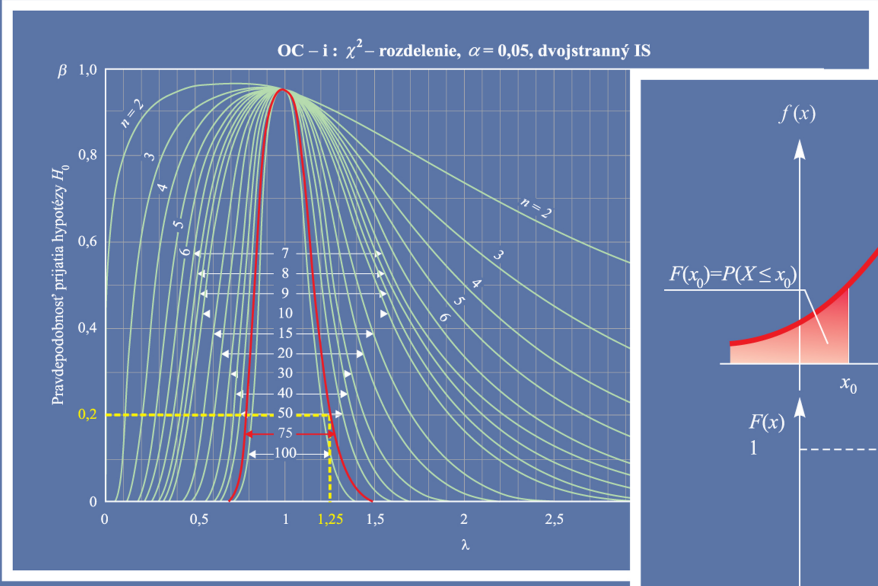
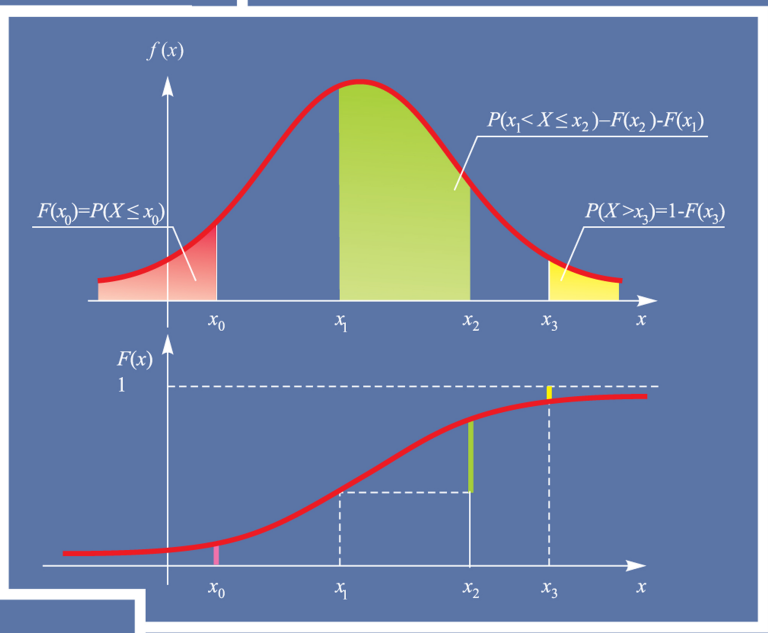
IVAN JANIGA

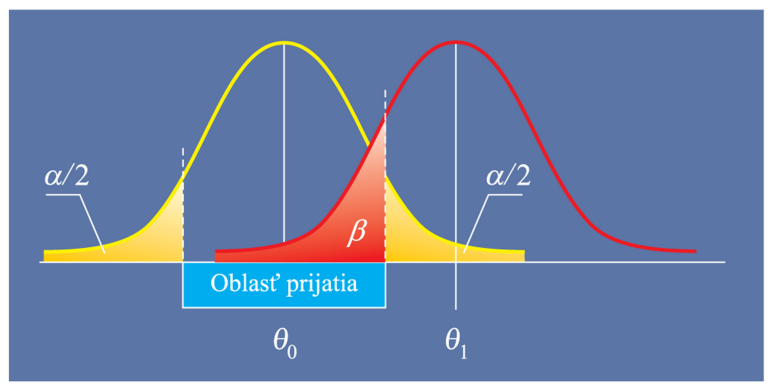
APLIKOVANÁ PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA PRE INŽINIEROV

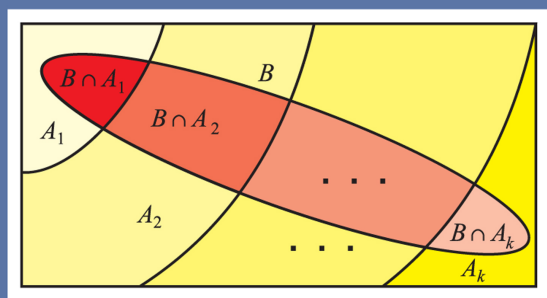
ŠTATISTICKÁ ANALÝZA JEDNÉHO A DVOCH SÚBOROV DÁT

1. diel









STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE

APLIKOVANÁ PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA PRE INŽINIEROV

ŠTATISTICKÁ ANALÝZA JEDNÉHO A DVOCH SÚBOROV DÁT

1. diel

IVAN JANIGA

APLIKOVANÁ PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA PRE INŽINIEROV

ŠTATISTICKÁ ANALÝZA JEDNÉHO A DVOCH SÚBOROV DÁT

1. diel

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2013

Publikácia *Aplikovaná pravdepodobnosť a štatistika pre inžinierov – Štatistická analýza jedného a dvoch súborov dát* je prvý diel z dvoch učebníc zo spoločným názvom *Aplikovaná pravdepodobnosť a štatistika pre inžinierov*.

Prvý diel učebnice je rozšírením skrípt pre bakalárske štúdium *Základy aplikovanej štatistiky* o časť učebnej látky pre inžinierske študijné programy, napríklad kvalita produkcie, mechatronika a iné, ale aj pre doktorandské štúdium všetkých študijných programov.

Prvé tri kapitoly učebnice sú venované pravdepodobnostným metódam. Ďalšie kapitoly pojednávajú o štatistickom spracovaní jedného a dvoch súborov dát.

Aj keď je text napísaný najmä pre študentov technického zamerania, použiteľný je aj pre inžinierov z technickej praxe a vedeckých pracovníkov, ktorým môže pomôcť pri spracovaní a vyhodnocovaní experimentálnych dát.

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© doc. RNDr. Ivan Janiga, PhD.

Recenzenti: prof. Ing. Ladislav Starek, PhD.
doc. RNDr. Štefan Varga, CSc.

Schválila Vedecká rada Strojníckej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-4046-3

OBSAH

PREDHOVOR **9**

1 PRAVDEPODOBNOSŤ **11**

1.1 Náhodný experiment, výberový priestor a náhodná udalosť 11

1.2 Operácie s náhodnými udalosťami 15

1.3 Pojem pravdepodobnosti 18

1.4 Podmienená pravdepodobnosť 21

1.5 Nezávislosť udalostí 27

1.6 Spoľahlivosť systémov s *m* blokmi 29

1.6.1 Sériový systém s *m* blokmi 29

1.6.2 Paralelný systém s *m* blokmi 30

1.6.3 Sériovo-paralelný systém s *m* blokmi 30

2 NÁHODNÉ PREMENNÉ **32**

2.1 Diskrétne náhodné premenné 33

2.1.1 Rozdelenia pravdepodobnosti a pravdepodobnostné funkcie 33

2.1.2 Distribučné funkcie 35

2.1.3 Číselné charakteristiky diskrétnej náhodnej premennej 37

2.1.4 Diskrétne rovnomerné rozdelenie 39

2.1.5 Binomické rozdelenie 40

2.1.6 Hypergeometrické rozdelenie 43

2.1.7 Poissonovo rozdelenie 48

2.2 Spojité náhodné premenné 51

2.2.1 Rozdelenie pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej 51

2.2.2 Číselné charakteristiky spojitej náhodnej premennej 55

2.2.3 Spojité rovnomerné rozdelenie 58

2.2.4 Normálne rozdelenie 60

2.2.5 Gama rozdelenie 68

2.2.6 Exponenciálne rozdelenie 69

2.2.7 Weibullovo rozdelenie 72

2.2.8 Logaritmicko-normálne rozdelenie 74

3 VIACROZMERNÉ NÁHODNÉ PREMENNÉ **77**

3.1 Dve diskrétne náhodné premenné 77

3.1.1 Združené rozdelenie pravdepodobnosti 77

3.1.2 Marginálne rozdelenie pravdepodobnosti 79

3.1.3 Podmienené rozdelenie pravdepodobnosti 81

3.1.4 Nezávislosť 83

3.2 Viacrozmerné diskrétne náhodné premenné 83

3.2.1 Združené rozdelenia pravdepodobnosti 83

3.2.2 Multinomické rozdelenia pravdepodobnosti ... 85
3.3 Dve spojité náhodné premenné ... 86
3.3.1 Združené rozdelenia pravdepodobnosti ... 86
3.3.2 Marginálne rozdelenia pravdepodobnosti ... 88
3.3.3 Podmienené rozdelenia pravdepodobnosti ... 90
3.3.4 Nezávislosť ... 92
3.4 Viacrozmerné spojité náhodné premenné ... 94
3.5 Závislosť náhodných premenných ... 95
3.5.1 Kovariancia a korelácia ... 95
3.5.2 Náhodný vektor a kovariančná matica ... 98
3.6 Viacrozmerné normálne rozdelenia ... 99
3.6.1 Dvojrozmerné normálne rozdelenie ... 99
3.6.2 Viacrozmerné normálne rozdelenie ... 101
3.7 Lineárne kombinácie náhodných premenných ... 101
3.8 Rozdelenia odvodené z normálneho ... 104
3.8.1 χ^2 (chí-kvadrát) rozdelenie ... 104
3.8.2 *t*-rozdelenie (Studentovo rozdelenie) ... 105
3.8.3 *F*-rozdelenie (Fisherovo-Snedecorovo) ... 107
3.9 Momentové vytvárajúce funkcie ... 109
3.10 Čebyševova nerovnosť ... 112

4 TVORBA NÁHODNÉHO VÝBERU A OPISNÁ ŠTATISTIKA ... 114
4.1 Základný súbor a náhodný výber ... 114
4.2 Výberové charakteristiky ─ štatistiky ... 115
4.2.1 Číselné metódy základného spracovania dát ... 117
4.2.2 Grafické metódy základného spracovania dát ... 120

5 BODOVÉ ODHADOVANIE PARAMETROV ... 126
5.1 Úvod ... 126
5.2 Všeobecné pojmy bodového odhadovania ... 127
5.2.1 Nevychýlené odhady ... 127
5.2.2 Rozptyl bodového odhadu ... 129
5.2.3 Smerodajná chyba ... 130
5.2.4 Hodnota bootstrapového odhadu smerodajnej chyby ... 131
5.2.5 Stredná kvadratická chyba odhadu ... 132
5.3 Metóda bodového odhadovania ... 134
5.4 Rozdelenie výberových charakteristík Centrálna limitná veta ... 137

6 ŠTATISTICKÉ INTERVALY PRE JEDEN VÝBER ... 143
6.1 Úvod ... 143
6.2 Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu normálneho rozdelenia so známym rozptylom ... 144
6.2.1 Vývoj intervalu spoľahlivosti a jeho základné vlastnosti ... 144
6.2.2 Určenie rozsahu výberu ... 146
6.2.3 Jednostranné hranice spoľahlivosti ... 147

6.2.4 Interval spoľahlivosti z veľkého výberu pre μ 148
6.2.5 Bootstrapové intervaly spoľahlivosti 149
6.3 Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu normálneho rozdelenia s neznámym rozptylom 151
6.3.1 Interval spoľahlivosti pre μ z *t* rozdelenia 152
6.4 Interval spoľahlivosti pre rozptyl normálneho rozdelenia 153
6.5 Interval spoľahlivosti z veľkého výberu pre podiel jednotiek v základnom súbore s danou vlastnosťou 154
6.5.1 Určenie rozsahu výberu 156
6.6 Predikčný interval pre budúce pozorovanie 157
6.7 Štatistický tolerančný interval pre normálne rozdelenie 159

7 TESTY HYPOTÉZ PRE JEDEN VÝBER 161
7.1 Testovanie hypotéz 161
7.1.1 Štatistické hypotézy 161
7.1.2 Testy štatistických hypotéz 162
7.1.3 Všeobecný postup pri testovaní štatistických hypotéz 168
7.2 Testy o strednej hodnote normálneho rozdelenie, rozptyl známy 169
7.2.1 Testy hypotézy o strednej hodnote 169
7.2.2 *P* hodnota v testovaní hypotéz 171
7.2.3 Súvislosť medzi testovaním hypotéz a intervalmi spoľahlivosti 172
7.2.4 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu 173
7.2.5 Testovanie pri veľkom rozsahu výberu 177
7.3 Testy o strednej hodnote normálneho rozdelenia, rozptyl neznámy 177
7.3.1 Testovanie hypotézy o strednej hodnote 177
7.3.2 *P* hodnota pre *t*-test 179
7.3.3 Voľba rozsahu výberu 180
7.4 Testy hypotéz o rozptyle normálneho rozdelenia 181
7.4.1 Testovanie hypotézy o rozptyle 181
7.4.2 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu 183
7.5 Testy hypotéz o podiele jednotiek v základnom súbore s danou vlastnosťou 184
7.5.1 Testovanie hypotéz o podiele z veľkého výberu 184
7.5.2 Testovanie hypotéz o podiele z malého výberu 186
7.5.3 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu 187
7.6 Testy dobrej zhody 188
7.6.1 Pearsonov chí-kvadrát test 188
7.6.2 Shapirov-Wilkov test normality 193
7.7 Testy v kontingenčných tabuľkách 194

8 INDUKČNÁ ŠTATISTIKA PRE DVA VÝBERY 198
8.1 Úvod 198
8.2 Indukcie pre rozdiel stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, rozptyly sú známe 198

8.2.1 Testy hypotéz pre rozdiel stredných hodnôt, rozptyly sú známe 199
8.2.2 Voľba rozsahu výberu 201
8.2.3 Interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt, rozptyly sú známe 203
8.3 Indukcie pre rozdiel stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, rozptyly sú neznáme 205
8.3.1 Testy hypotéz pre rozdiel stredných hodnôt, rozptyly sú neznáme 206
8.3.2 Voľba rozsahu výberu 210
8.3.3 Interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt 211
8.4 Párový t-test 213
8.5 Indukcie pre rozptyly dvoch normálnych rozdelení 217
8.5.1 Testovanie hypotéz o rovnosti dvoch rozptylov 218
8.5.2 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu 220
8.5.3 Interval spoľahlivosti pre podiel dvoch rozptylov 220
8.6 Indukcie o dvoch podieloch v základných súboroch 222
8.6.1 Testovanie hypotézy $H_0 : p_1 = p_2$ pri veľkom rozsahu výberu 222
8.6.2 Testovanie hypotézy $H_0 : p_1 = p_2$ pri malom rozsahu výberu 224
8.6.3 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu 226
8.6.4 Interval spoľahlivosti pre $p_1 - p_2$ 227

PRÍLOHY 229

LITERATÚRA 265

Predhovor

Kniha *Aplikovaná pravdepodobnosť a štatistika pre inžinierov. 1. diel: Štatistická analýza jedného a dvoch súborov dát* je prvý diel z dvoch učebníc zo spoločným názvom *Aplikovaná pravdepodobnosť a štatistika pre inžinierov*.

Prvý diel učebnice je napísaný najmä pre predmet Základy aplikovanej štatistiky, ktorý sa vyučuje v druhom ročníku bakalárskeho štúdia ako povinne voliteľný predmet. Tento diel učebnice obsahuje časť učebnej látky aj pre inžinierske študijné programy, napríklad kvalita produkcie, mechatronika a iné, ale aj pre doktorandské študium všetkých študijných programov.

Aj keď je text napísaný najmä pre študentov technického zamerania, použiteľný je aj pre inžinierov z technickej praxe a vedeckých pracovníkov, ktorým môže pomôcť pri spracovaní a vyhodnocovaní experimentálnych dát.

Text prvého dielu učebnice obsahuje osem kapitol.

Kapitoly 1, 2 a 3 pokrývajú základné pojmy ako sú pravdepodobnosť, diskrétne a spojité náhodné premenné, pravdepodobnostné rozdelenia a ich číselné charakteristiky, združené pravdepodobnostné rozdelenia, nezávislosť náhodných premenných a spoľahlivosť systémov s m blokmi. Uvedené kapitoly poskytujú primerane kompletné spracovanie týchto tém, pričom sa vyhýbajú mnohým matematickým alebo viac teoretickým informáciám.

Kapitola 4 je venovaná tvorbe náhodného výberu zo základného súboru, výberovým charakteristikám, číselným a grafickým metódam základného spracovania dát. Kapitola 5 sa zaoberá bodovým odhadovaním parametrov. Táto kapitola uvádza tiež niektoré z dôležitých vlastností odhadov, metódu maximálnej vierohodnosti, výberové rozdelenia a centrálnu limitnú vetu. V tejto kapitole je prezentovaná aj počítačová technika nazývaná bootstrap, ktorá je použitá na získanie hodnoty bootstrapového odhadu smerodajnej chyby.

Kapitola 6 pojednáva o intervalovom odhadovaní pre jeden výber. Uvedené sú intervaly spoľahlivosti pre stredné hodnoty, rozptyly a podiely, predikčné a štatistické tolerančné intervaly. Táto kapitola obsahuje aj bootstrapové intervaly spoľahlivosti. Kapitola 7 opisuje testy hypotéz pre jeden výber. Uvedené sú testy pre stredné hodnoty a rozptyly, testy pre podiel p z veľkého aj malého rozsahu výberu, testy dobrej zhody a testy v kontingenčných tabuľkách. Kapitola 8 uvádza testy a intervaly spoľahlivosti pre dva výbery. K dispozícii sú podrobné informácie a príklady metód na stanovenie vhodného rozsahu výberu. Cieľom je oboznámiť študenta s používaním jednotlivých techník pri riešení reálnych technických problémov. Kladie sa dôraz na to, aby študent pochopil príslušné pojmy. Uprednostňuje sa logický, heuristický rozvoj postupov pred formálnym matematickým.

Pri písaní učebnice sa kládol dôraz na to, aby text bol čo najbližší k inžinierskemu mysleniu. Vyhýbalo sa exaktným matematicky formulovaným definíciám. Nové pojmy sú

definované tak, aby boli zrozumiteľnejšie technikom a pritom nestrácali svoju „exaktnosť“. Každý pojem sa preto vysvetľuje aj na príkladoch a obrázkoch.

Žiada sa upozorniť na niektoré rozdiely od bežne dostupných slovenských a českých učebných textov z oblasti štatistiky. V prvej kapitole sa kladie dôraz na štatistickú definíciu pravdepodobnosti, ktorá má v inžinierskej praxi veľký význam, obzvlášť v štatistickej regulácii produkčných a meracích procesoch. Číselné a grafické metódy opisnej štatistiky sú prezentované aj na konkrétnom príklade z praxe.

Uvádzajú sa tri druhy štatistických intervalov. Okrem intervalu spoľahlivosti pre parametre rozdelení sa učebnica zaoberá predikčným intervalom ohraničujúcim hodnotu budúceho merania, ktoré sa chce urobiť. To je niekedy veľmi dôležité pri rozhodovaní sa, či urobiť alebo neurobiť ďalšie meranie. Za veľmi dôležitý sa považuje štatistický tolerančný interval, ktorý s danou spoľahlivosťou pokrýva aspoň zadaný podiel hodnôt celého základného súboru. Pomocou tohto intervalu sa prispelo k vyriešeniu niekoľkých závažných problémov v praxi. V tejto časti sa text učebnice opiera o výsledky publikované v troch monografiách autorov Garaja a Janigu, uvedených v literatúre.

V testovaní hypotéz je v praxi veľmi dôležitá chyba druhého druhu a s ňou súvisiaca sila testu, ktorá pomáha detegovať odchýlky od menovitej hodnoty meranej veličiny, čo má veľký význam napr. v regulácii procesov. Nemalý význam má aj stanovenie rozsahu výberu, t. j. koľko meraní treba urobiť, aby sa s danou spoľahlivosťou detegoval rozdiel medzi menovitou hodnotou a skutočnou hodnotou parametra rozdelenia. Na to slúžia najmä krivky operatívnej charakteristiky, ktoré sú uvedené v prílohe.

Učebnica obsahuje veľa riešených príkladov, na ktorých sú zrozumiteľne vysvetlené základné pojmy. V prílohe sú uvedené najpotrebnejšie štatistické tabuľky.

Ďakujem prof. Ing. Ladislavovi Starekovi, PhD. a doc. RNDr. Štefanovi Vargovi, CSc. za podnetné pripomienky a vypracovanie recenzných posudkov. Chcem poďakovať aj doc. RNDr. Viktorovi Witkovskému, PhD. a Mgr. Monike Kováčovej, PhD., za pomoc pri použití simulačných metód. Veľké uznanie a vďaku vyjadrujem RNDr. Daniele Richtárikovej, PhD. za editačné práce, RNDr. Jane Gabkovej, PhD. za cenné metodické pripomienky, a Mgr. Milade Omachelovej, PhD. za nádherné obrázky.

Autor

1 PRAVDEPODOBNOSŤ

Pri spracovaní a analýze štatistických údajov sa významnou mierou využívajú metódy *teórie pravdepodobnosti*, ktorá sa zaoberá štúdiom zákonitostí, ktorými sa riadia náhodné udalosti. Pojmom náhoda tu rozumieme súhrn nekontrolovaných a často aj nekontrolovateľných vplyvov, ktoré sa od jedného pokusu k druhému v rámci daného experimentu živelne menia. Z hľadiska teórie pravdepodobnosti experiment nespájame len s nejakou experimentálnou činnosťou, ale v širšom zmysle predstavuje takú činnosť, ktorej výsledok nie je jednoznačne určený systémom podmienok, za ktorých sa uskutočňuje a pri ktorých ho možno ľubovoľne veľakrát opakovať. Takýmto pokusom je napríklad výrobný proces, prenos správ, prevádzka určitého zariadenia, ale aj liečebný proces, šľachtenie rastlín a pod.

V tejto úvodnej časti k pravdepodobnosti budeme používať základné pojmy z množín a množinových operácií. Predpokladáme, že čitateľ je oboznámený s touto tematikou.

1.1 Náhodný experiment, výberový priestor a náhodná udalosť

V tejto časti vysvetlíme termíny *náhodný experiment, náhodný pokus, výberový priestor, elementárna udalosť a náhodná udalosť*. Určíme výberový priestor a udalosti náhodného experimentu. Definujeme zložené udalosti z existujúcich udalostí pomocou množinových operácií. Definujeme, kedy sú dané udalosti disjunktné (vzájomne sa vylučujúce) a kedy tvoria úplný systém. Na zobrazenie výberového priestoru a udalostí použijeme Vennove diagramy a stromové diagramy.

Náhodný experiment a pokus

Experiment, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, za ktorých prebieha a ktorý možno ľubovoľne veľakrát zopakovať za tých istých podmienok, nazývame **náhodný experiment**. Realizácia náhodného experimentu sa nazýva **náhodný pokus** alebo len **pokus**.

V náhodnom experimente sú niektoré zdroje premenlivosti výsledkov kontrolovateľné a niektoré nekontrolovateľné. Napríklad, pri skúšaní životnosti žiaroviek k zdrojom premenlivosti (variability) patrí materiál, výrobný postup, výrobné prostredie (teplota, vlhkosť atď.), merací prístroj, kolísanie elektrického prúdu, pozorovateľ (merač).

Pre modelovanie a analýzu náhodného experimentu musíme poznať množinu možných výsledkov experimentu.

Výberový priestor a elementárna udalosť

Množina všetkých možných výsledkov náhodného experimentu sa nazýva **výberový priestor** tohto experimentu. Označuje sa značkou Ω. Výsledok náhodného experimentu sa nazýva **elementárna udalosť** a označuje sa zvyčajne malým písmenom.

Výberový priestor sa často definuje na základe cieľov danej analýzy.

Príklad 1.1

Určime **v**ýberový priestor experimentu, v ktorom vyberieme plastový výlisok konektora a odmeriame jeho hrúbku. Možné hodnoty hrúbky závisia od presnosti meracieho prístroja a tiež od hornej špecifikačnej hranice a dolnej špecifikačnej hranice pre hrúbku.

Pretože záporné hodnoty hrúbky sa nemôžu vyskytnúť, výberový priestor by sme mohli definovať ako množinu kladných reálnych čísiel

$$\Omega = R^+ = \{x | x > 0\}$$

Keď zoberieme do úvahy, že hrúbka konektorov má byť väčšia ako 11 mm a menšia ako 12 mm, výberový priestor by mohol byť

$$\Omega = \{x | 11 < x < 12\}$$

Keď analýza má za cieľ iba posúdiť, či určitý dielec má malú, strednú alebo veľkú hrúbku, potom výberový priestor by sa mohol definovať:

$$\Omega = \{\text{malá, stredná, veľká}\}$$

Keď cieľom analýzy je iba skúmať, či určitý dielec vyhovuje alebo nevyhovuje výrobným špecifikáciám, potom by sa výberový priestor mohol zjednodušiť na množinu dvoch výsledkov:

$$\Omega = \{\text{vyhovuje,nevyhovuje}\}$$

Existujú dva typy výberových priestorov diskrétny výberový priestor a spojitý výberový priestor.

- Diskrétny výberový priestor pozostáva z konečnej alebo spočítateľnej množiny možných výsledkov.
- Spojitý výberový priestor je interval (konečný alebo nekonečný) reálnych čísel.

Poznámka. V tomto príklade je výberový priestor $\Omega = \{\text{vyhovuje, nevyhovuje}\}$ diskrétny a výberový priestor $\Omega = R^+$ spojitý.

Príklad 1.2

V experimente vyberieme dvojicu konektorov a odmeriame ich hrúbku. Výberový priestor bude kladný kvadrant v rovine

$$\Omega = R^+ \times R^+$$

V prípade, že analýza má za cieľ posúdiť, či určitý konektor vyhovuje alebo nevyhovuje špecifikáciám, potom výsledok „vyhovuje“ označíme „*v*“ a výsledok „nevyhovuje“ označíme „*n*“. Ak usporiadaná dvojica „*vn*“ znamená, že prvý konektor vyhovuje a druhý nevyhovuje špecifikáciám, výberový priestor reprezentujú štyri výsledky:

$$\Omega = \{vv, vn, nv, nn\}$$

Keď sa zaujímame iba o počet vyhovujúcich konektor vo výbere, výberový priestor bude

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

Ako ďalší príklad uvažujme experiment, v ktorom sa hrúbka meria dovtedy, kým vybraný konektor nespĺňa špecifikácie. Výberový priestor môže byť reprezentovaný takto

$$\Omega = \{n, vn, vvn, vvvn, vvvvn, \ldots\}$$

Teraz uvažujme náhodný experiment, v ktorom sa vyberajú jednotky z dávky na kontrolu. Pred začiatkom experimentu sa rozhodne, či sa má skontrolovaná jednotka pred výberom ďalšej jednotky vrátiť naspäť.

Výber bez opakovania

V prípade náhodného experimentu, v ktorom sa už vybraná jednotka nevráti naspäť do súboru, ide o *výber bez opakovania.* To znamená, že sa žiadna jednotka zo súboru nemôže dostať do výberu viackrát. Teda zloženie súboru, z ktorého vyberáme, sa po každom vybraní jednotky mení.

Ak napríklad súbor obsahuje tri jednotky $\{x, y, z\}$ a v našom experimente vyberáme dve jednotky bez opakovania, výberový priestor reprezentuje množina

$$\Omega = \{xy, xz, yx, yz, zx, zy\}$$

Tento výberový priestor zachováva poradie vybraných jednotiek tak, že výsledky *xy* a *yx* sú dva rôzne prvky výberového priestoru.

Výberový priestor, ktorý neuvažuje poradie vybraných jednotiek, reprezentuje množina

$$\Omega = \{\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$$

Niekedy sú potrebné usporiadané výsledky, inokedy zase postačia neusporiadané výsledky.

Výber s opakovaním

V náhodnom experimente, v ktorom sa každá vybraná jednotka pred vyberaním ďalšej jednotky vráti späť do súboru, z ktorého vyberáme, ide o *výber s opakovaním.*

Ak sa v predchádzajúcom experimente budú vyberať dve jednotky s opakovaním, výberový priestor usporiadaných výsledkov predstavuje množinu

$$\Omega = \{xx, xy, xz, yx, yy, yz, zx, zy, zz\}$$

a neusporiadané výsledky tvoria výberový priestor

$$\Omega = \{\{x,x\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,y\},\{y,z\},\{z,z\}\}$$

Poznámka. Ak je rozsah súboru dostatočne veľký a výber predstavuje len pomerne malú časť, nie je nutné medzi obidvoma spôsobmi výberu rozlišovať. Výber bez opakovania sa častejšie vyskytuje v priemyselných aplikáciách.

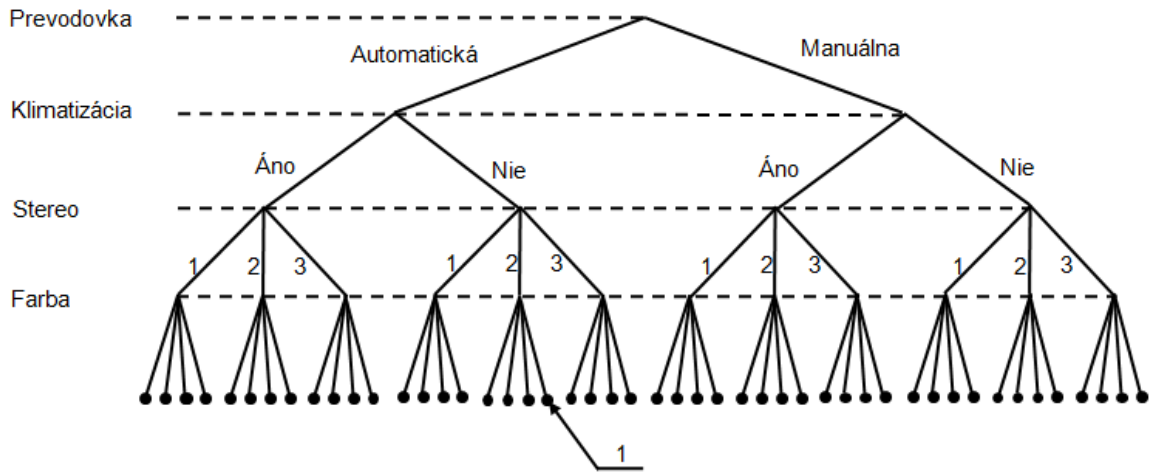
Stromový diagram

Výberové priestory možno opísať aj graficky pomocou **stromových diagramov**. Uvedieme príklad.

Príklad 1.3

Výrobca automobilov dodáva vozidlá vybavené podľa vybraných požiadaviek. Vozidlo sa objednáva s automatickou prevodovkou alebo bez nej, s klimatizáciou alebo bez nej, s jednou z troch volieb stereofónnej sústavy a s jednou zo štyroch farieb exteriéru. Ak sa výberový priestor skladá z množiny všetkých možných typov vozidla, aký je počet výsledkov vo výberovom priestore?

Výberový priestor obsahuje 48 výsledkov, čo dostaneme aj pomocou stromového diagramu na obrázku 1.1.



1. Automatická prevodovka, bez klimatizácie, stereo typu 2, farba exteriéru 4.

Obrázok 1.1. *Stromový diagram rôznych typov vozidiel*

Často nás zaujímajú iba niektoré z výsledkov náhodného experimentu t. j. nejaká podmnožina množiny všetkých možných výsledkov.

Náhodná udalosť

Náhodná udalosť (ďalej len **udalosť**) je podmnožina výberového priestoru patriaceho k náhodnému experimentu. Výberový priestor Ω je tzv. **istá udalosť**. Opakom je tzv. **nemožná udalosť**, ktorá nemôže nastať pri žiadnej z realizácií náhodného experimentu. Označujeme ju značkou $\varnothing$.

Náhodné udalosti budeme označovať veľkými písmenami A, B, C ..., a ak treba budeme písmena indexovať. S udalosťami budeme vykonávať operácie ako s množinami.

1.2 Operácie s náhodnými udalosťami

Na definovanie novej udalosti zloženej z existujúcich použijeme množinové operácie.

Zjednotenie náhodných udalostí

Zjednotením náhodných udalostí $A_1, A_2, ..., A_n$ budeme nazývať udalosť, ktorá nastane práve vtedy, keď nastane aspoň jedna z udalostí $A_1, A_2, ..., A_n$. Označovať ju budeme takto:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Prienik náhodných udalostí

Prienikom náhodných udalostí $A_1, A_2, ..., A_n$ budeme nazývať udalosť, ktorá nastane práve vtedy, keď nastanú súčasne všetky udalosti $A_1, A_2, ..., A_n$. Označovať ju budeme takto:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Implikácia dvoch náhodných udalostí

Udalosť A implikuje udalosť B vtedy, keď udalosť B nastane vždy, keď nastane udalosť A. Vzťah „A implikuje B“ zapíšeme takto:

$$A \subset B$$

Totožnosť (ekvivalentnosť) dvoch náhodných udalostí

Dve udalosti A a B sú totožné (ekvivalentné) $A = B$ práve vtedy, keď platí:

$$A \subset B \quad \text{a} \quad B \subset A$$

Doplnok náhodnej udalosti

Doplnok náhodnej udalosti A je náhodná udalosť A', ktorá nastane práve vtedy, keď A nenastane. Platí vzťah:

$$A' = \Omega - A$$

Rozdiel náhodných udalostí

Rozdiel udalosti A a B je udalosť, ktorá nastane práve vtedy, keď udalosť A nastane a súčasne udalosť B nenastane. Označuje sa takto:

$$A - B = A \cap B'$$

Pre ľubovoľné udalosti E_1 a E_2 patriace danému náhodnému experimentu možno aplikovať nasledujúce zákony:

1. **Komutatívny zákon**

$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1 \qquad E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$$

2. **Distributívny zákon**

$$\left(E_1 \cap E_2\right) \cup E_3 = \left(E_1 \cup E_3\right) \cap \left(E_2 \cup E_3\right)$$

$$\left(E_1 \cup E_2\right) \cap E_3 = \left(E_1 \cap E_3\right) \cup \left(E_2 \cap E_3\right)$$

3. **De Morganove pravidlá**

$$\left(E_1 \cap E_2\right)' = E_1' \cup E_2' \qquad \left(E_1 \cup E_2\right)' = E_1' \cap E_2'$$

Príklad 1.4

Meranie času potrebného na ukončenie chemickej reakcie, by sa mohlo modelovať pomocou výberového priestoru $\Omega = R^+$, čo je množina kladných reálnych čísel. Definujme dve udalosti

$$A = \left\{x \middle| 2 \le x < 8\right\} \quad \text{a} \quad B = \left\{x \middle| 4 < x < 98\right\}$$

Potom ich zjednotenie a prienik dáva tieto dve udalosti:

$$A \cup B = \left\{x \middle| 2 \le x < 98\right\} \quad \text{a} \quad A \cap B = \left\{x \middle| 4 < x < 8\right\}$$

Okrem toho

$$A' = \left\{x \middle| 0 < x < 2 \text{ alebo } x \ge 8\right\} \quad \text{a} \qquad A' \cap B = \left\{x \middle| 8 \le x < 98\right\}$$

Disjunktné (vzájomne sa vylučujúce) udalosti a úplný systém

Dve udalosti *A, B* sú **disjunktné** (**vzájomne sa vylučujúce**), ak nemajú žiaden výsledok spoločný. Pre disjunktné udalosti platí:

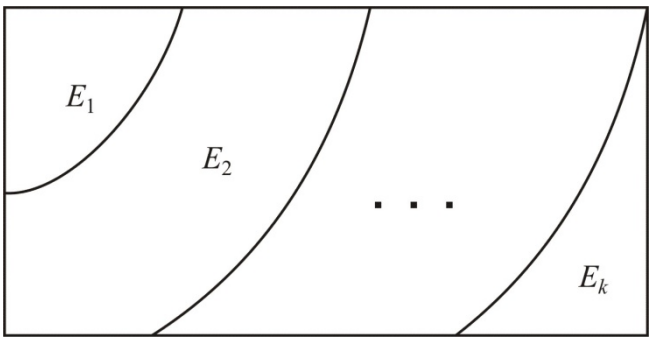
$$A \cap B = \emptyset$$

Udalosti $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sú **disjunktné** (**vzájomne sa vylučujúce**), ak nemajú žiaden výsledok spoločný. Pre disjunktné udalosti platí:

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{pre všetky dvojice } (i, j);\ i \ne j\ .$$

Disjunktné udalosti $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tvoria **úplný systém**, ak sa ich zjednotenie rovná Ω t. j.

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k = \Omega$$



Obrázok 1.2. *Vzájomne sa vylučujúce udalosti tvoriace úplný systém*

Príklad 1.5

V experimente hodíme naraz dvomi hracími kockami. Určime:

a) (*Výberový priestor*) Definujme výberový priestor experimentu.
Výberový priestor je $\Omega = \{(x,y) | x = 1,\ldots,6; y = 1,\ldots,6\}$, kde x a y reprezentujú výsledok každej kocky. Pretože je 6 možných výsledkov na prvej aj druhej kocke, výberový priestor obsahuje $6 \times 6 = 36$ výsledkov.

b) (*Udalosť*) Z výberového priestoru zistime dvojice, ktorých súčet sa rovná 5 (A) a dvojice, ktorých prvá kocka ukazuje nepárne číslo (B).

$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

$$B = \{(1,\ ),(1,2),\ldots,(1,6),(3,1),(3,2),\ldots,(3,6),(5,1),(5,2),\ldots,(5,6)\}$$

c) (*Množinové operácie s udalosťami*) Vyjadrime $A \cup B;\ A \cap B;\ B'$.

$$A \cup B = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,3),(3,1),(3,2),\ldots,(3,6),(4,1),(5,1),(5,2),\ldots,(5,6)\}$$

$$A \cap B = \{(1,4),(3,2)\}$$

$$B' = \{(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),(4,1),(4,2),\ldots,(4,6),(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$$

d) (*Vzájomne sa vylučujúce udalosti*) Sú udalosti A a B vzájomne sa vylučujúce?
Nie, lebo $A \cap B \neq \emptyset$

e) (*Úplný systém udalostí*) Tvoria udalosti A a B úplný systém?
Nie, lebo $A \cup B \neq \Omega$

Príklad 1.6

Náhodný experiment spočíva v hádzaní kockou jedenkrát. Definujeme udalosti A – padnutie párneho čísla a B – padnutie čísla deliteľného tromi. Čo znamenajú udalosti $A \cup B,\ A \cap B,\ A',\ B',\ A - B,\ B - A$? Odpovede vyjadríme slovne aj množinovo.

$A \cup B$ znamená padnutie niektorého z čísel 2, 3, 4, 6, t. j. $A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

$A \cap B$ znamená padnutie čísla 6, t. j. $A \cap B = \{6\}$

A' znamená padnutie nepárneho čísla, t. j. $A' = \{1,\ 3,\ 5\}$

B' znamená padnutie niektorého z čísel 1, 2, 4, 5, t. j. $B' = \{1, 2, 4, 5\}$

$A - B$ padnutie niektorého z čísel 2, 4, t. j. $A - B = \{2, 4\}$

$B - A$ znamená padnutie čísla 3, t. j. $B - A = \{3\}$

Príklad 1.7

Utvorte úplný systém udalostí z udalostí A_1 – výrobok v záruke funguje dobre, A_2 – výrobok je v záruke opravený (nevyhnutná aspoň jedna oprava), A_3 – výrobok je v záruke vymenený (nedá sa opraviť).

Ø – výrobok funguje dobre a je vymenený

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ - výrobok funguje dobre alebo je v záruke opravený alebo vymenený

$A_1 \cup A_2$ – výrobok nie je vymenený

$A_1 \cup A_3$ výrobok neprechádza záručnou opravou

$A_2 \cup A_3$ výrobok nefunguje v záručnej dobe dobre.

1.3 Pojem pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť náhodnej udalosti je kvantitatívne vyjadrená miera možnosti nastania tejto udalosti v náhodnom experimente. V tejto časti uvedieme tri definície pravdepodobnosti.

Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Nech *S* je systém podmnožín výberového priestoru Ω, pre ktorý platí:

- $\Omega \in S$
- Ak $A \in S$, tak $\overline{A} = \Omega - A \in S$
- Ak $A_1, A_2, \ldots \in S$, tak platí $\bigcup_i A_i \in S$

Pravdepodobnosť P je reálna funkcia definovaná na systéme *S*, ktorá splňuje podmienky:

1. $P(A) \geq 0$
2. Ak $A_1, A_2, \ldots \in S$ sú disjunktné, tak $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$
3. $P(\Omega) = 1$

Vlastnosti pravdepodobnosti

1. Ak $A \subset B$, tak $P(A) \leq P(B)$
2. Ak $A = B$, tak $P(A) = P(B)$
3. $P(A') = 1 - P(A)$
4. $P(Ø) = 0$; Ak $P(A) = 0$, z toho nevyplýva, že $A = Ø$

5. Ak A a B nie sú disjunktné, tak $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. Ak A, B a C nie sú disjunktné, tak

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Všetko, čo sme doteraz povedali, nestačí no to, aby sme vedeli vypočítať pravdepodobnosť nejakej udalosti A, preto potrebujeme ďalšie definície.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Ak sa výberový priestor skladá z n výsledkov, ktoré majú rovnakú možnosť nastania, tak pravdepodobnosť každého výsledku je $1/n$. Pravdepodobnosť ľubovoľnej udalosti A obsahujúcej k rovnako možných výsledkov je potom

$$P(A) = \frac{k}{n} \tag{1.1}$$

Príklad 1.8

Pre udalosti z príkladu 1.5 vypočítame ich pravdepodobnosti. Vieme, že výberový priestor obsahuje $n = 36$ výsledkov s rovnakou možnosťou nastania.

Udalosť A obsahuje štyri výsledky, preto podľa klasickej definície $P(A) = 4/36$. Podobne vypočítame aj pravdepodobnosti ostatných udalostí z príkladu 1.5:

$$P(B) = 18/36, \quad P(A \cup B) = 20/36, \quad P(A \cap B) = 2/36 \text{ a } P(B') = 18/36$$

Príklad 1.9

V skupine 100 súčiastok je 70 v medziach špecifikácií, 20 nezhodných, ale opraviteľných a 10 nezhodných a neopraviteľných. Chceme vypočítať pravdepodobnosť udalostí, že náhodne vytiahnutá súčiastka je v medziach predpísanej tolerancie (A), nezhodná, ale opraviteľná (B), nezhodná a neopraviteľná (C).

Výberový priestor Ω obsahuje 100 rovnako možných výsledkov. Pre udalosti A, B, C platí: $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ a $A \cup B \cup C = \Omega$. Teda uvedené tri udalosti sú vzájomne sa vylučujúce a tvoria úplný systém. Potom

A = {70 možných výsledkov} $\Rightarrow$ $P(A) = 70/100 = 0{,}7$
B = {20 možných výsledkov} $\Rightarrow$ $P(B) = 20/100 = 0{,}2$
C = {70 možných výsledkov} $\Rightarrow$ $P(C) = 10/100 = 0{,}1$

Príklad 1.10

V sklade laboratórneho skla je 50 rovnako veľkých baniek, z nich je 6 nesprávne ociachovaných. Zo skladu prinesieme do laboratória 4 náhodne vybraté banky. Chceme vypočítať pravdepodobnosť udalosti A, že všetky sú správne ociachované.

Výberový priestor obsahuje $\binom{50}{4}$ rovnako možných štvoríc. Udalosť A obsahuje počet štvoríc vybraných zo 44 správne ociachovaných t. j. $\binom{44}{4}$. Potom platí, že

$$\mathrm{P}(A) = \binom{44}{4} / \binom{50}{4} = 0{,}59$$

Poznámka. Predpoklad klasickej definície nie je však vždy splnený. V prípade, že výrobca chce napríklad zistiť nepodarkovosť výrobku, nemôže ju vypočítať z dosiaľ uvedeného. V takomto prípade nám pomôže definícia založená na výpočte relatívnej početnosti nastania sledovanej udalosti *A*.

Relatívna početnosť

Predstavme si postupnosť veľkého počtu *n* realizácií nejakého náhodného pokusu. Označme $k(n)$ počet realizácií náhodného pokusu pri, ktorých nastala udalosť *A*. Relatívna početnosť $h_n(A)$ náhodnej udalosti *A* v danej sérii *n* pokusov je

$$h_n(A) = \frac{k(n)}{n} \tag{1.2}$$

Pre relatívnu početnosť platí:

- $0 \le h_n(A) \le 1$,
- $h_n(\Omega) = 1$, t. j. relatívna početnosť istej udalosti sa rovná 1,
- $h_n(\emptyset) = 0$, t. j. relatívna početnosť nemožnej udalosti sa rovná 0,
- $h_n(A) = h_n(A_1) + h_n(A_2) + ... + h_n(A_n)$, kde A_1, A_2, ..., A_n je postupnosť navzájom disjunktných udalostí a udalosť *A* je ich zjednotením.

Pomocou relatívnych početností môžeme porovnať, ktorá udalosť v danej sérii pokusov nastala častejšie a ktorá zriedkavejšie. Udalosť s väčšou relatívnou početnosťou nastala častejšie, ako udalosť s menšou relatívnou početnosťou. Ak urobíme viac sérií pokusov v tom istom náhodnom experimente, môžeme sa presvedčiť, že relatívna početnosť vykazuje štatistickú stabilitu, t. j. s rastúcim počtom pokusov relatívna početnosť kolíše stále v užších medziach okolo určitej pevnej hodnoty. Táto zákonitosť vedie k myšlienke charakterizovať stupeň objektívnej možnosti nastania náhodnej udalosti jediným pevným číslom, ktoré nazveme *pravdepodobnosť náhodnej udalosti.*

Štatistická definícia pravdepodobnosti

Keď nezávisle *n*-krát opakujeme pokusy v danom náhodnom experimente a sledovaná udalosť *A* nastane *k*-krát, potom relatívna početnosť nastania udalosti *A* je $h_n(A) = \frac{k(n)}{n}$; ak pre $n \to \infty$ bude relatívna početnosť kolísať v stále užších medziach okolo určitého čísla, môžeme predpokladať, že toto číslo je pravdepodobnosť udalosti *A*, t. j. $P(A) = \lim_{n\to\infty} h_n(A)$. Hodnotu $P(A)$ odhadneme pomocou relatívnej početnosti

$$P(A) \approx h_n(A) = \frac{k(n)}{n} \tag{1.3}$$

Poznámka. Rozdiel medzi klasickou a štatistickou definíciou je v tom, že pri klasickej definícii sme podiel priaznivých *k* a všetkých možných *n*, t. j. relatívnu početnosť, dostali na základe objektívnych vlastností skúmaných udalostí; vypočítali sme ju pred realizáciou náhodného experimentu. Pri použití štatistickej definície relatívnu početnosť vypočítame zo skutočne vykonaných pokusov v náhodnom experimente.

1.4 Podmienená pravdepodobnosť

Hodnota pravdepodobnosti $P(A)$ náhodnej udalosti A závisí od podmienok, pri ktorých prebieha daný náhodný experiment. Za stálych podmienok je táto pravdepodobnosť konštantná. Ak sa zmenia podmienky experimentu, môže sa zmeniť aj pravdepodobnosť udalosti A. Vieme napríklad, že nastala udalosť B. Chceme vedieť, ako sa zmenila pravdepodobnosť udalosti A za podmienky, že nastala udalosť B. Vysvetlíme si to na príklade.

Príklad 1.11

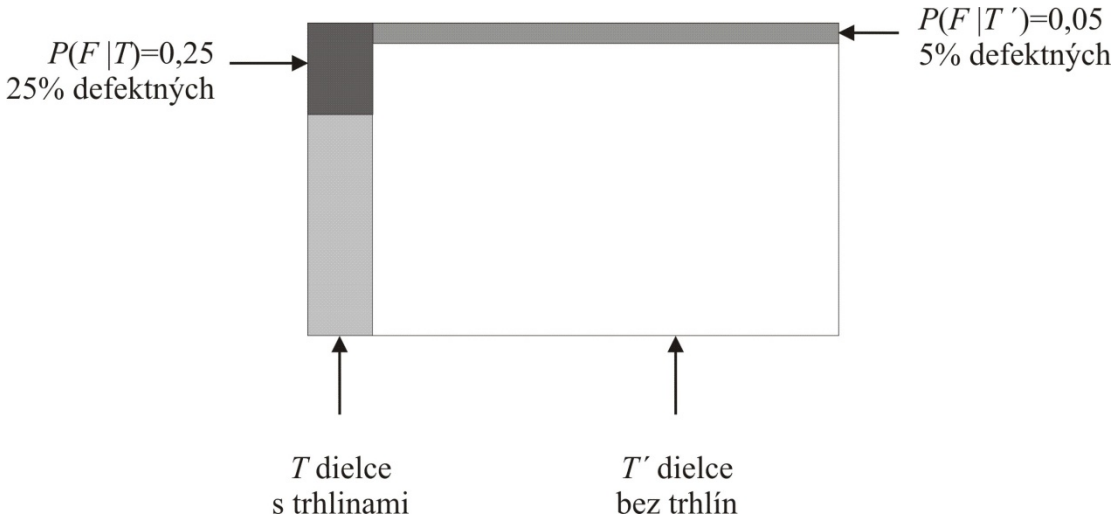
Vo výrobnom procese 10 % z dielcov má trhliny na povrchu a 25 % z dielcov s trhlinami na povrchu je funkčne defektných. Avšak iba 5 % z dielcov bez trhlín na povrchu je defektných. Pravdepodobnosť defektného dielca závisí od našej znalosti a prítomnosti alebo absencie povrchových trhlín. Nech počet všetkých vyššie klasifikovaných dielcov podľa trhlín na povrchu a funkčnej defektnosti je 4000. Klasifikácia dielcov je v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 1.1 *Klasifikácia dielcov*

Funkčná defektnosť	Trhliny na povrchu		
	áno	nie	$\sum$
áno	100	180	280
nie	300	3420	3720
$\sum$	400	3600	4000

Nech F označuje udalosť, že dielec má funkčnú defektnosť a nech T je udalosť, že dielec má povrchové trhliny. Potom označme pravdepodobnosť udalosti F za podmienky, že dielec má na povrchu trhliny ako $P(F|T)$. Tento zápis čítame ako *pravdepodobnosť udalosti F podmienená udalosťou T.* Interpretujeme to ako pravdepodobnosť, že dielec má funkčnú defektnosť, ak bol vybraný z dielcov, ktoré majú trhliny na povrchu. Pretože 25% z dielcov s trhlinami na povrchu má funkčnú defektnosť, môžeme tvrdiť, že $P(F|T) = 0,25$. Nech ďalej T' je udalosť, že dielec nemá povrchové trhliny. Pretože 5% z dielcov bez trhlín je defektných, môžeme tvrdiť, že $P(F|T') = 0,05$. Výsledky sú uvedené na obrázku 1.1.

Podmienené pravdepodobnosti možno vypočítať priamo z tabuľky. Napríklad, dielcov s trhlinami na povrchu je 400, z toho má funkčnú defektnosť 10 dielcov, preto $P(F|T) = 100/400 = 0,25$.



Obrázok 1.3. Podmienené pravdepodobnosti dielcov

Podmienené pravdepodobnosti možno vypočítať priamo z tabuľky. Napríklad, dielcov s trhlinami na povrchu je 400, z toho má funkčnú defektnosť 10 dielcov, preto

$$P(F|T) = 100/400 = 0,25$$

Dielcov bez trhlín je 3600, z toho má funkčnú defektnosť 180 dielcov. Preto

$$P(F|T') = 180/3600 = 0,05$$

V príklade 1.11 sme podmienené pravdepodobnosti vypočítali priamo z tabuľky. Podmienené pravdepodobnosti možno vypočítať aj pomocou nasledujúcej definície.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť udalosti B podmienená udalosťou A, označovaná ako $P(B|A)$, je

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0 \tag{1.4}$$

Príklad 1.12

Pomocou predchádzajúcej definície vypočítajme z tabuľky 1.1 podmienenú pravdepodobnosť

$$P(F|T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{100}{4000}}{\frac{400}{4000}} = \frac{100}{400}$$

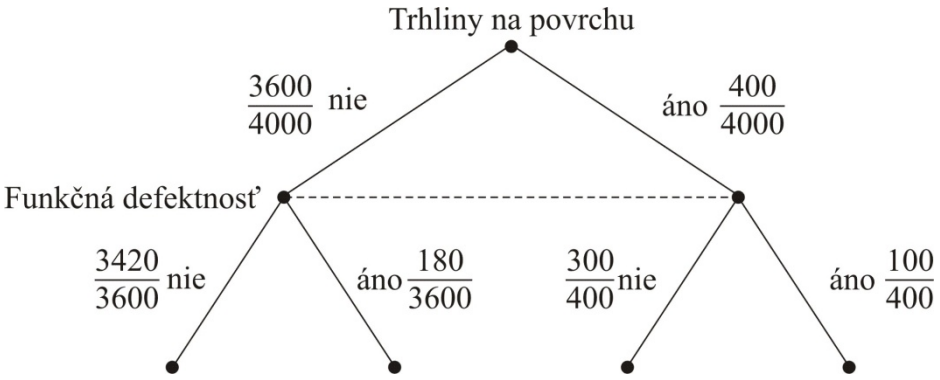
Všimnime si nasledujúce pravdepodobnosti:

$$P(T) = 400/4000 \qquad P(T|F) = 100/280$$

$$P(F) = 280/4000 \qquad P(F|T) = 100/400$$

Vidíme, že pravdepodobnosti $P(T)$ a $P(T|F)$ nie sú rovnaké, hoci ide o pravdepodobnosť tej istej udalosti *T*. Rozdiel medzi nimi súvisí s tým, že boli vypočítané pri rôznych úrovniach poznania. Podobne pre udalosť *F* sú pravdepodobnosti $P(F)$ a $P(F|T)$ vypočítané pri rôznych úrovniach poznania.

Na výpočet podmienených pravdepodobností možno použiť aj **stromový diagram**:



Obrázok 1.4. *Stromový diagram klasifikácie dielcov*

Vlastnosti podmienených pravdepodobností

Podmienené pravdepodobnosti majú rovnaké vlastnosti ako nepodmienené pravdepodobnosti.

1. Pre ľubovoľnú udalosť *A* je $0 \le P(A|B) \le 1$
2. Ak $A_1, A_2, \ldots$ je ľubovoľný konečný alebo spočítateľný systém vzájomne sa vylučujúcich udalostí, tak $P\left(\bigcup_i A_i | B\right) = \sum_i P(A_i|B)$
3. Ak $B \subset A$, tak $P(A|B) = 1$
4. Ak $A_1 \subset A_2$, tak $P(A_1|B) \le P(A_2|B)$
5. $P((B-A)|B) = 1 - P(A|B)$

Pravidlo o násobení pravdepodobností

Z definície podmienenej pravdepodobnosti vyplýva nasledujúce *pravidlo o násobení pravdepodobností:*

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B) \tag{1.5}$$

Tento vzorec možno metódou úplnej indukcie zovšeobecniť na prienik ľubovoľného počtu *n* udalostí.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\cdot P\left(A_2\middle|A_1\right)\cdot P\left(A_3\middle|A_1\cap A_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n\middle|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \tag{1.6}$$

Pravidlá o úplnej pravdepodobnosti

1. Pre ľubovoľné udalosti A a B platí:

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A') = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') \tag{1.7}$$

2. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_k$ je úplný systém vzájomne sa vylučujúcich (disjunktných) udalostí, t. j. ich pravdepodobnosti spĺňajú podmienky

$$P(A_i) > 0 \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, k \quad \text{a} \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = 1 .$$

Ďalej nech B je ľubovoľná udalosť, ktorej pravdepodobnosť $P\left(B\middle|A_i\right)$ podmienená udalosťou A_i je pre každé i známa. Potom pravdepodobnosť udalosti B sa rovná

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P\left(B\middle|A_i\right)P(A_i) \tag{1.8}$$

Príklad 1.13

Predpokladáme, že vyrobené polovodiče majú nasledujúce pravdepodobnosti poruchy výrobku vzhľadom na úroveň kontaminácie pri výrobe:

Pravdepodobnosť poruchy	Úroveň kontaminácie
0,10	vysoká
0,01	stredná
0,001	nízka

V istom výrobnom postupe 20 % z čipov má vysokú úroveň kontaminácie, 30 % strednú a 50% nízku úroveň kontaminácie. Chceme zistiť, aká je pravdepodobnosť, že výrobok používajúci jeden z týchto čipov prestane fungovať.

Nech

V je udalosť, že čip je exponovaný na vysokú úroveň kontaminácie;
S je udalosť, že čip je exponovaný na strednú úroveň kontaminácie;
N je udalosť, že čip je exponovaný na nízku úroveň kontaminácie;
C je udalosť, že výrobok používajúci jeden z týchto čipov prestane fungovať.

Potom

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C\cap V) + P(C\cap S) + P(C\cap N) = \\ &= P(C|V)P(V) + P(C|S)P(S) + P(C|N)P(N) = \\ &= 0{,}10\cdot 0{,}20 + 0{,}01\cdot 0{,}30 + 0{,}001\cdot 0{,}50 = 0{,}0235 \end{aligned}$$

Tento problém možno riešiť aj pomocou stromového diagramu. Riešenie nechávame čitateľovi ako cvičenie.

Príklad 1.14

V prístroji sú tri lampy, ktoré pracujú nezávisle. Pravdepodobnosť poruchy prvej lampy je 0,1, druhej lampy je 0,2 a tretej lampy 0,3. Prístroj je vyradený z prevádzky pri poruche jednej z lámp s pravdepodobnosťou 0,25, pri poruche dvoch lámp 0,6 a troch lámp s pravdepodobnosťou 0,9. Porucha prístroja nemôže nastať, ak všetky tri lampy fungujú. Určíme pravdepodobnosť toho, že prístroj bude vyradený z prevádzky.

Označme A udalosť „porucha prístroja“, A_i udalosť „porucha i-tej lampy“ ($i = 1,\ 2,\ 3$) a B_j udalosť „porucha práve j lámp“ ($j = 0,\ 1,\ 2,\ 3$). Pomocou udalostí A_i môžeme vyjadriť udalosti B_j takto:

$$B_0 = A_1' \cap A_2' \cap A_3'$$

$$B_1 = \left(A_1 \cap A_2' \cap A_3'\right) \cup \left(A_1' \cap A_2 \cap A_3'\right) \cup \left(A_1' \cap A_2' \cap A_3\right),$$

$$B_2 = \left(A_1 \cap A_2 \cap A_3'\right) \cup \left(A_1 \cap A_2' \cap A_3\right) \cup \left(A_1' \cap A_2 \cap A_3\right)$$

$$B_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Zo zadania vieme, že udalosti A_i sú vzájomne nezávislé, z čoho vyplýva, že aj každá trojica udalostí, ktoré tvoria uvedené prieniky, sa skladá z troch vzájomne nezávislých udalostí. Ďalej vieme, že všetky uvedené udalosti v zjednoteniach sú disjunkné. Na základe tejto úvahy platí pre pravdepodobnosti uvedených udalostí:

$$P\left(B_0\right) = P\left(A_1' \cap A_2' \cap A_3'\right) = \prod_{i=1}^{3} P\left(A_i'\right) = (1-0{,}1)(1-0{,}2)(1-0{,}3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 =$$
$$= 0{,}504$$

Podobne vypočítame aj $P\left(B_3\right)$, t. j. $P\left(B_3\right) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$

$$P\left(B_1\right) = P\left(A_1 \cap A_2' \cap A_3'\right) + P\left(A_1' \cap A_2 \cap A_3'\right) + P\left(A_1' \cap A_2' \cap A_3\right)$$
$$= P\left(A_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right) + P\left(\overline{A}_1\right)P\left(A_2\right)P\left(\overline{A}_3\right) + P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(A_3\right) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}398$$

Podobne vypočítame aj $P\left(B_2\right)$. Platí:

$$P\left(B_2\right) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}092$$

Udalosti B_j ($j = 0,\ 1,\ 2,\ 3$) tvoria úplný systém disjunktných udalostí. Zo zadania vieme, že porucha nemôže nastať, ak všetky tri lampy fungujú, t. j. $P\left(A \middle| B_0\right) = 0$. Tiež vieme, že $P\left(A \middle| B_1\right) = 0{,}25$, $P\left(A \middle| B_2\right) = 0{,}6$, $P\left(A \middle| B_3\right) = 0{,}9$. Podľa pravidla o úplnej pravdepodobnosti teda platí:

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P\left(A\middle|B_i\right)P\left(B_i\right)=0\cdot 0,504+0,25\cdot 0,398+0,6\cdot 0,092+0,9\cdot 0,006=0,16$$

Bayesova veta

Nech udalosti A_1, A_2, ..., A_k a B spĺňajú všetky predpoklady druhého pravidla o úplnej pravdepodobnosti. Ďalej nech C je ľubovoľná udalosť. Potom pravdepodobnosť udalosti A_i podmienená udalosťou B sa rovná

$$P\left(A_i\middle|B\right)=\frac{P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\middle|A_i\right)}{\sum_{i=1}^{k}P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\middle|A_i\right)}\ \text{pre}\ i=1,\,2,\,...,\,k \tag{1.9}$$

a pravdepodobnosť udalosti C podmienená udalosťou B sa rovná

$$P\left(C\middle|B\right)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\middle|A_i\right)\cdot P\left(C\middle|B\cap A_i\right)}{\sum_{i=1}^{k}P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\middle|A_i\right)} \tag{1.10}$$

Poznámka. Bayesova veta sa nazýva aj veta o pravdepodobnosti hypotéz alebo veta o inverznej pravdepodobnosti. Je dôsledkom základných vlastností podmienenej pravdepodobnosti. Náhodné udalosti A_i ($i=1,\,2,\,...,\,k$) v uvedených vzťahoch sa nazývajú *hypotézami*. Vzťah (1.9) sa nazýva *prvý Bayesov vzorec* a vzťah (1.10) *druhý Bayesov vzorec*. Ak v (1.10) položíme $C=A_i$, dostaneme vzťah (1.9), z čoho vyplýva, že prvý Bayesov vzorec je špeciálnym prípadom druhého Bayesovho vzorca.

Príklad 1.15

Do obchodu dodávajú dve firmy výrobky rovnakého druhu v pomere dva ku trom. Pravdepodobnosť, že prvá firma vyrobila dobrý výrobok, je 0,82. Pre druhú firmu je táto pravdepodobnosť 0,91. Zákazník si kúpil výrobok a po čase zistil, že je dobrý. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že ho vyrobila prvá firma a tiež pravdepodobnosť, že ho vyrobila druhá firma.

Označme B udalosť, že „kúpený výrobok je dobrý“ a A_i udalosť, že „kúpený výrobok vyrobila i-tá firma“ ($i=1,\,2$). Zo zadania platí, že

$$P\left(A_1\right)=2/5=0,4;\ P\left(A_2\right)=3/5=0,6;\ P\left(B\middle|A_1\right)=0,82;\ P\left(B\middle|A_1\right)=0,91$$

Po dosadení do (1.9) dostaneme:

$$P\left(A_1\middle|B\right)=\frac{0,4\cdot 0,82}{0,4\cdot 0,82+0,6\cdot 0,91}=0,375$$

$$P\left(A_2\middle|B\right)=1-P\left(A_1\middle|B\right)=0,625$$

Príklad 1.16

V piatich škatuliach sú uložené teplomery. V prvej škatuli je z 12 teplomerov 11 dobrých, z 20 teplomerov v druhej škatuli je 17 dobrých a v tretej škatuli zo 14 teplomerov je dobrých 9. Vo štvrtej škatuli je 16 teplomerov, z toho je 13 dobrých a v piatej škatuli je 11

dobrých z 18 teplomerov. Vyberieme náhodne z niektorej škatule jeden teplomer a zistíme, že je dobrý. Z tej istej škatule vyberieme ešte jeden teplomer, pričom prvý vybraný teplomer sme nevrátili naspäť. Chceme zistiť, aká je pravdepodobnosť, že aj druhý vybraný teplomer bude dobrý.

Označme náhodné udalosti takto:

A_i − teplomer bol vybraný z *i*–tej škatule,

B – prvý vybraný teplomer bol dobrý,

C – druhý vybraný teplomer bol dobrý.

Zo zadania vieme, že $P(A_i)=\frac{1}{5}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ a známe sú aj podmienené pravdepodobnosti

$$P(B|A_1)=\frac{11}{12},\ P(B|A_2)=\frac{17}{20},\ P(B|A_3)=\frac{9}{14},\ P(B|A_4)=\frac{13}{16},\ P(B|A_5)=\frac{11}{18},$$

$$P(C|B\cap A_1)=\frac{10}{11},\ P(C|B\cap A_2)=\frac{16}{19},\ P(C|B\cap A_3)=\frac{8}{13},\ P(C|B\cap A_4)=\frac{12}{15},$$

$$P(C|B\cap A_5)=\frac{10}{17}$$

Dosadením uvedených pravdepodobností do vzťahu (1.10) dostaneme

$$P(C|B)=\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{11}+\frac{17}{20}\cdot\frac{16}{19}+\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}+\frac{13}{16}\cdot\frac{12}{15}+\frac{11}{18}\cdot\frac{10}{17}\right)}{\frac{1}{5}\left(\frac{11}{12}+\frac{17}{20}+\frac{9}{14}+\frac{13}{16}+\frac{11}{18}\right)}=0,771$$

1.5 Nezávislosť udalostí

V niektorých prípadoch sa podmienená pravdepodobnosť $P(A|B)$ rovná $P(A)$. Ukážeme to na nasledujúcom príklade.

Príklad 1.17

Modifikujme tabuľku 1.1 na tabuľku 1.2

Tabuľka 1.2 *Klasifikácia dielcov*

Funkčná defektnosť	Trhliny na povrchu		
	áno	nie	$\sum$
áno	20	180	200
nie	380	3420	3800
$\sum$	400	3600	4000

Z tabuľky 1.1 sme vypočítali $P(F|T) = 100/400 = 0,25$ a $P(F) = 280/4000 = 0,07$. V tabuľke 1.2 je situácia iná. Platí, že $P(F|T) = 20/400 = 0,05$ a $P(F) = 200/4000 = =0,05$. Teda pravdepodobnosť, že dielec má funkčnú defektnosť, nezávisí od toho, či má povrchové trhliny. Podobne platí, že $P(T|F) = 20/200 = 0,10$ a $P(T) = 400/4000 = 0,10$ sú rovnaké. Teda pravdepodobnosť, že dielec má povrchové trhliny nezávisí od toho, či má funkčnú defektnosť.

Z definície podmienenej pravdepodobnosti a z toho, že $P(F|T) = P(F)$ a $P(T|F) = P(T)$ vyplýva, že

$$P(T \cap F) = P(F|T)P(T) = 0,05 \cdot 0,10 = P(F)P(T) =$$
$$= (T|F)P(F) = 0,10 \cdot 0,05 = P(T)P(F)$$

Tento výsledok nás vedie ku dôležitej definícii.

Nezávislosť náhodných udalostí

Dve náhodné udalosti *A* a *B* sa nazývajú **nezávislé**, ak platí ktorékoľvek z týchto tvrdení

$$P(A|B) = P(A) \tag{1.11}$$

$$P(B|A) = P(B) \tag{1.12}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1.13}$$

Z (1.11) vyplýva, že nastanie udalosti *B* nemá vplyv na pravdepodobnosť nastania udalosti *A*. Podobne možno interpretovať vzťah (1.12).

Poznámka. Dá sa ukázať, že ak udalosti *A, B* sú nezávislé, potom sú nezávislé aj udalosti A', B; A, B'; A', B'.

Keď máme tri a viac udalostí, pojem nezávislosti môžeme rozšíriť.

Vzájomná (totálna) nezávislosť *n* udalostí

Udalosti $E_1, E_2, ..., E_n$ sú **vzájomne (totálne) nezávislé** vtedy a len vtedy, ak pre ľubovoľnú množinu indexov $\{k_1, k_2, ..., k_r\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, kde $r = 2, 3, ..., n$, platí

$$P(E_{k_1} \cap E_{k_2} \cap ... \cap E_{k_r}) = P(E_{k_1}) \cdot P(E_{k_2}) \cdot ... \cdot P(E_{k_r}) \tag{1.14}$$

Táto vlastnosť sa prenáša aj na doplnkové udalosti.

Poznámka. Zo vzájomnej nezávislosti vyplýva nezávislosť dvojíc. Opačné tvrdenie však neplatí.

Príklad 1.18

Hádžeme dvoma hracími kockami. Nech udalosť A_1 znamená padnutie nepárneho počtu bodiek na prvej kocke, udalosť A_2 padnutie nepárneho počtu bodiek na druhej kocke a udalosť A_3 padnutie nepárneho počtu alebo párneho počtu na obidvoch kockách. Zaujíma nás, či sú tieto udalosti vzájomne (totálne) nezávislé.

Ľahko vypočítame, že

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$$

$$P(A_1 \cap A_2) = 1/4\,, \quad P(A_1 \cap A_3) = 1/4\,, \quad P(A_3 \cap A_2) = 1/4$$

Z porovnania platí

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_3 \cap A_2) = P(A_3)P(A_2)$$

Teda udalosti sú po dvoch nezávislé. Nie sú však vzájomne nezávislé, lebo platí:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/8 = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

1.6 Spoľahlivosť systémov s *m* blokmi

Predstavme si nejaké zariadenie, ktoré sa skladá z *m* blokov. Spoľahlivosťou tohto zariadenia budeme rozumieť pravdepodobnosť jeho bezporuchového fungovania počas nejakej pevne stanovenej doby. V závislosti od zoradenia jednotlivých blokov v schéme zariadenia rozdeľujeme systémy na sériové a paralelné.

1.6.1 Sériový systém s *m* blokmi

V sériovom systéme sú jednotlivé bloky zoradené „za sebou“ tak, že na bezchybnú funkciu zariadenia je potrebná bezchybná funkcia všetkých blokov súčasne. Ak zlyhá jediný z blokov, celé zariadenie je neschopné prevádzky. Označme A_i udalosť „*i*-tý blok pracuje bezchybne“.

Pravdepodobnosť bezporuchového fungovania celého zariadenia

$$p = P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \tag{1.15}$$

Ak jednotlivé zložky zariadenia sú navzájom nezávislé, t. j. ak A_i sú **navzájom nezávislé udalosti**, tak pravdepodobnosť (1.15) možno vyjadriť v tvare

$$p = \prod_{i=1}^{m} P(A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_m) \tag{1.16}$$

Pravdepodobnosť poruchy zariadenia

$$q = 1 - p = 1 - \prod_{i=1}^{m} P\left(A_i\right) \tag{1.17}$$

1.6.2 Paralelný systém s *m* blokmi

V paralelnom systéme sú jednotlivé bloky zoradené „vedľa seba“. Potom na bezchybnú funkciu zariadenia stačí, keď aspoň jeden z blokov bude schopný prevádzky. Zariadenie je vybavené ďalšími $m - 1$ záložnými blokmi. Označme aj teraz A_i udalosť, že „*i*-tý blok pracuje bezchybne“. Chceme určiť spoľahlivosť celého zariadenia t. j. pravdepodobnosť jeho bezporuchovej funkcie.

Pravdepodobnosť bezporuchového fungovania celého zariadenia

$$p = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \tag{1.18}$$

Dá sa dokázať, že vzťah (1.16) možno napísať v tvare

$$p = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i'\right) \tag{1.19}$$

Ak jednotlivé **zložky zariadenia sú navzájom nezávislé,** tak platí

$$p = 1 - \prod_{i=1}^{m} P\left(A_i'\right) = 1 - \prod_{i=1}^{m} \left[1 - P\left(A_i\right)\right] \tag{1.20}$$

1.6.3 Sériovo-paralelný systém s *m* blokmi

Nech sa zariadenie skladá z *m* blokov spojených do série. Pre zvýšenie pravdepodobnosti bezchybného fungovania je *i*-tý článok ($i = 1, 2, ..., m$) paralelným systémom r_i identických článkov. Zariadenie teda plní bezchybne svoju funkciu vtedy, keď v každom bloku je aspoň jeden fungujúci článok. Označme A_{ij} udalosť „*j*-tý článok v *i*-tom bloku pracuje bezchybne“.

Pravdepodobnosť bezporuchového fungovania celého systému (zariadenia)

$$p = P\left[\bigcap_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{j=1}^{r_i} A_{ij}\right)\right] \tag{1.21}$$

Za predpokladu nezávislosti udalostí A_{ij} možno vzťah (1.19) napísať v tvare

$$p = \prod_{i=1}^{m} P\left(\bigcup_{j=1}^{r_i} A_{ij}\right) = \prod_{i=1}^{m}\left\{1 - \prod_{j=1}^{r_i} P\left(A_{ij}'\right)\right\} = \prod_{i=1}^{m}\left\{1 - \prod_{j=1}^{r_i}\left[1 - P\left(A_{ij}\right)\right]\right\} \tag{1.22}$$

Príklad 1.19

Elektrická sieť obsahuje 5 prvkov. Zapojené sú za sebou a pracujú nezávisle od seba. Označme A_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ udalosť, že *i*-ty prvok má v časovom intervale [0, *t*] poruchu. Pravdepodobnosti porúch jednotlivých prvkov v danom časovom intervale [0, *t*] sú:

$P(A_1) = 0{,}1$, $P(A_2) = 0{,}15$, $P(A_3) = 0{,}2$, $P(A_4) = 0{,}1$, $P(A_5) = 0{,}15$

Chceme zistiť pravdepodobnosť, že v danom časovom intervale [0, *t*] bude prerušená dodávka elektrickej energie.

Označme *A* udalosť, že v časovom intervale [0, *t*] bude prerušená dodávka elektrickej energie. Porucha aspoň jedného z piatich prvkov spôsobí prerušenie dodávky elektrickej energie. Náhodnú udalosť *A* možno teda vyjadriť pomocou udalostí A_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ takto: $A = \bigcup_{i=1}^{5} A_i$. Chceme vypočítať pravdepodobnosť udalosti *A*. Platí, že

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i'\right)$$

Zo zadania vieme, že náhodné udalosti A_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ sú vzájomne nezávislé. Z toho vyplýva, že aj ich doplnky A_i' $(i = 1, 2, ..., 5)$ sú vzájomne nezávislé. Predchádzajúci vzťah môžeme teda prepísať takto

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{5} P(A_i') = 1 - \prod_{i=1}^{5} \left[1 - P(A_i)\right]$$

z čoho po dosadení známych pravdepodobností dostaneme

$$P(A) = 1 - (1 - 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}2) \cdot (1 - 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}15) = 0{,}53182$$

Príklad 1.20

Aparatúra, ktorá pracuje v časovom intervale [0, *t*], sa skladá z 3 častí, z ktorých každá nezávisle od druhej môže mať poruchu. Porucha ktorejkoľvek časti stroja znefunkční celú aparatúry. Z dlhodobých skúseností sa zistilo, že pravdepodobnosť bezporuchovej práce prvej časti aparatúry je 0,8, druhej 0,9 a tretej 0,7. Chceme zistiť, aká je pravdepodobnosť, že aparatúra bude v danom časovom intervale [0, *t*] pracovať bez poruchy.

Označme *A* udalosť, že v časovom intervale [0, *t*] bude aparatúra pracovať bez poruchy. Ďalej označme A_i $(i = 1, 2, 3)$ udalosť, že *i*-ta časť aparatúry nemá v časovom intervale [0, *t*] poruchu. Potom $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ a pretože ide o vzájomne nezávislé náhodné udalosti, platí:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$$

2 NÁHODNÉ PREMENNÉ

Niekedy nám stačí opísať výsledky náhodného experimentu pomocou výberového priestoru, inokedy je užitočné priradiť nejaké číslo každému výsledku z výberového priestoru. Nakoľko jednotlivé výsledky experimentu nie sú vopred známe, nemôžeme vopred určiť ani číselnú hodnotu tohto výsledku. Z tohto dôvodu premenná, ktorá priradí číselnú hodnotu výsledku náhodného experimentu, sa nazýva **náhodná premenná**.

Náhodná premenná

Funkcia, ktorá každému výsledku výberového priestoru patriaceho nejakému náhodnému experimentu priradí určité reálne číslo sa nazýva **náhodná premenná**. Hodnota náhodnej premennej je teda určená výsledkom náhodného pokusu, ktorý je závislý na náhode. Preto v súvislosti s jej oborom hodnôt hovoríme o množine možných hodnôt, ktoré náhodná premenná nadobúda s určitou pravdepodobnosťou.

Náhodnú premennú označujeme veľkým písmenom, napr. X. Hodnotu (alebo realizáciu) náhodnej premennej, ktorú dostaneme po vykonaní pokusu (jednej realizácie experimentu), označujeme malým písmenom, napr. $x = 70$ miliampérov.

V praxi rozlišujeme dva typy náhodných premenných: **diskrétne náhodné premenné** a **spojité náhodné premenné**.

Diskrétna náhodná premenná

Premenná, ktorá môže nadobúdať iba konečný (alebo spočítateľne nekonečný) počet od seba vzájomne oddelených, spravidla celočíselných hodnôt sa nazýva **diskrétna náhodná premenná**.

Napríklad: počet trhlín (bublín) na ploche, počet chybných dielcov medzi 1000 skúšanými, počet prenášaných bitov chybne prijatých, počet porúch nejakého mechanizmu za určité časové obdobie, ale aj počet srdcových sťahov za minútu, alebo počet zŕn v klase a pod.

Spojitá náhodná premenná

Premenná, ktorej obor hodnôt je interval reálnych čísel (konečný alebo nekonečný) sa nazýva **spojitá náhodná premenná**.

Napríklad: teplota, tlak, hmotnosť, elektrický prúd, dĺžka (rozmer súčiastky), svietivosť obrazovky, bod mäknutia asfaltu, bod tuhnutia plynového oleja, čas nábehu motora, vnútorný priemer piestneho krúžku automobilového motora, chyby merania, ale aj hĺbka orby alebo hmotnosť živočíchov a pod.

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej

Predpis, podľa ktorého je každej hodnote diskrétnej náhodnej premennej resp. intervalu hodnôt spojitej náhodnej premennej jednoznačne priradená pravdepodobnosť s akou nadobúda túto hodnotu resp. interval hodnôt, sa nazýva r**ozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej**.

2.1 Diskrétne náhodné premenné

Mnohé fyzikálne systémy možno modelovať tými istými alebo podobnými náhodnými experimentmi a náhodnými premennými. Rozdelenia náhodných premenných zahrnutých v každom z týchto systémov sa dajú analyzovať a výsledky tejto analýzy sa dajú použiť v rôznych aplikáciách. V tejto kapitole je uvedená analýza niekoľkých náhodných experimentov v súvislosti s diskrétnymi náhodnými premennými, ktoré sa často vyskytujú v aplikáciách.

Príklad 2.1

Hlasový komunikačný systém firmy obsahuje 60 externých liniek. V danom časovom okamihu pozorujeme systém, pričom v niektorých linkách prebieha hovor. Nech náhodná premenná X je počet liniek, v ktorých prebieha hovor. Potom X môže nadobúdať ktorékoľvek celé číslo od 0 po 60. Keď pozorujeme systém a 25 liniek je v prevádzke, potom $x = 25$.

Príklad 2.2

V procese výroby polovodičov sa testujú dve doštičky z dávky. Každá doštička je klasifikovaná ako vyhovujúca (V) alebo nevyhovujúca (N). Nech pravdepodobnosť, že nejaká doštička je pri teste klasifikovaná ako vyhovujúca je 0,9. Doštičky sa vyrábajú nezávisle.

Výberový priestor náhodného experimentu je

$$\boldsymbol{\Omega} = \{VV, NV, VN, NN\}$$

Pravdepodobnosti prislúchajúce výsledkom experimentu sú

$$P(VV) = 0,9 \times 0,9 = 0,81 \qquad P(NV) = 0,1 \times 0,9 = 0,09$$

$$P(VN) = 0,9 \times 0,1 = 0,09 \qquad P(NN) = 0,1 \times 0,1 = 0,01$$

Náhodnej premennej X definovanej ako počet vyhovujúcich doštičiek na teste nadobúda hodnoty 0, 1, 2 s pravdepodobnosťami

$$P(X = 0) = 0,01; \quad P(X = 1) = 0,18; \quad P(X = 2) = 0,81$$

2.1.1 Rozdelenia pravdepodobnosti a pravdepodobnostné funkcie

Náhodné premenné sú také dôležité v náhodnom experimente, že niekedy kladieme väčší dôraz na rozdelenie pravdepodobnosti príslušnej náhodnej premennej, ako na výberový priestor experimentu. Napríklad v príklade 2.1 v našej analýze kladieme dôraz na celé čísla {0, 1,..., 60}, čo je obor hodnôt náhodnej premennej X. V príklade 2.2 sumarizujeme výsledky

náhodného experimentu pomocou troch možných hodnôt náhodnej premennej, konkrétne $\{0, 1, 2\}$. V tomto zmysle náhodná premenná môže zjednodušiť opis a analýzu náhodného experimentu.

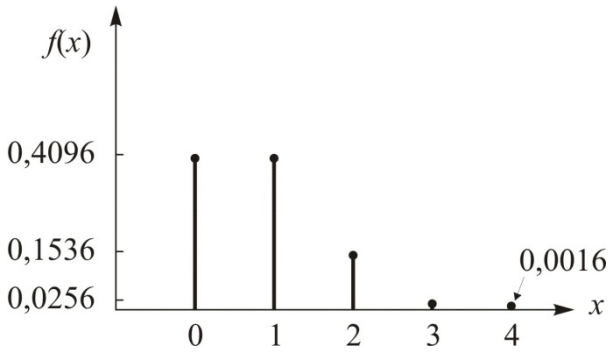
V prípade diskrétnej náhodnej premennej je často rozdelenie určené pomocou tabuľky, kde sú uvedené hodnoty náhodnej premennej a k ním prislúchajúce pravdepodobnosti. V niektorých prípadoch je vhodnejšie definovať rozdelenie pravdepodobnosti pomocou vzorca.

Príklad 2.3

Existuje možnosť, že bit prenášaný cez digitálny prenosový kanál je prijatý chybne. Nech X je počet chybne prijatých bitov zo štyroch prenesených. Potom náhodná premenná X nadobúda hodnoty $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Predpokladajme, že príslušné pravdepodobnosti sú:

$$P(X=0)=0{,}4096 \qquad P(X=1)=0{,}4096 \qquad P(X=2)=0{,}1536$$
$$P(X=3)=0{,}0256 \qquad P(X=4)=0{,}0016$$

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X je určené hodnotami, ktoré X nadobúda a k ním prislúchajúcimi pravdepodobnosťami. Môžeme ho znázorniť graficky



Obrázok 2.1. *Pravdepodobnostná funkcia*

alebo tabuľkou

Tabuľka 2.1. *Pravdepodobnostná funkcia*

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Pravdepodobnostná funkcia diskrétnej náhodnej premennej

Nech diskrétna náhodná premenná X nadobúda hodnoty $x_1, x_2, ..., x_n$. Potom funkcia $f(x)$, ktorá spĺňa podmienky

1. $f(x_i) \geq 0$
2. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$ (2.1)
3. $f(x_i) = P(X = x_i)$

sa nazýva **pravdepodobnostná funkcia** náhodnej premennej X.

Napríklad v príklade 2.3 je $f(0)=0,4096$, $f(1)=0,4096$, $f(2)=0,1536$, $f(3)=0,0256$ a $f(4)=0,0016$. Ľahko sa dá overiť, že súčet týchto pravdepodobností je 1.

Príklad 2.4

Nech náhodná premenná *X* je počet polovodičových doštičiek, ktoré je potrebné analyzovať s cieľom detegovať kontaminácie veľkých čiastočiek. Nech pravdepodobnosť, že doštička obsahuje veľkú čiastočku je 0,001. Doštičky sa vyrábajú nezávislé. Určíme rozdelenie pravdepodobnosti *X*.

Nech „*o*" je doštička, ktorá obsahuje veľkú čiastočku a „*n*" je doštička, ktorá neobsahuje veľkú čiastočku. Výberový priestor experimentu je nekonečný:

$$\boldsymbol{\Omega} = \{o, no, nno, nnno, nnnno, ...\}$$

Uvažujme niekoľko špeciálnych prípadov. Napríklad $P(X=1)=P(o)=0,001$. Pretože doštičky sú nezávislé

$$P(X=2)=P(no)=P(n)\cdot P(o)=0,999\times 0,001=0,000999$$

Všeobecný vzorec je

$$f(x)=P(X=x)=P(nn\cdots no)=0,999^{x-1}\times 0,001 \text{ pre } x=1,2,3,...$$

Zrejmé je, že $f(x)\geq 0$. Druhú vlastnosť z definície nechávame čitateľovi na overenie ako cvičenie.

2.1.2 Distribučné funkcie

Príklad 2.5

V príklade 2.3 by nás mohla zaujímať pravdepodobnosť dvoch alebo menej chybných bitov, čo možno vyjadriť ako $P(X\leq 2)$.

Udalosť $\{X\leq 2\}$ je zjednotením udalostí $\{X=0\}, \{X=1\}$ a $\{X=2\}$. Evidentne sú tieto tri udalosti vzájomne sa vylučujúce, preto

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$
$$=0,4096+0,4096+0,1536=0,9728$$

Z tohto postupu sa dá ukázať, že

$$P(X=2)=P(X\leq 2)-P(X\leq 1)=0,1536.$$

Tento príklad poukazuje na užitočnosť definovať kumulatívne pravdepodobnosti $P(X\leq x)$, z ktorých možno získať pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej.

Distribučná funkcia

Funkciu $F(x)$ diskrétnej náhodnej premennej *X*

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_i\leq x} f(x_i)=\sum_{x_i\leq x} P(X=x_i) \tag{2.2}$$

nazývame **distribučná funkcia** náhodnej premennej *X*.

Distribučná funkcia spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $0 \le F(x) \le 1$ pre ľubovoľné reálne x,
2. $F(x_1) \le F(x_2)$ pre ľubovoľné reálne $x_1 < x_2$, t. j. distribučná funkcia je neklesajúca,
3. $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
4. $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$,
5. distribučná funkcia je sprava spojitá a má najviac spočitateľne veľa bodov nespojitosti.

Príklad 2.6

Určime pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej X z nasledujúcej distribučnej funkcie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0,3 & -1 \le x < 1 \\ 0,8 & 1 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

Jediné body s nenulovou pravdepodobnosťou sú –2, 1 a 2. Hodnoty pravdepodobnostnej funkcie v jednotlivých bodoch sú zmeny distribučnej funkcie v týchto bodoch. Teda

$$f(-1) = 0,3 - 0 = 0,3 \qquad f(1) = 0,8 - 0,3 = 0,5 \qquad f(3) = 1 - 0,8 = 0,2 .$$

Príklad 2.7

Predpokladáme, že denná produkcia 800 vyrobených súčiastok obsahuje 30 kusov, ktoré nespĺňajú požiadavky zákazníka. Dve súčiastky sú náhodne vybrané bez opakovania z dávky. Nech náhodná premenná X je počet nevyhovujúcich súčiastok vo výbere. Chceme zostrojiť distribučnú funkciu náhodnej premennej X.

