

TECHNICKÁ FYZIKA

Zbierka riešených príkladov

Jozef Leja



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE
STROJNICKÁ FAKULTA

TECHNICKÁ FYZIKA

Zbierka riešených príkladov

Jozef Leja

Dielo je vydané pod medzinárodnou licenciou Creative Commons CC BY 4.0, ktorá povoľuje použitie, zdieľanie, prispôsobovanie, šírenie a reprodukovanie na ľubovoľnom médiu alebo v ľubovoľnom formáte, ak je uvedený pôvodný autor, zdroj a odkaz na Creative Commons licenciu, a ak sú vyznačené prípadné zmeny vykonané v diele. Viac informácií o licencií a použití diela na adrese: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.



RNDr. Jozef Leja, PhD.

Recenzenti: doc. PaedDr. Peter Hockicko, PhD.

doc. Mgr. Marcela Chovancová, PhD.

Schválila Vedecká rada Strojníckej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-5376-0

Obsah

Úvod	5
1 Kinematika hmotného bodu	7
2 Dynamika hmotného bodu	17
3 Mechanika tuhého telesa	33
4 Gravitačné pole	47
5 Termodynamika a molekulová fyzika	58
6 Elektrické pole a prúd	77
7 Magnetické pole	93
8 Kmity a vlny	106
9 Optika	121
Fyzikálne konštanty	134
Literatúra	135

Úvod

Vysokoškolské skriptá Technická fyzika – Zbierka riešených príkladov sú učebnou pomôckou určenou pre študentov prvého a druhého ročníka bakalárskeho štúdia na Strojníckej fakulte STU v Bratislave. Skriptá slúžia na precvičenie a doplnenie učiva povinných predmetov Technická fyzika I a Technická fyzika II, ako aj voliteľných predmetov Seminár z fyziky II a Seminár z fyziky III. Obsahom skript je 90 riešených príkladov z klasickej fyziky, ktoré pokrývajú oblasť mechaniky, termodynamiky, elektriny, magnetizmu, kmitov, vĺn a optiky. Výber príkladov je v súlade s obsahom uvedených predmetov, ide teda o príklady zodpovedajúce svojou náročnosťou základnému vysokoškolskému kurzu fyziky v rozsahu dvoch semestrov na vysokej škole technického zamerania.

Skriptá reagujú na potrebu študentov mať k dispozícii zbierku vzorových riešení príkladov, ktorá by im uľahčila štúdium a prípravu na zápočtové písomky a skúšku z fyziky. Táto potreba bola dlhodobá a čoraz intenzívnejšia v dôsledku toho, že posledná zbierka riešených príkladov z fyziky pre študentov Strojníckej fakulty STU (vtedy SVŠT) vyšla v roku 1985 [1]. Odvtedy síce iné fakulty STU vydali viacero zbierok riešených príkladov [2, 3, 4, 5, 6], tieto zbierky sú ale výberom príkladov len čiastočne vhodné pre študentov Strojníckej fakulty a nepokrývajú celý rozsah učiva fyziky na Strojníckej fakulte.

Pri príprave skript bolo treba rozhodnúť, či do skript vypracovať na začiatku každej kapitoly aj teoretický úvod, v ktorom by boli zhrnuté základné teoretické poznatky potrebné na riešenie príkladov. Zbierka príkladov pre študentov Strojníckej fakulty takéto úvodné časti nemala, niektoré iné zbierky ale takéto časti obsahujú. Vzhľadom na to, že výklad teórie je dostatočne dobre pokrytý skriptami [7, 8, 9, 10], v prípade potreby sa môže študent pozrieť aj do niektorej rokmi preverenej klasickej vysokoškolskej učebnice [11, 12, 13, 14, 15] alebo siahnuť po moderných študijných textoch [16, 17, 18, 19], preto do týchto skript teoretické úvody neboli zahrnuté. Druhá otázka bola, či zadania príkladov budú všeobecné, alebo budú obsahovať aj konkrétne číselné hodnoty. Vzhľadom na to, že ide o zbierku príkladov určenú študentom

technického zamerania, je vhodnejšie zadávať v príkladoch aj číselné hodnoty a riešiť príklady až do konečného číselného výsledku. Výhodou je aj precvičenie číselných výpočtov, pretože táto schopnosť v posledných rokoch u študentov klesá a pri dosadení do zložitejšieho matematického výrazu nebýva zriedkavým javom „koľko študentov, toľko výsledkov“. Všeobecný pokles matematických schopností je aj príčinou, prečo sú pri ťažších matematických krokoch uvedené aj postupné medzikroky.

