3,837853	3,687499	3,580580	3,500464	3,438101	3,388130	3,347163	3,312951	3,283939
9	3,633089	3,481659	3,373754	3,292746	3,229583	3,178893	3,137280	3,102485	3,072947
10	3,478050	3,325835	3,217175	3,135465	3,071658	3,020383	2,978237	2,942957	2,912977
11	3,356690	3,203874	3,094613	3,012330	2,947990	2,896223	2,853625	2,817930	2,787569
12	3,259167	3,105875	2,996120	2,913358	2,848565	2,796375	2,753387	2,717331	2,686637
13	3,179117	3,025438	2,915269	2,832098	2,766913	2,714356	2,671024	2,634650	2,603661
14	3,112250	2,958249	2,847726	2,764199	2,698672	2,645791	2,602155	2,565497	2,534243
15	3,055568	2,901295	2,790465	2,706627	2,640797	2,587626	2,543719	2,506806	2,475313
16	3,006917	2,852409	2,741311	2,657197	2,591096	2,537667	2,493513	2,456369	2,424660
17	2,964708	2,809996	2,698660	2,614299	2,547955	2,494291	2,449916	2,412561	2,380654
18	2,927744	2,772853	2,661305	2,576722	2,510158	2,456281	2,411702	2,374156	2,342067
19	2,895107	2,740058	2,628318	2,543534	2,476770	2,422699	2,377934	2,340210	2,307954
20	2,866081	2,710890	2,598978	2,514011	2,447064	2,392814	2,347878	2,309991	2,277581
21	2,840100	2,684781	2,572712	2,487578	2,420462	2,366048	2,320953	2,282916	2,250362
22	2,816708	2,661274	2,549061	2,463774	2,396503	2,341937	2,296696	2,258518	2,225831
23	2,795539	2,639999	2,527655	2,442226	2,374812	2,320105	2,274728	2,236419	2,203607
24	2,776289	2,620654	2,508189	2,422629	2,355081	2,300244	2,254739	2,216309	2,183380
25	2,758710	2,602987	2,490410	2,404728	2,337057	2,282097	2,236474	2,197929	2,164891
26	2,742594	2,586790	2,474109	2,388314	2,320527	2,265453	2,219718	2,181067	2,147926
27	2,727765	2,571886	2,459108	2,373208	2,305313	2,250131	2,204292	2,165540	2,132303
28	2,714076	2,558127	2,445259	2,359260	2,291264	2,235982	2,190044	2,151197	2,117869
29	2,701399	2,545386	2,432434	2,346342	2,278251	2,222874	2,176844	2,137908	2,104493
30	2,689628	2,533555	2,420523	2,334344	2,266163	2,210697	2,164580	2,125559	2,092063
31	2,678667	2,522538	2,409432	2,323171	2,254906	2,199355	2,153156	2,114054	2,080482
32	2,668437	2,512255	2,399080	2,312741	2,244396	2,188766	2,142488	2,103311	2,069665
33	2,658867	2,502635	2,389394	2,302982	2,234562	2,178856	2,132504	2,093254	2,059539
34	2,649894	2,493616	2,380313	2,293832	2,225340	2,169562	2,123140	2,083822	2,050040
35	2,641465	2,485143	2,371781	2,285235	2,216675	2,160829	2,114300	2,074956	2,041111
36	2,633532	2,477169	2,363751	2,277143	2,208518	2,152607	2,106054	2,066608	2,032703
37	2,626052	2,469650	2,356179	2,269512	2,200826	2,144853	2,098239	2,058734	2,024771
38	2,618988	2,462548	2,349027	2,262304	2,193559	2,137528	2,090856	2,051294	2,017276
39	2,612306	2,455831	2,342262	2,255485	2,186685	2,130597	2,083869	2,044253	2,010183
40	2,605975	2,449466	2,335852	2,249024	2,180107	2,124029	2,077248	2,037580	2,003459

$\alpha = 0{,}05$									
v_2 \ v_1	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
41	2,599969	2,443429	2,329771	2,242894	2,173989	2,117797	2,070965	2,031247	1,997078
42	2,594263	2,437693	2,323994	2,237070	2,168117	2,111875	2,064994	2,025229	1,991013
43	2,588836	2,432236	2,318498	2,231530	2,162530	2,106241	2,059313	2,019502	1,985242
44	2,583667	2,427040	2,313264	2,226253	2,157208	2,100873	2,053901	2,014046	1,979743
45	2,578739	2,422085	2,308273	2,221221	2,152133	2,095755	2,048739	2,008842	1,974498
46	2,574035	2,417356	2,303509	2,216417	2,147288	2,090868	2,043811	2,003873	1,969490
47	2,569540	2,412837	2,298956	2,211827	2,142658	2,086198	2,039101	1,999124	1,964702
48	2,565241	2,408514	2,294601	2,207436	2,138229	2,081730	2,034595	1,994580	1,960121
49	2,561124	2,404375	2,290432	2,203232	2,133988	2,077452	2,030279	1,990228	1,955734
50	2,557179	2,400409	2,286436	2,199202	2,129923	2,073351	2,026143	1,986056	1,951528
55	2,539689	2,382823	2,268717	2,181333	2,111894	2,055161	2,007792	1,967547	1,932863
60	2,525215	2,368270	2,254053	2,166541	2,096968	2,040098	1,992592	1,952212	1,917396
65	2,513040	2,356028	2,241716	2,154095	2,084407	2,027419	1,979796	1,939300	1,904370
70	2,502656	2,345586	2,231192	2,143478	2,073690	2,016601	1,968875	1,928278	1,893248
75	2,493696	2,336576	2,222110	2,134314	2,064439	2,00726	1,959445	1,918759	1,883642
80	2,485885	2,328721	2,214193	2,126324	2,056373	1,999115	1,95122	1,910456	1,875262
85	2,479015	2,321812	2,207229	2,119296	2,049276	1,991949	1,943984	1,903149	1,867886
90	2,472927	2,315689	2,201056	2,113067	2,042986	1,985595	1,937567	1,896669	1,861344
95	2,467494	2,310225	2,195548	2,107506	2,037370	1,979923	1,931838	1,890884	1,855503
100	2,462615	2,305318	2,190601	2,102513	2,032328	1,974829	1,926692	1,885687	1,850255
105	2,458210	2,300888	2,186134	2,098005	2,027774	1,970229	1,922045	1,880993	1,845515
110	2,454213	2,296868	2,182082	2,093913	2,023641	1,966054	1,917827	1,876732	1,841212
115	2,450571	2,293205	2,178387	2,090184	2,019874	1,962247	1,913982	1,872847	1,837288
120	2,447237	2,289851	2,175006	2,086770	2,016426	1,958763	1,910461	1,869290	1,833695
125	2,444174	2,286771	2,171900	2,083634	2,013257	1,955562	1,907226	1,866022	1,830394
129	2,441897	2,284481	2,169591	2,081303	2,010902	1,953182	1,904821	1,863592	1,827939

$\alpha = 0{,}05$									
$v_2 \backslash v_1$	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**60**	**80**	**100**
4	5,857805	5,802542	5,774389	5,745877	5,716998	5,699492	5,687744	5,672973	5,664064
5	4,618759	4,558131	4,527153	4,495712	4,463793	4,444406	4,431380	4,414982	4,405081
6	3,938058	3,874189	3,841457	3,808164	3,774286	3,753668	3,739797	3,722314	3,711745
7	3,510740	3,444525	3,410494	3,375808	3,340430	3,318856	3,304323	3,285983	3,274885
8	3,218406	3,150324	3,115240	3,079406	3,042778	3,020398	3,005303	2,986230	2,974674
9	3,006102	2,936455	2,900474	2,863652	2,825933	2,802843	2,787249	2,767522	2,755557
10	2,845017	2,774016	2,737248	2,699551	2,660855	2,637124	2,621077	2,600753	2,588412
11	2,718640	2,646445	2,608974	2,570489	2,530905	2,506587	2,490123	2,469246	2,456555
12	2,616851	2,543588	2,505482	2,466279	2,425880	2,401018	2,384166	2,362772	2,349753
13	2,533110	2,458882	2,420196	2,380334	2,339180	2,313811	2,296596	2,274716	2,261387
14	2,463003	2,387896	2,348678	2,308207	2,266350	2,240507	2,222950	2,200611	2,186988
15	2,403447	2,327535	2,287826	2,246789	2,204276	2,177985	2,160105	2,137331	2,123428
16	2,352223	2,275570	2,235405	2,193841	2,150711	2,123999	2,105813	2,082625	2,068455
17	2,307693	2,230354	2,189766	2,147708	2,103998	2,076888	2,058411	2,034828	2,020401
18	2,268622	2,190648	2,149665	2,107143	2,062885	2,035397	2,016643	1,992682	1,978010
19	2,234063	2,155497	2,114143	2,071186	2,026410	1,998561	1,979544	1,955221	1,940314
20	2,203274	2,124155	2,082454	2,039086	1,993819	1,965628	1,946358	1,921689	1,906554
21	2,175670	2,096033	2,054004	2,010248	1,964515	1,935997	1,916486	1,891483	1,876131
22	2,150778	2,070656	2,028319	1,984195	1,938018	1,909188	1,889445	1,864123	1,848559
23	2,128217	2,047638	2,005009	1,960537	1,913938	1,884809	1,864844	1,839213	1,823446
24	2,107673	2,026664	1,983760	1,938957	1,891955	1,862539	1,842360	1,816432	1,800468
25	2,088887	2,007471	1,964306	1,919188	1,871801	1,842111	1,821727	1,795512	1,779357
26	2,071642	1,989842	1,946428	1,901010	1,853255	1,823301	1,802719	1,776228	1,759888
27	2,055755	1,973590	1,929940	1,884236	1,836129	1,805922	1,785149	1,75839	1,741871
28	2,041071	1,958561	1,914686	1,868709	1,820263	1,789813	1,768857	1,741838	1,725146
29	2,027458	1,944620	1,900531	1,854293	1,805523	1,774838	1,753704	1,726435	1,709574
30	2,014804	1,931653	1,887360	1,840872	1,791790	1,760879	1,739574	1,712062	1,695037
31	2,003009	1,919561	1,875073	1,828345	1,778964	1,747835	1,726363	1,698616	1,681432
32	1,991990	1,908258	1,863582	1,816625	1,766956	1,735616	1,713984	1,686009	1,668670
33	1,981671	1,897669	1,852814	1,805636	1,755689	1,724147	1,702359	1,674162	1,656673
34	1,971988	1,887727	1,842701	1,795311	1,745097	1,713358	1,691420	1,663007	1,645371
35	1,962884	1,878375	1,833184	1,785591	1,735119	1,703190	1,681106	1,652484	1,634706
36	1,954308	1,869562	1,824213	1,776424	1,725703	1,693590	1,671365	1,642539	1,624621
37	1,946216	1,861242	1,815742	1,767764	1,716803	1,684511	1,662149	1,633125	1,615072
38	1,938568	1,853375	1,807729	1,759569	1,708376	1,675911	1,653416	1,624200	1,606014
39	1,931327	1,845925	1,800138	1,751803	1,700385	1,667753	1,645128	1,615724	1,597409
40	1,924463	1,838859	1,792937	1,744432	1,692797	1,660003	1,637252	1,607666	1,589224