Na otázku môžeme odpovedať tak, že najskôr nájdeme pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej X.

$$P(X = 0) = \frac{770}{800} \cdot \frac{769}{799} = 0,92636$$

$$P(X = 1) = 2 \cdot \frac{770}{800} \cdot \frac{30}{799} = 0,07228$$

$$P(X = 2) = \frac{30}{800} \cdot \frac{29}{799} = 0,00136$$

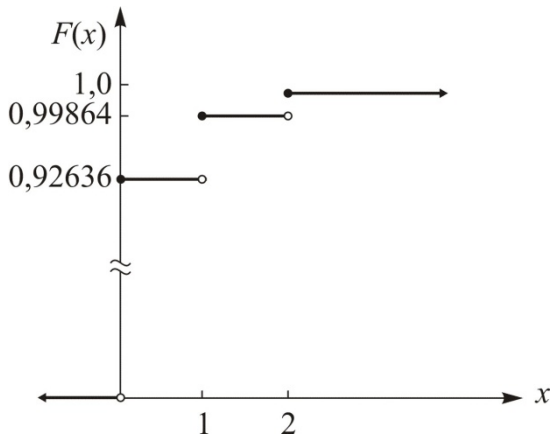
Potom

$$F(0) = P(X \le 0) = 0,92636$$

$$F(1) = P(X \le 1) = 0,92636 + 0,07228 = 0,99864$$

$$F(2) = P(X \le 2) = 1$$

Graf tejto distribučnej funkcie je na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 2.2. *Distribučná funkcia*

Poznámka. Všimnime si, že $F(x)$ je definovaná pre všetky x z intervalu $-\infty < x < \infty$, nielen pre hodnoty 0, 1 a 2.

2.1.3 Číselné charakteristiky diskrétnej náhodnej premennej

Strednou hodnotou a rozptylom, teda dvomi číslami, často charakterizujeme rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Stredná hodnota je miera centrálnej polohy a rozptyl je miera variability rozdelenia. Tieto dve miery neidentifikujú jednoznačne rozdelenie pravdepodobnosti. Dve rôzne rozdelenia môžu mať tú istú strednú hodnotu a rozptyl.

Stredná hodnota (očakávaná hodnota)

Veličina označovaná ako μ alebo $E(X)$, ktorá je definovaná vzťahom

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x) \tag{2.3}$$

sa nazýva **stredná hodnota** (**očakávaná hodnota**) diskrétnej náhodnej premennej X.

Rozptyl (disperzia)

Veličina označovaná ako σ^2 alebo $D(X)$, ktorá je definovaná vzťahom

$$\sigma^2 = D(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 \tag{2.4}$$

sa nazýva **rozptyl (disperzia)** diskrétnej náhodnej premennej X.

Smerodajná odchýlka

Veličina označovaná σ, ktorá je definovaná vzťahom

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sum_x (x-\mu)^2 f(x)} = \sqrt{\sum_x x^2 f(x) - \mu^2} \tag{2.5}$$

sa nazýva **smerodajná odchýlka** diskrétnej náhodnej premennej X.

Poznámka. Strednú hodnotu diskrétnej náhodnej premennej *X* možno interpretovať ako vážený priemer hodnôt premennej *X* s váhami rovnými príslušným pravdepodobnostiam. Ak funkcia pravdepodobnosti $f(x)$ predstavuje rozloženie nákladu na dlhom tenkom nosníku, tak $E(X)$ je bod, v ktorom je nosník vyvážený. Teda $E(X)$ opisuje ťažisko rozdelenia náhodnej premennej *X* do určitej miery podobné bodu vyváženia nákladu.

Príklad 2.8

Vypočítajte strednú hodnotu a rozptyl diskrétnej náhodnej premennej *X* z príkladu 2.3.

$$\mu = E(X) = 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + 4 \cdot f(4) =$$
$$= 0 \cdot 0,4096 + 1 \cdot 0,4096 + 2 \cdot 0,1536 + 3 \cdot 0,0256 + 4 \cdot 0,0016 = 0,8$$

Na výpočet *D(X)* je vhodná tabuľka

x	$x-0,8$	$(x-0,8)$	$f(x)$	$(x-0,8)^2 \times f(x)$
0	-0,8	0,64	0,4096	0,262144
1	0,2	0,04	0,4096	0,016384
2	1,2	1,44	0,1536	0,221184
3	2,2	4,84	0,0256	0,123904
4	3,2	10,24	0,0016	0,016384
			$\sum$	0,64

$$D(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)(x_i - 0,8)^2 = 0,64$$

Stredná hodnota funkcie diskrétnej náhodnej premennej

Nech X je diskrétna náhodná premenná s funkciou pravdepodobnosti $f(x)$ a $h(X)$ je funkcia náhodnej premennej *X*. Veličina označovaná ako $\mu_{h(X)}$ alebo $E[h(X)]$, ktorá je definovaná vzťahom

$$E[h(X)] = \sum_x h(x) f(x) \tag{2.6}$$

sa nazýva **stredná hodnota funkcie** diskrétnej náhodnej premennej.

Príklad 2.9

Uvažujme náhodnú premennú X z príkladu 2.1.8. Chceme zistiť, akú strednú hodnotu má náhodná premenná $h(X) = X^2$.

$$E[h(X)] = 0^2 \cdot 0,4096 + 1^2 \cdot 0,4096 + 2^2 \cdot 0,1536 + 3^2 \cdot 0,0256 + 4^2 \cdot 0,0016 = 1,28$$

Poznámka. V predchádzajúcom príklade sa stredná hodnota náhodnej premennej X^2 nerovná druhej mocnine $E(X)$. Avšak pre funkciu náhodnej premennej $h(X) = aX + b$, kde a a b sú

ľubovoľné konštanty, je stredná hodnota $E[h(X)] = aE(X) + b$. Tento vzťah sa dá odvodiť zo vzorca 2.6.

2.1.4 Diskrétne rovnomerné rozdelenie

Najjednoduchšia diskrétna náhodná premenná je tá, ktorá nadobúda konečný počet hodnôt, pričom každú hodnotu s rovnakou pravdepodobnosťou.

Pravdepodobnostná funkcia diskrétneho rovnomerného rozdelenia

Nech náhodná premenná *X* nadobúda *n* hodnôt $x_1, x_2, ..., x_n$ s rovnakou pravdepodobnosťou, potom *X* má **diskrétne rovnomerné rozdelenie**, keď pravdepodobnostná funkcia má tvar

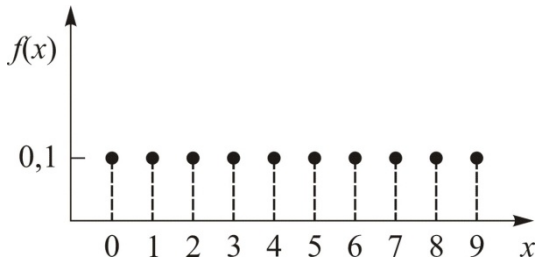
$$f(x_i) = \frac{1}{n} \tag{2.7}$$

Príklad 2.10

Prvá číslica sériového čísla súčiastky je s rovnakou pravdepodobnosťou jedna z číslic 0 až 9. Náhodný experiment spočíva vo výbere jednej súčiastky z veľkej dávky, pričom nás zaujíma prvá číslica sériového čísla súčiastky. Keď náhodná premenná *X* je prvá číslica sériového čísla, potom *X* má diskrétne rovnomerné rozdelenie s pravdepodobnosťou 0,1. Pravdepodobnostná funkcia náhodnej premennej *X* je daná vzťahom

$$f(x) = 0{,}1 \quad \text{pre} \quad x \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

alebo grafom na nasledovnom obrázku



Obrázok 2.3. *Pravdepodobnostná funkcia*

Nech obor hodnôt diskrétnej náhodnej premennej *X* predstavujú čísla *a*, *a*+1, *a*+2,...*b*, pre $a \le b$. Obor hodnôt *X* obsahuje $b - a + 1$ hodnôt, každú s pravdepodobnosťou $\frac{1}{(b-a+1)}$.

Potom pre strednú hodnotu platí

$$\mu = \sum_{k=a}^{b} k \left(\frac{1}{b-a+1} \right)$$

čo pomocou vzťahu $\sum_{k=a}^{b} k = \frac{b(b+1) - (a-1)a}{2}$ zjednodušíme na tvar

$$\mu = \frac{b+a}{2}$$

Odvodenie vzťahu pre rozptyl necháme čitateľovi ako cvičenie.

Stredná hodnota a rozptyl diskrétneho rovnomerného rozdelenia

Nech X je diskrétna rovnomerná náhodná premenná, ktorá nadobúda celočíselné hodnoty $a, a+1, a+2, \ldots, b$ pre $a \le b$. Potom veličina definovaná vzťahom

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2} \tag{2.8}$$

sa nazýva **stredná hodnota náhodnej premennej** X a veličina definovaná vzťahom

$$\sigma^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} \tag{2.9}$$

je **rozptyl** premennej X.

Príklad 2.11

Pre náhodnú premennú z príkladu 2.10 vypočítame strednú hodnotu a rozptyl podľa predchádzajúcich vzťahov

$$\mu = E(X) = \frac{9+0}{2} = 4,5 \qquad \text{a} \qquad \sigma^2 = D(X) = \frac{(9-0+1)^2 - 1}{12} = \frac{99}{12}$$

2.1.5 Binomické rozdelenie

Binomické rozdelenie sa používa pri výbere s opakovaním, t. j. keď ide o nezávislé pokusy. Vysvetlíme to na príklade.

Príklad 2.12

Pravdepodobnosť, že bit prenášaný cez digitálny prenosový kanál, je prijatý chybne, sa rovná 0,1. Predpokladajme, že prenosové pokusy sú nezávislé. Nech X je počet chybne prijatých bitov zo štyroch vyslaných. Určíme $P(X = 3)$.

Nech elementárna udalosť E znamená, že bit je prijatý chybne a B je elementárna udalosť, že bit je prijatý bezchybne. Výberový priestor náhodného experimentu 1 (NE1) spočívajúceho z vyslania jedného bitu je

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \{E, B\}$$

Pre pravdepodobnosti elementárnych udalostí E a B platí:

$$P(E) = 0,1 \quad \text{a} \quad P(B) = 1 - P(E) = 0,9$$

Pri náhodnom experimente 4 (NE4) spočívajúcom vo vyslaní štyroch bitov za sebou sa výberový priestor rovná

$$\boldsymbol{\Omega_4} = \left\{ \begin{matrix} BBBB, BBBE, BBEB, BBEE, BEBB, BEBE, BEEB, BEEE \\ EBBB, EBBE, EBEB, EBEE, EEBB, EEBE, EEEB, EEEE \end{matrix} \right\}$$

Napríklad výsledok *BEBE* je zložená udalosť $B \cap E \cap B \cap E$ vzhľadom k $\boldsymbol{\Omega_1}$, avšak elementárna vzhľadom k výberovému priestoru $\boldsymbol{\Omega_4}$. Tato udalosť znamená, že druhý a štvrtý bit je prijatý chybne a ostatné dva bezchybne. Z predpokladu, že prenosové pokusy sú nezávislé, vyplýva, že

$$P(B \cap E \cap B \cap E) = P(B) \cdot P(E) \cdot P(B) \cdot P(E)$$

Podobne to platí pre ďalšie udalosti, z ktorých sa skladá výberový priestor $\boldsymbol{\Omega_4}$.

Keď každému výsledku NE4 priradíme číslo, ktoré znamená počet chybne prijatých bitov, dostaneme nasledujúcu tabuľku priradení

Udalosť		Udalosť		Udalosť		Udalosť	
BBBB	0	*BEBB*	1	EBBB	1	*EEBB*	2
BBBE	1	*BEBE*	2	*EBBE*	2	*EEBE*	3
BBEB	1	*BEEB*	2	*EBEB*	2	*EEEB*	3
BBEE	2	*BEEE*	3	*EBEE*	3	*EEEE*	4

Z tabuľky vyplýva, že náhodná premenná X zo zadania nadobúda hodnoty 0, 1, 2, 3, 4.
Udalosť $X = 3$ sa skladá zo zjednotenia štyroch disjunktných udalostí:

$$BEEE \cup EBEE \cup EEBE \cup EEEB$$

Z nezávislosti pokusov vyplýva, že

$$P(EEBE) = P(E)P(E)P(B)P(E) = 0,1^2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,1^3 \cdot 0,9 = 0,0009$$

To isté platí pre každú z ďalších troch udalostí. Pretože pravdepodobnosť zjednotenia disjunktných udalostí sa rovná súčtu pravdepodobností jednotlivých udalostí, platí:

$$P(X = 3) = 4 \cdot 0,0009 = 0,0036$$

Všeobecne udalosť $X = x$ sa rovná zjednoteniu udalostí z výberového priestoru Ω_4, ktorých počet je

$$\binom{4}{x} = \frac{4!}{x!(4-x)!}$$

Pre pravdepodobnosť udalosti $X = x$ teda platí:

$$P(X = x) = \binom{4}{x} (0,1)^x \cdot (0,9)^{4-x}$$

Predchádzajúci príklad vedie k nasledujúcemu výsledku.

Pravdepodobnostná funkcia binomického rozdelenia

Náhodný experiment sa skladá z *n* Bernulliho pokusov, pre ktoré platí:

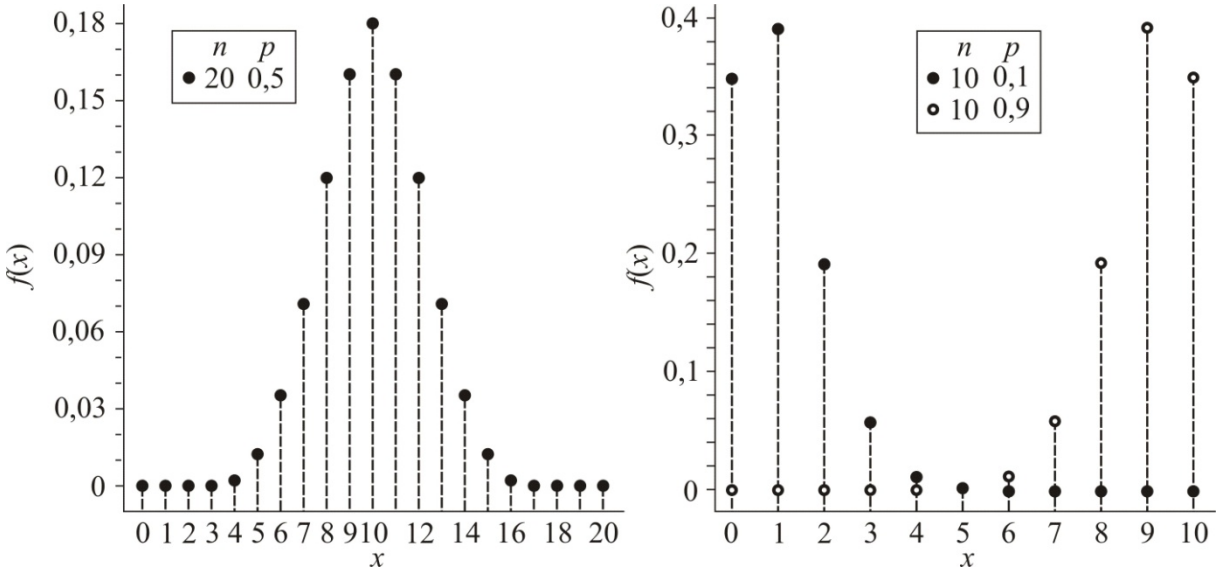
1. Pokusy sú nezávislé.
2. Každý pokus má iba dva možné výsledky označené ako „áno“ a „nie“.
3. Pravdepodobnosť výsledku „áno“ každého pokusu je konštantná a rovná sa p.

Náhodná premenná X, ktorá sa rovná počtu pokusov s výsledkom „áno“ má **binomické rozdelenie** s parametrami $0 < p < 1$ a $n = 1, 2, ...$ a s **pravdepodobnostnou funkciou**

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, ..., n \tag{2.10}$$

Všeobecný zápis pre binomické rozdelenie je $X \sim Bi(n, p)$.

Grafické zobrazenia pravdepodobnostných funkcií pre rôzne parametre n a p sú na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 2.4. *Binomické rozdelenie pre vybrané n a p*

Stredná hodnota a rozptyl rozdelenia $Bi(n, p)$

Nech X je binomická náhodná premenná s parametrami p a n, potom veličina definovaná vzťahom

$$\mu = E(X) = n\,p \tag{2.11}$$

sa nazýva stredná hodnota binomickej náhodnej premennej X a veličina definovaná vzťahom

$$\sigma^2 = D(X) = n\,p(1-p) \tag{2.12}$$

sa nazýva rozptyl binomickej náhodnej premennej X.

Poznámka. Všimnime si, že stredná hodnota a rozptyl binomickej náhodnej premennej závisia iba od parametrov p a n.

Príklad 2.13

Pre náhodnú premennú X z príkladu 2.12 je $n = 4$ a $p = 0{,}1$. Potom pre strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X platí:

$$E(X) = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4 \quad \text{a} \quad D(X) = 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}36$$

Príklad 2.14

Každá vzorka vody má 10 % pravdepodobnosť, že obsahuje určitú organickú znečisťujúcu látku. Predpokladáme, že vzorky sú nezávislé vzhľadom na prítomnosť znečisťujúcej látky. Nájdeme pravdepodobnosť, že z 8 vzoriek presne 3 budú obsahovať znečisťujúcu látku.

Nech X je počet vzoriek z 8 analyzovaných vzoriek, ktoré obsahujú znečisťujúcu látku. Potom X je binomická náhodná premenná s parametrami $p = 0{,}1$ a $n = 8$. Preto

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^5 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^5 = 0{,}0330674$$

Teraz určíme pravdepodobnosť, že aspoň štyri vzorky obsahujú znečisťujúcu látku. Platí:

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{8} \binom{8}{x} \cdot 0{,}1^x \cdot 0{,}9^{8-x}$$

Túto pravdepodobnosť ľahšie vypočítame pomocou doplnku pôvodnej udalosti, t. j.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{8}{x} \cdot 0{,}1^x \cdot 0{,}9^{8-x} =$$

$$= 1 - \left(0{,}430467 + 0{,}382638 + 0{,}148804 + 0{,}0330674\right) = 0{,}0050236 \approx 0{,}005$$

Nakoniec vypočítame pravdepodobnosť udalosti $3 \leq X < 6$. Platí:

$$P(3 \leq X < 6) = \sum_{x=3}^{5} \binom{8}{x} \cdot 0{,}1^x \cdot 0{,}9^{8-x} =$$

$$= 0{,}0330674 + 0{,}0045927 + 0{,}00040824 = 0{,}03806834 \approx 0{,}038$$

2.1.6 Hypergeometrické rozdelenie

V príklade 2.7 denná produkcia 800 súčiastok obsahuje 30 súčiastok, ktoré nespĺňajú požiadavky zákazníka. Dve súčiastky sa náhodne vybrali bez opakovania z dennej produkcie. Znamená to, že vybrané jednotky sa nevracajú pred výberom ďalšej jednotky. Nech A resp. B sú udalosti, že prvá resp. druhá súčiastka je nevyhovujúca. Vieme, že

$$P(A) = \frac{30}{800} = 0{,}0375 \text{ a } P(B|A) = 29/799 = 0{,}036295369$$

Teda znalosť toho, že prvá súčiastka je nevyhovujúca, znižuje pravdepodobnosť toho, že druhá vybraná súčiastka je nevyhovujúca. Ak naopak vieme, že prvá vytiahnutá je vyhovujúca, tak pravdepodobnosť, že druhá vytiahnutá je nevyhovujúca, sa rovná

$$P(B|A') = 30/799 = 0{,}037546934$$

čo je väčšia, ako v prvom prípade.

Tento náhodný experiment sa zásadne líši od náhodného experimentu založenom na binomickom rozdelení. V tomto experimente jednotlivé pokusy nie sú nezávislé.

Nech X je počet nevyhovujúcich dielcov vo výbere. Potom pravdepodobnosť, že obidve súčiastky sú vyhovujúce, sa rovná

$$P(X=0) = \frac{770}{800}\cdot\frac{769}{799} = 0{,}92636$$

Pre pravdepodobnosť udalosti, že prvá vybraná súčiastka vyhovuje a druhá nevyhovuje alebo prvá nevyhovuje a druhá vyhovuje, platí

$$P(X=1) = \frac{770}{800}\cdot\frac{30}{799} + \frac{30}{800}\cdot\frac{770}{799} = 0{,}07228$$

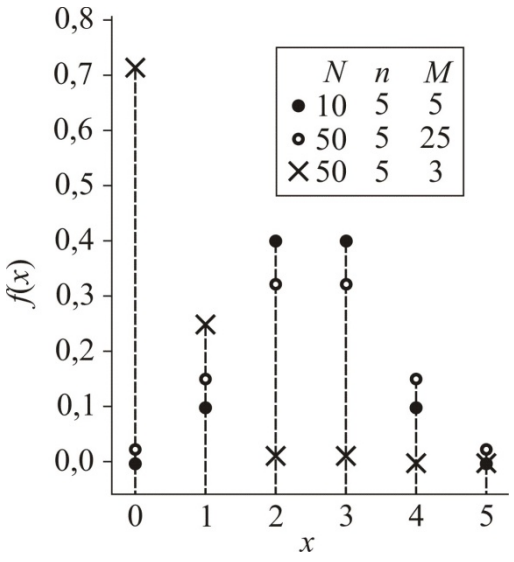
a

$$P(X=2) = P(\text{obidve nevyhovujú}) = \frac{30}{800}\cdot\frac{29}{799} = 0{,}00136$$

Poznámka. Ako sme prezentovali v tomto príklade, výbery sa často vykonávajú bez opakovania. Preto bolo rozumné odvodiť všeobecný vzorec na výpočet pravdepodobností.

Pravdepodobnostná funkcia hypergeometrického rozdelenia

Majme konečný súbor N jednotiek (napr. výrobkov), z ktorých M jednotiek má určitú vlastnosť V a $N-M$ jednotiek túto vlastnosť nemá. Zo súboru vyberieme náhodne naraz alebo postupne (bez opakovania) n jednotiek.



Obrázok 2.5. *Hypergeometrické rozdelenie pre vybrané hodnoty parametrov N, M a n*

Nech náhodná premenná X predstavuje počet x jednotiek z n vybratých jednotiek, ktoré majú vlastnosť V. Potom náhodná premenná X má **hypergeometrické rozdelenie**, ak jej **funkcia rozdelenia pravdepodobnosti** má tvar

$$f(x)=\frac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}};\ x=\max\{0,n+M-N\},\ldots,\min\{M,n\} \tag{2.13}$$

kde N, M, n sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $1\le n<N,\quad 1\le M<N$.

Všeobecný zápis pre hypergeometrické rozdelenie je $X\sim H(N,M,n)$.
Na obrázku 2.5 sú grafy pravdepodobnostných funkcií pre tri rôzne kombinácie parametrov N, n a M.

Príklad 2.15

Príklad uvedený na začiatku tejto časti možno znovu vypočítať pomocou všeobecného vzorca z definície hypergeometrickej náhodnej premennej. Teda platí

$$P(X=0)=\frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{770}{2}}{\binom{800}{2}}=\frac{296065}{319600}=0{,}92636$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{770}{1}}{\binom{800}{2}}=\frac{23100}{319600}=0{,}07228$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{30}{2}\cdot\binom{770}{0}}{\binom{800}{2}}=\frac{435}{319600}=0{,}00136.$$

Príklad 2.16

Dávka obsahuje 100 dielcov potrubia od dodávateľa A a 200 dielcov potrubia od dodávateľa B. Náhodne vyberieme 4 dielce bez opakovania. Nech X je počet dielcov vo výbere, ktoré sú od dodávateľa A. Potom náhodná premenná X má hypergeometrické rozdelenie.

Chceme vypočítať, aká je pravdepodobnosť, že všetky štyri vybrané dielce sú od dodávateľa A. Požadovaná pravdepodobnosť je $P(X=4)$. Teda

$$P(X=4)=\frac{\binom{100}{4}\cdot\binom{200}{0}}{\binom{300}{4}}=0{,}0119$$

Teraz nás zaujíma pravdepodobnosť, že dve a viac dielcov z výberu sú od dodávateľa A.

$$P(X \geq 2) = \frac{\binom{100}{2} \cdot \binom{200}{2}}{\binom{300}{4}} + \frac{\binom{100}{3} \cdot \binom{200}{1}}{\binom{300}{4}} + \frac{\binom{100}{4} \cdot \binom{200}{0}}{\binom{300}{4}} =$$

$$= 0{,}2978 + 0{,}0978 + 0{,}0119 = 0{,}4075$$

Nakoniec chceme poznať pravdepodobnosť, že aspoň jeden dielec je od dodávateľa A.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{100}{0} \cdot \binom{200}{4}}{\binom{300}{4}} = 1 - 0{,}1955 = 0{,}8045$$

Stredná hodnota a rozptyl hypergeometrickej náhodnej premennej sa dajú určiť z pokusov, ktoré tvoria experiment. Pretože pokusy nie sú nezávislé, výpočty sú zložitejšie, ako pri binomickom rozdelení.

Stredná hodnota a rozptyl hypergeometrického rozdelenia

Nech X je hypergeometrická náhodná premenná s parametrami N, M a n. Potom veličina definovaná vzťahom

$$\mu = E(X) = np \tag{2.14}$$

sa nazýva **stredná hodnota hypergeometrickej náhodnej premennej *X*** a veličina definovaná vzťahom

$$\sigma^2(X) = D(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} \tag{2.15}$$

sa nazýva **rozptyl hypergeometrickej náhodnej premennej *X***

Poznámka. Hodnota $p = M / N$.

Príklad 2.17

V predchádzajúcom príklade je rozsah súboru 4. Náhodná premenná je počet dielcov vo výbere od dodávateľa A. Potom $p = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$. Preto

$$E(X) = 4 \cdot \frac{100}{300} = 1{,}33 \quad \text{a} \quad D(X) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\left[(300-4)/299\right] = 0{,}88$$

Hypergeometrická náhodná premenná má $E(X)$ rovnakú ako binimická náhodná premenná, $D(X)$ sa líši od binomickej náhodnej premennej iba o člen $\frac{N-n}{N-1}$, ktorý sa nazýva **korekčný člen pre konečný základný súbor**.

Výber s opakovaním je ekvivalentný s výberom z nekonečnej množiny, pretože podiel s vlastnosťou *V* zostáva konštantný pre všetky pokusy v experimente. Vieme už, že pri výbere s opakovaním počet s vlastnosťou *V* vo výbere o rozsahu *n* je binomická náhodná premenná *X* s rozptylom $np(1-p)$. Z toho vyplýva, že korekčný člen pre konečný základný súbor reprezentuje korekciu binomického rozptylu pre výber bez opakovania z konečnej množiny rozsahu *N*.

Ak *n* je relatívne malé vzhľadom na *N*, korekcia je malá a hypergeometrické rozdelenie je podobné binomickému. V tomto prípade môže binomické rozdelenie efektívne aproximovať rozdelenie počtu jednotiek špeciálneho typu vo výbere.

Príklad 2.18

Výpis z účtovnej uzávierky zákazníka vo veľkej firme obsahuje 1000 zákazníkov. Z nich 700 kúpilo aspoň jeden z produktov firmy za posledných päť mesiacov. Na ohodnotenie nového návrhu výrobku bolo náhodne vybraných z hromadného výpisu 50 zákazníkov. Chceme vedieť, aká je pravdepodobnosť, že viac ako 40 z vybraných zákazníkov kúpilo aspoň jeden produkt firmy.

Výber je bez opakovania. Pretože rozsah výberu 50 je pomerne malý vzhľadom na počet zákazníkov na výpise 1000, pravdepodobnosť vybratia zákazníka, ktorý kúpil aspoň jeden produkt firmy za posledných päť mesiacov zostáva približne konštantná po výbere tohto zákazníka.

Nech napríklad *A* je udalosť, že prvý vybratý zákazník kúpil aspoň jeden produkt firmy za posledných päť mesiacov, *B* je udalosť, že druhý vybratý zákazník kúpil aspoň jeden produkt firmy za posledných päť mesiacov. Potom

$$P(A) = \frac{700}{1000} = 0{,}7 \quad \text{a} \quad P(B|A) = \frac{699}{999} = 0{,}6997$$

Teda tieto pokusy sú približne nezávislé.

Nech X je počet zákazníkov vo výbere, ktorí kúpili aspoň jeden produkt firmy za posledných päť mesiacov. Potom X je hypergeometrická náhodná premenná s parametrami $N = 1000,\ n = 50$ a $M = 700$, z čoho vyplýva, že $p = M/N = 0{,}7$.

Požadovanú pravdepodobnosť $P(X > 40)$ vypočítame pomocou hypergeometrického rozdelenia. Platí:

$$P(X > 40) = \sum_{x=46}^{50} \frac{\binom{700}{x} \cdot \binom{300}{50-x}}{\binom{1000}{50}} = 0{,}03658$$

Pretože rozsah výberu je pomerne malý vzhľadom na rozsah celého súboru, rozdelenie X možno aproximovať binomickým rozdelením s parametrami $n = 50$ a $p = 0{,}7$ Z toho dostaneme, že

$$P(X > 40) = \sum_{x=41}^{50} \binom{50}{x} \cdot 0{,}7^x (1-0{,}7)^{50-x} = 0{,}04023$$

Vidíme, že výsledky sa líšia o 0,00365, čo je pomerne dobrá zhoda.

Poznámka. V dobe bežnej dostupnosti PC a štatistických softvérov nie je potrebné aproximovať hypergeometrické rozdelenie binomickým.

2.1.7 Poissonovo rozdelenie

Poissonovo rozdelenie vysvetlíme na príklade.

Príklad 2.19

Predpokladáme, že n bitov sa prenáša cez digitálny prenosový kanál. Nech náhodná premenná X je počet chybných bitov. Keď je pravdepodobnosť, že bit je chybný, konštantná a prenosy sú nezávislé, X má binomické rozdelenie. Nech p je pravdepodobnosť, že bit je chybný. Keď označíme $\lambda = pn$, potom $E(X) = pn = \lambda$ a

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Teraz predpokladajme, že počet prenesených bitov rastie a pravdepodobnosť chyby klesá tak, že pn sa rovná konštante. Teda n rastie a p primerane klesá tak, že $E(X) = \lambda$ zostáva konštantná. Potom sa dá dokázať, že

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Pretože počet prenesených bitov sa blíži k nekonečnu, počet chýb sa môže rovnať ľubovoľnému kladnému celému číslu. Obor hodnôt náhodnej premennej X teda tvoria všetky celé kladné čísla.

Príklad 2.20

Chyby sa vyskytujú náhodne pozdĺž dĺžky tenkého medeného drôtu. Nech náhodná premenná X je počet chýb na dĺžke drôtu L milimetrov a predpokladáme, že priemerný počet chýb na L milimetrov drôtu je λ.

Rozdelenie pravdepodobnosti X sa dá zistiť pomocou úvahy do určitej miery podobnej ako v predošlom príklade. Rozdeľme celú dĺžku L drôtu na n malých intervalov, napríklad dĺžky 1 mikrometer. Ak tieto intervaly sú dostatočne malé, pravdepodobnosť, že sa vyskytne viac ako jedna chyba na niektorom intervale, je zanedbateľná. Predpoklad, že chyby sa vyskytujú náhodne, implikuje, že každý interval má rovnakú pravdepodobnosť p, že obsahuje chybu. Nakoniec predpokladajme, že pravdepodobnosť toho, že nejaký interval obsahuje chybu, nezávisí od toho, či iné intervaly chybu obsahujú. Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X sa dá modelovať približne binomickou náhodnou premennou. Pretože

$$E(X) = \lambda = np$$

dostaneme, že

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

Teda pravdepodobnosť, že niektorý z intervalov obsahuje chybu, je λ / n. Keď sú intervaly dostatočne malé, potom n je veľmi veľké a p je veľmi malé. Preto rozdelenie náhodnej premennej X sa získa ako v predchádzajúcom príklade.

Tento príklad môžeme zovšeobecniť na širokú škálu náhodných experimentov. Napríklad, počet častíc kontaminovaných vo výrobe polovodičov, počet chýb na bale textile, počet hovorov s telefonickou ústredňou a počet častíc emitovaných z nejakej vzorky sú príklady, ktoré možno úspešne modelovať pomocou ďalej uvedenej pravdepodobnostnej funkcie.

Poissonov proces

Predpokladajme, že početnosť udalosti, ktorá nás zaujíma, je spočitateľná na intervale (časovom, dĺžkovom, hmotnostnom, plošnom, priestorovom a pod.) a daný interval sa dá rozdeliť na malé intervaly. Keď tieto intervaly majú takú malú dĺžku, že

1. pravdepodobnosť výskytu sledovanej udalosti viac ako jedenkrát na takomto intervale sa rovná nule;
2. pravdepodobnosť jedného výskytu sledovanej udalosti na malom intervale je rovnaká na všetkých malých intervaloch a proporcionálna dĺžke intervalu;
3. výskyty sledovanej udalosti na neprekrývajúcich sa (disjunktných) malých intervaloch sú nezávislé,

potom náhodný experiment sa nazýva **Poissonov proces**.

Pravdepodobnostná funkcia Poissonovho rozdelenia

Náhodná premenná X počet výskytov sledovanej udalosti na danom intervale je **Poissonova náhodná premenná** s parametrom $\lambda > 0$ a **pravdepodobnostnou funkciou**

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

Všeobecný zápis pre Poissonovo rozdelenie je $X \sim Po(\lambda)$.

Príklad 2.21

V prípade tenkého medeného drôtu predpokladajme, že počet chýb sa riadi Poissonovým rozdelením so strednou hodnotou 2,3 chýb na milimeter.

Vypočítajme pravdepodobnosť výskytu dvoch chýb na 1 milimetri drôtu. Nech X je počet chýb na 1 milimetri drôtu. Potom $E(X) = 2{,}3$ chýb a

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2{,}3} \cdot 2{,}3^2}{2!} = 0{,}265$$

Teraz nás zaujíma, aká je pravdepodobnosť, že 10 chýb je na 5 milimetroch drôtu. Nech X je počet chýb na 5 milimetroch drôtu. Potom X má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou

$$E(X) = 5 \cdot 2{,}3 = 11{,}5 \text{ chýb}$$

Preto

$$P(X=10)=e^{-11,5}\frac{11,5^{10}}{10!}=0,1129$$

Nakoniec vypočítame pravdepodobnosť, že aspoň jedna chyba je na 2 milimetroch drôtu. Nech X je počet chýb na 2 milimetroch drôtu. Potom X má Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou

$$E(X)=2\,\text{mm}\times 2,3\ \text{chýb/mm}=4,6\,\text{chýb}$$

Preto

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-4,6}=0,9899$$

Príklad 2.22

Nečistota je problém pri výrobe optických skladovacích diskov. Počet kontaminovaných čiastočiek na optickom disku má Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti a stredná hodnota počtu častíc na 1 cm^2 povrchu média je rovná 0,1. Plocha disku, ktorú skúmame je 100 cm^2.

Vypočítame pravdepodobnosť, že 12 častíc sa nachádza na skúmanej ploche. Nech X je počet častíc na skúmanej ploche. Stredná hodnota počtu častíc na 1 cm^2 je 0,1. Preto platí:

$$E(X)=100\,\text{cm}^2\times 0,1\,\text{častíc/cm}^2=10\,\text{častíc}$$

Z toho vyplýva, že

$$P(X=12)=\frac{e^{-10}10^{12}}{12!}=0,09478$$

Pravdepodobnosť, že žiadna častica sa nenachádza na skúmanej ploche disku je

$$P(X=0)=e^{-10}=4,54\times 10^{-5}$$

Určíme pravdepodobnosť, že 12 alebo menej častíc je na skúmanej ploche disku. Požadovaná pravdepodobnosť je

$$P(X\leq 12)=P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=12)=\sum_{i=0}^{12}\frac{e^{-10}10^{i}}{i!}=0,79156$$

Vypočítaná hodnota je hodnota distribučnej funkcie Poissonovho rozdelenia v bode 12 t. j.

$$F(12)=P(X\leq 12)=0,79156$$

Stredná hodnota a rozptyl Poissonovho rozdelenia

Odvodenie strednej hodnoty a rozptylu Poissonovej náhodnej premennej necháme na cvičenie. Tu uvedieme len vzorce.

Nech X je Poissonova náhodná premenná s parametrom λ, potom veličina definovaná vzťahom

$$\mu=E(X)=\lambda \tag{2.17}$$

je **stredná hodnota** rozdelenia $X\sim Po(\lambda)$ a veličina definovaná vzťahom

$$\sigma^2=D(X)=\lambda \tag{2.18}$$

je **rozptyl** rozdelenia $X \sim Po(\lambda)$.

Poznámka. Všimnime si, že stredná hodnota a rozptyl Poissonovej náhodnej premennej sú rovnaké.

2.2 Spojité náhodné premenné

V predošlej kapitole sme hovorili o meraní prúdu v tenkom medenom drôte. Všimli sme si, že výsledky sa pri opakovaných meraniach líšili. Spôsobovali to zmeny okolitej teploty, nečistoty v chemickom zložení drôtu, kolísanie zdroja prúdu atď.

Iný príklad je vyberanie jedného dielca s dennej produkcie a veľmi presné meranie dĺžky. V praxi sa môžu vyskytnúť malé výkyvy aktuálne meranej dĺžky spôsobené vibráciami, kolísaním teploty, rôznymi operátormi, kalibráciami, opotrebovanie rezného nástroja, opotrebovanie ložiska a zmeny suroviny. Dokonca aj postup merania môže vyprodukovať výkyvy v konečných výsledkoch.

Merania v týchto typoch experimentov možno reprezentovať pomocou nejakej náhodnej premennej *X*. Rozumné je modelovať obor možných hodnôt náhodnej premennej *X* nejakým intervalom (konečným alebo nekonečným) reálnych čísiel. Pretože počet možných hodnôt náhodnej premennej *X* je nespočítateľne nekonečný, *X* má rozdelenie zreteľne odlišné od diskrétneho rozdelenia, ktorým sme sa zaoberali v predchádzajúcej kapitole. Pretože obor hodnôt náhodnej premennej *X* obsahuje všetky hodnoty z nejakého intervalu reálnych čísiel, možno si ho predstaviť ako nejaké kontinuum.

Niekoľko spojitých rozdelení sa často používa v aplikáciách. Tieto rozdelenia spolu s príkladmi výpočtu pravdepodobností, stredných hodnôt a rozptylov sú opísané v tejto kapitole.

2.2.1 Rozdelenie pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

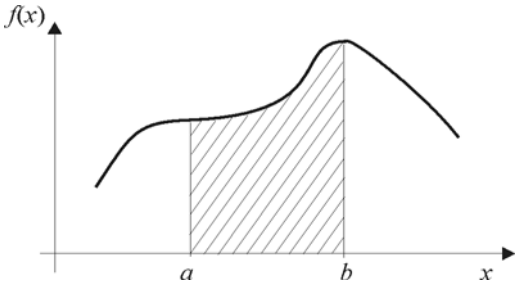
Rozdelenie pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej *X* je jednoznačne definované pomocou funkcie hustoty pravdepodobnosti $f(x)$ alebo distribučnej funkcie $F(x)$

Hustoty pravdepodobnosti

Funkcia $f(x)$ sa nazýva **hustota pravdepodobnosti** (ďalej len **hustota**) spojitej náhodnej premennej *X*, ak pre ňu platí:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ pre ľubovoľné *a* a *b* (2.19)

Poznámka. Z (2.19) vyplýva, že pre ľubovoľný bod x_0 z oboru hodnôt premennej X platí, že $P(X = x_0) = 0$.



Obrázok 2.6. $P(a \le X \le b)$ *určená plochou pod* $f(x)$

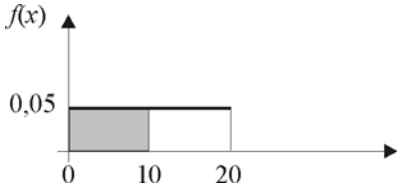
Z vlastnosti funkcie hustoty (aj z obrázka) vyplýva, že

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

Poznámka. Pri spojitej náhodnej premennej nerozlišujeme nerovnosti ostré < a neostré ≤.

Príklad 2.23

Nech spojitá náhodná premenná X označuje prúd meraný v tenkom medenom drôte v miliampéroch.



Obrázok 2.7. *Hustota prúdu meraného v tenkom medenom drôte*

Predpokladáme, že obor hodnôt X je [0, 40 mA] a funkcia hustoty pravdepodobnosti je

$$f(x) = 0{,}025 \text{ pre } 0 \le x \le 40$$

Chceme zistiť pravdepodobnosť, že nameraná hodnota prúdu je menšia ako 15 mA. Požadovanú pravdepodobnosť vypočítame takto:

$$P(X < 15) = \int_0^{15} f(x)dx = \int_0^{15} 0{,}025dx = 0{,}375$$

Ďalej chceme vypočítať pravdepodobnosť, že nameraná hodnota prúdu je väčšia ako 5 mA a menšia ako 30 mA. Požadovaná pravdepodobnosť je daná vzťahom

$$P(5 < X < 30) = \int_5^{30} f(x)dx = \int_5^{30} 0{,}025dx = 0{,}625 \,|$$

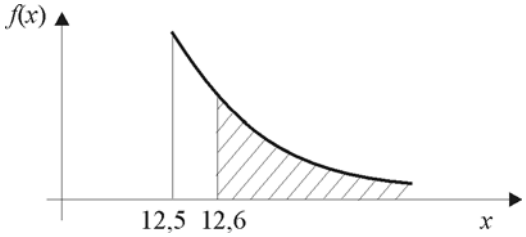
Príklad 2.24

Nech spojitá náhodná premenná X je priemer diery vyvŕtanej do kovovej súčiastky. Menovitý rozmer je 22,5 mm. Náhodné kolísania procesu vedú k väčším priemerom. Historické dáta ukazujú, že rozdelenie X možno modelovať pomocou funkcie hustoty

$f(x) = 10\,e^{-10(x-22,5)}$, $x \geq 22,5$.

Ak sa súčiastky s priemerom väčším ako 22,6 mm vyraďujú, chceme vedieť, aký podiel súčiastok sa vyradí. Súčiastka sa vyradí ak $X > 22,6$. Potom platí, že

$$P(X > 22,6) = \int_{22,6}^{\infty} f(x)dx = \int_{22,6}^{\infty} 10e^{-10(x-22,5)}dx = [-e^{-10(x-22,5)}]_{22,6}^{\infty} = 0,368$$



Obrázok 2.8. *Hustota priemeru diery vyvŕtanej do kovovej súčiastky*

Teraz chceme vedieť, aký podiel súčiastok má priemer väčší ako 22,5 mm a menší ako 22,6 mm. V tomto prípade platí:

$$P(22,5 < X < 22,6) = \int_{22,5}^{22,6} 10e^{-10(x-22,5)}dx = [-e^{-10(x-22,5)}]_{22,5}^{22,6} = 0,632$$

Túto pravdepodobnosť možno vypočítať aj použitím doplnku udalosti $22,5 < X < 22,6$ takto:

$$P(22,5 < X < 22,6) = 1 - P(X > 22,6) = 1 - 0,368 = 0,632$$

Ďalšia dôležitá funkcia, ktorá jednoznačne definuje spojitú náhodnú premennú, sa nazýva distribučná funkcia. Uvedieme jej definíciu.

Distribučná funkcia

Funkcia $F(x)$ sa nazýva **distribučná funkcia** spojitej náhodnej premennej *X*, ak platí:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \qquad -\infty \leq x \leq \infty \tag{2.20}$$

Vlastnosti distribučnej funkcie:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x_1) \leq F(x_2)$ ak $x_1 < x_2$
3. $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ pre všetky *x* pre, ktoré existuje derivácia
4. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ a $F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Príklad 2.25

Spojitá náhodná premenná X označujúca prúd meraný v tenkom medenom drôte (Príklad 2.23) má distribučnú funkciu, ktorá sa skladá z troch výrazov. Pre $x < 0$ je $f(x) = 0$. Preto platí:

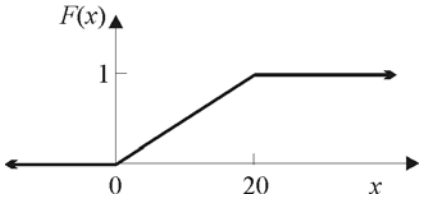
$$F(x) = 0 \quad \text{pre } x < 0$$

$$F(x) = \int_0^x f(u)du = 0{,}025x \quad \text{pre } 0 \le x < 40$$

$$F(x) = \int_0^x f(u)du) = 1 \quad \text{pre } 40 \le x$$

Distribučná funkcia má teda tvar:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}025 & 0 \le x < 40 \\ 1 & 40 \le x \end{cases}$$



Obrázok 2.9. *Distribučná funkcia prúdu meraného v tenkom medenom drôte*

Všimnime si, že v definícii $F(x)$ znak $<$ môžeme zameniť znakom $\le$ a naopak. To znamená, že $F(x)$ možno definovať v bode $x = 0$ ako $0{,}05x$ alebo 0 a v bode $x = 20$ ako $0{,}05x$ alebo 1. Inak povedané, $F(x)$ je spojitá funkcia. V prípade diskrétnej náhodnej premennej $F(x)$ nie je spojitá funkcia. Niekedy je spojitá náhodná premenná definovaná ako náhodná premenná so spojitou distribučnou funkciou.

Príklad 2.26

Distribučná funkcia $F(x)$ priemeru diery (Príklad 2.24) sa skladá z dvoch výrazov:

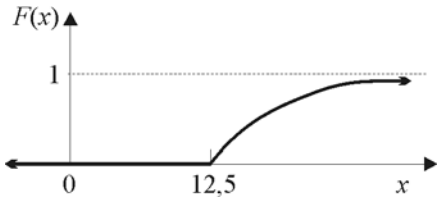
$$F(x) = 0 \text{ pre } x < 22{,}5$$

a pre $22{,}5 \le x$

$$F(x) = \int_{22{,}5}^{x} 10e^{-10(u-22{,}5)}du = 1 - e^{-10(x-22{,}5)}$$

Distribučná funkcia je teda daná vzťahom:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 22{,}5 \\ 1 - e^{-10(x-22{,}5)} & 22{,}5 \le x \end{cases}$$



Obrázok 2.10. *Distribučná funkcia priemeru diery vyvŕtanej do kovovej súčiastky*

Príklad 2.27

Doba do skončenia chemickej reakcie (v milisekundách) je náhodná premenná *X*, ktorá má približne rozdelenie z distribučnou funkciou

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-0,02x} & 0\le x\end{cases}$$

Chceme vypočítať funkciu hustoty $f(x)$ náhodnej premennej *X*. Vieme, že funkcia hustoty je deriváciou $F(x)$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

pre všetky *x*, pre ktoré derivácia existuje. Využijúc túto vlastnosť, dostaneme:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0,02\,e^{-0,02x} & 0\le x\end{cases}$$

Ďalej chceme vedieť, aký podiel opakovaných reakcií skončí v priebehu 180 milisekúnd. Pravdepodobnosť, že nejaká reakcia skončí v priebehu 180 milisekúnd, je

$$P(X<180)=F(180)=1-e^{-3,6}=0,97268$$

2.2.2 Číselné charakteristiky spojitej náhodnej premennej

Najdôležitejšie číselné charakteristiky spojitej náhodnej premennej sú stredná hodnota a rozptyl. Definujú sa podobne ako v prípade diskrétnej náhodnej premennej, s tým rozdielom, že v definícii sa sumácia nahradí integráciou.

Nech *X* je spojitá náhodná premenná s funkciou hustoty $f(x)$, potom môžeme definovať číselné charakteristiky.

Stredná hodnota (očakávaná hodnota)

Charakteristika polohy označovaná ako μ alebo $E(X)$, ktorá je definovaná vzťahom

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx \tag{2.21}$$

sa nazýva **stredná hodnota** (**očakávaná hodnota**) spojitej náhodnej premennej *X*.

Rozptyl (disperzia)

Charakteristika variability označovaná ako σ^2 alebo $D(X)$, ktorá je definovaná vzťahom

$$\sigma^2 = D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 \tag{2.22}$$

sa nazýva **rozptyl (disperzia)** spojitej náhodnej premennej *X*.

Smerodajná odchýlka

Charakteristika variability definovaná vzťahom

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2} \tag{2.23}$$

sa nazýva **smerodajná odchýlka** spojitej náhodnej premennej *X*.

Kvantily

Kvantily sú charakteristiky polohy. Charakterizujú, kde náhodná premenná nadobúda hodnoty a s akými pravdepodobnosťami. Číslo x_P nazývame **100*P*-percentný kvantilom** spojitej náhodnej premennej, keď pre $P \in (0,1)$ platí:

$$F(x_P) = \int_{-\infty}^{x_P} f(x)dx = P \tag{2.24}$$

Špeciálny prípad kvantilu je **medián**, čo je 50 % kvantil. Označuje sa značkou $x_{0,5}$ alebo x_{med} alebo $\tilde{x}$.

Modus

Hodnota, v ktorej hustota spojitej náhodnej premennej nadobúda maximum, sa nazýva **modus** a označuje sa značkou $\hat{x}$ alebo x_{mod}.

Príklad 2.28

Spojitá náhodná premenná *X* meranie prúdu v tenkom medenom drôte (Príklad 2.23) má strednú hodnotu

$$E(X) = \int_{0}^{40} xf(x)dx = [0,025x^2 / 2]_0^{40} = 20$$

rozptyl

$$D(X) = \int_{0}^{40} (x-20)^2 f(x)dx = [0,025(x-20)^3 / 3]_0^{40} = 133,333$$

a smerodajná odchýlka

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{133,333} = 11,547$$

Príklad 2.29

Náhodná premenná X predstavujúca priemer diery (Príklad 2.24) má strednú hodnotu

$$E(X) = \int_{22,5}^{\infty} x\, f(x)dx = \int_{22,5}^{\infty} x 10 e^{-10(x-22,5)}dx =$$

$$= \left[-xe^{-10(x-22,5)} - \frac{e^{-10(x-22,5)}}{10} \right]_{22,5}^{\infty} = 22,5 + 0,1 = 22,6$$

Rozptyl náhodnej premennej X je

$$D(X) = \int_{22,5}^{\infty} (x - 22,6)^2 f(x)dx$$

Podobne ako pri strednej hodnote použijeme integráciu metódou per partes avšak v tomto prípade dvakrát a dostaneme hodnotu rozptylu

$$D(X) = 0,01$$

Stredná hodnota nejakej funkcie $h(X)$ spojitej náhodnej premennej je definovaná podobne ako v prípade diskrétnej náhodnej premennej.

Stredná hodnota funkcie spojitej náhodnej premennej

Nech X je spojitá náhodná premenná s funkciou hustoty $f(x)$ a $h(X)$ je funkcia náhodnej premennej X. Veličina označovaná ako $\mu_{h(X)}$ alebo $E[h(X)]$, ktorá je definovaná vzťahom

$$\mu_{h(X)} = E\left(h(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)dx \tag{2.25}$$

sa nazýva **stredná hodnota funkcie** spojitej náhodnej premennej X.

Príklad 2.30

Spojitá náhodná premenná X v príklade 2.23 je prúd meraný v tenkom medenom drôte v miliampéroch. Chceme vypočítať strednú hodnotu druhej mocniny prúdu.

V tomto prípade $h(X) = X^2$, preto

$$E\left(h(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{40} 0,025x^2 dx = 0,025\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{40} = 533,333$$

Poznámka. V predchádzajúcom príklade sa stredná hodnota náhodnej premennej X^2 nerovná druhej mocnine $E(X)$. Avšak pre funkciu náhodnej premennej $h(X) = aX + b$, kde a a b sú ľubovoľné konštanty, je stredná hodnota $E[h(X)] = aE(X) + b$. Tento vzťah sa dá odvodiť z vlastností integrálov.

2.2.3 Spojité rovnomerné rozdelenie

Spojité rovnomerné rozdelenie je najjednoduchšie zo všetkých spojitých rozdelení.

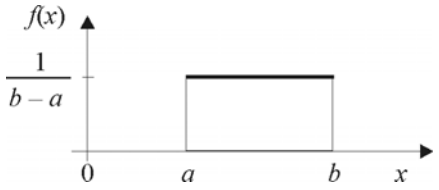
Rovnomerné rozdelenie a jeho hustota

Náhodná premenná X, ktorá má **hustotu**

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b \tag{2.26}$$

je **spojitá rovnomerne rozdelená náhodná premenná**.
Spojité rovnomerné rozdelenie náhodnej premennej X označujeme $X \sim R(a,b)$

Vypočítajme strednú hodnotu a rozptyl spojitej rovnomerne rozdelenej náhodnej premennej X (obrázok 2.11).



Obrázok 2.11. *Hustota spojitého rovnomerného rozdelenia*

Číselné charakteristiky polohy a variability

Stredná hodnota spojitej rovnomerne rozdelenej náhodnej premennej X je

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{0,5x^2}{b-a} \right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

Rozptyl náhodnej premennej X je

$$D(X) = \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{b-a} dx = \left[\frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)} \right]_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Tieto výsledky možno prehľadne zosumarizovať.

Keď X je spojitá rovnomerne rozdelená náhodná premenná na intervale $a \le x \le b$, potom jej **stredná hodnota** je daná vzťahom

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2} \tag{2.27}$$

a pre **rozptyl** platí vzťah

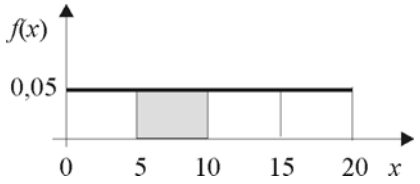
$$\sigma^2 = D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{2.28}$$

Príklad 2.31

Spojitá náhodná premenná X (prúd meraný v tenkom medenom drôte) má obor hodnôt od 0 mA do 40 mA. Hustota je

$$f(x) = 0{,}025 \text{ pre } 0 \le x \le 40$$

Chceme vedieť, aká je pravdepodobnosť, že hodnota meraného prúdu je od 5 mA do 30 mA. Požadovaná pravdepodobnosť je daná veľkosťou vyčiarkovanej plochy na obrázku 2.12.



Obrázok 2.12. *Hustota prúdu meraného v tenkom medenom drôte*

a vypočítať ju možno takto:

$$P(5 < X < 30) = \int_5^{30} f(x)dx = 25 \cdot 0{,}025 = 0{,}625$$

Vzorce pre strednú hodnotu a rozptyl možno aplikovať s parametrami $a = 0$ a $b = 40$. Potom

$$E(X) = 20\,\text{mA} \text{ a } D(X) = \frac{40^2}{12} = 133{,}333\ (\text{mA})^2$$

Z rozptylu dostaneme hodnotu smerodajnej odchýlky $\sigma = 11{,}547$ náhodnej premennej X.

Distribučná funkcia rozdelenia $R(a,b)$

Distribučnú funkciu spojitej rovnomerne rozdelenej náhodnej premennej dostaneme integráciou funkcie hustoty. Pre $a < x < b$ je

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}du = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}$$

Potom platí, že **distribučná funkcia** spojitej rovnomerne rozdelenej náhodnej premennej je definovaná vzťahom:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & b \le x \end{cases} \tag{2.29}$$

Poznámka. Príklad distribučnej funkcie $F(x)$ spojitej rovnomerne rozdelenej náhodnej premennej je na obrázku 2.9.

2.2.4 Normálne rozdelenie

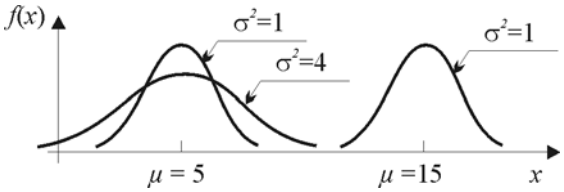
Najčastejšie používaný model rozdelenia náhodnej premennej je **normálne rozdelenie**.

Hustoty normálneho rozdelenia

Náhodná premenná X s **hustotou**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pre} \quad -\infty<x<\infty \tag{2.30}$$

má **normálne rozdelenie** s parametrami μ, kde $-\infty<\mu<\infty$, a $\sigma^2>0$, čo zapisujeme $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. Parametre rozdelenia **normálnej náhodnej premennej** X sú **stredná hodnota** $\mu=E(X)$ a **rozptyl** $D(X)=\sigma^2$.



Obrázok 2.13. *Funkcie hustoty pre vybrané hodnoty parametrov* μ *a* σ^2

Ďalšie vlastnosti funkcie hustoty $f(x)$ *normálneho rozdelenia:*

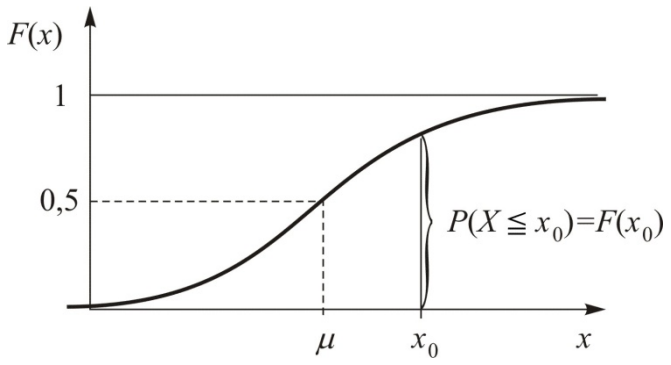
- graf je symetrický podľa osi $x=\mu$,
- inflexné body funkcie sú $x=\mu+\sigma$ a $x=\mu-\sigma$,
- lokálne maximum $f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ je bode $x=\mu$,
- stredná hodnota, medián a modus sa rovnajú t. j. $\mu=x_{\text{med}}=x_{\text{mod}}$.

Distribučná funkcia rozdelenia $N(\mu,\ \sigma^2)$

Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej premennej $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ je reálna funkcia, pre ktorú platí:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{pre} \quad -\infty<x<\infty \tag{2.31}$$

Pre ľubovoľné reálne číslo x predstavuje hodnota $F(x)$ plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty $f(x)$ a osou x na intervale $(-\infty,\ x]$.



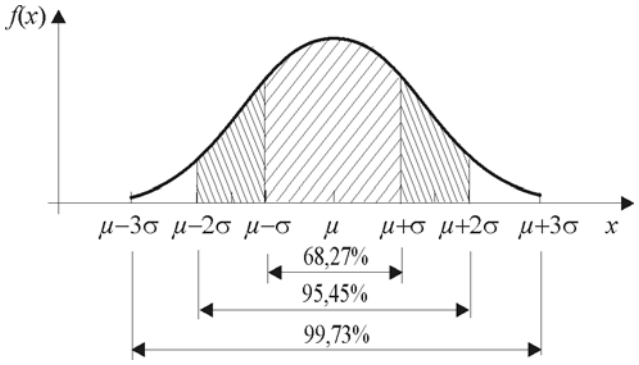
Obrázok 2.14. *Distribučná funkcia rozdelenia* $N(\mu,\ \sigma^2)$

Niekoľko užitočných výsledkov týkajúcich sa normálneho rozdelenia je uvedených v tvare rovníc a na obrázku 2.15. Pre náhodnú premennú $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ platí:

$$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0,6827$$

$$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0,9545$$

$$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0,9973$$



Obrázok 2.15. *Pravdepodobnosti súvisiace s normálnym rozdelením*

Zo symetrie $f(x)$ vyplýva, že

$$P(X>\mu)=P(X<\mu)=0,5$$

Normovaná normálna náhodná premenná

Veľmi dôležitým prípadom normálneho rozdelenia je normované normálne rozdelenie. Normálne rozdelenú náhodnú premennú X s parametrami $\mu=E(X)$ a $\sigma^2=D(X)$ možno pretransformovať na náhodnú premennú

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \tag{2.32}$$

ktorá má **normované normálne rozdelenie** s parametrami $E(Z)=0$ a $D(Z)=1$.

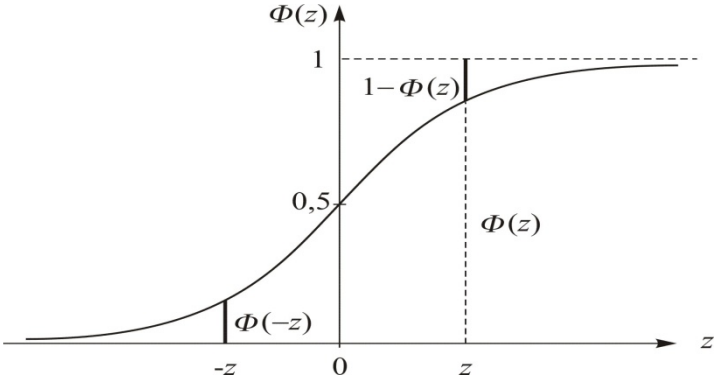
Hustota normovanej náhodnej premennej Z má špeciálne označenie a má tvar

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{pre} \quad -\infty < z < \infty \tag{2.33}$$

a jej **distribučná funkcia** je

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \quad \text{pre} \quad -\infty < z < \infty \tag{2.34}$$

Hodnoty $\phi(z)$ a $\Phi(z)$ pre rôzne hodnoty z sú uvedené v štatistických tabuľkách. Zo symetrie hustoty $\phi(z)$ podľa bodu $z = 0$ vyplýva, že $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ pre $z \in R$.



Obrázok 2.16. *Distribučná funkcia rozdelenia* $N(0,1)$

Vzťah medzi distribučnou funkciou $F(x)$ normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$ a distribučnou funkciou $\Phi(z)$ normovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$ je vyjadrený rovnicou

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{2.35}$$

Na určenie hodnôt distribučnej funkcie $F(x)$ stačí poznať tabuľkové hodnoty distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia $\Phi(z)$. Hodnoty $\Phi(z)$ sa v niektorých tabuľkách uvádzajú iba pre $z > 0$. Z vlastnosti distribučnej funkcie $\Phi(z)$ však vieme z tabuliek určiť aj jej hodnoty pre $z < 0$ (obrázok 2.16).

V rôznych aplikáciách budeme využívať *kritické hodnoty* k_α a *kvantily* z_P rozdelenia $N(0, 1)$.

Kritická hodnota k_α normovaného normálneho rozdelenia

Hodnota, ktorá vytvorí vpravo od seba plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty $\phi(z)$ a osou z o veľkosti $\alpha / 2$, sa nazýva kritická hodnota. Definovaná je vzťahom

$$\int_{k_\alpha}^{\infty} \varphi(z) dz = P(Z > k_\alpha) = \alpha / 2 \tag{2.36}$$

Kvantil z_P normovaného normálneho rozdelenia

Hodnota, ktorá vytvorí vľavo od seba plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty $\phi(z)$ a osou z o veľkosti P, sa nazýva **kvantil**. Definovaný je vzťahom

$$\Phi(z_P) = \int_{-\infty}^{z_P} \phi(z)dz = P(Z \le z_P) = P \tag{2.37}$$

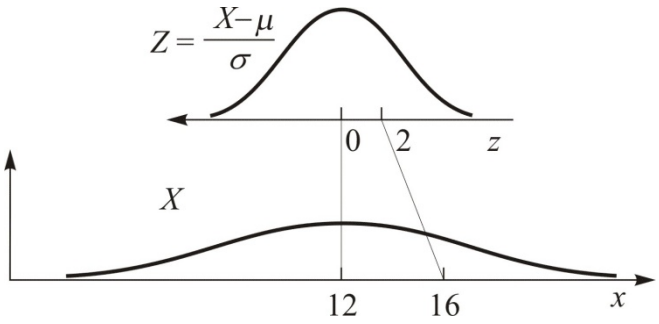
Poznámka. Kvantily sú uvedené v štatistických tabuľkách a pre $p \in (0,1)$ sa dajú vypočítať pomocou štatistického softvéru.

Príklad 2.32

Meranie prúdu v páse drôtu má normálne rozdelenie pravdepodobnosti, so strednou hodnotou 12 mA a smerodajnou odchýlkou 2 mA. Chceme zistiť, aká je hodnota pravdepodobnosti, že nameraná hodnota bude väčšia ako 16 mA.

Nech X označuje meranie prúdu v páse drôtu v mA. Požadovanú pravdepodobnosť vyjadríme ako $P(X > 16)$. Pri výpočte použijeme transformáciu $Z = (X - 12)/2$, ktorej vzťah s náhodnou premennou X je uvedený aj na obrázku 2.17. Pripomenieme, že udalosti $X > 16$ a $Z > 2$ majú rovnaké pravdepodobnosti, preto platí:

$$P(X > 16) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$$



Obrázok 2.17. *Normovanie normálnej náhodnej premennej*

Požadovanú pravdepodobnosť možno vypočítať priamo z nerovnosti $X > 16$ bez použitia obrázku takto:

$$P(X > 16) = P\left(\frac{X - 12}{2} > \frac{16 - 12}{2}\right) = P(Z > 2) =$$
$$= 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$$

V predošlom príklade je hodnota 16 transformovaná na hodnotu 2 pomocou normovania. Hodnota 2 sa nazýva ***z*-hodnota**, ktorá sa používa pri výpočte pravdepodobnosti takto: Nech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \le \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z) \tag{2.38}$$

kde náhodná premenná Z má **normované normálne rozdelenie** a $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ je ***z*-hodnota**, získaná **normovaním** premennej X.

Príklad 2.33

Výrobný proces spĺňa normu, ak sa hmotnosť jeho produktu nachádza v intervale od 68 g do 69 g. Z dlhodobých pozorovaní vieme, že hmotnosť daného produktu má normálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou $\mu = 68{,}3$ a rozptylom $\sigma^2 = 0{,}04$. Chceme zistiť, či výrobný proces spĺňa normu.

Označme X náhodnú premennú, ktorá predstavuje hmotnosť daných výrobkov. Potom platí, že $X \sim N(68{,}3;\, 0{,}04)$. Zaujíma nás pravdepodobnosť

$$P(68 < X < 69) = P\left(\frac{68-68{,}3}{0{,}2} < \frac{X-68{,}3}{0{,}2} < \frac{69-68{,}3}{0{,}2}\right) =$$

$$= P(-1{,}5 < Z < 3{,}5) = P(Z \le 3{,}5) - P(Z \le -1{,}5) =$$

$$= \Phi(3{,}5) - \left[1 - \Phi(1{,}5)\right] = 0{,}999767 - 1 + 0{,}933193 = 0{,}93296$$

Pri výpočte sme použili transformáciu:

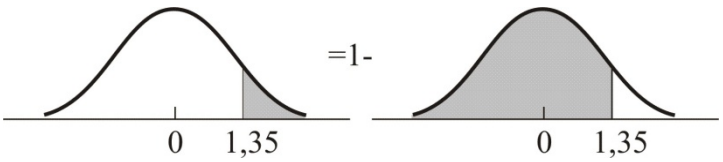
$$Y = \frac{X-68{,}3}{0{,}2} \sim N(0{,}1)$$

Z výpočtu vyplýva, že výrobný proces vyhovuje norme s pravdepodobnosťou 0,93296.

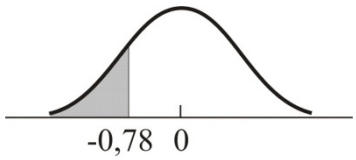
Užitočné vzťahy na výpočet pravdepodobností

Na výpočet nasledovných pravdepodobností použijeme štatistické tabuľky. Výsledky sú uvedené číselne aj na obrázku. V praxi sa často výsledky zaokrúhľujú na jedno alebo dve desatinné miesta.

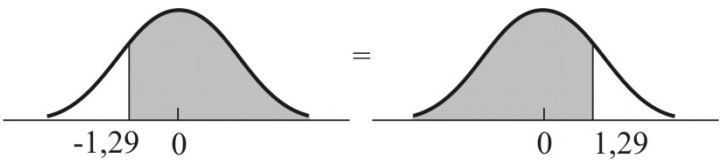
1. $P(Z > 1{,}35) = 1 - P(Z \le 1{,}35) = 1 - 0{,}91149 = 0{,}08851$



2. $P(Z < -0{,}78) = P(Z > 0{,}78) = 1 - P(Z \le 0{,}78) = 1 - 0{,}78231 = 0{,}21769$



3. $P(Z > -1{,}29) = P(Z < 1{,}29) = 0{,}90148$

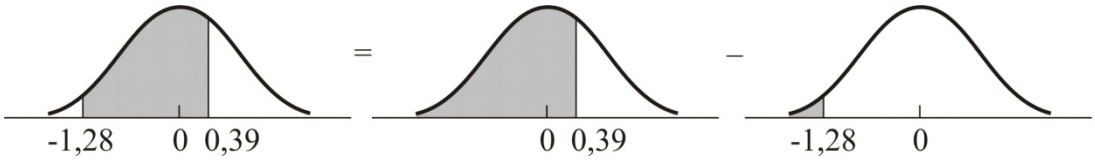


4. $P(-1,28 < Z < 0,39) =$ rozdiel dvoch plôch $P(Z < 0,39) - P(Z < -1,28)$. Platí, že

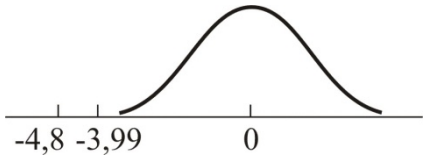
$$P(Z < 0,39) = 0,65173 \quad \text{a} \quad P(Z < -1,28) = 0,10027$$

Teda

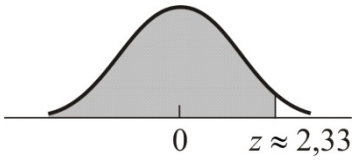
$$P(-1,28 < Z < 0,39) = 0,65173 - 0,10027 = 0,55146$$



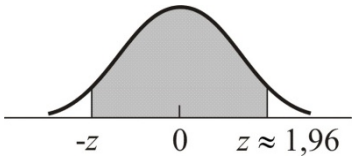
5. $P(Z \le -4,8)$ nemôžeme nájsť v tabuľkách, pretože najvyššia hodnota v tabuľkách je $P(Z \le 3,99)$. $P(Z \le -4,8)$ vypočítame použitím štatistických softvérov Statgraphics, Minitab, Statistica, SPSS, SPlus a ďalších.



6. Chceme nájsť hodnotu *z* tak, aby $P(Z > z) = 0,01$ Tento výraz môžeme prepísať ako $P(Z \le z) = 0,99$. Teraz použijeme tabuľky opačne. Vyhľadáme pravdepodobnosť, ktorá je najbližšia hodnote 0,99, pretože v tabuľkách nenájdeme hodnotu 0,99 presne. Najbližšia hodnota pravdepodobnosti 0,990097 zodpovedá hodnote $z = 2,33$.



7. Hľadáme hodnotu *z*, pre ktorú platí: $P(-z < Z < z) = 0,95$. Zo symetrie normálneho rozdelenia vyplýva toto: Ak vyšrafovaná plocha na obrázku sa rovná 0,95, zvyšná plocha na každej strane musí byť 0,025. Preto hodnota *z* zodpovedá pravdepodobnosti 0,975. K nej najbližšia tabuľková hodnota pravdepodobnosti 0,975002 zodpovedá hodnote $z = 1,96$.



Predchádzajúce príklady ukazujú výpočet pravdepodobností pre náhodnú premennú s normovaným normálnym rozdelením. Keby sme chceli použiť uvedený postup na ľubovoľnú normálne rozdelenú náhodnú premennú *X* s parametrami μ a σ, musíme v priebehu výpočtu *X* pretransformovať na normovanú normálnu náhodnú premennú *Z* (pozri vzorec 2.37).

Príklad 2.34

Predpokladajme, že detekcia digitálneho signálu šumu pozadia má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 voltov a smerodajnou odchýlkou 0,4 voltov. Systém predpokladá, že hodnota 1 bola prenesená, keď napätie je väčšie ako 1,2 V. Chceme vedieť, aká je pravdepodobnosť detegovania hodnoty 1, keď žiadna nebola poslaná.

Nech náhodná premenná X označuje napätie šumu. Požadovaná pravdepodobnosť je

$$P(X > 1,2) = P\left(\frac{X}{0,4} > \frac{1,2}{0,4}\right) = P(Z > 3) = 1 - 0,99865 = 0,00135$$

Túto pravdepodobnosť možno označiť ako pravdepodobnosť chybnej detekcie.

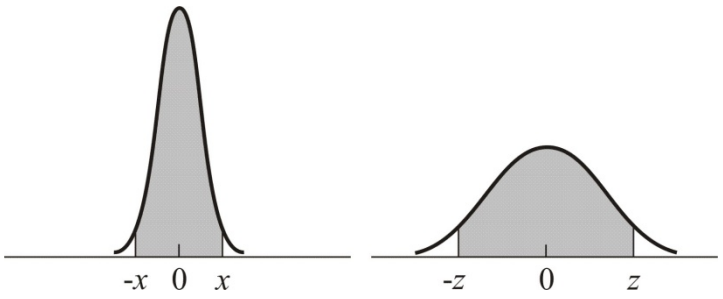
Ďalej chceme určiť symetrické hranice okolo 0, ktoré zahrnujú 99 % všetkých snímaných hodnôt šumu. Potrebujeme nájsť hodnotu x tak, aby

$$P(-x < X < x) = 0,99$$

Túto pravdepodobnostnú rovnicu možno na základe symetrie normálneho rozdelenia (7. vzťah na výpočet pravdepodobnosti) napísať v tvare:

$$P(X < x) = 0,995$$

Potom použijeme transformáciu na normovanú normálnu náhodnú premennú Z, ako vidieť na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 2.18. *Stanovenie hodnoty x pre požadovanú pravdepodobnosť*

Počítajme

$$P(X < x) = P\left(\frac{X}{0,4} < \frac{x}{0,4}\right) = P\left(Z < \frac{x}{0,4}\right) = 0,995$$

Pretože hodnota pravdepodobnosti 0,995 sa v štatistických tabuľkách nenachádza, zoberieme najbližšiu tabuľkovú hodnotu pravdepodobnosti, ktorá je 0,99506. Platí:

$$P(Z < 2,58) = 0,99506$$

Z porovnania posledných dvoch rovníc vyplýva, že

$$\frac{x}{0,4} = 2,58$$

z čoho dostaneme

$$x = 2,58 \cdot 0,4 = 1,032$$

Nech hodnota 1 reprezentuje posun priemeru rozdelenia šumu na hodnotu 1,4 V. Zaujíma nás, aká je pravdepodobnosť, že hodnota 1 nie je detegovaná. Nech náhodná premenná Y je napätie, pri ktorom sa hodnota 1 prenesie. Potom

$$P(Y<1,2)=P\left(\frac{Y-1,4}{0,4}<\frac{1,2-1,4}{0,4}\right)=P(Z<-0,5)=$$

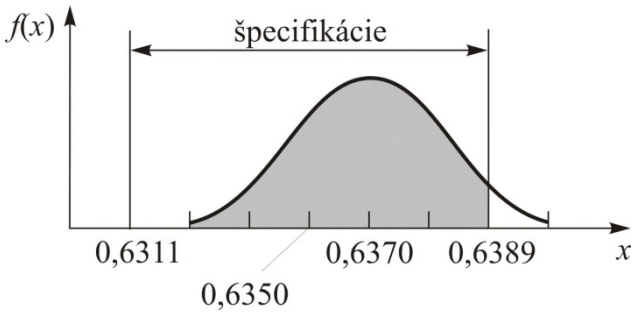
$$=P(Z>0,5)=1-P(Z\le 0,5)=1-0,691464=0,308536$$

Túto pravdepodobnosť môžeme interpretovať ako pravdepodobnosť chýbajúceho signálu.

Príklad 2.35

Priemer hriadeľa mechaniky optickej pamäti má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0,637 cm a smerodajnou odchýlkou 0,0013 cm. Špecifikácie na hriadeľ sú $0,6350\pm 0,0039$ centimetrov.

Chceme vedieť, aký podiel hriadeľov vyhovuje špecifikáciám. Nech X označuje priemer hriadeľa v cm. Požadovaná pravdepodobnosť je na nasledujúcom obrázku



Obrázok 2.19

a platí, že

$$P(0,6311<X<0,6389)=P\left(\frac{0,6311-0,6370}{0,0013}<Z<\frac{0,6389-0,6370}{0,0013}\right)=$$

$$=P(-4,53<Z<1,47)=P(Z<1,47)-P(Z<-4,6)=$$

$$=0,929219-0,000003=0,929216$$

Počet nezhodných hriadeľov je príliš veľký, pretože stredná hodnota sa nachádza veľmi blízko pri hornej hranici špecifikácie. Keď je proces centrovaný tak, že stredná hodnota procesu sa rovná cieľovej hodnote 0,6350, potom

$$P(0,6311<X<0,6389)=P\left(\frac{0,6311-0,6350}{0,0013}<Z<\frac{0,6389-0,6350}{0,0013}\right)=$$

$$=P(-3<Z<3)=P(Z<3)-P(Z<-3)=$$

$$=0,99865-0,00135=0,9973$$

Nacentrovaním procesu vzrastie pravdepodobnosť na približne 99,73 % čo znamená, že iba 0,27 % hriadeľov je nezhodných.

2.2.5 Gama rozdelenie

Toto rozdelenie uvedieme bez príkladu. Príklady k tomuto i k ostatným rozdeleniam sú v skriptách s názvom *Základy štatistickej analýzy ─ Riešené príklady a úlohy*.

Hustota gama rozdelenia

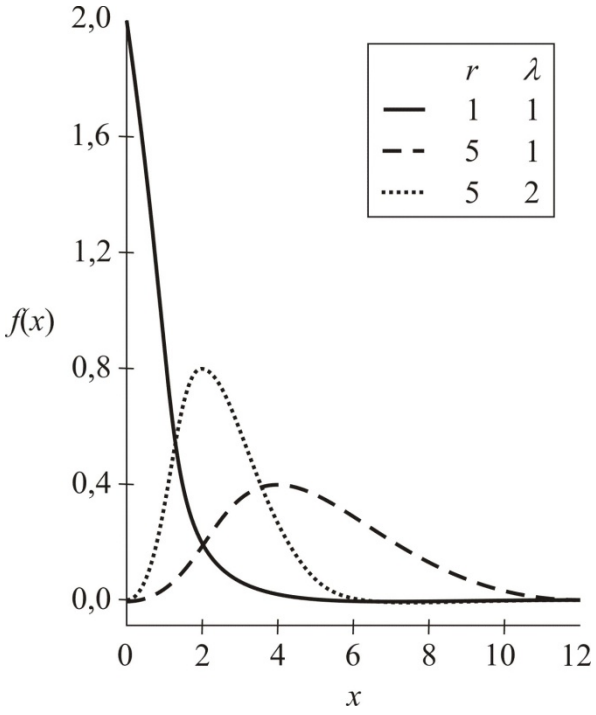
Náhodná premenná X má **gama rozdelenie,** ak jej hustoty pravdepodobnosti má tvar

$$f(x)=\frac{\lambda^r x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \quad \text{pre} \quad x>0 \tag{2.39}$$

kde $\lambda>0$ a $r>0$ sú reálne parametre a $\Gamma(r)=\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$.

Gama rozdelenie s parametrami λ a r označujeme $\Gamma(r,\lambda)$.

Poznámka. Keď vo vzťahu (2.38) je r celé číslo dostaneme špeciálny prípad rozdelenia gama, ktoré sa nazýva **Erlangovo rozdelenie**



Obrázok 2.20. *Hustota rozdelenia* $\Gamma(r,\lambda)$

Distribučná funkcia rozdelenia $\Gamma(r,\lambda)$

Funkcia $F(x)$ sa nazýva distribučná funkcia rozdelenia $\Gamma(r,\lambda)$, ak platí:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \int_0^x \dfrac{\lambda^r x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}dx & x>0\end{cases} \tag{2.40}$$

Stredná hodnota a rozptyl rozdelenia $\Gamma(r,\lambda)$

$$\mu = E(X) = r/\lambda \quad \text{a} \quad \sigma^2 = D(X) = r/\lambda^2 \tag{2.41}$$

Keď X má rozdelenie $\Gamma(r,\lambda)$, potom platí:

Hoci sa gama rozdelenie tak často nevyužíva na modelovanie fyzikálnych systémov, jeho špeciálny prípad, Erlangovo rozdelenie, je veľmi užitočné pri modelovaní náhodných experimentov. Okrem toho **chí-kvadrát rozdelenie** je tiež špeciálny prípad gama rozdelenia s $\lambda = 1/2$ a r rovným jednej z hodnôt 1/2, 1, 3/2, 2,.... Toto rozdelenie sa extenzívne využíva v intervaloch spoľahlivosti a testovaní hypotéz, o ktorých sa hovorí v ďalších kapitolách.

2.2.6 Exponenciálne rozdelenie

Exponenciálne rozdelenie je špeciálny prípad gama rozdelenia ($r = 1$). Náhodná premenná s Poissonovým rozdelením (Príklad 2.20) predstavuje počet chýb na dĺžke medeného drôtu. Vzdialenosť medzi chybami je iná náhodná premenná, ktorá nás môže zaujímať.

Nech náhodná premenná X znamená dĺžku od ktoréhokoľvek východiskového bodu na drôte až po bod, v ktorom sa deteguje chyba. Dá sa očakávať, že rozdelenie premennej X získame zo znalosti rozdelenia počtu chýb. Vzdialenosť do prvej chyby prekročí 3 milimetre vtedy a len vtedy ak nie sú žiadne chyby na dĺžke 3 milimetre. Teraz to zovšeobecníme.
Nech náhodná premenná M je počet chýb na x milimetroch drôtu. Ak stredná hodnota chýb je λ na milimeter, tak M má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou λx. Predpokladáme, že drôt je dlhší ako hodnota x. Potom

$$P(X > x) = P(M = 0) = \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^0}{0!} = e^{-\lambda x}$$

z čoho dostaneme distribučnú funkciu premennej X pre, ktorú platí

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$

Derivovaním $F(x)$ dostaneme hustotu premennej X

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$

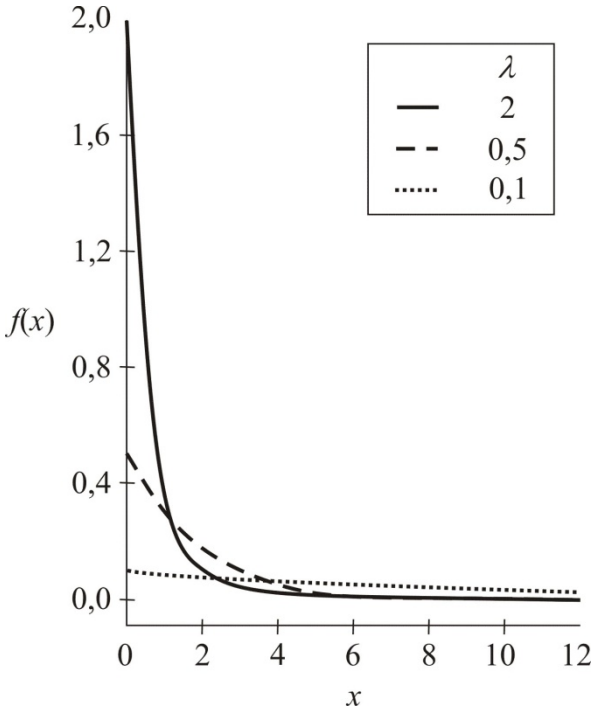
Odvodenie rozdelenia premennej X závisí len od predpokladu, že chyby na drôte sa riadia Poissonovým procesom. Pretože pravdepodobnosť počtu chýb na intervale Poissonovho procesu závisí len od dĺžky tohto intervalu a nie od polohy, štartovací bod merania premennej X môže byť kdekoľvek. Potom pre každý Poissonov proces platia tieto všeobecné výsledky.

Hustota exponenciálneho rozdelenia

Náhodná premenná X, ktorá predstavuje interval medzi za sebou idúcimi početnosťami v Poissonovom procese so strednou hodnotou $\lambda > 0$ je **exponenciálna náhodná premenná** s parametrom λ. **Hustota** premennej X je

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{pre} \quad 0 \le x < \infty \tag{2.42}$$

Exponenciálne rozdelenie s parametrom λ označujeme $X \sim E(\lambda)$.



Obrázok 2.21. *Hustota exponenciálneho rozdelenia*

Distribučná funkcia rozdelenia $E(\lambda)$

Funkcia $F(x)$ je distribučná funkcia rozdelenia $E(\lambda)$, keď má tvar:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

Stredná hodnota a rozptyl rozdelenia $E(\lambda)$

Nech $X \sim E(\lambda)$, potom pre strednú hodnotu a rozptyl platia vzťahy:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{a} \quad \sigma^2 = D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.44}$$

Kvantily rozdelenia $E(\lambda)$

Pre $100P$ % kvantil x_P rozdelenia $E(\lambda)$ platí

$$x_P = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-P), \qquad 0 < P < 1 \tag{2.45}$$

Príklad 2.36

Vo veľkej firemnej počítačovej sieti sa prihlásenia užívateľov do systému môžu modelovať Poissonovým procesom so strednou hodnotou 20 prihlásení za hodinu. Chceme zistiť, aká je pravdepodobnosť, že v intervale 3 minút nie sú žiadne prihlásenia.

Nech X je čas v hodinách od začiatku intervalu do prvého prihlásenia. Potom X má exponenciálne rozdelenie s $\lambda = 20$ prihláseniami za hodinu. Zaujíma nás pravdepodobnosť, že X prekročí 3 minúty, čo zodpovedá hodnote 0,05 hodín. Požadovaná pravdepodobnosť je

$$P(X > 0{,}05) = \int_{0{,}05}^{\infty} 20e^{-20x}dx = e^{-20\times 0{,}05} = 0{,}36788$$

Na výpočet možno použiť aj distribučnú funkciu pričom dostaneme ten istý výsledok.

Teraz nás zaujíma pravdepodobnosť, že čas kým sa uskutoční ďalšie prihlásenie je od 3 minút do 6 minút.

$$P(0{,}05 < X < 0{,}1) = \int_{0{,}05}^{0{,}1} 20e^{-20x}dx = -e^{-20\times 0{,}1} + e^{-20\times 0{,}05} = 0{,}23254$$

Alternatívny výpočet je pomocou distribučnej funkcie.

Nájdeme časový interval, v ktorom sa s pravdepodobnosťou 0,9 nevyskytne žiadne prihlásenie. Hľadáme časovú dĺžku x takú, že $P(X > x) = 0{,}9$. Teda

$$P(X > x) = e^{-20x} = 0{,}9$$

Logaritmovaním dostaneme $-20x = \ln 0{,}95 = -0{,}05129$. Potom platí, že

$$x = 0{,}00256 \text{ hodín} = 0{,}157 \text{ minút}$$

Ďalej vypočítame strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku času kým sa uskutoční ďalšie prihlásenie. Platí, že $\sigma = \mu$. Potom

$$\mu = \sigma = 1/20 = 0{,}05 \text{ hodín} = 3 \text{ minúty}$$

V predchádzajúcom príklade vypočítaná pravdepodobnosť, že v intervale 3 minút nie sú žiadne prihlásenia, sa rovná 0,36788 bez ohľadu na začiatok časového intervalu. Poissonov proces predpokladá, že udalosti sa vyskytujú rovnomerne na celom intervale pozorovaní; t. j. nie je tam žiadne zhlukovanie udalostí. Keď sú prihlásenia dobre modelované Poissonovým procesom, potom pravdepodobnosť, že prvého prihlásenie po 12:00 hod sa vyskytne po 12:03 hod je tá istá, ako pravdepodobnosť, že prvého prihlásenie po 18:00 hod sa vyskytne po 18:03 hod.

Teda nezáleží na tom, aký je štartovací bod pozorovania. Keď sa však vyskytnú v priebehu dňa periódy s veľkým (alebo malým) počtom prihlasovaní, Poissonov proces nie je vhodný na modelovane celého dňa, ale iba na jednotlivé periódy s rôznymi hodnotami parametra λ.