Skriptá je vhodné používať tak, že po prečítaní zadania príkladu sa študent najskôr pokúsi vyriešiť príklad samostatne. Samostatné riešenie príkladu, teda bez pozretia na jeho vzorové riešenie, umožňuje študentovi overiť si, či rozumie fyzikálnej podstate problému, či je schopný aplikovať fyzikálne poznatky na jeho riešenie a v konečnom dôsledku, či je schopný samostatne riešiť podobné príklady na písomke alebo skúške. Až keď študent dospeje k názoru, že vyriešiť príklad je nad jeho sily, nastane vhodný čas pozrieť sa na vzorové riešenie, ktoré je uvedené v skriptách. Pre fyzikálne príklady je typické, že neexistuje len jeden správny postup, ktorým je možné príklad vyriešiť. Napríklad niektoré úlohy z mechaniky je možné riešiť pomocou Newtonovho zákona sily alebo pomocou zákona zachovania mechanickej energie, iný príklad predstavujú niektoré úlohy z magnetizmu, ktoré je možné riešiť pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona alebo pomocou Ampèrovho zákona celkového prúdu. Preto aj keď študent vyrieši príklad iným postupom, ako je uvedené v týchto skriptách, môže byť jeho riešenie správne.

V prípade, že si študent bude chcieť precvičiť a otestovať svoje vedomosti a schopnosti na ďalších príkladoch, vhodné je siahnuť po niektorej obsiahlejšej zbierke príkladov z vysokoškolskej fyziky [20, 21], alebo skúsiť prepočítať ďalšie príklady, ktoré sú zverejnené na internetovej stránke Ústavu matematiky a fyziky Strojníckej fakulty STU [22].

Vydanie skript bolo financované z prostriedkov projektu KEGA (024STU-4/2023)
„Budovanie laboratória medicínskej metrológie“.

1 Kinematika hmotného bodu

1.1 Polohový vektor hmotného bodu závisí od času podľa vzťahu $\vec{r} = \vec{i} A \cos bt + \vec{j} A \sin bt$, kde $A = 5 \text{ m}$, $b = \pi/4 \text{ s}^{-1}$. Vyjadrite jeho zložky, súradnice, veľkosť a smerové kosínusy v ľubovoľnom čase a v čase $t = 2 \text{ s}$.

Polohový vektor je možné rozložiť na zložky

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y},$$

pričom zložky polohového vektora sú

$$\vec{x} = \vec{i} A \cos bt,$$

$$\vec{y} = \vec{j} A \sin bt,$$

v čase $t = 2 \text{ s}$ majú zložky polohového vektora hodnoty

$$\vec{x} = \vec{i} 5 \text{ m} \cdot \cos(\pi/4 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \text{ s}) = 0 \vec{i},$$

$$\vec{y} = \vec{j} 5 \text{ m} \cdot \sin(\pi/4 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \text{ s}) = 5 \text{ m} \vec{j}.$$

Polohový vektor je možné zapísať pomocou súradníc

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

pričom súradnice polohového vektora sú

$$x = A \cos bt,$$

$$y = A \sin bt,$$

v čase $t = 2 \text{ s}$ majú súradnice polohového vektora hodnoty

$$x = 5 \text{ m} \cdot \cos(\pi/4 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \text{ s}) = 0,$$

$$y = 5 \text{ m} \cdot \sin(\pi/4 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \text{ s}) = 5 \text{ m} .$$

Veľkosť polohového vektora je konštantná

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(A \sin bt)^2 + (A \cos bt)^2} = A = 5 \text{ m} .$$

Smerové kosínusy polohového vektora sú

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{A \cos bt}{A} = \cos bt ,$$

$$\cos \beta = \frac{y}{r} = \frac{A \sin bt}{A} = \sin bt ,$$

v čase $t = 2 \text{ s}$ majú smerové kosínusy hodnoty

$$\cos \alpha = \cos(\pi/4 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \text{ s}) = 0 ,$$

$$\cos \beta = \sin(\pi/4 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \text{ s}) = 1 .$$

1.2 Dve telesá, ktoré sú vzdialené od seba $d = 100 \text{ m}$, sa začali pohybovať priamočiarno proti sebe. Prvé teleso sa pohybuje rovnomerne rýchlosťou $v = 3 \text{ m s}^{-1}$. Druhé teleso sa pohybuje rovnomerne zrýchlene so začiatočnou rýchlosťou $v_0 = 7 \text{ m s}^{-1}$ a zrýchlením $a = 4 \text{ m s}^{-2}$. Nájdite čas a miesto ich stretnutia.