$\alpha = 0{,}05$									
v_2 \ v_1	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**60**	**80**	**100**
41	1,917946	1,832149	1,786096	1,737427	1,685582	1,652631	1,629757	1,599993	1,581428
42	1,911751	1,825767	1,779588	1,730762	1,678713	1,645608	1,622615	1,592678	1,573993
43	1,905855	1,819691	1,773391	1,724411	1,672165	1,638912	1,615803	1,585696	1,566893
44	1,900236	1,813898	1,767481	1,718354	1,665916	1,632518	1,609296	1,579024	1,560106
45	1,894875	1,808370	1,761839	1,712569	1,659945	1,626407	1,603075	1,572642	1,553612
46	1,889755	1,803089	1,756448	1,707039	1,654235	1,620560	1,597122	1,566531	1,547390
47	1,884859	1,798038	1,751291	1,701748	1,648769	1,614961	1,591417	1,560673	1,541425
48	1,880175	1,793202	1,746353	1,696679	1,643530	1,609593	1,585947	1,555053	1,535699
49	1,875687	1,788569	1,741620	1,691820	1,638505	1,604442	1,580697	1,549656	1,530199
50	1,871384	1,784125	1,737080	1,687157	1,633682	1,599495	1,575654	1,544469	1,524911
55	1,852280	1,764379	1,716893	1,666408	1,612191	1,577435	1,553142	1,521285	1,501251
60	1,836437	1,747984	1,700117	1,649141	1,594273	1,559011	1,534314	1,501853	1,481386
65	1,823086	1,734152	1,685951	1,634544	1,579098	1,543385	1,518326	1,485316	1,464455
70	1,811681	1,722325	1,673829	1,622040	1,566078	1,52996	1,504572	1,471064	1,449840
75	1,801825	1,712096	1,663338	1,611207	1,554782	1,518297	1,492612	1,458647	1,437090
80	1,793222	1,703160	1,654168	1,601730	1,544887	1,508069	1,482111	1,447728	1,425862
85	1,785647	1,695287	1,646084	1,593369	1,536147	1,499025	1,472817	1,438048	1,415896
90	1,778927	1,688298	1,638904	1,585937	1,528369	1,490968	1,464531	1,429404	1,406986
95	1,772924	1,682051	1,632483	1,579288	1,521402	1,483745	1,457096	1,421637	1,398970
100	1,767530	1,676434	1,626708	1,573302	1,515125	1,477231	1,450386	1,414618	1,391720
105	1,762656	1,671357	1,621485	1,567886	1,509441	1,471327	1,444299	1,408244	1,385127
110	1,758230	1,666744	1,616739	1,562962	1,504268	1,465951	1,438753	1,402428	1,379106
115	1,754193	1,662536	1,612407	1,558465	1,499540	1,461034	1,433676	1,397099	1,373585
120	1,750497	1,658680	1,608437	1,554343	1,495202	1,456519	1,429013	1,392198	1,368503
125	1,747099	1,655135	1,604786	1,550549	1,491208	1,452360	1,424714	1,387676	1,363808
129	1,744573	1,652498	1,602069	1,547725	1,488234	1,449260	1,421509	1,384301	1,360303

Hodnoty ***k*** pre dvojstranný štatistický toleranččný interval									
$1-\alpha$	**0,90**			**0,95**			**0,99**		
n \ ***p***	**0,90**	**0,95**	**0,99**	**0,90**	**0,95**	**0,99**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
2	15,5124	18,2208	23,4235	31,0923	36,5192	46,7452	155,5690	182,7200	234,8769
3	5,7881	6,8233	8,8186	8,3060	9,7888	12,6471	18,7825	22,1308	28,5857
4	4,1571	4,9127	6,3722	5,3681	6,3411	8,2207	9,4162	11,1178	14,4054
5	3,4993	4,1425	5,3868	4,2907	5,0769	6,5980	6,6550	7,8698	10,2201
6	3,1406	3,7226	4,8498	3,7326	4,4222	5,7578	5,3832	6,3735	8,2916
7	2,9128	3,4558	4,5085	3,3896	4,0196	5,2411	4,6576	5,5196	7,1907
8	2,7542	3,2699	4,2707	3,1561	3,7456	4,8893	4,1887	4,9677	6,4790
9	2,6368	3,1323	4,0945	2,9861	3,5459	4,6328	3,8602	4,5810	5,9802
10	2,5460	3,0258	3,9580	2,8564	3,3935	4,4370	3,6167	4,2942	5,6102
11	2,4734	2,9406	3,8488	2,7537	3,2728	4,2818	3,4286	4,0726	5,3242
12	2,4140	2,8707	3,7591	2,6703	3,1747	4,1556	3,2786	3,8959	5,0960
13	2,3643	2,8123	3,6840	2,6011	3,0932	4,0506	3,1561	3,7514	4,9093
14	2,3220	2,7625	3,6201	2,5425	3,0242	3,9617	3,0538	3,6309	4,7535
15	2,2855	2,7196	3,5649	2,4922	2,9650	3,8853	2,9672	3,5286	4,6212
16	2,2537	2,6821	3,5166	2,4486	2,9135	3,8189	2,8926	3,4406	4,5074
17	2,2257	2,6491	3,4741	2,4103	2,8684	3,7606	2,8278	3,3641	4,4084
18	2,2008	2,6197	3,4362	2,3764	2,8283	3,7089	2,7708	3,2968	4,3212
19	2,1785	2,5934	3,4122	2,3461	2,7926	3,6626	2,7203	3,2371	4,2439
20	2,1584	2,5697	3,3716	2,3188	2,7604	3,6210	2,6752	3,1838	4,1748
21	2,1401	2,5482	3,3437	2,2942	2,7313	3,5834	2,6347	3,1359	4,1126
22	2,1235	2,5285	3,3183	2,2718	2,7048	3,5490	2,5979	3,0924	4,0563
23	2,1083	2,5105	3,2951	2,2516	2,6806	3,5177	2,5645	3,0529	4,0050
24	2,0943	2,4940	3,2736	2,2325	2,6583	3,4888	2,5340	3,0168	3,9580
25	2,0813	2,4787	3,2538	2,2151	2,6378	3,4622	2,5060	2,9836	3,9149
30	2,0289	2,4166	3,1734	2,1452	2,5549	3,3546	2,3940	2,8510	3,7425
40	1,9611	2,4479	3,0688	2,0624	2,4484	3,2160	2,2529	2,6836	3,5144
50	1,9184	2,3948	3,0027	1,9991	2,3816	3,1288	2,1660	2,5805	3,3898
60	1,8885	2,2500	2,9564	1,9599	2,3351	3,0681	2,1063	2,5095	3,2970
70	1,8662	2,2236	2,9218	1,9308	2,3005	3,0228	2,0623	2,4571	3,2284
80	1,8489	2,2029	2,8947	1,9082	2,2736	2,9875	2,0282	2,4165	3,1753
90	1,8348	2,1862	2,8729	1,8899	2,2519	2,9591	2,0009	2,3840	3,1327
100	1,8232	2,1724	2,8548	1,8749	2,2339	2,9356	1,9784	2,3573	3,0976

Hodnoty *k* pre jednostranný štatistický tolerančný interval									
1 − α	**0,90**			**0,95**			**0,99**		
n \ ***p***	**0,90**	**0,95**	**0,99**	**0,90**	**0,95**	**0,99**	**0,90**	**0,95**	**0,99**
2	10,2528	13,0898	18,5001	20,5815	25,2597	37,0936	103,0287	131,4263	185,6170
3	4,2582	5,3115	7,3405	6,1553	7,6560	10,5528	13,9955	17,3702	23,8956
4	3,1879	3,9566	5,4383	4,1620	5,1439	7,0424	7,3799	9,0835	12,3873
5	2,7424	3,3999	4,6660	3,4067	4,2027	5,7411	5,3618	6,5784	8,9391
6	2,4937	3,0919	4,2426	3,0063	3,7077	5,0620	4,4111	5,4056	7,3346
7	2,3327	2,8938	3,9721	2,7555	3,3995	4,6418	3,8592	4,7279	6,4120
8	2,2186	2,7543	3,7826	2,5820	3,1873	4,3539	3,4973	4,2853	5,8118
9	2,1329	2,6500	3,6415	2,4538	3,0313	4,1431	3,2405	3,9723	5,3889
10	2,0657	2,5684	3,5317	2,3547	2,9110	3,9812	3,0480	3,7384	5,0738
11	2,0113	2,5027	3,4435	2,2754	2,8150	3,8524	2,8977	3,5562	4,8291
12	1,9662	2,4483	3,3707	2,2102	2,7364	3,7471	2,7768	3,4100	4,6331
13	1,9281	2,4025	3,3095	2,1555	2,6706	3,6592	2,6770	3,2896	4,4721
14	1,8954	2,3632	3,2572	2,1088	2,6145	3,5846	2,5932	3,1886	4,3372
15	1,8669	2,3290	3,2119	2,0684	2,5661	3,5202	2,5215	3,1024	4,2224
16	1,8418	2,2990	3,1721	2,0330	2,5237	3,4640	2,4595	3,0279	4,1233
17	1,8195	2,2725	3,1369	2,0018	2,4863	3,4145	2,4051	2,9628	4,0367
18	1,7996	2,2487	3,1055	1,9738	2,4530	3,3704	2,3571	2,9052	3,9604
19	1,7816	2,2273	3,0772	1,9487	2,4231	3,3309	2,3142	2,8539	3,8925
20	1,7653	2,2078	3,0516	1,9260	2,3961	3,2952	2,2757	2,8079	3,8316
21	1,7503	2,1901	3,0283	1,9054	2,3715	3,2628	2,2409	2,7663	3,7767
22	1,7367	2,1739	3,0069	1,8865	2,3490	3,2332	2,2092	2,7286	3,7268
23	1,7241	2,1590	2,9873	1,8691	2,3284	3,2061	2,1802	2,6941	3,6813
24	1,7124	2,1452	2,9692	1,85300	2,3093	3,1811	2,1536	2,6624	3,6396
25	1,70161	2,1323	2,9524	1,8382	2,2917	3,1580	2,1291	2,6332	3,6011
30	6571	2,0799	2,8838	1,7774	2,2199	3,0640	2,0299	2,5155	3,4466
40	1,5979	2,0103	2,7932	1,6972	2,1255	2,9410	1,9018	2,3642	3,2486
50	1,5595	1,9653	2,7349	1,6456	2,0650	2,8625	1,8208	2,2689	3,1247
60	1,5321	1,9333	2,6936	1,6090	2,0222	2,8071	1,7641	2,2024	3,0383
70	1,5113	1,9091	2,6623	1,5813	1,9899	2,7654	1,7216	2,1527	2,9740
80	1,4948	1,8899	2,6377	1,5594	1,9645	2,7327	1,6883	2,1138	2,9238
90	1,4813	1,8743	2,6177	1,5416	1,9438	2,7061	1,6614	2,0824	2,8832
100	1,4701	1,8613	2,6010	1,5268	1,9266	2,6840	1,6390	2,0563	2,8497

SHAPIROOV – WILKOV TEST – koeficienty $a_i(n)$

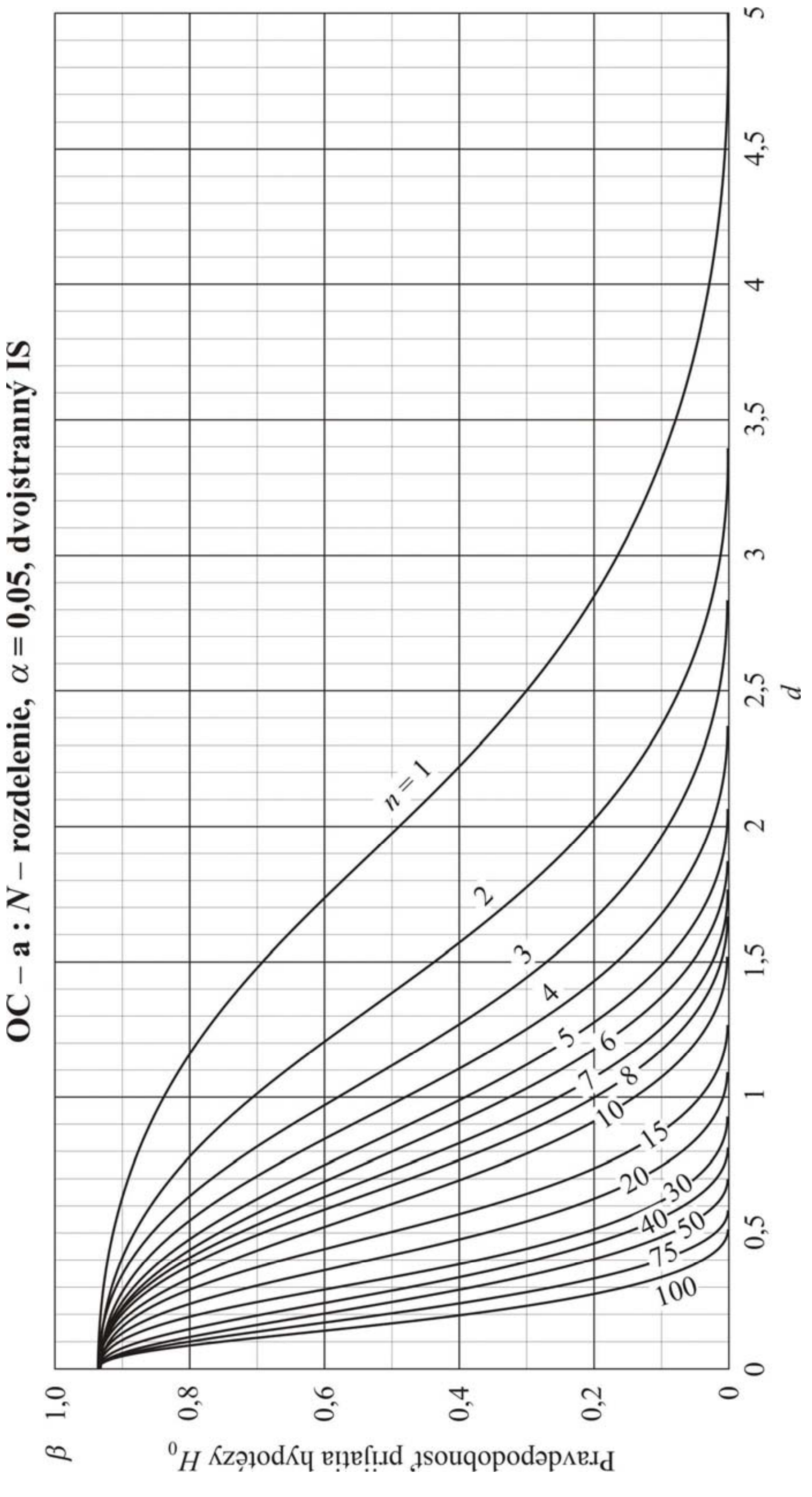
i \ n	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251
2	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318
3	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460
4	0	0,0561	0,0947	0,1224	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802
5	0	0	0	0,0399	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240
6	0	0	0	0	0	0,0303	0,0539	0,0727
7	0	0	0	0	0	0	0	0,0240
i \ n	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
1	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734	0,4643	0,4590
2	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211	0,3185	0,3156
3	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2565	0,2565	0,2578	0,2571
4	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2085	0,2085	0,2119	0,2131
5	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1686	0,1686	0,1736	0,1764
6	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1334	0,1334	0,1399	0, 1443
7	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,1013	0,1013	0,1092	0,1150
8	0	0,0196	0,0359	0,0496	0,0711	0,0711	0,0804	0,0878
9	0	0	0	0,0163	0,1422	0,0422	0,0530	0,0618
10	0	0	0	0	0	0,0140	0,0263	0,0368
11	0	0	0	0	0	0	0	0,0122
i \ n	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870
6	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	0,0228	0,0320	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12	0	0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13	0	0	0	0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381
14	0	0	0	0	0	0,0084	0,0159	0,0227
15	0	0	0	0	0	0	0	0,0076