Vlastnosť exponenciálneho rozdelenia

Zaujímavá vlastnosť exponenciálnej náhodnej premennej sa zaoberá podmienenými pravdepodobnosťami.

Príklad 2.37

Náhodná premenná X je čas medzi detekciami častice Geigerovým počítačom. Predpokladajme, že X má exponenciálne rozdelenie s $\lambda = 1{,}2$ minút. Pravdepodobnosť, že sa detegu-je častica počas 45 sekúnd od spustenia počítača je

$$P(X < 0,75 \text{ minút}) = F(0,75) = 1 - e^{-0,75/1,2} = 0,46474$$

Teraz predpokladajme, že zapneme Geigerov počítač a čakáme 5 minút bez detegovania častice. Chceme vedieť, aká je pravdepodobnosť, že častica sa deteguje v ďalších 45 sekundách.

Požadovaná pravdepodobnosť sa dá vyjadriť ako podmienená pravdepodobnosť

$$P(X < 5,75 \,|\, X > 5) = \frac{P(5 < X < 5,75)}{P(X > 5)}$$

kde

$$P(5 < X < 5,75) = F(5,75) - F(5) = \left[1 - e^{-5,75/1,2}\right] - \left[1 - e^{-5/1,2}\right] = 0,0072053$$

a

$$P(X > 5) = 1 - F(5) = e^{-5/1,2} = 0,015503851$$

Teda

$$P(X < 5,75 \,|\, X > 5) = \frac{0,0072053}{0,0155039} = 0,46474$$

Po čakaní 5 minút bez detegovania sa pravdepodobnosť detekcie počas ďalších 45 sekúnd rovná pravdepodobnosti, že sa deteguje častica v priebehu 45 sekúnd od spustenia počítača. Teda udalosť čakania 5 minút bez detegovania nemá vplyv na pravdepodobnosť detekcie počas ďalších 45 sekúnd.

Tento príklad ilustruje vlastnosť nazvanú „rozdelenie bez pamäti“, ktorá znamená, že systém si nepamätá históriu predchádzajúcich výsledkov, čo znamená, že časovač systému možno obnoviť kedykoľvek, t. j.

$$P(X < x_1 + x_2 \,|\, X > x_1) = P(X < x_2) \tag{2.46}$$

Túto vlastnosť má zo spojitých rozdelení iba exponenciálne rozdelenie.

Exponenciálne rozdelenie dobre opisuje rozdelenie doby životnosti zariadenia, u ktorého prichádza k poruche z celkom náhodných príčin a nie v dôsledku mechanického opotrebenia alebo únavy materiálu. Prax potvrdzuje, že exponenciálne rozdelenie majú doby životnosti napr. elektronických prvkov rôznych zariadení.

2.2.7 Weibullovo rozdelenie

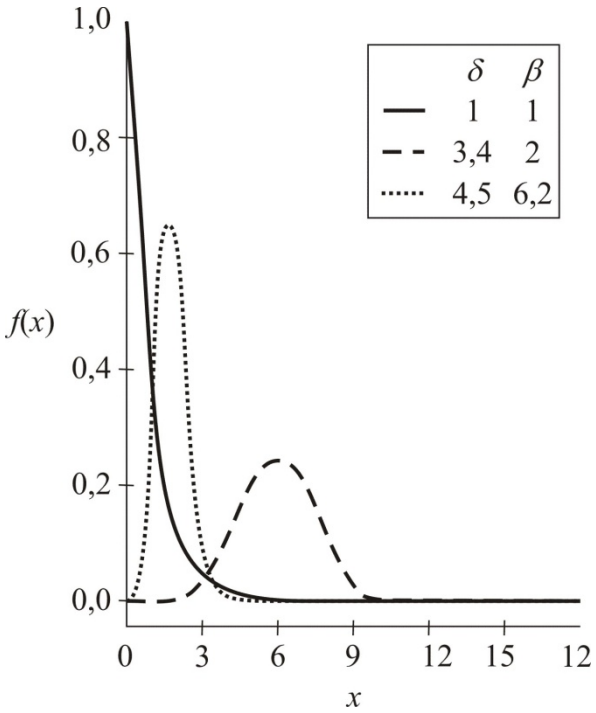
Weibullovo rozdelenie sa často používa ako model doby do poruchy množstva rôznych fyzikálnych systémov. Parametre rozdelenia poskytujú veľkú flexibilitu modelov systémov, v ktorých počet porúch sa s časom zvyšuje (napr. opotrebenie ložiska), znižuje (napr. niektoré polovodiče) alebo zostáva konštantný (napr. poruchy, ktoré spôsobujú vonkajšie šoky do systému).

Hustota Weibullovho rozdelenia

Náhodná premenná X má **Weibullovo rozdelenie** pravdepodobnosti s parametrami $\delta > 0$ a $\beta > 0$, ak má **hustotu**

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}\right], \quad \text{pre} \quad x > 0 \tag{2.47}$$

a označujeme ho $X \sim W(\delta, \beta)$.



Obrázok 2.22. *Hustoty Weibullovho rozdelenia pre β = 1,5 a β = 2*

Distribučná funkcia rozdelenia $W(\delta, \beta)$

Keď X má Weibullovo rozdelenie s parametrami δ a β, potom distribučná funkcia má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}} & x > 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Stredná hodnota a rozptyl rozdelenia $W(\delta, \beta)$

Keď X má rozdelenie $W(\delta, \beta)$, potom platí:

$$\mu = E(X) = \delta\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) \quad \text{a} \quad \sigma^2 = D(X) = \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]\delta^2 \tag{2.49}$$

Kvantily rozdelenia $W(\delta,\beta)$

Pre $100P$ % kvantil x_P rozdelenia $E(\lambda)$ platí

$$\mathrm{m}\, x_P = \delta\left[-\ln(1-P)\right]^{1/\beta}, \qquad 0 < P < 1 \tag{2.50}$$

Weibulovo rozdelenie majú väčšinou doby životnosti (doba do poruchy) mnohých zariadení, pričom pre parameter

- $\beta > 1$ ide o model životnosti zariadenia, ktoré podlieha opotrebovaniu alebo únave,
- $\beta < 1$ ide o model pre životnosť zariadenia, u ktorého dochádza k poruchám v dôsledku chýb, a nie pre opotrebovanie.

Príklad 2.38

Doba do poruchy (v hodinách) ložiska mechanického hriadeľa sa uspokojivo modeluje Weibullovou náhodnou premennou s parametrami $\beta = 0,6$ a $\delta = 6000$ hodín. Určíme strednú dobu až do poruchy.

Zo vzťahu pre strednú hodnotu platí:

$$E(X) = 6000\,\Gamma\left(\frac{1}{0,5}+1\right) = 6000\Gamma(3) = 6000\times 2! = 12\,000 \text{ hodín}$$

Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že ložisko vydrží aspoň 7000 hodín. Platí:

$$P(X > 7000) = 1 - F(7000) = \exp\left[-\left(\frac{7000}{5000}\right)^{0,5}\right] = e^{-1,1832} = 0,3063$$

Teda iba 30,63 % zo všetkých ložísk vydrží aspoň 7000 hodín.

2.2.8 Logaritmicko-normálne rozdelenie

Premenné v nejakom systéme majú niekedy exponenciálny vzťah ako napríklad $x = \exp(Y)$. Keď exponent Y je náhodná premenná, potom $X = \exp(Y)$ je tiež náhodná premenná a môže nás zaujímať jej distribučná funkcia. Veľmi dôležitý prípad nastáva, keď Y má rozdelenie $N(\mu,\sigma^2)$. V tomto prípade má X rozdelenie nazvané **logaritmicko-normálne rozdelenie**, ktoré označujeme $LN(\mu,\sigma^2)$ Názov pochádza z transformácie $\ln X = Y$, čo znamená, že prirodzený logaritmus X je normálne rozdelený.

Z transformácie X na Y vieme, že obor hodnôt náhodnej premennej X je $(0,\infty)$. Nech Y má rozdelenie $N(\mu,\sigma^2)$, potom pre distribučnú funkciu premennej X, keď $x > 0$, platí:

$$F(x) = P(X \le x) = P\left[\exp(Y) \le x\right] = P\left[Y \le \ln x\right] =$$

$$= P\left[Z \le \frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left[\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right]$$

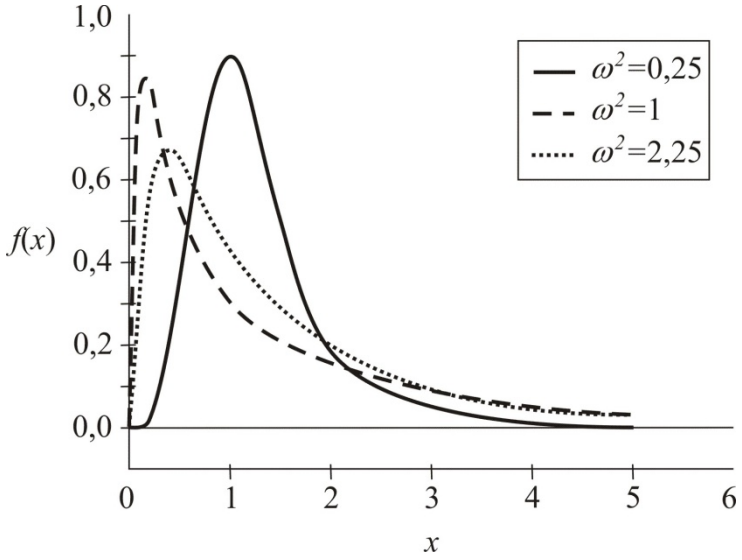
kde Z je normovaná normálna náhodná premenná. Hustotu premennej X dostaneme ako deriváciu $F(x)$.

Hustoty náhodnej premennej *X*

Nech Y má rozdelenie $N(\mu,\sigma^2)$, potom náhodná premenná $X=\exp(Y)$ má **logaritmicko-normálne rozdelenie** s parametrami μ a σ^2, pričom $\mu\in R$, $\sigma^2>0$, ak sa jej hustota rovná

$$f(x)=\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad x>0 \tag{2.51}$$

Logaritmicko-normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2 označujeme $LN(\mu,\sigma^2)$.



Obrázok 2.23. *Hustoty rozdelenia* $LN(\mu,\sigma^2)$ *pre rôzne hodnoty parametra* σ

Distribučná funkcia rozdelenia $LN(\mu,\sigma^2)$

Pretože premenná $\ln X$ má rozdelenie $N(\mu,\sigma^2)$, platí pre distribučnú funkciu rozdelenia $LN(\mu,\sigma^2)$

$$F(x)=P(\ln X\le\ln x)=\begin{cases}\Phi\left[\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right] & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{2.52}$$

Stredná hodnota a rozptyl rozdelenia $LN(\mu,\sigma^2)$

Nech náhodná premenná X má rozdelenie $LN(\mu,\sigma^2)$, potom jej **stredná hodnota** je daná vzťahom

$$E(X)=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{2.53}$$

a pre **rozptyl** platí, že

$$D(X)=\exp(2\mu+\sigma^2)\left(\exp(\sigma^2)-1\right) \tag{2.54}$$

Kvantily rozdelenia $LN(\mu, \sigma^2)$

Pre $100P$ % kvantil x_P rozdelenia $LN(\mu, \sigma^2)$ platí

$$x_P = \exp(\mu + \sigma z_P), \qquad 0 < P < 1 \tag{2.55}$$

kde z_P je $100P$ % kvantil rozdelenia $N(0,1)$.

Toto rozdelenie sa často používa pri opise veľkosti častíc disperzných fáz kovových materiálov alebo veľkosť častíc sypkých materiálov alebo v teórii spoľahlivosti. Životnosť produktu, ktorý sa znehodnocuje s časom, sa tiež často modeluje logaritmicko-normálnou premennou. Napríklad životnosť polovodičového lasera sa modeluje týmto rozdelením.

Príklad 2.39

Životnosť polovodičového lasera má logaritmicko-normálne rozdelenie s parametrami $\mu = 12$ hodín a $\sigma = 1,6$ hodín. Chceme vedieť, aká je pravdepodobnosť, že životnosť presiahne 15 000 hodín.

Z distribučnej funkcie premennej X dostaneme

$$P(X > 15000) = 1 - P\left[\exp(Y) \le 15000\right] = 1 - P\left[Y \le \ln 15000\right] =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\ln 15000 - 12}{1,6}\right) = 1 - \Phi(-1,49) = \Phi(1,49) = 0,931888$$

Chceme poznať životnosť, ktorú prekročí 95 % laserov. Teda hľadáme hodnotu x takú, že $P(X > x) = 0,95$. Platí:

$$P(X > x) = P\left[\exp(Y) > x\right] = P\left[Y > \ln x\right] = 1 - \Phi\left(\frac{\ln x - 12}{1,6}\right) = 0,95$$

Z toho vyplýva, že $\Phi\left(\frac{\ln x - 12}{1,6}\right) = 0,05$. Vieme, že $\Phi(z) = 0,05$, keď $z = -1,64486$. Preto

$$\frac{\ln x - 12}{1,6} = -1,64486 \quad \text{a} \quad x = \exp(9,368224) = 11710,299 \text{ hodín}$$

Vypočítajme strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku životnosti. Platí:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = \exp(12 + 1,28) = 585370,35$$

a pre rozptyl platí, že

$$D(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)\left(\exp(\sigma^2) - 1\right) = \exp(24 + 2,56)\left[\exp(2,56) - 1\right]$$

$$= 3,426584447 \times 10^{11}$$

Teda smerodajná odchýlka premennej X je 5853370,35 hodín. Všimnime si, že smerodajná odchýlka je väčšia ako stredná hodnota.

3 VIACROZMERNÉ NÁHODNÉ PREMENNÉ

V predchádzajúcej kapitole sme študovali pravdepodobnostné rozdelenia pre jednoduchú náhodnú premennú. Často sa však stretávame s viac ako jednou náhodnou premennou definovanou v náhodnom experimente. Napríklad pri klasifikácii prenášaných a prijatých signálov, každý signál klasifikujeme podľa kvality: vysoká, stredná a nízka kvalita. Mohli by sme definovať náhodnú premennú X ako počet prijatých signálov s vysokou kvalitou a náhodnú premennú Y ako počet prijatých signálov s nízkou kvalitou. V inom príklade môže spojitá náhodná premenná X predstavovať dĺžku jedného rozmeru lisovaného dielca a spojitá náhodná premenná Y môže predstavovať dĺžku iného rozmeru. Nech napríklad špecifikácie X sú od 2,85 mm do 2,95 mm a špecifikácie Y sú od 7,55 mm do 7,75 mm. Môže nás zaujímať pravdepodobnosť, že dielec vyhovuje špecifikáciám, t. j. $P(2{,}85 < X < 2{,}95; 7{,}55 < Y < 7{,}75)$.

Nech X a Y sú dve náhodné premenné, potom rozdelenie pravdepodobnosti, ktoré opisuje ich súčasné správanie sa nazýva **združené rozdelenie pravdepodobnosti.** V tejto kapitole zisťujeme niektoré dôležité vlastnosti týchto združených rozdelení.

Pre jednoduchosť začneme s náhodnými experimentmi, v ktorých sa skúmajú dve náhodné premenné. Na opis stochastických vlastností dvoch náhodných premenných X a Y sa používajú tri druhy rozdelení pravdepodobnosti:

1. združené rozdelenie pravdepodobnosti;
2. marginálne rozdelenie pravdepodobnosti;
3. podmienené rozdelenie pravdepodobnosti.

3.1 Dve diskrétne náhodné premenné

3.1.1 Združené rozdelenie pravdepodobnosti

Združené rozdelenie pravdepodobnosti vysvetlíme najprv na príklade.

Príklad 3.1

Malá fabrika pracuje na dve zmeny. Manažment sa na základe podozrivo veľkej absencie rozhodol vykonať náhodný experiment. V experimente sa zaznamenávali počty absencií pracovníkov na rannej zmene a poobedňajšej zmene za obdobie 1000 dní za sebou, ktoré sú uvedené v tabuľke 3.1.

Tabuľka 3.1 *Záznamy počtu absencií a ich početnosť*

Ranná zmena	Poobedňajšia zmena			
	0	1	2	3
0	50	50	100	0
1	50	100	250	100
2	0	150	100	50

Výberový priestor daného náhodného experimentu je

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (0,0);(0,1);(0,2);(0,3);(1,0);(1,1) \\ (1,2);(1,3);(2,0);(2,1);(2,2);(2,3) \end{matrix} \right\}$$

Všetky dvojice v Ω predstavujú elementárne udalosti. Udalosť $(0,0)$ znamená, že na rannej zmene ani na poobedňajšej zmene nik nechýbal. Podobne udalosť $(2,1)$ znamená, že na rannej zmene chýbali dvaja pracovníci a na poobedňajšej zmene jeden pracovník. Význam ostatných elementárnych udalostí je podobný.

Každej udalosti z Ω prislúcha v tabuľke 3.1 početnosť. Napríklad udalosť $(0,0)$ má početnosť 50, čo znamená, že takých dní bolo 50 z celkového počtu 1000 dní. Podobne to platí aj pre ostatné udalosti z Ω.

Keď každú hodnotu v tabuľke 3.1 vydelíme celkovým počtom záznamov, dostaneme hodnoty relatívnych početností, ktoré vzhľadom na veľký počet záznamov môžeme považovať za pravdepodobnosti (pozri vzťah (1.3)). Potom definujeme náhodnú premennú *X*, ktorá predstavuje početnosť absentujúcich pracovníkov na rannej zmene, teda nadobúda hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 2$. Tak isto definujeme náhodnú premennú *Y*, ktorá predstavuje početnosť absentujúcich pracovníkov na poobedňajšej zmene a nadobúda hodnoty $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$ a $y_4 = 3$. Nakoniec modifikujeme tabuľku 3.1 na tabuľku 3.2, kde sú uvedené združené pravdepodobnosti.

Tabuľka 3.2. *Združené pravdepodobnosti náhodných premenných X a Y*

X	*Y*			
	0	1	2	3
0	0,05	0,05	0,10	0,00
1	0,05	0,10	0,25	0,10
2	0,00	0,15	0,10	0,05

Združená pravdepodobnostná funkcia

Funkcia $f_{XY}(x,y)$ dvoch diskrétnych náhodných premenných *X* a *Y,* ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $f_{XY}(x,y) \geq 0$

2. $\sum_x \sum_y f_{XY}(x,y) = 1$

3. $f_{XY}(x,y) = P\left(X = x, Y = y\right)$ (3.1)

sa nazýva združená pravdepodobnostná funkcia.

Z tabuľky 3.2 čítame napríklad, že

$f_{XY}(0,2) = (P(X = 0, Y = 2) = 0{,}10$; $f_{XY}(2,3) = P(X = 2, Y = 3) = 0{,}05$ a pod.

3.1.2 Marginálne rozdelenie pravdepodobnosti

Keď sú v náhodnom experimente definované dve a viac náhodných premenných, dôležité je rozlišovať združené rozdelenie dvoch premenných *X* a *Y* od rozdelenia každej premennej individuálne. Toto individuálne rozdelenie náhodnej premennej označujeme **marginálne rozdelenie pravdepodobnosti.**

Všeobecne platí, že marginálne rozdelenie *X* možno získať zo združeného rozdelenia *X* a *Y*. Napríklad na stanovenie $P(X = x)$ spočítame $P(X = x, Y = y)$ pre celý obor hodnôt (X, Y), pre ktoré $X = x$.

Príklad 3.2

Zo združeného rozdelenia pravdepodobnosti *X* a *Y* v tabuľke 3.2 chceme nájsť marginálne rozdelenie *X* a marginálne rozdelenie *Y*.

Napríklad vypočítajme pravdepodobnosť $P(X = 2)$.

$$P(X = 2) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) =$$
$$= 0{,}00 + 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}30$$

Táto pravdepodobnosť je hodnota marginálnej pravdepodobnostnej funkcie *X* v bode 2, t. j. $P(X = 2) = f_X(2)$. Vypočítali sme ju tak, že v tabuľke 3.2 v riadku, kde *X* sa rovná 2, sme spočítali všetky hodnoty združených pravdepodobností.

Podobne vypočítame pravdepodobnosť $P(Y = 3) = f_Y(3)$ s tým rozdielom, že spočítavame hodnoty združených pravdepodobností v stĺpci. Teda

$$f_Y(3) = P(Y = 3) = P(X = 0, Y = 3) + P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 3) =$$
$$= 0{,}00 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}15$$

Tabuľka 3.3. *Marginálne a združené pravdepodobnosti náhodných premenných X a Y*

X	Y				
	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	0,05	0,05	0,10	0,00	0,20
1	0,05	0,10	0,25	0,10	0,50
2	0,00	0,15	0,10	0,05	0,30
$f_Y(y)$	0,10	0,30	0,45	0,15	

Potom hodnoty marginálnych pravdepodobností možno získať modifikovaním tabuľky 3.2 na tabuľku 3.3.

Marginálne pravdepodobnostné funkcie

Nech X a Y sú dve diskrétne náhodné premenné so združenou pravdepodobnostnou funkciou $f_{XY}(x,y)$, potom **marginálne pravdepodobnostné funkcie** X a Y sú

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{R_x} f_{XY}(x,y) \quad \text{a} \quad f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{R_y} f_{XY}(x,y) \tag{3.2}$$

kde R_x je množina všetkých bodov v obore hodnôt náhodného vektora (X, Y) pre $X = x$ a R_y je množina všetkých bodov v obore hodnôt náhodného vektora (X, Y) pre $Y = y$.

Keď poznáme združenú pravdepodobnostnú funkciu X a Y, potom strednú hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$ možno získať priamo zo združeného rozdelenia náhodných premenných X a Y alebo tak, že najprv vypočítame marginálne rozdelenie premennej X a potom podľa definície stanovíme $E(X)$ a $D(X)$.

Stredná hodnota a rozptyl marginálneho rozdelenia

Keď marginálna pravdepodobnostná funkcia náhodnej premennej X je $f_X(x)$, potom

$$E(X) = \mu_X = \sum_x x f_X(x) = \sum_x x \left(\sum_{R_x} f_{XY}(x,y) \right) = \sum_x \sum_{R_x} x f_{XY}(x,y) =$$

$$= \sum_R x f_{XY}(x,y) \tag{3.3}$$

$$D(X) = \sigma_X^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x) = \sum_x (x - \mu_X)^2 \sum_{R_x} f_{XY}(x,y) =$$

$$= \sum_x \sum_{R_x} (x - \mu_X)^2 f_{XY}(x,y) = \sum_R (x - \mu_X)^2 f_{XY}(x,y) =$$

$$= \sum_x x^2 f_X(x) - \mu_X^2 \tag{3.4}$$

kde R_x je množina všetkých bodov z oboru (X, Y) pre $X = x$ a R je množina všetkých bodov z oboru (X, Y).

Poznámka. Pre $E(Y)$ a $D(Y)$ platia vzťahy podobné vzťahom (3.3) a (3.4). Čitateľ ich ľahko napíše sám.

Príklad 3.3

Môžeme vypočítať $E(X)$ a $D(X)$ (Príklad 3.1) takto:

$$E(X) = 0 \times \left[f_{XY}(0,0) + f_{XY}(0,1) + f_{XY}(0,2) + f_{XY}(0,3) \right] +$$

$$+1 \times \left[f_{XY}(1,0) + f_{XY}(1,1) + f_{XY}(1,2) + f_{XY}(1,3) \right] +$$

$$+2\times\left[f_{XY}(2,0)+f_{XY}(2,1)+f_{XY}(2,2)+f_{XY}(2,3)\right]=$$

$$=0\times f_X(0)+1\times f_X(1)+2\times f_X(2)=$$

$$=0\times 0{,}20+1\times 0{,}50+2\times 0{,}30=1{,}1$$

$$D(X)=(0-1{,}1)^2 f_X(0)+(1-1{,}1)^2 f_X(1)+(2-1{,}1)^2 f_X(2)=$$

$$=1{,}21\times 0{,}20+0{,}01\times 0{,}50+0{,}81\times 0{,}30=0{,}49$$

3.1.3 Podmienené rozdelenie pravdepodobnosti

Vrátime sa k príkladu 3.1. Chceme napríklad vedieť, aká je pravdepodobnosť, že na druhej zmene bude chýbať jeden pracovník, keď na prvej chýbali dvaja. Ide o podmienenú pravdepodobnosť $P(Y=1|X=2)$.

Pripomenieme, že podľa definície podmienenej pravdepodobnosti pre udalostí A a B (pozri (1.4)) platí $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$. V našom prípade možno tento vzorec aplikovať tak, že udalosť A definujeme ako $X=x$ a udalosť B ako $Y=y$.

Príklad 3.4

Zoberme do úvahy náhodnú premennú X − početnosť absentujúcich na rannej zmene a Y − početnosť absentujúcich na poobedňajšej zmene (Príklad 3.1).

Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že na druhej zmene bude chýbať jeden, keď na prvej chýbali dvaja. Počítame takto:

$$P(Y=1|X=2)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{f_{XY}(2,1)}{f_X(2)}=\frac{0{,}15}{0{,}30}=0{,}5$$

Teraz chceme vypočítať pravdepodobnosť, že na druhej zmene budú chýbať traja za predpokladu, že na prvej zmene chýbali dvaja. Teda

$$P(Y=3|X=2)=\frac{P(X=2,Y=3)}{P(X=2)}=\frac{f_{XY}(2,3)}{f_X(2)}=\frac{0{,}05}{0{,}30}=0{,}17$$

Nakoniec vypočítame podmienenú pravdepodobnosť, že $Y=2$ za podmienky, že $X=2$. Počítajme

$$P(Y=2|X=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(X=2)}=\frac{f_{XY}(2,2)}{f_X(2)}=\frac{0{,}10}{0{,}30}=0{,}33$$

Ľahko zistíme, že $P(Y=0|X=2)=0$.

Všimnime si, že

$$P(Y=0|X=2)+P(Y=1|X=2)+P(Y=2|X=2)+P(Y=3|X=2)=1$$

Teda hodnoty 0, 1, 2, a 3 spolu s príslušnými hodnotami pravdepodobností 0; 0,50; 0,33 a 0,17 definujú podmienené rozdelenie Y za podmienky $X=2$.

Podmienená pravdepodobnostná funkcia

Nech $f_{XY}(x,y)$ je združená pravdepodobnostná funkcia diskrétnych náhodných premenných X a Y, potom funkcia určená vzťahom

$$f_{Y|x}(y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \quad \text{pre} \quad f_X(x)>0 \tag{3.5}$$

sa nazýva **podmienená pravdepodobnostná funkcia** Y za podmienky $X=x$.

Funkcia $f_{Y|x}(y)$ sa používa na výpočet pravdepodobností možných hodnôt Y za podmienky $X=x$.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnostnej funkcie

Nech R_x je množina všetkých bodov z oboru (X,Y), pre ktoré platí, že $X=x$, t. j. $R_x=\{(x,y)\in(X,Y)\,|\,X=x\}$. Potom podmienená pravdepodobnostná funkcia $f_{Y|x}(y)$ je pravdepodobnostnou funkciou pre všetky y z R_x a má tieto vlastnosti:

1. $f_{Y|x}(y)\geq 0$
2. $\sum_{R_x} f_{Y|x}(y)=1$ (3.6)
3. $P(Y=y\,|\,X=x)=f_{Y|x}(y)$

Podmienená stredná hodnota a podmienený rozptyl

Nech $R_x=\{(x,y)\in(X,Y)\,|\,X=x\}$, potom **podmienená stredná hodnota** premennej Y za podmienky $X=x$, označovaná ako $E(Y\,|\,x)$ alebo $\mu_{Y|x}$, je

$$E(Y\,|\,x)=\sum_{R_x} y f_{Y|x}(y) \tag{3.7}$$

a **podmienený rozptyl** premennej Y za podmienky $X=x$, označovaný ako $D(Y\,|\,x)$ alebo $\sigma^2_{Y|x}$, je daný vzťahom

$$D(Y\,|\,x)=\sum_{R_x}(y-\mu_{Y|x})^2 f_{Y|x}(y)=\sum_{R_x} y^2 f_{Y|x}(y)-\mu^2_{Y|x} \tag{3.8}$$

Príklad 3.5

Pre náhodné premenné v príklade 3.1, podmienená stredná hodnota náhodnej premennej Y za podmienky $X=2$ sa získa z podmieneného rozdelenia takto:

$$E(Y\,|\,2)=\mu_{Y|2}=0\times 0+1\times 0{,}50+2\times 0{,}33+3\times 0{,}17=1{,}67$$

$$D(Y\,|\,2)=(0-1{,}67)^2\times 0+(1-1{,}67)^2\times 0{,}50+(2-1{,}67)^2\times 0{,}33+(3-1{,}67)^2\times 0{,}17=$$

$$=0+0{,}22445+0{,}035937+0{,}300713=0{,}5611$$

3.1.4 Nezávislosť

V niektorých náhodných experimentoch znalosť hodnôt X nezmení žiadnu s pravdepodobností súvisiacich s hodnotami Y.

Diskrétne náhodné premenné X a Y sú **nezávislé**, ak hociktorá z nasledujúcich vlastností je správna:

1. $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ pre všetky x a y;
2. $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$ pre všetky x a y, pre ktoré $f_X(x) > 0$;
3. $f_{X|y}(x) = f_X(x)$ pre všetky x a y, pre ktoré $f_Y(y) > 0$; (3.9)
4. $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ pre ľubovoľnú podmnožinu A oboru hodnôt X a pre ľubovoľnú podmnožinu B oboru hodnôt Y.

Príklad 3.6

Chceme zistiť, či sú náhodné premenné X ─ početnosť absentujúcich pracovníkov na rannej zmene a Y ─ početnosť absentujúcich pracovníkov na poobedňajšej zmene nezávislé.

Použijeme prvý vzorec (3.9), t. j. $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ platí pre všetky x a y. V tabuľke 3.3 sú združené pravdepodobnosti aj marginálne. Zoberme napríklad $X = 2$ a $Y = 2$. Potom

$$f_{XY}(2,2) = 0{,}10,\ f_X(2) = 0{,}30 \text{ a } f_Y(2) = 0{,}45$$

z čoho vyplýva, že

$$f_{XY}(2,2) \neq f_X(2) f_Y(2)$$

Našli sme aspoň jednu dvojicu, ktorá nespĺňa uvedenú rovnosť, čo znamená, že náhodné premenné X a Y nie sú nezávislé, teda sú závislé. Aká miera závislosti je medzi premennými X a Y sa dozvieme neskôr.

3.2 Viacrozmerné diskrétne náhodné premenné

3.2.1 Združené rozdelenia pravdepodobnosti

Združená pravdepodobnostná funkcia je jednoduché rozšírenie dvojrozmernej pravdepodob-nostnej funkcie.

Združená pravdepodobnostná funkcia

Majme n diskrétnych náhodných premenných $X_1, X_2, ..., X_n$, potom funkcia

$$f_{X_1 X_2 ... X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \tag{3.10}$$

definovaná pre všetky $(x_1, x_2, ..., x_n)$ z oboru hodnôt premenných $X_1, X_2, ..., X_n$ sa nazýva z**družená pravdepodobnostná funkcia**.

Marginálne pravdepodobnostné rozdelenie je jednoduchým rozšírením dvojrozmerného rozdelenia pravdepodobnosti. Združená pravdepodobnostná funkcia viacrozmernej náhodnej premennej spĺňa vlastnosti podobné tým, ktoré sú uvedené pre dvojrozmerné rozdelenie (pozri vzťahy (3.1)).

Marginálna pravdepodobnostná funkcia

Keď $X_1, X_2, ..., X_n$ sú diskrétne náhodné premenné so združenou pravdepodobnostnou funkciou $f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$, **marginálna pravdepodobnostná funkcia** premennej X_i je

$$f_{X_i}(x_i) = P(X_i = x_i) = \sum_{R_{x_i}} f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.11}$$

kde R_{x_i} je množina bodov z oboru hodnôt $(X_1, X_2, ..., X_n)$, pre ktoré $X_i = x_i$.

Príklad 3.7

Obor hodnôt združeného diskrétneho rozdelenia troch náhodných premenných X_1, X_2, X_3 predstavujú nezáporné celé čísla, pre ktoré platí: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

Združené rozdelenie je definované na výberovom priestore

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{Bmatrix} (3,0,0);(0,0,3);(1,0,2);(2,0,1);(2,1,0) \\ (0,1,2);(1,1,1);(1,2,0);(0,2,1);(0,3,0) \end{Bmatrix}$$

so združenými pravdepodobnosťami

$f_{X_1X_2X_3}(3,0,0)$, $f_{X_1X_2X_3}(0,0,3)$, $f_{X_1X_2X_3}(1,0,2)$, $f_{X_1X_2X_3}(2,0,1)$, $f_{X_1X_2X_3}(2,1,0)$,

$f_{X_1X_2X_3}(0,1,2)$, $f_{X_1X_2X_3}(1,1,1)$, $f_{X_1X_2X_3}(1,2,0)$, $f_{X_1X_2X_3}(0,2,1)$, $f_{X_1X_2X_3}(0,3,0)$,

Marginálne rozdelenie náhodnej premennej X_2 je nasledujúce:

$$P(X_2 = 0) = f_{X_1X_2X_3}(3,0,0) + f_{X_1X_2X_3}(0,0,3) + f_{X_1X_2X_3}(1,0,2) + f_{X_1X_2X_3}(2,0,1)$$

$$P(X_2 = 1) = f_{X_1X_2X_3}(2,1,0) + f_{X_1X_2X_3}(0,1,2) + f_{X_1X_2X_3}(1,1,1)$$

$$P(X_2 = 2) = f_{X_1X_2X_3}(1,2.0) + f_{X_1X_2X_3}(0,2,1)$$

$$P(X_2 = 2) = f_{X_1X_2X_3}(0,3,0)$$

Parametre náhodnej premennej X_i, $E(X_i)$ a $D(X_i)$ pre $i = 1, 2, ..., n$, možno určiť z jej marginálneho rozdelenia alebo zo združeného rozdelenia premenných $X_1, X_2, ..., X_n$.

Stredná hodnota a rozptyl náhodnej premennej X_i

Pre **strednú hodnotu premennej** X_i platí vzťah

$$E(X_i) = \sum_{R} x_i f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.12}$$

a pre **rozptyl**

$$D(X_i) = \sum_R (x_i - \mu_{X_i})^2 f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.13}$$

kde R je množina všetkých bodov z oboru hodnôt premenných $X_1, X_2, ..., X_n$.

Pojem nezávislosti možno rozšíriť na viacrozmerné diskrétne náhodné premenné.

Nezávislosť

Diskrétne náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ sú **nezávislé** vtedy a len vtedy, ak

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n) \tag{3.14}$$

pre všetky $x_1, x_2, ..., x_n$.

Podobne ako pri dvoch náhodných premenných z nezávislosti vyplýva, že (3.14) platí pre všetky $x_1, x_2, ..., x_n$. Ak sa nájde čo i len jeden bod, pre ktorý to neplatí, potom $X_1, X_2, ..., X_n$ nie sú nezávislé. Dá sa ukázať, že ak $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé, potom

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, ..., X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \ldots P(X_n \in A_n)$$

platí pre ľubovoľné množiny $A_1, A_2, ..., A_n$.

3.2.2 Multinomické rozdelenia pravdepodobnosti

Multinomické náhodné premenné

Predpokladajme, že

1. náhodný experiment sa skladá z *n* pokusov;
2. výsledok každého pokusu možno zatriediť do jednej z *k* tried;
3. multinomické náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_k$ reprezentujú počet výsledkov, ktoré patria do tried $Tr_1, Tr_2, \ldots, Tr_k$;
4. $p_1, p_2, \ldots, p_k$ označujú pravdepodobnosti výsledkov patriacich do tried $Tr_1, Tr_2, \ldots, Tr_k$;
5. $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sú konštanty v priebehu *n* opakovaných pokusov.

Potom $X_1, X_2, ..., X_k$ majú multinomické rozdelenie so združenou p. f.

$$f_K(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_1^{x_1} \cdots p_1^{x_1} \tag{3.15}$$

kde $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ a $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

Všimnime si, že **marginálna p. f.** premennej X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ má binomické rozdelenie so strednou hodnotou a rozptylom

$$E(X_i) = \mu_{X_i} = np_i \quad \text{a} \quad D(X_i) = \sigma^2_{X_i} = np_i(1 - p_i) \tag{3.16}$$

Príklad 3.8

Maximálna sila stisku rúk v Newtonoch u dospelých ľudí je roztriedená do jednej z troch skupín: „malá“ − menej ako 222,4 N, „stredná“ − od 222,4 N do 444,8 N, „veľká“ – nad 444,8 N. Nech pravdepodobnosti, že dospelý človek patrí do skupiny „malá“, „stredná“ a „veľká“ sú 0,1; 0,7 a 0,2. Na skupine $n = 50$ ľudí sa merala sila stisku.

1. *Združená p. f. multinomického rozdelenia*

Chceme nájsť pravdepodobnosť, že 6 ľudí má malú silu stisku, 36 má strednú silu stisku a 8 ľudí má veľkú silu stisku.

Nech X_1, X_2, X_3 označujú počet ľudí, ktorý majú malú, strednú a veľkú silu stisku. Pretože $n = 50$, $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,7$ **a** $p_3 = 0,2$, **združená p. f. premenných** X_1, X_2, X_3 je

$$f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} = \frac{50!}{x_1!\,x_2!\,x_3!} 0,1^{x_1} 0,7^{x_2} 0,2^{x_3},$$

kde $x_1 + x_2 + x_3 = 50$.

Teda

$$f_{X_1X_2X_3}(6,36,8) = \frac{50!}{6!36!8!} 0,1^6 \times 0,7^{36} \times 0,2^8 = 0,019.$$

2. *Marginálna p. f. multinomického rozdelenia*

Nájdeme pravdepodobnosť, že 36 ľudí v skupine má strednú silu stisku.

Marginálna p. f. premennej X_2 má binomické rozdelenie s parametrami $n = 50$ a $p_2 = 0,7$. Potom

$$f_{X_2}(x_2) = \binom{n}{x_2} p_2^{x_2} (1 - p_2)^{n - x_2} = \binom{50}{x_2} 0,7^{x_2} 0,3^{50 - x_2},\ x_2 = 0, 1, \ldots, 50.$$

Teda

$$f_{X_2}(36) = \binom{50}{36} 0,7^{36} \times 0,3^{50-36} = 0,119.$$

3.3 Dve spojité náhodné premenné

3.3.1 Združené rozdelenia pravdepodobnosti

Združené rozdelenie pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej je dané združenou hustotou, preto najprv vysvetlíme tento termín.

Združená hustota

Majme dve spojité náhodné premenné *X* a *Y*, potom funkcia označovaná ako $f_{XY}(x, y)$ je ich **združená hustota**, ak spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f_{XY}(x, y) \geq 0$ pre všetky x, y

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

3. Pre ľubovoľnú oblasť R dvojrozmerného priestoru platí:

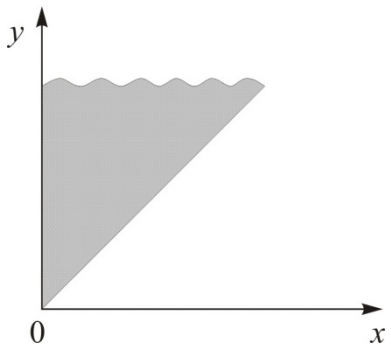
$$P([X,Y] \in R) = \iint_R f_{XY}(x,y)dxdy \tag{3.17}$$

Príklad 3.9

Nech náhodná premenná X označuje čas (v milisekundách), za ktorý sa počítačový server spojí s vaším počítačom, a nech Y označuje čas, za ktorý vás server autorizuje ako nového zákazníka. Každá z týchto náhodných premenných meria čakanie od spoločného štartovacieho času a $X < Y$. Predpokladajme, že združená hustota premenných X a Y je

$$f_{XY}(x,y) = 6\times10^{-6}\exp(-0,001x - 0,002y) \text{ pre } x < y$$

Oblasť s nenulovou pravdepodobnosťou je na obrázku 3.1.



Obrázok 3.1. *Združená hustota X a Y je nenulová v šedej oblasti*

Overíme, či funkcia $f_{XY}(x,y)$ na oblasti s nenulovou pravdepodobnosťou spĺňa druhú vlastnosť z (3.17). Počítajme

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} 6\times10^{-6}e^{-0,001x-0,002y}dy\right)dx =$$

$$= 6\times10^{-6}\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} e^{-0,002y}dy\right)e^{-0,001x}dx =$$

$$= 6\times10^{-6}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-0,002y}}{0,002}\right)e^{-0,001x}dx =$$

$$= 0,003\int_0^{\infty} e^{-0,003x}dx = 0,003\times\frac{1}{0,003} = 1$$

Pravdepodobnosť, že $X < 1500$ a $X < 2500$ je určená dvojným integrálom, takto:

$$P(X \le 1500, Y \le 2500) = \int_0^{1500}\int_x^{2500} f_{XY}(x,y)dxdy =$$

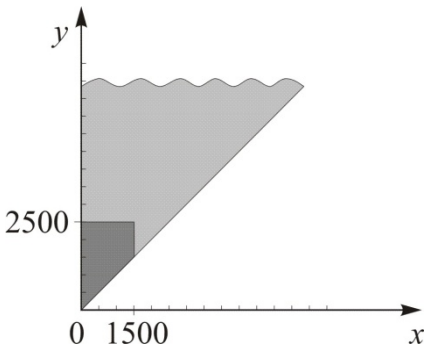
$$= 6\times 10^{-6}\int_0^{1500}\left(\int_x^{2500} e^{-0,002y}dy\right)e^{-0,001x}dx =$$

$$= 6\times 10^{-6}\int_0^{1500}\left(\frac{e^{-0,002x}-e^{-5}}{0,002}\right)e^{-0,001x}dx =$$

$$= 0,003\int_0^{1500}\left(e^{-0,003x}-e^{-5}e^{-0,001x}\right)dx =$$

$$= 0,003\left[\frac{1-e^{-4,5}}{0,003}-e^{-5}\frac{1-e^{-1,5}}{0,001}\right] =$$

$$= 0,003(329,63-5,2345) = 0,973$$



Obrázok 3.2. *Oblasť integrácie je tmavošedá*

3.3.2 Marginálne rozdelenia pravdepodobnosti

Podobne ako v prípade združených diskrétnych náhodných premenných možno nájsť marginálne rozdelenia pravdepodobnosti spojitých náhodných premenných X a Y zo združeného rozdelenia pravdepodobnosti.

Marginálne hustoty

Keď združená hustota spojitých náhodných premenných X a Y je $f_{XY}(x,y)$, potom **marginálne hustoty** týchto premenných sú

$$f_X(x) = \int_{R_x} f_{XY}(x,y)dy \quad \text{a} \quad f_Y(y) = \int_{R_y} f_{XY}(x,y)dx \tag{3.18}$$

kde R_x je množina všetkých bodov z oboru hodnôt dvojice premenných (X,Y), pre ktoré $X = x$ a R_y je množina všetkých bodov z oboru hodnôt dvojice premenných (X,Y), pre ktoré $Y = y$.

Pravdepodobnosť zahrňujúca len jednu premennú, napríklad $P(a < X < b)$, možno vypočítať z marginálneho rozdelenia premennej X alebo zo združeného rozdelenia premenných X a Y. Napríklad $P(a < X < b)$ sa rovná $P(a < X < b, -\infty < Y < \infty)$. Teda

$$P(a < X < b) = \int_a^b \int_{R_x} f_{XY}(x,y)dy\,dx = \int_a^b \left(\int_{R_x} f_{XY}(x,y)dy \right) dx = \int_a^b f_X(x)dx$$

Podobne $E(X)$ a $D(X)$ možno získať priamo zo združeného rozdelenia premenných X a Y alebo z marginálneho rozdelenia premennej X.

Stredná hodnota a rozptyl

Pre strednú hodnotu premennej X platí vzťah

$$\begin{aligned} E(X) = \mu_X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{R_x} f_{XY}(x,y)dy \right] dx \\ &= \iint_R x f_{XY}(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{3.19}$$

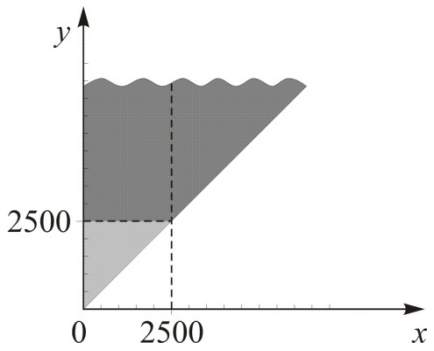
a pre rozptyl

$$\begin{aligned} D(X) = \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \left[\int_{R_x} f_{XY}(x,y)dy \right] dx = \\ &= \iint_R (x-\mu_X)^2 f_{XY}(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{3.20}$$

Príklad 3.10

Pre náhodné premenné X a Y, ktoré označujú časy v príklade 3.9, vypočítame pravdepodobnosť, že Y prekročí hodnotu 2500 milisekúnd.

Táto pravdepodobnosť sa vypočíta integráciou združenej hustoty $f_{XY}(x,y)$ cez oblasť vyznačenú na obrázku 3.3. Oblasť integrácie je rozdelená na dve časti. Pre každú časť sú stanovené rozdielne integračné hranice.



Obrázok 3.3. *Oblasť integrácie pre* $Y > 2500$ *je tmavošedá*

$$P(Y>2500)=\int_0^{2500}\left(\int_{2500}^{\infty}6\times10^{-6}e^{-0,001x-0,002y}dy\right)dx+\int_{2500}^{\infty}\left(\int_x^{\infty}6\times10^{-6}e^{-0,001x-0,002y}dy\right)dx$$

Prvý integrál je

$$6\times10^{-6}\int_0^{2500}\left(\left[\frac{e^{-0,002y}}{-0,002}\right]_{2500}^{\infty}\right)e^{-0,001x}dx=\frac{6\times10^{-6}}{0,002}e^{-5}\int_0^{2500}e^{-0,001x}dx=$$

$$=\frac{6\times10^{-6}}{0,002}e^{-5}\left(\frac{1-e^{-2,5}}{0,001}\right)=0,018554588$$

Druhý integrál je

$$6\times10^{-6}\int_{2500}^{\infty}\left(\left[\frac{e^{-0,002y}}{-0,002}\right]_{x}^{\infty}\right)e^{-0,001x}dx=\frac{6\times10^{-6}}{0,002}\int_{2500}^{\infty}e^{-0,003x}dx=$$

$$=\frac{6\times10^{-6}}{0,002}\left(\frac{e^{-7,5}}{0,003}\right)=0,000553084$$

A tak

$$P(Y>2500)=0,01855+0,00055=0,01910$$

Alternatívny výpočet je cez marginálne rozdelenie premennej Y. Výpočet ponechávame na čitateľa.

3.3.3 Podmienené rozdelenia pravdepodobnosti

Analogicky ako pri diskrétnych náhodných premenných definujeme podmienené rozdelenie premennej Y za podmienky $X=x$.

Podmienená hustota

Nech spojité náhodné premenné X a Y majú združenú hustotu $f_{XY}(x,y)$, potom **podmienená hustota** premennej Y za podmienky $X=x$ je

$$f_{Y|x}(y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}\quad\text{pre}\quad f_X(x)>0 \tag{3.21}$$

Vlastnosti podmienenej hustoty

Nech R_x je množina všetkých bodov z oboru hodnôt dvojice premenných (X,Y), pre ktoré $X=x$, potom podmienená hustota $f_{Y|x}(y)$ je hustota pre všetky y z R_x a má nasledujúce vlastnosti:

1. $f_{Y|x}(y)\geq 0$
2. $\int_{R_x} f_{Y|x}(y)\,dy=1$

3. Pre ľubovoľnú podmnožinu B oboru hodnôt Y platí:

$$P(Y \in B \mid X = x) = \int_B f_{Y|x}(y)dy \tag{3.22}$$

Príklad 3.11

Pre náhodné premenné X a Y, ktoré označujú časy v príklade 3.9, určíme podmienenú hustotu premennej Y za podmienky $X = x$.

Najprv treba určiť marginálnu hustotu premennej X. Platí, že

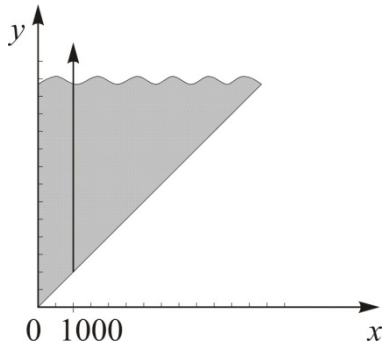
$$f_X(x) = \int_x^{\infty} 6\times10^{-6} e^{-0,001x-0,002y}dy = 6\times10^{-6} e^{-0,001x}\left(\left[\frac{e^{-0,002y}}{-0,002}\right]_x^{\infty}\right) =$$

$$= 6\times10^{-6} e^{-0,001x}\left(\frac{e^{-0,002x}}{0,002}\right) = 0,003e^{-0,003x} \quad \text{pre} \quad x > 0$$

Toto je exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda = 0,003$. Teraz pre $x > 0$ a $x < y$ podmienená hustota je

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{6\times10^{-6} e^{-0,001x-0,002y}}{0,003e^{-0,003x}} = 0,002e^{0,002x-0,002y}$$

Podmienená hustota premennej Y za podmienky $X = 1000$ je nenulová na plnej čiare na obrázku 3.4.



Obrázok 3.4. *Obor hodnôt podmienenej hustoty premennej Y za podmienky* $X = 1000$

Vypočítajme pravdepodobnosť, že Y prekročí hodnotu 2500 za podmienky, že $X = 1000$. Chceme teda určiť $P(Y > 2500 \mid X = 1000)$. Výpočet urobíme pomocou podmienenej hustoty takto:

$$P(Y > 2500 \mid X = 1000) = \int_{2500}^{\infty} f_{Y|1000}(y)dy = \int_{2500}^{\infty} 0,002e^{0,002\times1000-0,002y}dy =$$

$$= 0,002e^2\left(\left[\frac{e^{-0,002y}}{0,002}\right]_{2500}^{\infty}\right) = 0,002e^2\left(\frac{e^{-5}}{0,002}\right) = 0,0498$$

Podmienená stredná hodnota a podmienený rozptyl

Nech R_x je množina všetkých bodov z oboru hodnôt dvojice premenných (X,Y), pre ktoré $X = x$, potom **podmienená stredná hodnota** premennej Y za podmienky $X = x$ označovaná ako $E(Y|x)$ alebo $\mu_{Y|x}$ je

$$E(Y|x) = \int_{R_x} y f_{Y|x}(y)dy \tag{3.23}$$

a **podmienený rozptyl** premennej Y za podmienky $X = x$ označovaný ako $D(Y|x)$ alebo $\sigma^2_{Y|x}$ je

$$D(Y|x) = \int_{R_x} (y - \mu_{Y|x})^2 f_{Y|x}(y)dy = \int_{R_x} y^2 f_{Y|x}(y)dy - \mu^2_{Y|x} \tag{3.24}$$

Príklad 3.12

Pre náhodné premenné X a Y z príkladu 3.9, ktoré označujú časy, určíme podmienenú strednú hodnotu premennej Y za podmienky $X = 1000$.

Podmienenú hustotu premennej Y za podmienky $X = 1000$ sme určili v príklade 3.11. Pretože $f_{Y|1000}(y)$ je rôzna od nuly pre $y > 1000$,

$$E(Y|x = 1000) = \int_{1000}^{\infty} y \times 0{,}002 e^{0{,}002\times 1000 - 0{,}002y} dy = 0{,}002 e^2 \int_{1000}^{\infty} y e^{-0{,}002y} dy$$

Integráciou per partes vypočítame:

$$\int_{1000}^{\infty} y e^{-0{,}002y} dy = \left[y \frac{e^{-0{,}002y}}{-0{,}002} \right]_{1000}^{\infty} - \int_{1000}^{\infty} \left(\frac{e^{-0{,}002y}}{-0{,}002} \right) dy =$$

$$= \frac{1000}{0{,}002} e^{-2} - \left(\left[\frac{e^{-0{,}002y}}{(-0{,}002)(-0{,}002)} \right]_{1000}^{\infty} \right) =$$

$$= \frac{1000}{0{,}002} e^{-2} - \frac{e^{-2}}{0{,}002 \times 0{,}002} = \frac{e^{-2}}{0{,}002} \times 1500$$

Keď výsledok integrálu vynásobíme konštantou $0{,}002e^2$, dostaneme

$$E(Y|x = 1000) = 1500$$

3.3.4 Nezávislosť

Spojité náhodné premenné X a Y sú **nezávislé**, ak hociktorá z nasledujúcich vlastností je správna:

1. $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ pre všetky x a y;
2. $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$ pre všetky x a y, pre ktoré $f_X(x) > 0$;

3. $f_{X|y}(x) = f_X(x)$ pre všetky x a y, pre ktoré $f_Y(y) > 0$;
4. $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ pre ľubovoľnú podmnožinu A oboru hodnôt X a pre ľubovoľnú podmnožinu B oboru hodnôt Y. (3.25)

Príklad 3.13

Chceme zistiť, či náhodné premenné X a Y, ktoré označujú časy v príklade 3.9, sú nezávislé.

Na overenie použijeme druhý vzorec z (3.25), t. j. $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$. Podmienená hustota premennej Y za podmienky $X = x$, ktorú sme určili v príklade 3.11, je pre $x > 0$ a $x < y$ daná vzťahom $f_{Y|x}(y) = 0{,}002e^{0{,}002x - 0{,}002y}$. Potrebujeme určiť marginálnu hustotu $f_Y(y)$, aby sme ju mohli porovnať s podmienenou hustotu. Teda

$$f_Y(y) = \int_0^y 6\times 10^{-6} e^{-0{,}001x - 0{,}002y}\,dx = 6\times 10^{-6} e^{-0{,}002y}\left(\left[\frac{e^{-0{,}001x}}{-0{,}001}\right]_0^y\right) =$$

$$= 6\times 10^{-6} e^{-0{,}002y}\left(\frac{1 - e^{-0{,}001y}}{0{,}001}\right) = 0{,}006e^{-0{,}002y}(1 - e^{-0{,}001y}) \quad \text{pre} \quad y > 0$$

Pretože podmienená hustota sa nerovná marginálnej, t. j. $f_{Y|x}(y) \neq f_Y(y)$, náhodné premenné X a Y nie sú nezávislé, teda sú závislé. Mieru závislosti skúmame v inej podkapitole.

Príklad 3.14

Modifikujme združenú hustotu náhodných premenných X a Y z príkladu 3.9 na tvar $f_{XY}(x,y) = 2\times 10^{-6}\exp(-0{,}002x - 0{,}003y)$, kde $x \geq 0$ a $y \geq 0$. Ukážeme, že premenné X a Y sú nezávislé a vypočítame $P(X > 500, Y < 1500)$.

Marginálna hustota premennej X je

$$f_X(x) = \int_0^\infty 2\times 10^{-6} e^{-0{,}001x - 0{,}002y}\,dy = 0{,}001e^{-0{,}001x} \quad \text{pre} \quad x \geq 0$$

Marginálna hustota premennej Y je

$$f_Y(y) = \int_0^\infty 2\times 10^{-6} e^{-0{,}001x - 0{,}002y}\,dx = 0{,}002e^{-0{,}002y} \quad \text{pre} \quad y \geq 0$$

Teda $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ pre všetky x a y, z čoho vyplýva, že X a Y sú nezávislé.

Na vypočítanie pravdepodobnosti sa použije vlastnosť 4 v (3.25) a skutočnosť, že obidve náhodné premenné majú exponenciálne rozdelenie. Potom

$$P(X > 500, Y < 1500) = P(X > 500)P(Y < 1500) = e^{-0{,}5}(1 - e^{-3}) = 0{,}576$$

Príklad 3.15

Nech náhodné premenné X a Y sú dĺžky dvoch rozmerov obrobeného dielca. Predpokladajme, že X a Y sú nezávislé náhodné premenné. Ďalej predpokladajme, že rozdelenie X je

normálne so strednou hodnotou 20,5 mm a rozptylom 0,0016 mm^2 a rozdelenie Y je normálne so strednou hodnotou 13,8 mm a rozptylom 0,0025 mm^2. Určíme pravdepodobnosť, že $20,4 < X < 20,6$ a $13,75 < Y < 13,85$.

Pretože X a Y sú nezávislé, platí

$$P(20,4 < X < 20,6; 13,75 < Y < 13,85) = P(20,4 < X < 20,6)P(13,75 < Y < 13,85) =$$

$$= P\left(\frac{20,4-20,5}{0,04} < Z < \frac{20,6-20,5}{0,04}\right)P\left(\frac{13,75-13,8}{0,05} < Z < \frac{13,85-13,8}{0,05}\right) =$$

$$= P(-2,5 < Z < 2,5)P(-1 < Z < 1) = 0,98758 \times 0,68269 = 0,674$$

kde Z je normovaná normálna náhodná premenná.

3.4 Viacrozmerné spojité náhodné premenné

Združená hustota

Majme n spojitých náhodných premenných $X_1, X_2, ..., X_n$, potom funkcia označovaná ako $f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ je ich **združená hustota**, ak spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. $f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n = 1$
3. Pre ľubovoľnú oblasť B n-rozmerného priestoru platí:

$$P[(X_1, X_2, ..., X_n) \in B] = \iint_B \cdots \int f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n \qquad (3.26)$$

Marginálna hustota

Keď $f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ je združená hustota spojitých náhodných premenných X_1, X_2, ... X_n, potom **marginálna hustota** premennej X_i je

$$f_{X_i}(x_i) = \iint_{R_{x_i}} \cdots \int f_{X_1X_2...X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_{i-1}dx_{i+1} \ldots dx_n \qquad (3.27)$$

kde R_{x_i} je množina všetkých bodov oboru hodnôt premenných $X_1, X_2, ..., X_n$, pre ktoré $X = x_i$.

Podobne ako pre dve premenné pravdepodobnosť zahrňujúca len jednu premennú, napríklad $P(a < X_i < b)$, možno vypočítať z marginálneho rozdelenia premennej X_i alebo zo združeného rozdelenia premenných $X_1, X_2, ..., X_n$. Teda platí, že

$$P(a < X_i < b) = P(-\infty < X_1 < \infty, \ldots, -\infty < X_{i-1} < \infty, a < X_i < b,$$
$$-\infty < X_{i+1} < \infty, \ldots, -\infty < X_n < \infty)$$

Podobne $E(X_i)$ a $D(X_i)$ pre $i = 1,2,\ldots,n$ možno získať priamo zo združeného rozdelenia premenných $X_1, X_2, ..., X_n$ alebo z marginálneho rozdelenia premennej X_i.

Stredná hodnota a rozptyl

Pre **strednú hodnotu** premennej X_i platí vzťah

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n \tag{3.28}$$

a pre **rozptyl** platí, že

$$D(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{X_i})^2 f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n \tag{3.29}$$

Nezávislosť

Spojité náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé vtedy a len vtedy keď platí:

$$f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\ldots f_{X_n}(x_n) \text{ pre všetky } x_1, x_2, ..., x_n \tag{3.30}$$

3.5 Závislosť náhodných premenných

Opakom nezávislosti náhodných premenných je ich závislosť. V prvej časti tejto kapitoly vysvetlíme pojmy kovariancia a korelácia medzi dvoma náhodnými premennými *X* a *Y*. V druhej časti uvedieme pojem kovariančnej a korelačnej matice.

3.5.1 Kovariancia a korelácia

Miera lineárnej závislosti medzi dvoma náhodnými premennými *X* a *Y* je **kovariancia**. Na definovanie kovariancie potrebujeme poznať strednú hodnotu funkcie dvoch náhodných premenných $h(X,Y)$.

Stredná hodnota funkcie dvoch náhodných premenných

Nech *X* a *Y* sú dve náhodné premenné a $h(X,Y)$ je ich funkcia, potom pre strednú hodnotu $E[h(X,Y)]$ platí:

$$E[h(X,Y)] = \begin{cases} \sum_R \sum h(x,y) f_{XY}(x,y) & X, Y \text{ diskrétne} \\ \iint_R h(x,y) f_{XY}(x,y)dxdy & X, Y \text{ spojité} \end{cases} \tag{3.31}$$

Hodnota $E[h(X,Y)]$ možno interpretovať ako vážený priemer hodnôt $h(X,Y)$ vo všetkých bodoch oboru hodnôt (X,Y).

Mieru lineárnej závislosti kovarianciu definujeme pre diskrétne aj spojité náhodné premenné pomocou rovnakého vzorca.

Kovariancia

Mierou lineárnej závislosti medzi náhodnými premennými X a Y je **kovariancia**, ktorú označujeme $\mathrm{cov}(X,Y)$ alebo σ_{XY}, a platí pre ňu vzťah

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = E(XY) - \mu_X \mu_Y \tag{3.32}$$

Poznámka 1. Hodnota kovariancie $\mathrm{cov}(X,Y)$ vyjadruje trend a silu lineárnej závislosti medzi náhodnými premennými X a Y.

Poznámka 2. Keď je veľká pravdepodobnosť, že veľké hodnoty X zodpovedajú veľkým hodnotám Y a malé hodnoty X zodpovedajú malým hodnotám Y, potom hovoríme, že premenné X a Y kolíšu v tom istom smere. V tomto prípade sú hodnoty $X-\mu_X$ a $Y-\mu_Y$ s veľkou pravdepodobnosťou súčasne kladné alebo záporné. Potom s tou istou pravdepodobnosťou je $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) > 0$, z čoho vyplýva, že $\mathrm{cov}(X,Y) > 0$.

Poznámka 3. Keď je veľká pravdepodobnosť, že veľké hodnoty X zodpovedajú malým hodnotám Y a malé hodnoty X zodpovedajú veľkým hodnotám Y, potom hovoríme, že premenné X a Y kolíšu v opačnom smere. V tomto prípade majú hodnoty $X-\mu_X$ a $Y-\mu_Y$ s veľkou pravdepodobnosťou odlišné znamienka. Potom s tou istou pravdepodobnosťou je $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) < 0$, z čoho vyplýva, že $\mathrm{cov}(X,Y) < 0$.

Nevýhodou kovariancie je skutočnosť, že závisí od jednotiek meraných veličín X a Y a od ich variabilít. Z tohto dôvodu je lepšou mierou lineárnej závislosti korelačný koeficient, ktorý je bezrozmernou mierou lineárnej závislosti.

Korelačný koeficient

Miera lineárnej závislosti (korelačnej alebo stochastickej) dvoch náhodných premenných X a Y sa vyjadruje pomocou **korelačného koeficientu**, ktorý je definovaný vzťahom

$$\mathrm{cor}(X,\ Y) = \rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{3.33}$$

Vlastnosti korelačného koeficienta:

- ρ_{XY} nadobúda hodnoty z intervalu [-1, 1];
- ak $\rho_{XY} = 1$, ide o priamu lineárnu (t. j. funkčnú) závislosť;
- ak $\rho_{XY} = -1$ ide o nepriamu lineárnu (t. j. funkčnú) závislosť;
- ak $\rho_{XY} = 0$ vieme povedať iba to, že náhodné premenné sú nekorelované .

Poznámka. Pre nezávislé náhodné premenné X a Y platí vždy, že $\rho_{XY} = 0$. Opačné tvrdenie neplatí všeobecne. Len v prípade dvojrozmerného normálneho rozdelenia dvoch náhodných

premenných X a Y platí, že: $\rho_{XY} = 0$ *vtedy a len vtedy, ak sú náhodné premenné* X a Y *nezávislé*.

Príklad 3.16

Pre diskrétne náhodné premenné X (početnosť absentujúcich pracovníkov na rannej zmene) a Y (početnosť absentujúcich pracovníkov na poobedňajšej zmene) z príkladu 3.1 so združeným rozdelením uvedeným v tabuľke 3.2, vypočítame σ_{XY} a ρ_{XY}.

Pre výpočet potrebujeme poznať $E(XY)$, $E(X)$, $D(X)$, $E(Y)$ a $D(Y)$. Z príkladu 3.3 vieme, že $E(X) = 1{,}1$ a $D(X) = 0{,}49$. Pri výpočte zvyšných použijeme hodnoty z tabuľky 3.3.

$$E(XY) = 1\times1\times0{,}10 + 1\times2\times0{,}25 + 1\times3\times0{,}10 + 2\times1\times0{,}15 +$$
$$+2\times2\times0{,}10 + 2\times3\times0{,}05 = 1{,}9$$
$$E(Y) = 0\times0{,}10 + 1\times0{,}30 + 2\times0{,}45 + 3\times0{,}15 = 1{,}65$$
$$D(Y) = (0-1{,}65)^2\times0{,}10 + (1-1{,}65)^2\times0{,}30 + (2-1{,}65)^2\times0{,}45 +$$
$$+(3-1{,}65)^2\times0{,}15 = 0{,}7275$$

Potom kovariancia je

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 1{,}9 - 1{,}1\times1{,}65 = 0{,}085$$

a korelačný koeficient

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{0{,}085}{\sqrt{0{,}49\times0{,}7275}} = 0{,}14$$

Medzi premennými X a Y existuje korelačná závislosť i keď pomerne slabá. Teda X a Y nie sú nezávislé, čo sme zistili aj v príklade 3.6.

Príklad 3.17

Nech združená hustota náhodných premenných X a Y je

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{pre } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

Pomocou korelačného koeficientu zistíme, či sú premenné závislé alebo nekorelované. Vypočítame $E(X)$, $D(X)$, $E(Y)$, $D(Y)$ a $E(XY)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left[\int_0^1 (x+y)dy\right]dx = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx = \frac{7}{12}$$

$$D(X) = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx - \mu_X^2 = \frac{60}{144} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

Pretože združená hustota $f_{XY}(x,y)$ je symetrická vzhľadom k premenným x a y, platí:

$$E(Y)=\frac{7}{12} \quad D(Y)=\frac{11}{144}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dydx=\frac{4}{12}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{12}-\frac{49}{144}=-\frac{1}{144}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{-1/144}{11/144}=-\frac{1}{11}$$

Medzi premennými X a Y je slabá nepriama lineárna závislosť.

3.5.2 Náhodný vektor a kovariančná matica

Kovarianciu náhodných premenných X a Y sme definovali vzťahom (3.32). Keď zoberieme do úvahy n spojitých náhodných premenných $X_1, X_2, ..., X_n$, potom môžeme určiť kovarianciu ľubovolných dvoch premenných X_i, X_j. Keď náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ zapíšeme ako stĺpcový vektor $(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n)'$ a nazveme ho **náhodný vektor**, potom môžeme definovať kovariančnú maticu.

Kovariančná matica

Náhodný vektora $(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n)'$ má **kovariančnú maticu**

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}\end{pmatrix} \tag{3.34}$$

kde

$\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,\ X_j),\quad i,j=1,\ 2,\ ...,\ n,\ \ i\neq j$ sú kovariancie medzi zložkami náhodného vektora;

$\sigma_{ii}=\operatorname{cov}(X_i,\ X_i)=\sigma_i^2,\quad i=1,\ 2,\ ...,\ n$ sú rozptyly jednotlivých zložiek náhodného vektora.

Kovariančná matica je štvorcová a symetrická matica. Keď sú zložky náhodného vektora po dvoch nezávislé alebo aspoň nekorelované, potom kovariančná matica je diagonálna, t. j. nediagonálne prvky sa rovnajú 0. Keď ešte aj rozptyly všetkých premenných X_i ($i=1,\ 2,\ ...,\ n$) sú rovnaké, t. j. $D(X_i)=\sigma^2$ ($i=1,\ 2,\ ...,\ n$), potom kovariančná matica ná-

hodného vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)'$ má tvar $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica t. j. diagonálne prvky sa rovnajú 1 a nediagonálne sa rovnajú 0.

Stredná hodnota náhodného vektora

Označme $E(X_i) = \mu_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Potom vektor $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)'$ nazývame **strednou hodnotou náhodného vektora** $(X_1, X_2, ..., X_n)'$ a zapisujeme takto:

$$E\left[(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)'\right] = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)'$$

3.6 Viacrozmerné normálne rozdelenia

V tejto kapitole sa budeme zaoberať najprv dvojrozmerným normálnym rozdelením a potom *n*-rozmerným normálnym rozdelením.

3.6.1 Dvojrozmerné normálne rozdelenie

Náhodný vektor $(X, Y)'$ so strednou hodnotou $E[(X, Y)'] = (\mu_X, \mu_Y)'$ a kovariančnou maticou $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ má **dvojrozmerné normálne rozdelenie** práve vtedy, keď má hustotu

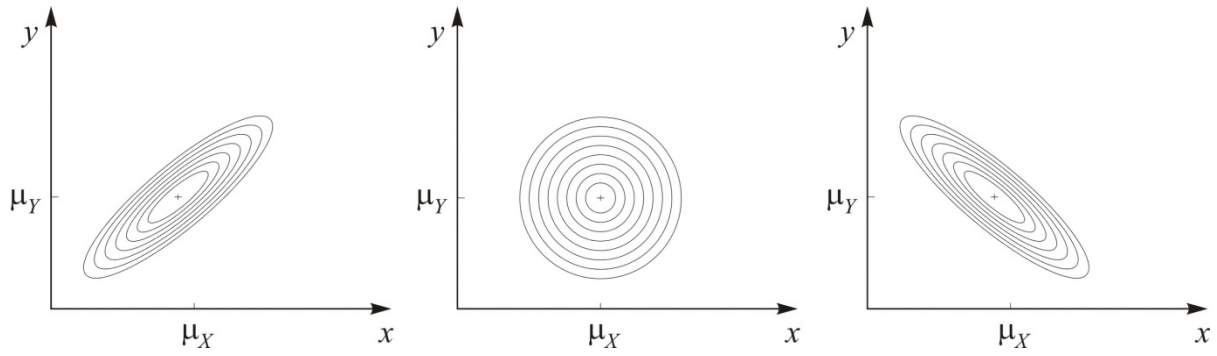
$$f_{XY}(x, y; \mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{XY}) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\rho_{XY}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\} \qquad (3.35)$$

pre $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, s parametrami $-\infty < \mu_X < \infty$, $-\infty < \mu_Y < \infty$ $\sigma_X > 0$ $\sigma_Y > 0$ a $-1 < \rho_{XY} < 1$.

Marginálne rozdelenia získané z dvojrozmerného normálneho rozdelenia

Keď náhodné premenné *X* a *Y* majú dvojrozmerné normálne rozdelenie so združenou hustotou $f_{XY}(x, y; \mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{XY})$, potom marginálne rozdelenia *X* a *Y* sú normálne so strednými hodnotami μ_X, μ_Y a smerodajnými odchýlkami σ_X, σ_Y. (3.36)



Obrázok 3.5. *Vrstevnice dvojrozmerných normálnych rozdelení s rozdielnymi* ρ_{XY}

Podmienené rozdelenie premennej *Y* za podmienky $X = x$

Keď náhodné premenné X a Y majú dvojrozmerné normálne rozdelenie so združenou hustotou $f_{XY}(x, y; \mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{XY})$, potom podmienené rozdelenie premennej Y za podmienky $X = x$ je **normálne** s parametrami

$$E(Y|x) = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) \quad \text{a} \quad D(Y|x) = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2) \tag{3.37}$$

Poznámka. Dvojrozmerné normálne rozdelenie je jediné z dvojrozmerných rozdelení, pre ktoré platí, že náhodné premenné X a Y sú nezávislé vtedy a len vtedy, ak $\rho_{XY} = 0$.

Príklad 3.18

Výška (X; jednotka: cm) a hmotnosť (Y; jednotka: kg) dospelých mužov majú normálne rozdelenie s parametrami $\mu_X = 172{,}73$ cm, $\mu_Y = 73{,}85$ kg, $\sigma_X = 5{,}1$, $\sigma_Y = 6{,}8$ a korelačným koeficientom $\rho_{XY} = 0{,}7$. Určíme pravdepodobnosť, že hmotnosť (Y) dospelých mužov je medzi 72,58 kg a 81,65 kg za podmienky, že výška (X) je 175 cm.

Podmienené rozdelenie pravdepodobnosti Y za podmienky $X = 175$ je normálne so strednou hodnotou a rozptylom

$$E(Y|175) = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) = 73{,}85 + 0{,}7 \times \frac{6{,}8}{5{,}1} \times (175 - 172{,}73) =$$

$$= 73{,}85 + 0{,}7 \times 1{,}33 \times 2{,}27 = 73{,}85 + 2{,}11 = 75{,}96$$

$$D(Y|175) = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2) = 6{,}8^2 \times (1 - 0{,}7^2) = 46{,}24 \times 0{,}51 = 23{,}5824$$

$$\sigma_{Y|175} = \sqrt{D(Y|175)} = \sqrt{23{,}5824} = 4{,}8562$$

Potom

$$P(72{,}58 \le Y \le 81{,}65 | X = 175) = P\left(\frac{72{,}58 - 75{,}96}{4{,}8562} \le \frac{Y - \mu_{Y|70}}{\sigma_{Y|70}} \le \frac{81{,}65 - 75{,}96}{4{,}8562}\right) =$$

$$= P(-0{,}696 \le Z \le 1{,}1717) = P(Z \le 1{,}1717) - P(Z \le -0{,}696) =$$

$$= 0{,}879342 - [1 - P(Z \le 0{,}696)] = 0{,}879342 - 1 + 0{,}756787 = 0{,}636129$$

Príklad 3.19

Združená hustota $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-0,5(x^2+y^2)}$ je špeciálny prípad dvojrozmerného normálneho rozdelenia s parametrami $\mu_X = 0$, $\mu_Y = 0$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 1$ a $\rho_{XY} = 0$. Priemety vrstevníc na grafe hustoty do roviny určenej *x*-ovou osou a *y*-ovou osou sú kružnice so stredom v začiatku súradnicovej sústavy.

3.6.2 Viacrozmerné normálne rozdelenie

Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)'$ má normálne rozdelenie práve vtedy, keď jeho hustota má tvar

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{\frac{1}{2}}} \exp - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}\right)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}\right) \tag{3.38}$$

kde $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1, 2, ..., n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)'$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je kovariančná matica náhodného vektora $\boldsymbol{X}$ a $\left|\boldsymbol{\Sigma}\right|$ je determinant kovariančnej matice $\boldsymbol{\Sigma}$.

Označenie: . $\boldsymbol{X} \sim N\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$.

Rozdelenie lineárnych foriem

Nech náhodný vektor $\boldsymbol{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)'$ má normálne rozdelenie $N\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$. Nech ďalej $\boldsymbol{A}$ je matica typu $k \times n$ a $\boldsymbol{b}$ vektor k reálnych čísel, potom platí:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b} \sim N\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}'\right) \tag{3.39}$$

3.7 Lineárne kombinácie náhodných premenných

V tejto kapitole rozvinieme výsledky o náhodných premenných, ktoré sú lineárnymi kombináciami náhodných premenných. Keď napríklad náhodné premenné X_1 a X_2 označujú dĺžku a šírku vyrobenej súčiastky, potom náhodná premenná $Y = 2X_1 + 2X_2$ je ich lineárna kombinácia a reprezentuje obvod súčiastky.

Lineárne kombinácie

Majme náhodné premenné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a reálne čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n$, potom náhodná premenná

$$Y = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_n X_n \tag{3.40}$$

je **lineárna kombinácia** premenných $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Stredná hodnota rozptyl lineárnej kombinácie

Keď $Y = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_nX_n$, potom jej **stredná hodnota** je

$$E(Y) = k_1E(X_1) + k_2E(X_2) + \ldots + k_nE(X_n) = \sum_{i=1}^{n} k_iE(X_i) \tag{3.41}$$

a **rozptyl** sa rovná

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 D(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_i k_j \operatorname{cov}(X_i, X_j) \tag{3.42}$$

Keď $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú **nezávislé**, potom

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 D(X_i) = k_1^2 D(X_1) + k_2^2 D(X_2) + \cdots + k_n^2 D(X_n) \tag{3.43}$$

Príklad 3.20

V istej krajine výskumníci zistili, že u dospelých mužov má dĺžka ruky od ramena po lakeť (X; jednotka: cm) a dĺžka od lakťa po koniec prsta (Y; jednotka: cm) dvojrozmerné normálne rozdelenie so strednými hodnotami $\mu_X = 36{,}6$ cm resp. $\mu_Y = 48$ cm, rozptylmi $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 4$ cm^2 a korelačným koeficientom $\rho_{XY} = 0{,}737$. Určíme strednú hodnotu a rozptyl dĺžky od ramena po koniec prsta.

Dĺžka od ramena po koniec prsta sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia $Z = X + Y$. Na výpočet použijeme vzťahy (3.41) a (3.42) pre $n = 2$. Potom pre strednú hodnotu a rozptyl premennej $Z = X + Y$ platí:

$$E(Z) = E(X + Y) = 36{,}6 + 48 = 84{,}6$$

$$D(Z) = D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$$

Vieme, že $\operatorname{cov}(X, Y) = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y = 0{,}737 \times 2 \times 2 = 2{,}948$. Z toho vyplýva, že

$$D(Z) = D(X + Y) = 4 + 4 + 2 \times 2{,}948 = 13{,}896$$

Stredná hodnota a rozptyl priemeru

Keď $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ a $E(X_i) = \mu$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom

$$E(\overline{X}) = \mu \tag{3.44}$$

a keď $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé a $D(X_i) = \sigma^2$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom

$$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{3.45}$$

Lineárna kombinácia normálne rozdelených náhodných premenných

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé normálne rozdelené náhodné premenné s $E(X_i) = \mu_i$

a $D(X_i)=\sigma_i^2$ pre $i=1,2,\ldots,n$, potom ich lineárna kombinácia

$$Y=k_1X_1+k_2X_2+\ldots+k_nX_n \tag{3.46}$$

je **normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou**

$$E(Y)=k_1\mu_1+k_2\mu_2+\cdots+k_n\mu_n \tag{3.47}$$

a **rozptylom**

$$D(Y)=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_n^2\sigma_n^2 \tag{3.48}$$

Príklad 3.21

Nech náhodné premenné X_1 a X_2 označujú rozmery obdĺžnikového profilu vyrobenej súčiastky. Predpokladajme, že X_1 je normálne rozdelená s parametrami $\mu_1=2$ cm, $\sigma_1=0{,}1$ cm a X_2 je normálne rozdelená s parametrami $\mu_2=5$ cm, $\sigma_2=0{,}2$ cm. Ďalej predpokladáme, že X_1 a X_2 sú nezávislé. Určíme pravdepodobnosť, že obvod prekročí hodnotu 14,5 cm.

Zo zadania vieme, že $Y=2X_1+2X_2$ má normálne rozdelenie a reprezentuje obvod súčiastky. Potom

$E(Y)=2E(X_1)+2E(X_2)=2\times2+2\times5=14$ cm a

$D(Y)=4\times0{,}1^2+4\times0{,}2^2=0{,}2\ \text{cm}^2$

Teda

$$P(Y>14.5)=P\left[\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}>\frac{14{,}5-14}{\sqrt{0.2}}\right]=P(Z>1{,}118)=$$

$$=1-P(Z\le1{,}118)=0{,}1318$$

Príklad 3.22

Automatický plniaci stroj plní fľaše nealkoholickým nápojom. Stredná hodnota objemu náplne je 10,1 litra a smerodajná odchýlka je 0,1 litra. Predpokladajme, že objemy náplní sú nezávislé normálne rozdelené náhodné premenné. Chceme zistiť, aká je pravdepodobnosť, že priemerný objem náplne 10 fliaš vybraných z plniaceho procesu je menší ako 10 litrov.

Nech $X_1,X_2,\ldots,X_n$ označujú objemy náplne 10 fliaš. Priemerný objem, označovaný $\overline{X}$, má normálne rozdelenie s parametrami

$$E(\overline{X})=10{,}1 \quad \text{a} \quad D(\overline{X})=\frac{0{,}1^2}{10}=0{,}001$$

Preto

$$P(\overline{X}<10)=P\left[\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}<\frac{10-10{,}1}{\sqrt{0.001}}\right]=P(Z<-3{,}16)=$$

$$=1-P(Z\le3{,}16)=0{,}000789$$

3.8 Rozdelenia odvodené z normálneho

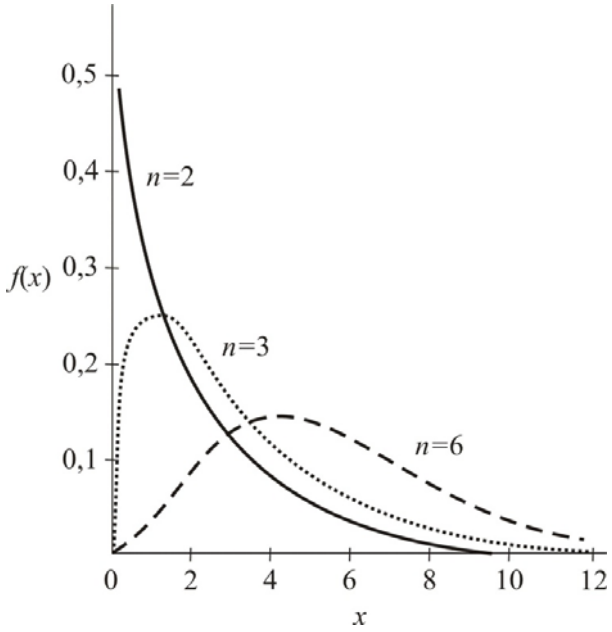
Veľmi dôležité sú spojité rozdelenia odvodené z normálnych, ktoré sa používajú pri konštruovaní intervalových odhadov a testovaní hypotéz. Kritické hodnoty alebo kvantily týchto rozdelení sú uvedené v štatistických tabuľkách. Ide o tieto rozdelenia: chí-kvadrát rozdelenie, *t*-rozdelenie a *F*-rozdelenie.

3.8.1 χ^2 (chí-kvadrát) rozdelenie

Majme nezávislé náhodné premenné $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ s rozdelením $N(0,1)$ ($Y_i \sim N(0,1)$; $i = 1, 2, ..., n$), potom náhodná premenná

$$X^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_n^2 \tag{3.49}$$

má rozdelenie χ^2 (chí−kvadrát) s *n* stupňami voľnosti, čo zapíšeme $X^2 \sim \chi^2(n)$.



Obrázok 3.6. *Hustoty chí–kvadrát rozdelenia pre rôzne stupne voľnosti*

Rozdelenie $\chi^2(n)$ (nazývané tiež Pearsonovo) má **hustotu**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & x \in [0, \infty) \\ 0 & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{3.50}$$

pričom pre ľubovoľné reálne *n* platí: $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Pre **strednú hodnotu** a **rozptyl** rozdelenia $\chi^2(n)$ platí:

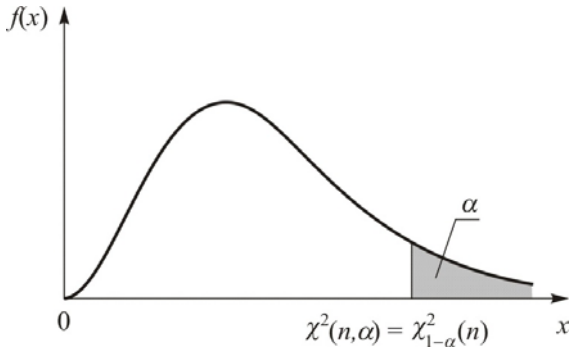
$$E(X^2) = n \quad \text{a} \quad D(X^2) = 2n \tag{3.51}$$

Využívať budeme predovšetkým *kritické hodnoty* $\chi^2(n,\ \alpha)$ a *kvantily* $\chi_p^2(n)$ rozdelenia $\chi^2(n)$.

Kritická hodnota $\chi^2(n,\ \alpha)$ je definovaná vzťahom

$$P\left(X^2 > \chi^2(n,\ \alpha)\right) = \alpha \tag{3.52}$$

a odsekne na pravej strane plochu ohraničenú grafom hustoty rozdelenia $\chi^2(n)$ a osou hodnôt premennej o veľkosti α. Najčastejšie používané hodnoty α sú 0,1 a 0,05.



Obrázok 3.7. *Vzťah medzi kvantilom a kritickou hodnotou rozdelenia* $\chi^2(n)$

Kvantil $\chi_p^2(n)$ je definovaný vzťahom

$$P\left(X^2 < \chi_p^2(n)\right) = p \tag{3.53}$$

a odsekne vľavo plochu ohraničenú grafom hustoty rozdelenia chí-kvadrát a osou hodnôt premennej o veľkosti *p*.

Kritické hodnoty alebo kvantily sú uvedené v štatistických tabuľkách (pozri prílohy). Väčšinou sú uvedené hodnoty iba jednej z nich, preto treba poznať vzťah medzi nimi (Obrázok 3.7).

3.8.2 *t*-rozdelenie (Studentovo rozdelenie)

Zoberme do úvahy náhodnú premennú *X* s rozdelením $N(0,1)$ a od nej nezávislú náhodnú premennú X^2 s rozdelením $\chi^2(n)$, potom náhodná premenná

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{X^2}{n}}} \tag{3.54}$$

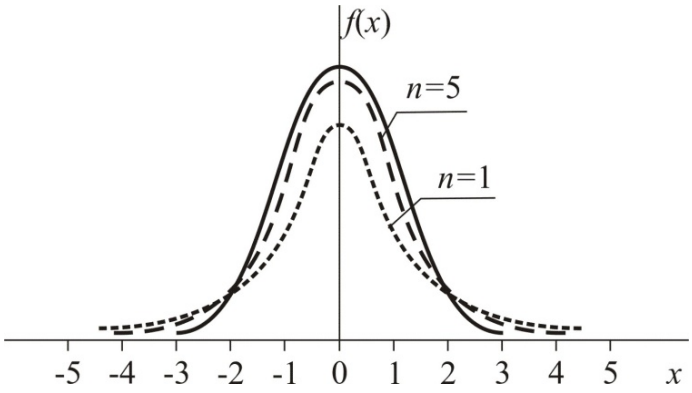
má *t* rozdelenie pravdepodobnosti s *n* stupňami voľnosti, čo zapíšeme $T \sim t(n)$.

Rozdelenie $t(n)$ má **hustotu**

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in R,\ n \in N \tag{3.55}$$

Pre **strednú hodnotu** a **rozptyl** rozdelenia $t(n)$ platí:

$$E(T) = 0 \quad \text{a} \quad D(T) = \frac{n}{n-2} \tag{3.56}$$



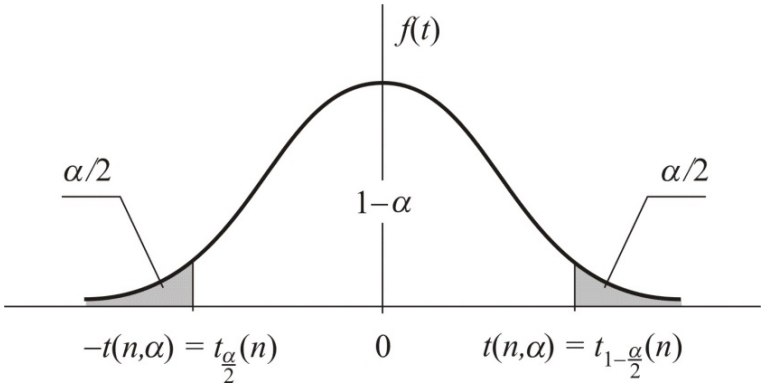
Obrázok 3.8. *Porovnanie hustôt rozdelení* $t(n)$ *s hustotou* $N(0,1)$

Využívať budeme predovšetkým *kritické hodnoty* $t(n,\alpha)$ a *kvantily* $t_p(n)$ rozdelenia $t(n)$.