Dráha prejdená prvým telesom pri rovnomernom pohybe bude

$$s_1 = vt .$$

Dráha prejdená druhým telesom pri rovnomerne zrýchlenom pohybe bude

$$s_2 = v_0 t + \frac{at^2}{2} .$$

Telesá sa stretnú, keď súčet dráh, ktoré prešli, sa bude rovnať ich počiatočnej vzdialenosti

$$s_1 + s_2 = d ,$$

$$vt + v_0 t + \frac{at^2}{2} = d .$$

Dosadením číselných hodnôt je možné získať kvadratickú rovnicu

$$3 \text{ m s}^{-1} t + 7 \text{ m s}^{-1} t + \frac{4 \text{ m s}^{-2} t^2}{2} = 100 \text{ m} ,$$

čas stretnutia telies je teda koreňom kvadratickej rovnice

$$2t^2 + 10t - 100 = 0 ,$$

ktorá má dve riešenia

$$t_1 = 5 \text{ s} ,$$

$$t_2 = -10 \text{ s} .$$

Fyzikálnemu riešeniu úlohy zodpovedá kladné riešenie kvadratickej rovnice

$$t = 5 \text{ s} .$$

Miesto, v ktorom sa telesá stretnú, bude od prvého telesa vzdialené

$$s_1 = vt = 3 \text{ m s}^{-1} \cdot 5 \text{ s} = 15 \text{ m}$$

a od druhého telesa bude vzdialené

$$s_2 = d - s_1 = 100 \text{ m} - 15 \text{ m} = 85 \text{ m} .$$

-
- 1.3 *Vlak sa rozbieha z pokoja rovnomerne zrýchleným pohybom tak, že za čas $t_1 = 30 \text{ s}$ prejde dráhu $s_1 = 90 \text{ m}$. Akú dráhu prejde za čas $t_2 = 60 \text{ s}$, aká bude vtedy jeho okamžitá rýchlosť a aká bude vtedy jeho priemerná rýchlosť?*
-

Pre dráhu s_1 , ktorú prejde vlak za čas t_1 pri rovnomerne zrýchlenom pohybe, platí

$$s_1 = \frac{at_1^2}{2} ,$$

z čoho je možné vypočítať zrýchlenie vlaku

$$a = \frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 90 \text{ m}}{(30 \text{ s})^2} = 0,2 \text{ m s}^{-2} .$$

Dráha vlaku v čase t_2 bude

$$s_2 = \frac{at_2^2}{2} = \frac{0,2 \text{ m s}^{-2} \cdot (60 \text{ s})^2}{2} = 360 \text{ m} .$$

Rýchlosť vlaku v čase t_2 bude

$$v_2 = at_2 = 0,2 \text{ m s}^{-2} \cdot 60 \text{ s} = 12 \text{ m s}^{-1} .$$

Priemerná rýchlosť vlaku za čas t_2 bude

$$v_p = \frac{s_2}{t_2} = \frac{360 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 6 \text{ m s}^{-1} .$$

1.4 Polohový vektor hmotného bodu má tvar $\vec{r} = (A_1 t^2 + B_1)\vec{i} + (A_2 t^2 + B_2)\vec{j}$, kde $A_1 = 0,2 \text{ m s}^{-2}$, $B_1 = 0,05 \text{ m}$, $A_2 = 0,15 \text{ m s}^{-2}$, $B_2 = -0,03 \text{ m}$. Nájdite veľkosť a smer rýchlosti a zrýchlenia hmotného bodu v čase $t_1 = 2 \text{ s}$. Smer zadajte pomocou uhla vzhľadom k osi x .