SHAPIROOV – WILKOV TEST

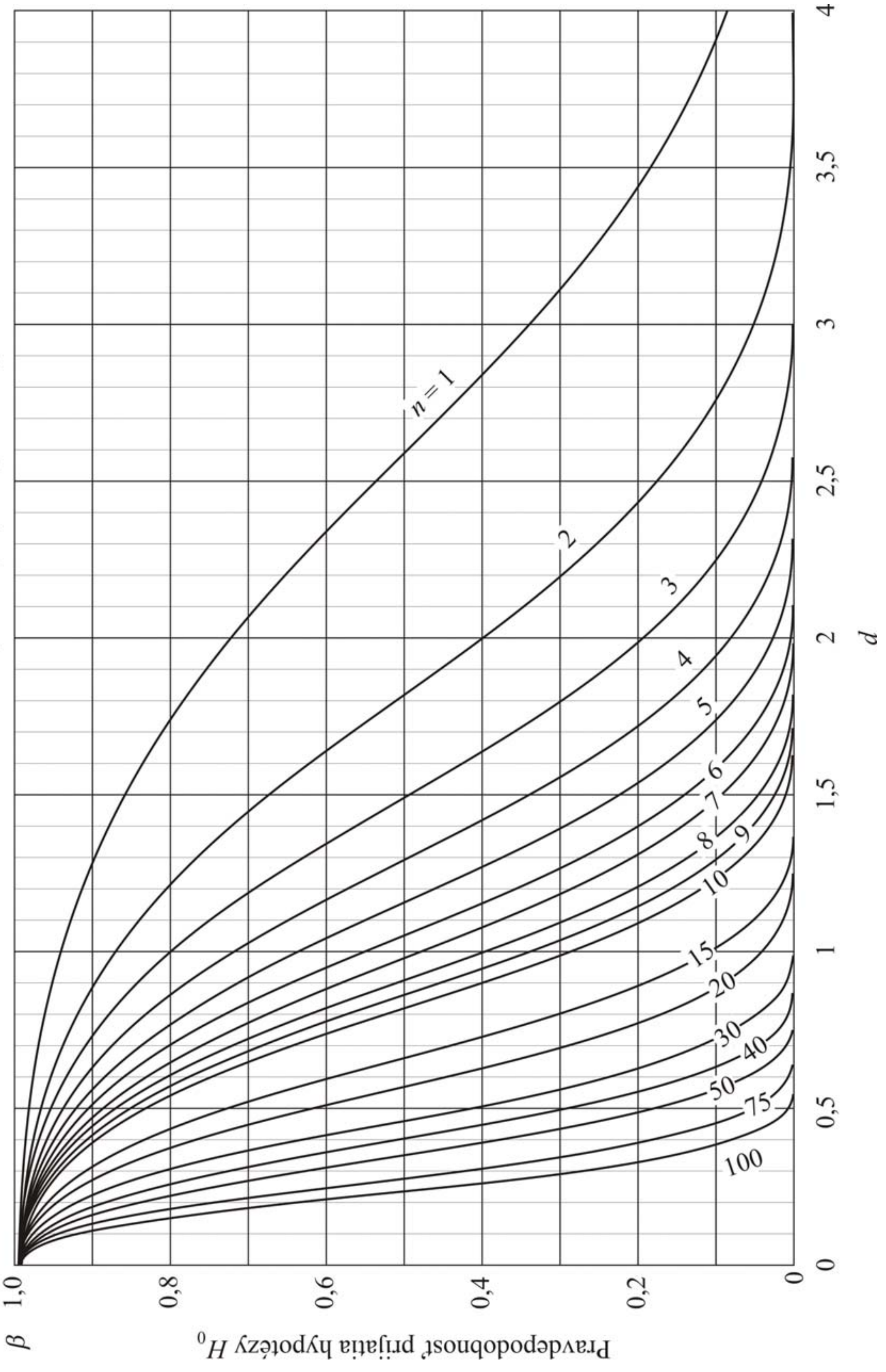
Kvantily $w_\alpha(n)$ **Shapiroovej – Wilkovej štatistiky** $\boldsymbol{W}$**:** $P(W(n) \le W_\alpha(n)) = \alpha$

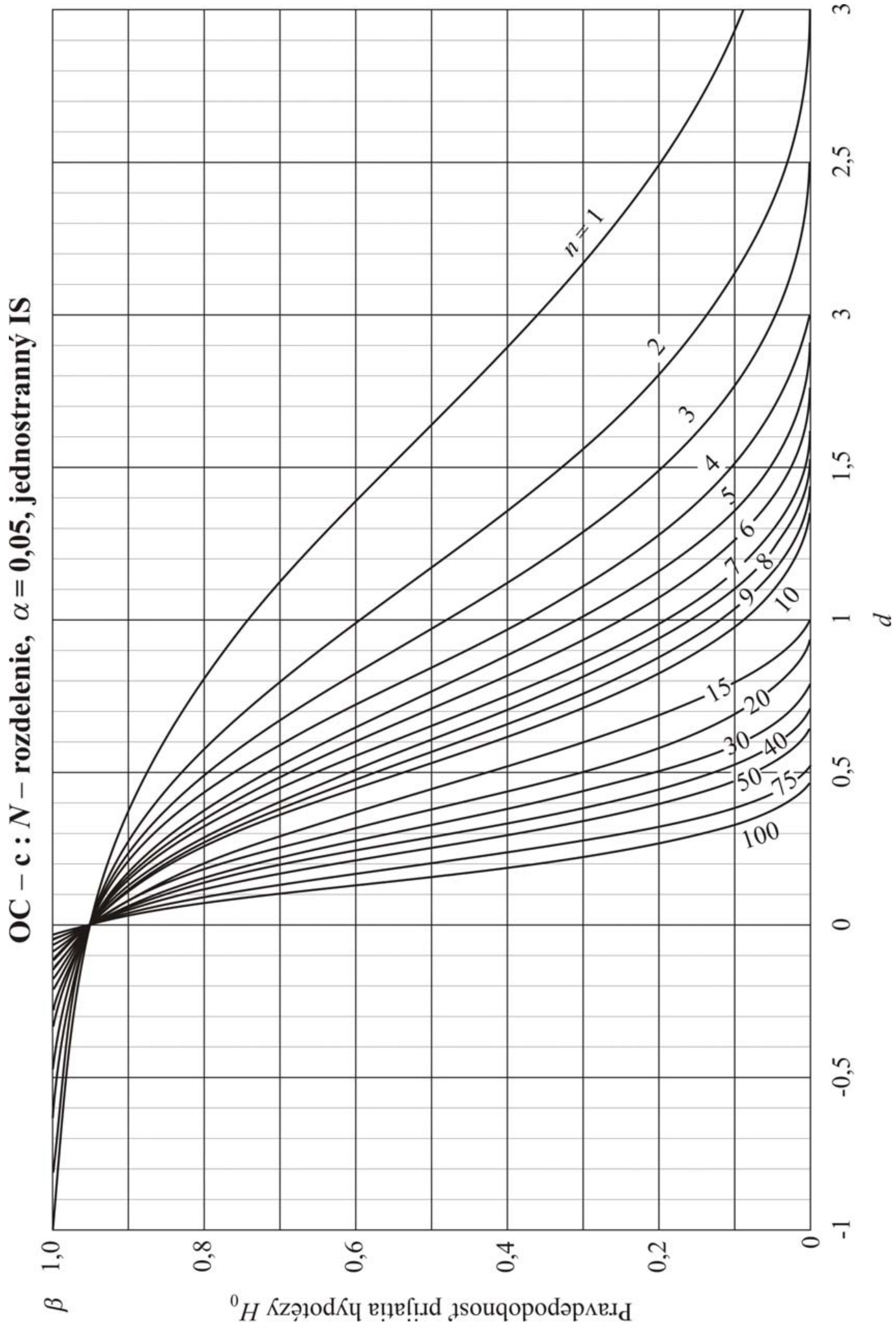
n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$
7	0,730	0,803	**15**	0,835	0,881	**23**	0,881	0,914
8	0,749	0,818	**16**	0,844	0,887	**24**	0,884	0,916
9	0,764	0,826	**17**	0,851	0,892	**25**	0,888	0,918
10	0,781	0,842	**18**	0,858	0,897	**26**	0,891	0,920
11	0,792	0,850	**19**	0,863	0,901	**27**	0,894	0,923
12	0,805	0,859	**20**	0,868	0,905	**28**	0,896	0,924
13	0,814	0,866	**21**	0,873	0,908	**29**	0,898	0,926
14	0,825	0,874	**22**	0,878	0,911	**30**	0,900	0,927