Kritická hodnota $t(n,\alpha)$ je definovaná vzťahom

$$P\left(-t(n,\ \alpha) < T < t(n,\ \alpha)\right) = P\left(|T| < t(n,\ \alpha\right) = 1-\alpha \tag{3.57}$$

a odsekne na obidvoch stranách (vpravo aj vľavo) plochy ohraničené grafom hustoty rozdelenia $t(n)$ a osou hodnôt premennej o veľkosti $\alpha/2$. Najčastejšie používané hodnoty α sú 0,1 a 0,05.



Obrázok 3.9. *Vzťah medzi kritickou hodnotou a kvantilom rozdelenia* $t(n)$

Kvantil $t_p(n)$ je definovaný vzťahom

$$P\left(T < t_p(n)\right) = p \tag{3.58}$$

a odsekne vľavo plochu ohraničenú grafom funkcie hustoty *t*-rozdelenia a osou hodnôt premennej o veľkosti *p*.

Kritické hodnoty a kvantily sú uvedené v štatistických tabuľkách (Príloha). Väčšinou sa uvádzajú hodnoty iba jednej z nich, preto treba poznať vzťah medzi nimi pozri obrázok 3.9.

3.8.3 *F*-rozdelenie (Fisherovo-Snedecorovo)

Majme dve nezávislé náhodné premenné X a Y, ktorých rozdelenia sú $X \sim \chi^2(n)$ a $Y \sim \chi^2(m)$, potom náhodná premenná

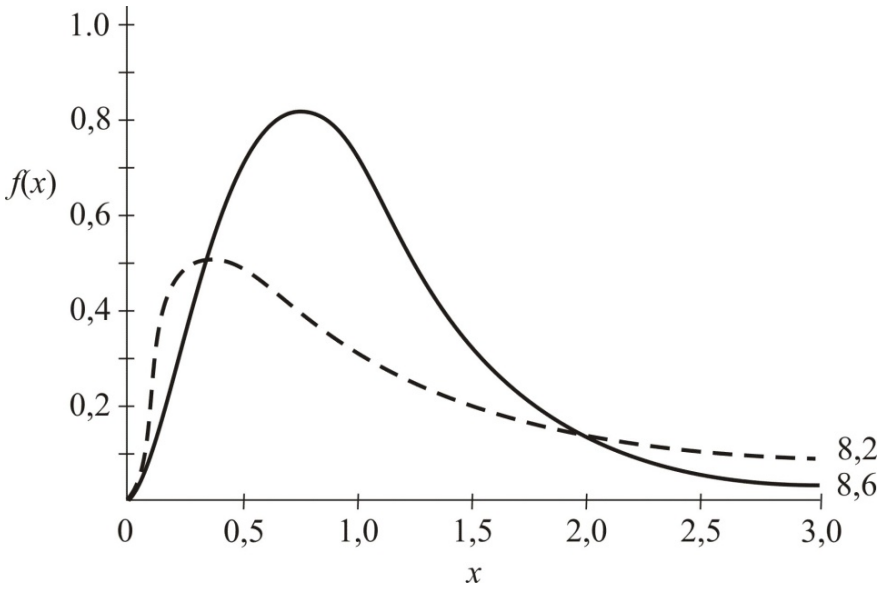
$$F = \frac{X/n}{Y/m} \tag{3.59}$$

má *F* rozdelenie pravdepodobnosti so stupňami voľnosti *n* a *m*, čo označujeme $F \sim F(n,\ m)$.

Rozdelenie $F(n,\ m)$ má **hustotu**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)} \left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(1+\dfrac{n}{m}x\right)^{-\frac{n+m}{2}} & \text{pre } x \in (0,\infty) \\ 0 & \text{pre } x \le 0 \end{cases} \tag{3.60}$$

kde $n,\ m \in N$.



Obrázok 3.10. *F–rozdelenie pre n = 8, m = 2 a pre n = 8, m = 6*

Pre **strednú hodnotu** a **rozptyl** rozdelenia $F(n,m)$ platí:

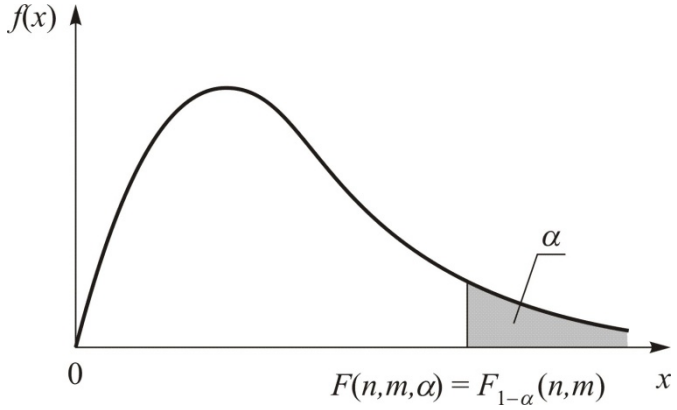
$$E(F)=\frac{m}{m-2},\ m>2 \quad \text{a} \quad D(F)=\frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)},\ m>4 \tag{3.61}$$

Využívať budeme predovšetkým *kritické hodnoty* $F(n,m,\alpha)$ a *kvantily* $F_p(n,m)$ rozdelenia $F(n,m)$.

Kritická hodnota $F(n,m,\alpha)$ je definovaná vzťahom

$$P(F>F(n,m,\alpha))=\alpha \tag{3.62}$$

a odsekne na pravej strane plochu ohraničenú grafom hustoty rozdelenia $F(n,m)$ a osou hodnôt premennej o veľkosti α. Najčastejšie používané hodnoty α sú 0,1 a 0,05.



Obrázok 3.11. *Vzťah medzi kvantilom a kritickou hodnotou rozdelenia* $F(n,m)$

Kvantil $F_p(n,\ m)$ rozdelenia $F(n,\ m)$ je definovaný vzťahom

$$P\left(F<F_p(n,\ m)\right)=p \tag{3.63}$$

a odsekne vľavo plochu ohraničenú grafom hustoty rozdelenia $F(n,\ m)$ a osou hodnôt premennej o veľkosti *p*.

Kritické hodnoty alebo kvantily sú uvedené v štatistických tabuľkách (pozri prílohu). Väčšinou sú uvedené hodnoty iba jednej z nich, preto treba poznať vzťah medzi nimi (pozri obrázok 3.11).

V štatistických tabuľkách sú kritické hodnoty resp. kvantily uvedené iba pre malé hodnoty α (0,01; 0,05; 0,1 a pod.) alebo iba pre veľké hodnoty α (0,9; 0,95; 0,99 a pod.). Dôležité sú preto vzťahy medzi kritickými hodnotami resp. kvantilmi pre α a pre $1-\alpha$, pre ktoré platí:

$$F(n,\ m,\ \alpha)=\frac{1}{F(m,n,\ 1-\alpha)} \quad \text{alebo} \quad F_p(n,\ m)=\frac{1}{F_{1-p}(m,\ n)} \tag{3.64}$$

3.9 Momentové vytvárajúce funkcie

V tejto podkapitole vysvetlíme, čo sú **momenty** a ako súvisia s ostatnými číselnými charakteristikami rozdelení pravdepodobnosti, pretože momenty sú tiež číselnými charakteristikami rozdelení. Ukážeme, ako možno z pravdepodobnostnej funkcie resp. z hustoty daného rozdelenia odvodiť jeho číselné charakteristiky. Podkapitolu rozdelíme na jednorozmerný prípad a viacrozmerný prípad.

Nech X je náhodná premenná (diskrétna alebo spojitá), potom **moment *k*-tého rádu** $E(X^k)$ je definovaný vzťahom

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_i x_i^k f(x_i), & \text{keď } X \text{ je diskrétna} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, & \text{keď } X \text{ je spojitá} \end{cases} \tag{3.65}$$

V niektorých situáciách, najmä vtedy, keď hľadáme celý rad momentov daného rozdelenia, býva priamy výpočet momentov pomocou vzťah (3.65) dosť prácny. V týchto prípadoch je užitočný prostriedok na výpočet momentov tzv. momentová vytvárajúca funkcia.

Nech X je náhodná premenná (diskrétna alebo spojitá), potom **momentová vytvárajúca funkcia** je definovaný vzťahom

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_i e^{tx_i} f(x_i), & \text{keď } X \text{ je diskrétna} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, & \text{keď } X \text{ je spojitá} \end{cases} \tag{3.66}$$

kde t je pomocný parameter.

Postupným derivovaním funkcie $M_X(t) = E(e^{tX})$ dostávame:

$$M'_X(t) = E(Xe^{tX}),\ M''_X(t) = E(X^2e^{tX}),\ ...,\ M_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})$$

Položme $t = 0$, potom dostaneme:

$$M'_X(0) = E(X),\ M''_X(0) = E(X^2),\ ...,\ M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$$

Z uvedeného vyplýva vlastnosť momentovej vytvárajúcej funkcie:
Všeobecný moment *k*-tého rádu $E(X^k)$ sa rovná *k*-tej derivácii momentovej vytvárajúcej funkcie premennej X v bode $t = 0$, t. j.

$$E(X^k) = M_X^{(k)}(0) \tag{3.67}$$

Poznámka. Strednú hodnotu a rozptyl náhodnej premennej X môžeme stanoviť pomocou momentov prvého a druhého rádu:

$$\mu_X = E(X) = M'_X(0) \quad \text{a} \quad \sigma_X^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = M''_X(0) - \left[M'_X(0)\right]^2$$

Príklad 3.23

Náhodná premenná X má binomické rozdelenie s pravdepodobnostnou funkciou

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \; x = 0,1,\ldots,n$$

Chceme určiť strednú hodnotu a rozptyl premennej X.

Výpočet strednej hodnoty a rozptylu sa najľahšie robí pomocou momentovej vytvárajúcej funkcie, preto ju najprv určíme.

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x} = (pe^t - p + 1)^n$$

Teraz môžeme z momentovej vytvárajúcej funkcie stanoviť strednú hodnotu a rozptyl premennej X pomocou jej prvého a druhého momentu v bode 0.

Prvý moment je

$$M'_X(0) = [(pe^t - p + 1)^n]' = [n(pe^t - p + 1)^{n-1} pe^t]_{t=0} = np$$

Druhý moment je

$$M''_X(t) = [n(pe^t - p + 1)^{n-1} pe^t]' = n[(n-1)(pe^t - p + 1)^{n-2} p^2 e^{2t} + (pe^t - p + 1)^{n-1} pe^t]$$

$$M''_X(0) = n^2 p^2 + np(1-p)$$

Teda stredné hodnota a rozptyl náhodnej premennej sú

$$\mu_X = E(X) = M'_X(0) = np$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = M''_X(0) - [M'_X(0)]^2 = n^2 p^2 + np(1-p) - [np]^2 = np(1-p)$$

Príklad 3.24

Náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie s hustotou

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x > 0$$

Chceme určiť strednú hodnotu a rozptyl premennej X.

Výpočet strednej hodnoty a rozptylu sa najľahšie robí pomocou momentovej vytvárajúcej funkcie, preto ju najprv určíme.

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{(t-\lambda)x} dx = \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{pre} \quad 1 - \lambda < 0$$

Teraz môžeme z momentovej vytvárajúcej funkcie stanoviť strednú hodnotu a rozptyl premennej X pomocou jej prvého a druhého momentu v bode 0.

Prvý moment je

$$M'_X(0) = [\lambda(\lambda - t)^{-1}]'_{t=0} = [\lambda(\lambda - t)^{-2}]_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

Druhý moment je

$$M''_X(0) = [\lambda(\lambda - t)^{-2}]'_{t=0} = [2\lambda(\lambda - t)^{-3}]_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Teda stredná hodnota a rozptyl náhodnej premennej je

$$\mu_X = E(X) = M'_X(0) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = M''_X(0) - [M'_X(0)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Momentové vytvárajúce funkcie majú veľa **dôležitých a užitočných vlastností**, ktoré teraz uvedieme:

Keď X je náhodná premenná a c je nejaká konštanta, potom

$$M_{X+c}(t) = e^{ct} M_X(t) \tag{3.68}$$

$$M_{cX}(t) = M_X(ct) \tag{3.69}$$

Keď momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej X existuje, potom je jediná. Zoberme do úvahy dve náhodné premenné X a Y s momentovými vytvárajúcimi funkciami $M_X(t)$ a $M_Y(t)$. Premenné X a Y majú rovnaké rozdelenie, keď platí:

$$M_X(t) = M_Y(t) \text{ pre všetky hodnoty } t \tag{3.70}$$

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé náhodné premenné s momentovými vytvárajúcimi funkciami $M_{X_1}(t)$, $M_{X_1}(t)$, ..., $M_{X_1}(t)$ a $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, potom momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej Y je

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(t) \times \cdots \times M_{X_n}(t) \tag{3.71}$$

Príklad 3.25

Nech X_1 a X_2 sú nezávislé náhodné premenné s Poissonovým rozdelením s parametrami λ_1 a λ_2. Nájdeme rozdelenie premennej $Y = X_1 + X_2$.

Momentová vytvárajúca funkcia Poissonovej náhodnej premennej s parametrom λ je

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Potom momentová vytvárajúca funkcie náhodných premenných X_1 a X_2 sú

$$M_{X_1}(t) = e^{\lambda_1(e^t - 1)} \quad \text{a} \quad M_{X_2}(t) = e^{\lambda_2(e^t - 1)}$$

Keď použijeme vzťah (3.71) pre $n = 2$, zistíme, že momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej $Y = X_1 + X_2$ je

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t - 1)} e^{\lambda_2(e^t - 1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)}$$

To však je momentová vytvárajúca funkcia Poissonovej náhodnej premennej s parametrom $\lambda_1 + \lambda_2$. Ukázali sme, že súčet dvoch nezávislých Poissonových náhodných premenných s parametrami λ_1 a λ_2 je Poissonova náhodná premenná s parametrom rovným súčtu dvoch parametrov $\lambda_1 + \lambda_2$.

3.10 Čebyševova nerovnosť

Keď náhodná premenná X má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a smerodajnou odchýlkou σ, potom $P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) = 0{,}95$. Tento výsledok dáva do vzťahu pravdepodobnosť normálnej náhodnej premennej s veľkosťou smerodajnej odchýlky. Zaujímavý a podobný výsledok, ktorý sa dá aplikovať na ľubovoľnú diskrétnu alebo spojitú náhodnú premennú, odvodil matematik Čebyšev v roku 1867.

Čebyševova nerovnosť

Vzťah medzi strednou hodnotou a rozptylom náhodnej premennej X majúcej dané rozdelenie pravdepodobnosti bol formulovaný Čebyševom takto:

$$P\left(|X - \mu| \ge c\sigma\right) \le \frac{1}{c^2},\ c > 0 \tag{3.72}$$

Tento vzťah interpretujeme takto: Pravdepodobnosť, že náhodná premenná sa od svojej strednej hodnoty líši aspoň o c smerodajných odchýlok ($c\sigma$), je menšia alebo sa rovná $1/c^2$. Všimnime si, že nerovnosť platí aj pre $0 < c \le 1$, je však triviálna.

Tabuľka 3.4. *Porovnanie hodnôt pravdepodobností vypočítaných z Čebyševovej nerovnosti a z normálneho rozdelenia*

c	Čebyševova nerovnosť pre každé rozdelenie	Normálne rozdelenie
1,5	menej ako 44,4 %	13,4 %
2	menej ako 25,0 %	4,6 %
3	menej ako 11,1 %	0,27 %
4	menej ako 6,3 %	0,01 %

Príklad 3.26

Sila stisku ruky (X) dospelých žien v istej krajine má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 28,44 kg 62,7 libier a smerodajnou odchýlkou 7,8 kg 17,1 libier. Nájdeme hornú hranicu pravdepodobnosti, že sila stisku ruky nejakej dospelej ženy sa líši od strednej hodnoty o viac ako 2,5 smerodajnej odchýlky. Porovnáme hornú hranicu pravdepodobnosti vypočítanú pomocou Čebyševovej nerovnosti so skutočnou hodnotou vypočítanou z normálneho rozdelenia.

Aplikáciou Čebyševovej nerovnosti dostaneme

$$P\left(|X - \mu| \ge 2{,}5\sigma\right) \le 1/2{,}5^2 = 0{,}16$$

Všimnime si, že v tomto výpočte nepotrebujeme poznať strednú hodnotu ani smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X.

Pri výpočte skutočnej pravdepodobnosti je však znalosť strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky potrebná. Počítajme:

$$P\left(|X-\mu| \geq 2{,}5\sigma\right) = P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma} \geq 2{,}5\right) = P\left(|Z| \geq 2{,}5\right) =$$

$$= P(Z < -2{,}5) + P(Z > 2{,}5) \approx 2 \times 0{,}0062 = 0{,}0124$$

Skutočná pravdepodobnosť je menšia, ako pravdepodobnosť z Čebyševovej nerovnosti.

Príklad 3.27

Proces vŕtania otvorov na doskách s plošnými spojmi produkuje priemery so smerodajnou odchýlkou 0,01 mm. Chceme zistiť, koľko priemerov musíme zmerať, aby bola pravdepodobnosť aspoň 8/9, že priemer meraných priemerov sa od strednej hodnoty procesu μ líši najviac o 0,005 mm.

Nech náhodné premenné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ označujúce priemery n otvorov sú nezávislé. Priemer meraných otvorov je $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. Zo vzťahov (3.44) a (3.45) vieme, že $E(\bar{X}) = \mu$ a $D(\bar{X}) = 0{,}01^2/n$. Teda smerodajná odchýlka premennej $\bar{X}$ je $(0{,}01^2/n)^{1/2}$. Aplikáciou Čebiševovej nerovnosti na $\bar{X}$ dostaneme:

$$P\left(|\bar{X}-\mu| \geq c(0{,}01^2/n)^{1/2}\right) \leq 1/c^2$$

Pre $c = 3$ platí, že

$$P\left(|\bar{X}-\mu| \geq 3 \times (0{,}01^2/n)^{1/2}\right) \leq 1/9$$

Preto

$$P\left(|\bar{X}-\mu| < 3 \times (0{,}01^2/n)^{1/2}\right) \geq 8/9$$

Teda pravdepodobnosť, že rozdiel medzi $\bar{X}$ a μ je menší ako $3 \times (0{,}01^2/n)^{1/2}$, je aspoň 8/9. Nakoniec nájdeme z rovnice $3 \times (0{,}01^2/n)^{1/2} = 0{,}005$, že $n = 3^2 \times (0{,}01^2/0{,}005^2) = 36$.

4 TVORBA NÁHODNÉHO VÝBERU A OPISNÁ ŠTATISTIKA

Doteraz sme sa zaoberali pravdepodobnostnými metódami. Keď poznáme rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X (spojitej alebo diskrétnej) metódami teórie pravdepodobnosti, vieme túto náhodnú premennú úplne charakterizovať. Vieme, kde a s akou pravdepodobnosťou môžeme očakávať jej hodnoty, vieme vypočítať jednotlivé jej charakteristiky (napríklad strednú hodnotu $E(X)=\mu$, rozptyl $D(X)=\sigma^2$ a pod.).

Štatistika naopak pracuje s náhodnými premennými, ktorých rozdelenie pravdepodobnosti nepoznáme, alebo s náhodnými premennými, ktorých rozdelenie pravdepodobnosti poznáme, ale nepoznáme všetky parametre tohto rozdelenia.

Tak napríklad v automobilovom priemysle jeden z dôležitých znakov kvality z hľadiska funkčnosti motora je vnútorný priemer krúžku automobilového motora, ktorý má predpísané špecifikácie. Z dlhodobých pozorovaní vieme, že vŕtanie nastavené na menovitý rozmer má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2, pričom spĺňa špecifikácie. Pri štatistickej regulácii procesu vŕtania vnútorného priemeru piestneho krúžku sa pomocou dát vybraných z procesu overuje správnosť nastavenia procesu a hodnoty parametrov procesu. Zisťuje sa, či nedošlo k narušeniu stability procesu, k posunu od menovitého rozmeru alebo variability procesu, čo by viedlo k výrobe nezhodných krúžkov automobilového motora. Úlohou štatistiky v tomto prípade je získať poznatky o hodnotách parametrov v určitom čase.

Úlohou štatistiky teda je vyvodzovať závery indukčnou metódou tak, aby sme poznatky získané pri určitom obmedzenom počte pozorovaní – náhodnom výbere – mohli aplikovať aj na celý súbor – základný súbor – jeho rozdelenie pravdepodobnosti a neznáme parametre. Pojem náhodného výberu hrá v štatistike dôležitú úlohu.

4.1 Základný súbor a náhodný výber

Často používame **rozdelenie pravdepodobnosti** ako **model** pre **základný súbor**. Napríklad konštrukčný inžinier by mohol považovať ako základný súbor vnútorný priemer piestneho krúžku automobilového motora, ktorý má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2. Toto môžeme považovať za **normálny základný súbor** alebo **základný súbor s normálnym rozdelením**.

Vo väčšine prípadov je nemožné alebo nepraktické pozorovať celý základný súbor. Napríklad nemohli by sme testovať pevnosť v ťahu všetkých konštrukčných prvkov podvozku, pretože by to vyžadovalo mnoho času a bolo by to finančne nákladné. Okrem toho niektoré

z týchto konštrukčných prvkov ešte neexistujú v čase, keď sa robí rozhodnutie, tak do značnej miery sa musíme pozerať na základný súbor ako **koncepčný**. A tak sme závislí od podmnožiny pozorovaní zo základného súboru, aby sme urobili rozhodnutia o základnom súbore.

Výber je podmnožina pozorovaní vybraná zo základného súboru. Výber musí byť reprezentatívny, aby štatistické metódy boli opodstatnené. Preto je žiaduce robiť **náhodný výber** ako výsledok nejakého náhodného mechanizmu. Teda vyberanie výberu je náhodný experiment a každé pozorovanie vo výbere je pozorovaná hodnota náhodnej premennej. Pozorovania v základnom súbore určujú rozdelenie pravdepodobnosti tejto náhodnej premennej.

Náhodný výber je potrebné presne definovať. Nech X je náhodná premenná reprezentujúca výsledok jedného vybraného pozorovania zo základného súboru, ktorá má hustou $f(x)$. Predpokladajme, že pozorovania vo výbere sa získavajú nezávisle, za nezmenených podmienok. Pozorovania tvoriace výber sa získavajú nezávislou n-krát opakovanou realizáciou náhodnej premennej X za nezmenených podmienok. Nech X_i je náhodná premenná, ktorá reprezentuje i–té opakovanie. Potom $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber, ktorého realizáciu (pozorovania, merania, hodnoty) označujeme ako $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Náhodné premenné v náhodnom výbere sú nezávislé s rovnakou hustotou $f(x)$, pretože sme každé pozorovanie získali za rovnakých podmienok. Teda marginálne hustoty premenných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$. Pretože náhodná premenné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé, združená hustota je $f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$.

Náhodný výber

Náhodné premenné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tvoria **náhodný výber** rozsahu n, keď platí, že:

1. sú vzájomne nezávislé
2. majú rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti $f(x)$

Teda pre združenú hustotu (pravdepodobnostnú funkciu) platí:

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \tag{4.1}$$

4.2 Výberové charakteristiky – štatistiky

Predpokladajme, že chceme zistiť podiel ľudí na Slovensku vo veku od 18 do 70 rokov, ktorý preferujú značku piva Zlatý bažant. Nech p reprezentuje neznámu hodnotu podielu uvedeného základného súboru. Je nepraktické aj neekonomické anketovať všetkých ľudí zo základného súboru, aby sme zistili skutočnú hodnotu p. Namiesto toho by bolo rozumnejšie vybrať náhodný výber o vhodnom rozsahu a použiť pozorovaný podiel $\hat{p}$ ľudí vo výbere preferujúcich značku piva Zlatý bažant.

Podiel vo výbere $\hat{p}$ sa vypočíta tak, že vydelíme počet ľudí vo výbere preferujúcich značku piva Zlatý bažant celkovým rozsahom výberu n. Teda $\hat{p}$ je funkciou pozorovaných hodnôt v náhodnom výbere. Pretože môžeme urobiť veľa výberov zo základného súboru, hodnota $\hat{p}$ sa bude meniť od výberu k výberu. Teda $\hat{p}$ je náhodná premenná. Táto náhodná premenná sa nazýva **štatistika** alebo **výberová charakteristika**.

Štatistika (výberová charakteristika)

Funkciu náhodných premenných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z náhodného výberu, ktorá nezávisí od parametrov rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X, nazývame **štatistika** alebo **výberová charakteristika**. Zrejmé je, že štatistika je viacrozmerná náhodná premenná a označujeme ju $T(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Hodnota štatistiky

Hodnotu, ktorú môže nadobudnúť štatistika $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ pri jednej realizácii náhodného výberu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nazývame **hodnota štatistiky** a označujeme $T(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Usporiadaný náhodný výber a jeho realizácie

Majme pozorovania $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktoré sú realizáciami náhodného výberu $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Keď usporiadame pozorovania podľa veľkosti vzostupne dostaneme $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$, čo sú realizácie usporiadaného náhodného výberu $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$.

Poriadková štatistika a jej hodnota

Premenná $X_{(i)}$ z usporiadaného náhodného výberu predstavuje *i*-tú poriadkovú štatistiku a hodnota $x_{(i)}$ je hodnotou *i*-tej poriadkovej štatistiky.

Najčastejšie používame tieto štatistiky:

Výberový priemer $\bar{X}$ je charakteristika centrálnej polohy výberu a je definovaný vzťahom

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.2}$$

Výberový rozptyl S^2 je charakteristika variability výberu a je definovaný vzťahom

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \tag{4.3}$$

Výberová smerodajná odchýlka S je charakteristika variability výberu a je definovaná vzťahom

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} \tag{4.4}$$

Poznámka. Výberové charakteristiky sú náhodné premenné, preto ich označujeme veľkými písmenami $\overline{X}, S^2, \ldots$ Hodnoty (realizácie) výberových charakteristík sú reálne čísla a označujeme ich odpovedajúcimi malými písmenami $\overline{x}, s^2, \ldots$

Realizácia náhodného výberu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je vlastne dátová množina, ktorú dostávame pri vykonaní náhodného experimentu. Napríklad n nameraných hodnôt vnútorného priemeru piestneho krúžku automobilového motora, ktoré získame z jednej z pravidelne vykonávaných kontrol pri štatistickej regulácii procesu vŕtania, tvorí dátovú množinu. Tieto dáta sú nosičom dôležitej informácie o procese, preto ich treba čo najrýchlejšie spracovať. Teraz ukážeme dve metódy základného spracovania dát – **číselné** a **grafické**.

4.2.1 Číselné metódy základného spracovania dát

Pri základnom spracovaní dátovej množiny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ používame hodnoty štatistík, ktoré uvedieme postupne pomocou dát v príklade 4.1.

Príklad 4.1

Majme body za hodnotenie $n = 30$ študentov zo štatistiky. Hodnoty bodov uvádzame usporiadané od najmenšej hodnoty po najväčšiu, teda predstavujú hodnoty poriadkových štatistík. Uvedené hodnoty sú tieto:

65, 68, 70, 72, 72, 73, 74, 75, 75, 79, 81, 83, 84, 84, 85

86, 87, 88, 88, 88, 88, 88, 90, 92, 92, 94, 96, 96, 97, 98

Chceme vypočítať hodnoty základných štatistických (výberových) charakteristík, ktoré vypočíta aj každý štatistický softvér.

Hodnota výberového priemeru $\overline{x}$ charakterizuje centrálnu polohu dát

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \frac{1}{30}(65 + 68 + \cdots + 97 + 98) = 83{,}6 \tag{4.5}$$

Hodnota výberového mediánu $q_2 = x_{0,50} = x_{\text{med}} = \tilde{x}$ rozdeľuje dátový súbor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na dve rovnaké časti:

Postup výpočtu hodnoty p–kvantilu x_p z n nameraných dát $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je takýto:

Krok 1: Usporiadame dáta vzostupne $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$

Krok 2: Vypočítame polohu čísla r použitím n a p

$$r = \begin{cases} np, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \\ (n+1)p & \text{ak } n \text{ je párne} \end{cases}$$

Krok 3: Stanovíme x_p na základe r

$$x_p = \begin{cases} x_{(r)}, & \text{ak } r \text{ je celé číslo} \\ x_{(\lfloor r \rfloor)} + (x_{(\lceil r \rceil)} - x_{(\lfloor r \rfloor)})(r - \lfloor r \rfloor), & \text{ak } r \text{ nie je celé číslo} \end{cases} \tag{4.6}$$

kde značka $\lceil r \rceil$ znamená „zaokrúhľovanie nahor“ a $\lfloor r \rfloor$ „zaokrúhľovanie nadol“.

Hodnota kvantilu x_p pre $p = \{0,25; 0,50; 0,75\}$ sa nazýva **hodnota kvartilu** množiny dát:

prvý (dolný) kvartil: $q_1 = x_{0,25}$ (4.7)

druhý kvartil (medián): $q_2 = x_{0,50}$ (4.8)

tretí (horný) kvartil: $q_3 = x_{0,75}$ (4.9)

Pre $n = 30$ vypočítané $r = (n+1)p = (30+1) \times 0,5 = 15,5$ nie je celé číslo

$$\begin{aligned} x_{0,5} &= x_{(\lfloor r \rfloor)} + (x_{(\lceil r \rceil)} - x_{(\lfloor r \rfloor)})(r - \lfloor r \rfloor) = \\ &= x_{(\lfloor 15,5 \rfloor)} + (x_{(\lceil 15,5 \rceil)} - x_{(\lfloor 15,5 \rfloor)})(15,5 - \lfloor 15,5 \rfloor) = \\ &= x_{(15)} + (x_{(16)} - x_{(15)})(15,5 - 15) = 85 + (86 - 85) \times 0,5 = 85,5 \\ x_{\text{med}} &= x_{0,50} = \tilde{x} = 85,5 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Hodnota výberového modusu $x_{\text{mod}} = \hat{x}$ je najčastejšie sa vyskytujúca hodnota v dátach. Súbor dát môže mať žiadny modus, jeden modus (unimodálny), alebo viac modusov (bimodálny, trimodálny atď.):

$$x_{\text{mod}} = \hat{x} = 88,0 \tag{4.11}$$

Hodnota výberového rozptylu s^2 charakterizuje variabilitu dát

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{29} [(65 - 83,6)^2 + (68 - 83,6)^2 + \cdots + (98 - 83,6)] = 87,0759 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Hodnota výberovej smerodajnej odchýlky s charakterizuje variabilitu dát

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = 9,33144 \tag{4.13}$$

Hodnota výberovej smerodajnej chyby charakterizuje variabilitu priemeru dát

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{9,33144}{\sqrt{30}} = \frac{9,33144}{5,47723} = 1,70368 \tag{4.14}$$

Minimum $x_{\min}$ je najmenšia hodnota realizácie výberu t. j. množiny dát $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_{\min} = x_{(1)} = 65,0 \tag{4.15}$$

Maximum $x_{\max}$ je najväčšia hodnota realizácie výberu t. j. množiny dát $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_{\max} = x_{(30)} = 98{,}0 \tag{4.16}$$

Rozpätie je rozdiel medzi najväčšou a najmenšou hodnotou množiny dát $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = x_{(30)} - x_{(1)} = 33{,}0 \tag{4.17}$$

Hodnota dolného (prvého) kvartilu $q_1 = x_{0,25}$ je hodnota, od ktorej 25 % hodnôt je menších alebo rovnajúcich sa tejto hodnote a 75 % hodnôt je väčších alebo rovnajúcich sa tejto hodnote.

Pre $n = 30$ vypočítané $r = (n+1)p = (30+1) \times 0{,}25 = 7{,}75$ nie je celé číslo

$$\begin{aligned} q_1 = x_{0,25} &= x_{(\lfloor r \rfloor)} + (x_{(\lceil r \rceil)} - x_{(\lfloor r \rfloor)})(r - \lfloor r \rfloor) = \\ &= x_{(\lfloor 7{,}75 \rfloor)} + (x_{(\lceil 7{,}75 \rceil)} - x_{(\lfloor 7{,}75 \rfloor)})(7{,}75 - \lfloor 7{,}75 \rfloor) = \\ &= x_{(7)} + (x_{(8)} - x_{(7)})(7{,}75 - 7) = 74 + (75 - 74) \times 0{,}75 = 74{,}75 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$q_1 = x_{0,25} = 74{,}75$$

Hodnota horného (druhého) kvartilu je $q_3 = x_{0,75}$ je hodnota, od ktorej 75 % hodnôt je menších alebo rovnajúcich sa tejto hodnote a 25 % hodnôt je väčších alebo rovnajúcich sa tejto hodnote.

Pre $n = 30$ vypočítané $r = (n+1)p = (30+1) \times 0{,}75 = 23{,}25$ nie je celé číslo

$$\begin{aligned} q_3 = x_{0,75} &= x_{(\lfloor r \rfloor)} + (x_{(\lceil r \rceil)} - x_{(\lfloor r \rfloor)})(r - \lfloor r \rfloor) = \\ &= x_{(\lfloor 23{,}25 \rfloor)} + (x_{(\lceil 23{,}25 \rceil)} - x_{(\lfloor 23{,}25 \rfloor)})(23{,}25 - \lfloor 23{,}25 \rfloor) = \\ &= x_{(23)} + (x_{(24)} - x_{(23)})(23{,}25 - 23) = 90 + (92 - 90) \times 0{,}25 = 90{,}5 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$q_3 = x_{0,75} = 90{,}5$$

Medzikvartilové rozpätie IQR množiny dát je rozdiel medzi horným kvartilom a dolným kvartilom:

$$\mathrm{IQR} = q_3 - q_1 = x_{0,75} - x_{0,25} = 90{,}5 - 74{,}75 = 15{,}75 \tag{4.20}$$

Výberová šikmosť vyjadruje asymetriu rozdelenia početností súboru dát $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mierou tejto asymetrie je **výberový koeficient šikmosti**:

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3} \text{ pre } n \geq 3 \text{ a } s \neq 0 \quad (4.21) \tag{4.21}$$

Výberový normovaný koeficient šikmosti má normálne rozdelenie $N(0,1)$ pre $n > 150$:

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3} \Big/ \sqrt{\frac{6}{n}} = -0{,}719012 \tag{4.22}$$

Poznámka. Pre symetrické rozdelenia početností sa tento koeficient rovná nule. Pre rozdelenia zošikmené doľava je koeficient záporný. Pre rozdelenia zošikmené doprava je koeficient kladný.

Výberová špicatosť vyjadruje špicatosť rozdelenia početností súboru dát $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mierou tejto špicatosti je **výberový koeficient špicatosti**:

$$\frac{n(n+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)s^4}-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \text{ pre } n\geq 4 \text{ a } s\neq 0 \tag{4.23}$$

Výberový normovaný koeficient špicatosti je daný vzťahom:

$$\left(\frac{n(n+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)s^4}-\frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}\right)\Bigg/\sqrt{\frac{24}{n}}=-1{,}04291 \tag{4.24}$$

Poznámka. Koeficient sa pre hodnoty z normálneho rozdelenia rovná približne nule. Kladná hodnota znamená, že rozdelenie je v porovnaní s normálnym rozdelením špicatejšie. Naopak, záporná hodnota svedčí o rozdelení plochejšom.

Výberový variačný koeficient je daný vzťahom

$$\frac{s}{\bar{x}}\times 100=\frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}}{\bar{x}}\times 100=11{,}162\ \% \tag{4.25}$$

Poznámka. Výberové charakteristiky sú náhodné premenné, preto ich označujeme veľkými písmenami $\bar{X}, S^2, \ldots$ Hodnoty (realizácie) výberových charakteristík sú reálne čísla a označujeme ich odpovedajúcimi malými písmenami $\bar{x}, s^2, \ldots$

4.2.2 Grafické metódy základného spracovania dát

Stonka s listami

Diagram **stonka s listami** je dobrý nástroj na grafické zobrazenie dátovej množiny x_1, x_2, ..., x_n, kde každé číslo x_i obsahuje aspoň dve číslice. Konštruovanie diagramu stonka s listami sa skladá nasledujúcich krokov:

Krok 1: Definujte stonky a listy
Krok 2: Zapíšte stonky do stĺpca od najmenšej hodnoty po najväčšiu hodnotu
Krok 3: Prechádzajte cez dáta a list každého pozorovania dajte do riadku prislúchajúceho stonke tohto pozorovania
Krok 4: Listy každej stonky usporiadajte vzostupne

Príklad 4.2

Zostrojíme diagram stonka s listami a graf rozdelenia početností zodpovedajúci tomuto diagramu z nasledujúcich dát:

21,7 24,0 22,4 22,4 24,3 22,3 22,6 25,2 24,1 21,8 32,2 23,9 23,5 23,2 23,9 23,8

Nech prvé dve číslice uvedených čísiel tvoria stonky. Hodnoty stoniek zapíšeme do stĺpca od najmenšej po najväčšiu zhora nadol. Potom urobíme vertikálnu čiaru a zapíšeme list každého pozorovania do riadku príslušnej stonky. Takto získame nasledujúci výsledok

Stonky	Listy
21.	7 8
22.	4 4 3 6
23.	2 9 5 2 9 8
24.	0 3 1
25.	2

V každom riadku zoradíme listy podľa veľkosti, od najmenšej hodnoty po najväčšiu hodnotu.

Stonky	Listy
21.	7 8
22.	3 4 4 6
23.	2 2 5 8 9 9
24.	0 1 3
25.	2

Keď otočíme list na bočnú ľavú stranu a pozrieme sa na stĺpce čísiel nad čiarou, vidíme tvar rozdelenia. V prípade potreby sa dá stonka s listami zahustiť zlúčením susedných riadkov alebo ju možno roztiahnuť rozdelením riadkov do dvoch tried. Prvú triedu s číslicami 0 až 4 označíme „∗“ a druhú s číslicami 5 až 9 označíme „◦ “.

Môžeme použiť aj rozdelenie na päť tried s číslicami: 0 a 1; 2 a 3; 4 a 5; 6 a 7; 8 a 9; s označeniami : „ ∗ “; „ T “; „F“; „S“; „◦ “.

Tabuľka početností a histogram

Vytváranie tabuľky početností je dobrá metóda na opis veľkej množiny dát. Pôvodné dáta sa zatrieďujú (grupujú) do tried (kategórií) a zisťujú sa početnosti jednotlivých tried, čím sa vytvorí rozdelenie početností.

Postup konštruovania tabuľky početností sa skladá z týchto krokov:

1. Určenie počtu tried k, ktoré bude obsahovať tabuľka početností. Ak nevieme určiť počet tried, pomôže nám jeden z nasledujúcich vzorcov

$$k = 1 + 3{,}322 \cdot \log n \quad \text{alebo} \quad k = \sqrt{n}$$

2. Určíme najmenšiu $x_{\min}$ a najväčšiu $x_{\max}$ hodnotu množiny dát.

3. Nájdenie šírky triedy h delením rozdielu medzi najväčšou a najmenšou hodnotou (nazývanou *rozpätie* = $x_{\max} - x_{\min}$) počtom tried. Výsledok zaokrúhľujeme nahor na vhodné celé číslo tak, aby každá hodnota z dát bola obsiahnutá v tabuľke početností.

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{R}{k}$$

4. Zvolíme ako štartovací bod najmenšiu hodnotu alebo hodnotu trocha menšiu ako najmenšia hodnota. Štartovací bod je *dolná hranica prvej triedy* t_0.
5. Pripočítame šírku triedy h k štartovaciemu bodu t_0, aby sme dostali *dolnú hranicu druhej triedy* t_1. Pripočítajme šírku triedy h k dolnej hranici druhej triedy t_1, aby sme dostali *dolnú hranicu tretej triedy* t_2. Analogicky postupujeme ďalej, až pokryjeme všetky hodnoty.
6. Dáme všetky dolné hranice do jedného stĺpca a horné hranice do vedľajšieho stĺpca, ako je uvedené v nasledujúcej tabuľke.
7. Zaznamenáme každú hodnotu do riadku príslušnej triedy.
8. Spočítame počty záznamov prislúchajúcich jednotlivým triedam. Dostaneme tak *početnosti jednotlivých tried* n_i. Tieto zaznamenáme v ďalšom stĺpci.
9. Vypočítame *relatívne početnosti*, *kumulatívne početnosti*, *kumulatívne relatívne početnosti* a zapíšeme ich do ďalších troch stĺpcov. Takto sme vytvorili celú tabuľku početností, ktorá je uvedená nižšie.

Číslo triedy	Dolná medza	Horná medza	Triedny znak	Absolútna početnosť	Relatívna početnosť	Kumulatívna početnosť	Relat. kum. početnosť
1	t_0	t_1	$\overline{t_1}$	n_1	$f_1 = n_1 / n$	n_1	f_1
2	t_1	t_2	$\overline{t_2}$	n_2	$f_2 = n_2 / n$	$n_1 + n_2$	$f_1 + f_2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	t_{k-1}	t_k	$\overline{t_k}$	n_k	$f_k = n_k / n$	$n = \sum_i n_i$	$\sum_i f_i = 1$
súčet				$\sum_i n_i = n$	$\sum_i f_i = 1$		

V tabuľke je $t_0 < x_{\min}$, $t_k > x_{\max}$ a $\overline{t_i} = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$ je stred *i*-tého intervalu (*i*-tej triedy).

Pomocou tabuľky početností môžeme konštruovať *histogram, polygon početností, polygon relatívnych početností, polygon kumulatívnych početností a polygon kumulatívnych relatívnych početností*. Všetky tieto grafy nám svojím spôsobom ukazujú rozdelenie početností nameraných dát.

Príklad 4.3

Uvažujme dátovú množinu z príkladu 4.1. Vypočítame hodnoty vybraných kvantilov, určíme tabuľku početností a skonštruujeme histogram.

Hodnoty kvantilov a kvartilov

$$x_{0,01} = 65\,,\ x_{0,05} = 68\,,\ x_{0,10} = 71\,,\ q_1 = x_{0,25} = 75\,,\ q_2 = x_{0,50} = x_{\text{med}} = \tilde{x} = 85{,}5\,,$$
$$q_3 = x_{0,75} = 90\,,\ x_{0,90} = 96\,,\ x_{0,95} = 97\,,\ x_{0,99} = 98\,.$$

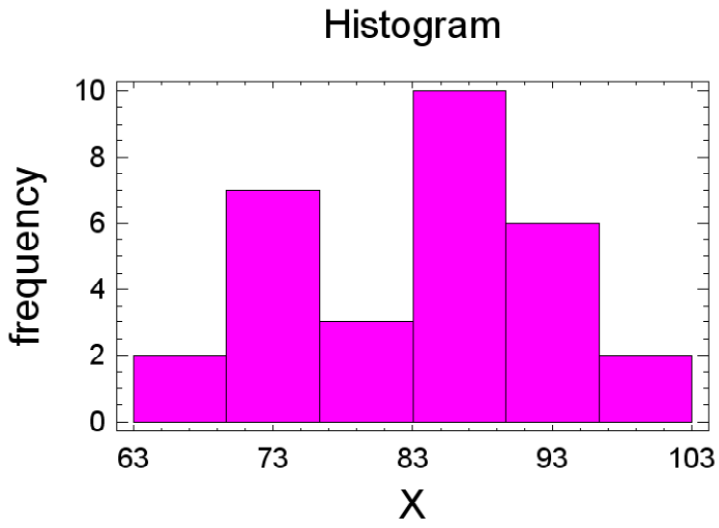
Tabuľka početností

Frequency Tabulation for X

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel. Frequency
at or below		63,0		0	0,0000	0	0,0000
1	63,0	69,6667	66,3333	2	0,0667	2	0,0667
2	69,6667	76,3333	73,0	7	0,2333	9	0,3000
3	76,3333	83,0	79,6667	3	0,1000	12	0,4000
4	83,0	89,6667	86,3333	10	0,3333	22	0,7333
5	89,6667	96,3333	93,0	6	0,2000	28	0,9333
6	96,3333	103,0	99,6667	2	0,0667	30	1,0000
above	103,0			0	0,0000	30	1,0000

Mean = 83,6 Standard deviation = 9,33144

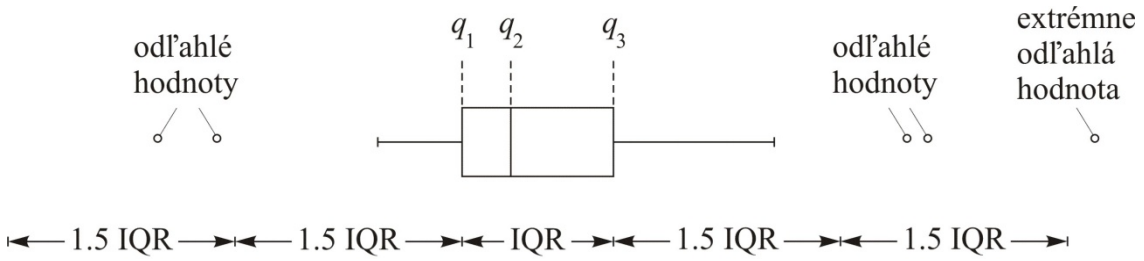
Histogram



Obdĺžnikový diagram s fúzami

Stonka s listami a histogram poskytujú všeobecný vizuálny dojem o dátovej množine, zatiaľ čo číselné hodnoty $\bar{x}$ a s poskytujú informácie iba o charakteristických vlastnostiach množiny dát. **Obdĺžnikový diagram s fúzami** je grafické zobrazenie, ktoré súčasne opisuje niekoľko dôležitých charakteristických vlastností (znakov) dátovej množiny, napríklad centrovanie, rozpätie, odchýlka od symetrie a identifikácia nezvyčajných pozorovaní alebo vybočujúcich hodnôt (outliers).

Obdĺžnikový diagram s fúzami zobrazuje tri kvartily, minimálnu hodnotu a maximálnu hodnotu dát na obdĺžniku zobrazenom horizontálne alebo vertikálne. Obdĺžnik predstavuje medzikvartilové rozpätie (IQR) s dolnou hranicou v prvom (dolnom) kvartile $q_1 = x_{0,25}$ a hornou hranicou v treťom (hornom) kvartile $q_3 = x_{0,75}$. V obdĺžniku je úsečka rovnobežná s dolnou a hornou hranou, ktorá predstavuje druhý kvartil (medián) $q_2 = x_{0,5} = x_{\text{med}} = \tilde{x}$. Fúzy v podobe úsečiek sú na oboch stranách obdĺžnika. Dolný fúz je úsečka od dolného kvartilu do najmenšej hodnoty dát, avšak iba v rozsahu $1{,}5 \times \text{IQR}$ od dolného kvartilu. Horný fúz je úsečka od horného kvartilu do najväčšej hodnoty dát avšak iba v rozsahu $1{,}5 \times \text{IQR}$ od horného kvartilu. Dáta vzdialenejšie od obdĺžnika, kde sú zakreslené fúzy, sa vyznačia ako jednotlivé body. Bod, ktorý sa nachádza pod dolným fúzom alebo nad horným fúzom vo vzdialenosti menšej ako $3 \times \text{IQR}$ od hrany obdĺžnika sa nazýva **vybočujúca (odľahlá) hodnota** (**outlier**). Bod, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti väčšej ako $3 \times \text{IQR}$ od niektorej hrany obdĺžnika sa nazýva **extrémne vybočujúca (odľahlá) hodnota** (**extreme outlier**). Pozrite nasledujúci obrázok.



Obrázok 4.1. *Opis obdĺžnikového diagramu s fúzami*

Pravdepodobnostný diagram

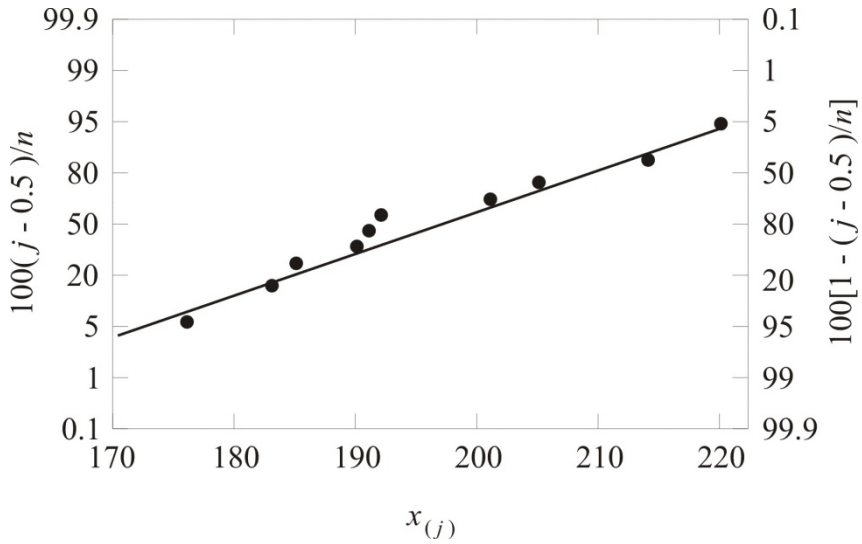
Pri konštruovaní pravdepodobnostného diagramu dáta z náhodného výberu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ usporiadame vzostupne ako $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$. Usporiadané pozorovania $x_{(j)}$ na horizontálnej osy sú s vertikálnymi súradnicami $(j - 0{,}5)/n$ zakreslené na grafe (alebo vhodnom pravdepodobnostnom papieri). Keď hypotetické (predpokladané) rozdelenie adekvátne opisuje dáta, zakreslené body budú ležať približne okolo priamky. Avšak keď sa zakreslené body významne odchyľujú od priamky, hypotetické rozdelenie je vhodné. Posúdenie vhodnosti alebo nevhodnosti hypotetického rozdelenia je subjektívne. Na ilustráciu uvedieme nasledujúci príklad.

Príklad 4.4

Pozorovania životnosti batérií používaných v prenosnom osobnom počítači sú tieto: 176, 191, 214, 220, 205, 192, 201, 190, 183, 185. Predpokladáme, že životnosť batérie sa adekvátne modeluje pomocou normálneho rozdelenia. Na overenie predpokladu použijeme pravdepodobnostný diagram. Najprv dáta usporiadame vzostupne a potom vypočítame ich kumulatívne početnosti $(j - 0{,}5)/n$, ako vidieť v tabuľke 4.1.

Tabuľka 4.1. *Výpočty na konštruovanie pravdepodobnostného diagramu normality*

j	$x_{(j)}$	$(j-0,5)/n = \Phi\left(z_j\right)$	$z_j = \Phi^{-1}\left(\frac{j-0,5}{n}\right)$
1	176	0,05	-1,64
2	183	0,15	-1,04
3	185	0,25	-0,67
4	190	0,35	-0,39
5	191	0,45	-0,13
6	192	0,55	0,13
7	201	0,65	0,39
8	205	0,75	0,67
9	214	0,85	1,04
10	220	0,95	1,64



Obrázok 4.2. *Pravdepodobnostný diagram normality životnosti batérií*

5 BODOVÉ ODHADOVANIE PARAMETROV

5.1 Úvod

V tejto časti sa zaoberáme metódami tzv. **štatistickej indukcie**, pomocou ktorých robíme závery o **základnom súbore** na základe **výberu** zo základného súboru.

Štatistickú indukciu možno rozdeliť na dve hlavné oblasti: **odhadovanie parametrov** a **testovanie hypotéz.**

V tejto kapitole sa budeme zaoberať s **bodovým odhadovaním** neznámeho parametra. Ako príklad problému odhadovania parametra predpokladajme, že konštrukčný inžinier analyzuje pevnosť v ťahu súčiastky používanej v podvozku automobilu. Pretože variabilita pevnosti v ťahu (zapríčinená rozdielmi medzi dávkami základného materiálu, výrobnými postupmi a meracími postupmi) sa prirodzene vyskytuje medzi jednotlivými súčiastkami, inžinier chce odhadnúť strednú hodnotu pevnosti v ťahu súčiastok. V praxi použije inžinier dáta z výberu na výpočet číselnej hodnoty, ktorá v istom zmysle odhaduje skutočnú hodnotu. Táto číselná hodnota sa nazýva **hodnota bodového odhadu**.

Cieľom bodového odhadovania je získať jedno číslo na základe dát z výberu, ktoré je najprijateľnejšou hodnotou pre θ. Číselná hodnota vhodnej štatistiky (funkcie náhodného výberu) bude hľadanou hodnotou bodového odhadu.

Teraz zovšeobecníme predchádzajúce úvahy.

Nech X je náhodná premenná s rozdelením pravdepodobnosti $f(x)$ (pravdepodobnostná funkcia alebo hustota) s neznámym parametrom θ. Keď $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu n z rozdelenia $f(x)$, potom **bodovým odhadom** parametra θ je určitá funkcia náhodného výberu t. j. štatistika, ktorú označíme ako $\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Všimnime si, že $\hat{\Theta}$ je náhodná premenná, pretože je funkciou náhodných premenných. Keď sa náhodný výber realizuje, potom $\hat{\Theta}$ nadobudne konkrétnu číselnú hodnotu $\hat{\theta}$, ktorá sa nazýva **hodnota bodového odhadu** parametra θ.

Bodový odhad

Štatistika $\hat{\Theta}$ sa nazýva **bodový odhad** parametra θ**.** Číselná hodnota $\hat{\theta}$ štatistiky $\hat{\Theta}$ sa nazýva **hodnota bodového odhadu** parametra základného súboru θ.

Ako príklad predpokladajme, že náhodná premenná X má normálne rozdelenie s neznámou strednou hodnotou μ. Výberový priemer je bodový odhad neznámej strednej hodnoty základného súboru μ, teda $\hat{\mu} = \overline{X}$. Keď sa vyberie náhodný výber, potom číselná

hodnota $\bar{x}$ je hodnota bodového odhadu μ. Teda keď $x_1 = 35,\ x_2 = 40,\ x_3 = 39$ a $x_4 = 41,$ potom hodnota bodového odhadu μ je

$$\bar{x} = \frac{35 + 40 + 39 + 41}{4} = 38,75$$

Podobne keď rozptyl základného súboru σ^2 je tiež neznámy, potom bodový odhad parametra σ^2 je výberový rozptyl S^2 a číselná hodnota $s^2 = 6,91667$ vypočítaná z dát náhodného výberu sa nazýva hodnota bodového odhadu parametra σ^2.

Problém odhadovania sa často vyskytuje v technike. Často potrebujeme odhadnúť:

- Strednú hodnotu μ základného súboru
- Rozptyl σ^2 (alebo smerodajnú odchýlku σ) základného súboru
- Podiel p jednotiek v základnom súbore s danou vlastnosťou
- Rozdiel stredných hodnôt dvoch základných súborov, $\mu_1 - \mu_2$
- Rozdiel podielov dvoch základných súborov, $p_1 - p_2$

Hodnoty bodových odhadov sú tieto:

- Pre μ — hodnota výberového priemeru $\hat{\mu} = \bar{x}$.
- Pre σ^2 — hodnota výberového rozptylu $\hat{\sigma}^2 = s^2$.
- Pre p — hodnota výberového podielu $\hat{p} = x / n$, kde x je počet jednotiek v náhodnom výbere rozsahu n s danou vlastnosťou.
- Pre $\mu_1 - \mu_2$ — rozdiel hodnôt výberových priemerov medzi dvoma nezávislými náhodnými výbermi $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$.
- Pre $p_1 - p_2$ — rozdiel hodnôt výberových podielov medzi dvoma nezávislými náhodnými výbermi $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

5.2 Všeobecné pojmy bodového odhadovania

5.2.1 Nevychýlené odhady

V tejto podkapitole vysvetlíme termíny *nevychýlený odhad, najlepší nevychýlený odhad, smerodajná chýba a stredná kvadratická chyba odhadu*.

Nevychýlený odhad

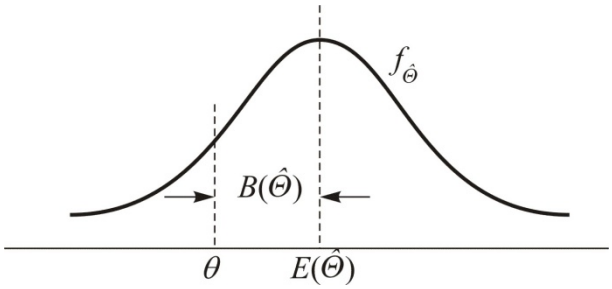
Bodový odhad $\hat{\Theta}$ je **nevychýlený odhad** parametra θ, ak

$$E(\hat{\Theta}) = \theta \tag{5.1}$$

Keď odhad nie je nevychýlený, potom rozdiel

$$B(\hat{\Theta}) = E(\hat{\Theta}) - \theta \tag{5.2}$$

sa nazýva **vychýlenie (bias)** bodového odhadu $\hat{\Theta}$.



Obrázok 5.1. *Vychýlenie bodového odhadu* $\hat{\Theta}$

Príklad 5.1

Predpokladajme, že X je náhodná premenná so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2. Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu n zo základného súboru reprezentovaného premenou X. Ukážeme, že výberový priemer

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$$

je nevychýlený odhad strednej hodnoty μ základného súboru (t. j. náhodnej premennej X)

$$E(\bar{X}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i / n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu$$

Pretože $E(\bar{X}) = \mu$, $\bar{X}$ je nevychýlený odhad parametra μ.

Teraz chceme ukázať, že výberový rozptyl S^2 je nevychýlený odhad rozptylu σ^2 základného súboru. Počítajme

$$E(S^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + \bar{X}^2 - 2\bar{X}\,X_i)\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right]$$

Pretože $E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2$ a $E(\bar{X}^2) = \mu^2 + \sigma^2 / n$, platí:

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mu^2 + \sigma^2) - n(\mu^2 + \sigma^2 / n)\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}(n\mu^2 + n\sigma^2 - n\mu^2 - \sigma^2) = \sigma^2$$

Teda S^2 je nevychýlený odhad rozptylu σ^2 základného súboru.

Hoci S^2 je nevychýlený odhad σ^2, výberová smerodajná odchýlka S je vychýlený odhad smerodajnej odchýlky σ základného súboru, pretože platí:

$$E(S) = \frac{\sigma}{c_n} \tag{5.3}$$

kde *n* je rozsah výberu a pre presný výpočet c_n platí tento rekurentný vzťah

$$c_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad c_n = \frac{1}{c_{n-1}}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}, \; n = 3,\ 4, \ldots \tag{5.4}$$

Približnú hodnotu c_n možno vypočítať zo vzťahu

$$c_n \approx \frac{4n-4}{4n-5}, \quad n = 2,\ 3,\ 4, \ldots \tag{5.5}$$

Poznámka. Absolútna hodnota rozdielu presnej a približnej hodnoty c_n je pre $n \geq 5$ menšia ako 0,003 a pre $n \geq 10$ je menšia ako 0,0005.

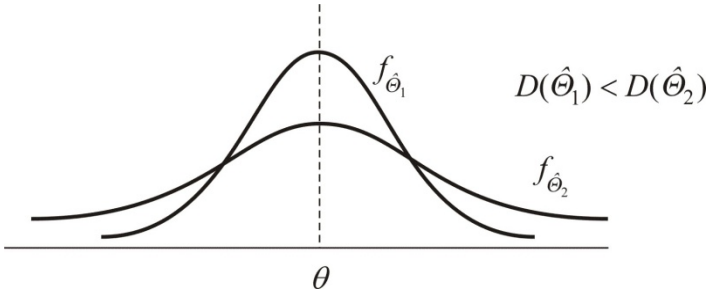
Nevychýlený odhad smerodajnej odchýlky σ je

$$S' = c_n \cdot S \tag{5.6}$$

5.2.2 Rozptyl bodového odhadu

Najlepší nevychýlený odhad

Nevychýlený odhad $\hat{\Theta}$ parametra θ, ktorý má medzi všetkými nevychýlenými odhadmi daného parametra najmenší rozptyl sa nazýva **najlepší nevychýlený odhad (NNO)**.



Obrázok 5.2. *Rozptyly nevychýlených odhadov* θ

Najlepší nevychýlený odhad strednej hodnoty normálneho rozdelenia

Keď $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu *n* z normálneho základného súboru so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2, potom výberový priemer $\overline{X}$ je najlepší nevychýlený odhad parametra μ.

Príklad 5.2

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu $n > 1$ zo základného súboru s $E(X) = \mu$ a $D(X) = \sigma^2$. Nevychýleným odhadom μ je X_1 aj $\bar{X}$, pretože ich stredné hodnoty sa rovnajú μ. Chceme vedieť, ktorý z dvoch odhadov parametra μ je lepší a prečo.

Rozptyly X_1 a $\bar{X}$ sú

$$D(X_1) = \sigma^2 \quad \text{a} \quad D(\bar{X}) = D\left(\sum_i X_i / n\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Pretože $D(X_1) = \sigma^2 > D(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ pre $n > 1$, $\bar{X}$ je lepším odhadom μ s väčšou presnosťou.

5.2.3 Smerodajná chyba

Smerodajná chyba

Smerodajná odchýlka bodového odhadu $\hat{\Theta}$ sa nazýva **smerodajná chyba** a platí pre ňu vzťah

$$\sigma_{\hat{\Theta}} = \sqrt{D(\hat{\Theta})} \tag{5.7}$$

Ak smerodajná chyba obsahuje neznáme parametre, ktoré treba odhadnúť, pri výpočte $\sigma_{\hat{\Theta}}$ sa použijú odhady neznámych parametrov, pričom dostaneme **odhadnutú smerodajnú chybu** $\hat{\sigma}_{\hat{\Theta}} = s_{\hat{\Theta}}$.

Príklad 5.3

Nech životnosť úspornej žiarovky X má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2. Skúmal sa náhodný výber rozsahu $n = 25$.

1. *Smerodajná chyba*

Predpokladajme, že $\sigma^2 = 40^2$. Určíme smerodajnú chybu výberového priemeru ($\bar{X}$).

Všimnime si, že $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$. Potom

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{40}{\sqrt{25}} = 8\,\text{h}$$

2. *Odhadnutá smerodajná chyba*

Predpokladajme, že σ^2 je neznáme a výberový rozptyl je $s_X^2 = 35^2$. Vypočítajte odhadnutú smerodajnú chybu výberového priemeru ($\bar{X}$).

$$s_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s_X}{\sqrt{n}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = 7\,\text{h}$$

5.2.4 Hodnota bootstrapového odhadu smerodajnej chyby

Existujú situácie, v ktorých smerodajná chyba bodového odhadu je neznáma. Zvyčajne ide o prípady, keď formula pre odhad $\hat{\Theta}$ je zložitá alebo sa nedá určiť. Počítačová technika nazývaná **bootstrap**, ktorá bola vyvinutá v posledných rokoch, sa dá použiť na tento problém.

Predpokladajme, že máme vyber z určitého základného súboru, ktorý môžeme modelovať pomocou rozdelenia pravdepodobnosti $f(x;\theta)$. Z hodnôt náhodného výberu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sme dostali $\hat{\theta}$, čo je hodnota bodového odhadu parametra θ. Teraz by sme mali použiť počítač na získanie *bootstrapových výberov* z rozdelenia $f(x;\hat{\theta})$ a pre každý z týchto výberov vypočítať hodnotu bootstrapového odhadu $\hat{\theta}$ parametra θ. Tieto výsledky sú v nasledujúcej tabuľke:

Bootstrapový výber	**Pozorovania**	**Hodnota bootstrapového odhadu**
1	$x_{11}\, x_{21}, \ldots, x_{n1}$	$\hat{\theta}_1$
2	$x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}$	$\hat{\theta}_2$
B	$x_{1B}, x_{2B}, \ldots, x_{nB}$	$\hat{\theta}_B$

Zvyčajne sa vyberie $B = 100$ alebo 200 týchto bootstrapových výberov. Nech $\overline{\theta} = (1/B)\sum_{i=1}^{B} \hat{\theta}_i$ je výberový priemer hodnôt bootstrapových odhadov. Hodnota bootstrapového odhadu smerodajnej chyby $\hat{\Theta}$ je

$$s_{\hat{\Theta}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{B} (\hat{\theta}_i - \overline{\theta})^2}{B-1}} \tag{5.8}$$

V bootstrapovej literatúre sa namiesto $B - 1$ vo vzťahu (5.8) uvádza iba B. Keď je hodnota B veľká, potom je malý rozdiel v hodnotách odhadu pre $s_{\hat{\Theta}}$.

Príklad 5.4

Čas k poruche elektronického modulu použitého regulátora v automobilovom motore sa skúša pri zvýšenej teplote, aby sa mohlo urýchliť zlyhanie mechanizmu. Doba do zlyhania je exponenciál-ne rozdelená s neznámym parametrom λ. Osem jednotiek sa vyberie náhodne a testuje sa s výslednými časmi zlyhania (v hodinách): $x_1 = 11{,}96$; $x_2 = 5{,}03$; $x_3 = 67{,}40$; $x_4 = 16{,}07$; $x_5 = 31{,}50$; $x_6 = 7{,}73$; $x_7 = 11{,}10$ a $x_8 = 22{,}38$.

Teraz stredná hodnota exponenciálneho rozdelenia je $\mu = 1/\lambda$, tiež $E(X) = 1/\lambda$, a stredná hodnota výberového priemeru je $E(\overline{X}) = 1/\lambda$. Preto rozumný spôsob, ako odhadnúť λ, je použiť $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$. Pre náš výber $\overline{x} = 21{,}65$, takže hodnota odhadu λ je $\hat{\lambda} = 1/21{,}65 = 0{,}0462$. Ak chceme nájsť bootstrap smerodajnú chybu, mali by sme teraz zís-

kať $B = 200$ výberov o rozsahu $n = 8$ pozorovaní z exponenciálneho rozdelenia s parametrom $\lambda = 0,0462$. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené niektoré výsledky:

Bootstrapový výber	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Hodnota bootstrapového odhadu**
1	33,83	37,20	8,94	6,38	52,96	23,981	29,54	20,39	$\hat{\lambda}_1 = 0,0375$
2	47,47	15,99	24,07	7,12	33,83	50,496	32,51	78,24	$\hat{\lambda}_2 = 0,0276$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	1,02	7,69	35,98	36,21	5,29	2,25	23,03	1,54	$\hat{\lambda}_{200} = 0,0708$

Výberový priemer hodnôt $\hat{\lambda}_i$ (hodnota bootstrapového odhadu) je 0,0545 a smerodajná odchýlka týchto hodnôt bootstrapových odhadov je 0,0229. Teda bootstrapová smerodajná chyba hodnoty odhadu $\hat{\lambda}$ je 0,0229.

Niekedy chceme použiť bootstrap v situáciách, keď tvar rozdelenia pravdepodobnosti nepoznáme. V tomto prípade budeme považovať *n* pozorovaní z výberu za *základný súbor* a vyberieme *B* náhodných výberov o rozsahoch *n* z tohto základného súboru. Potom použijeme vzťah (5.8) ako je vyššie opísané. Kniha od autorov Efron a Tibshirani (1993) je výborný úvod pre bootstrap.

5.2.5 Stredná kvadratická chyba odhadu

Niekedy je potrebné použiť vychýlený odhad. V týchto prípadoch môže byť dôležitá stredná kvadratická odchýlka odhadu. Stredná kvadratická odchýlka odhadu $\hat{\Theta}$ je stredná hodnota štvorca rozdielu medzi $\hat{\Theta}$ a θ .

Definícia strednej kvadratickej chyby odhadu

Stredná kvadratická chyba odhadu $\hat{\Theta}$ parametra θ je definovaná takto:

$$\mathrm{MSE}(\hat{\Theta}) = E\left((\hat{\Theta} - \theta)^2\right) \tag{5.9}$$

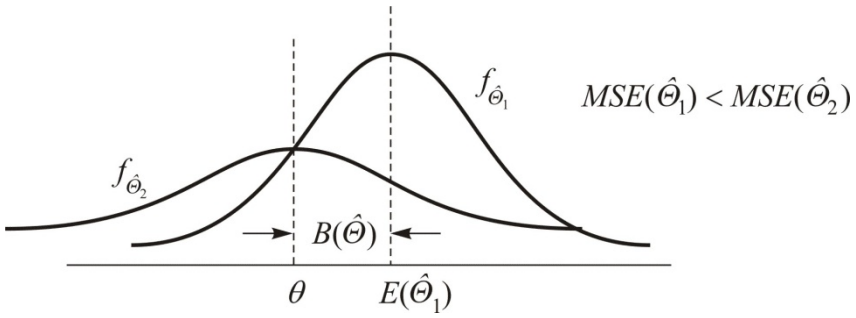
Stredná kvadratická chyba sa dá napísať aj takto:

$$\mathrm{MSE}(\hat{\Theta}) = E\left(\hat{\Theta} - E(\hat{\Theta})\right)^2 + E\left(\theta - E(\hat{\Theta})\right)^2 =$$

$$= D(\hat{\Theta}) + B^2(\hat{\Theta}) \text{ pre vychýlený odhad,}$$

$$= D(\hat{\Theta}) \text{ pre nevychýlený odhad } \hat{\Theta}\text{, pretože vychýlenie } B(\hat{\Theta}) = 0\,.$$

Poznámka. Vychýlený odhad parametra θ s najmenšou MSE (najväčšou presnosťou) sa niekedy použije namiesto správneho (nevychýleného) odhadu s menšou presnosťou.



Obrázok 5.3. *Vychýlený odhad $\hat{\Theta}_1$ má menší rozptyl ako nevychýlený odhad $\hat{\Theta}_2$*

Príklad 5.5

Chceme porovnať nevychýlený odhad parametra θ s vychýleným odhadom, ktorý má menšiu strednú kvadratickú chybu. Predpokladajme, že stredné hodnoty a rozptyly odhadových štatistík $\hat{\Theta}_1$ a $\hat{\Theta}_2$ sú

$$E(\hat{\Theta}_1) = \theta,\ E(\hat{\Theta}_2) = 0{,}9\theta,\ D(\hat{\Theta}_1) = 5 \text{ a } D(\hat{\Theta}_2) = 4.$$

Pre $\hat{\Theta}_1$

$$B(\hat{\Theta}_1) = E(\hat{\Theta}_1) - \theta = \theta - \theta = 0$$

$$\text{MSE}(\hat{\Theta}_1) = D(\hat{\Theta}_1) + B^2(\hat{\Theta}_1) = 5 + 0 = 5$$

Pre $\hat{\Theta}_2$

$$B(\hat{\Theta}_2) = E(\hat{\Theta}_2) - \theta = 0{,}9\theta - \theta = -0{,}1\theta$$

$$MSE(\hat{\Theta}_2) = D(\hat{\Theta}_2) + B^2(\hat{\Theta}_2) = 4 + 0{,}01\theta^2$$

Odpočítaním $\text{MSE}(\hat{\Theta}_2)$ od $\text{MSE}(\hat{\Theta}_1)$ dostaneme

$$MSE(\hat{\Theta}_1) - MSE(\hat{\Theta}_2) = 5 - (4 + 0{,}01\theta^2) = 1 - 0{,}01\theta^2$$

Preferovaný odhad parametra θ vzhľadom na presnosť, ktorý závisí od intervalu hodnôt parametra θ, sa stanový takto:

$\hat{\Theta}_1$, ak $\theta \geq 10$, pretože $\text{MSE}(\hat{\Theta}_1) \leq \text{MSE}(\hat{\Theta}_2)$ a $\hat{\Theta}_1$ je nevychýlený odhad

$\hat{\Theta}_2$, ak $\theta < 10$, pretože $\text{MSE}(\hat{\Theta}_1) > \text{MSE}(\hat{\Theta}_2)$

Efektívnosť odhadu

Stredná kvadratická chyba je dôležité kritérium na porovnanie odhadov. Nech $\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_2$ sú dva odhady parametra θ a $\text{MSE}(\hat{\Theta}_1)$, $\text{MSE}(\hat{\Theta}_2)$ sú stredné kvadratické chyby týchto odhadov. Potom **relatívna efektívnosť** odhadu $\hat{\Theta}_2$ v porovnaní s odhadom $\hat{\Theta}_1$ je definovaná ako

$$r_E = \frac{\text{MSE}(\hat{\Theta}_1)}{\text{MSE}(\hat{\Theta}_2)} \tag{5.10}$$

Z (5.10) vyplýva $\mathrm{MSE}(\hat{\Theta}_1) = r_E \cdot \mathrm{MSE}(\hat{\Theta}_2)$.

Keď relatívna efektívnosť je menšia ako jedna $0 < r_E < 1$, potom môžeme tvrdiť, že $\hat{\Theta}_1$ je efektívnejší odhad parametra θ ako $\hat{\Theta}_2$.

Odhad $\hat{\Theta}$, ktorý má pre všetky hodnoty parametra θ strednú kvadratickú odchýlku menšiu alebo rovnakú ako je stredná kvadratická odchýlka ľubovoľného iného odhadu, sa nazýva **najefektívnejší (optimálny) odhad**.

5.3 Metóda bodového odhadovania

Jedna z najlepších metód na získanie bodového odhadu parametra je metóda maximálnej vierohodnosti. Túto metódu vyvinul v roku 1920 známy britský štatistik sir R. A. Fisher. V tejto podkapitole vysvetlíme princíp metódy maximálnej vierohodnosti a nájdeme bodový odhad parametra θ použitím metódy maximálnej vierohodnosti. Ako vyplýva z názvu, odhad bude hodnota parametra, ktorá maximalizuje funkciu viarohodnosti.

Metóda maximálnej vierohodnosti

Nech X je náhodná premenná s rozdelením pravdepodobnosti $f(x;\theta)$, kde θ je neznámy parameter. Keď $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú hodnoty náhodného výberu z X rozsahu n, potom **funkcia vierohodnosti** náhodného výberu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta) \tag{5.11}$$

Všimnime si, že funkcia vierohodnosti je funkciou iba neznámeho parametra θ. **Maximálne vierohodný odhad** parametra θ je hodnota $\hat{\theta}$, ktorá maximalizuje funkciu vierohodnosti $L(\theta)$.

V prípade diskrétnej náhodnej premennej je interpretácia funkcie vierohodnosti $L(\theta)$ jednoduchá, rovná sa pravdepodobnosti

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

Teda $L(\theta)$ je pravdepodobnosť, že získame hodnoty výberu $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Preto v diskrétnom prípade maximálne vierohodný odhad je odhad, ktorý maximalizuje pravdepodobnosť výskytu hodnôt výberu.

Príklad 5.6

Nech X je Bernoulliho náhodná premenná, potom pravdepodobnostná funkcia je

$$f(x;p) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & x = 0,1 \\ 0, & \text{inde} \end{cases}$$

kde p je parameter, ktorý treba odhadnúť. Funkcia vierohodnosti náhodného výberu o rozsahu n je

$$L(p) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\, p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Všimnime si, že keď $\hat{p}$ maximalizuje $L(p)$, potom $\hat{p}$ maximalizuje aj $\ln L(p)$. Preto

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p)$$

Derivovaním dostaneme

$$\frac{d\ln L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$$

Keď tento výraz položíme rovný nule, dostaneme výsledok $\hat{p} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$. Teda maximálne vierohodný odhad p je

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Príklad 5.7

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu n z exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ. Nájdeme maximálne vierohodný odhad parametra λ. Funkcia hustoty pravdepodobnosti exponenciálneho rozdelenia je

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Potom funkcia vierohodnosti premenných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je

$$L(\lambda) = f(x_1;\lambda) f(x_2;\lambda) \cdots f(x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logaritmus funkcie vierohodnosti je

$$\ln L(\lambda) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Derivácia $\ln L(\lambda)$ je

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Keď položíme deriváciu $\ln L(\lambda)$ rovnú nule, dostaneme bodový odhad parametra λ, ktorý maximalizuje $L(\lambda)$ a má tvar

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Teda maximálne vierohodný odhad parametra λ je prevrátená hodnota výberového priemeru.

Príklad 5.8

Nech X má normálne rozdelenie s neznámymi parametrami μ a σ^2. Funkcia vierohodnosti náhodného výberu rozsahu n je

$$L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-(1/2\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

a

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Parciálne derivácie sú

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\frac{\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

Riešením sústavy uvedených dvoch rovníc dostaneme maximálne vierohodné odhady

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{a} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

Vlastnosti maximálne vierohodného odhadu

Za veľmi všeobecných a nie obmedzujúcich podmienok, keď rozsah výberu n je veľký a $\hat{\Theta}$ je maximálne vierohodný odhad parametra θ, potom

1. $\hat{\Theta}$ je približne (asymptoticky) nevychýlený odhad parametra θ $[E(\hat{\Theta}) \approx \theta]$,
2. rozptyl $\hat{\Theta}$ je skoro tak malý ako rozptyl, ktorý by mala akákoľvek iná odhadová štatistika parametra ,
3. $\hat{\Theta}$ má približne (asymptoticky) normálne rozdelenie.

Vlastnosti 1 a 2 v podstate tvrdia , že odhad metódou maximálnej vierohodnosti je približne (asymptoticky) najlepší nevychýlený odhad. Pripomeňme si, že rozdelenie základného súboru musí byť alebo známe, alebo predpokladané, keď chceme použiť odhad metódou maximálnej vierohodnosti.

Na objasnenie pojmu „veľký rozsah výberu“ alebo asymptotický charakter uvedených vlastností, zoberme do úvahy maximálne vierohodný odhad rozptylu σ^2 normálneho rozdelenia z príkladu 5.7. Ľahko ukážeme, že

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Vychýlenie (bias) odhadu je

$$E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = \frac{-\sigma^2}{n}$$

Pretože vychýlenie je záporné, odhad $\hat{\sigma}^2$ má tendenciu podhodnocovať skutočnú hodnotu rozptylu σ^2. Všimnime si, že vychýlenie sa blíži k nule, keď n rastie. Preto $\hat{\sigma}^2$ je asymptoticky nevychýlený odhad.

Teraz uvedieme inú veľmi dôležitú a užitočnú vlastnosť maximálne vierohodných odhadov.

Vlastnosť invariancie

Nech $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_k$ sú maximálne vierohodné odhady parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Potom maximálne vierohodný odhad funkcie parametrov $h(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ je tá istá funkcia odhadov $h(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_k)$.

Príklad 5.9

V prípade normálneho rozdelenia maximálne vierohodné odhady parametrov μ a σ^2 sú $\hat{\mu} = \bar{X}$ a $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 / n$. Chceme získať maximálne vierohodný odhad funkcie parametrov $h(\mu, \sigma^2) = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$. Substitúciou odhadov $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}^2$ do funkcie h dostaneme

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]^{1/2}$$

Teda maximálne vierohodný odhad smerodajnej odchýlky σ nie je výberová smerodajná S.

5.4 Rozdelenie výberových charakteristík Centrálna limitná veta

Pre induktívne úsudky je potrebné určiť nielen hodnotu výberových charakteristík, ale aj ich rozdelenie pravdepodobnosti. Ďalej sa budeme zaoberať najmä určením strednej hodnoty a rozptylu pre prax najdôležitejších *výberových charakteristík* (*štatistík*) $\bar{X}$, S^2 a ich funkcií (rozdiel výberových priemerov, podiel výberových rozptylov a studentizované výberové

charakteristiky). Predpokladáme väčšinou normálne rozdelenie náhodných premenných (základných súborov), z ktorých sa robil výber.

Rozdelenie výberových charakteristík (štatistík) závisí od:

1. Rozdelenia základného súboru
2. Rozsahu výberu
3. Metódy vykonania výberu

Rozdelenie výberového priemeru $\bar{X}$

Nech náhodný výber $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je vybraný s normálneho rozdelenia so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2. Z definície náhodného výberu vieme, že ak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé a normálne rozdelené s tou istou strednou hodnotou $E(X) = \mu$ a rozptylom $D(X) = \sigma^2$, potom rozdelenie výberového priemeru $\bar{X}$ je normálne so strednou hodnotou a rozptylom

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu \tag{5.12}$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum D(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \tag{5.13}$$

Teda platí vzťah:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \tag{5.14}$$

Tento výsledok je pre technickú prax veľmi dôležitý, pretože umožňuje jednoduchým spôsobom zmenšovať kolísanie náhodnej premennej, a tým spresňovať obraz o skutočnosti. Namiesto jedného merania sa robí priemer z *n* meraní, pričom *n* sa zvolí také veľké, aby kolísanie vyjadrené smerodajnou odchýlkou priemeru $\bar{X}$ neprekročilo zvolenú medzu. Zo vzťahu (5.11) je zrejmé, že stredná hodnota výberového priemeru sa rovná strednej hodnote náhodnej veličiny, z ktorej sa robil náhodný výber.

V praxi nerobíme výbery iba z normálnych základných súborov, ale aj z iných rozdelení. Avšak aj v týchto prípadoch môžeme za istých okolností použiť pri analýzach normálne rozdelenie. O tom, kedy a ako, nám hovorí tzv. centrálna limitná veta – CLV.

Centrálna limitná veta (CLV)

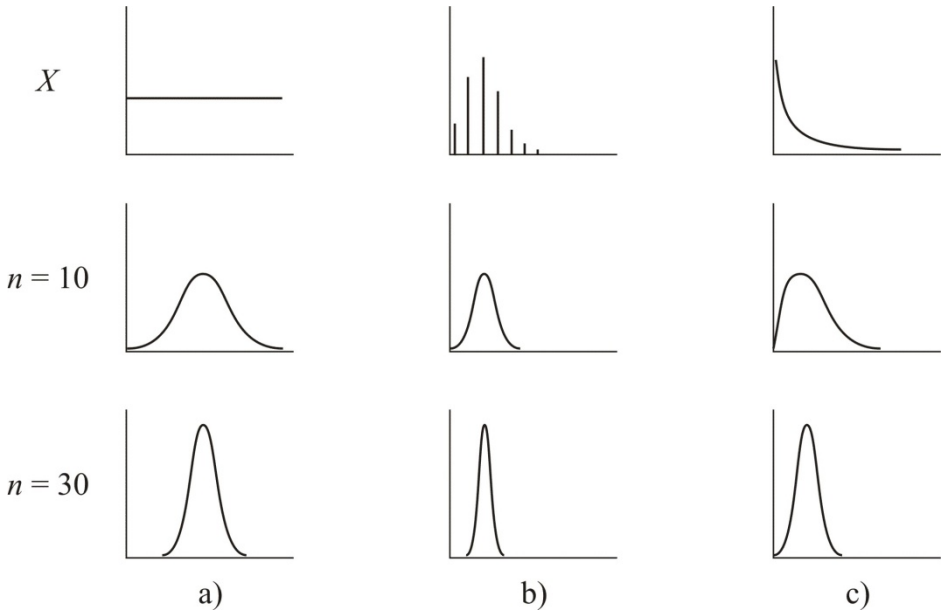
Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber rozsahu n zo základného súboru (X) so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2. Potom limitný tvar rozdelenia výberového priemeru $\bar{X}$ je

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{5.15}$$

keď sa n blíži k nekonečnu ($n \to \infty$). Táto aproximácia výberového priemeru $\bar{X}$ normálnym rozdelením sa nazýva **centrálna limitná veta (CLV).**

Táto veta je základom pre aproximáciu niektorých rozdelení normálnym rozdelením. Pri analýze údajov umožňuje často využiť postupy založené na predpoklade normálneho rozdelenia.

Na obrázku 5.4 vidieť, že rozdelenia výberových priemerov zo základných súborov s rozdelením rovnomerným, binomickým a exponenciálnym možno považovať za normálne, keď rozsah výberu n je dostatočne veľký. Vo väčšine prípadov pre $n \geq 30$ je normálna aproximácia $\bar{X}$ dobrá nezávisle od rozdelenia X. V prípadoch keď rozdelenie X je blízke normálnemu, normálna aproximácia $\bar{X}$ bude dobrá aj pre $n < 30$.



Obrázok 5.4. *Rozdelenie* $\bar{X}$ *: a)* $X \sim R(0, b)$ *; b)* $X \sim Bi(n, 0{,}2)$ *; c)* $X \sim E(\lambda = 1)$

Na základe centrálnej limitnej vety výberové rozdelenie výberového priemeru $\bar{X}$ je takéto:

Prípad 1: Základný súbor má normálne rozdelenie, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

kde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$.

Prípad 2: Základný súbor s parametrami μ **a** σ^2 **nemá normálne rozdelenie**

Prípad 2.1: Aproximácia normálnym rozdelením je aplikovateľná

$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, ak $n \geq 30$ alebo rozdelenie premennej X je blízke normálnemu rozdeleniu

Prípad 2.2: Aproximácia normálnym rozdelením je neaplikovateľná

Ak sa rozdelenie premennej X významne líši od normálneho rozdelenia a $n < 30$, aproximácia rozdelenia štatistiky $\bar{X}$ normálnym rozdelením sa nedá korektne urobiť. V tomto prípade sa použijú pri štatistickej indukcii neparametrické štatistiky, o ktorých budeme hovoriť neskôr.

Príklad 5.10

Predpokladajme, že doba čakania (X; jednotka: minúta) zákazníka na vyzdvihnutie predpísaného lieku v lekárni má exponenciálne rozdelenie s $E(X) = 20\,\text{min}$ a $D(X) = 5^2$. Máme k dispozícii náhodný výber rozsahu $n = 40$ pozorovaní zákazníkov. Chceme vedieť, aké je rozdelenie výberového priemeru.

Pretože $n \geq 30$, aproximácia normálnym rozdelením je aplikovateľná na $\bar{X}$, aj keď X má exponenciálne rozdelenie. Teda výberové rozdelenie $\bar{X}$ je

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N(20, \frac{5^2}{40}) = N(20, 0{,}8^2)$$

Teraz uvažujme prípad dvoch nezávislých základných súborov. Nech prvý základný súbor má strednú hodnotu μ_1 a rozptyl σ_1^2 a druhý základný súbor má strednú hodnotu μ_2 a rozptyl σ_2^2. Predpokladajme, že obidva základné súbory sú normálne rozdelené. Keď zvážime skutočnosť, že lineárne kombinácie nezávislých normálne rozdelených náhodných premenných majú normálne rozdelenie (pozri rovnice 3.45 až 3.47), môžeme tvrdiť, že rozdelenie $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ je normálne so strednou hodnotou

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \tag{5.16}$$

a rozptylom

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \tag{5.17}$$

Keď dva základné súbory nie sú normálne rozdelené a obidva rozsahy výberov n_1 a n_2 sú väčšie ako 30, môžeme použiť centrálnu limitnú vetu a predpokladať, že $\bar{X}_1$ a $\bar{X}_2$ majú približne nezávislé normálne rozdelenia. Potom rozdelenie $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ je približne normálne so strednou hodnotou a rozptylom danými v rovniciach (5.15) a (5.16). Keď n_1 alebo n_2 je menšie ako 30, rozdelenie $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ bude stále približne normálne so strednou hodnotou a rozptylom danými v rovniciach (5.15) a (5.16) za predpokladu, že základný súbor, z ktorého sa vybral malý výber, sa dramaticky nelíši od normálneho rozdelenia. Teraz môžeme zhrnúť predchádzajúce úvahy do nasledujúcej definície.

Rozdelenie normovaného rozdielu výberových priemerov $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

Majme dva nezávislé základné súbory so strednými hodnotami μ_1 a μ_2 a rozptylmi σ_1^2 a σ_2^2. Keď $\bar{X}_1$ a $\bar{X}_2$ sú výberové priemery dvoch nezávislých náhodných výberov o rozsahoch n_1 a n_2 z týchto základných súborov, potom rozdelenie premennej

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{5.18}$$

je približne normované normálne. Keď dva základné súbory majú normálne rozdelenie, potom rozdelenie premennej Z je presne normované normálne.