Súradnice polohového vektora sú

$$x = A_1 t^2 + B_1 ,$$

$$y = A_2 t^2 + B_2 .$$

Pre vektor rýchlosti platí

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

a súradnice vektora rýchlosti budú

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A_1 t^2 + B_1)}{dt} = 2A_1 t ,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(A_2 t^2 + B_2)}{dt} = 2A_2 t .$$

Veľkosť vektora rýchlosti bude

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2A_1 t)^2 + (2A_2 t)^2} = 2t\sqrt{A_1^2 + A_2^2} .$$

Veľkosť vektora rýchlosti v čase $t_1 = 2 \text{ s}$ bude

$$v = 2 \cdot 2 \text{ s} \cdot \sqrt{(0,2 \text{ m s}^{-2})^2 + (0,15 \text{ m s}^{-2})^2} = 1 \text{ m s}^{-1} .$$

Smerový kosínus vektora rýchlosti bude konštantný

$$\cos \alpha_v = \frac{v_x}{v} = \frac{2A_1 t}{2t\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

a jeho hodnota bude

$$\cos \alpha_v = \frac{0,2 \text{ m s}^{-2}}{\sqrt{(0,2 \text{ m s}^{-2})^2 + (0,15 \text{ m s}^{-2})^2}} = 0,8 ,$$

z čoho vyplýva, že uhol medzi vektorom rýchlosti a osou x bude

$$\alpha_v = \arccos 0,8 = 36,6^\circ .$$

Pre vektor zrýchlenia platí

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} ,$$

súradnice vektora zrýchlenia budú

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(2A_1t)}{dt} = 2A_1 ,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(2A_2t)}{dt} = 2A_2 .$$

Veľkosť vektora zrýchlenia bude konštantná

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2A_1)^2 + (2A_2)^2} = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

a jej hodnota bude

$$a = 2 \cdot \sqrt{(0,2 \text{ m s}^{-2})^2 + (0,15 \text{ m s}^{-2})^2} = 0,5 \text{ m s}^{-2} .$$

Smerový kosínus vektora zrýchlenia bude konštantný

$$\cos \alpha_a = \frac{a_x}{a} = \frac{2A_1}{2\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

a jeho hodnota bude

$$\cos \alpha_a = \frac{0,2 \text{ m s}^{-2}}{\sqrt{(0,2 \text{ m s}^{-2})^2 + (0,15 \text{ m s}^{-2})^2}} = 0,8 ,$$

z čoho vyplýva, že uhol medzi vektorom zrýchlenia a osou x bude

$$\alpha_a = \arccos 0,8 = 36,6^\circ .$$

1.5 Koleso sa začalo otáčať z pokojového stavu so stálym uhlovým zrýchlením $\alpha = 5 \text{ s}^{-2}$.
Koľkokrát sa koleso otočilo za čas $t_1 = 10 \text{ s}$ od začiatku pohybu?

Uhlová rýchlosť pri konštantnom uhlovom zrýchlení je

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha t + c_1 .$$

Ak je počiatková uhlová rýchlosť nulová, tak sa integračná konštanta rovná nule

$$\omega(t = 0 \text{ s}) = 0 \implies c_1 = 0$$

a uhlová rýchlosť bude

$$\omega = \alpha t .$$

Uhlová dráha pri konštantnom uhlovom zrýchlení je

$$\varphi = \int \omega dt = \int \alpha t dt = \frac{\alpha t^2}{2} + c_2 .$$

Ak je počiatočná uhlová dráha nulová, tak sa integračná konštanta rovná nule

$$\varphi(t = 0 \text{ s}) = 0 \implies c_2 = 0$$

a uhlová dráha bude

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2} .$$

Uhlová dráha jednej otáčky je 2π , preto počet otáčok kola bude

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\alpha t^2}{4\pi}$$

a počet otáčok kola v čase t_1 bude

$$n_1 = \frac{\alpha t_1^2}{4\pi} = \frac{5 \text{ s}^{-2} \cdot (10 \text{ s})^2}{4\pi} = 39,8 .$$

1.6 *Veľkosť rýchlosti vlaku po odchode zo stanice rovnomerne narastala z nulovej hodnoty na hodnotu $v_1 = 20 \text{ m s}^{-1}$ v čase $t_1 = 180 \text{ s}$. Trať je zakrivená s polomerom zakrivenia $R = 800 \text{ m}$. Vypočítajte veľkosť tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia v čase $t_2 = 120 \text{ s}$.*