KRIVKY OPERATÍVNYCH CHARAKTERISTÍK

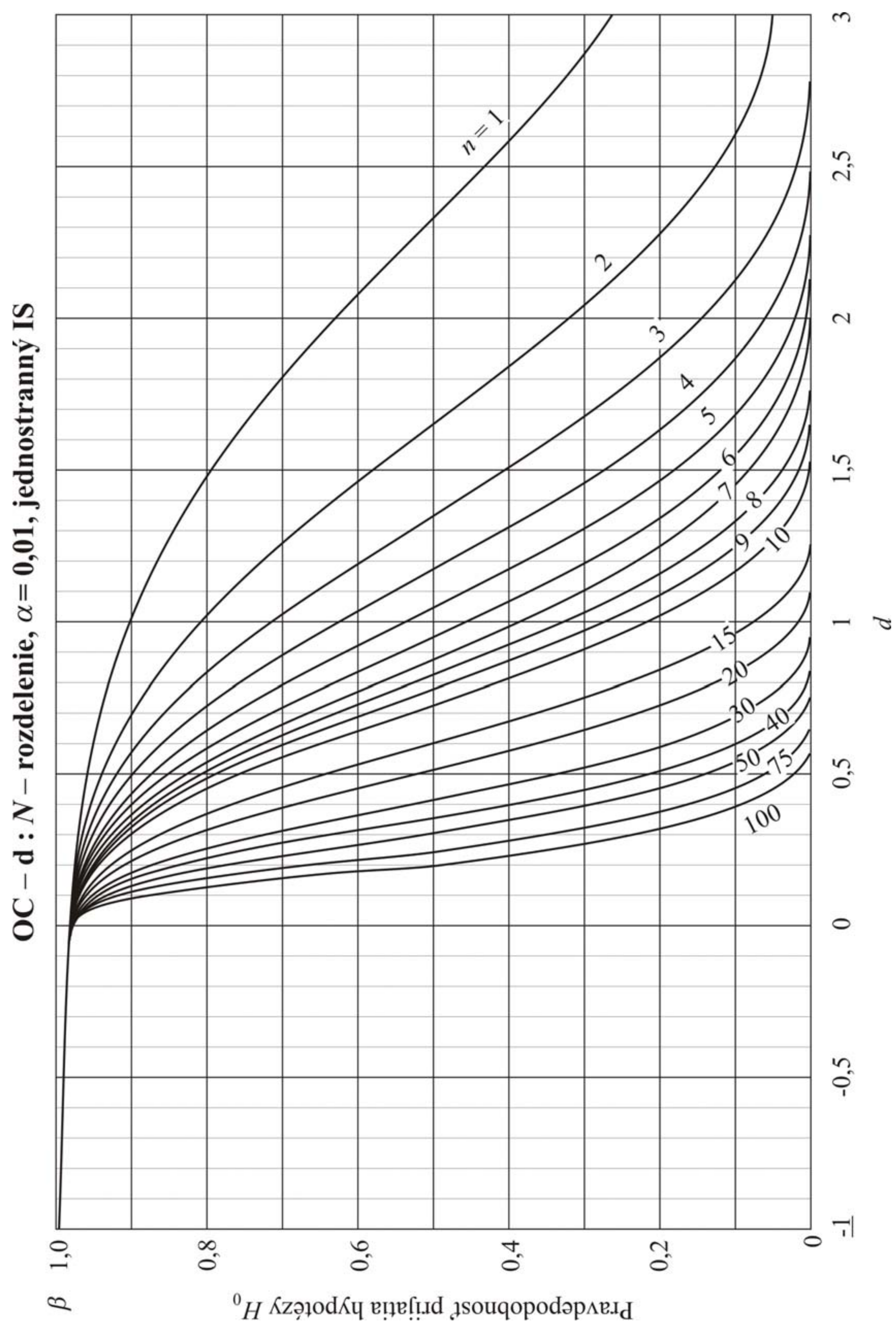


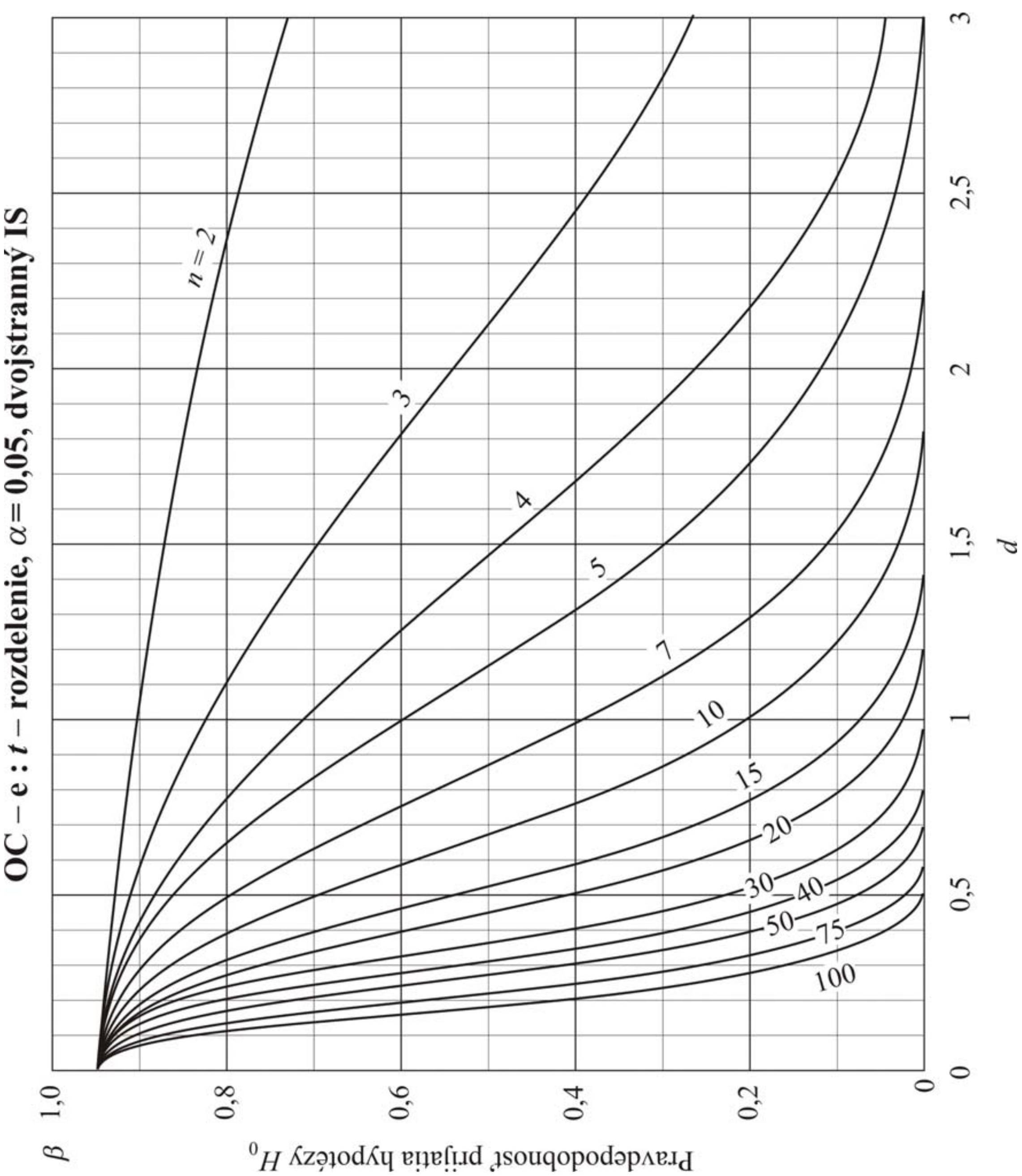
OC – b : N – rozdelenie, $\alpha = 0{,}01$, dvojstranný IS



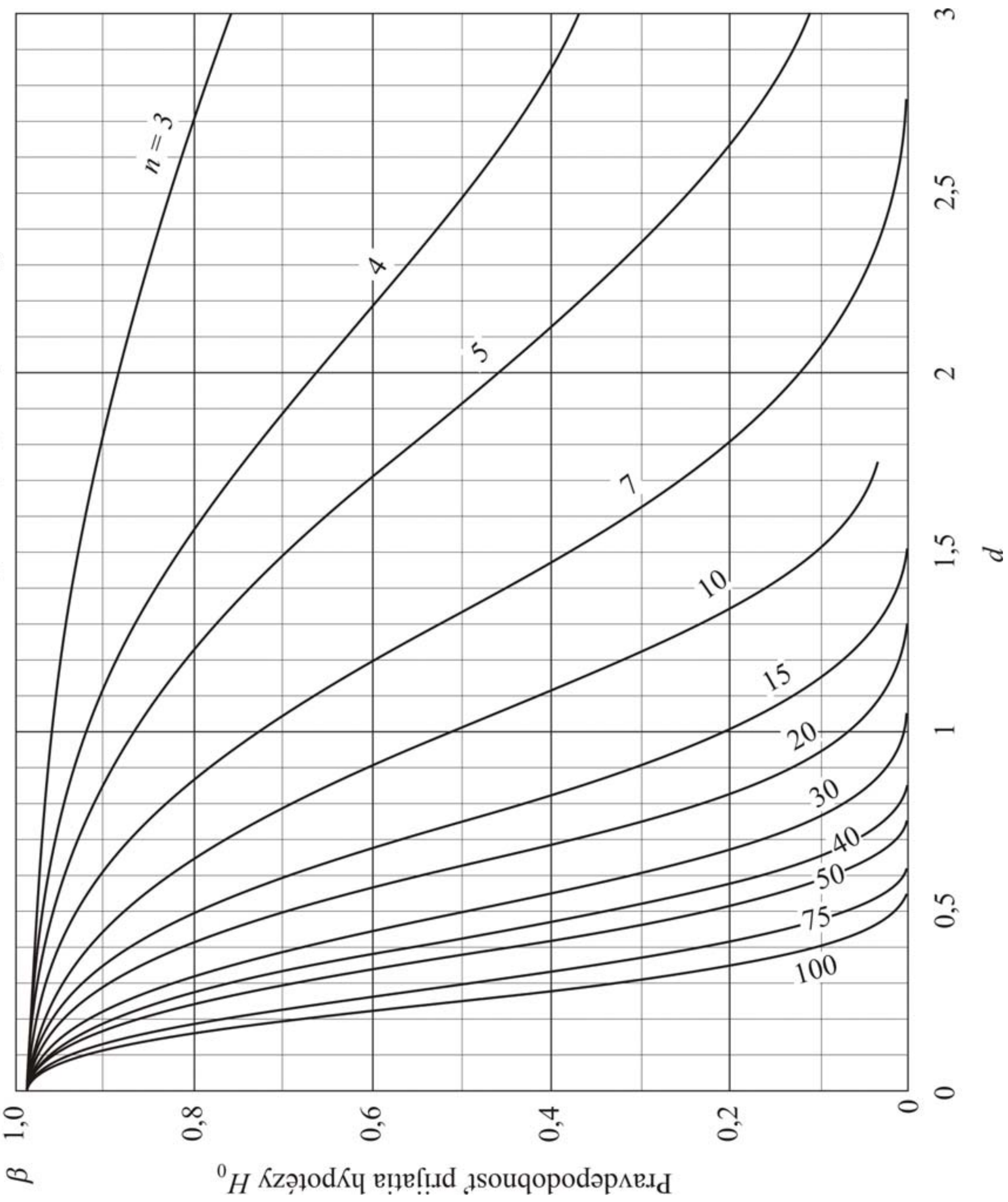


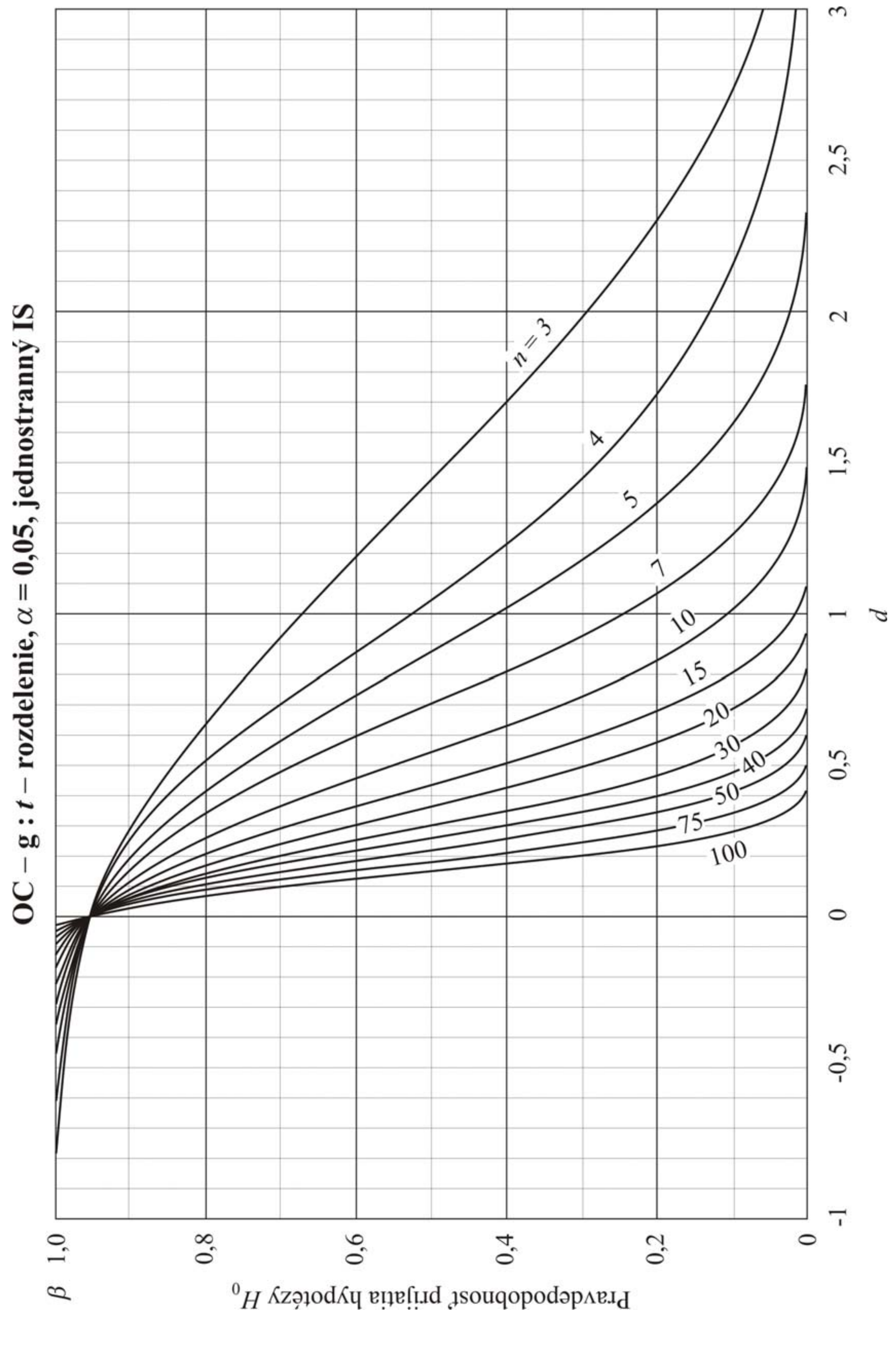
OC – c : N – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
d
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
3
2,5
3
n = 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100