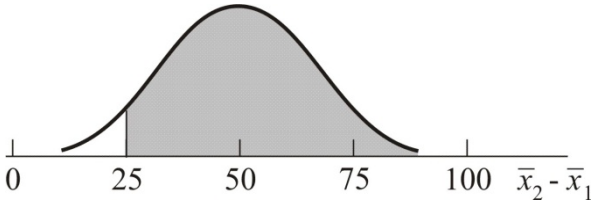
Príklad 5.11

Účinná životnosť súčiastky používanej v prúdovej turbíne lietadlového motora je náhodná premenná so strednou hodnotou 5000 hodín a smerodajnou odchýlkou 40 hodín. Rozdelenie účinnej životnosti je pomerne blízke normálnemu rozdeleniu. Výrobca motorov urobil zlepšenie vo výrobnom procese tejto súčiastky, ktoré zvýšilo strednú životnosť na 5050 hodín a znížilo smerodajnú odchýlku na 30 hodín. Predpokladajme, že náhodný výber o rozsahu $n_1 = 16$ súčiastok bol vybraný zo „starého“ procesu a náhodný výber o rozsahu $n_2 = 25$ súčiastok bol vybraný z „vylepšeného“ procesu. Chceme vedieť, aká je pravdepodobnosť, že rozdiel medzi dvoma výberovými priemermi $\bar{X}_2 - \bar{X}_1$ je aspoň 25 hodín. Predpokladáme, že starý a vylepšený proces možno považovať za nezávislé základné súbory.

Pri riešení si všimnime najprv, že

- rozdelenie $\bar{X}_1$ je normálne so strednou hodnotou $\mu_1 = 5000$ hodín a smerodajnou odchýlkou $\sigma_1 / \sqrt{n_1} = 40 / \sqrt{16} = 10$ hodín a
- rozdelenie $\bar{X}_2$ je normálne so strednou hodnotou $\mu_2 = 5050$ hodín a smerodajnou odchýlkou $\sigma_2 / \sqrt{n_2} = 30 / \sqrt{25} = 6$ hodín.

Teraz rozdelenie $\bar{X}_2 - \bar{X}_1$ je normálne so strednou hodnotou $\mu_2 - \mu_1 = 5050 - 5000 = 50$ hodín a rozptylom $\sigma_2^2 / n_2 + \sigma_1^2 / n_1 = 6^2 + 10^2 = 136$ hodín^2. Toto rozdelenie je na obrázku 5.5. Pravdepodobnosť, že $\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \geq 25$, je vyčiarkovaná časť na grafe normálneho rozdelenie na tomto obrázku.



Obrázok 5.5. Rozdelenie $\bar{X}_2 - \bar{X}_1$ z príkladu 5.11

Hodnote $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 25$ na Obr. 5.5 zodpovedá hodnota $z = \frac{25 - 50}{\sqrt{136}} = -2{,}144$. Potom

$$P(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \geq 25) = P(Z \geq -2{,}144) = 0{,}983984$$

6 ŠTATISTICKÉ INTERVALY PRE JEDEN VÝBER

6.1 Úvod

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, ako možno neznámy parameter odhadnúť z dát náhodného výberu. Dôležité je však poznať akú „dobrú“ hodnotu odhadu sme získali. Predpokladajme napríklad, že hodnota odhadu strednej hodnoty viskozity chemického produktu (parameter μ) je $\hat{\mu} = \bar{x} = 900$. Táto hodnota nič nepovie o tom, ako „ďaleko“ je $\hat{\mu}$ od skutočnej hodnoty neznámeho parametra μ. Kladieme si otázku. Je stredná hodnota procesu medzi 800 a 1000 alebo je medzi 880 a 920? Odpoveď na túto otázku nám dá intervalové odhadovanie.

Intervalový odhad parametra základného súboru sa nazýva **interval spoľahlivosti.** Interval spoľahlivosti sa konštruuje tak, aby s vysokou spoľahlivosťou obsahoval neznámy parameter základného súboru.

Štatistický tolerančný interval je iný typ intervalového odhadovania. Predpokladajme napríklad, že dáta z viskozity chemického produktu pochádzajú z normálneho rozdelenia. Môžeme vypočítať hranice intervalu, ktorý obsahuje 95 % hodnôt viskozity. Vieme, že pre normálne rozdelenie so známymi parametrami μ a σ interval

$$(\mu - 1{,}96\sigma, \mu + 1{,}96\sigma) \tag{6.1}$$

obsahuje 95 % hodnôt zo základného súboru. V praxi sú parametre μ a σ neznáme, preto ich nahradíme hodnotami bodových odhadov a dostaneme interval

$$(\bar{x} - 1{,}96s, \bar{x} + 1{,}96s) \tag{6.2}$$

Tento interval neobsahuje 95 % hodnôt z rozdelenia. Hodnotu 1,96 preto nahradíme inou, vhodnou konštantou *k* (väčšou ako 1,96) a tak skonštruujeme interval, ktorý už obsahuje 95 % hodnôt z rozdelenia z vysokou spoľahlivosťou,

Ďalší typ intervalového odhadu je **predikčný interval**, ktorý ohraničuje jedno alebo viac budúcich pozorovaní zo základného súboru. Predikčný interval možno napríklad použiť pri ohraničení nového merania viskozity. Pre rastúci rozsah výberu sa predikčný interval pre normálne rozdelené dáta blíži štatistickému tolerančnému intervalu.

6.2 Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu normálneho rozdelenia so známym rozptylom

6.2.1 Vývoj intervalu spoľahlivosti a jeho základné vlastnosti

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber z normálneho rozdelenia s neznámou strednou hodnotou μ a známym rozptylom σ^2. Z kapitoly 5 vieme, že výberový priemer $\overline{X}$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2/n. Môžeme normovať $\overline{X}$ odpočítaním strednej hodnoty a rozdiel deliť smerodajnou odchýlkou. Dostaneme tak náhodnú premennú

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{6.3}$$

ktorá má normované normále rozdelenie $N(0,1)$.

Hodnota odhadu **intervalu spoľahlivosti** pre μ je interval $l \le \mu \le u,$ kde koncové body l a u sa vypočítajú z výberových dát. Pretože rozdielne výbery budú dávať rozdielne hodnoty l a u, tieto koncové body sú hodnotami náhodných premenných L a U. Predpokladajme, že sme určili veličiny L a U tak, že nasledujúce pravdepodobnostné tvrdenie je správne:

$$P(L \le \mu \le U) = 1 - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{6.4}$$

Existuje pravdepodobnosť $1-\alpha,$ že sa realizuje výber, z ktorého vypočítaný interval spoľahlivosti (IS) bude obsahovať skutočnú hodnotu μ. Keď sme už realizovali výber $X_1 = x_1,$ $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n,$ a vypočítali l a u, potom výsledný **interval spoľahlivosti** pre μ je

$$l \le \mu \le u \tag{6.5}$$

Hraničné body l a u sa nazývajú **dolná hranica intervalu spoľahlivosti** a **horná hranica intervalu spoľahlivosti** a $1-\alpha$ sa nazýva **koeficient spoľahlivosti**.

V našej problémovej situácii, keď $Z = (\overline{X} - \mu) / \left(\sigma / \sqrt{n}\right)$, môžeme napísať

$$P\left(-k_\alpha \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le k_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

Úpravou nerovnosti vnútri zátvoriek dostaneme

$$P\left(\overline{X} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \tag{6.6}$$

Toto vedie k nasledujúcej definícii.

Definícia dvojstranného intervalu spoľahlivosti pre μ

Keď $\overline{x}$ je hodnota výberového priemeru z náhodného výberu o rozsahu n z normálneho základného súboru so známym rozptylom $\sigma^2,$ potom $100(1-\alpha)\%$ IS pre μ je

$$\bar{x} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{6.7}$$

kde k_α je kritická hodnota normovaného normálneho rozdelenia (pozri (2.36)).

Príklad 6.1

Zo základného súboru s rozdelením $N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma^2 = 0,06$, sme urobili náhodný výber s realizáciou 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7. Nájdeme 95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ.

Na výpočet použijeme vzťah (6.7), kde potrebujeme hodnoty $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,06} = 0,245$ a $n = 7$. Zo zadania vieme, že $1 - \alpha = 0,95$, z čoho vyplýva, že $\alpha = 0,05$. V štatistických tabuľkách nájdeme príslušnú kritickú hodnotu $k_\alpha = k_{0,05} = 1,96$. Ďalej vypočítame hodnotu bodového odhadu strednej hodnoty

$$\hat{\mu} = \bar{x} = (1,3 + 1,8 + 1,4 + 1,2 + 0,9 + 1,5 + 1,7) / 7 = 9,8 / 7 = 1,4$$

Po dosadení predchádzajúcich hodnôt do vzťahu (6.7) máme

$$1,4 - 1,96\frac{0,245}{\sqrt{7}} \le \mu \le 1,4 + 1,96\frac{0,245}{\sqrt{7}}$$

$$1,4 - 1,96\frac{0,245}{2,64575} \le \mu \le 1,4 + 1,96\frac{0,245}{2,64575}$$

$$1,4 - 0,1815 \le \mu \le 1,4 + 0,1815$$

$$1,2185 \le \mu \le 1,5815$$

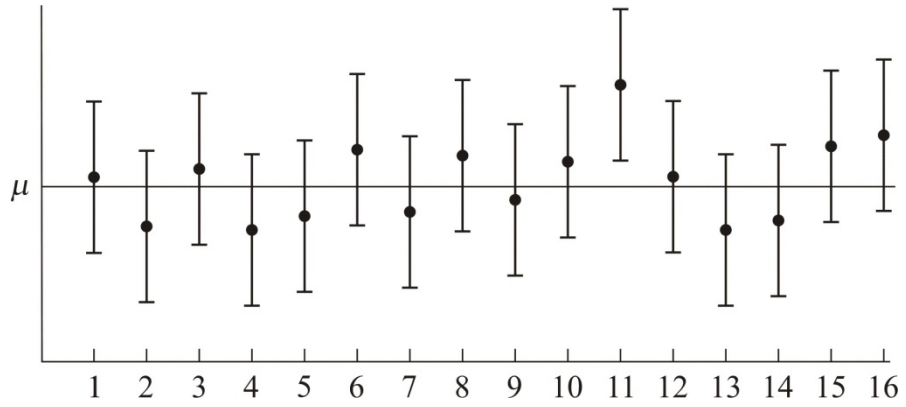
Potom 95 % interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu je $1,2185 \le \mu \le 1,5815$.

Interpretácia intervalu spoľahlivosti

Ako sa má interpretovať interval spoľahlivosti? Mnohí by tvrdili, že 95 % IS pre strednú hodnotu $1,2185 \le \mu \le 1,5815$ obsahuje μ s pravdepodobnosťou 0,95. Avšak, s trochou zamyslenia, vidíme, že toto tvrdenie nemôže byť správne; skutočná hodnota μ je neznáma a tvrdenie $1,2185 \le \mu \le 1,5815$ je alebo správne (s pravdepodobnosťou 1), alebo nesprávne (s pravde-podobnosťou 1). Treba si uvedomiť, že IS je **náhodný interval**, pretože L a U sú náhodné premenné. Korektná interpretácia $100(1-\alpha)$ % IS závisí od relatívnej početnosti takto. Keď počet náhodných výberov je veľký a $100(1-\alpha)$ % IS pre μ sa vypočíta zo všetkých výberov, potom $100(1-\alpha)$ % týchto intervalov bude obsahovať skutočnú hodnotu μ. Situácia je ilustrovaná na obrázku 6.1.

V praxi získame iba jeden náhodný výber a vypočítame jeden interval spoľahlivosti. Pretože tento interval obsahuje skutočnú hodnotu μ alebo ju neobsahuje, nemá zmysel hovoriť o úrovni pravdepodobnosti tejto konkrétnej udalosti. Vhodné tvrdenie je, že pozorovaný interval $[l,u]$ ohraničuje skutočnú hodnotu μ zo **spoľahlivosťou** $100(1-\alpha)$ %, Toto tvrdenie sa často interpretuje tak, že nevieme, či toto tvrdenie je správne v tomto konkrétnom výbe-

re, avšak použitá **metóda** na získanie intervalu $[l,u]$ dáva správne tvrdenia v $100(1-\alpha)$ % prípadoch.



Obrázok 6.1. *Intervaly spoľahlivosti pre μ z opakovaných výberov*

Úroveň spoľahlivosti a presnosť odhadu

Dĺžka 95 % intervalu spoľahlivosti je

$$2(1{,}96\sigma/\sqrt{n}) = 3{,}92\sigma/\sqrt{n}$$

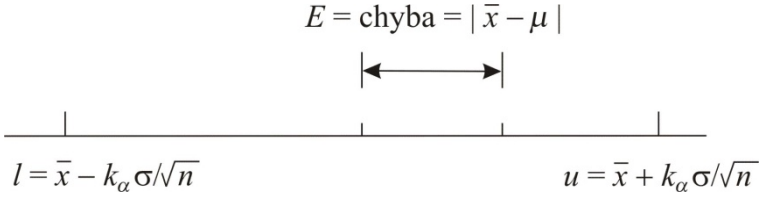
kým dĺžka 99 % IS je

$$2(2{,}58\sigma/\sqrt{n}) = 5{,}16\sigma/\sqrt{n}$$

Teda 99 % IS je dlhší ako 95 % IS. Všeobecne pre pevný rozsah výberu n a smerodajnú odchýlku σ platí, že čím je vyššia úroveň spoľahlivosti, tým je dlhší interval spoľahlivosti.

6.2.2 Určenie rozsahu výberu

Dĺžka intervalu spoľahlivosti $2k_\alpha\sigma/\sqrt{n}$ je miera **presnosti** odhadu. To znamená, že keď použijeme $\bar{x}$ na odhadnutie μ, potom chyba odhadu $E = |\bar{x} - \mu|$ je menšia alebo sa rovná hodnote $k_\alpha\sigma/\sqrt{n}$ zo spoľahlivosťou $100(1-\alpha)$ % Možno to vidieť na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 6.2. *Chyba odhadu*

Predstavme si, že chceme zvoliť rozsah výberu n tak, aby sme boli na $100(1-\alpha)$ % presvedčení, že chyba odhadnutia μ je menšia ako špecifikovaná chyba E. Vhodný rozsah výberu sa získa riešením rovnice $k_\alpha \sigma / \sqrt{n} = E$ s neznámou n.

Vzorec pre určenie rozsahu výberu

Keď $\bar{x}$ sa použije na odhadnutie μ, môžeme byť na $100(1-\alpha)$ % presvedčení, že chyba $|\bar{x} - \mu|$ nebude väčšia ako špecifikovaná chyba E, keď rozsah výberu je

$$n = \left(\frac{k_\alpha \sigma}{E} \right)^2 \tag{6.8}$$

Keď pravá strana vzťahu (6.8) nie je celé číslo, zaokrúhľuje sa nahor na celé číslo.

Príklad 6.2

Zoberme do úvahy zadanie príkladu 1. Chceme určiť rozsah výberu n tak, aby chyba odhadu obojstranného intervalu spoľahlivosti pre μ nebola väčšia ako 0,15.

Na výpočet použijeme vzťah (6.8). Z príkladu 1 a zo zadania vieme, že $k_\alpha = k_{0,05} = 1,96$, $\sigma = 0,245$ a $E = 0,15$. Potom požadovaný rozsah výberu sa vypočíta takto:

$$n = \left(\frac{k_\alpha \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{1,96 \times 0,245}{0,15} \right)^2 = 10,2485$$

Pretože n musí byť celé číslo, požadovaný rozsah výberu je $n = 11$.

Všimnime si, všeobecný vzťah medzi rozsahom výberu, požadovanou dĺžkou intervalu spoľahlivosti $2E$, úrovňou spoľahlivosti $100(1-\alpha)$ % a smerodajnou odchýlkou σ:

- Keď požadovaná dĺžka intervalu spoľahlivosti $2E$ sa zmenšuje, požadovaný rozsah výberu n sa zväčšuje pri pevnej hodnote σ a úrovni spoľahlivosti $1-\alpha$.
- Keď σ sa zväčšuje, požadovaný rozsah výberu n sa zväčšuje pri pevnej dĺžka intervalu spoľahlivosti $2E$ a úrovni spoľahlivosti $1-\alpha$.
- Keď úroveň spoľahlivosti $1-\alpha$ sa zväčšuje, požadovaný rozsah výberu n sa zväčšuje pri pevnej dĺžka intervalu spoľahlivosti $2E$ a smerodajnej odchýlke σ.

6.2.3 Jednostranné hranice spoľahlivosti

Interval spoľahlivosti v (6.7) dáva dolnú hranicu spoľahlivosti aj hornú hranicu spoľahlivosti pre μ. Teda poskytuje dvojstranný resp. obojstranný IS. Možno získať aj jednostranné hranice spoľahlivosti pre μ tým, že položíme $l = -\infty$ alebo $u = \infty$ a k_α nahradíme $k_{2\alpha}$.

Definícia jednostranných hraníc spoľahlivosti

$100(1-\alpha)\%$ **horná hranica spoľahlivosti** pre μ je

$$\mu \le u = \overline{x} + k_{2\alpha}\sigma / \sqrt{n} \tag{6.9}$$

a $100(1-\alpha)\%$ **dolná hranica spoľahlivosti** pre μ je

$$\overline{x} - k_{2\alpha}\sigma / \sqrt{n} = l \le \mu \tag{6.10}$$

6.2.4 Interval spoľahlivosti z veľkého výberu pre μ

Predpokladáme, že rozdelenie základného súboru je normálne s neznámou strednou hodnotou μ a známou smerodajnou odchýlkou σ. Interval spoľahlivosti z veľkého výberu pre μ nevyžaduje tieto predpoklady.

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber zo základného súboru s neznámou strednou hodnotou μ a neznámym rozptylom σ^2. Keď rozsah výberu *n* je veľký, z centrálnej limitnej vety vyplýva, že $\overline{X}$ má približne normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2 / n. Potom $Z = (\overline{X} - \mu) / \left(\sigma / \sqrt{n}\right)$ má približne normované normálne rozdelenie. Pretože smerodajná odchýlka σ je neznáma, v prípade veľkého rozsahu *n* ju nahradíme výberovou smerodajnou odchýlkou *S*, ktorá má malý vplyv na rozdelenie *Z*. To vedie k nasledujúcemu užitočnému výsledku.

Interval spoľahlivosti z veľkého výberu pre μ

Keď *n* je veľké, potom veličina

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

má približne normované normálne rozdelenie. Potom

$$\overline{x} - k_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + k_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{6.11}$$

je **interval spoľahlivosti z veľkého výberu** pre μ s úrovňou spoľahlivosti približne $100(1-\alpha)\%$.

Vzťah (6.11) platí pre akýkoľvek tvar rozdelenia základného súboru. Centrálna limitná veta je všeobecne platná pre $n \ge 30$, avšak v tomto prípade sa vyžaduje väčší rozsah výberu, aspoň 40, pretože σ sa nahradila výberovou smerodajnou odchýlkou *S*.

Príklad 6.3

Článok Transakcie americkej rybárskej spoločnosti publikovaný v ročníku 1993 referuje výsledky štúdie vyšetrovania kontaminácie ortuťou. Výber rýb sa realizoval v 63 jazerách Floridy a merala sa koncentrácia ortuti vo svalovom tkanive rýb. Hodnoty koncentrácie sú

1,230	0,490	0,490	1,080	0,590	0,280	0,180	0,100	0,940
1,330	0,190	1,160	0,980	0,340	0,340	0,190	0,210	0,400
0,040	0,830	0,050	0,630	0,340	0,750	0,040	0,860	0,430
0,044	0,810	0,150	0,560	0,840	0,870	0,490	0,520	0,250
1,200	0,710	0,190	0,410	0,500	0,560	1,100	0,650	0,270
0,270	0,500	0,770	0,730	0,340	0,170	0,160	0,270	

Na overenie normality sme použili Shapirov-Wilkov test (podkapitola 7.6), kde $P = 0,00667033$ je veľmi malá hodnota. Z toho vyplýva, že koncentrácia ortuti nemá normálne rozdelenie.

Môžeme nájsť približný 95 % IS pre μ. Pretože $n > 40$, predpoklad normality nie je potrebný. Požadované veličiny do vzorca (6.11) sú $n = 53$, $\bar{x} = 0,5250$; $s = 0,3486$ a $k_{0,05} = 1,96$. Približný 95 % IS pre μ je

$$\bar{x} - k_{0,05}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + k_{0,05}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0,5250 - 1,96\frac{0,3486}{\sqrt{53}} \le \mu \le 0,5250 + 1,96\frac{0,3486}{\sqrt{53}}$$

$$0,4311 \le \mu \le 0,6189$$

Tento interval je pomerne široký, pretože merania koncentrácie ortuti majú veľkú variabilitu.

6.2.5 Bootstrapové intervaly spoľahlivosti

V podkapitole 5.2.4 sme ukázali, ako môže byť metóda nazývaná **bootstrap** použitá na odhadnutie smerodajnej chyby $\sigma_{\hat{\theta}}$, kde $\hat{\theta}$ je hodnota odhadu parametra θ. Botstrap môžeme použiť aj na nájdenie intervalu spoľahlivosti pre parameter θ. Na ilustráciu predpokladajme, že θ je stredná hodnota normálneho rozdelenia so známym σ. Teraz je odhadom θ výberový priemer $\bar{X}$. Taktiež si všimnime, že $z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ je $100(1-\alpha/2)$ percentil (kvantil) rozdelenia $\bar{X} - \mu$ a $z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ je $100(\alpha/2)$ percentil tohto rozdelenia. Teda môžeme napísať pravdepodobnostné tvrdenie týkajúce sa $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti takto:

$$P(100(\alpha/2)\,\text{percentil} \le \bar{X} - \mu \le 100(1-\alpha/2)\,\text{percentil}) = 1-\alpha$$

alebo

$$P(\bar{X} - 100(1-\alpha/2)\,\text{percentil} \le \mu \le \bar{X} - 100(\alpha/2)\,\text{percetil}) = 1-\alpha$$

Z posledného pravdepodobnostného tvrdenia vyplýva, že dolná a horná $100(1-\alpha)\%$ hranica spoľahlivosti pre μ je

$$L = \bar{X} - 100(1-\alpha/2)\,\text{percentil premennej}\ \bar{X} - \mu = \bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

$$U = \bar{X} - 100(\alpha/2)\,\text{percentil premennej}\ \bar{X} - \mu = \bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{n}$$

Toto môžeme zovšeobecniť na ľubovoľný parameter θ. Potom $100(1-\alpha)\%$ hranice spoľahlivosti pre θ sú

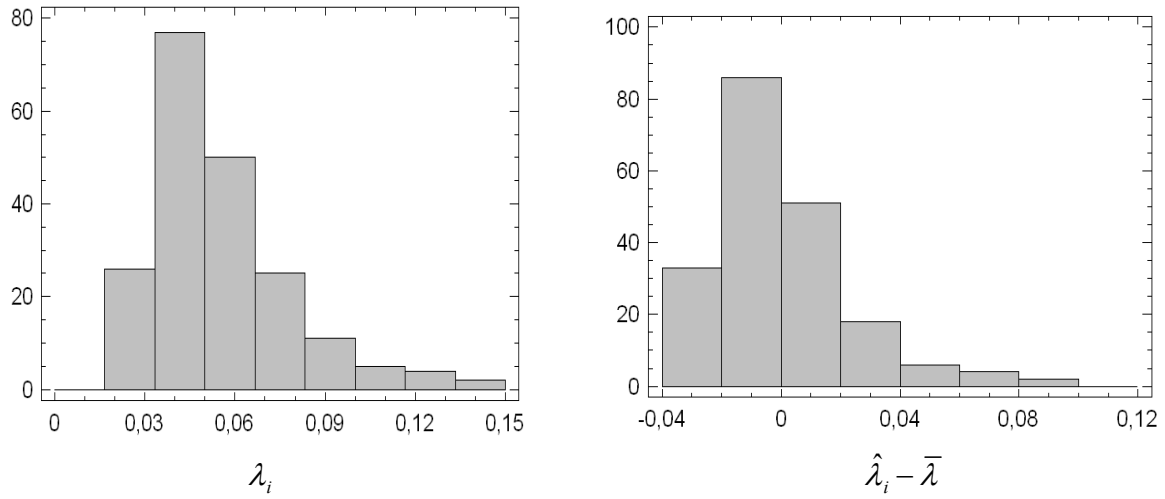
$$L = \hat{\theta} - 100(1-\alpha/2)\,\text{percentil premennej}\ \hat{\theta}-\theta$$

$$U = \hat{\theta} - 100(\alpha/2)\,\text{percentil premennej}\ \hat{\theta}-\theta$$

Bohužiaľ, percentily premennej $\hat{\theta}-\theta$ sa nedajú nájsť tak ľahko ako v prípade strednej hodnoty normálneho rozdelenia. Avšak môžeme odhadnúť z **bootstrapových výberov**. Predpokladajme, že sme generovali B bootstrapových výberov, vypočítali $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_B$ a $\overline{\theta}$ a potom vypočítali $\hat{\theta}_1 - \overline{\theta}$, $\hat{\theta}_2 - \overline{\theta}$,..., $\hat{\theta}_B - \overline{\theta}$. Potom požadované percentily možno získať priamo z týchto rozdielov. Napríklad keď $B = 200$ a chceme 95 % interval spoľahlivosti pre θ, piaty najmenší a piaty najväčší z rozdielov $\hat{\theta}_i - \overline{\theta}$ sú odhady požadovaných percentilov.

Postup budeme ilustrovať na exponenciálnom rozdelení (Príklad 5.4) s parametrom λ. V tomto príklade sa výber rozsahu $n = 8$ modulov riadiacej jednotky motora skúšal na zlyhanie. Hodnota odhadu λ bola $\hat{\lambda} = 0{,}0462$, kde $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$ je maximálne vierohodný odhad. Na získanie hodnoty odhadu smerodajnej chyby pre $\hat{\lambda}$ sme použili 200 bootstrapových výberov.

Na obrázku 6.3 je histogram 200 hodnôt bootstrapových odhadov $\hat{\lambda}_i$, $i = 1,2,\ldots,200$. Všimnime si, že histogram nie je symetrický a je zošikmený doprava. Toto naznačuje, že výberové rozdelenie $\hat{\lambda}$ je tiež zošikmené. Od každej hodnoty $\hat{\lambda}_i$ sme odpočítali výberový priemer z hodnôt bootstrapových odhadov $\overline{\lambda} = 0{,}0513$. Histogram rozdielov $\hat{\lambda}_i - \overline{\lambda}$, $i = 1,2,\ldots,200$ je tiež na obrázku 6.3.



Obrázok 6.3. *Histogramy hodnôt bootstrapových odhadov*

Predpokladajme, že chceme nájsť 90 % interval spoľahlivosti pre λ. Z hodnôt bootstrapového výberu $\hat{\lambda}_i - \overline{\lambda}$ nájdeme piaty percentil, ktorý sa rovná −0,0228, a deväťdesiaty percentil, ktorý sa rovná 0,031355. Potom dolná a horná 90 % hranica spoľahlivosti je

$$L = \hat{\lambda} - 95\,\text{percentil premennej } \hat{\lambda}_i - \overline{\lambda} = 0,0462 - 0,03135 = 0,0149$$

$$U = \hat{\lambda} - 5\,\text{percentil premennej } \hat{\lambda}_i - \overline{\lambda} = 0,0462 - (-0,0228) = 0,0690$$

Teda 90 % bootstrapový interval spoľahlivosti pre λ je $0,0149 \le \lambda \le 0,0690$. Existuje exaktný interval spoľahlivosti pre parameter λ exponenciálneho rozdelenia. Pre dáta o zlyhaní riadiacej jednotka motora (Príklad 5.4) exaktný 90 % interval spoľahlivosti sa rovná $0,0230 \le \lambda \le 0,0759$. Všimnime si, že tieto dva intervaly spoľahlivosti sú veľmi podobné. Dĺžka exaktného intervalu spoľahlivosti je 0,0759 – 0,0149 = 0,0541, zatiaľ čo dĺžka bootstrapového intervalu spoľahlivosti je 0,0690 – 0,0149 = 0,0541, čo je iba o niečo dlhší. Metóda percentilov v bootstrapových intervaloch spoľahlivosti funguje dobre vtedy, keď daný odhad je nevychýlený a smerodajná chyba odhadu $\hat{\theta}$ je približne konštantná (ako funkcia parametra θ).

6.3 Interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu normálneho rozdelenia s neznámym rozptylom

Pri konštrukcii intervalu spoľahlivosti pre μ z normálneho základného súboru so známym σ^2 sme použili postup z časti 6.2.1. Tento IS je približne správny, aj keď základný súbor nie je normálny, avšak $n \ge 40$ (5.2.4). Keď však rozsah výberu je malý a σ^2 je neznámy, musíme použiť iný postup.

Predpokladajme, že máme základný súbor, ktorý má normálne rozdelenie s neznámou strednou hodnotou μ a neznámym rozptylom σ^2. Predpokladajme, že máme k dispozícii náhodný výber $X_1, X_2, \ldots, X_n$, výberový priemer $\overline{X}$ a výberový rozptyl S^2.

Chceme zostrojiť obojstranný IS pre μ. Keď je σ^2 známy, $Z = (\overline{X} - \mu) / \left(\sigma / \sqrt{n}\right)$ má normálne rozdelenie. Keď je σ^2 neznámy, logický postup je nahradiť σ výberovou smerodajnou odchýlkou *S*. Náhodná premenná *Z* sa teraz zmení na $T = (\overline{X} - \mu) / \left(S / \sqrt{n}\right)$. Logická otázka je, aké rozdelenie má náhodná premenná *T*? Z definície *t*-rozdelenia (kap. 3) sa dá dokázať nasledujúce tvrdenie:

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, je náhodný výber z normálneho rozdelenie s neznámou strednou hodnotou μ a neznámym rozptylom σ^2. Náhodná premenná

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \tag{6.12}$$

má *t* rozdelenie s $n - 1$ stupňami voľnosti.

6.3.1 Interval spoľahlivosti pre μ z *t* rozdelenia

Vieme, že $T = (\bar{X} - \mu) / \left(S / \sqrt{n} \right)$ má *t* rozdelenie s $n-1$ stupňami voľnosti. Kritická hodnota *t* rozdelenia s $n-1$ stupňami voľnosti je $t(n-1;\alpha)$. Potom platí:

$$P\left(-t(n-1;\alpha) \le T \le t(n-1;\alpha)\right) = 1-\alpha$$

alebo

$$P\left(-t(n-1;\alpha) \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t(n-1;\alpha) \right) = 1-\alpha$$

Úpravou posledného vzťahu dostaneme

$$P\left(\bar{X} - t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t(n-1;\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha \tag{6.13}$$

Toto vedie k nasledujúcej definícii $100(1-\alpha)\%$ dvojstranného IS pre μ.

Definícia dvojstranného intervalu spoľahlivosti pre μ

Keď $\bar{x}$ je hodnota výberového priemeru a *s* je hodnota výberovej smerodajnej odchýlky z náhodného výberu o rozsahu *n* z normálneho základného súboru s neznámym rozptylom σ^2, potom $100(1-\alpha)\%$ IS pre μ je

$$\bar{x} - t(n-1;\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t(n-1;\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{6.14}$$

kde $t(n-1;\alpha)$ je kritická hodnota *t* rozdelenia s $n-1$ stupňami voľnosti.

Jednostranné hranice spoľahlivosti dostaneme tak, že $t(n-1;\alpha)$ vo vzťahu (6.14) nahradíme $t(n-1;2\alpha)$.

Príklad 6.4

Máme šesť paralelných stanovení obsahu P_2O_5 vo vzorke hnojiva. Predpokladáme, že 16,5; 15,9; 16,6; 15,8; 16,4; 16,0 sú hodnoty náhodného výberu z rozdelenia $N(\mu,\sigma^2)$, pričom μ a σ^2 sú neznáme. Určíme 95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ.

Výpočet robíme podľa vzťahu (6.14). Určíme hodnoty bodových odhadov pre μ, σ^2 a σ.

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{6}97,2 = 16,2$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{6\cdot 5}\cdot(6\cdot 1575,22 - 97,2^2) = 0,116$$

$$\hat{\sigma} = s = \sqrt{0,116} = 0,3406$$

Požadované veličiny do vzorca (6.14) sú $n = 6,\quad \bar{x} = 16,2;\quad s = 0,3406$ a $t(n-1;\alpha) = t(5;0,05) = 2,5706.$ Výsledný IS je

$$\bar{x} - t(n-1;\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t(n-1;\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$16,2 - 2,5706 \times \frac{0,3406}{\sqrt{6}} \le \mu \le 16,2 + 2,5706 \times \frac{0,3406}{\sqrt{6}}$$

$$15,84 \le \mu \le 16,56$$

6.4 Interval spoľahlivosti pre rozptyl normálneho rozdelenia

Niekedy sú potrebné intervaly spoľahlivosti pre rozptyl základného súboru. V tomto prípade sa požaduje, aby mal základný súbor normálne rozdelenie. Z definície χ^2-rozdelenia (kap. 3) sa dá dokázať nasledujúce tvrdenie:

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n,$ je náhodný výber z normálneho rozdelenie s neznámou strednou hodnotou μ a neznámym rozptylom σ^2. Ďalej nech S^2 je výberový rozptyl. Potom náhodná premenná

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \tag{6.15}$$

má chí-kvadrát (χ^2) rozdelenie s $n-1$ stupňami voľnosti.

Konštrukcia $100(1-\alpha)\%$ IS pre σ^2 je zrejmá. Použitím vzťahu (6.15) dostaneme, že

$$P\left(\chi^2(n-1;1-\alpha/2) \le X^2 \le \chi^2(n-1;\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

čo možno napísať v tvare

$$P\left(\chi^2(n-1;1-\alpha/2) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2(n-1;\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

Posledný vzťah upravíme ako

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha/2)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha/2)}\right) = 1-\alpha \tag{6.16}$$

Tento vzťah vedie k nasledujúcej definícii intervalu spoľahlivosti pre σ^2.

Dvojstranný interval spoľahlivosti pre σ^2

Nech s^2 je hodnota výberového rozptylu z náhodného výberu *n* pozorovaní, ktorý sa realizoval z normálneho rozdelenia s neznámym rozptylom σ^2. Potom $100(1-\alpha)\%$ **obojstranný interval spoľahlivosti pre σ^2** je

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha/2)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha/2)} \tag{6.17}$$

kde $\chi^2(n-1;\alpha/2)$ a $\chi^2(n-1;1-\alpha/2)$ sú kritické hodnoty chi-kvadrát rozdelenia s $n-1$ stupňami voľnosti.

Pre $100(1-\alpha)\%$ **dolnú** a **hornú hranicu jednostranných intervalov spoľahlivosti pre σ^2** platia vzťahy:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;\alpha)} \le \sigma^2 \quad \text{a} \quad \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1;1-\alpha)} \tag{6.18}$$

Príklad 6.5

Pracovník technickej kontroly vykonal merania dĺžky 19-tich náhodne vybraných výrobkov a zistil hodnotu smerodajnej odchýlky v tomto výberovom súbore $s = 4$ mm. Určíme 98 % obojstranný interval spoľahlivosti pre rozptyl σ^2 základného súboru.

Na výpočet IS použijeme vzťah (6.17). Zo zadania vieme, že $s = 4,\ n = 19.$ a $\alpha = 0{,}02$, z čoho dostaneme $\alpha/2 = 0{,}01$ a $1-\alpha/2 = 0{,}99.$ V štatistických tabuľkách nájdeme kritické hodnoty $\chi^2(18;0{,}01) = 34{,}8$ a $\chi^2(18;0{,}99) = 7{,}01$ a po dosadení do (6.17) dostaneme:

$$\frac{18\cdot 4^2}{34{,}8} \le \sigma^2 \le \frac{18\cdot 4^2}{7{,}01}$$

$$8{,}276 \le \sigma^2 \le 41{,}084$$

6.5 Interval spoľahlivosti z veľkého výberu pre podiel jednotiek v základnom súbore s danou vlastnosťou

Často je potrebné zostrojiť interval spoľahlivosti pre podiel jednotiek v základnom súbore s danou vlastnosťou. Napríklad predpokladajme, že náhodný výber o rozsahu *n* sa realizoval z veľkého (možno nekonečného) základného súboru a $X(\le n)$ pozorovaní vo výbere má danú vlastnosť. Potom $\hat{P} = X/n$ je bodový odhad podielu jednotiek v základnom súbore *p* s danou vlastnosťou. Všimnime si, že *n* a *p* sú parametre binomického rozdelenia. Dá sa dokázať, že výberové rozdelenie $\hat{P}$ je približne normálne so strednou hodnotou *p* a rozptylom $p(1-p)/n$, keď *p* nie je blízko 0 alebo 1 a *n* je pomerne veľké. Presnejšie, pre použitie aproximácie sa požaduje, aby $np(1-p) > 9$. V tejto časti použijeme normálnu aproximáciu.

Keď n je veľké, rozdelenie premennej

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \tag{6.19}$$

je približne normálne.

Pri konštruovaní intervalu spoľahlivosti pre p si všimnime, že

$$P(-k_\alpha \le Z \le k_\alpha) = 1 - \alpha$$

z čoho

$$P\left(-k_\alpha \le \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le k_\alpha \right) = 1 - \alpha$$

Toto možno prepísať do tvaru

$$P\left(\hat{P} - k_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le \hat{P} + k_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = 1 - \alpha \tag{6.20}$$

Veličina $\sqrt{p(1-p)/n}$ vo vzťahu (6.20) sa nazýva **smerodajná chyba bodového odhadu** $\hat{P}$. Vo vzťahu (6.20) horná aj dolná hranica intervalu spoľahlivosti obsahuje neznámy parameter p. Vyhovujúce riešenie spočíva v tom, že neznámy parameter p nahradíme bodovým odhadom $\hat{P}$. Potom platí

$$P\left(\hat{P} - k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \le p \le \hat{P} + k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \right) = 1 - \alpha \tag{6.21}$$

Toto vedie k približnému $100(1-\alpha)\%$ intervalu spoľahlivosti pre p.

Definícia intervalu spoľahlivosti pre podiel *p*

Nech $\hat{p}$ je podiel pozorovaní v náhodnom výbere o rozsahu n s danou vlastnosťou. Potom približný $100(1-\alpha)\%$ intervalu spoľahlivosti pre podiel p jednotiek zo základného súboru s danou vlastnosťou je

$$\hat{p} - k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{6.22}$$

kde k_α je kritická hodnota normovaného normálneho rozdelenia (pozri (2.36)).

Príklad 6.6

V náhodnom výbere 85 automobilových ložísk kľukového hriadeľa motora 10 má povrchovú úpravu drsnejšiu, ako dovoľujú špecifikácie. Preto hodnota bodového odhadu podielu

ložísk v základnom súbore, ktorých drsnosť presahuje špecifikáciu, je $\hat{p} = x / n = 10 / 85 = 0{,}1176$. Chceme vypočítať 95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre *p*.

95 % obojstranný interval spoľahlivosti pre *p* sa vypočíta zo vzťahu (6.22) takto:

$$\hat{p} - k_{0,05}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + k_{0,05}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

alebo

$$0{,}1176 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1176 \times 0{,}8824}{85}} \le p \le 0{,}1176 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1176 \times 0{,}8824}{85}}$$

čo zjednodušíme na

$$0{,}1176 - 0{,}06848 \le p \le 0{,}1176 + 0{,}06848$$

$$0{,}049 \le p \le 0{,}186$$

6.5.1 Určenie rozsahu výberu

Pretože $\hat{P}$ je bodový odhad *p*, chybu odhadu *p* pomocou $\hat{P}$ definujeme ako $E = \left|\hat{P} - p\right|$. Všimnime si, že sme približne na $100(1-\alpha)\%$ presvedčení, že táto chyba je menšia ako $k_\alpha\sqrt{p(1-p)/n}$. Napríklad v príklade 6 sme na 95 % presvedčení, že hodnota výberového podielu $\hat{p} = 0{,}1176$ sa líši od skutočného podielu *p* o menej ako 0,06848.

Predstavme si, že chceme zvoliť rozsah výberu *n* tak, aby sme boli na $100(1-\alpha)$ % presvedčení, že chyba pri odhadnutí *p* je menšia ako špecifikovaná chyba *E*. Vhodný rozsah výberu sa získa riešením rovnice $E = k_\alpha\sqrt{p(1-p)/n}$ s neznámou *n*. Približný rozsah výberu je

$$n = \left(\frac{k_\alpha}{E}\right)^2 \times p(1-p) \tag{6.23}$$

Vo vzorci (6.23) je potrebné odhadnúť *p*. Keď máme k dispozícii hodnotu odhadu $\hat{p}$, môžeme ňou nahradiť *p* vo vzorci (6.23), alebo možno použiť subjektívnu hodnotu odhadu. Keď tieto alternatívy nie sú vyhovujúce, urobí sa predbežný výber. Z výberu sa vypočíta $\hat{p}$ a použije sa na určenie počtu pozorovaní, ktorý je potrebný na získanie hodnoty odhadu pre *p* s požadovanou presnosťou.

Iný prístup k výberu *n* využíva skutočnosť, že rozsah výberu zo vzorca (6.23) bude vždy maximálny pre $p = 0{,}5$ (to znamená, že $p(1-p) \le 0{,}25$) čo možno využiť na získanie hornej hranice hodnoty *n*. Inými slovami povedané, sme aspoň na $100(1-\alpha)$ % presvedčení, že chyba pri odhadnutí *p* je menšia ako špecifikovaná chyba *E*, keď rozsah výberu je

$$n = \left(\frac{k_\alpha}{E}\right)^2 \times 0{,}25 \tag{6.24}$$

Príklad 6.7

Zoberme do úvahy situáciu v príklade 6. Chceme vypočítať, aký veľký výber je potrebný, aby sme boli na 95 % presvedčení, že chyba pri používaní $\hat{p}$ na odhadnutie *p* je menšia ako 0,05.

Keď použijeme $\hat{p} = 0{,}1176$ ako pôvodnú hodnotu na odhadnutie *p*, potom zo vzťahu (6.23) vypočítame požadovaný rozsah výberu, ktorý je

$$n = \left(\frac{k_{0,05}}{E}\right)^2 \times \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{1{,}96}{0{,}05}\right)^2 0{,}1176 \times 0{,}8824 = 159{,}4575 \approx 160$$

Keď by sme chceli byť aspoň na 95% presvedčení, aby naša hodnota odhadu $\hat{p}$ skutočnej hodnoty *p* bola do 0,05 bez ohľadu na hodnotu *p*, použili by sme vzťah (6.24) na zistenie potrebného rozsahu výberu

$$n = \left(\frac{k_{0,05}}{E}\right)^2 \times 0{,}25 = \left(\frac{1{,}96}{0{,}05}\right)^2 \times 0{,}25 = 384{,}16 \approx 385$$

Všimnime si, že keď máme informácie tykajúce sa hodnota *p*, buď s predchádzajúceho výberu, alebo z minulého experimentu, môžeme použiť menší rozsah výberu pri zachovaní ako požadovanej presnosti odhadu, tak aj úrovne spoľahlivosti.

Jednostranné hranice spoľahlivosti

Približné jednostranné hranice spoľahlivosti *p* dostaneme pomocou jednoduchej úpravy vzťahu (6.22).

Približná $100(1-\alpha)$ % dolná a horná hranice spoľahlivosti sú

$$\hat{p} - k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \quad \text{a} \quad p \le \hat{p} + k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{6.25}$$

6.6 Predikčný interval pre budúce pozorovanie

V niektorých problémových situáciách nás môže zaujímať predpovedanie budúceho pozorovania. Toto je iný problém, ako odhad strednej hodnoty premennej, tu sa nedá použiť interval spoľahlivosti. V tejto kapitole si ukážeme, ako možno získať $100(1-\alpha)\%$ **predikčný interval** pre budúcu hodnotu z normálnej náhodnej premennej.

Predpokladajme, že $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber z normálneho základného súboru. Chceme predpovedať hodnotu X_{n+1}, jedno **budúce** pozorovanie. Predikčný bod pre X_{n+1} je výberový priemer $\bar{X}$. Predikčná chyba je $X_{n+1} - \bar{X}$. Stredná hodnota predikčnej chyby je

$$E(X_{n+1} - \bar{X}) = \mu - \mu = 0$$

a rozptyl predikčnej chyby je

$$D(X_{n+1} - \bar{X}) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

pretože budúce pozorovanie X_{n+1} a výberový priemer súčasného výberu $\bar{X}$ sú nezávislé. Predikčná chyba $X_{n+1} - \bar{X}$ je normálne rozdelená, preto

$$Z = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

má normované normálne rozdelenie. Keď σ nahradíme výberovou smerodajnou odchýlkou *S*, dostaneme štatistiku

$$T = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

ktorá má *t* rozdelenie s $n-1$ stupňami voľnosti. Úpravou *T* dostaneme predikčný interval pre budúce pozorovanie X_{n+1}.

Definícia predikčného intervalu pre budúce pozorovanie

$100(1-\alpha)\%$ **predikčný interval pre budúce pozorovanie s normálneho rozdelenia** je daný vzťahom

$$\bar{x} - t(n-1,\alpha)s\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \le X_{n+1} \le \bar{x} + t(n-1,\alpha)s\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \qquad (6.26)$$

Predikčný interval pre X_{n+1} bude vždy dlhší ako interval spoľahlivosti pre μ, pretože variabilita týkajúca sa chyby predikcie je väčšia ako variabilita týkajúca sa chyby odhadu. To je ľahko vidieť, pretože chyba predikcie je rozdiel medzi dvoma náhodnými premennými $(X_{n+1} - \bar{X})$ a chyba odhadu intervalu spoľahlivosti je rozdiel medzi jednou náhodnou premennou a konštantou $(\bar{X} - \mu)$. Keď *n* rastie $(n \to \infty)$, dĺžka IS klesá k nule, kým dĺžka predikčného intervalu sa blíži ku hodnote $2k_\alpha\sigma$.

Príklad 6.8

Predpokladajme, že sme robili testy priľnavosti v ťahu na 24 vzorkách z ľahkej zliatiny. Zaťaženie pri porušení vzorky je v [MPa]. Z výberových dát sme zistili hodnotu výberového priemeru $\bar{x} = 13,65$ MPa a hodnotu výberovej smerodajne odchýlky $s = 3,45$ MPa. Plánujeme testovať dvadsiatu piatu vzorku a chceme vedieť, v akom intervale môžeme očakávať meranú hodnotu.

Chceme nájsť 95 % predikčný interval pre dvadsiate piate pozorovanie. Použijeme vzťah (6.26)

$$\bar{x} - t(23;0,05)s\sqrt{1+\frac{1}{24}} \le X_{n+1} \le \bar{x} + t(23;0,05)s\sqrt{1+\frac{1}{24}}$$

$$13,65 - 2,0687 \cdot 3,45 \cdot 1,021 \le X_{n+1} \le 13,65 + 2,0687 \cdot 3,45 \cdot 1,021$$

$$13,65 - 7,2869 \le X_{n+1} \le 13,65 + 7,2869$$

$$6,3631 \le X_{n+1} \le 20,9369$$

Pre porovnanie nájdeme 95 % interval spoľahlivosti pre μ. Pri výpočte použijeme vzťah (6.14).

$$\bar{x} - t(n-1;\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t(n-1;\alpha)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - t(23;0,05)\frac{s}{\sqrt{24}} \le \mu \le \bar{x} + t(23;0,05)\frac{s}{\sqrt{24}}$$

$$13,65 - 2,0687 \cdot \frac{3,45}{\sqrt{24}} \le \mu \le 13,65 + 2,0687 \cdot \frac{3,45}{\sqrt{24}}$$

$$13,65 - 1,457 \le \mu \le 13,65 + 1,457$$

$$12,193 \le \mu \le 15,107$$

Všimnime si, že predikčný interval je podstatne dlhší, ako interval spoľahlivosti.

6.7 Štatistický tolerančný interval pre normálne rozdelenie

Predpokladajme, že doba životnosti úspornej žiarovky X má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 780$ a rozptylom $\sigma^2 = 40^2$. Potom interval

$$(\mu - 1,96\sigma;\ \mu + 1,96\sigma) = (780 - 1,96 \times 40;\ 780 + 1,96 \times 40)$$

obsahuje 95 % hodnôt základného súboru úspornej žiarovky z hľadiska doby životnosti. Interval $(\mu - 1,96\sigma;\ \mu + 1,96\sigma)$ sa nazýva **štatistický tolerančný interval**.

Keď μ a σ^2 sú neznáme, môžeme použiť dáta z náhodného výberu rozsahu n na výpočet hodnôt výberového priemeru $\bar{x}$ a výberovej smerodajnej odchýlky *s*, potom vytvoríme interval $(\bar{x} - 1,96s;\ \bar{x} + 1,96s)$. Vzhľadom na výberovú variabilitu je pravdepodobné, že tento interval bude obsahovať menej ako 95 % hodnôt zo základného súboru. Riešenie tohto problému spočíva v nahradení hodnoty 1,96 nejakou inou hodnotou, ktorá vytvorí interval obsahujúci podiel 95 % hodnôt zo základného súboru s nejakou úrovňou spoľahlivosti.

Definícia dvojstranného a jednostranného štatistického tolerančného intervalu

$100(1-\alpha)$ % **dvojstranný** štatisticky tolerančný interval (Garaj, I., Janiga, I., 2002) je interval

$$(\bar{x} - ks;\ \bar{x} + ks) \tag{6.27}$$

pre ktorý platí

$$P\left[P(\bar{x} - ks < X < \bar{x} + ks) \geq p\right] = 1 - \alpha$$

kde $k = k(n, p, 1-\alpha)$ je tolerančný faktor (Prílohy), $1-\alpha$ spoľahlivosť a p je podiel hodnôt z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$.

$100(1-\alpha)$ % **jednostranný** štatisticky tolerančný interval (Garaj, I., Janiga, I., 2005) je interval

$$(-\infty,\ \bar{x} + ks) \text{ alebo } (\bar{x} - ks, \infty) \tag{6.28}$$

pre ktorý platí

$$P\left[P(X < \bar{x} + ks) \geq p\right] = 1 - \alpha \quad \text{alebo} \quad P\left[P(\bar{x} - ks < X) \geq p\right] = 1 - \alpha$$

kde $k = k(n, p, 1-\alpha)$ je tolerančný faktor (Prílohy), $1-\alpha$ spoľahlivosť a p je podiel hodnôt z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$.

Príklad 6.9

V príklade 6.8 sme z ťahových testov priľnavosti na 24 vzorkách z ľahkej zliatiny získali hodnotu výberového priemeru $\bar{x} = 13{,}65$ MPa a hodnotu výberovej smerodajne odchýlky $s = 3{,}45$ MPa.

Chceme nájsť 95 % dvojstranný štatistický tolerančný interval, ktorý obsahuje aspoň 99 % hodnôt zo základného súboru. Použijeme vzťah (6.27). Pre $n = 24$, $p = 0{,}99$ a $1-\alpha = 0{,}95$ nájdeme v príslušnej tabuľke (Prílohy) hodnotu $k = 3{,}4888$ a dosadíme do (6.27).

$$(13{,}65 - 3{,}4888 \times 3{,}45;\ 13{,}65 + 3{,}4888 \times 3{,}45)$$

$$(13{,}65 - 12{,}0364;\ 13{,}65 + 12{,}0364)$$

$$(1{,}6136;\ 25{,}6864)$$

Chceme nájsť 90 % jednostranný štatistický tolerančný interval z hornou hranicou, ktorý obsahuje aspoň 95 % hodnôt zo základného súboru. Použijeme vzťah (6.28). Pre $n = 24$, $p = 0{,}95$ a $1-\alpha = 0{,}90$ nájdeme v príslušnej tabuľke (Prílohy) hodnotu $k = 2{,}1452$ a dosadíme do (6.28).

$$(-\infty;\ 13{,}65 + 2{,}1452 \times 3{,}45)$$

$$(-\infty;\ 13{,}65 + 7{,}40094)$$

$$(-\infty;\ 21{,}05059)$$

7 TESTY HYPOTÉZ PRE JEDEN VÝBER

7.1 Testovanie hypotéz

7.1.1 Štatistické hypotézy

V technickej praxi často vznikajú otázky:

„Ovplyvňuje zmena suroviny (technológie, pracovného režimu a pod.) priemernú hodnotu znaku kvality?“

„Ktorá z dvoch skúšobných metód vedie k presnejším výsledkom merania?“

„Ktoré vplyvy pôsobia na úroveň dôležitého technologického parametra?“

Keď chceme odpovedať na tieto otázky, pomôže nám metóda testovania štatistických hypotéz.

Definícia štatistickej hypotézy

Štatistická hypotéza je tvrdenie, ktoré sa týka rozdelenia pravdepodobnosti pozorovanej náhodnej premennej alebo jej neznámych parametrov.

Napríklad predpokladajme, že sa zaujímame o rýchlosť horenia tuhého paliva používaného na pohon únikového systéme posádky lietadla. Rýchlosť horenie je náhodná premenná, ktorá má nejaké rozdelenie pravdepodobnosti. Predpokladajme, že sa zaujímame, či sa stredná hodnota rýchlosti horenia rovná 40 cm/s. Môžeme to zapísať formálne takto

$$H_0 : \mu = 40\,\text{cm/s} \qquad H_1 : \mu \neq 40\,\text{cm/s} \tag{7.1}$$

Tvrdenie $H_0 : \mu = 40\,\text{cm/s}$ sa nazýva **nulová hypotéza** a tvrdenie $H_1 : \mu \neq 40\,\text{cm/s}$ sa nazýva **alternatívna hypotéza**. Pretože alternatívna hypotéza špecifikuje hodnoty μ, ktoré môžu byť väčšie alebo menšie ako 40 cm/s, nazýva sa **dvojstranná (obojstranná) alternatívna hypotéza**. V niektorých situáciách možno formulovať **jednostranné alternatívne hypotézy,** napríklad

$$H_0 : \mu = 40\,\text{cm/s} \qquad H_1 : \mu < 40\,\text{cm/s}$$

$$\text{alebo} \tag{7.2}$$

$$H_0 : \mu = 40\,\text{cm/s} \qquad H_1 : \mu > 40\,\text{cm/s}$$

Hodnota parametra základného súboru špecifikovaná v nulovej hypotéze (40 cm/s uvedená v príklade) sa zvyčajne určí jedným z troch spôsobov. V prvom prípade môže vychádzať z minulých experimentov alebo zo znalosti procesu. V tomto prípade je cieľom testovania zistiť, či sa hodnota parametra zmenila. V druhom prípade sa hodnota parametra určí z nejakej

teórie alebo z modelu, ktorý sa študuje. Tu je cieľom testovania hypotézy overenie teórie alebo modelu. Tretí prípad nastane, keď hodnota parametra základného súboru je výsledkom vonkajších aspektov, napríklad konštrukčnej alebo technickej špecifikácie alebo pramení zo zmluvných záväzkov. V tomto prípade cieľom testovania hypotézy je kontrola zhody.

Postup, ktorý vedie k rozhodnutiu o konkrétnej hypotéze sa nazýva **test (testovanie) hypotézy**. Postup testovania hypotézy sa spolieha na informáciu získanú z náhodného výberu zo základného súboru. Keď je táto informácia v súlade s hypotézou, prikloníme sa k názoru, že hypotéza je správna. Naopak, keď táto informácia nie je v súlade s hypotézou, prikloníme sa k názoru, že hypotéza je nesprávna. Zdôrazňujeme, že správnosť alebo nesprávnosť určitej hypotézy nie je nikdy s istotou známa, s výnimkou, keď máme k dispozícii všetky hodnoty základného súboru. To je však zvyčajne nemožné vo väčšine praktických prípadoch. Preto bol navrhnutý postup testovania hypotéz.

Štruktúra problémov testovania hypotéz je rovnaký vo všetkých aplikáciách, ktoré budeme brať do úvahy. Nulová hypotéza je hypotéza, ktorú chceme testovať. Zamietnutie nulovej hypotézy vždy vedie k prijatiu alternatívnej hypotézy. V našom postupe testovania hypotéz sa nulová hypotéza uvádza vždy tak, že určuje presnú hodnotu parametra (ako napríklad vo vzťahu (7.1)) $H_0 : \mu = 40\,\text{cm/s}$). V alternatívnej hypotéze parameter nadobúda viacero hodnôt (ako napríklad vo vzťahu (7.1) $H_1 : \mu \neq 40\,\text{cm/s}$). Testovanie hypotéz zahrnuje realizáciu náhodného výberu, výpočet **hodnoty testovacej štatistiky** z výberových dát a použitie testovacej štatistiky na prijatie rozhodnutia o nulovej hypotéze.

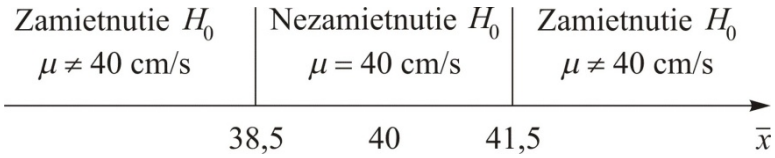
7.1.2 Testy štatistických hypotéz

Zoberme do úvahy rýchlosť horenia tuhého paliva uvedeného vyššie. Chceme testovať

$$H_0 : \mu = 40\,\text{cm/s} \qquad H_1 : \mu \neq 40\,\text{cm/s}$$

Predpokladajme, že skúšame $n = 13$ vzoriek a máme pozorovanie $\bar{x}$ hodnoty výberového priemeru. Vieme, že $\bar{x}$ je hodnota odhadu skutočnej strednej hodnoty μ základného súboru. Keď hodnota $\bar{x}$ padne blízko hypotetickej hodnoty $\mu = 40\,\text{cm/s}$, potom je to dôkaz, že skutočná stredná hodnota μ je naozaj 40 cm/s; teda podporuje nulovú hypotézu H_0. Naopak, keď $\bar{x}$ sa značne líši od 40 cm/s, je to dôkaz pre podporu alternatívnej hypotézy H_1. Teda v tomto prípade testovacou štatistikou je výberový priemer.

Výberový priemer môže nadobúdať veľa rôznych hodnôt. Predpokladajme, že nezamietneme nulovú hypotézu $H_0 : \mu = 40$, keď $38{,}5 \leq \bar{x} \leq 41{,}5$; a že zamietneme nulovú hypotézu v prospech alternatívnej hypotézy $H_1 : \mu \neq 40$, keď $\bar{x} < 38{,}5$ alebo $\bar{x} > 41{,}5$. Toto je znázornené na obrázku 7.1.



Obrázok 7.1. *Rozhodovacie kritériá pre test* $H_0 : \mu = 40\,cm/s$ *oproti* $H_1 : \mu \neq 40\,cm/s$

Hodnoty $\bar{x}$ menšie ako 38,5 a väčšie ako 41,5 tvoria **kritickú oblasť** testu, kým všetky hodnoty, ktoré sa nachádzajú v intervale $38{,}5 \leq \bar{x} \leq 41{,}5$ tvoria **oblasť prijatia.** Hranice medzi kritickými oblasťami a oblasťou prijatia sa nazývajú **kritické hodnoty.** V našom prípade sú kritické hodnoty 38,5 a 41,5. Obvyklé je uviesť závery vo vzťahu k nulovej hypotéze H_0. Teda H_0 zamietneme v prospech H_1, keď hodnota testovacej štatistiky padne do kritickej oblasti a H_0 nezamietneme v opačnom prípade.

Rozhodovací postup môže viesť ku dvom chybným záverom. Napríklad skutočná stredná hodnota rýchlosti horenia tuhého paliva môže byť 40 cm/s. Avšak náhodne vybrané vzorky paliva, ktoré sa skúšajú, môžu mať hodnotu testovacej štatistiky $\bar{x}$, ktorá padne do kritickej oblasti. Potom by sme zamietli nulovú hypotézu H_0 v prospech alternatívy H_1, aj keď je H_0 skutočne správna. Tento typ chybného rozhodnutia sa nazýva **chyba 1. druhu.**

Definícia chyby 1. druhu

Zamietnutie nulovej hypotézy H_0, keď je správna, sa definuje ako **chyba 1. druhu.**

Teraz predpokladajme, že skutočná stredná hodnota rýchlosti horenia tuhého paliva sa líši od hodnoty 40 cm/s a hodnota výberového priemeru $\bar{x}$ padne do oblasti prijatia. V tomto prípade by sme nulovú hypotézu H_0 nezamietli, aj keď je nesprávna. Tento typ chybného rozhodnutia sa nazýva **chyba 2. druhu.**

Definícia chyby 2. druhu

Nezamietnutie nulovej hypotézy H_0, keď je nesprávna, sa definuje ako **chyba 2. druhu.**

V testovaní každej štatistickej hypotézy môžu nastať štyri rozdielne situácie, či konečné rozhodnutia sú správne alebo nesprávne. Tieto situácie sú prezentované v tabuľke 7.1.

Tabuľka 7.1. *Rozhodovacia matica v testovaní hypotéz*

Rozhodnutie	H_0 je správna	H_0 je nesprávna
H_0 sa nezamietne	Správne rozhodnutie	**Chyba 2. druhu**
H_0 sa zamietne	**Chyba 1. druhu**	Správne rozhodnutie

Pretože naše rozhodnutie je založené na náhodných premenných, pravdepodobnosti sú priradené chybe 1. druhu a chybe 2. druhu. Pravdepodobnosť nastania **chyby 1. druhu** je určená podmienenou pravdepodobnosťou:

$$\alpha = P(\text{chyba 1. druhu}) = P(\ H_0 \text{ zamietam} \big| H_0 \text{ je správna}) \tag{7.3}$$

Pravdepodobnosť chyby 1. druhu sa nazýva **úroveň významnosti** testu. V príklade rýchlosti horenia tuhého paliva chyba 1. druhu sa vyskytne, keď $\bar{x} < 38{,}5$ alebo $\bar{x} > 41{,}5$; pričom skutočná stredná hodnota rýchlosti horenia je $\mu = 40$ cm/s.

Predpokladajme, že smerodajná odchýlka rýchlosti horenia je $\sigma = 2{,}2$ cm/s a rýchlosť horenia má rozdelenie, pre ktoré sa dajú podmienky centrálnej limitnej vety aplikovať. Potom rozdelenie výberového priemeru je približne normálne so strednou hodnotou $\mu = 40$ a smerodajnou odchýlkou $\sigma / \sqrt{n} = 2{,}2 / \sqrt{13} = 0{,}61$. Pravdepodobnosť chyby 1. druhu (alebo úroveň významnosti nášho testu) sa rovná súčtu plôch vyznačených na obrázku 7.2. Podľa vzťahu (7.3) vypočítame pravdepodobnosť takto

$$\alpha = P(\bar{X} < 38{,}5 \big| \mu = 40) + P(\bar{X} > 41{,}5 \big| \mu = 40)$$

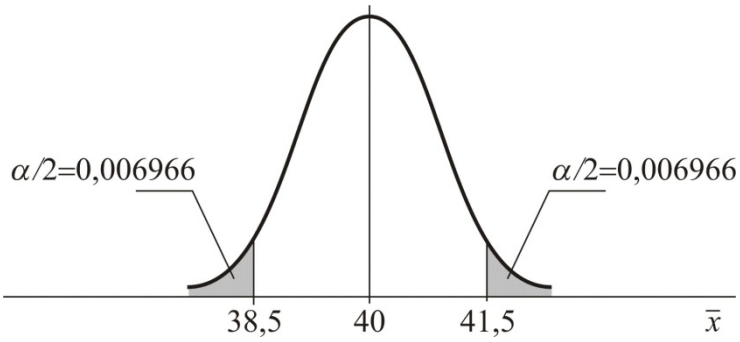
Hodnoty *z* zodpovedajúca kritickým hodnotám 38,5 a 41,5 sú

$$z_1 = \frac{38{,}5 - 40}{0{,}61} = -2{,}459 \quad \text{a} \quad z_2 = \frac{41{,}5 - 40}{0{,}61} = 2{,}459$$

Potom platí

$$\alpha = P(Z < -2{,}459) + P(Z > 2{,}459) = 0{,}006966 + 0{,}006966 = 0{,}013932$$

Z toho vyplýva, že 1,39 % zo všetkých výberov by viedlo k zamietnutiu hypotézy $H_0 : \mu = 40$ cm/s, keď skutočná stredná hodnota rýchlosti horenia je 40 cm/s.



Obrázok 7.2. *Kritická oblasť pre* $H_0 : \mu = 40$ *oproti* $H_1 : \mu \neq 40$

Všimnite si na obrázku 7.2, že môžeme znížiť α rozšírením oblasti prijatia. Napríklad, keď kritické hodnoty sú 38 a 42, potom α je

$$\alpha = P\left(Z < \frac{38 - 40}{0{,}61} \right) + P\left(Z > \frac{42 - 40}{0{,}61} \right) = P(Z < -3{,}28) + P(Z > 3{,}28) =$$

$$= 0{,}000519 + 0{,}000519 = 0{,}001038$$

Dá sa znížiť α tiež zvýšením rozsahu výberu. Keď $n = 16$, $\sigma / \sqrt{n} = 2{,}2 / \sqrt{16} = 0{,}55.$ Použijeme pôvodné kritické hodnoty z obrázka 7.2 a dostaneme

$$z_1 = \frac{38{,}5 - 40}{0{,}55} = -2{,}73 \quad \text{a} \quad z_2 = \frac{41{,}5 - 40}{0{,}55} = 2{,}73$$

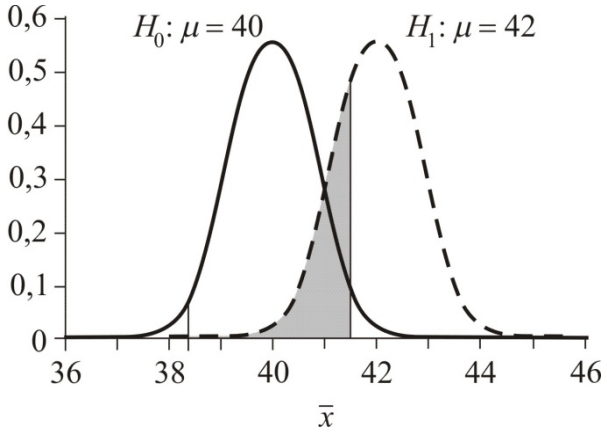
Potom platí

$$\alpha = P(Z < -2{,}73) + P(Z > 2{,}73) = 0{,}003167 + 0{,}003167 = 0{,}006334$$

V procedúre testovania hypotézy je dôležité skúmať pravdepodobnosť **chyby 2. druhu**, ktorú označujeme β. To je

$$\beta = P(\text{chyba 2. druhu}) = P(H_0 \text{ nezamietam} \,|\, H_0 \text{ nie je správna}) \tag{7.4}$$

Na výpočet β potrebujeme konkrétnu hodnotu μ. Napríklad predpokladajme, že nulovú hypotézu $H_0 : \mu = 40$ zamietneme, keď stredná hodnota je menšia ako 38 a väčšia ako 42. Pripomíname, že $\sigma / \sqrt{n} = 2{,}2 / \sqrt{13} = 0{,}61.$ Chceme vypočítať pravdepodobnosť chyby 2. druhu pre hodnoty $\mu = 38$ a $\mu = 42$ a výsledky použiť na zistenie, ako sa chová testovacia procedúra. Vzhľadom k symetrii stačí vyšetrovať iba $\mu = 42.$ Budeme teda počítať pravdepodobnosť prijatia hypotézy $H_0 : \mu = 40$ za predpokladu, že skutočná stredná hodnota je $\mu = 42$ cm/s.



Obrázok 7.3. *Pravdepodobnosť chyby 2. druhu pre* $\mu = 42$ *a* $n = 13$

Normálne rozdelenie na ľavej strane na obrázku 7.3 je rozdelenie testovacej štatistiky $\bar{X}$ za predpokladu správnosti nulovej hypotézy $H_0 : \mu = 40$ a normálne rozdelenie na pravej strane je rozdelenie testovacej štatistiky $\bar{X}$ za predpokladu správnosti alternatívnej hypotézy $H_1 : \mu = 42.$ Z obrázka 7.3 vidieť, že

$$\beta = P(38{,}5 \le \bar{X} \le 41{,}5 \,|\, \mu = 42)$$

Hodnoty *z* zodpovedajúce kritickým hodnotám 38,5 a 41,5 za predpokladu, že $\mu = 42$ sú

$$z_1 = \frac{38{,}5 - 42}{0{,}61} = -5{,}74 \quad \text{a} \quad z_2 = \frac{41{,}5 - 42}{0{,}61} = -0{,}82$$

Potom platí

$$\beta = P(-5,74 \le Z \le -0,82) = P(Z \le -0,82) - P(Z \le -5,74) =$$
$$= 0,206107 - 0,00000 = 0,206107$$

Teda pri testovaní $H_0 : \mu = 40$ oproti $H_1 : \mu \neq 40$ s rozsahom výberu $n = 13$, keď skutočná stredná hodnota je $\mu = 42,$ pravdepodobnosť, že nezamietneme nesprávnu nulovú hypotézu je 0,206107. Vzhľadom na už spomenutú symetriu, keď skutočná stredná hodnota je $\mu = 38,$ hodnota β bude tiež 0,206107.

Pravdepodobnosť chyby 2. druhu β rýchlo narastá, keď skutočná hodnota μ sa blíži k hypotetickej hodnote. Napríklad na obrázku 7.4 je skutočná stredná hodnota $\mu = 40,5$ a hypotetická hodnota je $H_0 : \mu = 40$. Skutočná hodnota μ je veľmi blízko hodnoty 40 a hodnota β je

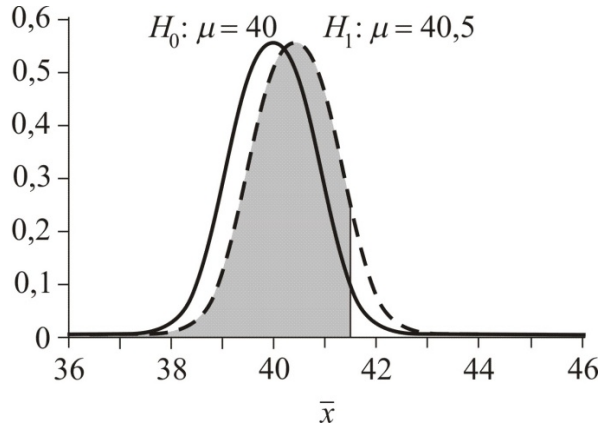
$$\beta = P(38,5 \le \bar{X} \le 41,5 \,|\, \mu = 40,5)$$

Ako vidieť na obrázku 7.4, hodnoty *z* zodpovedajúce hodnotám 38,5 a 41,5 za predpokladu, že $\mu = 40,5$ sú

$$z_1 = \frac{38,5 - 40,5}{0,61} = -3,28 \quad \text{a} \quad z_2 = \frac{41,5 - 40,5}{0,61} = 1,64$$

Potom platí

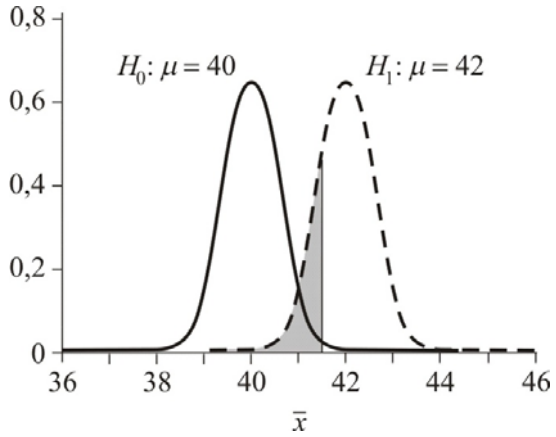
$$\beta = P(-3,28 \le Z \le 1,64) = P(Z \le 1,64) - P(Z \le -3,28) =$$
$$= 0,949498 - 0,000519 = 0,948979$$



Obrázok 7.4. *Pravdepodobnosť chyby 2. druhu pre* $\mu = 40,5$ *a* $n = 13$

Teda pravdepodobnosť chyby 2. druhu je oveľa väčšia v prípade, že skutočná stredná hodnota je 50,5 cm/s ako v prípade, keď stredná hodnota je 42 cm/s. V praxi sa však budeme zaujímať viac o detegovanie veľkých rozdielov medzi skutočnou strednou hodnotou a hodnotou špecifikovanou v nulovej hypotéze.

Pravdepodobnosť chyby 2. druhu závisí tiež od rozsahu výberu *n*. Nech nulová hypotéza je $H_0 : \mu = 40$ cm/s a skutočná stredná hodnota je $\mu = 42.$ Keď rozsah výberu narastie z $n = 13$ na $n = 16,$ nastane situácia na obrázku 7.5.



Obrázok 7.5. *Pravdepodobnosť chyby 2. druhu pre* $\mu = 42$ *a* $n = 16$

Normálne rozdelenie na ľavej strane je rozdelenie $\bar{X}$, keď $\mu = 40$, a normálne rozdelenie na pravej strane je rozdelenie $\bar{X}$, keď $\mu = 42$. Z obrázka 7.5 vidieť, že

$$\beta = P(38{,}5 \le \bar{X} \le 41{,}5 \,|\, \mu = 42)$$

Keď $n = 16$, smerodajná odchýlka štatistiky $\bar{X}$ je $\sigma / \sqrt{n} = 2{,}2 / \sqrt{16} = 0{,}55$ a hodnoty z zodpovedajúce hodnotám 38,5 a 41,5 za predpokladu, že $\mu = 42$ sú

$$z_1 = \frac{38{,}5 - 42}{0{,}55} = -6{,}36 \quad \text{a} \quad z_2 = \frac{41{,}5 - 42}{0{,}55} = -0{,}91$$

Potom platí

$$\beta = P(-6{,}36 \le Z \le -0{,}91) = P(Z \le -0{,}91) - P(Z \le -6{,}36) =$$
$$= 0{,}18141 - 0{,}00000 = 0{,}18141$$

Pre $n = 13$ a $\mu = 42$ sme zistili, že $\beta = 0{,}206107$; teda nárast rozsahu výberu vedie k poklesu pravdepodobnosti chyby 2. druhu.

Výsledky z tejto časti sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke:

Oblasť prijatia	Rozsah výberu	α	$\beta(\mu = 42)$	$\beta(\mu = 40{,}5)$
$38{,}5 < \bar{x} < 41{,}5$	13	0,013894	0,206107	0,948979
$38 < \bar{x} < 42$	13	0,001038	0,500000	0,993032
$38{,}5 < \bar{x} < 41{,}5$	16	0,006334	0,181410	0,965485
$38 < \bar{x} < 42$	16	0,000273	0,500000	0,510770

Uvedieme dôležité vlastnosti, ktoré sa týkajú α a β:

1. Veľkosť kritickej oblasti a v dôsledku toho aj pravdepodobnosť chyby 1. druhu α možno vždy zredukovať vhodným vybratím kritických hodnôt.
2. Chyby 1. a 2. druhu vzájomne súvisia. Zníženie pravdepodobnosti jedného druhu chyby vždy zvýši pravdepodobnosti druhého druhu, za predpokladu konštantného rozsahu výberu n.

3. Keď sú kritické hodnoty konštantné a rozsah výberu sa zväčšuje, α a β sa zmenšuje.
4. Keď nulová hypotéza je nesprávna, β sa zväčšuje v prípade, že skutočná hodnota parametra sa blíži k hypotetickej hodnote obsiahnutej v nulovej hypotéze. Hodnota β sa zmenšuje v prípade, že rozdiel medzi skutočnou hodnotou a hypotetickou hodnotou sa zväčšuje.

Dôležitý termín, ktorý budeme používať, je **sila** štatistického **testu**.

Definícia sily testu

Sila testu je pravdepodobnosť zamietnutia nulovej hypotézy H_0, keď je správna alternatívna hypotéza.

Sila testu sa vypočíta ako $1-\beta$ a interpretuje sa ako **pravdepodobnosť správne zamietnutej nepravdivej nulovej hypotézy**. Napríklad zoberme do úvahy problém rýchlosť horenia tuhého paliva, kde sme testovali $H_0 : \mu = 40$ cm/s oproti $H_1 : \mu \neq 40$ cm/s. Nech skutočná stredná hodnota je $\mu = 52$. Pre $n = 13$ sme našli $\beta = 0,206107$. Potom sila testu sa rovná $1-\beta = 1-0,206107 = 0,793893$, keď $\mu = 52$.

Sila testu je miera **citlivosti** štatistického testu, kde pod citlivosťou rozumieme schopnosť testu detegovať rozdiely. V našom prípade, citlivosť testu detegovať rozdiel medzi strednou hodnotou rýchlosti horenie 40 cm/s a hodnotou 42 cm/s je 0,793893. To znamená, že keď správna stredná hodnota je naozaj 42 cm/s, tento test korektne zamietne $H_0 : \mu = 40$ a „deteguje“ rozdiel 79,39 % času. Keď sa hodnota sily testu považuje za príliš nízku, štatistik môže zväčšiť α alebo rozsah výberu *n*.

7.1.3 Všeobecný postup pri testovaní štatistických hypotéz

Táto kapitola rozvíja postupy testovania hypotéz pre mnoho praktických problémov. Odporúča sa použitie nasledujúceho poradia krokov pri vykonávaní metodiky testovania hypotéz.

1. Z kontextu problému identifikovať parameter.
2. Určiť nulovú hypotézu H_0.
3. Zadať vhodnú alternatívnu hypotézu H_1.
4. Vybrať úroveň (hladinu) významnosti α.
5. Určiť zodpovedajúce testovacie štatistiku.
6. Určiť oblasť zamietnutia pre testovaciu štatistiku.
7. Vypočítať potrebné výberové veličiny, nahradiť ich vo vzorci pre testovaciu štatistiku a vypočítať jej hodnotu.
8. Rozhodnúť, či by sa mala H_0 zamietnuť alebo nezamietnuť.

7.2 Testy o strednej hodnote normálneho rozdelenie, rozptyl známy

V tejto kapitole berieme do úvahy testovanie hypotézy o strednej hodnote μ jediného normálne rozdeleného základného súboru so známym rozptylom σ^2. Budeme predpokladať, že náhodný výber $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bol realizovaný zo základného súboru. Na základe predchádzajúcej diskusie, výberový priemer $\bar{X}$ je **nevychýlený bodový odhad** parametra μ z rozptylom σ^2 / n.

7.2.1 Testy hypotézy o strednej hodnote

Predpokladajme, že chceme testovať hypotézu

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{7.5}$$

kde μ_0 je špecifikovaná konštanta. Máme náhodný výber $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z normálneho rozdelenia. Pretože $\bar{X}$ má normálne rozdelenie (t. j. **výberové rozdelenie** $\bar{X}$ je normálne) so strednou hodnotou μ_0 a smerodajnou odchýlkou $\sigma / \sqrt{n}$, keď nulová hypotéza je správna, môžeme konštruovať kritickú oblasť na základe vypočítanej hodnoty výberového priemeru $\bar{X}$, ako sme ukázali v časti 7.1.2.

Zvyčajne je výhodnejšie *normovať* výberový priemer a použiť testovaciu štatistiku založenú na normovanom normálnom rozdelení. To znamená, že v testovacom postupe pre hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0$ sa použije **testovacia štatistika**

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \tag{7.6}$$

Keď nulová hypotéza $H_0 : \mu = \mu_0$ je správna, potom $E(\bar{X}) = \mu_0$ a rozdelenie Z_0 je normované normálne, označované $N(0,1)$. Preto, keď $H_0 : \mu = \mu_0$ je správna, pravdepodobnosť, že hodnota testovacej štatistiky Z_0 padne medzi $-k_\alpha$ a k_α, kde k_α je kritická hodnota rozdelenia $N(0,1)$, sa rovná $1 - \alpha$ (obrázok 7.6).

Pravdepodobnosť, že hodnota testovacej štatistiky Z_0 patrí do oblasti $Z_0 > k_\alpha$ alebo $Z_0 < -k_\alpha$, pričom $H_0 : \mu = \mu_0$ je správna, sa rovná α. Teda mali by sme zamietnuť H_0, keď pozorovaná hodnota testovacej štatistiky z_0 je

$$z_0 > k_\alpha \quad \text{alebo} \quad z_0 < -k_\alpha \tag{7.7}$$

a nemali by sme zamietnuť H_0, keď

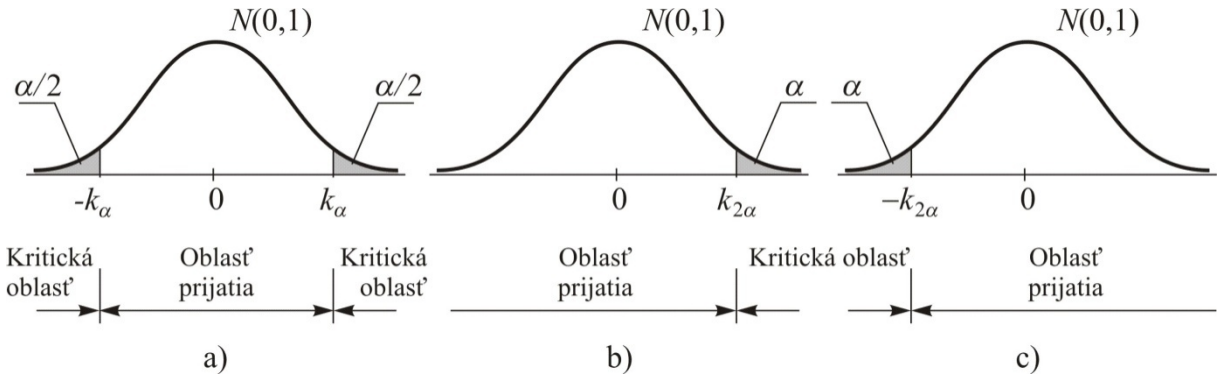
$$-k_\alpha \leq z_0 \leq k_\alpha \tag{7.8}$$

Nerovnosti v (7.8) definujú **oblasť prijatia** pre H_0 a nerovnosti v (7.7) definujú **kritickú oblasť** alebo **oblasť zamietnutia**. Pravdepodobnosť chyby 1. druhu tohto testovacieho postupu je α.

Všeobecne je ľahšie pochopiť kritickú oblasť a postup testovania, keď testovacou štatistikou je $\bar{X}$. Postup je nasledujúci:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ zamietame, keď}$$

$$\bar{x} < \mu_0 - k_\alpha \sigma / \sqrt{n} \quad \text{alebo} \quad \bar{x} > \mu_0 + k_\alpha \sigma / \sqrt{n} \tag{7.9}$$



Obrázok 7.6. *Rozdelenie* Z_0, *keď* $H_0 : \mu = \mu_0$ *je správna, a kritické oblasti pre alternatívy a)* $H_1 : \mu \neq \mu_0$, *b)* $H_1 : \mu > \mu_0$ *a c)* $H_1 : \mu < \mu_0$

Príklad 7.1

Únikové systémy posádky lietadla sú poháňané tuhým palivom. Rýchlosť horenia paliva je dôležitá vlastnosť produktu. Požadovaná špecifikácia je stredná hodnota rýchlosti horenia, ktorá musí byť 40 cm/s. Vieme, že smerodajná odchýlka rýchlosti horenia je $\sigma = 1{,}8$ cm/s. Experimentátor určil pravdepodobnosť chyby 1. druhu alebo úroveň významnosti $\alpha = 0{,}05$. Vykonal náhodný výber o rozsahu $n = 36$, z ktorého vypočítal hodnotu výberového priemeru rýchlosti horenia $\bar{x} = 40{,}68$. Aké možno vyvodiť závery?

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Parameter záujmu je μ, stredná hodnota rýchlosti horenia.
2. $H_0 : \mu = 40$ cm/s.
3. $H_1 : \mu \neq 40$ cm/s.
4. $\alpha = 0{,}05$.
5. Testovacia štatistika je

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

6. H_0 zamietame, keď $z_0 > 1{,}96$ alebo $z_0 < -1{,}96$.

7. Počítajme: Pretože $\bar{x} = 40,68$ a $\sigma = 1,8$,

$$z_0 = \frac{40,68 - 40}{1,8 / \sqrt{36}} = \frac{0,68}{0,3} = 2,27$$

8. Záver: Pretože $z_0 = 2,27 > 1,96$, $H_0 : \mu = 40$ zamietame na úrovni významnosti 0,05. Potom na základe 36 meraní tvrdíme, že stredná hodnota rýchlosti horenia sa líši od 40 cm/s.

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené aj jednostranné testy.

Tabuľka 7.2. *Testy o strednej hodnote; rozptyl je známy*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$z_0 < -k_\alpha$ alebo $z_0 > k_\alpha$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$		$z_0 < -k_{2\alpha}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$		$z_0 > k_{2\alpha}$

7.2.2 *P* hodnota v testovaní hypotéz

Príklad 7.2

Prístup s *P*-hodnotou si vysvetlíme na dátach (príklad 7.1). Vieme, že stredná hodnota rýchlosti horenia je 40 cm/s, $\sigma = 1,8$ cm/s, $n = 36$, $\bar{x} = 40,68$. Chceme zistiť, či stredná rýchlosť horenia je väčšia ako 40 cm/s.

Máme teda hypotézy

$H_0 : \mu = 40$ oproti alternatíve $H_1 : \mu > 40$

Vypočítame, aká je pravdepodobnosť, že $\bar{X}$ dosiahne hodnotu 40,68 alebo väčšiu za predpokladu, že hypotéza H_0 je správna:

$$P(\bar{X} \geq 40,68) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq \frac{40,68 - 40}{1,8 / \sqrt{36}} \right) = P(Z \geq 2,27) = 0,0116037$$

Ak teda v skutočnosti rýchlosť horenia nie je väčšia ako 40, pravdepodobnosť, že budeme pozorovať takú veľkú hodnotu priemeru, bude len 1,16 %. Preto 1,16 % budeme volať *P*-hodnotou pre H_0.

Definícia *P*-hodnoty

P-hodnota je pravdepodobnosť, že testovacia štatistika za platnosti nulovej hypotézy H_0 nadobudne extrémnejšiu hodnotu, ako je pozorovaná hodnota testovacej štatistiky.

Keď je *P*-hodnota známa, potom možno vyvodiť záver pri každej špecifikovanej úrovni významnosti α takto:

H_0 zamietame na úrovni významnosti α, ak $P \le \alpha$,

H_0 nezamietame na úrovni významnosti α, ak $P > \alpha$

Pre testy normálneho rozdelenie sa *P*-hodnoty vypočítajú podľa nasledujúcich vzťahov:

$$P = \begin{cases} 2[1-\Phi(|z_0|)] & \text{pre dvojstranný test} \\ 1-\Phi(z_0) & \text{pre horný jednostranný test} \\ \Phi(z_0) & \text{pre dolný jednostranný test} \end{cases} \qquad (7.10)$$

Na ilustráciu vzťahov (7.10) použijeme príklad 7.2. Vypočítaná hodnota testovacej štatistiky je $z_0 = 2,27$ a pretože alternatívna hypotéza je horná jednostranná, *P*-hodnota je

$$P = 1-\Phi(2,27) = 1-0,988396 = 0,011604$$

Teda $H_0 : \mu = 40$ s alternatívou $H_1 : \mu > 40$ by sme zamietli na úrovni $\alpha \ge P = 0,011604$. Napríklad H_0 by sme zamietli, keď $\alpha = 0,01$, avšak nezamietli by sme, keď $\alpha = 0,001$.

7.2.3 Súvislosť medzi testovaním hypotéz a intervalmi spoľahlivosti

Existuje úzky vzťah medzi testovaním hypotézy o ľubovoľnom parametri θ a intervalom spoľahlivosti pre θ. Keď $[d,h]$ je $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre parameter θ, nulovú hypotézu

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \theta \ne \theta_0$$

zamietame na úrovni významnosti α práve vtedy, keď θ_0 sa **nenachádza** v $100(1-\alpha)\%$ IS $[d,h]$.