Tangenciálne zrýchlenie udáva zmenu veľkosti rýchlosti a platí

$$a_t = \frac{dv}{dt} ,$$

pri konštantnom a_t platí

$$a_t = \frac{v_1}{t_1} = \frac{20 \text{ m s}^{-1}}{180 \text{ s}} = 0,111 \text{ m s}^{-2} .$$

Veľkosť rýchlosti v čase t_2 bude

$$v_2 = a_t t_2 = \frac{v_1 t_2}{t_1} .$$

Normálové zrýchlenie udáva zmenu smeru rýchlosti a platí

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

v čase t_2 bude mať normálové zrýchlenie veľkosť

$$a_n = \frac{v_1^2 t_2^2}{R t_1^2} = \frac{(20 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot (120 \text{ s})^2}{800 \text{ m} \cdot (180 \text{ s})^2} = 0,222 \text{ m s}^{-2}.$$

Celkové zrýchlenie je vektorovým súčtom tangenciálneho a normálového zrýchlenia

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

veľkosť celkového zrýchlenia bude

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

teda celkové zrýchlenie v čase t_2 bude

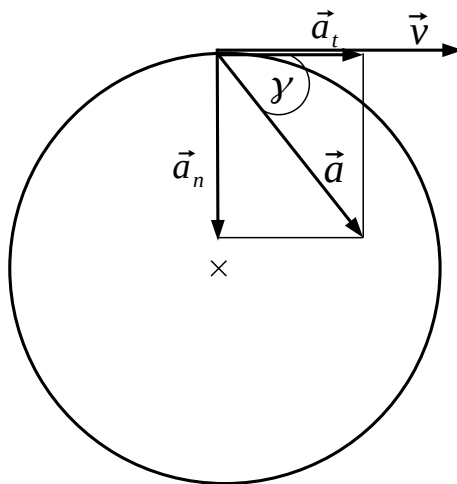
$$a = \sqrt{\left(\frac{v_1}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{v_1^2 t_2^2}{R t_1^2}\right)^2}$$

a jeho hodnota bude

$$a = \sqrt{\left(\frac{20 \text{ m s}^{-1}}{180 \text{ s}}\right)^2 + \left(\frac{(20 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot (120 \text{ s})^2}{800 \text{ m} \cdot (180 \text{ s})^2}\right)^2} = 0,248 \text{ m s}^{-2}.$$

1.7 Častica sa začala pohybovať po kružnici s konštantným uhlovým zrýchlením $\alpha = 0,25 \text{ s}^{-2}$.

V ktorom čase od začiatku pohybu bude vektor zrýchlenia častice zvierat s vektorom jej rýchlosti uhol $\gamma = 45^\circ$?



Obr. 1

Tangenciálne zrýchlenie pri pohybe po kružnici je

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha .$$

Uhlová rýchlosť pri konštantnom uhlovom zrýchlení je

$$\omega = \alpha t .$$

Normálové zrýchlenie je možné vyjadriť ako

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\alpha^2 t^2 R^2}{R} = \alpha^2 t^2 R .$$

Pre uhol medzi rýchlosťou a zrýchlením častice (Obr. 1) potom platí

$$\tan \gamma = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\alpha^2 t^2 R}{R\alpha} = \alpha t^2 ,$$

z čoho pre čas vyplýva

$$t = \sqrt{\frac{\tan \gamma}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\tan 45^\circ}{0,25 \text{ s}^{-2}}} = 2 \text{ s} .$$

1.8 Koleso s polomerom $R = 0,1 \text{ m}$ sa otáča tak, že závislosť uhla pootočenia od času vyjadruje funkcia $\varphi = A + Bt + Ct^3$, kde $B = 2 \text{ s}^{-1}$, $C = 1 \text{ s}^{-3}$. Pre body, ktoré ležia na obvode kolesa, vyjadrite v čase $t_1 = 2 \text{ s}$ uhlovú rýchlosť, uhlové zrýchlenie, obvodovú rýchlosť, tangenciálne zrýchlenie a normálové zrýchlenie.