OC – d : N – rozdelenie, α = 0,01, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
d
n = 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100

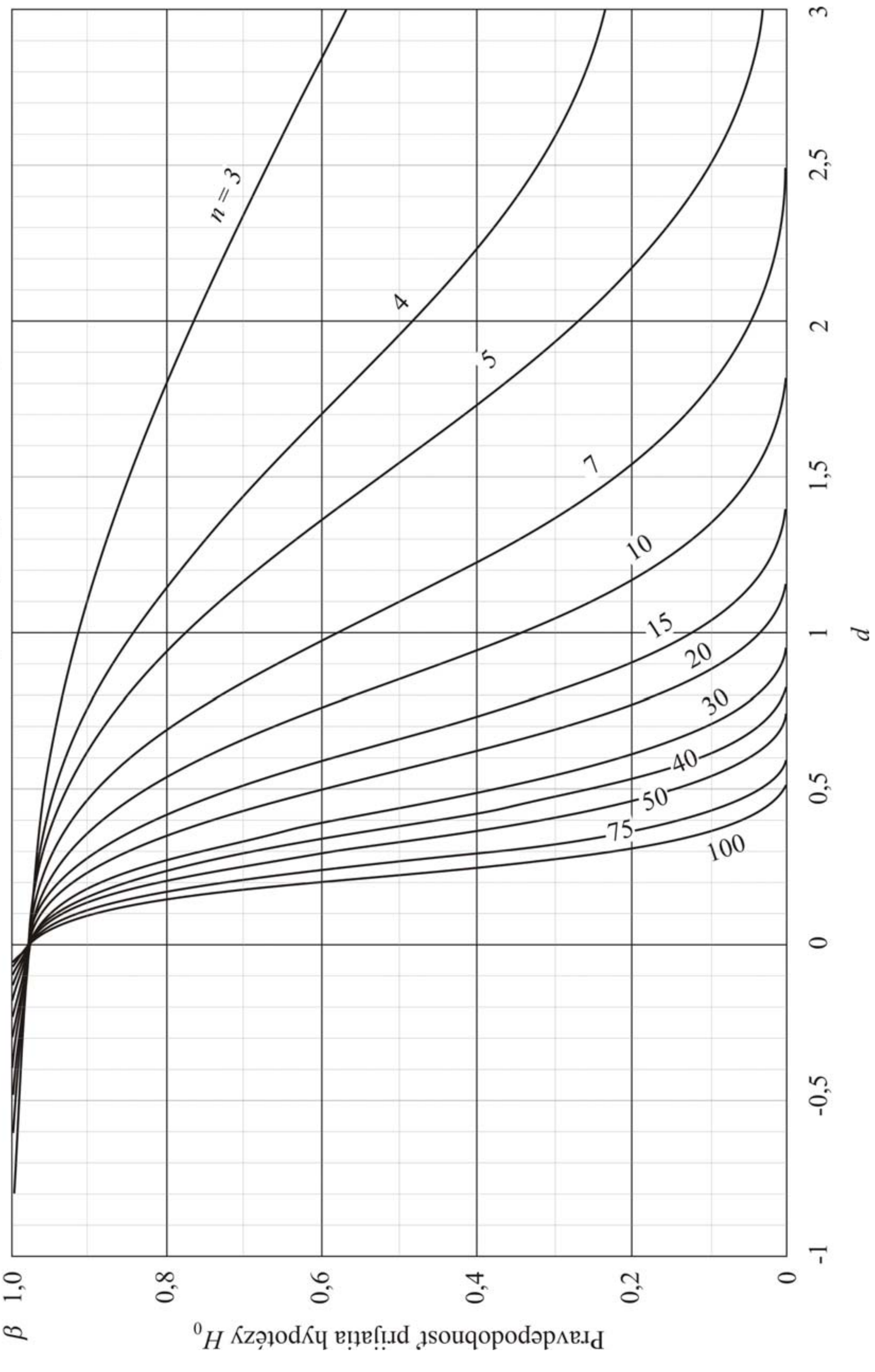

OC – e : t – rozdelenie, α = 0,05, dvojstranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
d
n = 2
3
4
5
7
10
15
20
30
40
50
75
100

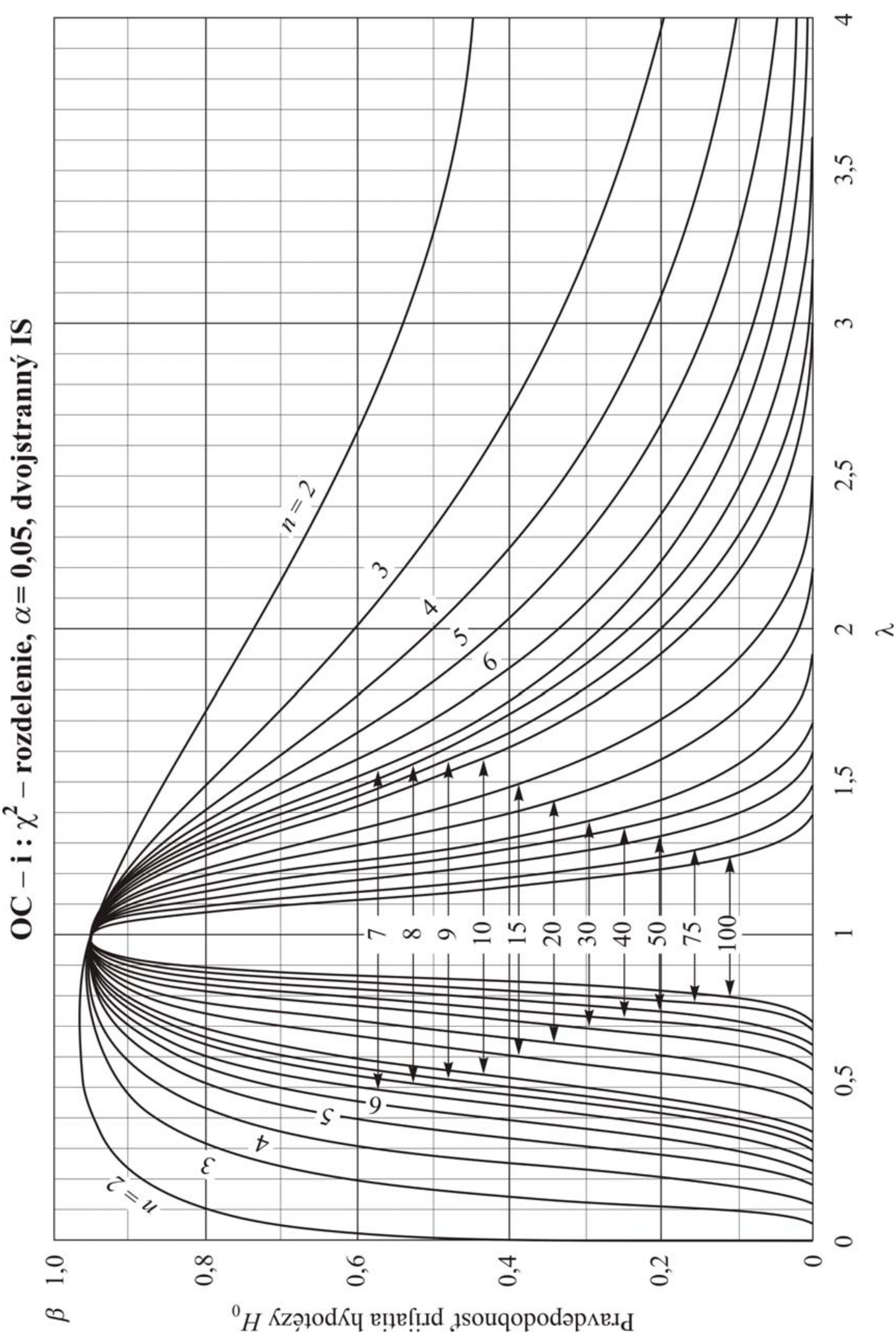
OC – f : t – rozdelenie, α= 0,01, dvojstranný IS



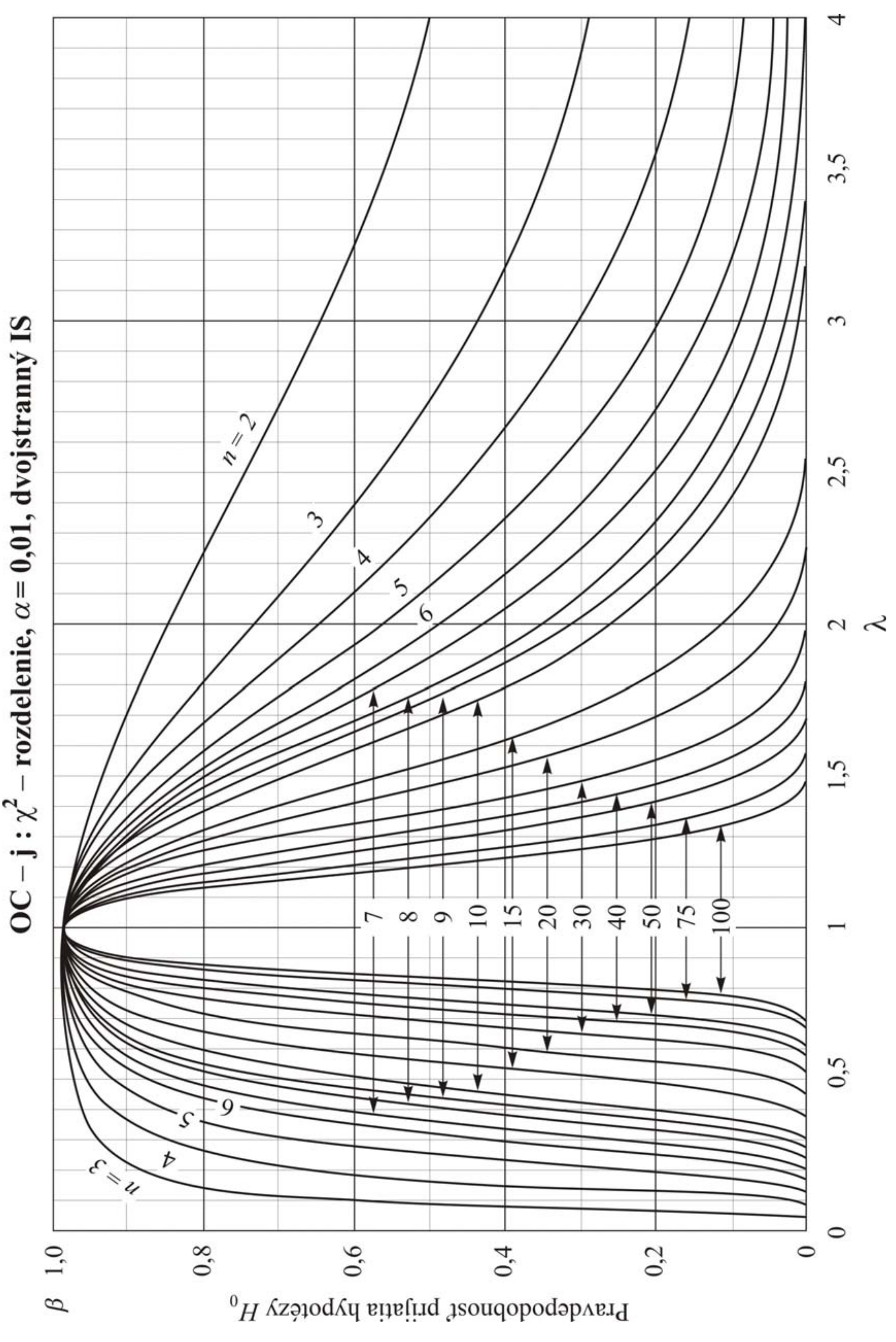

OC – g : t – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
β 1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
d
n = 3
4
5
7
10
15
20
30
40
50
75
100