V prípade testovania nulovej hypotézy o parametri μ normálneho rozdelenia nulovú hypotézu H_0: $\mu = \mu_0$ zamietame na úrovni významnosti α, ak platí:

pre dvojstranný test

$$\mu_0 \notin \left[\bar{X} - k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + k_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

pre horný jednostranný test

$$\mu_0 < \bar{X} - k_{2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

pre dolný jednostranný test

$$\mu_0 > \bar{X} + k_{2\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Na ilustráciu zoberieme do úvahy príklad 7.1, kde únikové systémy posádky lietadla sú poháňané tuhým palivom. Nulová hypotéza $H_0 : \mu = 40$ bola zamietnutá na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$. 95 % dvojstranný IS možno vypočítať pomocou vzťahu (6.7). Interval spoľahlivosti je

$$40{,}092 \le \mu \le 41{,}268$$

Pretože hodnota $\mu_0 = 40$ nepatrí do intervalu, nulovú hypotézu $H_0 : \mu = 40$ zamietame.

7.2.4 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu

V tejto časti si ukážeme, ako možno vypočítať pravdepodobnosť chyby 2. druhu β. Ukážeme tiež ako voliť rozsah výberu, aby sme dostali zadanú hodnotu β.

Nájdenie pravdepodobnosti chyby 2. druhu β

Zoberme do úvahy dvojstrannú hypotézu

$$H_0\colon \mu = \mu_0 \quad \text{oproti} \quad H_1\colon \mu \neq \mu_0$$

Predpokladajme, že nulová hypotéza H_0 je nesprávna a skutočná stredná hodnota je $\mu = \mu_0 + \delta$, pričom $\delta > 0$. Testovacia štatistika Z_0 je

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta)}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

Keď H_1 je správna, rozdelenie Z_0 je

$$Z_0 \sim N\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right) \tag{7.11}$$

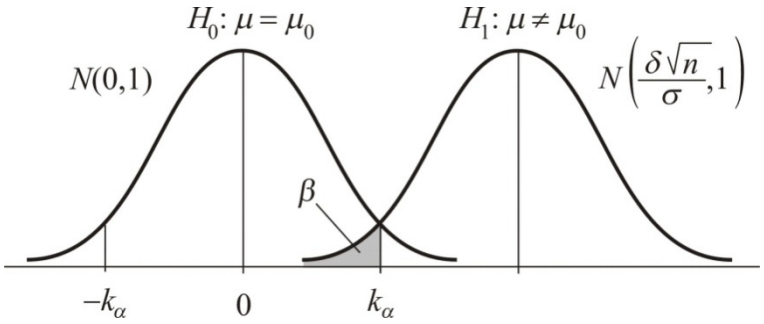
Rozdelenie testovacej štatistiky Z_0 za predpokladu nulovej hypotézy H_0 a alternatívnej hypotézy H_1 je vidieť na obrázku 7.7. Z obrázka vidieť, že keď H_1 je správna, chyba 2. druhu nastane iba vtedy, keď $-k_\alpha \le Z_0 \le k_\alpha$, kde $Z_0 \sim N(\delta\sqrt{n}/\sigma, 1)$. Potom pravdepodobnosť chyby 2. druhu je

$$\beta = P(-k_\alpha \le Z_0 \le k_\alpha \,|\, \mu = \delta\sqrt{n}/\sigma) = P(-k_\alpha \le Z + \delta\sqrt{n}/\sigma \le k_\alpha) =$$

$$= P\left(-k_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \le Z \le k_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(k_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-k_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

kde $Z \sim N(0,1)$. Teda platí, že

$$\beta = \Phi\left(k_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-k_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \tag{7.12}$$



Obrázok 7.7. *Rozdelenie štatistiky* Z_0 *pre hypotézy* H_0 *a* H_1

Vzorce pre rozsah výberu

Vzorce sa používajú na určenie rozsahu výberu pre príslušný test a príslušnú úroveň β, α a $\delta\,(=|\mu - \mu_0|)$, čo je rozdiel medzi skutočnou hodnotou a hypotetickou hodnotou. Pre dvojstrannú alternatívnu hypotézu vieme, že vo vzťahu (7.12) je $\delta > 0$. Potom (7.12) možno napísať v tvare

$$\beta \approx \Phi\left(k_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \tag{7.13}$$

Pretože $\Phi\left(-k_\alpha - \delta\sqrt{n}/\sigma\right) \approx 0$. Nech $k_{2\beta}$ je kritická hodnota normovaného normálneho rozdelenia. Potom z obrázka 7.7 vidieť, že $\beta = \Phi(-k_{2\beta})$. Potom zo vzťahu (7.13) vyplýva, že

$$-k_{2\beta} \approx k_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

z čoho dostaneme vzorec pre rozsah výberu

$$n \approx \frac{(k_\alpha + k_{2\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} \tag{7.14}$$

kde $\delta = \mu - \mu_0$.

Pre jednostranné hypotézy vzorec pre požadovaný rozsah výberu je

$$n \approx \frac{(k_{2\alpha} + k_{2\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} \tag{7.15}$$

kde $\delta = \mu - \mu_0$.

Príklad 7.3

Zoberme do úvahy problém rýchlosti horenia paliva (príklad 7.1). Želáme si navrhnúť test tak, aby detegoval rozdiel o veľkosti 1 cm/s medzi skutočnou strednou hodnotou rýchlosti horenia a hodnotou 40 cm/s s pravdepodobnosťou 0,90. Vieme, že $\sigma = 1{,}8$, $\delta = 41 - 40 = 1$, $\alpha = 0{,}05$ a $\beta = 0{,}10$. Pretože $k_\alpha = k_{0{,}05} = 1{,}960$ a $k_{2\beta} = k_{0{,}20} = 1{,}282$, rozsah výberu požadovaný na detegovanie odchýlky od $H_0 : \mu = 40$ nájdeme použitím vzťahu (7.14) takto:

$$n \approx \frac{(k_\alpha + k_{2\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} = \frac{(1{,}960 + 1{,}282)^2 \cdot 1{,}8^2}{1^2} = 34{,}054223 \approx 35$$

Použitie kriviek operatívnych charakteristík (OC)

Krivky operatívnej charakteristiky (OC) sú uvedené v časti Prílohy a zobrazujú $\beta = P(H_0 \text{ nezamietam} \,|\, H_0 \text{ nie je správna})$ ako funkciu *d* (pre *z*-test), rôznych rozsahov výberu *n* a dvoch úrovní významnosti $\alpha = 0{,}01$ a $\alpha = 0{,}05$. Parameter *d* je definovaný takto

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma} \tag{7.16}$$

Zo skúmania kriviek OC alebo vzťahu (7.12) a z obrázka 7.7 vieme:

1. Pri danom *n* a α platí: čím ďalej je skutočná stredná hodnota μ od hypotetickej hodnoty μ_0, tým menšia je pravdepodobnosť chyby 2. druhu β. To znamená, že pre špecifikovaný rozsah výberu a dané α, veľké rozdiely sa detegujú ľahšie, ako malé rozdiely.
2. Pri danom δ a α platí: keď *n* sa zväčšuje, pravdepodobnosť chyby 2. druhu β sa zmenšuje. To znamená, že na detegovanie špecifikovaného rozdielu medzi strednými hodnotami môžeme test urobiť silnejším, keď zväčšíme rozsah výberu.

Príklad 7.4

Zoberme do úvahy rýchlosť horenia paliva (príklad 7.1). Predpokladajme, že sa zaujímame o pravdepodobnosť chyby 2. druhu, keď skutočná stredná hodnota rýchlosti horenia je $\mu = 40{,}9$ cm/s. Na nájdenie β môžeme použiť krivky OC.

Všimnime si, že $\delta = 40{,}9 - 40 = 0{,}9$, $n = 36$, $\sigma = 1{,}8$ a $\alpha = 0{,}05$. Keď použijeme vzťah (7.16) dostaneme

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma} = \frac{0{,}9}{1{,}8} = 0{,}5$$

a v prílohe nájdeme príslušnú krivku OC−a. Pre $d = 0{,}5$ a $n = 36$ nájdeme na krivke OC hodnota $\beta = 0{,}19$. To znamená, že keď skutočná stredná hodnota rýchlosti horenia je $\mu = 40{,}9$ cm/s, potom existuje približne 19 % šanca, že táto hodnota nebude detegovaná pri teste s rozsahom výberu $n = 36$.

Príklad 7.5

Opäť zoberme do úvahy rýchlosť horenia paliva (príklad 7.1). Predpokladajme, že by sme radi navrhli test, ktorý by detegoval rozdiel o veľkosti 1 cm/s medzi skutočnou strednou hodnotou rýchlosti horenia a hypotetickou hodnotou 40 cm/s s vysokou pravdepodobnosťou rovnajúcou sa 0,90.

Toto je presne tá istá požiadavka, ako v jednom z predchádzajúcich príkladov (príklad 7.3), kde sme použili vzťah (7.14) na nájdenie rozsahu výberu $n = 35$. Na nájdenie rozsahu výberu pre tento test možno použiť aj krivky OC. Pretože $d = |\mu - \mu_0| / \sigma = 1/1{,}8 = 0{,}56$, $\alpha = 0{,}05$ a $\beta = 0{,}10$, požadovanú hodnotu rozsahu výberu $n = 40$ sme našli z krivky OC−a. Táto hodnota je blízka k hodnota vypočítanej podľa vzťahu (7.14).

Krivky OC obsahujú tri parametre: β, d a n. Keď poznáme hodnoty dvoch z týchto parametrov, hodnotu tretieho parametra vieme určiť. Existujú dve typické aplikácie kriviek OC:

1. Pre dané n a d nájdite β. Tento typ problému sa často vyskytuje vtedy, keď sa zaujímame o senzitívnosť už vykonaného experimentu, alebo keď rozsah výberu je obmedzený ekonomickými alebo inými faktormi.
2. Pre dané β a d nájdite n. Tento typ problému sa zvyčajne vyskytuje vtedy, keď máme možnosť vybrať si veľkosť vzorky na začiatku experimentu.

Krivky OC sú uvedené aj pre jednostranné alternatívy (Príloha). Keď alternatívne hypotézy sú $H_1 : \mu > \mu_0$ alebo $H_1 : \mu < \mu_0$, mierka horizontálnej osi v grafoch je

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma} \tag{7.17}$$

Štatistická významnosť verzus praktický význam

Štatistická významnosť testu nenaznačuje nevyhnutne jeho praktický význam. Keď napríklad rozsah výberu narastá, potom aj sila testu narastá. V prípade veľkého rozsahu výberu sa akýkoľvek malý posun od testovanej hodnoty deteguje (inými slovami $H_0 : \mu = \mu_0$ sa zamietne), hoci tento posun má malý praktický význam. Analytik by preto mal overiť, či výsledok štatistického testu má tiež praktický význam.

Napríklad zoberme do úvahy problém rýchlosti horenia paliva (príklad 7.1), kde testujeme $H_0 : \mu = 40$ cm/s oproti $H_1 : \mu \neq 40$ cm/s, pričom $\sigma = 1{,}8$. Keď predpokladáme, že skutočná stredná hodnota rýchlosti je 40,5 cm/s, toto nie je významná odchýlka od $H_0 : \mu = 40$ cm/s v tom zmysle, že neexistuje žiadny prakticky pozorovateľný vplyv na výkon únikového systému posádky lietadla. Pre rozumne veľký rozsah výberu, bude skutočná hodnota $\mu = 40{,}5$ viesť k hodnote výberového priemeru $\bar{x}$, ktorý je blízko hodnoty 40,5 cm/s, a nechceme, aby táto hodnota $\bar{x}$ z náhodného výberu viedla k zamietnutie H_0. V nasledujúcej ukážke sú pre rôzne rozsahy výberov n a $\bar{x} = 40{,}5$ cm/s uvedené

P-hodnoty pre testovanie $H_0 : \mu = 40$ a silu testu pre $\alpha = 0,05$, pričom skutočná stredná hodnota je 40,5.

Rozsah výberu n	*P*-hodnota pre $\bar{x} = 40,5$	Sila testu pre $\alpha = 0,05$ pre $\mu = 40,5$
10	0,3797	0,15
25	0,1645	0,35
50	0,0495	0,60
100	0,0055	0,85
500	$5,26 \times 10^{-10}$	–
1000	0,0000000	–

Varovanie. Pri interpretácii výsledkov z testovania hypotéz buďte opatrný, keď rozsah výberu je veľký, pretože akákoľvek malá odchýlka od hypotetickej hodnoty μ_0 bude pravdepodobne detegovaná, aj keď rozdiel je malý alebo nemá žiadny praktický význam.

7.2.5 Testovanie pri veľkom rozsahu výberu

Odvodili sme postup testovanie hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ za predpokladu, že rozdelenie je normálne so známym rozptylom σ^2. Vo veľa praktických situáciách σ^2 nepoznáme. Okrem toho nemáme istotu, že základný súbor sa dá modelovať normálnym rozdelením. V týchto situáciách, keď n je veľké ($n > 40$), v testovacej procedúre môže byť σ nahradená hodnotou výberovej smerodajnej odchýlky s. Vďaka centrálnej limitnej vete môžeme použiť test pre strednú hodnotu so známym rozptylom. Testovacia štatistika

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \tag{7.18}$$

má približne normálne rozdelenia. V prípade normálneho základného súboru s neznámym σ^2 a malým n použijeme exaktný postup s t rozdelením, ktorý prezentujeme nasledujúcej časti.

7.3 Testy o strednej hodnote normálneho rozdelenia, rozptyl neznámy

7.3.1 Testovanie hypotézy o strednej hodnote

Predpokladajme, že namerané údaje $x_1, x_2, ..., x_n$ sú realizácie náhodného výberu $X_1, X_2, ..., X_n$ zo základného súboru s normálnym rozdelením s neznámou strednou hodnotou μ a s neznámym rozptylom σ^2. Dá sa ukázať, že náhodná premenná

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

má t rozdelenie s $n-1$ stupňami voľnosti. Pripomíname, že toto rozdelenie sme použili v kapitole 5.3 pri konštruovaní intervalov spoľahlivosti pre parameter μ. Chceme testovať hypotézy

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 .$$

Použijeme testovaciu štatistiku

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \tag{7.19}$$

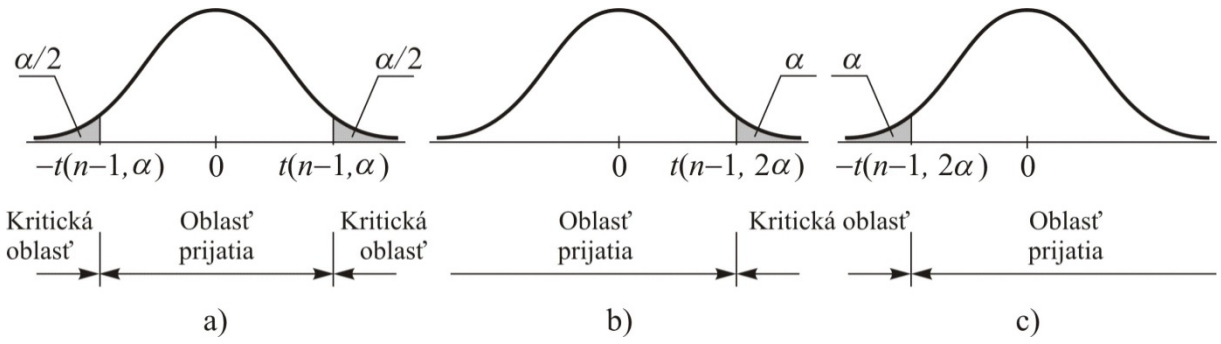
Keď nulová hypotéza je správna, T_0 má t rozdelenie s $n-1$ stupňami voľnosti. V tomto prípade použijeme kritické hodnoty t rozdelenia na ohraničenie kritickej oblasti. Potom nulovú hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0$ zamietneme, keď

$$t_0 < -t(n-1,\alpha) \quad \text{alebo} \quad t_0 > t(n-1,\alpha)$$

kde t_0 pozorovaná hodnota testovacej štatistiky T_0. Uvádzame súhrn testovacích postupov pre dvojstranné a jednostranné alternatívne hypotézy:

Tabuľka 7.3. *Testy o strednej hodnote; rozptyl je neznámy*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$t_0 < -t(n-1,\alpha)$ alebo $t_0 > t(n-1,\alpha)$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$		$t_0 < -t(n-1,2\alpha)$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$		$t_0 > t(n-1,2\alpha)$



Obrázok 7.8. *Rozdelenie T_0, keď $H_0 : \mu = \mu_0$ je správna, a kritické oblasti pre alternatívy a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$, b) $H_1 : \mu > \mu_0$ a c) $H_1 : \mu < \mu_0$*

Príklad 7.6

Stredná hodnota obsahu Ni v určitom druhu ocele bola pred zmenou technológie 4,953 %. Po zmene technológie bolo vybraných 12 vzoriek ocele a z nich sa vypočítala hodnota výberového priemer 5,096 % a výberová smerodajná odchýlka 0,953 % obsahu Ni. Zistíme, či zmena technológie má vplyv na priemerný obsah Ni v oceli. Rozhodnutie urobíme na úrovni významnosti 0,05.

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3. Zo zadania vieme, že $n = 12$, $\bar{x} = 5{,}096$, $s = 0{,}953$, $\mu_0 = 4{,}953$ a $t(11; 0{,}05) = 2{,}201$.

1. Parameter záujmu je μ, stredná hodnota obsahu Ni.
2. $H_0 : \mu = 4{,}953\,\%$.
3. $H_1 : \mu \neq 4{,}953\,\%$.
4. $\alpha = 0{,}05$.
5. Testovacia štatistika je
$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$
6. H_0 zamietame, keď $t_0 < -2{,}201$ alebo $t_0 > 2{,}201$.
7. Počítajme: Pretože $\bar{x} = 5{,}096$ a $s = 0{,}953$,
$$t_0 = \frac{5{,}096 - 4{,}953}{0{,}953/\sqrt{12}} = \frac{0{,}143}{0{,}2751} = 0{,}5198.$$
8. Záver: Pretože $t_0 = 0{,}5198 > -2{,}201$ a $t_0 = 0{,}5198 < 2{,}201$, $H_0 : \mu = 4{,}953\,\%$ nezamietame na úrovni významnosti 0,05. Potom na základe 12 meraní tvrdíme, že stredná hodnota obsahu Ni sa po zmene technológie nezmenila.

7.3.2 *P* hodnota pre *t*-test

Na výpočet *P*-hodnoty pre *t*-test sa použijú podobné vzťahom uvedeným v (7.10) s tým rozdielom, že

$$P = \begin{cases} 2[1 - F_T(|t_0|)] & \text{pre dvojstranný test} \\ 1 - F_T(t_0) & \text{pre horný jednostranný test} \\ F_T(t_0) & \text{pre dolný jednostranný test} \end{cases} \tag{7.20}$$

Na ilustráciu vzťahov (7.20) použijeme príklad 7.6. Vypočítaná hodnota testovacej štatistiky je $t_0 = 0{,}5198$ a pretože alternatívna hypotéza je dvojstranná, *P*-hodnota je

$$P = 2[1 - F_T(|t_0|)] = 2[1 - F_T(0{,}5198)] =$$
$$= 2[1 - 0{,}693249)] = 0{,}613502$$

Pretože $P = 0{,}613502 > \alpha = 0{,}05$, $H_0 : \mu = 4{,}953\,\%$ nezamietame.

7.3.3 Voľba rozsahu výberu

Pravdepodobnosť chyby 2. druhu pre test o strednej hodnote normálneho rozdelenia s neznámym rozptylom závisí od rozdelenia testovacej štatistiky (7.19), keď nulová hypotéza $H_0 : \mu = \mu_0$ je nesprávna. Keď skutočná stredná hodnota je $\mu = \mu_0 + \delta$, rozdelenie T_0 je **necentrálne *t* rozdelenie** s $n-1$ stupňami voľnosti a parametrom necentrality $\delta\sqrt{n}/\sigma$ (pozri Hátle, J., Likeš, J. 1972). Všimnime si, že keď $\delta = 0$, necentrálne *t* rozdelenie sa redukuje na **centrálne *t* rozdelenie.** Preto pravdepodobnosť chyby 2. druhu pre dvojstrannú alternatívu je

$$\beta = P(-t(n-1,\alpha) \le T_0 \le t(n-1,\alpha) \,|\, \delta \ne 0) =$$
$$= P\left[-t(n-1,\alpha) \le T_0' \le t(n-1,\alpha)\right]$$

kde T_0' je necentrálna *t* rozdelená náhodná premenná. Výpočet β sa musí robiť numericky.

Krivky OC (Príloha) zobrazujú $\beta = P(H_0$ nezamietam$\,|\,H_0$ nie je správna) ako funkciu *d* (pre *t*-test), rôznych rozsahov výberu *n* a dvoch úrovní významnosti $\alpha = 0{,}01$ a $\alpha = 0{,}05$. Parameter *d* je definovaný ako

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\hat{\sigma}} = \frac{|\delta|}{s} \tag{7.21}$$

kde $\hat{\sigma} = s$ je hodnota výberovej smerodajnej odchýlky.

Príklad 7.7

Zoberme do úvahy strednú hodnotu obsahu Ni v určitom druhu ocele (príklad 7.6). Predpokladajme, že sa zaujímame o pravdepodobnosť chyby 2. druhu, keď skutočná stredná hodnota obsahu Ni je $\mu = 5{,}4295\,\%$. Na nájdenie β môžeme použiť krivky OC.

Všimnime si, že $\delta = 5{,}4295 - 4{,}953 = 0{,}4765$, $n = 12$, $s = 0{,}953$ a $\alpha = 0{,}05$. Keď použijeme vzťah (7.21) dostaneme

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\hat{\sigma}} = \frac{|\delta|}{s} = \frac{0{,}4765}{0{,}953} = 0{,}5$$

a v prílohe nájdeme príslušnú krivku OC−e. Pre $d = 0{,}5$ a $n = 12$ nájdeme na krivke OC hodnota $\beta = 0{,}64$. To znamená, že keď skutočná stredná hodnota obsahu Ni je $\mu = 5{,}4295\,\%$, potom existuje približne 64 % šanca, že táto hodnota nebude detegovaná pri teste s rozsahom výberu $n = 12$.

Príklad 7.8

Opäť zoberme do úvahy strednú hodnotu obsahu Ni v určitom druhu ocele (príklad 7.6). Predpokladajme, že by sme radi navrhli test, ktorý by detegoval rozdiel o veľkosti 0,953 % medzi skutočnou strednou hodnotou obsahu Ni a hypotetickou hodnotou 4,953 % s vysokou pravdepodobnosťou rovnajúcou sa 0,90.

Na nájdenie rozsahu výberu pre tento test možno použiť aj krivky OC. Pretože $d = |\mu - \mu_0| / \sigma = 0{,}953 / 0{,}953 = 1$, $\alpha = 0{,}05$ a $\beta = 0{,}10$, požadovanú hodnotu rozsahu výberu $n = 14$ sme našli z krivky OC−e.

7.4 Testy hypotéz o rozptyle normálneho rozdelenia

Niekedy je potrebné testovať rozptyl základného súboru. Keď je základný súbor modelovaný normálnym rozdelením, testy a intervaly opísané v tejto kapitole sú aplikovateľné.

7.4.1 Testovanie hypotézy o rozptyle

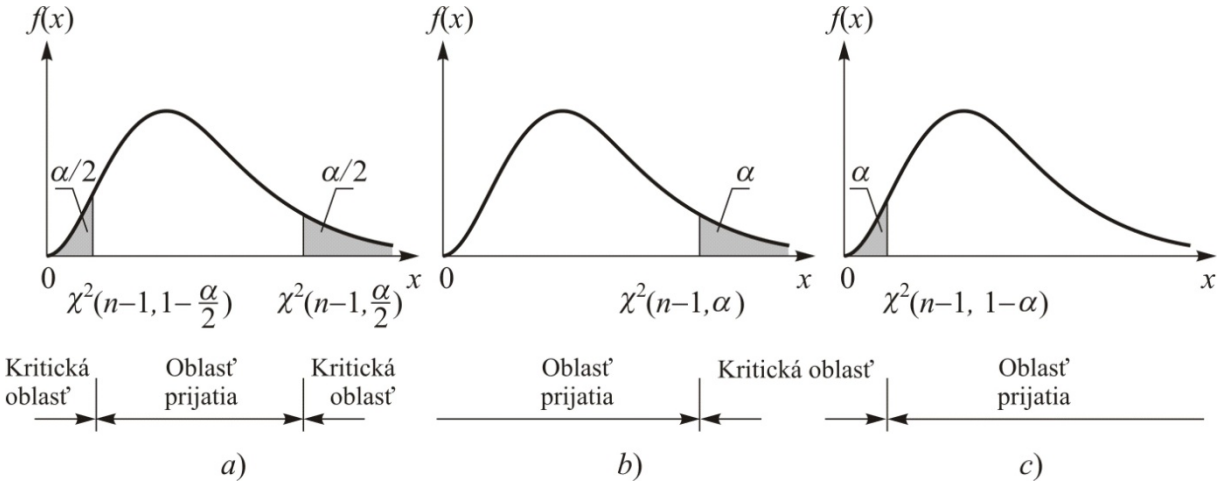
Predpokladajme, že chceme testovať hypotézu, že rozptyl normálneho rozdelenia sa rovná zadanej hodnote, t. j. $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Nech $X_1, X_2, ..., X_n$ je náhodný výber o rozsahu *n* pozorovaní zo základného súboru. Na testovanie

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \tag{7.22}$$

použijeme **testovaciu štatistiku**

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \tag{7.23}$$

Keď nulová hypotéza $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ je správna, testovacia štatistika X_0^2 definovaná v (7.23) má chí-kvadrát rozdelenie so stupňami voľnosti $n - 1$.



Obrázok 7.9. *Rozdelenie* X_0^2, *keď* $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *je správna, a kritické oblasti pre alternatívy*
a) $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, *b)* $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ *a c)* $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

Potom vypočítame χ_0^2, hodnotu testovacej štatistiky X_0^2, a nulovú hypotézu $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ zamietneme, keď

$$\chi_0^2 < \chi^2(n-1, 1-\alpha/2) \quad \text{alebo} \quad \chi_0^2 > \chi^2(n-1, \alpha/2)$$

kde $\chi^2(n-1, 1-\alpha/2)$ a $\chi^2(n-1, \alpha/2)$ sú kritické hodnoty chi-kvadrát rozdelenia s $n-1$ stupňami voľnosti. Na obrázku 7.9 sú kritické oblasti.

V tabuľke 7.4 uvádzame súhrn testovacích postupov pre dvojstranné a jednostranné alternatívne hypotézy:

Tabuľka 7.4. *Testy o rozptyl normálneho rozdelenia*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi_0^2 < \chi^2(n-1, 1-\alpha/2)$ alebo $\chi_0^2 > \chi^2(n-1, \alpha/2)$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi_0^2 < \chi^2(n-1, 1-\alpha)$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi_0^2 > \chi^2(n-1, \alpha)$

Príklad 7.9

Automatický plniaci stroj sa používa na napĺňanie fliaš kvapalným čistiacim prostriedkom. Z hodnôt náhodného výberu o rozsahu 20 fliaš sme získali hodnotu výberového rozptylu plniaceho objemu $s^2 = 0,45\,\text{ml}^2$ Keď rozptyl plniaceho objemu prekročí hodnotu 0,4 ml^2, nastane nedopĺňanie alebo prepĺňanie fliaš. Potvrdzujú výberové dáta, že výrobca má problém s nedopĺňaním alebo prepĺňaním fliaš? Použijeme $\alpha = 0,05$ predpokladáme, že plniaci objem má normálne rozdelenie.

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Parameter záujmu je rozptyl základného súboru σ^2.

   $H_0 : \sigma^2 = 0,4\,\%$.

2. $H_1 : \sigma^2 > 0,4\,\%$.

3. $\alpha = 0,05$.

4. Testovacia štatistika je

   $$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

5. H_0 zamietame, keď $\chi_0^2 > \chi^2(19;0,05) = 30,14$.

6. Počítajme:

$$\chi_0^2 = \frac{19 \times 0,45}{0,4} = 21,375$$

7. Záver: Pretože $\chi_0^2 = 29,07 < \chi_0^2(19;0,05) = 30,14$, nulovú hypotézu nezamietame na úrovni významnosti 0,05. Potom na základe 20 pozorovaní tvrdíme, že neexistuje žiadny silný dôkaz, že rozptyl plniaceho objemu prekračuje hodnotu 0,4 ml^2. *P*-hodnota pre hodnotu testovacej štatistiky χ_0^2 je $P = 0,064892$, čo je väčšie ako $\alpha = 0,05$.

7.4.2 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu

Krivky OC pre chí-kvadrát testy sú uvedené v prílohe od OC−i až do OC−n pre $\alpha = 0,05$ a $\alpha = 0,01$. Pre dvojstrannú alternatívu hypotézu krivky OC−i a OC−j zobrazujú β ako funkciu λ (pre chí-kvadrát test), rôznych rozsahov výberu *n* a dvoch úrovní významnosti $\alpha = 0,01$ a $\alpha = 0,05$. Parameter λ je definovaný takto

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0} \tag{7.24}$$

kde σ je skutočná hodnota smerodajnej odchýlky a σ_0 je hypotetická smerodajná odchýlka. Krivky OC−k a OC−l pre jednostrannú alternatívu $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ a krivky OC−m a OC−n sú pre alternatívu $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$. Pri použití týchto kriviek OC je σ hodnota smerodajnej odchýlky, ktorú chceme detegovať.

Krivky OC možno použiť aj na **návrh** testu, t. j. určiť rozsah výberu, ktorý je potrebný na detegovanie konkrétnej hodnoty σ, ktorá sa líši od hypotetickej hodnoty σ_0.

Príklad 7.10

Zoberme do úvahy problém plnenie fliaš (príklad 7.9). Keď rozptyl plniaceho procesu prekročí hodnotu 0,4 ml^2, príliš veľa fliaš bude nedoplnených. Teda hypotetická hodnota smerodajnej odchýlky je $\sigma_0 = 0,632$. Keď skutočná smerodajná odchýlka plniaceho procesu prekročí túto hodnotu o 25 %, chceli by sme to odhaliť s pravdepodobnosťou najmenej 0,8. Je rozsah výberu 20 adekvátny?

Na riešenie problému treba vypočítať

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{0,790}{0,632} = 1,25$$

Toto je horizontálna súradnica na krivke OC−k. Pre $n = 20$ a $\lambda = 1,25$, nájdeme na tejto krivke hodnotu $\beta \approx 0,6$. Preto je tu len asi 40% šanca, že nulová hypotéza bude zamietnutá v prípade, keď skutočná smerodajná odchýlka je naozaj $\sigma = 0,790$ ml.

Na zníženie hodnoty β je potrebný väčší rozsah výberu. Vieme, že $\lambda = 1,25$ a zo zadania poznáme $\beta = 0,20$, potom z krivky operatívnej charakteristiky (OC−k) zistíme, že po-

trebný rozsah výberu sa približne rovná $n = 75$. Preto, ak chceme test vykonať ako je požadované vyššie, musí byť rozsah výberu aspoň 75 fliaš.

7.5 Testy hypotéz o podiele jednotiek v základnom súbore s danou vlastnosťou

Niekedy je potrebné testovať hypotézu o podiele jednotiek základného súboru, ktoré majú sledovanú vlastnosť. Napríklad predpokladajme, že náhodný výber o rozsahu *n* sa realizoval z veľkého (možno nekonečného) základného súboru a $X(\le n)$ pozorovaní vo výbere má danú vlastnosť. Potom $\hat{P} = X / n$ je bodový odhad podielu jednotiek v základnom súbore *p*, ktoré majú danú vlastnosť. Všimnime si, že *n* a *p* sú parametre binomického rozdelenia. Dá sa dokázať, že výberové rozdelenie $\hat{P}$ je približne normálne so strednou hodnotou *p* a rozptylom $p(1-p)/n$, keď *p* nie je blízko 0 alebo 1 a *n* je pomerne veľké. Presnejšie pre použitie aproximácie sa požaduje, aby $np(1-p) > 9$. V tejto časti použijeme normálnu aproximáciu.

7.5.1 Testovanie hypotéz o podiele z veľkého výberu

Veľa inžinierskych problémov vedie k náhodnej premennej s binomickým rozdelením. Napríklad zoberme do úvahy výrobný proces, ktorý vyrába jednotky klasifikované ako prijateľné alebo defektné. Výskyt defektných sa zvyčajne modeluje binomickým rozdelením, kde binomický parameter *p* reprezentuje podiel vyrobených defektných jednotiek. Veľa inžinierskych rozhodovacích problémov zahŕňa testovanie hypotéz o parameter *p*.

Testujeme

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : p \neq p_0 \tag{7.25}$$

Test je založený na aproximácii binomického rozdelenia normálnym rozdelením. Nech *X* je počet pozorovaní v náhodnom výbere o rozsahu *n*, ktoré patria do triedy súvisiacej s parametrom *p*. Keď $H_0 : p = p_0$ je správna, potom približne platí, že $X \sim N\left[np_0, np_0(1-p_0)\right]$. Pri testovaní $H_0 : p = p_0$ vypočítame hodnotu **testovacej štatistiky**

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \tag{7.26}$$

a nulovú hypotézu $H_0 : p = p_0$ zamietneme, keď

$$z_0 > k_\alpha \quad \text{alebo} \quad z_0 < -k_\alpha$$

V tabuľke 7.5 sú uvedené aj jednostranné testy.

Príklad 7.11

Výrobca polovodičov vyrába radiče používané v aplikáciách automobilových motorov. Zákazník požaduje, aby podiel defektných v kritickom výrobnom kroku nebol vyšší ako 0,04. Výrobca by mal preukázať spôsobilosť procesu na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$. Výrobca polovodičov realizuje náhodný výber o rozsahu 250 zariadení a zistí, že štyri z nich sú defektné. Môže výrobca preukázať odberateľovi, že proces je spôsobilý?

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3. Parameter záujmu je podiel defektných v procese *p*.

1. $H_0 : p = 0,04$.
2. $H_1 : p < 0,04$.
3. $\alpha = 0,05$.
4. Hodnota testovacej štatistiky je

$$z_0 = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

kde $x = 4$, $n = 250$ a $p_0 = 0,04$.

5. $H_0 : p = 0,04$ zamietame, keď $z_0 < k_{0,1} = -1,645$.
6. Počítajme: Hodnota testovacej štatistiky je

$$z_0 = \frac{4 - 250 \times 0,04}{\sqrt{250 \times 0,04 \times 0,96}} = \frac{-6}{\sqrt{9,6}} = -1,94$$

7. Záver:

Pretože $z_0 = -1,94 < k_{0,1} = -1,645$, H_0 zamietame na úrovni významnosti 0,05 a tvrdíme, že podiel defektných v procese *p* je menší ako 0,04. *P*-hodnota pre hodnotu testovacej štatistiky z_0 je $P = 0,0270027$, čo je menšie ako $\alpha = 0,05$. Z toho usudzujeme, že proces je spôsobilý.

Tabuľka 7.5. *Testy o parametri p z veľkého výberu*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$	$z_0 < -k_\alpha$ alebo $z_0 > k_\alpha$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$		$z_0 < -k_{2\alpha}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$		$z_0 > k_{2\alpha}$

S iným tvarom testovacej štatistiky Z_0 zo vzťahu (7.26) sa občas stretávame. Všimnime si, že keď X je počet pozorovaní v náhodnom výbere o rozsahu n, ktoré patria do triedy záujmu, potom $\hat{P} = X / n$ je podiel jednotiek vo výbere, ktoré tiež patria do tejto triedy. Iný tvar testovacej štatistiky Z_0 je

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{X/n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \tag{7.27}$$

Testovacia štatistika vo vzťahu (7.27) poskytuje podiel jednotiek vo výbere, kým testovacia štatistika vo vzťahu (7.26) počet jednotiek vo výbere, ktoré patria do triedy záujmu.

7.5.2 Testovanie hypotéz o podiele z malého výberu

Testy o parametri p, keď rozsah výberu je malý, sú založené na binomickom rozdelení, nie na normálnej aproximácii binomického rozdelenia. Pre ilustráciu predpokladajme, že chceme testovať

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : p < p_0$$

Nech X je binomická náhodná premenná. Použijeme dolnú časť oblasti zamietnutia. To znamená, že by sme mali H_0 zamietnuť, ak $x \le c$, kde c je kritická hodnota. Keď H_0 je správna, X má binomické rozdelenie s parametrami n a p_0. Teda

$$P(\text{Chyby 1. druhu}) = P(H_0 \text{ zamiet} \,|\, H_0 \text{ správna }) =$$

$$= P[X \le c \,|\, X \sim Bi(n, p_0)] = B(c; n, p_0)$$

kde $B(c; n, p)$ je kumulatívne binomické rozdelenie (hodnota distribučnej funkcie s parametrami n a p v bode c). Na nájdenie kritickej hodnoty pre dané α musíme vybrať najväčšie c spĺňajúce $B(c; n_1, p_0) \le \alpha$. Výpočet chyby 2. druhu je jednoduchý. Nech p_1 je alternatívne hodnota p taká, že $p_1 < p_0$. Ak $p = p_1$, tak $X \sim Bi(n, p_1)$. Preto

$$\beta = P(\text{Chyby 2. druhu} \,|\, p = p_1) = P[X > c \,|\, X \sim Bi(n, p_1)) =$$

$$= 1 - B(c; n, p_1)$$

kde $B(c; n, p_1)$ je kumulatívne binomické rozdelenie.

Testovací postup pre jednostrannú alternatívu $H_1 : p > p_0$ a obojstrannú alternatívu $H_1 : p \ne p_0$ sa konštruujú podobným spôsobom. Pre $H_1 : p > p_0$ má kritická oblasť tvar $x \ge c$, kde c je najmenšia hodnota spĺňajúca vzťah $1 - B(c-1; n, p_1) \le \alpha$. Pre dvojstranný prípad kritická oblasť pozostáva z obidvoch hodnôt (malej aj veľkej). Pretože c je celé číslo, nie vždy možno definovať kritickú oblasť tak, aby spĺňala presne požadovanú hodnotu α.

Na ilustráciu postupu predpokladajme, že chceme testovať $H_0 : p = 0{,}05$ oproti $H_1 : p < 0{,}05$. Predpokladajme, že rozsah výberu je 100 a $\alpha = 0{,}05$. Potom z distribučnej funkcie s $n = 100$ a $p = 0{,}05$ zistíme, že $B(0;100;0{,}05) = 0{,}0059$, $B(1;100;0{,}05) = 0{,}0371$ a $B(2;100;0{,}05) = 0{,}1183$ (Minitab vygeneruje kumulatívne binomické pravdepodobnosti). Pretože $B(1;100;0{,}05) = 0{,}0371 \le 0{,}05$ a $B(2;100;0{,}05) = 0{,}1183 > 0{,}05$, vyberieme kritickú hodnotu $c = 1$. Teda nulovú hypotézu zamietneme, ak $x \le 1$. Skutočná úroveň významnosti tohto testu je $\alpha = 0{,}0371$.

Teraz chceme vypočítať silu testu $1 - \beta$ pre hodnotu $p_1 = 0{,}03$. Najprv vypočítame β.

$$\beta = 1 - B(c; n, p_1) = 1 - B(1;100;0{,}03) = 1 - 0{,}1946 = 0{,}8054$$

Potom sila testu je

$$1 - \beta = 1 - 0{,}8054 = 0{,}1946 .$$

Toto je dosť malá sila testu, pretože p_1 sa nachádza blízko p_0.

7.5.3 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu

Odvodíme vzťah na približný výpočet pravdepodobnosti chyby 2. druhu β. Nech p je skutočná hodnota podielu jednotiek v základom súbore, ktoré patria do triedy záujmu. Pravdepodobnosť chyby 2. druhu β pre dvojstrannú alternatívu $H_1 : p \neq p_0$ je

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + k_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right) - \Phi\left(\frac{p_0 - p - k_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right) \tag{7.28}$$

Pre alternatívu $H_1 : p < p_0$,

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p - k_{2\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right) \tag{7.29}$$

a pre alternatívu $H_1 : p > p_0$,

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + k_{2\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right) \tag{7.30}$$

Nasledujúce vzťahy poskytujú výpočet približného rozsahu výberu *n*, pre dané hodnoty α a β.

$$n = \left[\frac{k_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)/n} + k_{2\beta} \sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right]^2 \tag{7.31}$$

pre jednostrannú alternatívu

$$n = \left[\frac{k_{2\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)/n} + k_{2\beta} \sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right]^2 \tag{7.32}$$

Príklad 7.12

Zoberme do úvahy výrobcu polovodičov (príklad 7.11). Predpokladajme, že skutočný podiel defektných v procese je $p = 0,02$. Aká je pravdepodobnosť chyby 2. druhu β pre test o spôsobilosti procesu, pri ktorom $n = 250$ a $\alpha = 0,05$?

Pravdepodobnosť β vypočítame použitím vzťahu (7.29) takto:

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{0,04 - 0,02 - 1,645\sqrt{0,04 \cdot 0,96 / 250}}{\sqrt{0,02 \cdot 0,07 / 250}} \right) = 1 - \Phi(-0,04375) = 0,517451$$

Teda pravdepodobnosť, že výrobca polovodičov nesprávne tvrdí, že proces je spôsobilí, keď skutočný podiel defektných v procese je $p = 0,02$ (2 %), je približne 0,52. To znamená, že sila testu $H_0 : p = 0,04$ oproti alternatíve $H_1 : p < 0,04$ je približne 0,38. Hodnota β sa zdá pomerne veľká (alebo sila malá), hoci rozdiel medzi $p = 0,04$ a $p = 0,02$ je pomerne malý a rozsah výberu $n = 250$ nie je nijak zvlášť veľký.

Predpokladajme, že výrobca polovodičov je ochotný akceptovať $\beta = 0,10$, keď skutočná hodnota podielu defektných jednotiek v procese je $p = 0,02$. Keď výrobca naďalej používa $\alpha = 0,05$, aký veľký rozsah výberu je potrebný?

Požadovaný rozsah výberu môžeme vypočítať podľa vzťahu (7.32). Pretože $\alpha = 0,05$; $\beta = 0,10$; $p = 0,02$; $p_0 = 0,04$; $k_{2\alpha} = k_{0,1} = 1,645$ a $k_{2\beta} = k_{0,2} = 1,282$, dostaneme:

$$n = \left[\frac{1,645\sqrt{0,04 \cdot 0,96} + 1,282\sqrt{0,02 \cdot 0,98}}{0,02 - 0,04} \right]^2 = 629,59 \approx 630$$

Všimnime si, že $n = 630$ je veľmi veľký rozsah výberu. My sa však snažíme odhaliť pomerne malú odchýlku od hypotetickej hodnoty $p_0 = 0,04$.

7.6 Testy dobrej zhody

V predošlej kapitole sme sa venovali testovaniu za predpokladu, že rozdelenie základného súboru bolo známe. Teraz sme v situácii, že rozdelenie základného súboru nepoznáme a chceme testovať hypotézu, že konkrétne rozdelenie je postačujúce ako pravdepodobnostný model základného súboru.

7.6.1 Pearsonov chí−kvadrát test

Pri týchto testoch sa vychádza z triedneho delenia náhodného výberu rozsahu n. Ako miera nesúladu medzi pozorovanými triednymi početnosťami a očakávanými (t. j. teoretickými) triednymi početnosťami sa berie testovacia štatistika

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \tag{7.33}$$

ktorá má rozdelenie chí-kvadrát s $r-s-1$ stupňami voľnosti, t. j. $X_0^2 \sim \chi^2(r-s-1)$.

Vo vzťahu (7.33) znamená r počet triednych intervalov, n_i je absolútna triedna početnosť *i*-tého intervalu, s je počet parametrov hypotetického rozdelenia v nulovej hypotéze a np_i je očakávaná triedna početnosť, pričom $p_i = P(t_{i-1} < X \le t_i \,|\, H_0$ je správna).

Tabuľka 7.6. *Tabuľka testu dobrej zhody*

Triedne intervaly i	Pozorovaná početnosť n_i	Pravdepodobnosť p_i	Očakávaná početnosť np_i	$p_i - np_i$	$\frac{(p_i - np_i)^2}{np_i}$
1					
2					
⋮					
r					

Keď očakávaná početnosť je veľmi malá, hodnota X_0^2 môže byť neoprávnene veľká v dôsledku malého rozdielu medzi pozorovanou početnosťou a očakávanou početnosťou. Hoci neexistuje dohoda o hodnote minimálnej očakávanej početnosti, hodnoty 3, 4 alebo 5 sú vo veľkej miere používané ako minimálne. Keď očakávaná početnosť je menšia ako 3, aby sa vyhlo tomuto nežiaducemu prípadu, zodpovedajúci triedny interval sa kombinuje so susediacim triednym intervalom a počet triednych intervalov r sa zmenší o jeden.

Príklad 7.13 Poissonovo rozdelenie

Predpokladáme, že počet chýb plošných spojov má Poissonovo rozdelenie. Realizoval sa náhodný výber rozsahu 60 dosiek s plošnými spojmi. Pozorovaný počet chýb je tento.

Počet chýb X	0	1	2	3
Pozorovaná početnosť	32	15	9	4

Stredná hodnota λ predpokladaného Poissonovho rozdelenia je neznáma. Odhadneme ju z výberových dát takto:

$$\hat{\lambda} = \frac{0 \times 32 + 1 \times 15 + 2 \times 9 + 3 \times 4}{60} = 0,75$$

Z Poissonovho rozdelenia s parametrom 0,75 môžeme vypočítať hypotetickú pravdepodobnosť p_i pre *i*-tý triedny interval takto:

$$\hat{p}_1 = P(X = 0) = \frac{e^{-0,75}(0,75)^0}{0!} = 0,472367 \approx 0,472$$

$$\hat{p}_2 = P(X=1) = \frac{e^{-0,75}(0,75)^1}{1!} = 0,354275 \approx 0,354$$

$$\hat{p}_3 = P(X=2) = \frac{e^{-0,75}(0,75)^2}{2!} = 0,132853 \approx 0,133$$

$$\hat{p}_4 = P(X=3) = \frac{e^{-0,75}(0,75)^3}{3!} = 0,040505 \approx 0,041$$

Očakávané početnosti np_i vypočítame násobením rozsahu výberu $n = 60$ pravdepodobnosťou p_i:

Počet chýb	p_i	np_i
0	0,472	28,32
1	0,354	21,24
2	0,133	7,98
3	0,041	2,46

Pretože očakávaná početnosť v poslednej bunke je menšia ako 3, zlúčime posledná dva riadky:

Počet chýb	n_i	p_i	np_i
0	32	0,472	28,32
1	15	0,354	21,24
2 a viac	13	0,174	10,44

Testovacia štatistika chí-kvadrát vo vzťahu (7.33) bude mať $r - s - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$ stupňov voľnosti, pretože stredná hodnota Poissonovho rozdelenia bola odhadnutá z dát.

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Predmet záujmu je rozdelenie počtu chýb na doskách plošných spojov.
2. H_0 : Rozdelenie počtu chýb je Poissonovo.
3. H_1 : Rozdelenie počtu chýb nie je Poissonovo.
4. $\alpha = 0,05$.
5. Testovacia štatistika je

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}$$

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(n_i - n\hat{p}_i\right)^2}{np_i} = 0,7488$$

6. H_0 zamietame, keď $\chi_0^2 > \chi^2(1;0,05) = 3,84$

7. Počítajme: Hodnota testovacej štatistiky je

$$\chi_0^2 = \frac{(32-28,32)^2}{28,32} + \frac{(15-21,24)^2}{21,24} + \frac{(13-10,44)^2}{10,44} = 2,94$$

8. Záver: Pretože $\chi_0^2 = 2,94 < \chi^2(1;0,05) = 3,84$, H_0 nezamietame na úrovni významnosti 0,05 a tvrdíme, že rozdelenie počtu chýb na doskách plošných spojov je Poissonovo. *P*-hodnota pre hodnotu testovacej štatistiky $\chi_0^2 = 2,94$ je $P = 0,0864071$, čo je menšie ako $\alpha = 0,05$.

Príklad 7.14 Spojité rozdelenie

Výrobný inžinier testujúci napájanie použité v notebooku na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$ chce zistiť, či výstupné napätie je dostatočne opísané pomocou normálneho rozdelenia. Výberové hodnoty odhadov strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky, $\bar{x} = 5,04\,\text{V}$ a $s = 0,08\,\text{V}$, sa získali z náhodného výberu 100 jednotiek.

Bežnou praxou, ktorá sa používa pri konštruovaní triednych intervalov v tabuľke početností pre chí-kvadrát test dobrej zhody, je vybrať hranice intervalov tak, aby očakávané početnosti np_i v triednych intervaloch boli rovnaké. Keď použijeme túto metódu, hranice triednych intervalov $t_0, t_1, \ldots, t_r$ vyberieme tak, aby všetky pravdepodobnosti

$$p_i = P(t_{i-1} \le X \le t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx$$

sa rovnali. Predpokladajme, že sme sa rozhodli použiť $r = 8$ triednych intervalov. Pre normované normálne rozdelenie máme intervaly $[0;0,32]$, $[0,32;0,675]$, $[0,675;1,15]$, $[1,15;\infty)$ a „zrkadlové obrazy“ týchto intervalov na opačnej strane od nuly. Pre každý interval platí, že $p_i = 1/8 = 0,125$, preto očakávané početnosti sú $np_i = 100 \times 0,125 = 12,5$. Hranice triednych intervalov vypočítame takto:

prvý	$(-\infty, \bar{x} - 1,15s) = (-\infty;\ 5,04 - 1,15 \times 0,08) = (-\infty;\ 4,948)$;
druhý	$[5,04 - 1,15 \times 0,08;\ 5,04 - 0,675 \times 0,08) = [4,948;\ 4,986)$;
tretí	$[5,04 - 0,675 \times 0,08;\ 5,04 - 0,32 \times 0,08) = [4,986;\ 5,014)$;
štvrtý	$[5,04 - 0,32 \times 0,08;\ 5,04 - 0,00 \times 0,08) = [5,014;\ 5,040)$;
piaty	$[5,04 + 0,00 \times 0,08;\ 5,04 + 0,32 \times 0,08) = [5,040;\ 5,066)$;
šiesty	$[5,04 + 0,32 \times 0,08;\ 5,04 + 0,675 \times 0,08) = [5,066;\ 5,094)$;
siedmy	$[5,04 + 0,675 \times 0,08;\ 5,04 + 1,15 \times 0,08) = [5,094;\ 5,132)$;
ôsmy	$[5,04 + 1,15 \times 0,08;\ \infty) = [5,132;\ \infty)$;

Zistené a očakávané početností zaznamenáme do tabuľky (tabuľka 7.7).

Tabuľka 7.7. *Tabuľka zistených a očakávaných početností*

Triedny interval	Pozorovaná početnosť n_i	Očakávaná početnosť np_i
$x < 4,984$	12	12,5
$4,948 \le x < 4,986$	14	12,5
$4,986 \le x < 5,014$	12	12,5
$5,014 \le x < 5,040$	13	12,5
$5,040 \le x < 5,066$	12	12,5
$5,066 \le x < 5,094$	11	12,5
$5,094 \le x < 5,132$	12	12,5
$5,132 \le x$	14	12,5
Súčet	100	100

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Predmet záujmu je tvar rozdelenia napájacieho napätie
2. H_0 : Rozdelenie napájacieho napätie je normálne
3. H_1 : Rozdelenie napájacieho napätie nie je normálne
4. $\alpha = 0,05$
5. Testovacia štatistika je

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}$$

6. Pretože sme odhadovali dva parametre, testovacia štatistika chí-kvadrát bude mať $r - s - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$ stupňov voľnosti.
   Preto H_0 zamietame, keď $\chi_0^2 > \chi^2(5;0,05) = 11,07.$
7. Počítajme: Hodnota testovacej štatistiky je

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i} =$$

$$= \frac{(12-12,5)^2}{12,5} + \frac{(14-12,5)^2}{12,5} + \cdots + \frac{(14-12,5)^2}{12,5} = 0,64$$

8. Záver: Pretože $\chi_0^2 = 0,64 < \chi^2(5;0,05) = 11,07$, H_0 nezamietame na úrovni významnosti 0,05 a tvrdíme, že rozdelenie napájacieho napätie je normálne. *P*-hodnota pre hodnotu chí-kvadrát testovacej štatistiky $\chi_0^2 = 0,64$ je $P = 0,986099$, čo je väčšie ako $\alpha = 0,05.$

7.6.2 Shapirov-Wilkov test normality

Pri rozsahu náhodného výberu $2 \le n \le 2000$ použijeme test podľa Shapira-Wilka. Tento test je vhodný iba pre jednotlivé namerané hodnoty (nie pre triedené údaje ako v Pearsonovom teste).

Majme namerané údaje $x_1, x_2, ..., x_n$, ktoré sú realizáciami náhodného výberu $X_1, X_2, ..., X_n$. Usporiadajme merania podľa veľkosti vzostupne a dostaneme $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$, čo sú realizácie usporiadaného náhodného výberu $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$.

Postup testovania hypotézy

krok 1: určenie **nulovej a alternatívnej hypotézy,** t. j. H_0 a H_1

$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$ oproti $H_1 : X \not\sim N(\mu, \sigma^2)$, kde μ, σ^2 sú neznáme.

krok 2: stanovenie **testovacej štatistiky**

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i(n)(X_{(n-i+1)} - X_{(i)}) \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

kde

- $a_i(n)$ sú príslušné koeficienty dané tabuľkou (pozri v prílohách);
- $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$;
- $m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pre } n \text{ párne,} \\ \frac{n\text{-}1}{2} & \text{pre } n \text{ nepárne} \end{cases}$.

krok 3: stanovenie **kritickej hodnoty** pre α

$W_\alpha(n)$ je tabuľková hodnota pre dané n a $\alpha = 0,01$ alebo $\alpha = 0,05$ (pozri v prílohách).

krok 4: určenie **výsledku testovania hypotézy**

Nulová hypotéza H_0 sa zamietne, ak

$$W \le W_\alpha(n)$$

Poznámka. V štatistických tabuľkách pre Shapirov-Wilkov test sú kritické hodnoty $W_\alpha(n)$ uvedené len pre rozsah súboru $n \in \{1,2,...,30\}$. V prípade väčšieho rozsahu súboru je potrebné kritické hodnoty $W_\alpha(n)$ určiť pomocou Statgraphics Centurion XV. Statgraphics Centurion XV poskytuje viacero testov normality dát, pričom výsledok testu hypotézy vyhodnocuje pomocou *P*–hodnoty.

7.7 Testy v kontingenčných tabuľkách

Mnohokrát *n* prvkov výberu zo základného súboru môžeme klasifikovať podľa dvoch rozdielnych kritérií, keď chceme vedieť, či dve metódy klasifikácie sú štatisticky nezávislé. Napríklad môžeme zobrať do úvahy základný súbor absolvovaných inžinierov *X* a môžeme chcieť zistiť, či nástupný plat *Y* je nezávislý od študijného odboru. Predpokladajme, že prvá metóda klasifikácie má *r* úrovní a druhá metóda má *c* úrovní. Teraz to zapíšeme formálne.

Majme dvojrozmernú náhodnú premennú (X,Y) takú, že *X* môže nadobúdať hodnoty $1,2,\ldots,r$ a *Y* hodnoty $1,2,\ldots,c$ $(r>1,\, c>1)$. Označme

$$p_{ij} = P(X=i, Y=j) \tag{7.34}$$

Ďalej označme

$$p_{i.} = P(X=i) = \sum_{j=1}^{c} p_{ij} \quad \text{a} \quad p_{.j} = P(Y=j) = \sum_{i=1}^{r} p_{ij} \tag{7.35}$$

Budeme predpokladať, že platí $p_{ij} > 0$ pre všetky dvojice (i, j).

Zoberme do úvahy náhodný výber o rozsahu *n* z rozdelenia s pravdepodobnosťami p_{ij}. Tento výber možno opísať multinomickým rozdelením o *rc* triedach tvorených dvojicami (i, j).

Nech n_{ij} je počet tých prípadov, keď súčasne nastalo $X=i$ a $Y=j$, t. z. pozorovaná početnosť *i*-tej úrovne prvej metódy klasifikácie a *j*-tej úrovne druhej metódy klasifikácie. Dáta sú uvedené v tabuľke, ktorú nazývame **kontingenčná tabuľka** $r \times c$ (pozri tabuľku 7.8).

Tabuľka 7.8. *Kontingenčná tabuľka* $r \times c$

Riadky; *X*	**Stĺpce; *Y***			
	1	2	…	*c*
1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1c}
2	n_{21}	n_{21}	…	n_{11}
…	…	…	…	…
r	n_{r1}	n_{r2}	…	n_{rc}

Testujeme nulovú hypotézu, že premenné *X* a *Y* sú nezávislé, čo v našom prípade znamená, že dve metódy klasifikácie sú nezávislé. Nulovú hypotézu nezávislosti môžeme zapísať v tvare

$$H_0 : X \text{ a } Y \text{ sú nezávislé}$$

alebo v tvare

$$H_0 : p_{ij} = p_{i.} p_{.j}, \;\; i=1,2,\ldots,r; \;\; j=1,2,\ldots,c. \tag{7.36}$$

Keď zamietneme nulovú hypotézu, tvrdíme, že medzi premennými X a Y, t. j dvoma metódami klasifikácie, existuje interakcia. Exaktné postupy testovania je ťažké získať, avšak pre veľké n sa dá použiť približná testovacia štatistika.

Nech p_{ij} je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný prvok sa nachádza v ij-tej bunke, za predpokladu, že dve klasifikácie sú nezávislé. Potom $p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$, kde $p_{i.}$ je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný prvok je z i-tého riadku, a $p_{.j}$ je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný prvok je z j-tého stĺpca. Za predpokladu nezávislosti odhady $p_{i.}$ a $p_{.j}$ sú

$$\hat{p}_{i.} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{c} n_{ij} \quad \text{a} \quad \hat{p}_{.j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_{ij} \tag{7.37}$$

Teda očakávaná početnosť v každej bunke je

$$n\hat{p}_{ij} = n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j} = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{c} n_{ij} \sum_{i=1}^{r} n_{ij}\right) \tag{7.38}$$

Potom pre n veľké, testovacia štatistika

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}} \tag{7.39}$$

má približne chí-kvadrát rozdelenie s $(r-1)(c-1)$ stupňami voľnosti, za predpokladu správnosti nulovej hypotézy. Teda nulovú hypotézu o nezávislosti zamietame, keď pozorovaná hodnota testovacej štatistiky χ_0^2 je väčšia, ako kritická hodnota jednostranného chí-kvadrát testu $\chi^2\left[(r-1)(c-1), \alpha\right]$.

Príklad 7.15

Spoločnosť si musí vybrať medzi tromi dôchodkovými programami. Manažment chce vedieť, či preferencia dôchodkových programov nezávisí od klasifikácie profesie na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$. Názory náhodne vybratých 500 zamestnancov sú uvedené nižšie, v tabuľke 7.9.

Tabuľka 7.9. *Pozorované dáta*

Klasifikácia profesie	**Dôchodkový program**			Súčet
	1	2	3	
Mesačná mzda	160	140	40	340
Hodinová mzda	40	60	60	160
Súčet	200	200	100	500

Najprv vypočítame pravdepodobnosti, ktoré potrebujeme na výpočet hodnôt očakávaných početností: $\hat{p}_{1.} = \frac{340}{500} = 0{,}68$; $\hat{p}_{2.} = \frac{160}{500} = 0{,}32$; $\hat{p}_{.1} = \frac{200}{500} = 0{,}40$; $\hat{p}_{.2} = \frac{200}{500} = 0{,}40$

a $\hat{p}_{.3} = \frac{100}{500} = 0,20$. Hodnoty očakávaných početností vypočítame pomocou vzťahu (7.38). Napríklad hodnota očakávaného počtu zamestnancov s mesačnou mzdou uprednostňujúcich dôchodkový program 1 je

$$n\hat{p}_{ij} = n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j} = 500 \times 0,68 \times 0,40 = 136$$

Hodnoty očakávaných početností sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 7.10. *Hodnoty očakávaných početností*

Klasifikácia profesie	**Dôchodkový program**			Súčet
	1	2	3	
Mesačná mzda	136	136	68	340
Hodinová mzda	64	64	32	160
Súčet	200	200	100	500

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Predmet záujmu je preferencia zamestnanca medzi dôchodkovými programami.
2. H_0 : Preferencia dôchodkových programov je nezávislá od klasifikácie profesie.
3. H_1 : Preferencia dôchodkových programov nie je nezávislá od klasifikácie profesie.
4. $\alpha = 0,05$.
5. Testovacej štatistiky je

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}}$$

6. Pretože $r = 2$ a $c = 3$, stupne voľnosti chí-kvadrát rozdelenia sú $(r-1)(c-1) = (2-1)(3-1) = 2$. Potom H_0 zamietame, keď $\chi_0^2 > \chi^2(2;0,05) = 5,99$.
7. Počítajme: Hodnota testovacej štatistiky je

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij} - n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}} =$$

$$= \frac{(160-136)^2}{136} + \frac{(140-136)^2}{136} + \frac{(40-68)^2}{68} + \frac{(40-64)^2}{64} + \frac{(60-64)^2}{64} + \frac{(60-32)^2}{32} =$$

$$= 49,63$$

8. Záver: Pretože $\chi_0^2 = 49,63 > \chi^2(2;0,05) = 5,99$, hypotézu nezávislosti zamietame na úrovni významnosti 0,05. Potom tvrdíme, že preferencia dôchodkových programov nie je nezávislá od klasifikácie profesie. *P*-hodnota pre hodnotu chí-kvadrát testovacej štatistiky $\chi_0^2 = 49,63$ je $P = 1,671 \times 10^{-11}$, čo je menšie ako $\alpha = 0,05$.

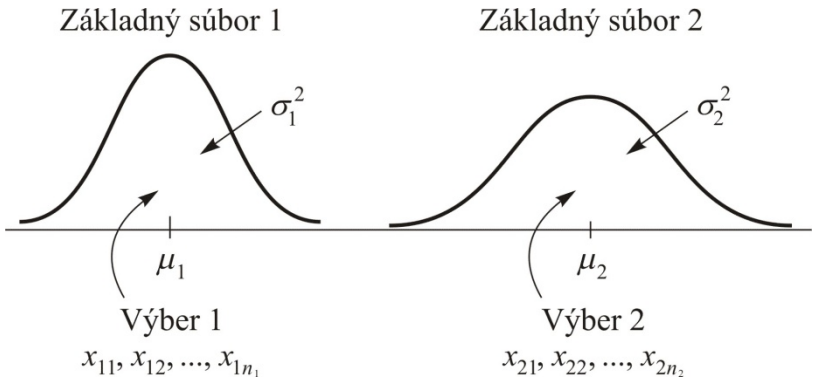
Iná situácia sa vyskytne, keď máme *r* základných súborov a každý základný súbor je rozdelený na *c* rovnakých kategórií. Potom sa realizuje výber z *i*-teho základného súboru, a jednotlivé počty sú uvedené v príslušných stĺpcoch *i*-teho riadku. V tomto prípade chceme vyšetriť, či jednotlivé podiely v *c* kategóriách sú rovnaké pre všetky základné súbory. Nulová hypotéza v tomto prípade tvrdí, že základné súbory sú **homogénne** vzhľadom na kategórie. Napríklad, keď máme iba dve kategórie typu úspech a neúspech, defektný a dobrý atď., test homogenity je v skutočnosti test o rovnosti *r* binomických parametrov. Výpočty očakávaných početností, určenie stupňov voľnosti a výpočet chí-kvadrát štatistiky pre testovanie homogenity sú rovnaké ako pri teste nezávislosti.

8 INDUKČNÁ ŠTATISTIKA PRE DVA VÝBERY

8.1 Úvod

V predchádzajúcich dvoch kapitolách sme prezentovali intervaly spoľahlivosti a testy hypotéz pre jeden parameter základného súboru (strednú hodnotu μ, rozptyl σ^2 alebo podiel p). V tejto kapitole rozšírime výsledky z prvej kapitoly na prípad dvoch nezávislých základných súborov.

Celková situácia je znázornená na nasledujúcom obrázku. Základný súbor 1, ktorý predstavuje náhodná premenná X_1, má strednú hodnotu μ_1 a rozptyl σ_1^2, kým základný súbor 2 reprezentovaný náhodnou premennou X_2 má strednú hodnotu μ_2 a rozptyl σ_2^2. Nech $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ je náhodný výber rozsahu n_1 pozorovaní zo základného súboru 1 a $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ je náhodný výber rozsahu n_2 pozorovaní zo základného súboru 2.



Obrázok 8.1. *Dva nezávislé základné súbory*

8.2 Indukcie pre rozdiel stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, rozptyly sú známe

V tejto časti sa zaoberáme štatistickou indukciou pre rozdiel stredných hodnôt $\mu_1 - \mu_2$ dvoch normálnych rozdelení, pričom rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 sú známe. Predpoklady pre tuto časť zhrnieme takto:

1. $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ je náhodný výber zo základného súboru 1.

2. $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ je náhodný výber zo základného súboru 2.
3. Dva základné súbory reprezentované náhodnými premennými X_1 a X_2 sú nezávislé.
4. Obidva základné súbory sú normálne.

Bodový odhad parametra $\mu_1 - \mu_2$ je rozdiel výberových priemerov $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. Na základe vlastností stredných hodnôt

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

a rozptyl $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ je

$$D(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = D(\bar{X}_1) + D(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Na základe predpokladov a predošlých výsledkov môžeme tvrdiť, že veličina

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{8.1}$$

má rozdelenie $N(0,1)$.

Tento výsledok sa použije pri formovaní testov hypotéz a intervalov spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$.

8.2.1 Testy hypotéz pre rozdiel stredných hodnôt, rozptyly sú známe

Predpokladajme, že chceme testovať, že rozdiel stredných hodnôt $\mu_1 - \mu_2$ sa rovná konkrétnej hodnote δ_0. Potom nulová hypotéza má tvar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$. Existuje veľa prípadov, keď $\delta_0 = 0$, vtedy testujeme rovnosť dvoch stredných hodnôt, t. j. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Vhodnú testovaciu štatistiku dostaneme tak, že vo vzťahu (8.1) nahradíme $\mu_1 - \mu_2$ hodnotou δ_0. Táto testovacia štatistika je

$$Z_0 = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{8.2}$$

Keď H_0 je správna, potom testovacia štatistika (8.2) má normované normálne rozdelenie.

Predpokladajme, že alternatívna hypotéza je $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$. Keď výberová hodnota $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ sa značne líši od δ_0, potom je to dôkaz, že H_1 je správna. Pretože testovacia štatistika Z_0 má rozdelenie $N(0,1)$, keď H_0 je správna, ako hranice kritickej oblasti vyberieme $-k_\alpha$ a k_α, čo sú α kritické hodnoty rozdelenia $N(0,1)$.

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené testy pre obojstrannú alternatívu a jednostranné alternatívy.

Tabuľka 8.1. *Testy o rovnosti dvoch stredných hodnôt; rozptyly sú známe*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$Z_0 = \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$z_0 < -k_\alpha$ alebo $z_0 > k_\alpha$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$		$z_0 < -k_{2\alpha}$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$		$z_0 > k_{2\alpha}$

Príklad 8.1

Vývojár produktu sa zaujíma o zníženie doby schnutia základnej farby. Dve formy farby sú testované, forma 1 je štandardná chémia a forma 2 obsahuje novú zložku schnutia, ktorá by mala znížiť dobu schnutia. Z experimentu je známe, že smerodajná odchýlka doby schnutia je 7 minút. Táto inheretná variabilita by nemala byť ovplyvnená pridaním novej zložky. Desať vzoriek je natretých formou 1 a ďalších 10 vzoriek je natretých formou 2; všetkých 20 vzoriek sa natieralo v náhodnom poradí. Hodnoty dvoch výberových priemerov schnutia sú $\bar{x}_1 = 110$ minút a $\bar{x}_2 = 101$ minút. Aký záver môže vývojár produktu urobiť o účinnosti novej zložky schnutia na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$?

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Parameter záujmu je rozdiel stredných hodnôt doby schnutia, pričom $\delta_0 = 0$.
2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ alebo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.
3. $H_1 : \mu_1 > \mu_2$. Chceme zamietnuť H_0, keď nová zložka schnutia zníži strednú hodnotu doby schnutia.
4. $\alpha = 0{,}05$.
5. Testovacia štatistika je

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

kde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 7^2 = 49$ a $n_1 = n_2 = 10$.

6. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ zamietame, keď $z_0 > 1{,}645 = k_{0,1}$.
7. Počítajme: Pretože $\bar{x}_1 = 110$ minút a $\bar{x}_2 = 101$ minút, hodnota testovacej štatistiky je

$$z_0 = \frac{110-101}{\sqrt{\frac{7^2}{10}+\frac{7^2}{10}}} = \frac{9\times\sqrt{5}}{7} = 2{,}87$$

8. Záver: Pretože $z_0 = 2{,}87 > 1{,}645$, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ zamietame na úrovni významnosti 0,05. Potom tvrdíme, že nová zložka schnutia zníži dobu schnutia. Alternatívne môžeme nájsť *P*-hodnotu pre tento test takto:

   $P = 1 - \Phi(2{,}87) = 1 - 0{,}997948 = 0{,}002052$

   Preto $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ by sa mala zamietnuť na každej úrovni významnosti $\alpha \geq 0{,}002052$.

Keď sú rozsahy výberov veľké a rozptyly základných súborov sú neznáme, potom vo vzťahu (8.2) nahradíme hodnoty rozptylov σ_1^2 a σ_2^2 hodnotami výberových rozptylov s_1^2 a s_2^2 a testujeme rozdiel stredných hodnôt podľa vyššie uvedeného postupu. Tento postup možno použiť aj v prípade, že základné súbory nie sú normálne rozdelené; vtedy sa žiada, aby rozsahy výberov boli väčšie ako 40, test bol platný.

8.2.2 Voľba rozsahu výberu

Použitie kriviek operatívnych charakteristík (OC)

Krivky OC (Prílohy) sa dajú použiť na výpočet pravdepodobnosti chyby 2. druhu pre hypotézu danú v (8.2). Tieto krivky možno použiť aj na určenie rozsahu výberu. Krivky OC zobrazujú β ako funkciu rozsahov výberu $n = n_1 = n_2$, parametra d (*z*-test pre $\mu_1 - \mu_2$), a dvoch úrovní významnosti $\alpha = 0{,}01$ a $\alpha = 0{,}05$. Parameter *d* má tvar

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_2 - \delta_0|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{|\delta - \delta_0|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \tag{8.3}$$

a používa sa pre **dvojstrannú** aj **jednostranné hypotézy** (tabuľka 8.1).

Nezvyčajné problémy nastanú, keď náklady na zber dát z dvoch základných súborov sa podstatne líšia alebo rozptyl jedného základného súboru je oveľa väčší ako rozptyl druhého. V týchto prípadoch často použijeme nerovnaké rozsahy výberov. Keď $n_1 \neq n_2$, krivky OC sa dajú použiť s ekvivalentnou hodnotou *n*, ktorá sa vypočíta zo vzťahu

$$d = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2} \tag{8.4}$$

Keď $n_1 \neq n_2$ a ich hodnoty sú stanovené vopred, vzťah (8.4) sa použije priamo na výpočet *n*. Potom z kriviek OC pomocou známych *n* a *d* získame hodnotu β. Keď *d* je dané a treba určiť n_1 a n_2 tak, aby sme získali špecifikované $\beta = \beta^*$, hádame skúšobne hodnoty n_1 a n_2, z (8.4) vypočítame *n* a z krivky OC pomocou špecifikovanej hodnota *d* nájdeme β. Keď $\beta = \beta^*$,

skúšobne hodnoty n_1 a n_2 sú vyhovujúce. Keď $\beta = \beta^*$, proces nastavenia n_1 a n_2 sa musí opakovať.

Príklad 8.2

Zoberme do úvahy experiment o dobe schnutia farby (príklad 8.1). Keď skutočný rozdiel stredných hodnôt doby schnutia je 10 minút, nájdeme rozsah výberu, ktorý sa požaduje na detegovanie tohto rozdielu s pravdepodobnosťou aspoň 0,90.

Približná hodnota parametra *d* je (pretože $\delta_0 = 0$ a $\delta = 10$)

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{10}{\sqrt{7^2 + 7^2}}$$

Pretože pravdepodobnosť detekcie alebo sila testu musí byť aspoň 0,9 ($1 - \beta \geq 0{,}9$), β je najvýš 0,1. Na OC−c (Prílohy) zistíme, že $n = n_1 = n_2 = 9$.

Vzorce pre rozsah výberu

Predpokladajme, že nulová hypotéza $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ nie je správna a skutočný rozdiel stredných hodnôt je $\mu_1 - \mu_2 = \delta$, pričom $\delta > \delta_0$. Dá sa odvodiť vzorec pre rozsah výberu, ktorý sa požaduje na získanie určitej hodnoty pravdepodobnosti chyby druhého druhu β pre daný rozdiel stredných hodnôt δ a úroveň významnosti α.

Pre **dvojstrannú alternatívnu hypotézu** s úrovňou významnosti α platí, že rozsah výberu $n_1 = n_2 = n$ potrebný na detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt δ so silou testu aspoň $1 - \beta$ je

$$n \approx \frac{(k_\alpha + k_{2\beta})^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\delta - \delta_0)^2} \tag{8.5}$$

Táto aproximácia je správna, keď $\Phi\left(-k_\alpha - (\delta - \delta_0)\sqrt{n} \,/\, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$ je malá hodnota v porovnaní s β.

Pre **jednostrannú alternatívnu hypotézu** s úrovňou významnosti α platí, že rozsah výberu $n_1 = n_2 = n$ potrebný na detegovanie skutočného rozdielu stredných hodnôt $\delta\ (\neq \delta_0)$ so silou testu aspoň $1 - \beta$ je

$$n = \frac{(k_{2\alpha} + k_{2\beta})^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\delta - \delta_0)^2} \tag{8.6}$$

Odvodenie vzťahov (8.5) a (8.6) je podobné ako v prípade jedného výberu uvedeného v časti 7.2.4. Napríklad na získanie vzťahu (8.6) pre dvojstrannú alternatívu, najprv napíšeme výraz pre β, ktorý je

$$\beta = \Phi\left(k_\alpha - \frac{\delta - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) - \Phi\left(-k_\alpha - \frac{\delta - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$$

kde δ je skutočný rozdiel stredných hodnôt, o ktorý sa zaujímame. Pre prípad $n = n_1 = n_2$ dostaneme vzťah pre β postupom podobným ako ukazuje vzorec (7.12).

Príklad 8.3

Na ilustráciu vzorca pre výpočet rozsahu výberu zoberme do úvahy experiment o dobe schnutia farby (príklad 8.1). Keď skutočný rozdiel stredných hodnôt doby schnutia je 10 minút, chceme túto hodnotu detegovať s pravdepodobnosťou aspoň 0,90.

Za predpokladu správnosti nulovej hypotézy platí, že $\delta_0 = 0$. Máme jednostrannú alternatívu s hodnotami $\delta = 10$, a $k_{2\alpha} = k_{0,1} = 1{,}645$ ($\alpha = 0{,}05$). Pretože sila testu je $1 - \beta = 0{,}9$, $\beta = 0{,}1$ a kritická hodnota pre β je $k_{2\beta} = k_{0,20} = 1{,}28$. Potom požadovaný rozsah výberu nájdeme použitím vzťahu (8.6) takto:

$$n = \frac{(k_{2\alpha} + k_{2\beta})^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\delta - \delta_0)^2} = \frac{(1{,}645 + 1{,}282)^2(7^2 + 7^2)}{(10 - 0)^2} = 8{,}396 \approx 9$$

Tento výsledok je taký istý ako pri použití príslušnej krivky OC.

8.2.3 Interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt, rozptyly sú známe

Zaujímame sa o $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt $\mu_1 - \mu_2$ dvoch normálnych rozdelení, keď rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 sú známe. Nech $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ je náhodný výber zo základného súboru reprezentovaného náhodnou premennou X_1 a $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ je náhodný výber zo základného súboru reprezentovaného náhodnou premennou X_2. Bodovým odhadom parametra $\mu_1 - \mu_2$ je rozdiel výberových priemerov $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. Potom

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

má normované normálne rozdelenie, keď X_1 a X_2 majú normálne alebo približne normované normálne rozdelenie, keď sa dá použiť centrálna limitná veta. Z toho vyplýva, že

$$P(-k_\alpha \le Z \le k_\alpha) = 1 - \alpha$$

alebo

$$P\left(-k_\alpha \le \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le k_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

Predchádzajúci vzťah možno upraviť na tvar

$$P\left(\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - k_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + k_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}\right) = 1 - \alpha$$

Teraz definujeme $100(1-\alpha)\,\%$ interval spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$.

Definícia dvojstranného intervalu spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$

Keď $\bar{x}_1$ a $\bar{x}_2$ sú hodnoty výberových priemerov z náhodných výberov o rozsahoch n_1 a n_2 z dvoch nezávislých normálnych základných súborov so známymi rozptylmi σ_1^2 a σ_2^2, potom $100(1-\alpha)\%$ IS pre $\mu_1 - \mu_2$ je

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - k_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + k_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \tag{8.7}$$

kde k_α je kritická hodnota normovaného normálneho rozdelenia.

Úroveň spoľahlivosti $1-\alpha$ je presná, keď základné súbory X_1 a X_2 sú normálne. Keď X_1 a X_2 nie sú normálne, potom pre veľké rozsahy výberov sa úroveň spoľahlivosti iba približne rovná $1-\alpha$.

Príklad 8.4

Skúšky pevnosti v ťahu boli vykonané na dvoch rôznych úrovniach hliníkových nosníkov, ktoré sa používajú pri výrobe krídiel komerčného dopravného lietadla. Z predchádzajúcich skúseností z výrobného procesu nosníka a testovacieho postupu sa predpokladá, že smerodajné odchýlky pevnosti v ťahu sú známe. Z dát sme získali tieto hodnoty: $n_1 = 20$, $\bar{x}_1 = 91{,}3$, $\sigma_1 = 1$, $n_2 = 24$, $\bar{x}_2 = 83{,}6$ a $\sigma_2 = 1{,}5$. Keď μ_1 a μ_2 označujú skutočné stredné hodnoty pevností v ťahu dvoch úrovní nosníkov, môžeme nájsť 90 % interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt pevností v ťahu $\mu_1 - \mu_2$ takto:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - k_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + k_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}$$

$$\left(91{,}3 - 83{,}6\right) - 1{,}645\sqrt{\frac{1^2}{20} + \frac{(1{,}5)^2}{24}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(91{,}3 - 83{,}6\right) + 1{,}645\sqrt{\frac{1^2}{20} + \frac{(1{,}5)^2}{24}}$$

Teda 90 % interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt pevností v ťahu v kg/mm^2 je

$$7,0763 \le \mu_1 - \mu_2 \le 8,3237 \text{ (v kg/mm}^2\text{)}$$

alebo zaokrúhlené na dve desatinné miesta

$$7,07 \le \mu_1 - \mu_2 \le 8,33 \text{ (v kg/mm}^2\text{)}$$

Všimnime si, že interval spoľahlivosti neobsahuje nulu, čo znamená, že stredná hodnota pevnosti v ťahu hliníkového nosníka s úrovňou 1 (μ_1) prekračuje strednú hodnotu pevnosti v ťahu hliníkového nosníka s úrovňou 2 (μ_2). Môžeme tvrdiť, že s 90 % spoľahlivosťou stredná hodnota pevnosti v ťahu hliníkového nosníka s úrovňou 1 prekračuje strednú hodnotu pevnosti v ťahu hliníkového nosníka s úrovňou 2 o hodnotu, ktorá je medzi 7,07 a 8,33 kg/mm^2.

Voľba rozsahu výberu

Keď σ_1^2 a σ_2^2 sú známe a rozsahy výberov rovnaké $n_1 = n_2 = n$, môžeme určiť rozsah výberu tak, že chyba odhadovania $\mu_1 - \mu_2$ pomocou $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ bude menšia ako E so spoľahlivosťou $100(1-\alpha)\%$.

$$n = \left(\frac{k_\alpha}{E}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \tag{8.8}$$

Jednostranné hranice spoľahlivosti

Dá sa ukázať, že je možné získať aj jednostranné hranice spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$. Pre $100(1-\alpha)\%$ **interval spoľahlivosti s hornou hranicou** platí vzťah

$$\mu_1 - \mu_2 \le \left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) + k_{2\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \tag{8.9}$$

a $100(1-\alpha)\%$ **interval spoľahlivosti s dolnou hranicou** je daný vzťahom

$$\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - k_{2\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \le \mu_1 - \mu_2 \tag{8.10}$$

8.3 Indukcie pre rozdiel stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, rozptyly sú neznáme

V tejto časti predpokladáme, že rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 sú neznáme. Keď rozsahy výberov n_1 a n_2 sú väčšie ako 40, môžeme použiť postup z podkapitoly 8.2. Avšak v prípade malých rozsahov výberov, predpokladáme, že základné súbory sú normálne a na základe *t*-rozdelenia testujeme hypotézy, konštruujeme intervaly spoľahlivosti.

8.3.1 Testy hypotéz pre rozdiel stredných hodnôt, rozptyly sú neznáme

Teraz budeme testovať hypotézy o rozdiele stredných hodnôt $\mu_1 - \mu_2$ dvoch normálnych rozdelení, keď rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 sú neznáme. Na testovanie hypotéz použijeme *t*-štatistiku. Testovací postup síce vyžaduje normálne rozdelenia, avšak mierne odchýlky od normálne rozdelenia nemajú nepriaznivý vplyv na postup. Dve rozdielne situácie sa musia brať do úvahy. V prvom prípade predpokladáme, že rozptyly dvoch normálnych rozdelení sú neznáme, avšak rovnaké, t. j. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. V druhom prípade predpokladáme, že σ_1^2 a σ_2^2 sú neznáme a nemusia sa rovnať.

Prípad 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Majme dva nezávislé normálne rozdelené základné súbory s neznámymi strednými hodnotami μ_1 a μ_2 a s neznámymi, avšak rovnakými rozptylmi $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Chceme testovať

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 \tag{8.11}$$

Nech $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ je náhodný výber o rozsahu n_1 pozorovaní z prvého základného súboru a $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ je náhodný výber o rozsahu n_2 pozorovaní z druhého základného súboru. Nech $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, S_1^2 a S_2^2 sú výberové priemery a výberové rozptyly. Stredná hodnota rozdielu výberových priemerov $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ je $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$, teda $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ je nevychýlený odhad rozdielu stredných hodnôt. Rozptyl rozdielu $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ je

$$D(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

Zdá sa, že je rozumné kombinovať dva výberové rozptyly S_1^2 a S_2^2, a tak vytvoriť spoločný odhad rozptylu σ^2, ktorý nazývame **združený odhad**.

Združený odhad rozptylu σ^2, ktorý označujeme S_p^2, definujeme takto:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \tag{8.12}$$

Ľahko sa dá ukázať, že združený odhad S_p^2 môžeme napísať ako

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} S_1^2 + \frac{(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} S_2^2 = wS_1^2 + (1 - w)S_2^2$$

kde $0 < w \leq 1$. Teda S_p^2 je **vážený priemer** dvoch výberových rozptylov S_1^2 a S_2^2, kde váhy w a $1 - w$ závisia od dvoch rozsahov výberov n_1 a n_2.

Vieme, že

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

má rozdelenie $N(0,1)$. Keď nahradíme σ združenou smerodajnou odchýlkou S_p dostaneme nasledujúce.

Za predpokladov v tejto časti má veličina

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \tag{8.13}$$

t-rozdelenie s $n_1 + n_2 - 2$ stupňami voľnosti.

Pri testovaní nulovej hypotézy (8.11) nahradíme $\mu_1 - \mu_2$ hodnotou δ_0 a výsledná **testovacia štatistika** má *t*-rozdelenie s $n_1 + n_2 - 2$ stupňami voľnosti, za predpokladu, že nulová hypotéza $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ je správna.

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené testy pre obojstrannú alternatívu a jednostranné alternatívy.

Tabuľka 8.2. *Testy o rovnosti dvoch stredných hodnôt; rozptyly neznáme a rovnaké*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$T_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $\nu = n_1 + n_2 - 2$	$t_0 < -t(\nu, \alpha)$ alebo $t_0 > t(\nu, \alpha)$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$		$t_0 < -t(\nu, 2\alpha)$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$		$t_0 > t(\nu, 2\alpha)$

Príklad 8.5

Dva katalyzátory sú analyzované na stanovenie ich vplyvu na stredný výnos chemického procesu. V súčasnej dobe sa používa katalyzátor 1, avšak katalyzátor 2 je tiež prijateľný. Vzhľadom na to, že katalyzátor 2 je lacnejší, mal by byť prijatý za predpokladu, že nemení výnos procesu. Skúška sa vykonáva v skúšobnej prevádzke a výsledky v podobe hodnôt výberových charakteristík sú: $n_1 = 8,\ \bar{x}_1 = 92,3$, $s_1 = 2,4$, $n_2 = 8,\ \bar{x}_2 = 92,7$ a $s_2 = 2,9$. Existuje

nejaký rozdiel medzi strednými výnosmi? Za predpokladu rovnosti neznámych rozptylov použijeme $\alpha = 0{,}05$.

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Parametre záujmu sú μ_1 a μ_2, stredné výnos procesu pri katalyzátoroch 1 a 2; chceme vedieť, či $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ alebo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
3. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
4. $\alpha = 0{,}05$
5. Hodnota testovacej štatistiky je

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

pričom stupne voľnosti sú $n_1 + n_2 - 2 = 8 + 8 - 2 = 14$.

6. H_0 zamietame, keď $t_0 < -t(14;\, 0{,}05) = -2{,}1448$ alebo $t_0 > t(14;\, 0{,}05) = 2{,}1448$.
7. Počítajme: Vieme, že $n_1 = 8$, $\bar{x}_1 = 92{,}3$, $s_1 = 2{,}4$, $n_2 = 8$, $\bar{x}_2 = 92{,}7$ a $s_2 = 2{,}9$. Preto

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{7 \cdot (2{,}4)^2 + 7 \cdot (2{,}9)^2}{8 + 8 - 2} = 7{,}085$$

$$s_p = \sqrt{7{,}085} = 2{,}66$$

a

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2{,}66\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{92{,}3 - 92{,}7}{2{,}66\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}} = -0{,}3$$

8. Záver: Pretože $-2{,}1448 < t_0 = -0{,}3 < 2{,}1448$, nulovú hypotézu nezamietame. To znamená, že na úrovni významnosti 0,05 nemáme presvedčivé dôkazy k záveru, že stredný výnos pri použití katalyzátora 2 sa líši od stredného výnosu pri použití katalyzátora 1. Alternatívne môžeme nájsť *P*-hodnotu pre tento test takto:

$$P = 2\left[1 - F_T(|-0{,}3|)\right] = 2\left[1 - 0{,}615707\right] = 0{,}768586$$

Pretože $P = 0{,}768586 > 0{,}05 = \alpha$, nulovú hypotézu nemôžeme zamietnuť.