OC – h : *t* – rozdelenie, $\alpha = 0{,}01$, jednostranný IS

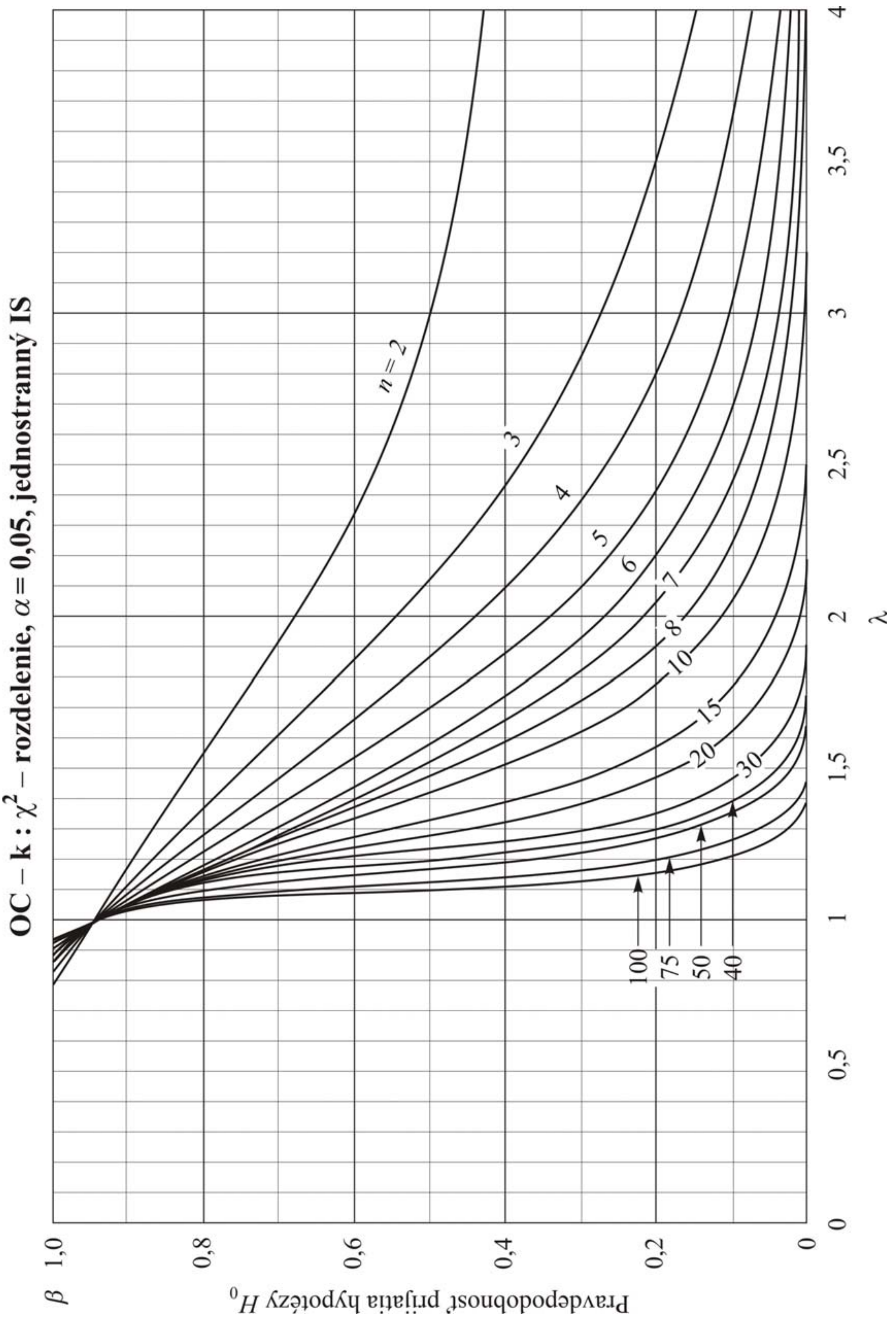


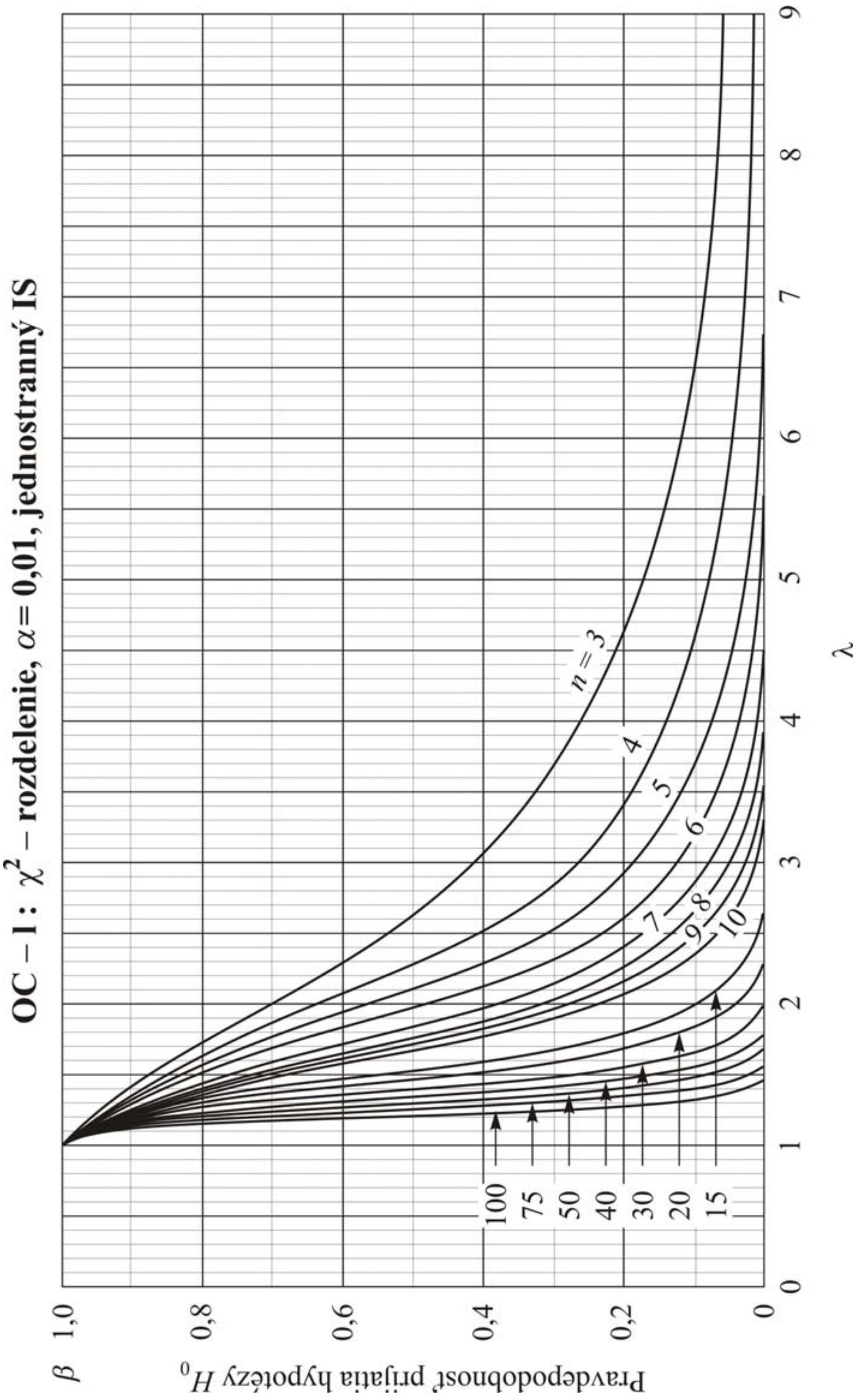


OC – i : χ^2 – rozdelenie, α = 0,05, dvojstranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
λ
$n = 2$
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100

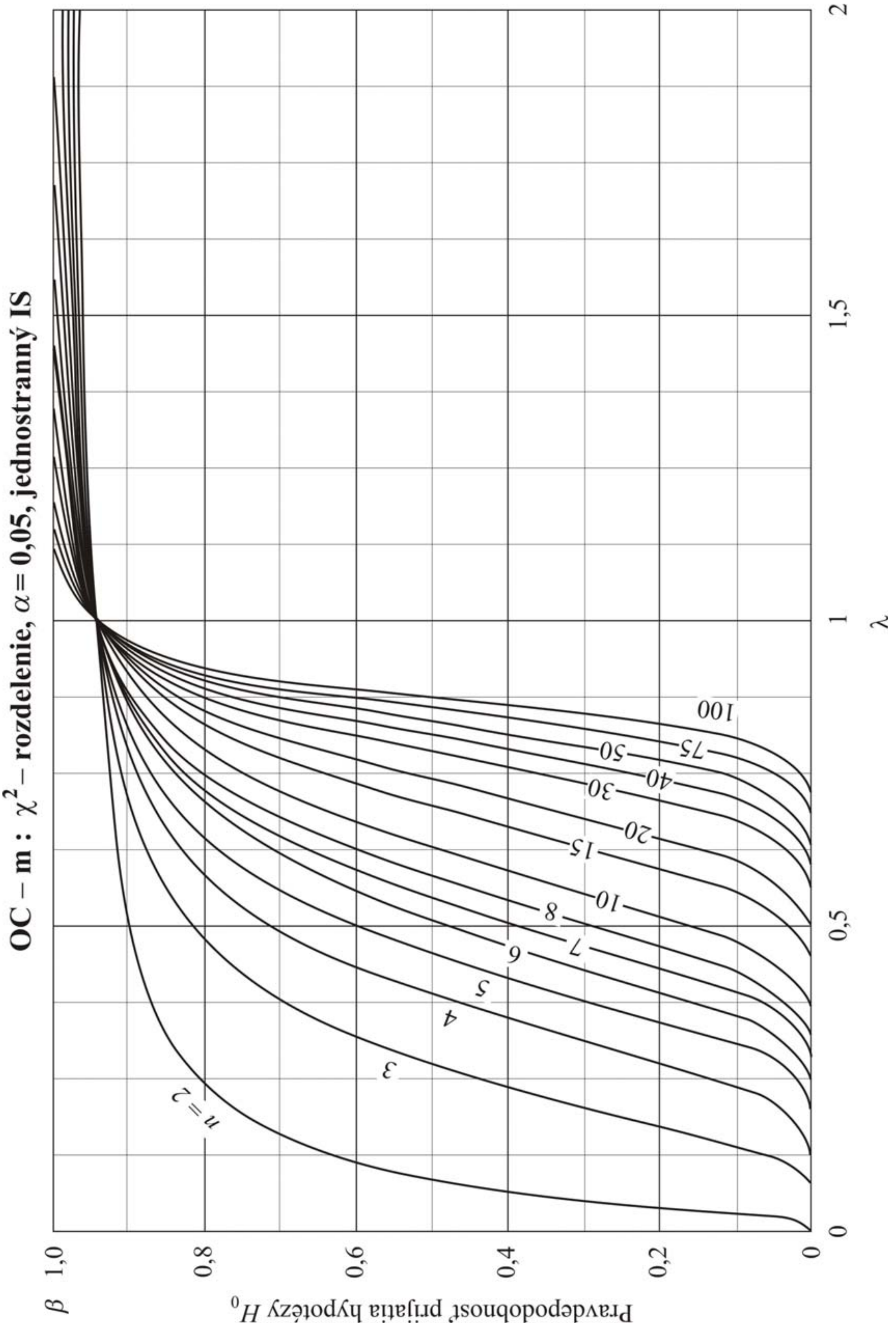


OC – j : χ² – rozdelenie, α = 0,01, dvojstranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
λ
n = 2
n = 3
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100

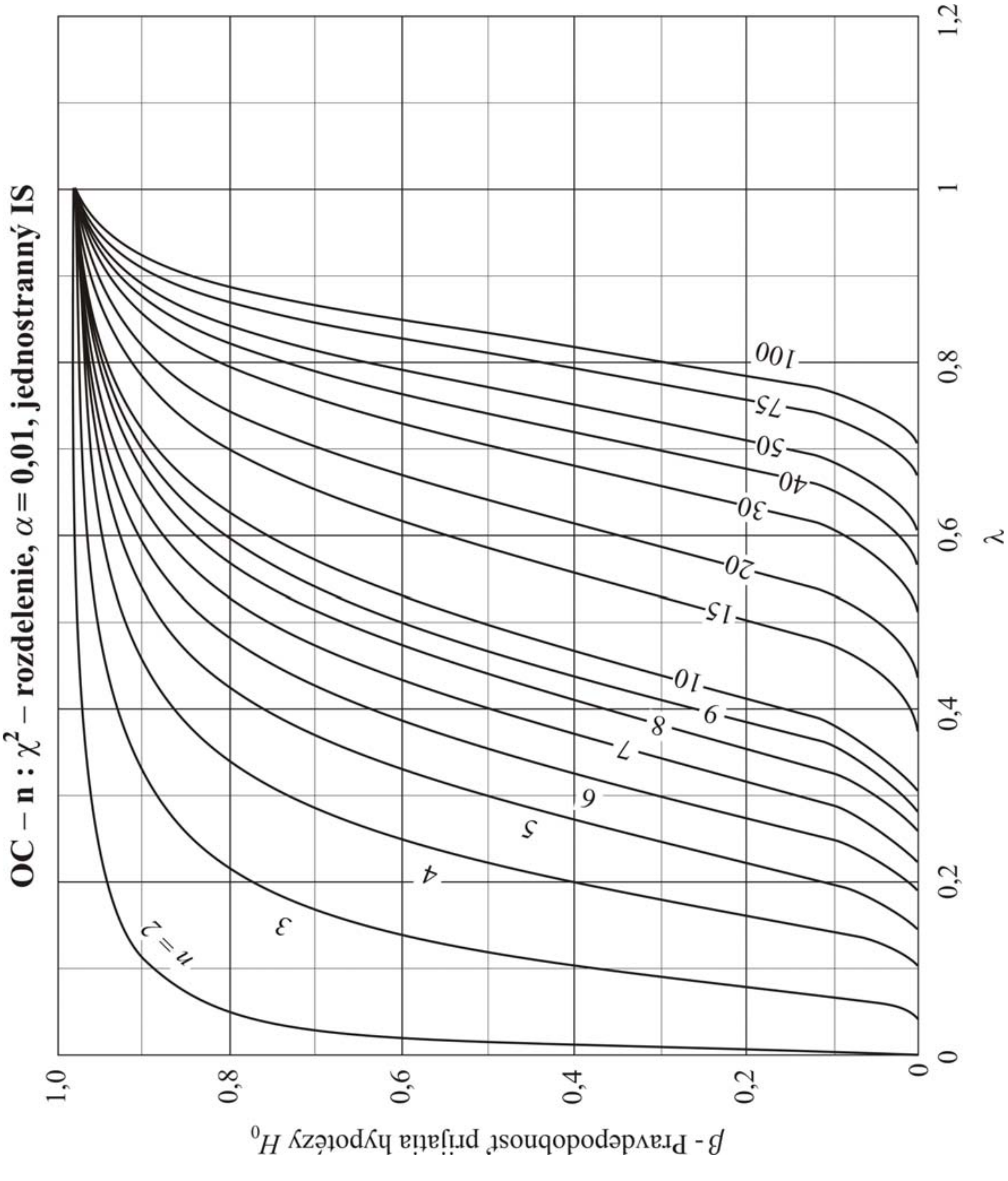

OC – k : χ² – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H0
λ
1,0 0,8 0,6 0,4 0,2 0
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4
n = 2
3
4
5
6
7
8
10
15
20
30
40
50
75
100



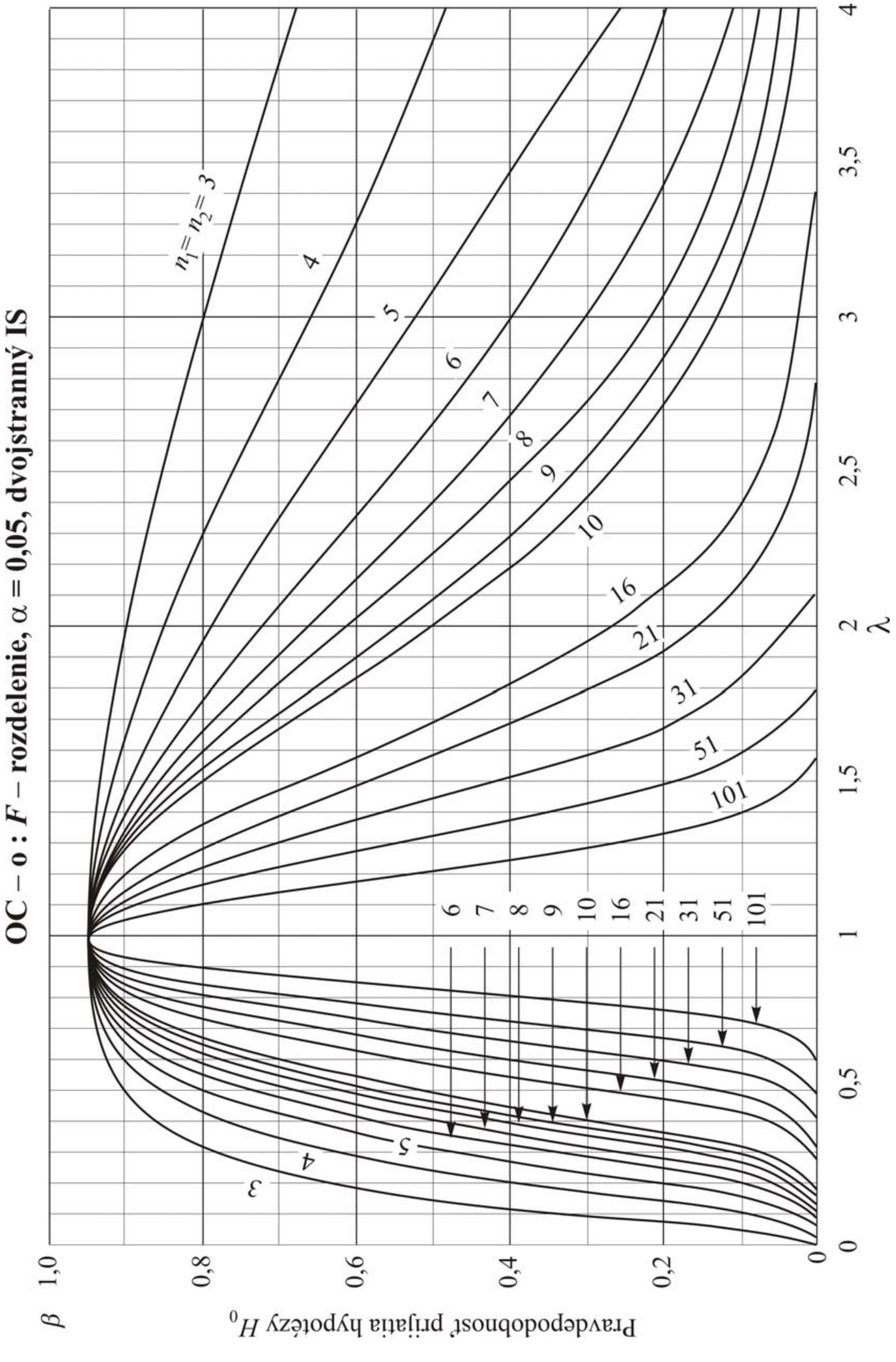
OC – 1 : χ² – rozdelenie, α = 0,01, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
λ
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
n = 3
4
5
6
7
8
9
10
100
75
50
40
30
20
15



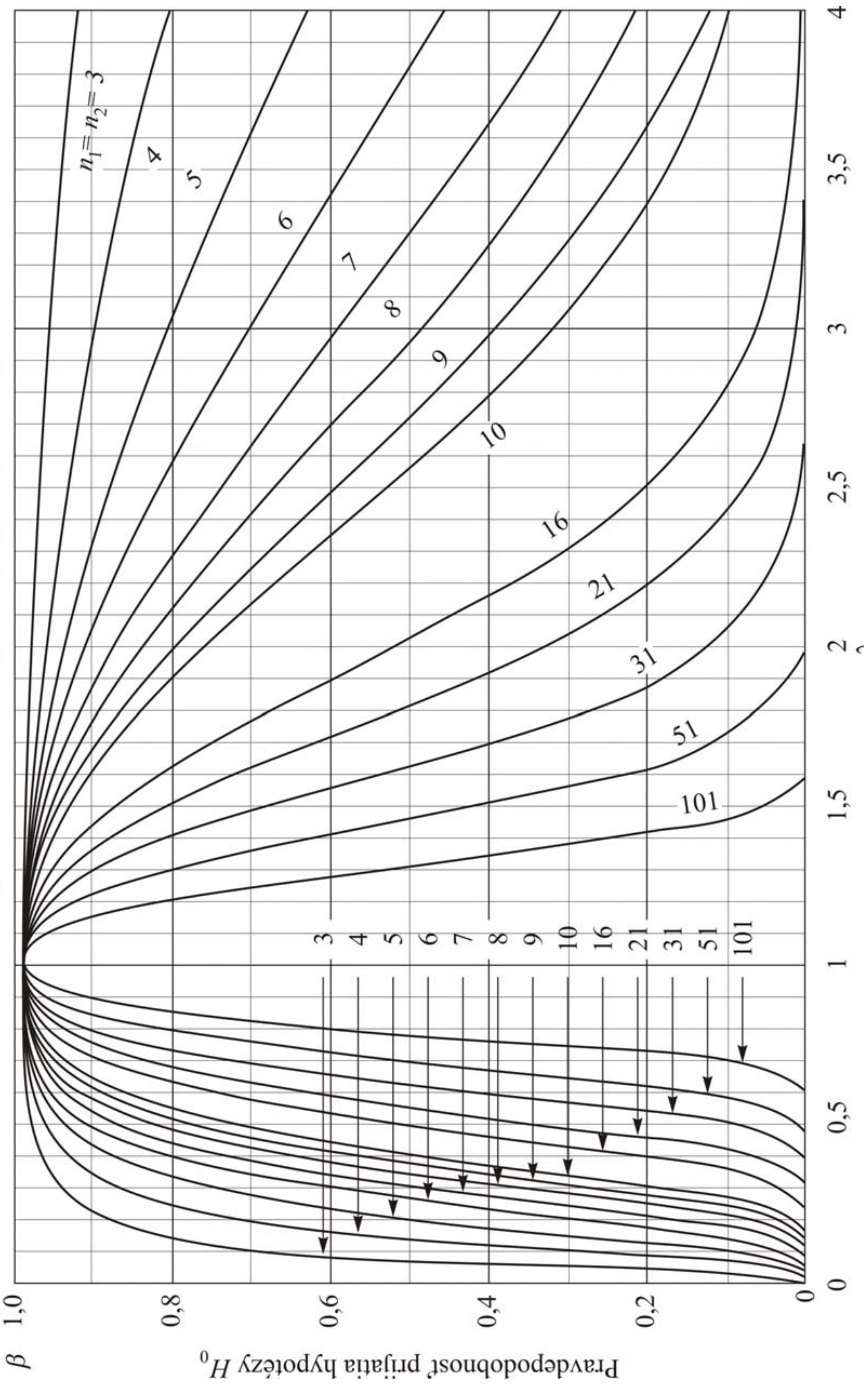
OC – m : χ² – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
β 1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H0
0
0,5
1
1,5
2
λ
n = 2
3
4
5
6
7
8
10
15
20
30
40
50
75
100