Prípad 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

V tomto prípade testovacia štatistika

$$T_0^* = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \tag{8.14}$$

má necentrálne *t*-rozdelenie (pozri Hátle, J., Likeš, J. 1972) so stupňami voľnosti

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} \tag{8.15}$$

Tabuľka 8.3. *Testy o rovnosti dvoch stredných hodnôt; rozptyly neznáme a rôzne*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	$T_0^* = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$t_0 < -t(\nu, \alpha)$ alebo $t_0 > t(\nu, \alpha)$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$		$t_0 < -t(\nu, 2\alpha)$
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$		$t_0 > t(\nu, 2\alpha)$

Príklad 8.6

Životnosť (v hodinách) výrobkov sa vyšetrovala v dvoch rôznych systémoch s extrémnymi podmienkami. Z náhodných výberov sa získali dve dátové súbory pre systém 1 a systém 2, z ktorých sa vypočítali hodnoty výberových charakteristík (hodnoty štatistík): $n_1 = 21$, $\bar{x} = 3{,}581$, $s_1^2 = 0{,}114$, $n_2 = 23$, $\bar{y} = 3{,}974$, $s_2^2 = 0{,}041$. Zistíme na úrovni významnosti 0,05, či voľba systému podmienok má vplyv na strednú životnosť výrobkov. Predpokladáme, že životnosti majú normálne rozdelenie s rôznymi rozptylmi vzhľadom na systémy extrémnych podmienok.

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Parametre záujmu sú μ_1 a μ_2, stredné hodnoty životnosti systému 1 a systému 2; chceme vedieť, či $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ alebo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
3. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
4. $\alpha = 0{,}05$
5. Hodnota testovacej štatistiky je

$$t_0^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

pričom stupne voľnosti sú

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

6. H_0 zamietame, keď $t_0^* < -t(\nu; 0{,}05)$ alebo $t_0^* > t(\nu; 0{,}05)$.

7. Počítajme: Vieme, že $n_1 = 21$, $\bar{x} = 3{,}581$, $s_1^2 = 0{,}114$, $n_2 = 23$, $\bar{y} = 3{,}974$, $s_2^2 = 0{,}041$. Preto

$$\nu = \frac{\left(\frac{0{,}114}{21} + \frac{0{,}041}{23}\right)^2}{\frac{\left(0{,}114/21\right)^2}{21 - 1} + \frac{\left(0{,}041/23\right)^2}{23 - 1}} = 32{,}140 \approx 33$$

a

$$t_0^* = \frac{3{,}581 - 3{,}974}{\sqrt{\frac{0{,}114}{21} + \frac{0{,}041}{23}}} = -4{,}627$$

8. Záver: Pretože $t_0^* = -4{,}627 < -t(33; 0{,}05) = -2{,}03452$, nulovú hypotézu o rovnakých stredných životnostiach zamietame na úrovni významnosti 0,05. Usudzujeme teda, že vplyv rôznych systémov extrémnych podmienok na strednú životnosť výrobkov je štatisticky významný. Eventuálne môžeme nájsť približnú *P*-hodnotu pre tento test takto:

$$P = 2\left[1 - F_T(|-4{,}627|)\right] = 2\left[1 - 0{,}999972\right] = 0{,}000056$$

Pretože $P = 0{,}000056 < 0{,}05 = \alpha$, nulovú hypotézu zamietneme.

8.3.2 Voľba rozsahu výberu

Krivky OC (Prílohy) sa dajú použiť na výpočet pravdepodobnosti chyby 2. druhu pre prípad, keď $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Bohužiaľ, keď $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, rozdelenie T_0^* je neznáme v prípade, že nulová hypotéza nie je správna. V tomto prípade nemáme k dispozícii krivky OC.
Krivky OC zobrazujú β ako funkciu rozsahov výberu $n = n_1 = n_2$, parametra d (*t*-test pre $\mu_1 - \mu_2$) a dvoch úrovní významnosti $\alpha = 0{,}01$ a $\alpha = 0{,}05$. Parameter *d* má tvar

$$d = \frac{|\delta - \delta_0|}{2\hat{\sigma}} \tag{8.16}$$

a používa sa pre **dvojstrannú** aj **jednostranné hypotézy** (tabuľka 8.3). Ak chceme použiť tieto krivky, musí byť zadaný rozsah výberu $n^* = 2n - 1$. Vo vzťahu (8.16) namiesto $\hat{\sigma}$ použijeme s_P (združenú smerodajnú odchýlku) alebo subjektívny odhad. Eventuálne môžeme nájsť rozdiely stredných hodnôt, ktoré chceme detegovať vzhľadom k σ.

Príklad 8.7

Zoberme do úvahy experiment s katalyzátormi (príklad 8.5). Predpokladajme, že keď katalyzátor 2 produkuje stredný výnos, ktorý sa líši od stredného výnosu katalyzátora 1 o 4,0 %, radi by sme zamietli nulovú hypotézu s pravdepodobnosťou aspoň 0,85. Aký rozsah výberu sa požaduje?

Zo zadania vieme, že sila testu je $1-\beta = 0{,}85$, z čoho vyplýva, že $\beta = 0{,}15$ Keď ako hodnotu odhadu $\hat{\sigma}$ použijeme $s_p = 2{,}66$, dostaneme $d = \dfrac{|\delta - \delta_0|}{2\hat{\sigma}} = \dfrac{|4{,}0|}{2 \times 2{,}66} = 0{,}75$. Potom pre $d = 0{,}75$ a $\beta = 0{,}15$ nájdeme v prílohe OC-e približnú hodnotu $n^* = 20$. Vzhľadom na to, že $n^* = 2n - 1$, potom

$$n = \frac{n^* + 1}{2} = \frac{20 + 1}{2} = 10{,}5 \approx 11$$

Použili by sme teda rozsah výberu $n_1 = n_2 = n = 11$.

8.3.3 Interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt

Prípad 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Na odvodenie intervalu spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt $\mu_1 - \mu_2$, za predpokladu rovnajúcich sa rozptylov, použijeme štatistiku

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \tag{8.17}$$

ktorá má *t*-rozdelenie s $n_1 + n_2 - 2$ stupňami voľnosti. Preto $P[-t(n_1 + n_2 - 2, \alpha) \le T \le t(n_1 + n_2 - 2, \alpha)] = 1 - \alpha$. Keď nahradíme T pravou stranou vzťahu (8.17) a pravdepodobnostné tvrdenie upravíme, dostaneme $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$.

Definícia dvojstranného intervalu spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$

Keď $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s_1^2 a s_2^2 sú hodnoty výberových priemerov a rozptylov dvoch náhodných výberov o rozsahoch n_1 a n_2 z dvoch nezávislých normálnych základných súborov s neznámymi rovnakými rozptylmi, potom $100(1-\alpha)\%$ IS pre $\mu_1 - \mu_2$ je

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t(n_1 + n_2 - 2, \alpha) s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}} \le$$

$$\le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t(n_1 + n_2 - 2, \alpha) s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}} \tag{8.18}$$

kde $s_p = \sqrt{[(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2]/(n_1+n_2-2)}$ je hodnota združenej smerodajnej odchýlky a $t(n_1+n_2-2, \alpha)$ je kritická hodnota *t*-rozdelenia so stupňami voľnosti n_1+n_2-2.

Príklad 8.8

Opäť zoberme do úvahy experiment s katalyzátormi (príklad 8.5), v ktorom sme z hodnôt výberových charakteristík $n_1 = 8,\ \bar{x}_1 = 92,3$, $s_1 = 2,4$, $n_2 = 8,\ \bar{x}_2 = 92,7$ a $s_2 = 2,9$ vypočítali hodnotu združenej smerodajnej odchýlky $s_p = 2,66$.

Určíme 95 % interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných výnosov dvoch katalyzátorov chemického procesu.

95 % interval spoľahlivosti je

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t(14;\,0,05)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t(14;\,0,05)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$92,3 - 92,7 - 2,1448 \cdot 2,66\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} \le \mu_1 - \mu_2 \le 92,3 - 92,7 + 2,1448 \cdot 2,66\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}$$

$$-3,252584 \le \mu_1 - \mu_2 \le 5,305168$$

$$-3,25 \le \mu_1 - \mu_2 \le 5,31$$

Všimnime si, že 95 % interval spoľahlivosti obsahuje nulu; preto na úrovni významnosti 0,05 nemôžeme tvrdiť, že je rozdiel medzi strednými výnosmi chemického procesu pri použití katalyzátora 1 a katalyzátora 2.

Prípad 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

V tomto prípade môžeme nájsť $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$ využijúc skutočnosť, že $T^* = [(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)]/\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}$ má približne *t*-rozdelenie so stupňami voľnosti ν podľa vzorca (8.15).

Definícia dvojstranného intervalu spoľahlivosti pre $\mu_1 - \mu_2$

Keď $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ s_1^2$ a s_2^2 sú hodnoty výberových priemerov a rozptylov dvoch náhodných výberov o rozsahoch n_1 a n_2 z dvoch nezávislých normálnych základných súborov s neznámymi nerovnakými rozptylmi, potom $100(1-\alpha)\%$ IS pre $\mu_1 - \mu_2$ je

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t(\nu,\,\alpha)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_1}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t(\nu,\,\alpha)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_1}} \qquad (8.19)$$

kde $t(\nu, \alpha)$ je kritická hodnota *t*-rozdelenia so stupňami voľnosti ν, ktoré sú dané v (8.15).

8.4 Párový *t*-test

Špeciálny prípad *t*-testu pre dva výbery je párový test. Každá dvojica pozorovaní, povedzme (X_{1i}, X_{2i}), sa vyberie za homogénnych podmienok, avšak tieto podmienky sa môžu meniť od jednej dvojice k druhej. Napríklad keď máme záujem o porovnanie dvoch rôznych typov hrotov pre stroj na skúšanie tvrdosti. Tento stroj tlačí hrot do kovovej vzorky so známou silou. Tvrdosť vzorky sa môže určiť tak, že sa zmeria hĺbka priehlbiny spôsobenej hrotom. Predstavme si, že sa náhodne vyberie niekoľko vzoriek, z ktorých polovica sa skúša s hrotom 1 a druha polovica s hrotom 2. Keď sa namerané dáta testujú *t*-testom ako pochádzajúce z nezávislých základných súborov, výsledok testu môže byť chybný. Kovové vzorky mohli byť rezané z tyčového materiálu, ktorý bol vyrobený pri rôznych teplotách, alebo nemusia byť homogénne nejakým iným spôsobom, ktorý by mohol mať vplyv na tvrdosť. Potom pozorované rozdiely medzi priemernými meraniami tvrdosti dvoch typov hrotov zahrnujú aj rozdiely tvrdosti medzi vzorkami.

Výkonnejší experimentálny postup je zhromaždiť dáta ako dvojice, to znamená, aby sa robili dve merania tvrdosti na každej vzorke, každé z iným hrotom. V skúšobnom postupe by sa potom analyzoval rozdielov medzi nameranými tvrdosťami na každej vzorke. Ak nie je rozdiel medzi hrotmi, stredná hodnota rozdielov by mala byť nulová. Tento testovací postup sa nazýva **párový *t*-test**.

Tabuľka 8.4. *Párový t-test*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : \mu_D = \delta_0$ $H_1 : \mu_D \neq \delta_0$	$T_0 = \dfrac{\bar{D} - \delta_0}{S_D / \sqrt{n}}$	$t_0 < -t(\nu, \alpha)$ alebo $t_0 > t(\nu, \alpha)$
$H_0 : \mu_D = \delta_0$ $H_1 : \mu_D < \delta_0$		$t_0 < -t(\nu, 2\alpha)$
$H_0 : \mu_D = \delta_0$ $H_1 : \mu_D > \delta_0$		$t_0 > t(\nu, 2\alpha)$

Nech $(X_{11}, X_{21}), (X_{12}, X_{22}), \ldots, (X_{1n}, X_{2n})$ je množina n párových pozorovaní, kde predpokladáme, že stredná hodnota a rozptyl základného súboru reprezentovaného náhodnou premennou X_1 sú μ_1 a σ_1^2 a stredná hodnota a rozptyl základného súboru reprezentovaného náhodnou premennou X_2 sú μ_2 a σ_2^2. Definujme rozdiel medzi párovými pozorovaniami ako $D_i = X_{1i} - X_{2i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Predpokladajme, že rozdiely sú normále rozdelené so strednou hodnotou

$$\mu_D = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \mu_1 - \mu_2$$

a rozptylom σ_D^2. Týmto spôsobom sme test hypotézy o rozdiely medzi strednými hodnotami pretransformovali na jedno výberový test *t*-test. Konkrétne testovanie $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ oproti $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$ je ekvivalentné s testovaním

$$H_0 : \mu_D = \delta_0 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \mu_D \neq \delta_0 \tag{8.20}$$

V tabuľke 8.4 sú uvedené dvojstranná a jednostranné alternatívy, testovacia štatistika a kritériá zamietnutia nulovej hypotézy.

Príklad 8.9

Na deviatich vzorkách rudy sa zisťoval obsah nečistôt v percentách (%) štandardnou metódou X a novozavedenou metódou Y, s týmito výsledkami:

x_i	34,5	32,1	37,9	34,3	34,7	35,2	33,8	37,1	32,9
y_i	34,1	33,2	38,7	35,4	35,6	34,9	34,9	38,3	32,3

Predpokladajme, že dvojice pozorovaní $(x_i, y_i)^{\mathrm{T}}$ tvoria náhodný výber z dvojrozmerného normálneho rozdelenia $(X, Y)^{\mathrm{T}}$. Rozhodneme na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}05$, či je štatisticky významný rozdiel vo výsledkoch získaných uvedenými dvomi metódami.

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Parameter záujmu je rozdiel stredných hodnôt obsahu nečistôt zistených štandardnou metódou a novozavedenou metódou; teda $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$.
2. $H_0 : \mu_D = 0$
3. $H_1 : \mu_D \neq 0$
4. $\alpha = 0{,}05$
5. Hodnota testovacej štatistiky je

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_D / \sqrt{n}}$$

6. H_0 zamietame, keď $t_0 < -t(8;\, 0{,}05)$ alebo $t_0 > t(8;\, 0{,}05)$.
7. Počítajme:
   Z pozorovaných hodnôt vypočítame rozdiely

$$d_i = x_i - y_i : \qquad 0{,}4;\ \text{-}1{,}1;\ \text{-}0{,}8;\ \text{-}1{,}1;\ \text{-}0{,}9;\ 0{,}3;\ \text{-}1{,}1;\ \text{-}1{,}2;\ \ 0{,}6$$

   Z rozdielov vypočítame hodnotu výberového priemeru rozdielov $\bar{D}$, ktorá je

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{9} d_i}{9} = -0{,}544$$

a hodnota výberovej smerodajnej odchýlky rozdielov S_D je

$$s_D = \sqrt{\frac{1}{9-1}\sum_{i=1}^{9}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} = 0,747$$

Preto hodnota testovacej štatistiky je

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{-0,544}{0,747 / \sqrt{9}} = -2,184739$$

8. Záver: Pretože $t_0 = -2,184739 > -t(9; 0,05) = -2,306$, nulovú hypotézu nezamietame na úrovni významnosti 0,05. Tvrdíme na úrovni významnosti $\alpha = 0,05$, že medzi uvedených dvoma metódami na zisťovanie obsahu nečistôt vo vzorkách rudy nie je štatisticky významný rozdiel, odchýlky sú spôsobené iba náhodnými vplyvmi. Eventuálne môžeme nájsť *P*-hodnotu pre tento test takto:

$$P = 2\left[1 - F_T(\left|-2,184439\right|)\right] = 2\left[1 - 0,969779\right] = 0,060442$$

Pretože $P = 0,060442 > 0,05 = \alpha$, nulovú hypotézu nezamietneme.

Porovnanie párových s nepárovými

Pri vykonávaní porovnávacieho experimentu, môže výskumník niekedy vybrať medzi párovým experimentom a nepárovým (dva výbery) experimentom. Keď sa v každom základnom súbore urobilo *n* meraní, dvojvýberová testovacia štatistika je

$$T_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}$$

ktorá má rozdelenie $t(2n-2)$ a párová testovacia štatistika je

$$T_0 = \frac{\bar{D} - \delta_0}{S_D / \sqrt{n}}$$

ktorá má rozdelenie $t(n-1)$. Všimnime si, že

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{n}\frac{D_i}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_{1i} - X_{2i})}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_{1i}}{n} - \sum_{i=1}^{n}\frac{X_{2i}}{n} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

čitatele obidvoch štatistík sú rovnaké. Avšak menovateľ dvoch výberov z *t*-rozdelení vychádza z predpokladu, že X_1 a X_2 sú *nezávislé*. V mnohých párových experimentoch existuje silná pozitívna korelácia ρ medzi X_1 a X_2. Potom sa dá dokázať platnosť vzťahu

$$D(\bar{D}) = D(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0) = D(\bar{X}_1) + D(\bar{X}_2) - 2\,\mathrm{cov}(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = \frac{2\sigma^2(1-\rho)}{n}$$

za predpokladu, že obidva základné súbory X_1 a X_2 majú spoločný rozptyl σ^2. Okrem toho S_D^2 / n je odhadom rozptylu premennej $\bar{D}$. Vždy, keď je pozitívna korelácia v rámci párov,

bude menovateľ párovej testovacej štatistiky (*t*-testu) menší ako menovateľ dvojvýberovej testovacej štatistiky (*t*-testu). To môže spôsobiť, že dvojvýberový *t*-test značne podhodnocuje význam dát, ak je zle aplikovaný na párových vzorkách.

Hoci párovanie bude často viesť k menšej hodnote rozptylu premennej $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, má to predsa nevýhodu v tom, že párový *t*-test vedie k strate $n-1$ stupňov voľnosti v porovnaní s dvojvýberovým *t*-testom. Všeobecne platí, že zvýšenie počtu stupňov voľnosti testu zvyšuje silu testu pri akejkoľvek pevnej alternatívnej hodnote parametra.

Tak ako sme sa rozhodli urobiť experiment? Mali by sme spárovať pozorovania, alebo nie? Hoci neexistuje žiadna všeobecná odpoveď na túto otázku, môžeme dať aspoň nejaké usmernenia na základe vyššie uvedenej diskusie.

1. Keď experimentálne jednotky sú relatívne homogénne (malá σ) a korelácia v pároch je malá, zisk z presnosti pripadajúci na párovanie bude kompenzovaný stratou stupňov voľnosti, potom by sa mal použiť experiment s nezávislými výbermi.
2. Keď experimentálne jednotky sú pomerne heterogénne (veľká σ) a korelácia v pároch je veľká a pozitívna, mal by sa použiť párový experiment. Typicky príklad kedy dochádza k tomuto prípadu je, keď každá experimentálna jednotka je rovnaká pre obidva spôsoby merania.

Podrobné pravidlá stále vyžadujú rozhodovanie, pretože σ a ρ nie sú nikdy presne známe. Okrem toho, ak počet stupňov voľnosti je veľký (povedzme 40 alebo 50), strata $n-1$ z nich nemusí byť závažná pri párovaní. Avšak, ak počet stupňov voľnosti je malý (povedzme 10 alebo 20), strata polovice z nich je potenciálne závažná, ak nie je kompenzovaná zvýšenou presnosťou z párovania.

Interval spoľahlivosti pre μ_D

Na konštrukciu intervalu spoľahlivosti pre $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ použijeme štatistiku

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

ktorá má *t*-rozdelenie s $n-1$ stupňami voľnosti. Pretože $P[-t(n-1, \alpha) \le T \le t(n-1, \alpha)] = 1-\alpha$, môžeme dosadiť za T pravú stranu uvedeného vzorca a po úpravách dostaneme $100(1-\alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$.

Definícia intervalu spoľahlivosti pre $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

Keď $\bar{d}$ je hodnota výberového priemeru a s_D hodnota výberovej smerodajnej odchýlky rozdielov n párov pozorovaní náhodne vybratých z normálne rozdelených základných súborov, $100(1-\alpha)\%$ **interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt** $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ je

$$\bar{d} - t(n-1, \alpha)\frac{s_D}{\sqrt{n}} \le \mu_D \le \bar{d} + t(n-1, \alpha)\frac{s_D}{\sqrt{n}} \qquad (8.21)$$

kde $t(n-1, \alpha)$ je α kritická hodnota *t*-rozdelenia so stupňami voľnosti $n-1$.

Tento interval je platný aj v prípade $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, pretože s_D^2 odhaduje $\sigma_D^2 = D(X_1 - X_2)$. Interval možno použiť aj pre veľké rozsahy dvojíc $(n \geq 30)$, pričom predpoklad normality nie je potrebný, pretože funguje centrálna limitná veta.

Príklad 8.10

Zoberme do úvahy problém uvedený v predošlom príklade (príklad 8.9), kde sa zisťoval rozdiel stredných hodnôt obsahu nečistôt zistených štandardnou metódou a novozavedenou metódou. Určíme 95 % interval spoľahlivosti pre rozdiel stredných hodnôt $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$.

Z predošlého príkladu vieme, že $\bar{d} = -0,544$ a $s_D = 0,747$. Kritickú hodnotu $t(9; 0,05) = 2,2622$ sme našli v štatistických tabuľkách. Potom 90 % interval spoľahlivosti pre $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ zistíme podľa (8.21) takto:

$$-0,544 - 2,2622 \cdot \frac{0,747}{\sqrt{9}} \leq \mu_D \leq -0,544 + 2,2622 \cdot \frac{0,747}{\sqrt{9}}$$

$$-1,1072878 \leq \mu_D \leq 0,0192878$$

$$-1,11 \leq \mu_D \leq 0,02$$

Všimnime si, že interval spoľahlivosti pre $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ obsahuje nulu. Z toho vyplýva, že na 95 % úrovni spoľahlivosti dáta nepodporujú tvrdenie, že nie je rozdiel medzi strednou hodnotou obsahu nečistôt zistených štandardnou metódou μ_1 a novozavedenou metódou μ_2. To znamená, že hodnota $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$ nie je v rozpore s pozorovanými dátami.

8.5 Indukcie pre rozptyly dvoch normálnych rozdelení

Predpokladajme, že sa zaujímame o dva nezávislé normálne rozdelené základné súbory, ktoré majú stredné hodnoty μ_1, μ_2 a rozptyly σ_1^2, σ_2^2, ktoré sú neznáme. Chceme testovať hypotézu o rovnosti dvoch rozptylov, t. j. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Ďalej predpokladajme, že náhodné výbery rozsahu n_1 zo základného súboru 1 a rozsahu n_2 zo základného výberu 2 máme k dispozícii. Nech S_1^2 a S_2^2 sú výberové rozptyly základných súborov 1 a 2. Chceme testovať hypotézy

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \tag{8.22}$$

8.5.1 Testovanie hypotéz o rovnosti dvoch rozptylov

Testovanie hypotézy o rovnosti dvoch rozptylov je založené na nasledujúcom postupe. Nech $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ je náhodný výber z normálne rozdeleného základného súboru so strednou hodnotou μ_1 a rozptylom σ_1^2; a nech $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ je náhodný výber z iného normálne rozdeleného základného súboru so strednou hodnotou μ_2 a rozptylom σ_2^2. Predpokladajme, že dve normálne rozdelenia sú nezávislé. Nech S_1^2 a S_2^2 sú výberové rozptyly. Potom podiel

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \tag{8.23}$$

má F rozdelenie s $n_1 - 1$ stupňami voľnosti čitateľa a $n_2 - 1$ stupňami voľnosti menovateľa.

Vzťah (8.23) je založený na skutočnosti, že $(n_1 - 1)S_1^2 / \sigma_1^2$ je náhodná premenná s chí-kvadrát rozdelením so stupňami voľnosti $n_1 - 1$, $(n_2 - 1)S_2^2 / \sigma_2^2$ je náhodná premenná s chí-kvadrát rozdelením so stupňami voľnosti $n_2 - 1$ a dva základné súbory sú nezávislé. Zrejmé je, že za predpokladu správnosti nulovej hypotézy $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ má podiel $F_0 = S_1^2 / S_2^2$ rozdelenie $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$. Toto je základ pre postup testovania.

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené dvojstranný test a dva jednostranné.

Tabuľka 8.5. *Testy o rovnosti dvoch rozptylov*

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$f_0 > f\left(n_1 - 1,\ n_2 - 1,\ \frac{\alpha}{2}\right)$ alebo $f_0 < f\left(n_1 - 1,\ n_2 - 1,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$f_0 < f(n_1 - 1,\ n_2 - 1,\ 1 - \alpha)$
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$f_0 > f(n_1 - 1,\ n_2 - 1,\ \alpha)$

Poznámka. $f(n_1 - 1, n_2 - 1, 1 - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{f(n_2 - 1, n_1 - 1, \frac{\alpha}{2})}$

Príklad 8.11

Chceme overiť rovnosť rozptylov dvoch katalyzátorov použitých na stanovenie ich vplyvu na stredný výnos chemického procesu (príklad 8.5). Z výberových dát sme získali $n_1 = 8,\ s_1 = 2,4,\ n_2 = 8,$ a $s_2 = 2,9.$ Rovnosť rozptylov overíme na úrovni významnosti $\alpha = 0,05.$

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Parametre záujmu sú σ_1^2 a σ_2^2, rozptyly výnosu procesu pri katalyzátoroch 1 a 2.
2. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ alebo $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$
3. $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ alebo $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$
4. $\alpha = 0,05$
5. Testovacia štatistika je
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$
6. Pretože $n_1 = n_2 = 8,$ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ zamietame, keď $f_0 > f(7,7;\ 0,025) = 4,99$ alebo $f_0 < f(7,7;\ 0,975) = 1 / f(7,7;0,025) = 1 / 4,99 = 0,20.$
7. Počítajme: $s_1^2 = (2,4)^2 = 5,76$ a $s_2^2 = (2,9)^2 = 8,41,$ potom hodnota testovacej štatistiky je
$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{5,76}{8,41} = 0,6849$$
8. Záver: Pretože $f(7,7;0,975) = 0,20 < f_0 = 0,6849 < f(7,7;0,025) = 4,99,$ nulovú hypotézu nezamietame na úrovni významnosti 0,05. Tvrdíme, že rozptyly výnosu procesu pri katalyzátoroch 1 a 2 sú rovnaké, t. j. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

V tomto príklade môžeme nájsť aj *P*-hodnotu pre *F*-štatistiku. Pretože $f(7,7;0,50) = 1,00,$ hodnota testovacej štatistiky $f_0 = s_1^2 / s_2^2 = 5,76 / 8,41 = 0,6849$ sa nachádza v dolnej časti *F*-rozdelenia. Pravdepodobnosť, že náhodná premenná s rozdelením *F* so siedmimi stupňami voľnosti čitateľa aj menovateľa nadobudne hodnotu menšiu ako 0,6849 je 0,314974. Vzhľadom na to, že je ľubovoľné, ktorý základný súbor je identifikovaný ako „jeden," mohli by sme vypočítať testovaciu štatistiku ako $f_0 = 8,41 / 5,76 = 1,460069.$ Pravdepodobnosť, že náhodná premenná s rozdelením *F* so siedmimi stupňami voľnosti čitateľa aj menovateľa nadobudne hodnotu väčšiu ako 1,460069 je 0,314973. Preto *P*-hodnota pre hodnotu testovacej štatistiky $f_0 = 0,6849$ je $P = 0,314974 + 0,314973 = 0,629947.$ Pretože *P*-hodnota je väčšia ako 0,05, nulovú hypotézu $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ nemôžeme zamietnuť.

8.5.2 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu

V prílohe sú diagramy OC−o, OC−p, OC−q a OP−r, ktoré obsahujú krivky operatívnych charakteristík pre *F*-test a pre $\alpha = 0,05$ a $\alpha = 0,01$, za predpokladu, že $n_1 = n_2 = n$. Krivky OC−o a OC−p sa používajú pre dvojstranné alternatívne hypotézy. Krivky zobrazujú β oproti horizontálnemu parametru

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{8.24}$$

pre rôzne $n_1 = n_2 = n$. Krivky OC−q a OC−r sa používajú pre jednostranné alternatívne hypotézy.

Príklad 8.12

Majme dva katalyzátory použité na stanovenie ich vplyvu na stredný výnos chemického procesu (príklad 8.5 a príklad 8.11). Nech pri použití prvého katalyzátora je smerodajná odchýlka dvakrát väčšia ako pri použití druhého katalyzátora. Aké rozsahy výberov sú potrebné na detegovanie tejto situácie s pravdepodobnosťou aspoň 0,80?

Problém riešime za predpokladu $n_1 = n_2 = n$. Všimnime si, že keď smerodajná odchýlka σ_1 je dvakrát väčšia ako smerodajná odchýlka σ_2,

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

Zo zadania vieme, že sila testu je $1 - \beta = 0,8$, z čoho dostaneme, že $\beta = 0,2$. Potom pre $\lambda = 2$ a $\beta = 0,2$ nájdeme v prílohe OC−o hodnotu $n = 19$. Na detegovanie tejto situácie s pravdepodobnosťou aspoň 0,80 sú potrebné rozsahy výberov $n_1 = n_2 = n = 19.$.

8.5.3 Interval spoľahlivosti pre podiel dvoch rozptylov

Pri konštrukcii intervalu spoľahlivosti pre σ_1^2 / σ_2^2 použijeme štatistiku

$$F = \frac{S_2^2 / \sigma_2^2}{S_1^2 / \sigma_1^2}$$

ktorá má rozdelenie $F(n_2 - 1, n_1 - 1)$, t. j. s $n_2 - 1$ stupňami voľnosti čitateľa a $n_1 - 1$ stupňami voľnosti menovateľa. Preto $P[f(n_2 - 1, n_1 - 1; 1 - \alpha / 2) \le F \le f(n_2 - 1, n_1 - 1; \alpha / 2)]$. Dosadením tohto vzťahu za *F* pravú stranu vzorca a po úprave dostaneme $100(1 - \alpha)\%$ interval spoľahlivosti pre σ_1^2 / σ_2^2.

Definícia intervalu spoľahlivosti pre σ_1^2 / σ_2^2

Keď s_1^2 a s_2^2 sú hodnoty výberového rozptylov z náhodných výberov o rozsahoch n_1 a n_2 z dvoch nezávislých normálne rozdelených základných súborov s neznámymi rozptylmi σ_1^2 a σ_2^2, potom $100(1-\alpha)\%$ **interval spoľahlivosti pre podiel rozptylov** σ_1^2 / σ_2^2 je

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_2-1, n_1-1, 1-\alpha/2) \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2} f(n_2-1, n_1-1, \alpha/2) \tag{8.25}$$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1-1, n_2-1, \alpha/2)} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f(n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2)} \tag{8.26}$$

pričom $f(n_2-1, n_1-1, 1-\alpha/2)$ a $f(n_2-1, n_1-1, \alpha/2)$ sú kritické hodnoty rozdelenia $F(n_2-1, n_1-1)$; $f(n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2)$ a $f(n_1-1, n_2-1, \alpha/2)$ sú kritické hodnoty rozdelenia $F(n_1-1, n_2-1)$.

Príklad 8.13

Chceme skonštruovať 95 % interval spoľahlivosti pre podiel rozptylov σ_1^2 / σ_2^2 dvoch katalyzátorov použitých na stanovenie ich vplyvu na stredný výnos chemického procesu (príklad 8.5). Z výberových dát sme získali $n_1 = 8,\ s_1 = 2,4$, $n_2 = 8,$ a $s_2 = 2,9$.

Na výpočet 95 % intervalu spoľahlivosti pre σ_1^2 / σ_2^2 použijeme vzťah (8.25). Hodnoty výberových rozptylov a kritických hodnôt sú (príklad 8.11): $s_1^2 = 5,76$; $s_2^2 = 8,41$; $f(n_2-1, n_1-1, 1-\frac{\alpha}{2}) = f(7,7;0,975) = 0,20$ a $f(n_2-1, n_1-1, \frac{\alpha}{2}) = f(7,7;0,025) = 4,99$.

Potom 95 % interval spoľahlivosti pre σ_1^2 / σ_2^2 je

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f(7,7;0,975) \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2} f(7,7;0,025)$$

$$\frac{5,76}{8,41} \times 0,20 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{5,76}{8,41} \times 4,99$$

$$0,136979786 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 3,41764566$$

$$0,1369 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 3,4177$$

Pretože tento interval spoľahlivosti obsahuje číslo 1, nezamietame nulovú hypotézu o rovnosti rozptylov na úrovni spoľahlivosti 95 %.

8.6 Indukcie o dvoch podieloch v základných súboroch

V tejto podkapitole sa zaoberáme dvoma binomickými parametrami p_1 a p_2. Prezentujeme testovanie hypotéz a intervaly spoľahlivosti založené na aproximácii binomického rozdelenia normálnym rozdelením.

8.6.1 Testovanie hypotézy $H_0 : p_1 = p_2$ pri veľkom rozsahu výberu

Predpokladajme, že máme dva nezávislé náhodné výbery o rozsahoch n_1 a n_2 z dvoch základných súborov. Nech X_1 a X_2 reprezentujú počty pozorovaní, ktoré patria do triedy záujmu vo výberoch 1 a 2. Ďalej predpokladajme, že aproximácia binomického rozdelenia normálnym sa dá korektne použiť na obidva základné súbory. Potom odhady parametrov dvoch binomických rozdelení $\hat{P}_1 = X_1 / n_1$ a $\hat{P}_2 = X_2 / n_2$ majú približne normálne rozdelenie. Chceme testovať hypotézy

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{oproti} \quad H_1 : p_1 \neq p_2$$

Štatistika

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \tag{8.27}$$

má rozdelenie približne normované normálne. Keď nulová hypotéza $H_0 : p_1 = p_2$ je správna a $p_1 = p_2 = p,$ potom náhodná premenná

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

má rozdelenie približne $N(0,1)$. Odhad spoločného parametra *p* je

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

Testovacia štatistika pre $H_0 : p_1 = p_2$ je

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \tag{8.28}$$

V tabuľke 8.6 sú uvedené testy pre obojstrannú alternatívu a jednostranné alternatívy.

Tabuľka 8.6. *Testy o rovnosti dvoch podielov;* $p_1 = p_2 = p$

Hypotézy	Testovacia štatistika	Kritérium zamietnutia
$H_0 : p_1 = p_2$ $H_0 : p_1 \neq p_2$	$Z_0 = \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$z_0 < -k_\alpha$ alebo $z_0 > k_\alpha$
$H_0 : p_1 = p_2$ $H_0 : p_1 < p_2$		$z_0 < -k_{2\alpha}$
$H_0 : p_1 = p_2$ $H_0 : p_1 > p_2$		$z_0 > k_{2\alpha}$

Príklad 8.14

Výťažky z ľubovníka sú široko používané na liečbu depresie. Článok z 18. apríla 2001 vydaný v časopise *Journal of American Medical Association* (Effectiveness of St. John´s Wort on Major Depression: A Randomized Controlled Trial) porovnával účinnosť štandardného extraktu ľubovníka s placebom na 200 ambulantných pacientoch s diagnózou depresie. Pacienti boli náhodne rozdelení do dvoch skupín, jedna skupina dostala ľubovník bodkovaný a iná dostala placebo. Po ôsmich týždňoch, 19 z pacientov liečených placebom ukázalo zlepšenie, zatiaľ čo 27 z pacientov liečených ľubovníkom bodkovaným sa zlepšilo. Je nejaký dôvod, prečo sa domnievať, že ľubovník je účinný v liečbe depresie? Pri riešení použijeme $\alpha = 0{,}05$.

Problém môžeme riešiť podľa ôsmich krokov navrhnutých v časti 7.1.3.

1. Parameter záujmu sú p_1 a p_2, podiel pacientov, ktorí vykazovali zlepšenie po liečbe s ľubovníkom bodkovaným (p_1) alebo placebo (p_2).
2. $H_0 : p_1 = p_2$
3. $H_0 : p_1 \neq p_2$
4. $\alpha = 0{,}05.$
5. Hodnota testovacia štatistika je

$$z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

kde $\hat{p}_1 = 27/100 = 0{,}27$, $\hat{p}_2 = 19/100 = 0{,}19$, $n_1 = n_2 = 100$ a

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{27 + 19}{100 + 100} = 0{,}23$$

6. $H_0 : p_1 = p_2$ zamietame, keď $z_0 > 1{,}96 = k_{0{,}05}$ alebo $z_0 < -k_{0{,}05} = -1{,}96$.
7. Počítajme:

Hodnota testovacej štatistiky je

$$z_0 = \frac{0,27 - 0,19}{\sqrt{0,23 \cdot 0,77 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} \right)}} = 1,3442$$

8. Záver: Pretože $z_0 = 1,3442 < 1,96 = k_{0,05}$, nemôžeme zamietnuť nulovú hypotézu na úrovni významnosti 0,05. Všimnime si, že *P*-hodnota °je $P \approx 0,178884$. Nie sú k dispozícii dostatočné dôkazy na podporu tvrdení, že ľubovník bodkovaný je účinný v liečbe depresie.

8.6.2 Testovanie hypotézy $H_0 : p_1 = p_2$ pri malom rozsahu výberu

Vo veľa problémoch, týkajúcich sa podielov p_1 a p_2, sa používajú pomerne veľké rozsahy výberov, takže postup založený na normálnej aproximácii binomického rozdelenia sa veľmi používa v praxi. Avšak, občas sa stretneme s problémom malého rozsahu výberu. V takýchto prípadoch nemôžeme použiť *Z*-test, vyžaduje sa alternatívny postup. V tejto podkapitole opisujeme postup založený na hypergeometrickom rozdelení.

Predpokladajme, že X_1 a X_2 sú počty výsledkov „áno“ v dvoch náhodných výberoch o rozsahoch n_1 a n_2. Testovací postup vyžaduje, aby celkový počet výsledkov „áno“ mal konštantnú hodnotu $X_1 + X_2 = Y$. Teraz zoberme do úvahy hypotézy

$$H_0 : p_1 = p_2 \quad \text{oproti} \quad H_1 : p_1 > p_2$$

Vzhľadom na to, že $X_1 + X_2 = Y$, veľké hodnoty X_1 podporujú H_1 a malé hodnoty X_1 podporujú H_0. Z toho dôvodu, keď X_1 je dostatočne veľká, H_0 zamietneme.

Pretože kombinovaný výber $n_1 + n_2$ pozorovaní obsahuje celkový počet výsledkov „áno“ $X_1 + X_2 = Y$, pri testovaní $H_0 : p_1 = p_2$ pre výsledky „áno“ nie je pravdepodobnejšie, že sa sústreďujú v prvom výbere ako v druhom. To znamená, že všetky spôsoby, ktorými možno $n_1 + n_2$ pozorovaní rozdeliť na dva výbery s rozsahmi n_1 a n_2, sú rovnako pravdepodobné. Počet spôsobov, ako vybrať X_1, výsledkov „áno“ pre prvý výber a $Y - X_1$ výsledkov „áno“ pre druhý výber je

$$\binom{Y}{X_1} \binom{n_1 + n_2 - Y}{n_1 - X_1}$$

Pretože výsledky sú rovnako pravdepodobné, pravdepodobnosť, že presne X_1 výsledkov „áno“ sa nachádza vo výbere 1, je podiel počtu výsledkov „áno“ vo výbere 1 a celkového počtu výsledkov. Potom za predpokladu, že $H_0 : p_1 = p_2$ je správna, platí:

$$P(X_1 = x_1 \,|\, Y \text{ "áno" z } n_1 + n_2) = \frac{\binom{Y}{x_1}\binom{n_1 + n_2 - Y}{n_1 - x_1}}{\binom{n_1 + n_2}{n_1}} \tag{8.29}$$

Vzťah (8.29) je vlastne pravdepodobnostná funkcie hypergeometrického rozdelenia.

Na použitie vzťahu (8.29) na testovanie hypotéz by sme mali vypočítať pravdepodobnosť nájdenia hodnoty X_1 aspoň tak extrémnej ako pozorovaná hodnota X_1. Všimnime si, že táto pravdepodobnosť je *P*-hodnota. Keď táto *P*-hodnota je dostatočne malá, nulovú hypotézu zamietneme. Tento prístup by sa mohol aplikovať na dolnú jednostrannú alternatívu a dvojstrannú alternatívu.

Príklad 8.15

Izolačná tkanina používaná v plošných spojoch sa vyrába vo veľkých kotúčoch. Výrobca sa snaží zlepšiť výnos procesu, ktorý je daný počtom vyrobených kotúčov bez defektu. Výber 10 kotú-čov obsahuje presne 4 kotúče bez defektu. Z analýzy chýb rôznych druhov procesní inžinieri navrhli niekoľko zmien v procese. Po vykonaní týchto zmien ďalší výber 10 kotúčov obsahuje 8 kotúčov bez defektu. Podporujú dáta tvrdenie, že nový proces je lepší ako starý? Použime úroveň významnosti $\alpha = 0{,}10$.

Vypočítame *P*-hodnotu, aby sme odpovedali na túto otázku. V našom príklade $x_1 = 8$, $n_1 = n_2 = 10$ a $y = 8 + 4 = 12$. Hodnoty x_1, ktoré sú viac extrémne ako 8, sú 9 a 10. Preto

$$P(X_1 = 8 \,|\, 12 \text{ áno}) = \frac{\binom{12}{8}\binom{2}{2}}{\binom{20}{10}} = 0{,}0750$$

$$P(X_1 = 9 \,|\, 12 \text{ áno}) = \frac{\binom{12}{9}\binom{2}{1}}{\binom{20}{10}} = 0{,}0095$$

$$P(X_1 = 10 \,|\, 12 \text{ áno}) = \frac{\binom{12}{10}\binom{2}{0}}{\binom{20}{10}} = 0{,}0003$$

Potom *P*-hodnota je $P = 0{,}0750 + 0{,}0095 + 0{,}0003 = 0{,}848$. Teda na úrovni významnosti $\alpha = 0{,}10$ nulovú hypotézu zamietame a tvrdíme, že zmeny navrhnuté inžiniermi zlepšili výnos procesu.

Tento postup testovania sa niekedy nazýva **Fisherov-Irwinov test.** Pretože tento test závisí od predpokladu, že $X_1 + X_2$ je stanovený na nejakú hodnotu, niektorí štatistici argumentujú proti použitiu testu, keď $X_1 + X_2$ nie je v skutočnosti stanovený. Samozrejme

$X_1 + X_2$ nie je stanovený výberovým postupom v našom prípade. Avšak, pretože neexistujú žiadne iné lepšie konkurenčné postupy, Fisherov-Irwinov test sa často používa bez ohľadu na to, či je alebo nie je $X_1 + X_2$ stanovený vopred.

8.6.3 Chyba 2. druhu a voľba rozsahu výberu

Výpočet pravdepodobnosti chyby 2. druhu β pre test hypotézy $H_0 : p_1 = p_2$ je trochu zložitejší, ako v prípade jedného výberu. Problém je ten, že menovateľ testovacej štatistiky Z_0 je odhad smerodajnej odchýlky štatistiky $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ za predpokladu, že $p_1 = p_2 = p$. Keď nulová hypotéza $H_0 : p_1 = p_2$ nie je správna, odhad smerodajnej odchýlky štatistiky $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ je

$$\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \tag{8.30}$$

Pre dvojstrannú alternatívnu hypotézu je

$$\beta = \Phi\left[\frac{k_\alpha\sqrt{\overline{pq}(1/n_1 + 1/n_2)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}}\right] - \Phi\left[\frac{-k_\alpha\sqrt{\overline{pq}(1/n_1 + 1/n_2)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}}\right] \tag{8.31}$$

kde

$\overline{p} = \dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$, $\overline{q} = \dfrac{n_1(1-p_1) + n_2(1-p_2)}{n_1 + n_2}$ a $\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}$ je dané v (8.28).

Pre alternatívnu hypotézu $H_0 : p_1 < p_2$ je

$$\beta = 1 - \Phi\left[\frac{-k_{2\alpha}\sqrt{\overline{pq}(1/n_1 + 1/n_2)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}}\right] \tag{8.32}$$

a pre alternatívnu hypotézu $H_0 : p_1 > p_2$ je

$$\beta = \Phi\left[\frac{k_{2\alpha}\sqrt{\overline{pq}(1/n_1 + 1/n_2)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}}\right] \tag{8.33}$$

Pre stanovené dvojice hodnôt p_1 a p_2 môžeme nájsť rozsah výberu $n_1 = n_2 = n$ požadovaný pre test na úrovni významnosti α, ktorý má stanovenú pravdepodobnosť chyby 2. druhu β.

Pre dvojstrannú alternatívnu hypotézu je spoločný rozsah výberu daný vzťahom

$$n = \left(\frac{k_\alpha \sqrt{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)/2} + k_{2\beta} \sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2}}{p_1 - p_2} \right)^2 \tag{8.34}$$

kde $n_1 = n_2 = n$, $q_1 = 1 - p_1$ a $q_2 = 1 - p_2$.

Pre jednostrannú alternatívnu hypotézu je spoločný rozsah výberu daný vzťahom

$$n = \left(\frac{k_{2\alpha} \sqrt{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)/2} + k_{2\beta} \sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2}}{p_1 - p_2} \right)^2 \tag{8.35}$$

kde $n_1 = n_2 = n$, $q_1 = 1 - p_1$ a $q_2 = 1 - p_2$.

8.6.4 Interval spoľahlivosti pre $p_1 - p_2$

Interval spoľahlivosti pre $p_1 - p_2$ môžeme nájsť priamo pomocou štatistiky

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

s rozdelením $N(0,1)$. Teda $P(-k_\alpha \le Z \le k_\alpha) \approx 1 - \alpha$, z čoho po dosadení za Z a úpravou dostaneme $100(1-\alpha)\%$ dvojstranný interval spoľahlivosti pre $p_1 - p_2$.

Definícia intervalu spoľahlivosti pre $p_1 - p_2$

Keď $\hat{p}_1$ a $\hat{p}_2$ sú hodnoty výberových podielov z dvoch nezávislých náhodných výberov o rozsahoch n_1 a n_2, ktoré patria do príslušnej triedy záujmu, potom $100(1-\alpha)\%$ **interval spoľahlivosti pre skutočný rozdiel** $p_1 - p_2$ je

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \le$$

$$\le p_1 - p_2 \le (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + k_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \tag{8.36}$$

kde k_α je kritická rozdelenia $N(0,1)$.

Príklad 8.16

V náhodnom výbere zo základného súboru 100 kľukových hriadeľov automobilového motora, 12 má kvalitu povrchu, ktorá je drsnejšia, ako dovoľujú špecifikácie. Hodnota bodového odhadu podielu hriadeľov v základnom súbore, ktoré prekračujú drsnosť danú špecifikáciami, je $\hat{p}_1 = 12/100 = 0{,}12$. Predpokladajme, že sa urobila zmena v procese povrchovej úpravy. V druhom náhodnom výbere sme získali tiež 100 kľukových hriadeľov, z ktorých 9 má drsnejší povrch, ako dovoľujú špecifikácie. Hodnota bodového odhadu podielu hriadeľov v druhom základnom súbore, ktoré prekračujú drsnosť danú špecifikáciami, je $\hat{p}_2 = 9/100 = 0{,}09$. Chceme získať približný 95 % interval spoľahlivosti pre rozdiel v podieloch defektných hriadeľov vyrobených v dvoch procesoch.

Výpočet urobíme tak, že do vzťahu (8.36) dosadíme tieto hodnoty $n_1 = n_2 = 100$, $\hat{p}_1 = 0{,}12$, $\hat{p}_2 = 0{,}09$ a $k_{0{,}05} = 1{,}96$:

$$(0{,}12 - 0{,}09) - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}12 \cdot (1-0{,}12)}{100} + \frac{0{,}09 \cdot (1-0{,}09)}{100}} \leq$$

$$\leq p_1 - p_2 \leq (0{,}12 - 0{,}09) + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}12 \cdot (1-0{,}12)}{100} + \frac{0{,}09 \cdot (1-0{,}09)}{100}}$$

Upravujeme

$$0{,}03 - 1{,}96 \cdot \sqrt{10{,}56 + 8{,}19} \leq p_1 - p_2 \leq 0{,}03 + 1{,}96 \cdot \sqrt{10{,}56 + 8{,}19}$$

$$0{,}03 - 8{,}487 \leq p_1 - p_2 \leq 0{,}03 + 8{,}487$$

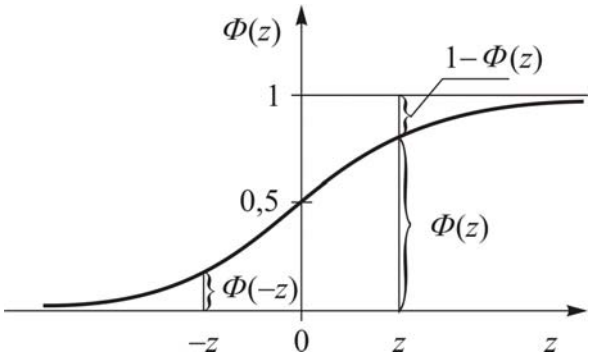
Po úprave sme dostali

$$-8{,}457 \leq p_1 - p_2 \leq 8{,}517$$

Tento interval obsahuje nulu, čo znamená, že na základe výberových dát sa zdá nepravdepodobné, že zmeny vykonané v procese povrchovej úpravy znížili podiel vyrobených kľukových hriadeľov, ktoré prekračujú drsnosť danú špecifikáciami.

PRÍLOHY

DISTRIBUČNÁ FUNKCIA NORMOVANÉHO NORMÁLNEHO ROZDELENIA



$$F(x)=\Phi(z),\ \text{kde}\ z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

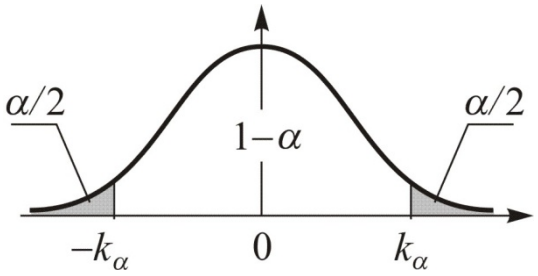
z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]	z	ϕ[z]
0.	0.50000	0.3	0.61791	0.6	0.72575	0.9	0.81594	1.2	0.88493
0.01	0.50399	0.31	0.62172	0.61	0.72907	0.91	0.81859	1.21	0.88686
0.02	0.50798	0.32	0.62552	0.62	0.73237	0.92	0.82121	1.22	0.88877
0.03	0.51197	0.33	0.62930	0.63	0.73565	0.93	0.82381	1.23	0.89065
0.04	0.51595	0.34	0.63307	0.64	0.73891	0.94	0.82639	1.24	0.89251
0.05	0.51994	0.35	0.63683	0.65	0.74215	0.95	0.82894	1.25	0.89435
0.06	0.52392	0.36	0.64058	0.66	0.74537	0.96	0.83147	1.26	0.89617
0.07	0.52790	0.37	0.64431	0.67	0.74857	0.97	0.83398	1.27	0.89796
0.08	0.53188	0.38	0.64803	0.68	0.75175	0.98	0.83646	1.28	0.89973
0.09	0.53586	0.39	0.65173	0.69	0.75490	0.99	0.83891	1.29	0.90147
0.1	0.53983	0.4	0.65542	0.7	0.75804	1.	0.84134	1.3	0.90320
0.11	0.54380	0.41	0.65910	0.71	0.76115	1.01	0.84375	1.31	0.90490
0.12	0.54776	0.42	0.66276	0.72	0.76424	1.02	0.84614	1.32	0.90658
0.13	0.55172	0.43	0.66640	0.73	0.76730	1.03	0.84849	1.33	0.90824
0.14	0.55567	0.44	0.67003	0.74	0.77035	1.04	0.85083	1.34	0.90988
0.15	0.55962	0.45	0.67364	0.75	0.77337	1.05	0.85314	1.35	0.91149
0.16	0.56356	0.46	0.67724	0.76	0.77637	1.06	0.85543	1.36	0.91309
0.17	0.56749	0.47	0.68082	0.77	0.77935	1.07	0.85769	1.37	0.91466
0.18	0.57142	0.48	0.68439	0.78	0.78230	1.08	0.85993	1.38	0.91621
0.19	0.57535	0.49	0.68793	0.79	0.78524	1.09	0.86214	1.39	0.91774
0.2	0.57926	0.5	0.69146	0.8	0.78814	1.1	0.86433	1.4	0.91924
0.21	0.58317	0.51	0.69497	0.81	0.79103	1.11	0.86650	1.41	0.92073
0.22	0.58706	0.52	0.69847	0.82	0.79389	1.12	0.86864	1.42	0.92220
0.23	0.59095	0.53	0.70194	0.83	0.79673	1.13	0.87076	1.43	0.92364
0.24	0.59483	0.54	0.70540	0.84	0.79955	1.14	0.87286	1.44	0.92507
0.25	0.59871	0.55	0.70884	0.85	0.80234	1.15	0.87493	1.45	0.92647
0.26	0.60257	0.56	0.71226	0.86	0.80511	1.16	0.87698	1.46	0.92785
0.27	0.60642	0.57	0.71566	0.87	0.80785	1.17	0.87900	1.47	0.92922
0.28	0.61026	0.58	0.71904	0.88	0.81057	1.18	0.88100	1.48	0.93056
0.29	0.61409	0.59	0.72240	0.89	0.81327	1.19	0.88298	1.49	0.93189

z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$
1.5	0.93319	1.8	0.96407	2.1	0.98214	2.4	0.99180	2.7	0.99653
1.51	0.93448	1.81	0.96485	2.11	0.98257	2.41	0.99202	2.71	0.99664
1.52	0.93574	1.82	0.96562	2.12	0.98300	2.42	0.99224	2.72	0.99674
1.53	0.93699	1.83	0.96638	2.13	0.98341	2.43	0.99245	2.73	0.99683
1.54	0.93822	1.84	0.96712	2.14	0.98382	2.44	0.99266	2.74	0.99693
1.55	0.93943	1.85	0.96784	2.15	0.98422	2.45	0.99286	2.75	0.99702
1.56	0.94062	1.86	0.96856	2.16	0.98461	2.46	0.99305	2.76	0.99711
1.57	0.94179	1.87	0.96926	2.17	0.98500	2.47	0.99324	2.77	0.99720
1.58	0.94295	1.88	0.96995	2.18	0.98537	2.48	0.99343	2.78	0.99728
1.59	0.94408	1.89	0.97062	2.19	0.98574	2.49	0.99361	2.79	0.99736
1.6	0.94520	1.9	0.97128	2.2	0.98610	2.5	0.99379	2.8	0.99744
1.61	0.94630	1.91	0.97193	2.21	0.98645	2.51	0.99396	2.81	0.99752
1.62	0.94738	1.92	0.97257	2.22	0.98679	2.52	0.99413	2.82	0.99760
1.63	0.94845	1.93	0.97320	2.23	0.98713	2.53	0.99430	2.83	0.99767
1.64	0.94950	1.94	0.97381	2.24	0.98745	2.54	0.99446	2.84	0.99774
1.65	0.95053	1.95	0.97441	2.25	0.98778	2.55	0.99461	2.85	0.99781
1.66	0.95154	1.96	0.97500	2.26	0.98809	2.56	0.99477	2.86	0.99788
1.67	0.95254	1.97	0.97558	2.27	0.98840	2.57	0.99492	2.87	0.99795
1.68	0.95352	1.98	0.97615	2.28	0.98870	2.58	0.99506	2.88	0.99801
1.69	0.95449	1.99	0.97670	2.29	0.98899	2.59	0.99520	2.89	0.99807
1.7	0.95543	2.	0.97725	2.3	0.98928	2.6	0.99534	2.9	0.99813
1.71	0.95637	2.01	0.97778	2.31	0.98956	2.61	0.99547	2.91	0.99819
1.72	0.95728	2.02	0.97831	2.32	0.98983	2.62	0.99560	2.92	0.99825
1.73	0.95818	2.03	0.97882	2.33	0.99010	2.63	0.99573	2.93	0.99831
1.74	0.95907	2.04	0.97932	2.34	0.99036	2.64	0.99585	2.94	0.99836
1.75	0.95994	2.05	0.97982	2.35	0.99061	2.65	0.99598	2.95	0.99841
1.76	0.96080	2.06	0.98030	2.36	0.99086	2.66	0.99609	2.96	0.99846
1.77	0.96164	2.07	0.98077	2.37	0.99111	2.67	0.99621	2.97	0.99851
1.78	0.96246	2.08	0.98124	2.38	0.99134	2.68	0.99632	2.98	0.99856
1.79	0.96327	2.09	0.98169	2.39	0.99158	2.69	0.99643	2.99	0.99861

—

z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$	z	$\phi[z]$
3.	0.99865	3.5	0.99977	4.	0.99996833	4.5	0.99999660	5.	0.99999971
3.1	0.99903	3.6	0.99984	4.1	0.99997934	4.6	0.99999789	5.1	0.99999983
3.2	0.99931	3.7	0.99989	4.2	0.99998665	4.7	0.99999870	5.2	0.99999990
3.3	0.99952	3.8	0.99993	4.3	0.99999146	4.8	0.99999921	5.3	0.99999994
3.4	0.99966	3.9	0.99995	4.4	0.99999459	4.9	0.99999952	5.4	0.99999997
3.5	0.99977	4.	0.99997	4.5	0.99999660	5.	0.99999971	5.5	0.99999998

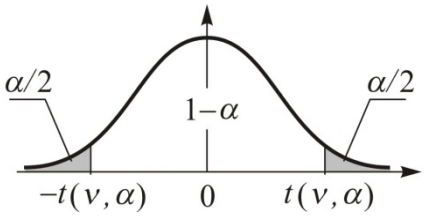
KRITICKÉ HODNOTY NORMÁLNEHO ROZDELENIA



$$P\left(|X| > k_\alpha\right) = \alpha$$

α	k_α	α	k_α	α	k_α
0,002	3,090	0,042	2,034	0,082	1,739
0,004	2,878	0,044	2,014	0,084	1,728
0,006	2,748	0,046	2,995	0,086	1,717
0,008	2,652	0,048	1,977	0,088	1,706
0,010	2,576	0,050	1,960	0,090	1,695
0,012	2,512	0,052	1,943	0,092	1,685
0,014	2,457	0,054	1,927	0,094	1,675
0,016	2,409	0,056	1,911	0,096	1,665
0,018	2,366	0,058	1,896	0,098	1655
0,020	2,326	0,060	1,881	0,100	1,645
0,022	2,290	0,062	1,866	0,110	1,598
0,024	2,257	0,064	1,852	0,120	1,555
0,026	2,226	0,066	1,838	0,130	1,514
0,028	2,197	0,068	1,825	0,140	1,476
0,030	2,170	0,070	1,812	0,150	1,440
0,032	2,144	0,072	1,799	0,160	1,405
0,034	2,120	0,074	1,787	0,170	1,372
0,036	2,097	0,076	1,774	0,180	1,341
0,038	2,075	0,078	1,762	0,190	1,311
0,040	2,054	0,080	1,751	0,200	1,282

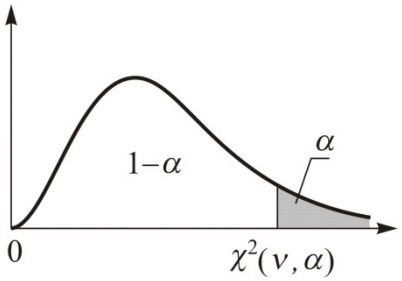
KRITICKÉ HODNOTY t – ROZDELENIA (Studentovho)



$$P\left(|T| > t(\nu,\alpha)\right) = \alpha$$

ν	$\alpha = 0{,}20$	$\alpha = 0{,}10$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}02$	$\alpha = 0{,}01$
1	3,08	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	6,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1, 833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1, 812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1, 796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1, 782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1, 771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1, 761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1, 753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1, 746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,426	2,704
60	1, 296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

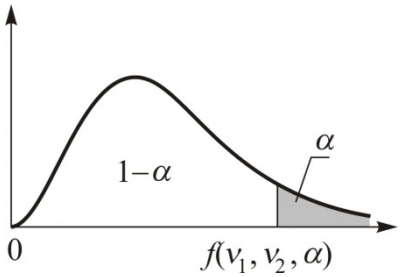
KRITICKÉ HODNOTY χ^2 - ROZDELENIA



$$P\left(X^2 > \chi^2(\nu,\alpha)\right) = \alpha$$

ν \ α	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1		0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1030	0,2110	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,1150	0,2160	0,3250	0,5840	6,25	7,82	9,35	11,30	12,80
4	0,2070	0,2970	0,4840	0,7110	1,0600	7,78	9,49	11,10	13,30	14,90
5	0,4120	0,5540	0,8310	1,1500	1,6100	9,24	11,10	12,80	15,10	16,70
6	0,6760	0,8720	1,2400	1,6400	2,2000	10,60	12,60	14,40	16,80	18,50
7	0,9890	1,2400	1,6900	2,1700	2,8300	12,00	14,10	16,00	18,50	20,30
8	1,3400	1,6500	2,1800	2,7300	3,4900	13,40	15,50	17,50	20,10	22,00
9	1,7300	2,0900	2,7000	3,3300	4,1700	14,70	16,90	19,00	21,70	23,60
10	2,1600	2,5600	3,2500	3,9400	4,8700	16,00	18,30	20,50	23,20	25,20
11	2,6000	3,0500	3,8200	4,5700	5,5800	17,30	19,70	21,90	24,70	26,80
12	3,0700	3,5700	4,4000	5,2300	6,3000	18,50	21,00	23,30	26,20	28,30
13	3,5700	4,1100	5,0100	5,8900	7,0400	19,80	22,40	24,70	27,70	29,80
14	4,0700	4,6600	5,6300	6,5700	7,7900	21,10	23,70	26,10	29,10	31,30
15	4,6000	5,2300	6,2600	7,2600	8,5500	22,30	25,00	27,50	30,60	32,80
16	5,1400	5,8100	6,9100	7,9600	9,3100	23,50	26,30	28,80	32,00	34,30
17	5,7000	6,4100	7,6500	8,6700	10,1000	24,80	27,60	30,20	33,40	35,70
18	6,2600	7,0100	8,2300	9,3900	10,9000	26,00	28,90	31,50	34,80	37,20
19	6,8400	7,6300	8,9100	10,1000	11,7000	27,20	30,10	32,90	36,20	38,60
20	7,4300	8,2600	9,5900	10,9000	12,4000	28,40	31,40	34,20	37,60	40,00
21	8,0300	8,9000	10,3000	11,6000	13,2000	29,60	32,70	35,50	38,90	41,40
22	8,6400	9,5400	11,0000	12,3000	14,0000	30,80	33,90	36,80	40,30	42,80
23	9,2600	10,2000	11,7000	13,1000	14,8000	32,00	35,20	38,10	41,60	44,20
24	9,8900	10,9000	12,4000	13,8000	15,7000	33,20	36,40	39,40	43,00	45,60
25	10,5000	11,5000	13,1000	14,6000	16,5000	34,40	37,70	40,60	44,30	46,90
26	11,2000	12,2000	13,8000	15,4000	17,3000	35,50	38,90	41,90	45,60	48,30
27	11,8000	12,9000	14,6000	16,2000	18,1000	36,70	40,10	43,20	47,00	49,60
28	12,5000	13,6000	15,3000	16,9000	18,9000	37,90	41,30	44,50	48,30	51,00
29	13,1000	14,3000	16,0000	17,7000	19,8000	39,10	42,60	45,70	49,60	52,30
30	13,8000	15,0000	16,8000	18,5000	20,6000	40,30	43,80	47,00	50,90	53,70

KRITICKÉ HODNOTY *F* – ROZDELENIA (Fisherovho – Snedecorovho)



$$P\left(F > f(\nu_1, \nu_2, \alpha)\right) = \alpha$$

$\alpha = 0{,}01$									
ν_2 \ ν_1	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
4	15,977020	15,52186	15,206860	14,975760	14,798890	14,65913	14,545900	14,452280	14,373590
5	11,391930	10,96702	10,672250	10,455510	10,289310	10,15776	10,051020	9,962648	9,888275
6	9,148301	8,745895	8,466125	8,259995	8,101651	7,976121	7,874119	7,789570	7,718333
7	7,846645	7,460435	7,191405	6,992833	6,840049	6,718752	6,620063	6,538166	6,469091
8	7,006077	6,631825	6,370681	6,177624	6,028870	5,910619	5,814294	5,734275	5,666719
9	6,422085	6,056941	5,801770	5,612865	5,467123	5,351129	5,256542	5,177890	5,111431
10	5,994339	5,636326	5,385811	5,200121	5,056693	4,942421	4,849147	4,771518	4,705870
11	5,668300	5,316009	5,069210	4,886072	4,744468	4,631540	4,539282	4,462436	4,397401
12	5,411951	5,064343	4,820574	4,639502	4,499365	4,387510	4,296054	4,219820	4,155258
13	5,205330	4,861621	4,620363	4,440997	4,302062	4,191078	4,100267	4,024518	3,960326
14	5,035378	4,694964	4,455820	4,277882	4,139946	4,029680	3,939396	3,864039	3,800141
15	4,893210	4,555614	4,318273	4,141546	4,004453	3,894788	3,804940	3,729902	3,666240
16	4,772578	4,437420	4,201634	4,025947	3,889572	3,780415	3,690931	3,616157	3,552687
17	4,668968	4,335939	4,101505	3,926719	3,790964	3,682242	3,593066	3,518512	3,455198
18	4,579036	4,247882	4,014637	3,840639	3,705422	3,597074	3,508162	3,433793	3,370608
19	4,500258	4,170767	3,938573	3,765269	3,630525	3,522503	3,433817	3,359605	3,296527
20	4,430690	4,102685	3,871427	3,698740	3,564412	3,456676	3,368186	3,294108	3,231120
21	4,368815	4,042144	3,811725	3,639590	3,505632	3,398147	3,309830	3,235867	3,172953
22	4,313429	3,987963	3,758301	3,586660	3,453034	3,345773	3,257606	3,183742	3,120891
23	4,263567	3,939195	3,710218	3,539024	3,405695	3,298634	3,210599	3,136822	3,074025
24	4,218445	3,895070	3,666717	3,495928	3,362867	3,255985	3,168069	3,094367	3,031615
25	4,177420	3,854957	3,627174	3,456754	3,323937	3,217217	3,129406	3,055771	2,993056
26	4,139960	3,818336	3,591075	3,420993	3,288399	3,181824	3,094108	3,020530	2,957848
27	4,105622	3,784770	3,557991	3,388219	3,255827	3,149385	3,061754	2,988228	2,925573
28	4,074032	3,753895	3,527559	3,358073	3,225868	3,119547	3,031992	2,958512	2,895881
29	4,044873	3,725399	3,499475	3,330252	3,198219	3,092009	3,004524	2,931084	2,868472
30	4,017877	3,699019	3,473477	3,304499	3,172624	3,066516	2,979094	2,905690	2,843095

$\alpha = 0,01$

v_2 \ v_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12
31	3,992811	3,674528	3,449341	3,280591	3,148863	3,042849	2,955484	2,882112	2,819532
32	3,969477	3,651731	3,426876	3,258338	3,126746	3,020818	2,933506	2,860163	2,797595
33	3,947701	3,630458	3,405914	3,237573	3,106108	3,000261	2,912997	2,839680	2,777122
34	3,927333	3,610562	3,386309	3,218154	3,086807	2,981033	2,893814	2,820521	2,757971
35	3,908241	3,591914	3,367935	3,199952	3,068716	2,963012	2,875833	2,802561	2,740018
36	3,890308	3,574399	3,350677	3,182858	3,051726	2,946086	2,858945	2,785692	2,723155
37	3,873433	3,557918	3,334440	3,166774	3,035738	2,930159	2,843053	2,769817	2,707284
38	3,857524	3,542383	3,319133	3,151612	3,020668	2,915145	2,828072	2,754851	2,692322
39	3,842502	3,527713	3,304681	3,137296	3,006438	2,900968	2,813925	2,740719	2,678192
40	3,828294	3,513840	3,291012	3,123757	2,992981	2,887560	2,800545	2,727352	2,664827
41	3,814835	3,500699	3,278067	3,110934	2,980234	2,874861	2,787871	2,714690	2,652167
42	3,802069	3,488235	3,265787	3,098771	2,968144	2,862814	2,775850	2,702679	2,640156
43	3,789942	3,476396	3,254125	3,087218	2,956661	2,851373	2,764431	2,691269	2,628747
44	3,778409	3,465137	3,243033	3,076232	2,945740	2,840491	2,753570	2,680418	2,617896
45	3,767427	3,454416	3,232472	3,065771	2,935341	2,830129	2,743229	2,670084	2,607562
46	3,756957	3,444196	3,222404	3,055798	2,925427	2,820251	2,733369	2,660232	2,597709
47	3,746964	3,434442	3,212796	3,046281	2,915966	2,810823	2,723960	2,650829	2,588305
48	3,737417	3,425123	3,203617	3,037188	2,906927	2,801816	2,714969	2,641845	2,579319
49	3,728286	3,416211	3,194838	3,028492	2,898283	2,793202	2,706371	2,633253	2,570725
50	3,719545	3,407680	3,186434	3,020168	2,890008	2,784956	2,698139	2,625026	2,562497
55	3,680897	3,369962	3,149283	2,983369	2,853424	2,748497	2,661744	2,588651	2,526110
60	3,649047	3,338884	3,118674	2,953049	2,823280	2,718454	2,631751	2,558670	2,496116
65	3,622349	3,312836	3,093020	2,927638	2,798015	2,693272	2,606607	2,533535	2,470966
70	3,599647	3,290689	3,071209	2,906032	2,776533	2,671859	2,585226	2,512158	2,449575
75	3,580106	3,271628	3,052437	2,887437	2,758044	2,653429	2,566821	2,493756	2,431158
80	3,563110	3,255049	3,036111	2,871265	2,741964	2,637398	2,550812	2,477747	2,415136
85	3,548191	3,240499	3,021782	2,857072	2,727851	2,623328	2,536759	2,463695	2,401070
90	3,534992	3,227626	3,009106	2,844515	2,715364	2,610879	2,524326	2,451260	2,388623
95	3,523230	3,216156	2,997811	2,833327	2,704238	2,599787	2,513246	2,440179	2,377530
100	3,512684	3,205872	2,987684	2,823295	2,694263	2,589841	2,503311	2,430242	2,367582
105	3,503174	3,196599	2,978553	2,814250	2,685268	2,580872	2,494352	2,421281	2,358610
110	3,494555	3,188194	2,970278	2,806052	2,677115	2,572743	2,486232	2,413158	2,350478
115	3,486707	3,180542	2,962743	2,798588	2,669692	2,565341	2,478838	2,405762	2,343072
120	3,479531	3,173545	2,955854	2,791764	2,662906	2,558574	2,472077	2,398999	2,336300
125	3,472945	3,167124	2,949531	2,785500	2,656676	2,552362	2,465871	2,392791	2,330083
129	3,468053	3,162354	2,944835	2,780848	2,652050	2,547748	2,461261	2,388179	2,325465

$\alpha = 0,01$

v_2 \ v_1	15	20	24	30	40	50	60	80	100
4	14,19820	14,01961	13,92906	13,83766	13,74538	13,68958	13,65220	13,60526	13,57699
5	9,722219	9,552646	9,466471	9,379329	9,291189	9,237811	9,202015	9,157029	9,129907
6	7,558994	7,395832	7,312721	7,228533	7,143222	7,091475	7,056737	7,013037	6,986667
7	6,314331	6,155438	6,074319	5,992010	5,908449	5,857682	5,823566	5,780605	5,754657
8	5,515125	5,359095	5,279264	5,198130	5,115610	5,065398	5,031618	4,989038	4,963296
9	4,962078	4,807995	4,728998	4,648582	4,566649	4,516715	4,483087	4,440656	4,414980
10	4,558140	4,405395	4,326929	4,246933	4,165287	4,115452	4,081855	4,039422	4,013719
11	4,250867	4,099046	4,020910	3,941132	3,859573	3,809716	3,776071	3,733533	3,707744
12	4,009619	3,858433	3,780485	3,700789	3,619181	3,569222	3,535473	3,492763	3,466845
13	3,815365	3,664609	3,586753	3,507042	3,425293	3,375176	3,341287	3,298357	3,272282
14	3,655697	3,505222	3,427387	3,347596	3,265641	3,215328	3,181274	3,138094	3,111842
15	3,522194	3,371892	3,294029	3,214110	3,131906	3,081371	3,047135	3,003683	2,977242
16	3,408947	3,258737	3,180811	3,100733	3,018248	2,967476	2,933046	2,889308	2,862669
17	3,311694	3,161518	3,083502	3,003241	2,920458	2,869437	2,834806	2,790774	2,763932
18	3,227286	3,077097	2,998974	2,918516	2,835420	2,784144	2,749309	2,704978	2,677930
19	3,153343	3,003109	2,924866	2,844201	2,760786	2,709251	2,674211	2,629578	2,602323
20	3,088041	2,937735	2,859363	2,778485	2,694749	2,642954	2,607708	2,562774	2,535313
21	3,029951	2,879556	2,801050	2,719955	2,635896	2,583844	2,548393	2,503160	2,475492
22	2,977946	2,827447	2,748802	2,667490	2,583111	2,530803	2,495149	2,449619	2,421747
23	2,931118	2,780504	2,701720	2,620191	2,535496	2,482935	2,447081	2,401258	2,373184
24	2,888732	2,737997	2,659072	2,577329	2,492321	2,439512	2,403461	2,357349	2,329076
25	2,850186	2,699325	2,620260	2,538305	2,452990	2,399937	2,363691	2,317296	2,288826
26	2,814982	2,663991	2,584787	2,502624	2,417007	2,363715	2,327279	2,280604	2,251941
27	2,782703	2,631580	2,552239	2,469872	2,383960	2,330434	2,293812	2,246863	2,218009
28	2,753000	2,601744	2,522268	2,439701	2,353501	2,299745	2,262941	2,215723	2,186682
29	2,725577	2,574188	2,494579	2,411817	2,325335	2,271355	2,234372	2,186890	2,157666
30	2,700180	2,548659	2,468921	2,385967	2,299211	2,245012	2,207854	2,160114	2,130710
31	2,676594	2,524942	2,445077	2,361937	2,274913	2,220500	2,183171	2,135178	2,105597
32	2,654632	2,502850	2,422861	2,339539	2,252253	2,197632	2,160136	2,111895	2,082141
33	2,634132	2,482222	2,402111	2,318613	2,231072	2,176247	2,138588	2,090105	2,060180
34	2,614952	2,462916	2,382687	2,299016	2,211227	2,156203	2,118384	2,069664	2,039573
35	2,596969	2,444810	2,364466	2,280626	2,192595	2,137377	2,099403	2,050450	2,020195
36	2,580074	2,427794	2,347337	2,263334	2,175068	2,119661	2,081534	2,032354	2,001938
37	2,564172	2,411773	2,331207	2,247044	2,158548	2,102957	2,064681	2,015278	1,984705
38	2,549177	2,396662	2,315989	2,231671	2,142952	2,087180	2,048759	1,999138	1,968411
39	2,535014	2,382385	2,301608	2,217140	2,128202	2,072255	2,033692	1,983858	1,952979
40	2,521616	2,368876	2,287998	2,203382	2,114232	2,058113	2,019411	1,969368	1,938341

$\alpha = 0,01$

v_2 \ v_1	15	20	24	30	40	50	60	80	100
41	2,508922	2,356074	2,275097	2,190338	2,100981	2,044695	2,005857	1,955609	1,924436
42	2,496878	2,343924	2,262851	2,177953	2,088394	2,031944	1,992974	1,942526	1,911210
43	2,485436	2,332378	2,251211	2,166177	2,076423	2,019813	1,980713	1,930069	1,898612
44	2,474552	2,321392	2,240134	2,154968	2,065022	2,008257	1,969029	1,918193	1,886599
45	2,464185	2,310926	2,229580	2,144285	2,054151	1,997234	1,957883	1,906859	1,875129
46	2,454300	2,300945	2,219512	2,134091	2,043775	1,986709	1,947237	1,896028	1,864166
47	2,444863	2,291414	2,209897	2,124354	2,033860	1,976649	1,937058	1,885669	1,853677
48	2,435846	2,282305	2,200705	2,115043	2,024376	1,967023	1,927316	1,875749	1,843630
49	2,427220	2,273589	2,191910	2,106132	2,015295	1,957803	1,917982	1,866242	1,833997
50	2,418961	2,265243	2,183485	2,097593	2,006592	1,948964	1,909032	1,857122	1,824753
55	2,382427	2,2283000	2,146180	2,059761	1,967989	1,909727	1,869272	1,816559	1,783606
60	2,352297	2,197806	2,115364	2,028479	1,936018	1,877187	1,836259	1,782816	1,749328
65	2,327023	2,172206	2,089479	2,002175	1,909099	1,849753	1,808397	1,754286	1,720305
70	2,305517	2,150410	2,067425	1,979748	1,886115	1,826304	1,784557	1,729835	1,695398
75	2,286997	2,131626	2,048411	1,960396	1,866260	1,806024	1,763920	1,708635	1,673777
80	2,270879	2,115271	2,031847	1,943526	1,848932	1,788309	1,745877	1,690072	1,654822
85	2,256726	2,100901	2,017288	1,928688	1,833677	1,772697	1,729964	1,673677	1,638062
90	2,244198	2,088176	2,004390	1,915536	1,820141	1,758834	1,715821	1,659088	1,623133
95	2,233031	2,076829	1,992884	1,903797	1,808050	1,746440	1,703168	1,646019	1,609745
100	2,223015	2,066646	1,982556	1,893254	1,797181	1,735292	1,691780	1,634242	1,597669
105	2,213979	2,057458	1,973234	1,883733	1,787360	1,725210	1,681474	1,623572	1,586719
110	2,205788	2,049125	1,964777	1,875093	1,778440	1,716047	1,672102	1,613860	1,576742
115	2,198327	2,041533	1,957070	1,867216	1,770302	1,707684	1,663542	1,604980	1,567613
120	2,191504	2,034588	1,950018	1,860005	1,762849	1,700018	1,655693	1,596830	1,559227
125	2,185240	2,028210	1,943540	1,853380	1,755996	1,692967	1,648469	1,589322	1,551495
129	2,180586	2,023471	1,938726	1,848454	1,750899	1,687720	1,643091	1,583728	1,545731

$\alpha = 0,05$

v_2 \ v_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	6,388233	6,256057	6,163132	6,094211	6,041044	5,998779	5,964371	5,935813	5,911729
5	5,192168	5,050329	4,950288	4,875872	4,818320	4,772466	4,735063	4,703967	4,677704
6	4,533677	4,387374	4,283866	4,206658	4,146804	4,099016	4,059963	4,027442	3,999935
7	4,120312	3,971523	3,865969	3,787044	3,725725	3,676675	3,636523	3,603037	3,574676
8	3,837853	3,687499	3,580580	3,500464	3,438101	3,388130	3,347163	3,312951	3,283939
9	3,633089	3,481659	3,373754	3,292746	3,229583	3,178893	3,137280	3,102485	3,072947
10	3,478050	3,325835	3,217175	3,135465	3,071658	3,020383	2,978237	2,942957	2,912977
11	3,356690	3,203874	3,094613	3,012330	2,947990	2,896223	2,853625	2,817930	2,787569
12	3,259167	3,105875	2,996120	2,913358	2,848565	2,796375	2,753387	2,717331	2,686637
13	3,179117	3,025438	2,915269	2,832098	2,766913	2,714356	2,671024	2,634650	2,603661
14	3,112250	2,958249	2,847726	2,764199	2,698672	2,645791	2,602155	2,565497	2,534243
15	3,055568	2,901295	2,790465	2,706627	2,640797	2,587626	2,543719	2,506806	2,475313
16	3,006917	2,852409	2,741311	2,657197	2,591096	2,537667	2,493513	2,456369	2,424660
17	2,964708	2,809996	2,698660	2,614299	2,547955	2,494291	2,449916	2,412561	2,380654
18	2,927744	2,772853	2,661305	2,576722	2,510158	2,456281	2,411702	2,374156	2,342067
19	2,895107	2,740058	2,628318	2,543534	2,476770	2,422699	2,377934	2,340210	2,307954
20	2,866081	2,710890	2,598978	2,514011	2,447064	2,392814	2,347878	2,309991	2,277581
21	2,840100	2,684781	2,572712	2,487578	2,420462	2,366048	2,320953	2,282916	2,250362
22	2,816708	2,661274	2,549061	2,463774	2,396503	2,341937	2,296696	2,258518	2,225831
23	2,795539	2,639999	2,527655	2,442226	2,374812	2,320105	2,274728	2,236419	2,203607
24	2,776289	2,620654	2,508189	2,422629	2,355081	2,300244	2,254739	2,216309	2,183380
25	2,758710	2,602987	2,490410	2,404728	2,337057	2,282097	2,236474	2,197929	2,164891
26	2,742594	2,586790	2,474109	2,388314	2,320527	2,265453	2,219718	2,181067	2,147926
27	2,727765	2,571886	2,459108	2,373208	2,305313	2,250131	2,204292	2,165540	2,132303
28	2,714076	2,558127	2,445259	2,359260	2,291264	2,235982	2,190044	2,151197	2,117869
29	2,701399	2,545386	2,432434	2,346342	2,278251	2,222874	2,176844	2,137908	2,104493
30	2,689628	2,533555	2,420523	2,334344	2,266163	2,210697	2,164580	2,125559	2,092063
31	2,678667	2,522538	2,409432	2,323171	2,254906	2,199355	2,153156	2,114054	2,080482
32	2,668437	2,512255	2,399080	2,312741	2,244396	2,188766	2,142488	2,103311	2,069665
33	2,658867	2,502635	2,389394	2,302982	2,234562	2,178856	2,132504	2,093254	2,059539
34	2,649894	2,493616	2,380313	2,293832	2,225340	2,169562	2,123140	2,083822	2,050040
35	2,641465	2,485143	2,371781	2,285235	2,216675	2,160829	2,114300	2,074956	2,041111
36	2,633532	2,477169	2,363751	2,277143	2,208518	2,152607	2,106054	2,066608	2,032703
37	2,626052	2,469650	2,356179	2,269512	2,200826	2,144853	2,098239	2,058734	2,024771
38	2,618988	2,462548	2,349027	2,262304	2,193559	2,137528	2,090856	2,051294	2,017276
39	2,612306	2,455831	2,342262	2,255485	2,186685	2,130597	2,083869	2,044253	2,010183
40	2,605975	2,449466	2,335852	2,249024	2,180107	2,124029	2,077248	2,037580	2,003459

$\alpha = 0,05$									
v_2 \ v_1	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
41	2,599969	2,443429	2,329771	2,242894	2,173989	2,117797	2,070965	2,031247	1,997078
42	2,594263	2,437693	2,323994	2,237070	2,168117	2,111875	2,064994	2,025229	1,991013
43	2,588836	2,432236	2,318498	2,231530	2,162530	2,106241	2,059313	2,019502	1,985242
44	2,583667	2,427040	2,313264	2,226253	2,157208	2,100873	2,053901	2,014046	1,979743
45	2,578739	2,422085	2,308273	2,221221	2,152133	2,095755	2,048739	2,008842	1,974498
46	2,574035	2,417356	2,303509	2,216417	2,147288	2,090868	2,043811	2,003873	1,969490
47	2,569540	2,412837	2,298956	2,211827	2,142658	2,086198	2,039101	1,999124	1,964702
48	2,565241	2,408514	2,294601	2,207436	2,138229	2,081730	2,034595	1,994580	1,960121
49	2,561124	2,404375	2,290432	2,203232	2,133988	2,077452	2,030279	1,990228	1,955734
50	2,557179	2,400409	2,286436	2,199202	2,129923	2,073351	2,026143	1,986056	1,951528
55	2,539689	2,382823	2,268717	2,181333	2,111894	2,055161	2,007792	1,967547	1,932863
60	2,525215	2,368270	2,254053	2,166541	2,096968	2,040098	1,992592	1,952212	1,917396
65	2,513040	2,356028	2,241716	2,154095	2,084407	2,027419	1,979796	1,939300	1,904370
70	2,502656	2,345586	2,231192	2,143478	2,073690	2,016601	1,968875	1,928278	1,893248
75	2,493696	2,336576	2,222110	2,134314	2,064439	2,00726	1,959445	1,918759	1,883642
80	2,485885	2,328721	2,214193	2,126324	2,056373	1,999115	1,95122	1,910456	1,875262
85	2,479015	2,321812	2,207229	2,119296	2,049276	1,991949	1,943984	1,903149	1,867886
90	2,472927	2,315689	2,201056	2,113067	2,042986	1,985595	1,937567	1,896669	1,861344
95	2,467494	2,310225	2,195548	2,107506	2,037370	1,979923	1,931838	1,890884	1,855503
100	2,462615	2,305318	2,190601	2,102513	2,032328	1,974829	1,926692	1,885687	1,850255
105	2,458210	2,300888	2,186134	2,098005	2,027774	1,970229	1,922045	1,880993	1,845515
110	2,454213	2,296868	2,182082	2,093913	2,023641	1,966054	1,917827	1,876732	1,841212
115	2,450571	2,293205	2,178387	2,090184	2,019874	1,962247	1,913982	1,872847	1,837288
120	2,447237	2,289851	2,175006	2,086770	2,016426	1,958763	1,910461	1,869290	1,833695
125	2,444174	2,286771	2,171900	2,083634	2,013257	1,955562	1,907226	1,866022	1,830394
129	2,441897	2,284481	2,169591	2,081303	2,010902	1,953182	1,904821	1,863592	1,827939

$\alpha = 0{,}05$

v_2 \ v_1	15	20	24	30	40	50	60	80	100
4	5,857805	5,802542	5,774389	5,745877	5,716998	5,699492	5,687744	5,672973	5,664064
5	4,618759	4,558131	4,527153	4,495712	4,463793	4,444406	4,431380	4,414982	4,405081
6	3,938058	3,874189	3,841457	3,808164	3,774286	3,753668	3,739797	3,722314	3,711745
7	3,510740	3,444525	3,410494	3,375808	3,340430	3,318856	3,304323	3,285983	3,274885
8	3,218406	3,150324	3,115240	3,079406	3,042778	3,020398	3,005303	2,986230	2,974674
9	3,006102	2,936455	2,900474	2,863652	2,825933	2,802843	2,787249	2,767522	2,755557
10	2,845017	2,774016	2,737248	2,699551	2,660855	2,637124	2,621077	2,600753	2,588412
11	2,718640	2,646445	2,608974	2,570489	2,530905	2,506587	2,490123	2,469246	2,456555
12	2,616851	2,543588	2,505482	2,466279	2,425880	2,401018	2,384166	2,362772	2,349753
13	2,533110	2,458882	2,420196	2,380334	2,339180	2,313811	2,296596	2,274716	2,261387
14	2,463003	2,387896	2,348678	2,308207	2,266350	2,240507	2,222950	2,200611	2,186988
15	2,403447	2,327535	2,287826	2,246789	2,204276	2,177985	2,160105	2,137331	2,123428
16	2,352223	2,275570	2,235405	2,193841	2,150711	2,123999	2,105813	2,082625	2,068455
17	2,307693	2,230354	2,189766	2,147708	2,103998	2,076888	2,058411	2,034828	2,020401
18	2,268622	2,190648	2,149665	2,107143	2,062885	2,035397	2,016643	1,992682	1,978010
19	2,234063	2,155497	2,114143	2,071186	2,026410	1,998561	1,979544	1,955221	1,940314
20	2,203274	2,124155	2,082454	2,039086	1,993819	1,965628	1,946358	1,921689	1,906554
21	2,175670	2,096033	2,054004	2,010248	1,964515	1,935997	1,916486	1,891483	1,876131
22	2,150778	2,070656	2,028319	1,984195	1,938018	1,909188	1,889445	1,864123	1,848559
23	2,128217	2,047638	2,005009	1,960537	1,913938	1,884809	1,864844	1,839213	1,823446
24	2,107673	2,026664	1,983760	1,938957	1,891955	1,862539	1,842360	1,816432	1,800468
25	2,088887	2,007471	1,964306	1,919188	1,871801	1,842111	1,821727	1,795512	1,779357
26	2,071642	1,989842	1,946428	1,901010	1,853255	1,823301	1,802719	1,776228	1,759888
27	2,055755	1,973590	1,929940	1,884236	1,836129	1,805922	1,785149	1,75839	1,741871
28	2,041071	1,958561	1,914686	1,868709	1,820263	1,789813	1,768857	1,741838	1,725146
29	2,027458	1,944620	1,900531	1,854293	1,805523	1,774838	1,753704	1,726435	1,709574
30	2,014804	1,931653	1,887360	1,840872	1,791790	1,760879	1,739574	1,712062	1,695037
31	2,003009	1,919561	1,875073	1,828345	1,778964	1,747835	1,726363	1,698616	1,681432
32	1,991990	1,908258	1,863582	1,816625	1,766956	1,735616	1,713984	1,686009	1,668670
33	1,981671	1,897669	1,852814	1,805636	1,755689	1,724147	1,702359	1,674162	1,656673
34	1,971988	1,887727	1,842701	1,795311	1,745097	1,713358	1,691420	1,663007	1,645371
35	1,962884	1,878375	1,833184	1,785591	1,735119	1,703190	1,681106	1,652484	1,634706
36	1,954308	1,869562	1,824213	1,776424	1,725703	1,693590	1,671365	1,642539	1,624621
37	1,946216	1,861242	1,815742	1,767764	1,716803	1,684511	1,662149	1,633125	1,615072
38	1,938568	1,853375	1,807729	1,759569	1,708376	1,675911	1,653416	1,624200	1,606014
39	1,931327	1,845925	1,800138	1,751803	1,700385	1,667753	1,645128	1,615724	1,597409
40	1,924463	1,838859	1,792937	1,744432	1,692797	1,660003	1,637252	1,607666	1,589224

$\alpha = 0,05$									
v_2 \ v_1	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**60**	**80**	**100**
41	1,917946	1,832149	1,786096	1,737427	1,685582	1,652631	1,629757	1,599993	1,581428
42	1,911751	1,825767	1,779588	1,730762	1,678713	1,645608	1,622615	1,592678	1,573993
43	1,905855	1,819691	1,773391	1,724411	1,672165	1,638912	1,615803	1,585696	1,566893
44	1,900236	1,813898	1,767481	1,718354	1,665916	1,632518	1,609296	1,579024	1,560106
45	1,894875	1,808370	1,761839	1,712569	1,659945	1,626407	1,603075	1,572642	1,553612
46	1,889755	1,803089	1,756448	1,707039	1,654235	1,620560	1,597122	1,566531	1,547390
47	1,884859	1,798038	1,751291	1,701748	1,648769	1,614961	1,591417	1,560673	1,541425
48	1,880175	1,793202	1,746353	1,696679	1,643530	1,609593	1,585947	1,555053	1,535699
49	1,875687	1,788569	1,741620	1,691820	1,638505	1,604442	1,580697	1,549656	1,530199
50	1,871384	1,784125	1,737080	1,687157	1,633682	1,599495	1,575654	1,544469	1,524911
55	1,852280	1,764379	1,716893	1,666408	1,612191	1,577435	1,553142	1,521285	1,501251
60	1,836437	1,747984	1,700117	1,649141	1,594273	1,559011	1,534314	1,501853	1,481386
65	1,823086	1,734152	1,685951	1,634544	1,579098	1,543385	1,518326	1,485316	1,464455
70	1,811681	1,722325	1,673829	1,622040	1,566078	1,52996	1,504572	1,471064	1,449840
75	1,801825	1,712096	1,663338	1,611207	1,554782	1,518297	1,492612	1,458647	1,437090
80	1,793222	1,703160	1,654168	1,601730	1,544887	1,508069	1,482111	1,447728	1,425862
85	1,785647	1,695287	1,646084	1,593369	1,536147	1,499025	1,472817	1,438048	1,415896
90	1,778927	1,688298	1,638904	1,585937	1,528369	1,490968	1,464531	1,429404	1,406986
95	1,772924	1,682051	1,632483	1,579288	1,521402	1,483745	1,457096	1,421637	1,398970
100	1,767530	1,676434	1,626708	1,573302	1,515125	1,477231	1,450386	1,414618	1,391720
105	1,762656	1,671357	1,621485	1,567886	1,509441	1,471327	1,444299	1,408244	1,385127
110	1,758230	1,666744	1,616739	1,562962	1,504268	1,465951	1,438753	1,402428	1,379106
115	1,754193	1,662536	1,612407	1,558465	1,499540	1,461034	1,433676	1,397099	1,373585
120	1,750497	1,658680	1,608437	1,554343	1,495202	1,456519	1,429013	1,392198	1,368503
125	1,747099	1,655135	1,604786	1,550549	1,491208	1,452360	1,424714	1,387676	1,363808
129	1,744573	1,652498	1,602069	1,547725	1,488234	1,449260	1,421509	1,384301	1,360303

Hodnoty k pre dvojstranný tolerančný interval

$1-\alpha$	0,90			0,95			0,99		
n \ p	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
2	15,5124	18,2208	23,4235	31,0923	36,5192	46,7452	155,5690	182,7200	234,8769
3	5,7881	6,8233	8,8186	8,3060	9,7888	12,6471	18,7825	22,1308	28,5857
4	4,1571	4,9127	6,3722	5,3681	6,3411	8,2207	9,4162	11,1178	14,4054
5	3,4993	4,1425	5,3868	4,2907	5,0769	6,5980	6,6550	7,8698	10,2201
6	3,1406	3,7226	4,8498	3,7326	4,4222	5,7578	5,3832	6,3735	8,2916
7	2,9128	3,4558	4,5085	3,3896	4,0196	5,2411	4,6576	5,5196	7,1907
8	2,7542	3,2699	4,2707	3,1561	3,7456	4,8893	4,1887	4,9677	6,4790
9	2,6368	3,1323	4,0945	2,9861	3,5459	4,6328	3,8602	4,5810	5,9802
10	2,5460	3,0258	3,9580	2,8564	3,3935	4,4370	3,6167	4,2942	5,6102
11	2,4734	2,9406	3,8488	2,7537	3,2728	4,2818	3,4286	4,0726	5,3242
12	2,4140	2,8707	3,7591	2,6703	3,1747	4,1556	3,2786	3,8959	5,0960
13	2,3643	2,8123	3,6840	2,6011	3,0932	4,0506	3,1561	3,7514	4,9093
14	2,3220	2,7625	3,6201	2,5425	3,0242	3,9617	3,0538	3,6309	4,7535
15	2,2855	2,7196	3,5649	2,4922	2,9650	3,8853	2,9672	3,5286	4,6212
16	2,2537	2,6821	3,5166	2,4486	2,9135	3,8189	2,8926	3,4406	4,5074
17	2,2257	2,6491	3,4741	2,4103	2,8684	3,7606	2,8278	3,3641	4,4084
18	2,2008	2,6197	3,4362	2,3764	2,8283	3,7089	2,7708	3,2968	4,3212
19	2,1785	2,5934	3,4122	2,3461	2,7926	3,6626	2,7203	3,2371	4,2439
20	2,1584	2,5697	3,3716	2,3188	2,7604	3,6210	2,6752	3,1838	4,1748
21	2,1401	2,5482	3,3437	2,2942	2,7313	3,5834	2,6347	3,1359	4,1126
22	2,1235	2,5285	3,3183	2,2718	2,7048	3,5490	2,5979	3,0924	4,0563
23	2,1083	2,5105	3,2951	2,2516	2,6806	3,5177	2,5645	3,0529	4,0050
24	2,0943	2,4940	3,2736	2,2325	2,6583	3,4888	2,5340	3,0168	3,9580
25	2,0813	2,4787	3,2538	2,2151	2,6378	3,4622	2,5060	2,9836	3,9149
30	2,0289	2,4166	3,1734	2,1452	2,5549	3,3546	2,3940	2,8510	3,7425
40	1,9611	2,4479	3,0688	2,0624	2,4484	3,2160	2,2529	2,6836	3,5144
50	1,9184	2,3948	3,0027	1,9991	2,3816	3,1288	2,1660	2,5805	3,3898
60	1,8885	2,2500	2,9564	1,9599	2,3351	3,0681	2,1063	2,5095	3,2970
70	1,8662	2,2236	2,9218	1,9308	2,3005	3,0228	2,0623	2,4571	3,2284
80	1,8489	2,2029	2,8947	1,9082	2,2736	2,9875	2,0282	2,4165	3,1753
90	1,8348	2,1862	2,8729	1,8899	2,2519	2,9591	2,0009	2,3840	3,1327
100	1,8232	2,1724	2,8548	1,8749	2,2339	2,9356	1,9784	2,3573	3,0976

Hodnoty k pre jednostranný tolerančný interval

$1-\alpha$	0,90			0,95			0,99		
n \ p	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
2	10,2528	13,0898	18,5001	20,5815	25,2597	37,0936	103,0287	131,4263	185,6170
3	4,2582	5,3115	7,3405	6,1553	7,6560	10,5528	13,9955	17,3702	23,8956
4	3,1879	3,9566	5,4383	4,1620	5,1439	7,0424	7,3799	9,0835	12,3873
5	2,7424	3,3999	4,6660	3,4067	4,2027	5,7411	5,3618	6,5784	8,9391
6	2,4937	3,0919	4,2426	3,0063	3,7077	5,0620	4,4111	5,4056	7,3346
7	2,3327	2,8938	3,9721	2,7555	3,3995	4,6418	3,8592	4,7279	6,4120
8	2,2186	2,7543	3,7826	2,5820	3,1873	4,3539	3,4973	4,2853	5,8118
9	2,1329	2,6500	3,6415	2,4538	3,0313	4,1431	3,2405	3,9723	5,3889
10	2,0657	2,5684	3,5317	2,3547	2,9110	3,9812	3,0480	3,7384	5,0738
11	2,0113	2,5027	3,4435	2,2754	2,8150	3,8524	2,8977	3,5562	4,8291
12	1,9662	2,4483	3,3707	2,2102	2,7364	3,7471	2,7768	3,4100	4,6331
13	1,9281	2,4025	3,3095	2,1555	2,6706	3,6592	2,6770	3,2896	4,4721
14	1,8954	2,3632	3,2572	2,1088	2,6145	3,5846	2,5932	3,1886	4,3372
15	1,8669	2,3290	3,2119	2,0684	2,5661	3,5202	2,5215	3,1024	4,2224
16	1,8418	2,2990	3,1721	2,0330	2,5237	3,4640	2,4595	3,0279	4,1233
17	1,8195	2,2725	3,1369	2,0018	2,4863	3,4145	2,4051	2,9628	4,0367
18	1,7996	2,2487	3,1055	1,9738	2,4530	3,3704	2,3571	2,9052	3,9604
19	1,7816	2,2273	3,0772	1,9487	2,4231	3,3309	2,3142	2,8539	3,8925
20	1,7653	2,2078	3,0516	1,9260	2,3961	3,2952	2,2757	2,8079	3,8316
21	1,7503	2,1901	3,0283	1,9054	2,3715	3,2628	2,2409	2,7663	3,7767
22	1,7367	2,1739	3,0069	1,8865	2,3490	3,2332	2,2092	2,7286	3,7268
23	1,7241	2,1590	2,9873	1,8691	2,3284	3,2061	2,1802	2,6941	3,6813
24	1,7124	2,1452	2,9692	1,85300	2,3093	3,1811	2,1536	2,6624	3,6396
25	1,70161	2,1323	2,9524	1,8382	2,2917	3,1580	2,1291	2,6332	3,6011
30	6571	2,0799	2,8838	1,7774	2,2199	3,0640	2,0299	2,5155	3,4466
40	1,5979	2,0103	2,7932	1,6972	2,1255	2,9410	1,9018	2,3642	3,2486
50	1,5595	1,9653	2,7349	1,6456	2,0650	2,8625	1,8208	2,2689	3,1247
60	1,5321	1,9333	2,6936	1,6090	2,0222	2,8071	1,7641	2,2024	3,0383
70	1,5113	1,9091	2,6623	1,5813	1,9899	2,7654	1,7216	2,1527	2,9740
80	1,4948	1,8899	2,6377	1,5594	1,9645	2,7327	1,6883	2,1138	2,9238
90	1,4813	1,8743	2,6177	1,5416	1,9438	2,7061	1,6614	2,0824	2,8832
100	1,4701	1,8613	2,6010	1,5268	1,9266	2,6840	1,6390	2,0563	2,8497

SHAPIROOV – WILKOV TEST – koeficienty $a_i(n)$

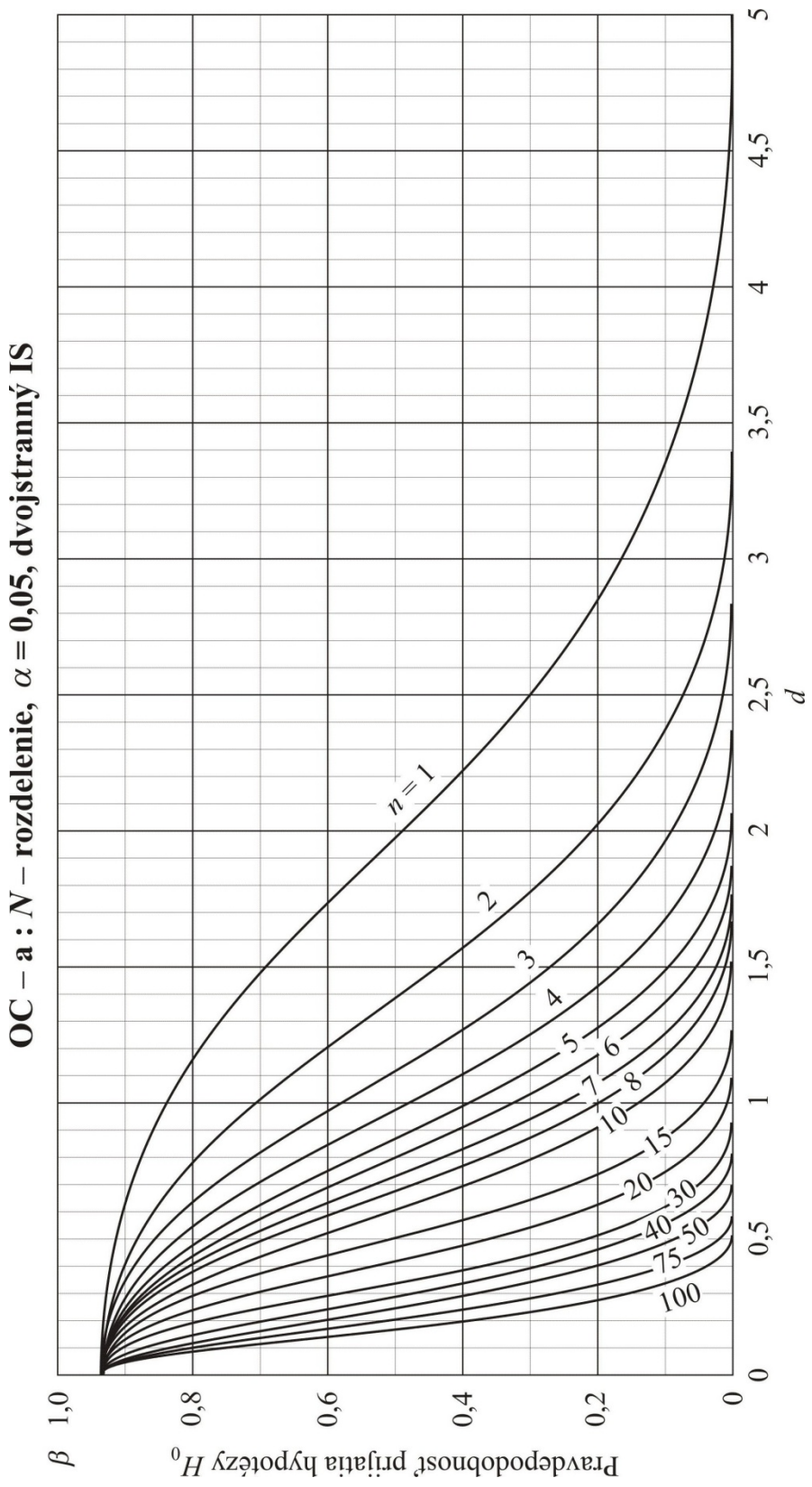
i \ n	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251
2	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318
3	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460
4	0	0,0561	0,0947	0,1224	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802
5	0	0	0	0,0399	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240
6	0	0	0	0	0	0,0303	0,0539	0,0727
7	0	0	0	0	0	0	0	0,0240
i \ n	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
1	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734	0,4643	0,4590
2	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211	0,3185	0,3156
3	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2565	0,2565	0,2578	0,2571
4	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2085	0,2085	0,2119	0,2131
5	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1686	0,1686	0,1736	0,1764
6	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1334	0,1334	0,1399	0, 1443
7	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,1013	0,1013	0,1092	0,1150
8	0	0,0196	0,0359	0,0496	0,0711	0,0711	0,0804	0,0878
9	0	0	0	0,0163	0,1422	0,0422	0,0530	0,0618
10	0	0	0	0	0	0,0140	0,0263	0,0368
11	0	0	0	0	0	0	0	0,0122
i \ n	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870
6	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	0,0228	0,0320	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12	0	0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13	0	0	0	0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381
14	0	0	0	0	0	0,0084	0,0159	0,0227
15	0	0	0	0	0	0	0	0,0076

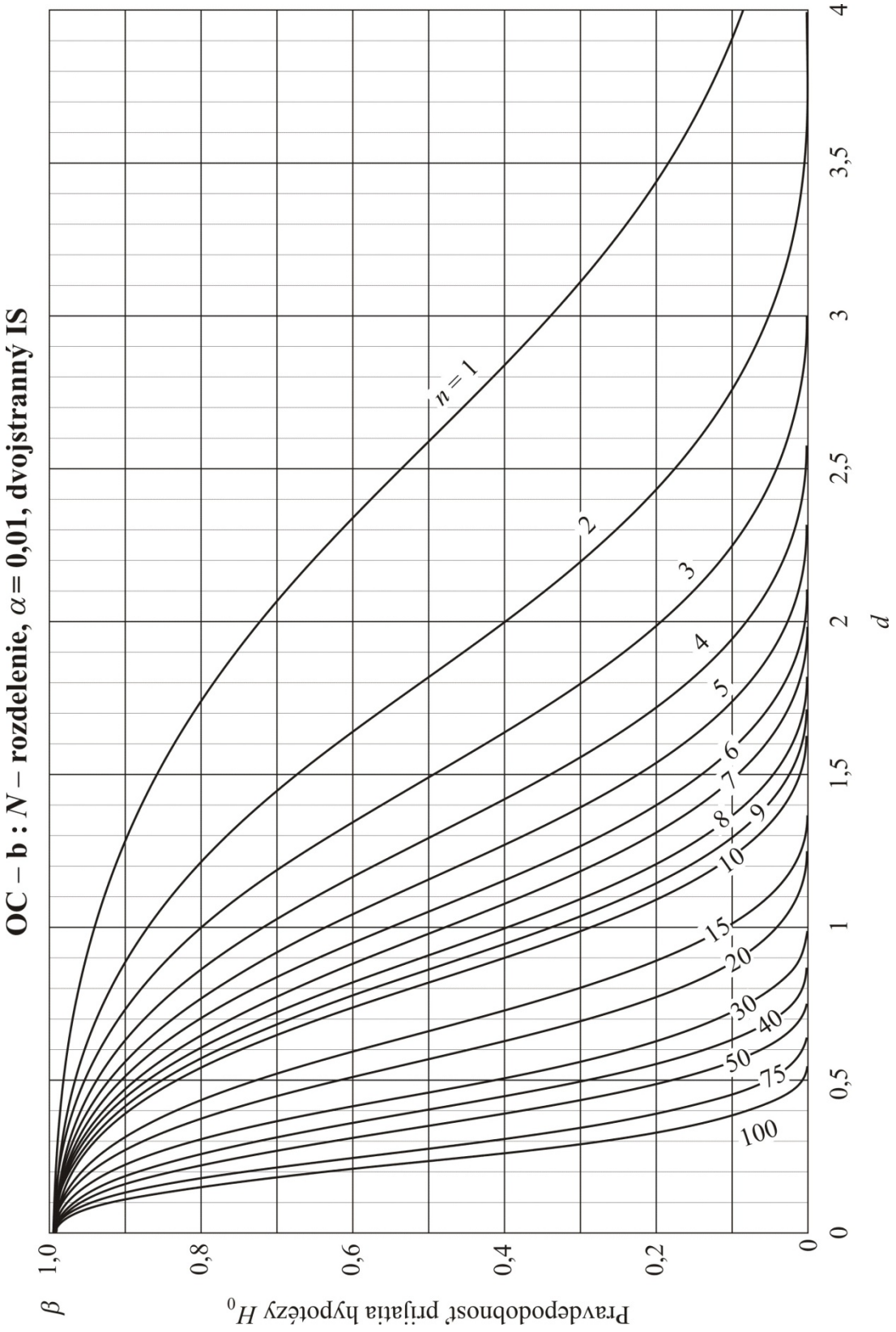
SHAPIROOV – WILKOV TEST

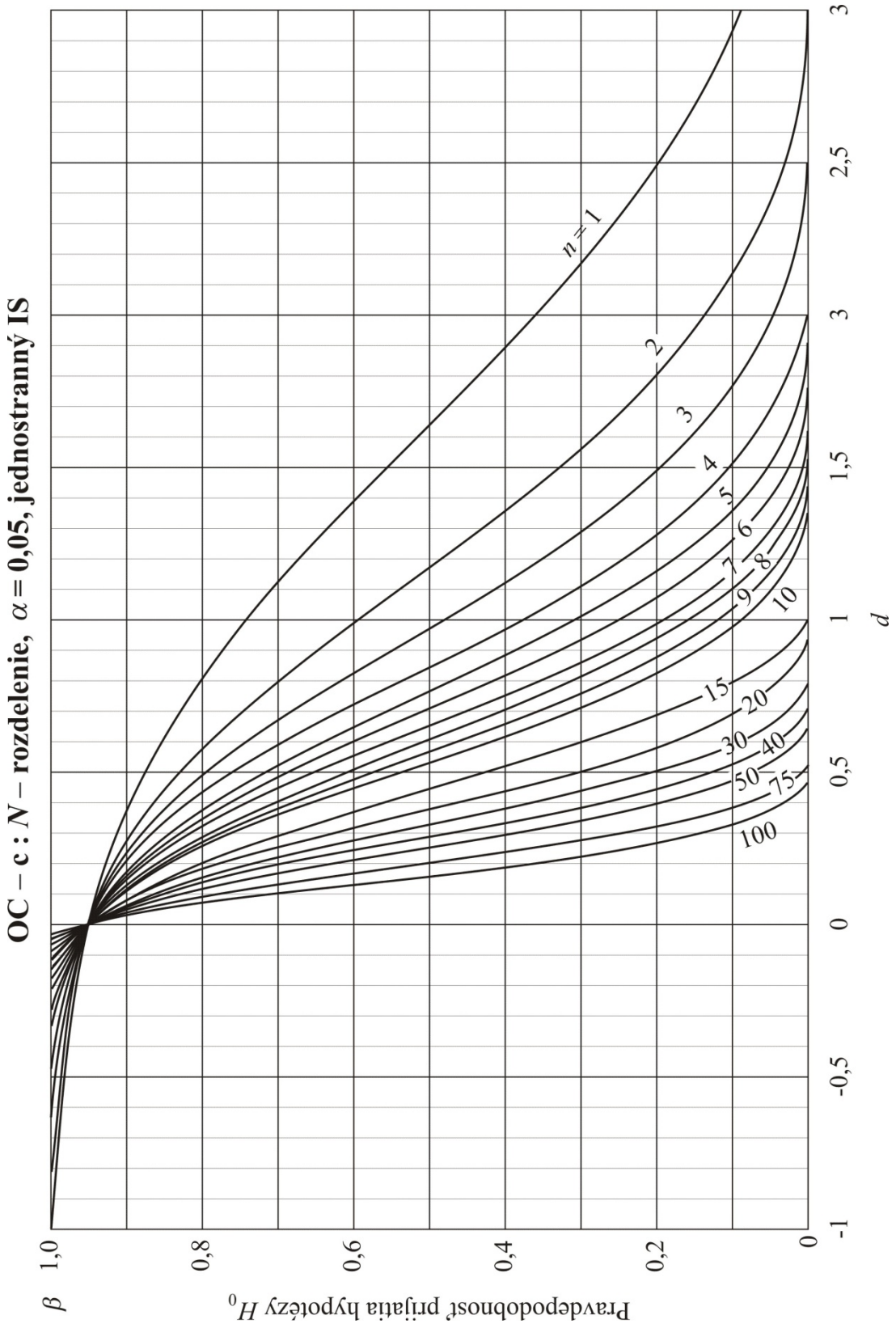
Kvantily $w_\alpha(n)$ Shapiroovej – Wilkovej štatistiky *W*: $P(W(n) \le W_\alpha(n)) = \alpha$

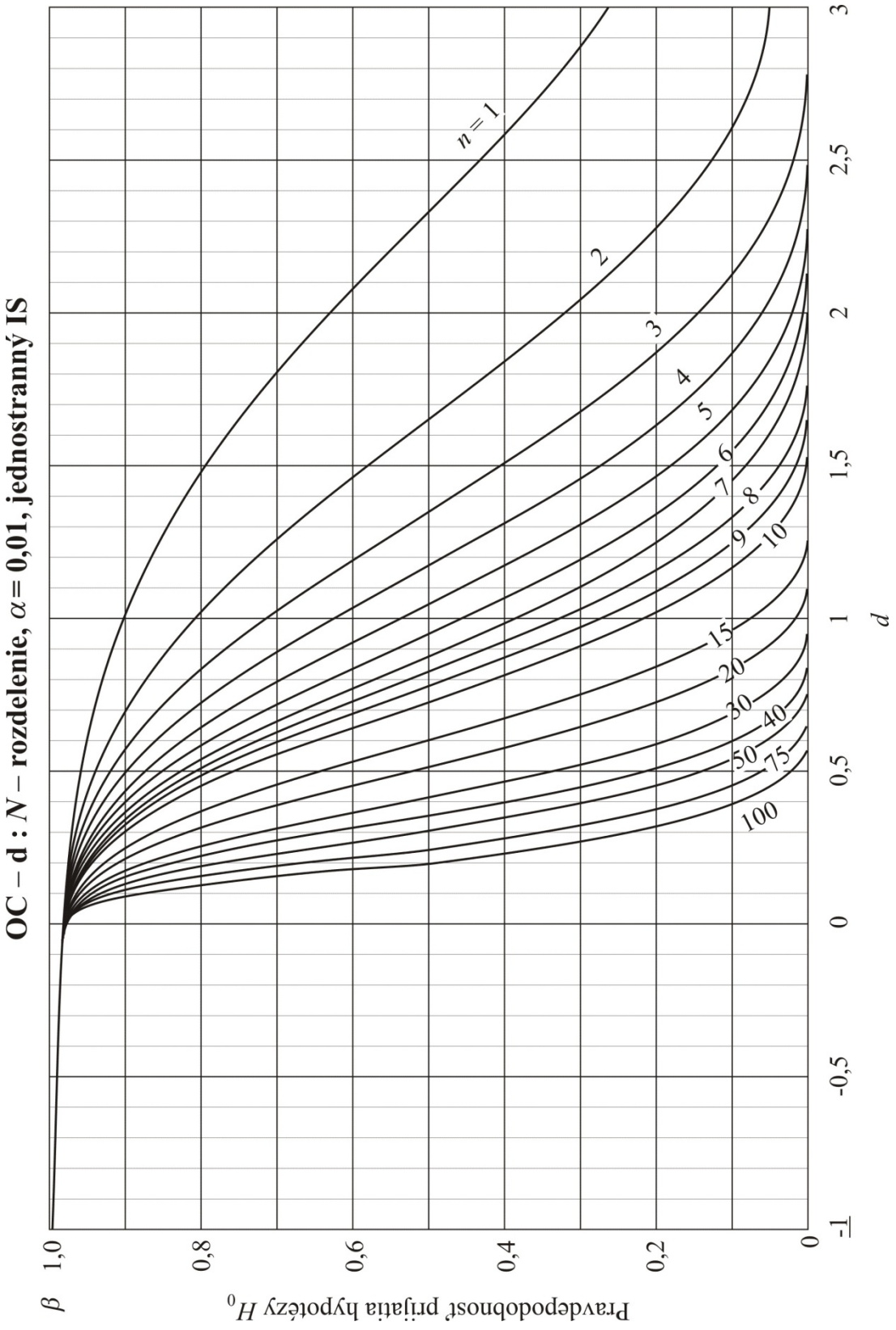
n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	**n**	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	**n**	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$
7	0,730	0,803	**15**	0,835	0,881	**23**	0,881	0,914
8	0,749	0,818	**16**	0,844	0,887	**24**	0,884	0,916
9	0,764	0,826	**17**	0,851	0,892	**25**	0,888	0,918
10	0,781	0,842	**18**	0,858	0,897	**26**	0,891	0,920
11	0,792	0,850	**19**	0,863	0,901	**27**	0,894	0,923
12	0,805	0,859	**20**	0,868	0,905	**28**	0,896	0,924
13	0,814	0,866	**21**	0,873	0,908	**29**	0,898	0,926
14	0,825	0,874	**22**	0,878	0,911	**30**	0,900	0,927

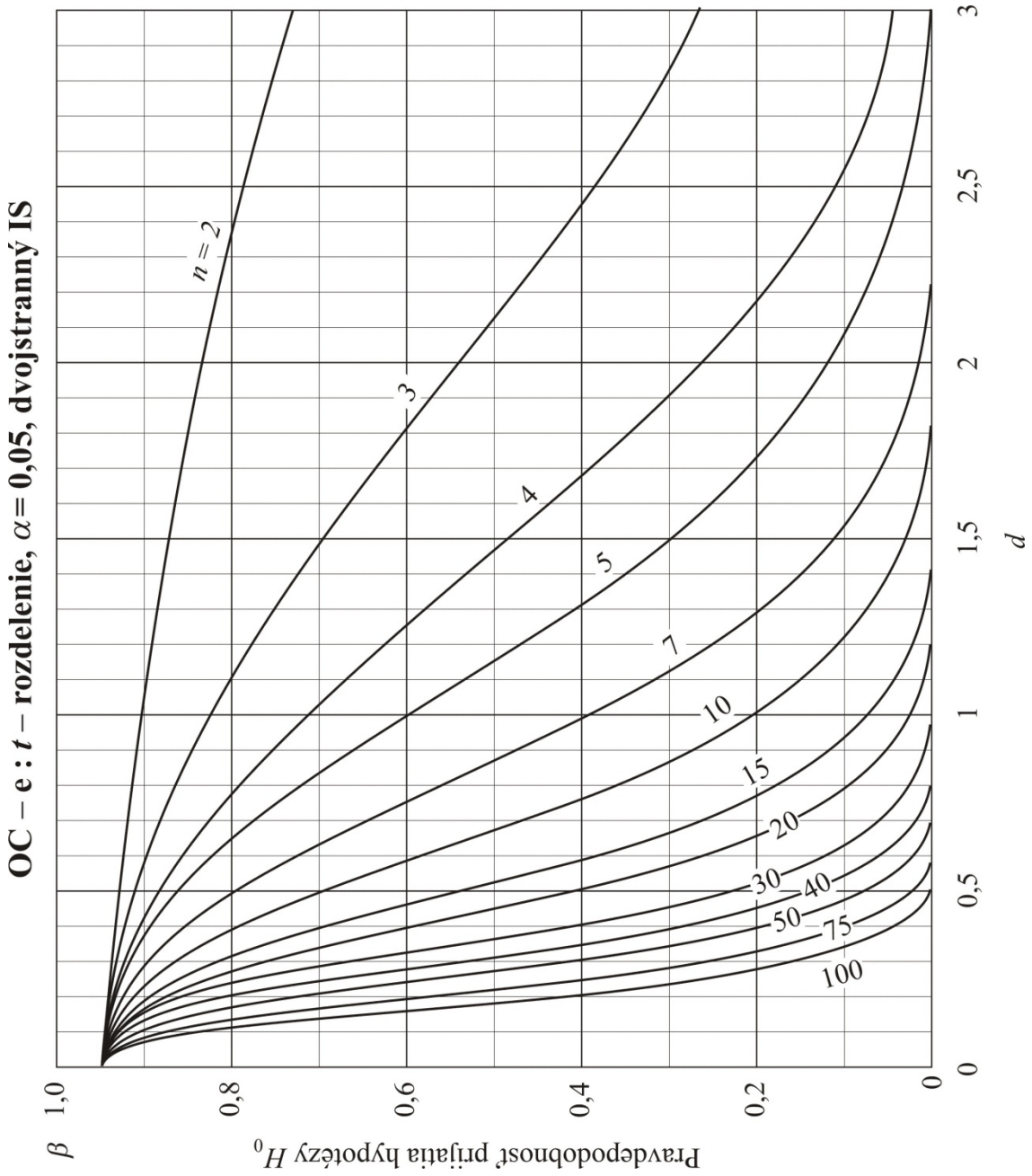
KRIVKY OPERATÍVNYCH CHARAKTERISTÍK

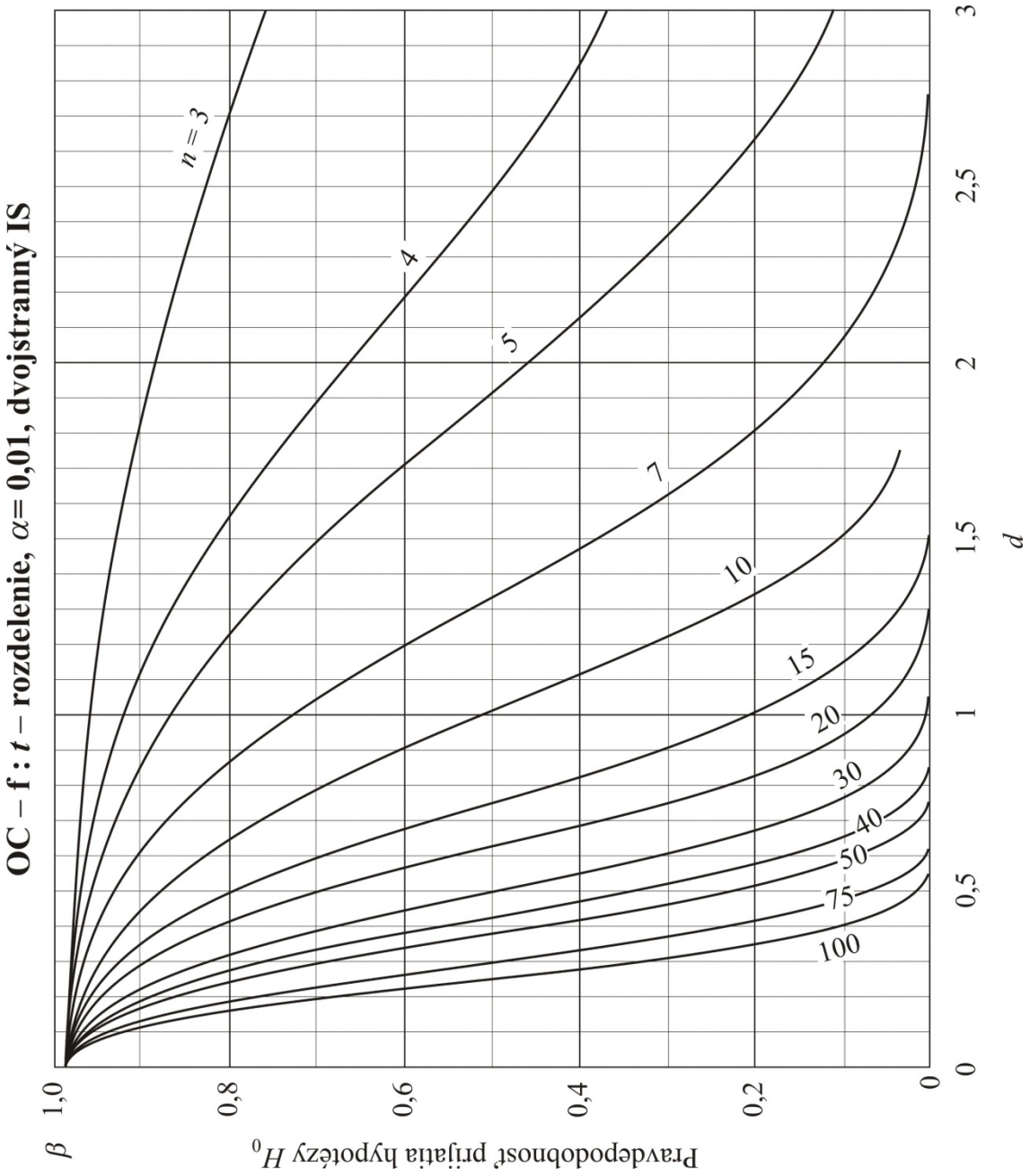


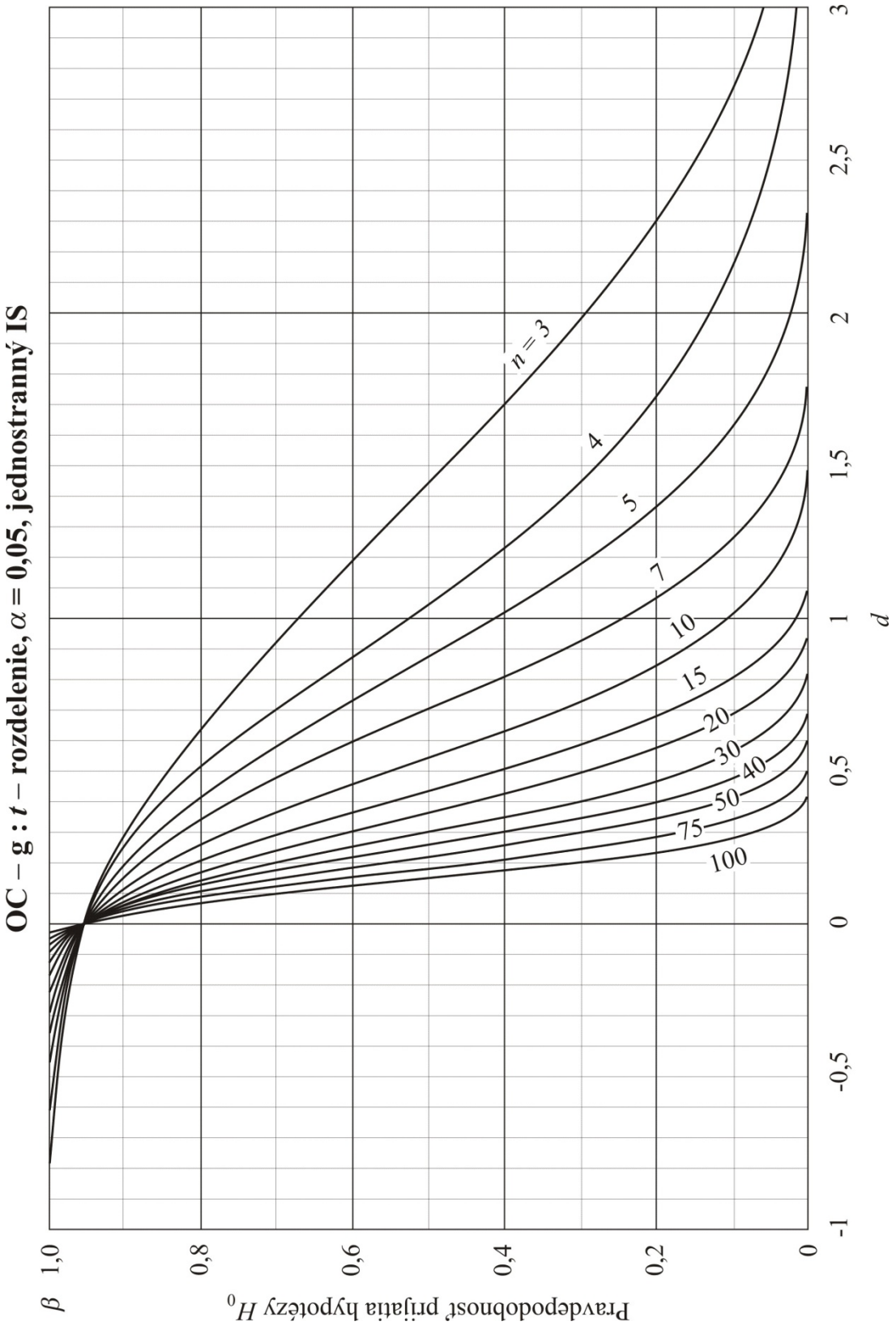

OC – b : N – rozdelenie, α = 0,01, dvojstranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
d
n = 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100

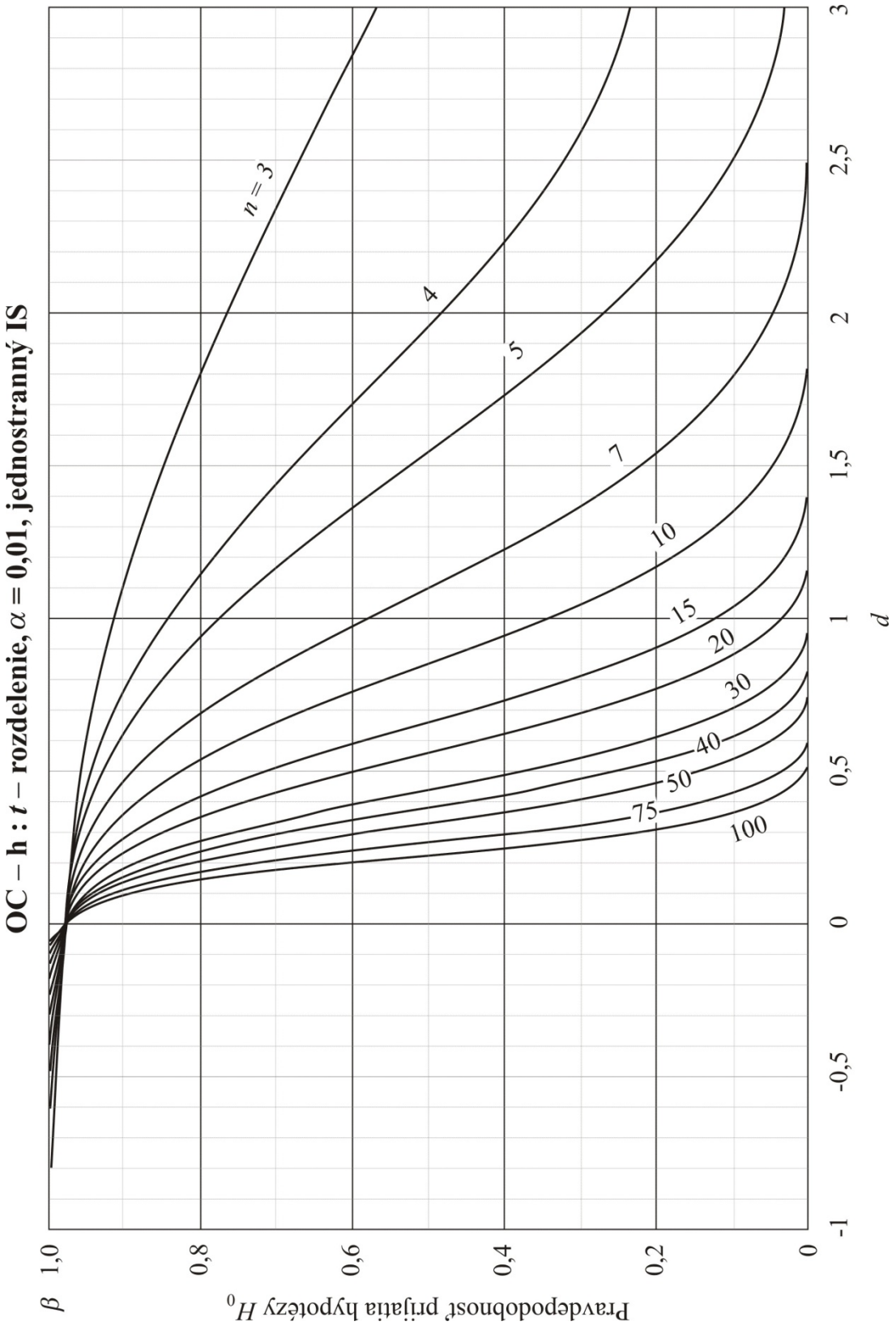

OC – c : N – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β
d
n = 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3

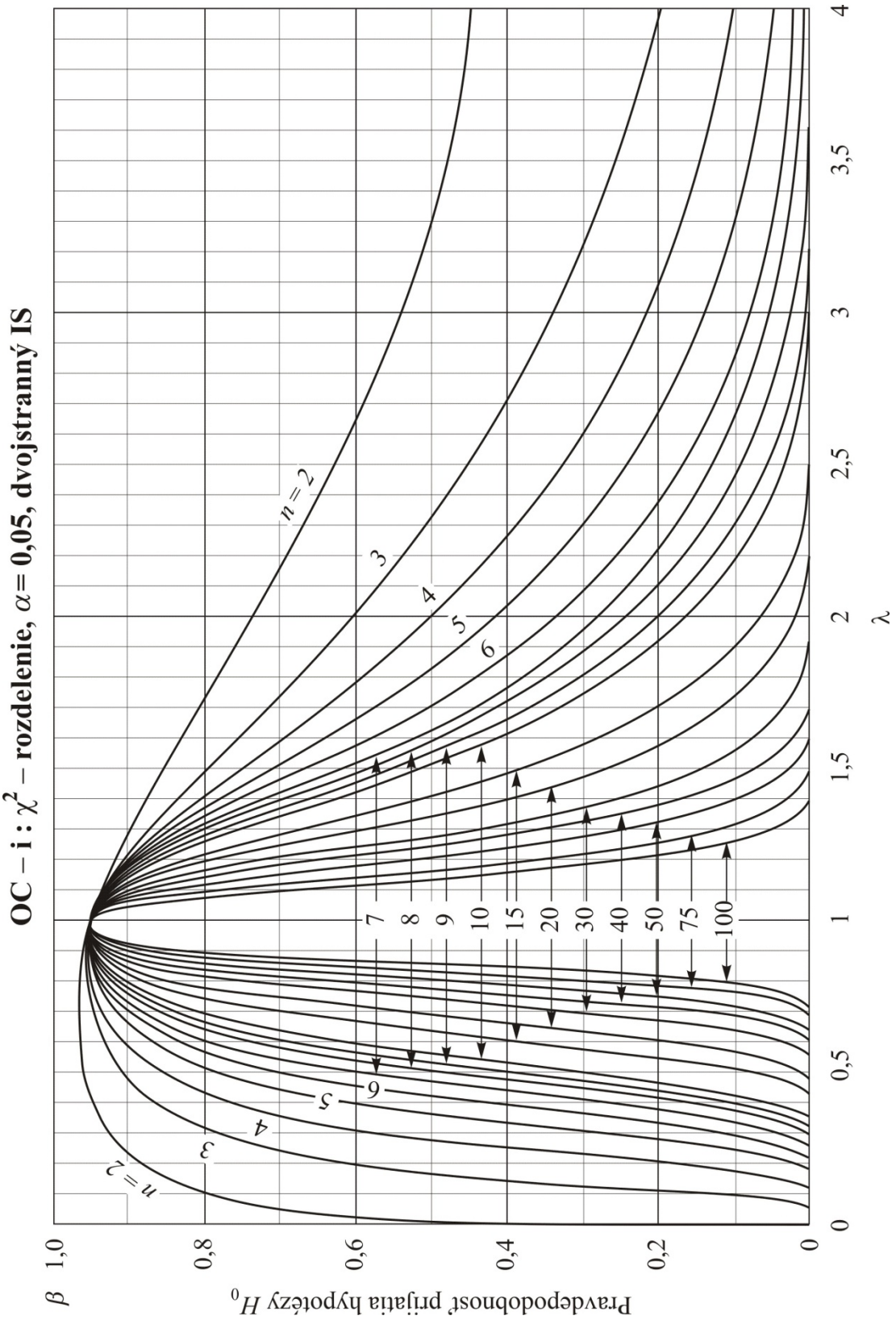

OC – d : N – rozdelenie, α = 0,01, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H0
d
n = 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3

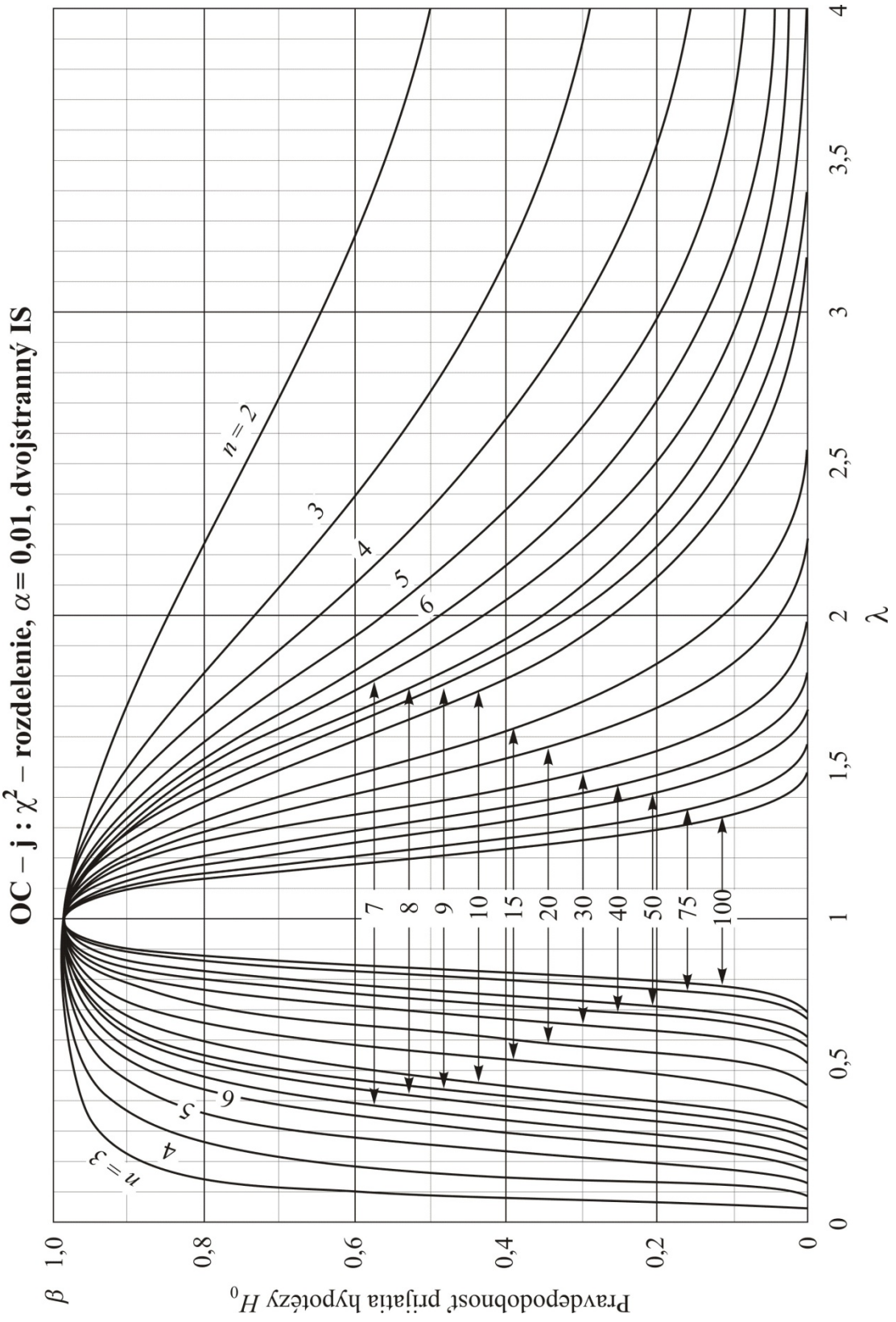

OC – e : t – rozdelenie, α = 0,05, dvojstranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β
d
n = 2
3
4
5
7
10
15
20
30
40
50
75
100
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3

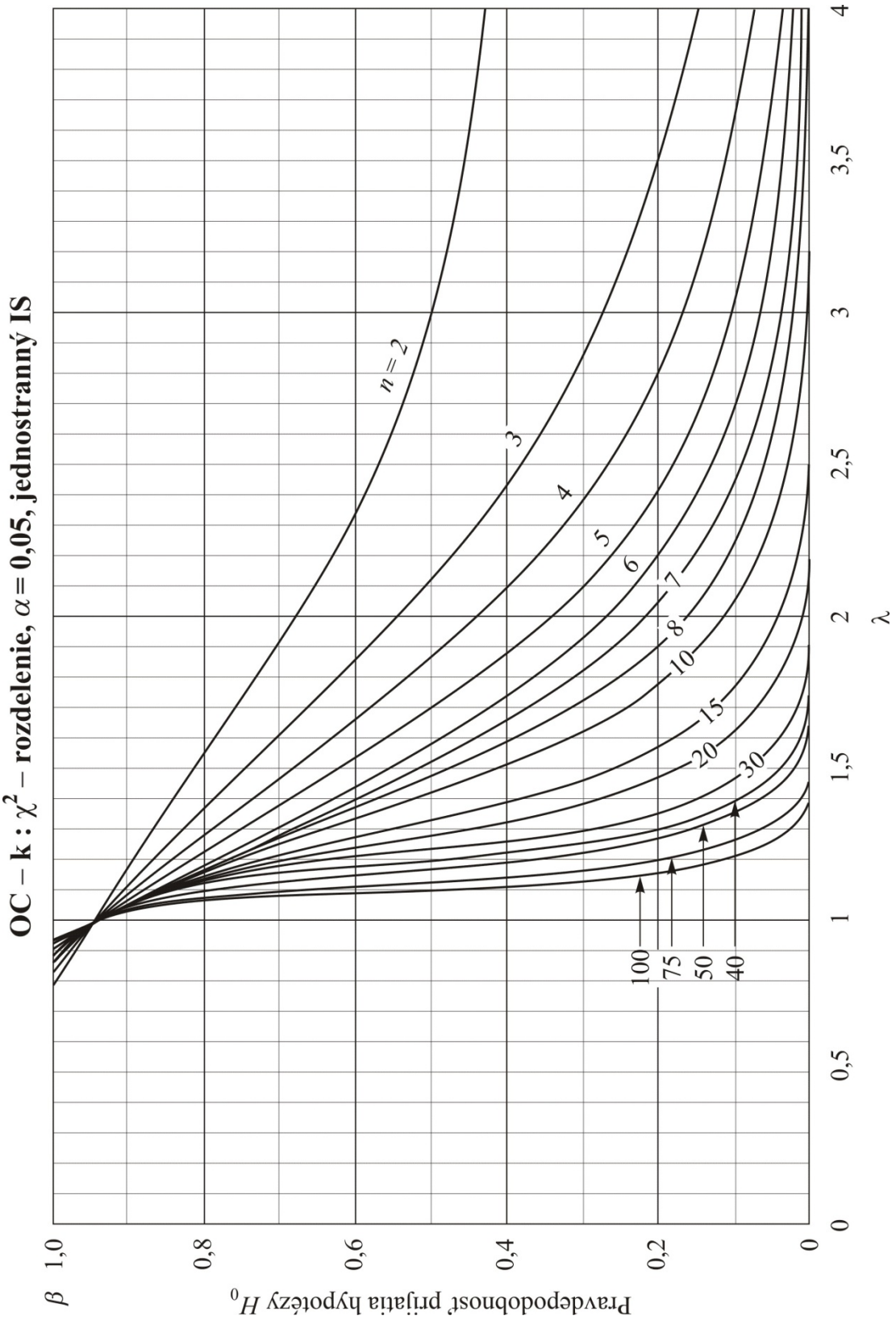

OC – f : t – rozdelenie, α= 0,01, dvojstranný IS
n = 3
4
5
7
10
15
20
30
40
50
75
100
β
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
d

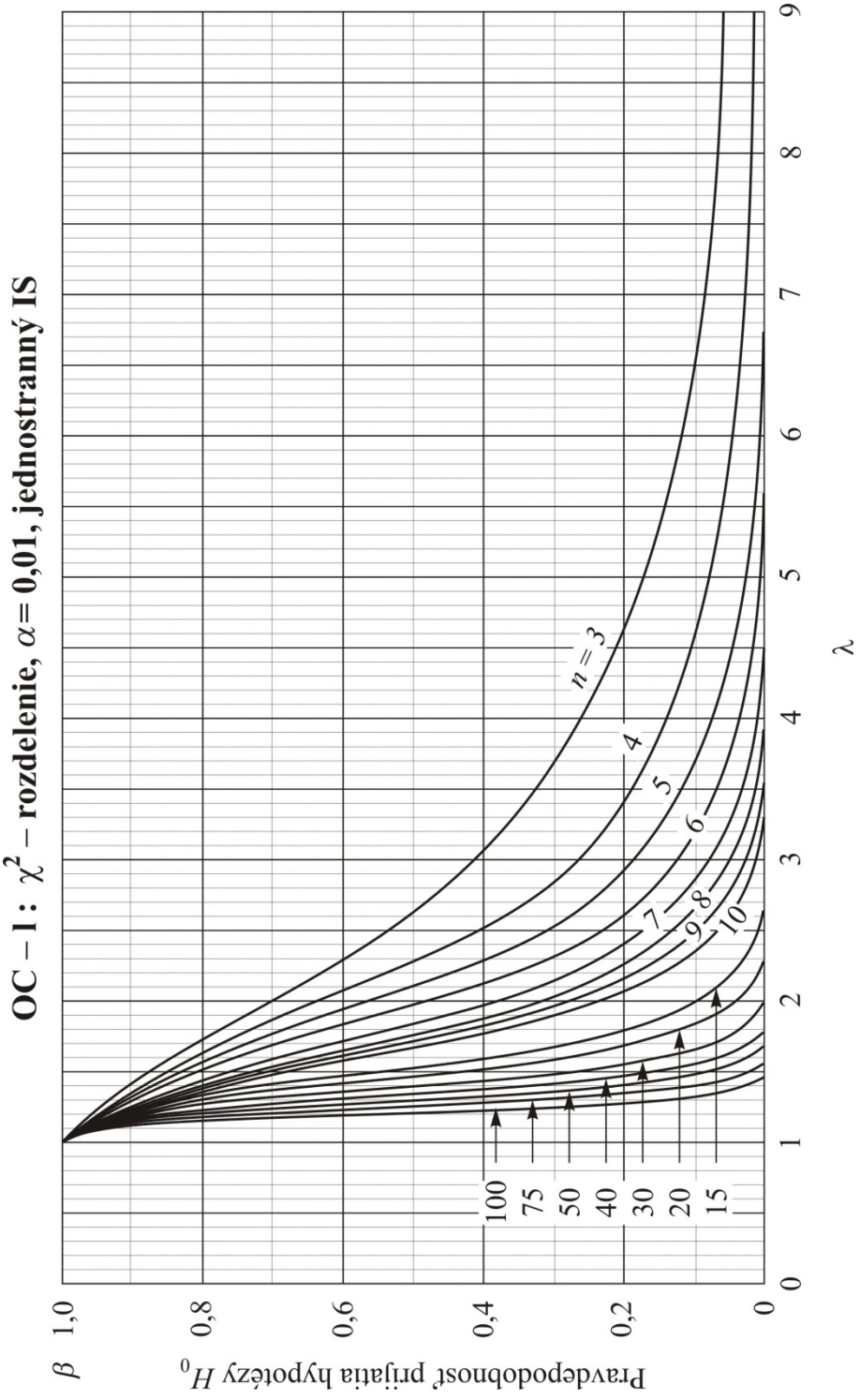

OC – g : t – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
d
n = 3
4
5
7
10
15
20
30
40
50
75
100
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3

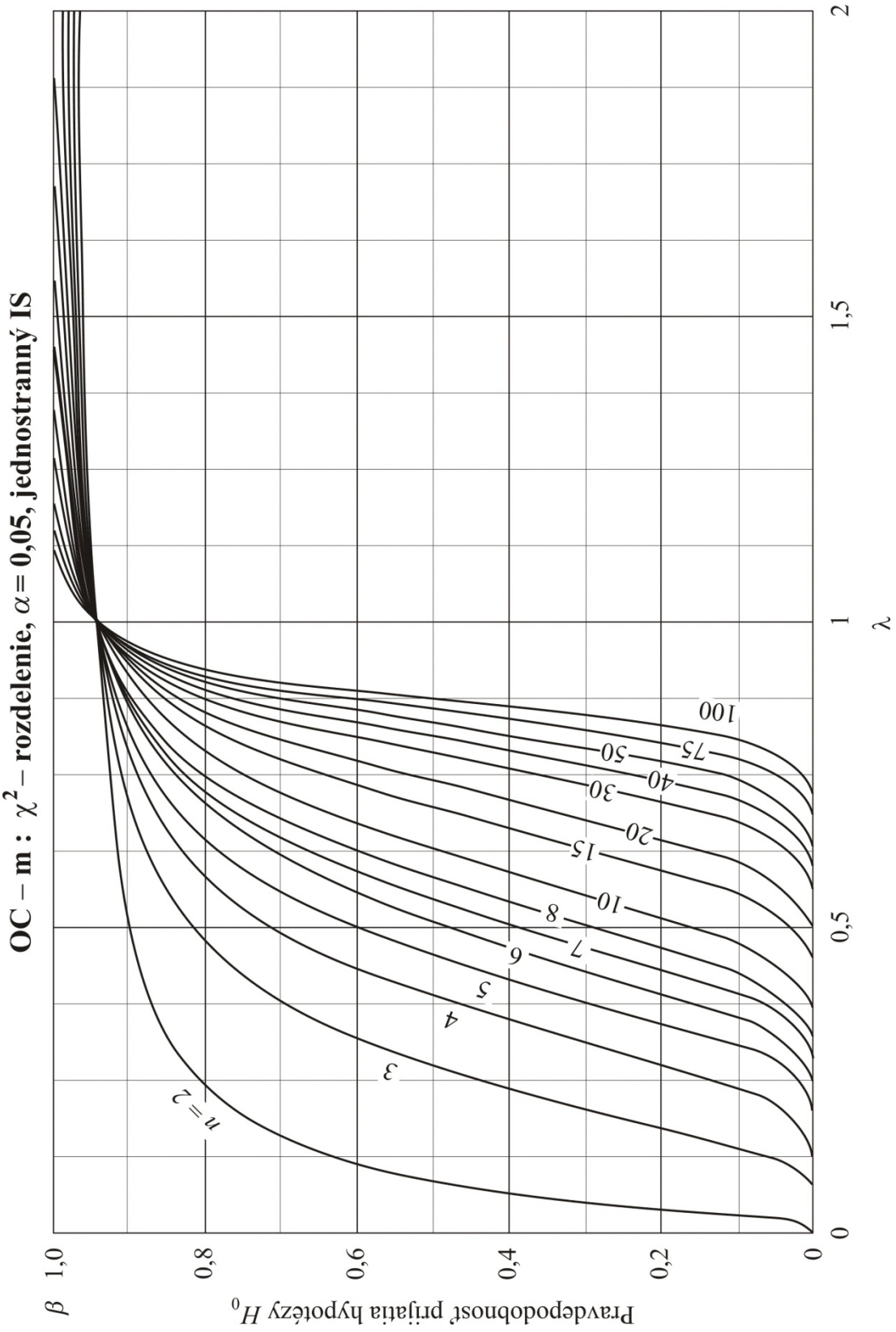

OC – h : t – rozdelenie, α = 0,01, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
d
n = 3
4
5
7
10
15
20
30
40
50
75
100
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3

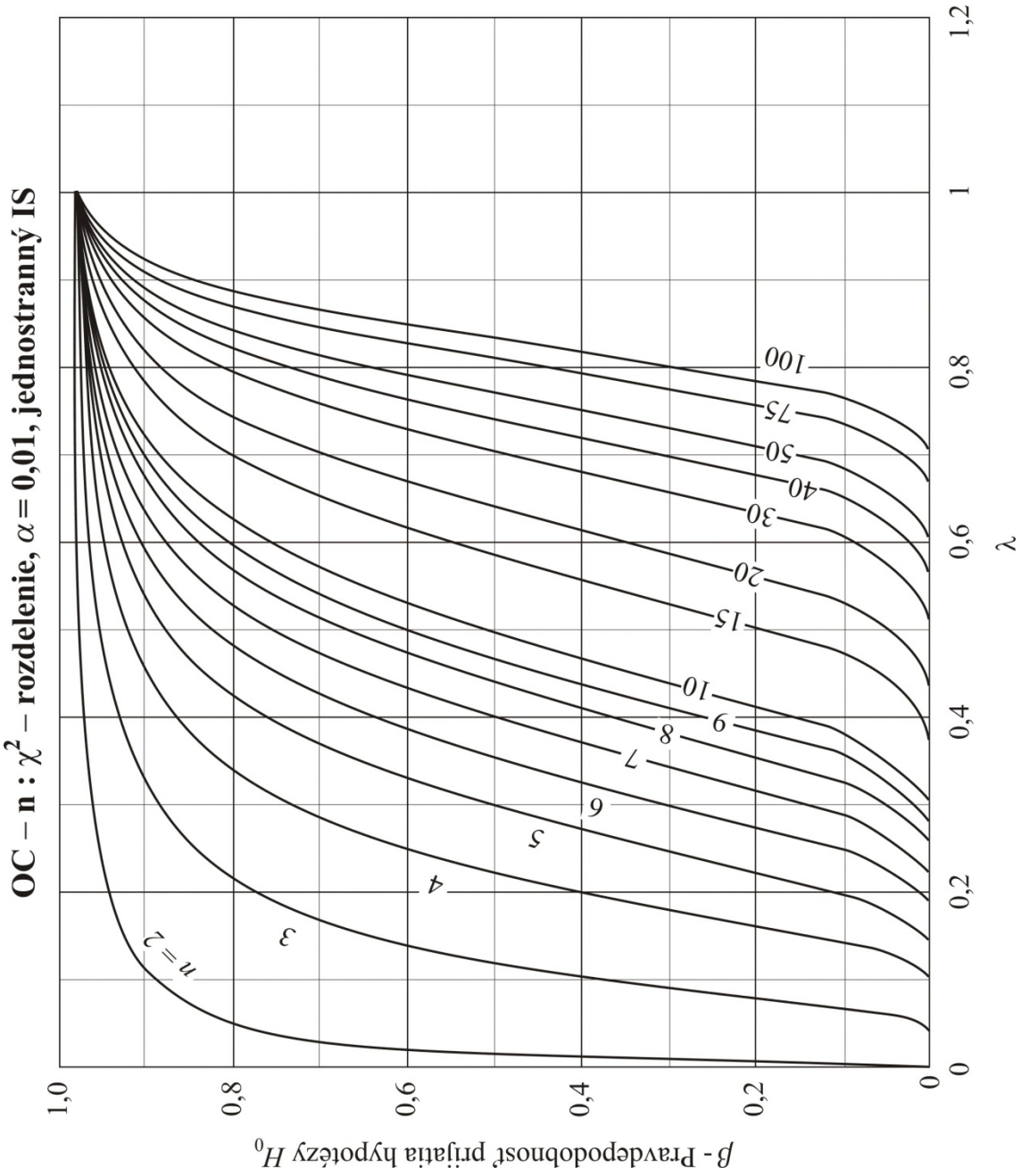

OC – i : χ^2 – rozdelenie, α = 0,05, dvojstranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β 1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
λ
$n = 2$
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100

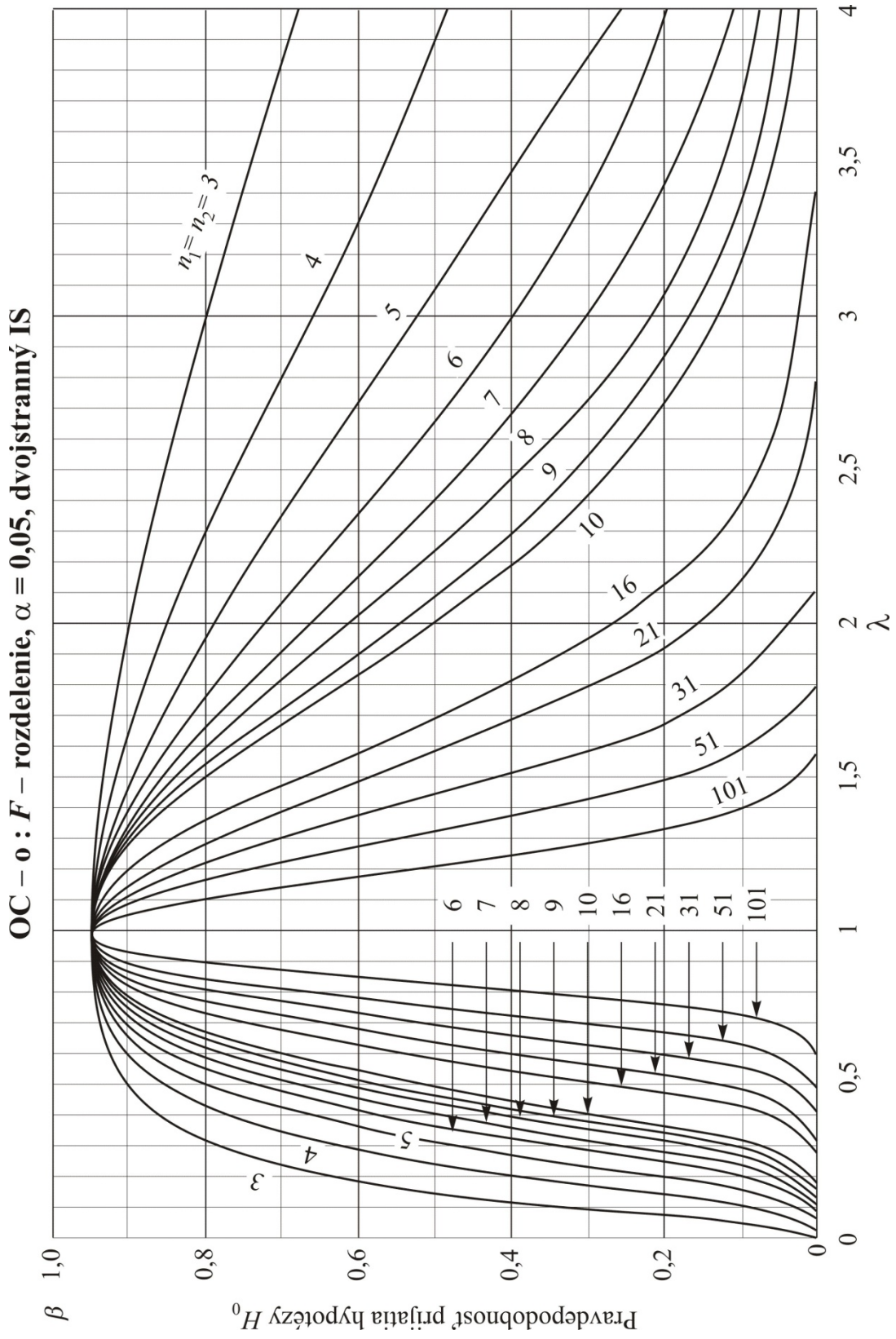

OC – j : χ^2 – rozdelenie, α = 0,01, dvojstranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
λ
n = 2
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100
n = 3
4
5
6

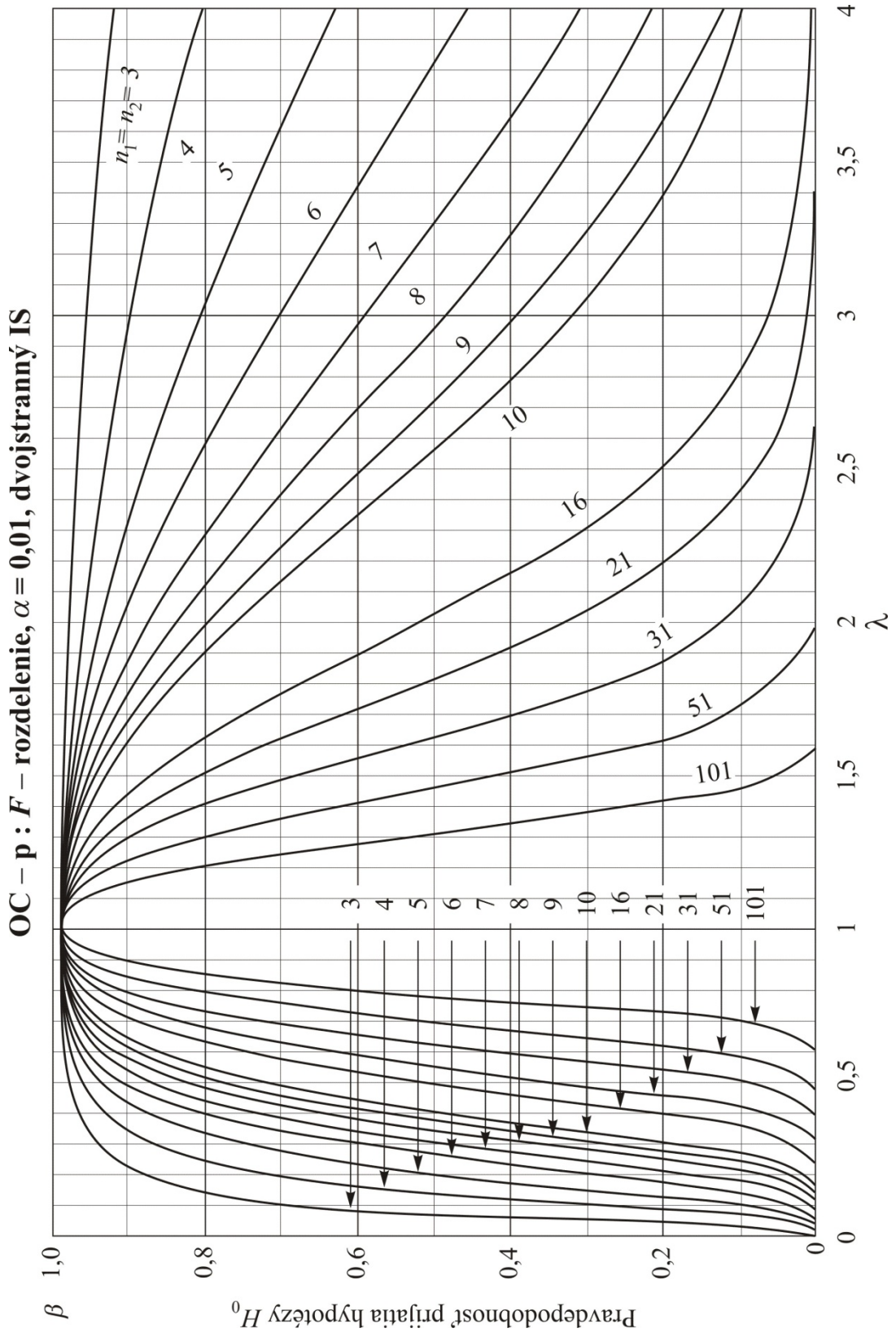

OC – k : χ^2 – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β 1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
λ
n = 2
3
4
5
6
7
8
10
15
20
30
40
50
75
100

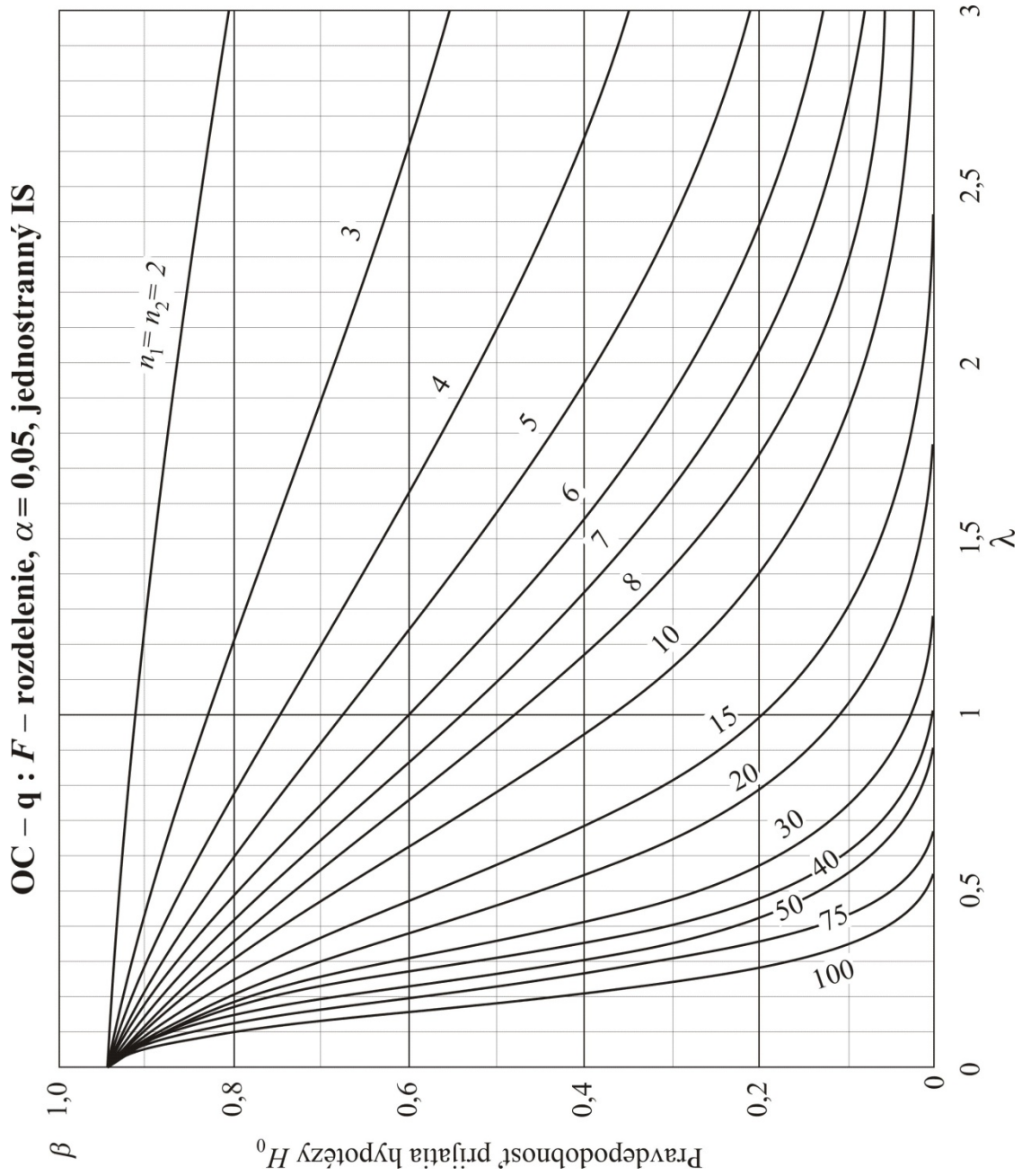

OC – 1 : χ^2 – rozdelenie, α = 0,01, jednostranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
λ
$n = 3$
4
5
6
7
8
9
10
100
75
50
40
30
20
15

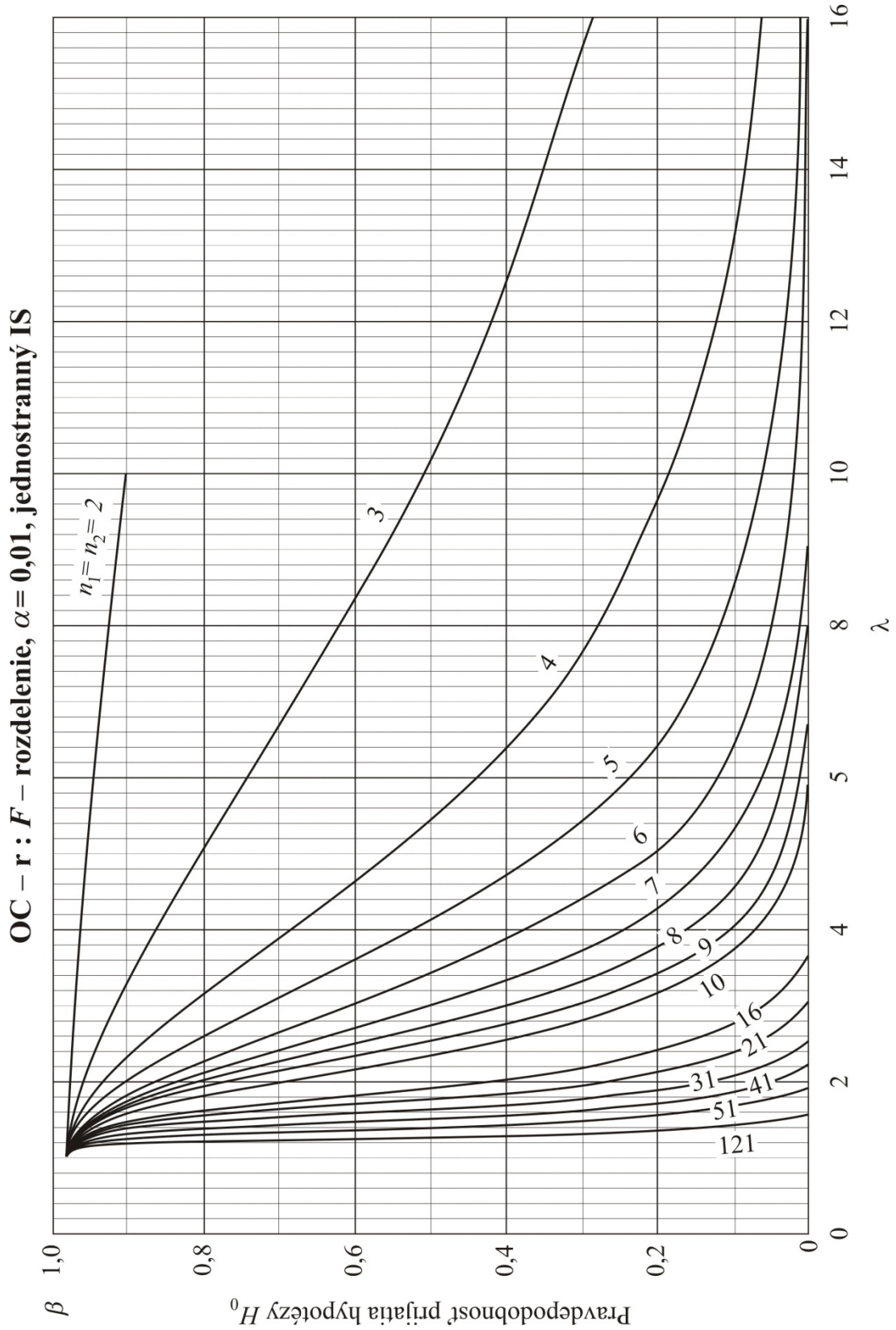

OC – m : χ^2 – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β 1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
λ
n = 2
3
4
5
6
7
8
10
15
20
30
40
50
75
100


OC – n : χ^2 – rozdelenie, α = 0,01, jednostranný IS
β - Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
λ
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,0
m = 2
3
4
5
6
7
8
9
10
15
20
30
40
50
75
100


OC – o : F – rozdelenie, α = 0,05, dvojstranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β
λ
$n_1 = n_2 = 3$
4
5
6
7
8
9
10
16
21
31
51
101
3
4
5
6
7
8
9
10
16
21
31
51
101
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4


OC – p : F – rozdelenie, α = 0,01, dvojstranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
β
λ
$n_1 = n_2 = 3$
4
5
6
7
8
9
10
16
21
31
51
101
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4


OC – q : F – rozdelenie, α = 0,05, jednostranný IS
β
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H_0
λ
$n_1 = n_2 = 2$
3
4
5
6
7
8
10
15
20
30
40
50
75
100
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3


OC – r : F – rozdelenie, α= 0,01, jednostranný IS
Pravdepodobnosť prijatia hypotézy H0
β
λ
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
2
4
5
8
10
12
14
16
n1= n2= 2
3
4
5
6
7
8
9
10
16
21
31
41
51
121

Literatúra

[1] EFROM, B. and TIBSHIRANI, R. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York

[2] EGERMAYER, F., BOHÁČ, M. 1984. *Statistika pro techniky*. Praha, SNTL, 1984, 295 s.

[3] GARAJ, I., JANIGA, I. 2002. *Dvojstranné tolerančné medze pre neznámu strednú hodnotu a rozptyl normálneho rozdelenia*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2002, 147 s. ISBN 80-227-1779-7

[4] GARAJ, I., JANIGA, I. 2004. *Dvojstranné tolerančné medze normálnych rozdelení s neznámymi strednými hodnotami a s neznámym spoločným rozptylom. Two Sided Tolerance Limits of Normal Distributions with Uknown Means and Uknown Common Variability.* Bratislava,Vydavateľstvo STU, 2004, 218 s. ISBN 80-227-2019-4

[5] GARAJ, I., JANIGA, I. 2005. *Jednostranné tolerančné medze normálneho rozdelenia s neznámou strednou hodnotou a rozptylom. One Sided Tolerance Limits of Normal Distributions with Uknown Mean and Variability.* Bratislava,Vydavateľstvo STU, 2005, 214 s. ISBN 80-227-2218-9

[6] HÁTLE, J., LIKEŠ, J. 1972. *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. Praha, SNTL/ALFA, 1972, 463 s.

[7] JANIGA, I., MIKLÓŠ, R. Statistical tolerance intervals for a normal distribution. In *Measurement Science Review*. ISSN 13, 2001, vol. 1, no. 1, p. 29-32

[8] JANIGA, I., STANISLAV, M., GABKOVÁ, J. 2012. Aplikácia DMAIC v procese kompletizácie. In *Forum Statisticum Slovacum*. ISSN 1336-7420, 2012, roč. VIII, č. 5. s. 52-59

[9] JANIGA, I., STAREKOVÁ, A. 2001. *Základy pravdepodobnosti a štatistiky*. STU v Bratislave, 2001. 201 s. ISBN 80-227-1603-0

[10] JÍLEK, M. 1988. *Statistické toleranční meze*. Praha, SNTL, 1988, 275 s.

[11] LAMOŠ, F., POTOCKÝ, R. 1989. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. Vyd. ALFA, 1989. 342 s. ISBN 80-05-00115-0

[12] LIKEŠ, J., LAGA, J. 1978. *Základní statistické tabulky*. Praha, SNTL, 1978, 488 s.

[13] LIKEŠ, J., MACHEK, J. 1983. *Matematická statistika*. Praha, SNTL, 1983, 178 s.

[14] LIKEŠ, J., MACHEK, J. 1981. *Počet pravdepodobnosti*. Praha, SNTL, 1981, 159 s.

[15] MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C. 2002. *Applied statistics and probability for engineers*. John Wiley & Sons, Inc., 2002. 706 p. ISBN 0-471-20454-4

[16] PALENČÁR, R., RUIZ, J.M., JANIGA, I., HORNÍKOVÁ, A. 2001. *Štatistické metódy v metrologických a skúšobných laboratóriach.* Vyd. Grafické štúdio Ing. Peter Juriga, 2001. 366 s. ISBN 80-968449-3-8

[17] WIMMER, G. 1993. *Štatistické metódy v pedagogike*. Nakladateľstvo GAUDEAMUS, 1993. 154 s. ISBN 80-7041-864-8

[18] RIEČANOVÁ, Z. a kol. 1987. *Numerické metódy a matematická štatistika*. Bratislava, ALFA, 1987, 490 s.

Doc. RNDr. Ivan Janiga, PhD.

APLIKOVANÁ PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA PRE INŽINIEROV
Štatistická analýza jedného a dvoch súborov dát
1. diel

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2013.

Edícia vysokoškolských učebníc

Rozsah 165 strán, 87 obrázkov, 47 tabuliek, 16,435 AH, 16,816 VH,
1. vydanie, edičné číslo 5735, tlač Nakladateľstvo STU v Bratislave.

85 – 248 – 2013

ISBN 978-80-227-4046-3