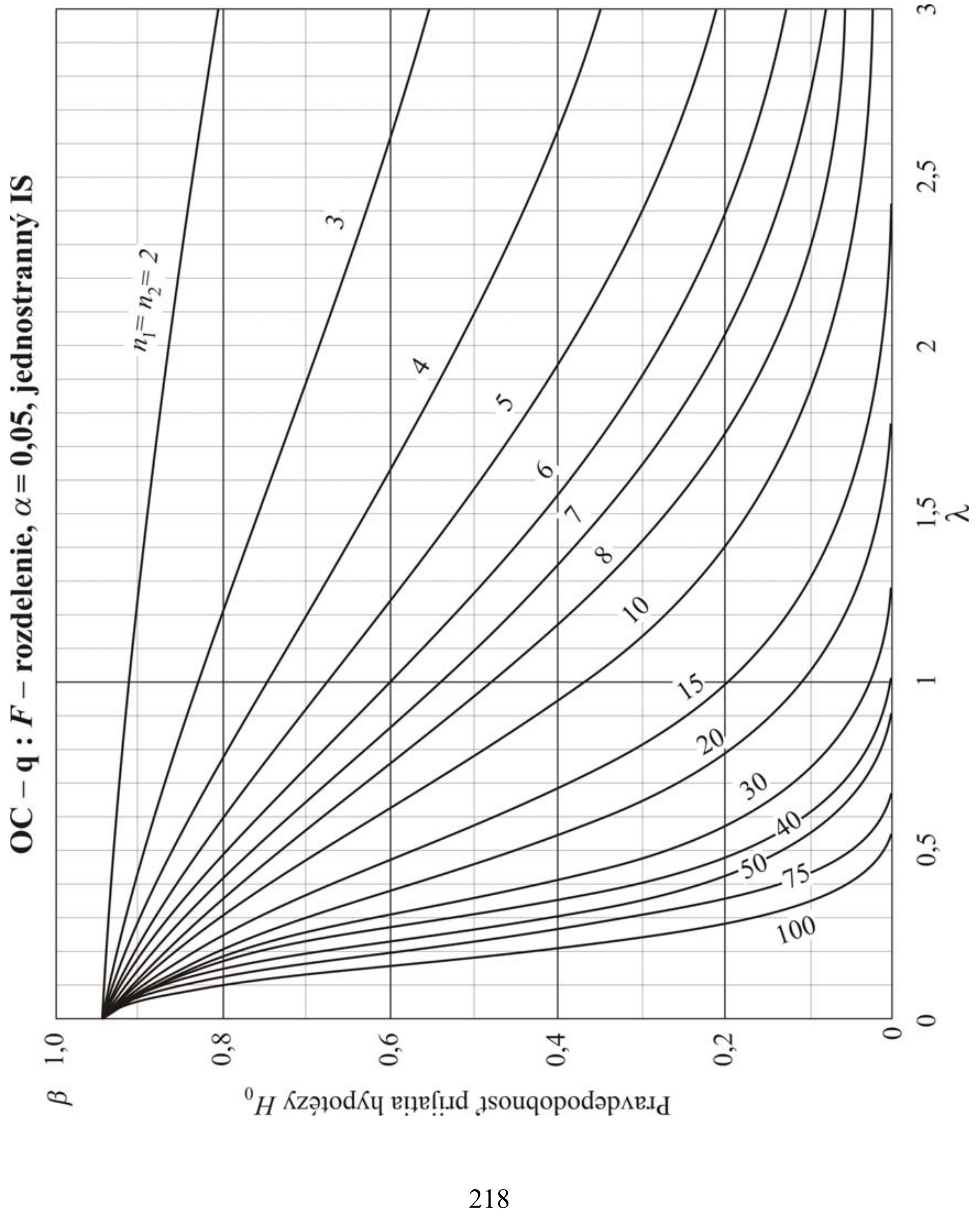


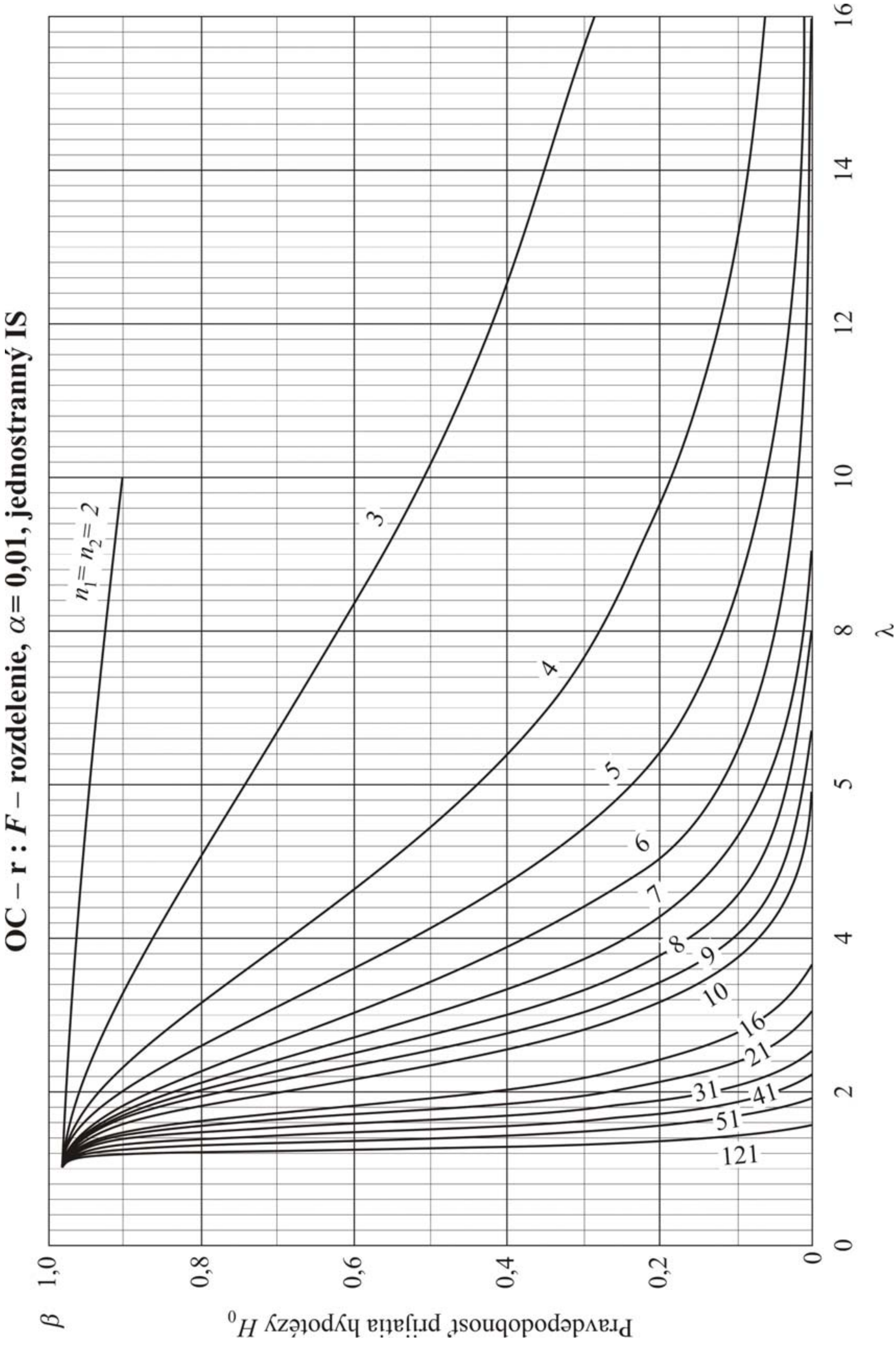
OC – n : χ² – rozdelenie, α = 0,01, jednostranný IS
β - Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
λ
n = 2
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100


OC – o : F – rozdelenie, α = 0,05, dvojstranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
λ
$n_1 = n_2 = 3$
3
4
5
6
7
8
9
10
16
21
31
51
101

OC – p : *F* – rozdelenie, α = 0,01, dvojstranný IS




OC – q : F – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
λ
$n_1 = n_2 = 2$
3
4
5
6
7
8
10
15
20
30
40
50
75
100
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3


OC – r : F – rozdelenie, α = 0,01, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
λ
0
2
4
5
8
10
12
14
16
n1 = n2 = 2
3
4
5
6
7
8
9
10
16
21
31
41
51
121

LITERATÚRA

[1] GARAJ, I., JANIGA, I. 2002. *Dvojstranné tolerančné medze pre neznámu strednú hodnotu a rozptyl normálneho rozdelenia*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2002, 147 s. ISBN 80-227-1779-7.

[2] GARAJ, I., JANIGA, I. 2004. *Dvojstranné tolerančné medze normálnych rozdelení s neznámymi strednými hodnotami a s neznámym spoločným rozptylom. Two Sided Tolerance Limits of Normal Distributions with Uknown Means and Uknown Common Variability.* Bratislava,Vydavateľstvo STU, 2004, 218 s. ISBN 80-227-2019-4.

[3] GARAJ, I., JANIGA, I. 2005. *Jednostranné tolerančné medze normálneho rozdelenia s neznámou strednou hodnotou a rozptylom. One Sided Tolerance Limits of Normal Distributions with Uknown Mean and Variability.* Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2005, 214 s. ISBN 80-227-2218-9.

[4] HÁTLE, J., LIKEŠ, J. 1972. *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. Praha, SNTL/ALFA, 1972, 463 s.

[5] JANIGA, I., 2013. *Aplikovaná pravdepodobnosť a štatistika pre inžinierov. 1.diel: Štatistická analýza jedného a dvoch súborov dát.* Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2013

[6] JANIGA, I., MIKLÓŠ, R. Statistical tolerance intervals for a normal distribution. In *Measurement Science Review*. ISSN 13, 2001, vol. 1, no. 1, p. 29-32.

[7] JANIGA, I., STANISLAV, M., GABKOVÁ, J. 2012. Aplikácia DMAIC v procese kompletizácie. In *Forum Statisticum Slovacum*. ISSN 1336-7420, 2012, roč. VIII, č. 5. s. 52-59.

[8] JANIGA, I., STAREKOVÁ, A. 2001. *Základy pravdepodobnosti a štatistiky*. STU v Bratislave, 2001. 201 s. ISBN 80-227-1603-0.

[9] JÍLEK, M. 1988. *Statistické toleranční meze*. Praha, SNTL, 1988, 275 s.

[10] LAMOŠ, F., POTOCKÝ, R. 1989. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. Vyd. ALFA, 1989. 342 s. ISBN 80-05-00115-0.

[11] LIKEŠ, J., LAGA, J. 1978. *Základní statistické tabulky*. Praha, SNTL, 1978, 488 s.

[12] MONTGOMERY, D.C., RUNGER, G.C. 2002. *Applied statistics and probability for engineers*. John Wiley & Sons, Inc., 2002. 706 p. ISBN 0-471-20454-4.

[13] MONTGOMERY, D.C., RUNGER, G.C. 2003. *Applied statistics and probability for engineers. Student workbook with solutions.* John Wiley & Sons, Inc., 2003. 706 p. ISBN 0-471-42682-2.

[14] PALENČÁR, R., RUIZ, J.M., JANIGA, I., HORNÍKOVÁ, A. 2001. *Štatistické metódy v metrologických a skúšobných laboratóriach.* Vyd. Grafické štúdio Ing. Peter Juriga, 2001. 366 s. ISBN 80-968449-3-8.

[15] VARGA, Š., KVASNIČKA, V. 1988. *Matematika III. Diferenciálne rovnice a matematická štatistika*. Edičné stredisko SVŠT v Bratislave, 1988. 167 s.

[16] VARGA, Š., KVASNIČKA, V. 1988. *Matematika III. Príklady.* Edičné stredisko SVŠT v Bratislave, 1988. 200 s.

[17] WIMMER, G. 1993. *Štatistické metódy v pedagogike*. Nakladateľstvo GAUDEAMUS, 1993. 154 s. ISBN 80-7041-864-8.

Doc. RNDr. Ivan Janiga, PhD., RNDr. Jana Gabková, PhD.,
Mgr. Milada Omachelová, PhD., RNDr. Daniela Richtáriková, PhD.

ZÁKLADY ŠTATISTICKEJ ANALÝZY

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2013.

Edícia skrípt

Rozsah 221 strán, 42 obrázkov, 58 tabuliek, 6,298 AH, 6,609 VH,
1. vydanie, edičné číslo 5731, tlač Nakladateľstvo STU v Bratislave.

85 – 244 – 2013

ISBN 978-80-227-4023-4