Veľkosť uhlovej rýchlosti je možné vypočítať pomocou definície

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} ,$$

z čoho vyplýva

$$\omega = \frac{d(A + Bt + Ct^3)}{dt} = B + 3Ct^2 = [2 \text{ s}^{-1} + 3 \cdot (1 \text{ s}^{-3}) \cdot (2 \text{ s})^2] = 14 \text{ s}^{-1} .$$

Veľkosť uhlového zrýchlenia je možné vypočítať pomocou definície

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} ,$$

z čoho vyplýva

$$\alpha = \frac{d(B + 3Ct^2)}{dt} = 6Ct = 6 \cdot (1 \text{ s}^{-3}) \cdot (2 \text{ s}) = 12 \text{ s}^{-2} .$$

Pre veľkosť obvodovej rýchlosti platí

$$v = \omega R = (B + 3Ct^2)R = [2\text{ s}^{-1} + 3 \cdot (1\text{ s}^{-3}) \cdot (2\text{ s})^2] \cdot 0,1\text{ m} = 1,4\text{ m s}^{-1}.$$

Veľkosť tangenciálneho zrýchlenia bude

$$a_t = \alpha R = 12\text{ s}^{-2} \cdot 0,1\text{ m} = 1,2\text{ m s}^{-2}.$$

Veľkosť normálového zrýchlenia bude

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(1,4\text{ m s}^{-1})^2}{0,1\text{ m}} = 19,6\text{ m s}^{-2}.$$

1.9 Hmotný bod koná priamočiary pohyb tak, že jeho zrýchlenie s časom rovnomerne rastie a za čas $t_1 = 10\text{ s}$ narastie z nulovej hodnoty na hodnotu $a_1 = 5\text{ m s}^{-2}$. Aká je rýchlosť pohybu hmotného bodu v čase $t_2 = 20\text{ s}$ a akú dráhu hmotný bod za tento čas prešiel, keď bol na počiatku v pokoji?

Zrýchlenie hmotného bodu rovnomerne rastie, teda platí

$$a = kt,$$

zrýchlenie z nuly na a_1 narastie za čas t_1 , to znamená

$$a_1 = kt_1 \implies k = \frac{a_1}{t_1},$$

preto zrýchlenie bude

$$a = \frac{a_1 t}{t_1}.$$

Rýchlosť hmotného bodu je

$$v = \int a dt = \int \frac{a_1 t}{t_1} dt = \frac{a_1 t^2}{2t_1} + c_1,$$

ak je rýchlosť na počiatku nulová

$$v(t = 0\text{ s}) = 0 \implies c_1 = 0,$$

rýchlosť v čase t_2 bude

$$v_2 = \frac{a_1 t_2^2}{2t_1} = \frac{5\text{ m s}^{-2} \cdot (20\text{ s})^2}{2 \cdot 10\text{ s}} = 100\text{ m s}^{-1}.$$

Dráha hmotného bodu je

$$s = \int v dt = \int \frac{a_1 t^2}{2t_1} dt = \frac{a_1 t^3}{6t_1} + c_2 ,$$

ak je počiatočná dráha nulová

$$s(t = 0 \text{ s}) = 0 \implies c_2 = 0 ,$$

dráha v čase t_2 bude

$$s_2 = \frac{a_1 t_2^3}{6t_1} = \frac{5 \text{ m s}^{-2} \cdot (20 \text{ s})^3}{6 \cdot 10 \text{ s}} = 667 \text{ m s}^{-1} .$$

1.10 Častica sa pohybuje po kružnici s uhlovým spomalením, ktoré s časom rastie podľa vzťahu $\alpha = kt$, kde $k = -6 \text{ rad s}^{-3}$. Začiatočná uhlová rýchlosť bola $\omega_0 = 30 \text{ rad s}^{-1}$. O aký uhol sa pootočí sprievodič častice za čas $t_1 = 5 \text{ s}$?

Uhlové spomalenie častice rovnomerne rastie, to znamená

$$\alpha = kt .$$

Uhlová rýchlosť častice je

$$\omega = \int \alpha dt = \int kt dt = \frac{kt^2}{2} + c_1 ,$$

pretože počiatočná uhlová rýchlosť častice bola ω_0

$$\omega(t = 0 \text{ s}) = \omega_0 \implies c_1 = \omega_0 ,$$

uhlová rýchlosť bude

$$\omega = \frac{kt^2}{2} + \omega_0 .$$

Uhlová dráha častice je

$$\varphi = \int \omega dt = \int \left(\frac{kt^2}{2} + \omega_0 \right) dt = \frac{kt^3}{6} + \omega_0 t + c_2 ,$$

pretože počiatočná uhlová dráha častice bola nulová

$$\varphi(t = 0 \text{ s}) = 0 \implies c_2 = 0 ,$$

uhlová dráha bude

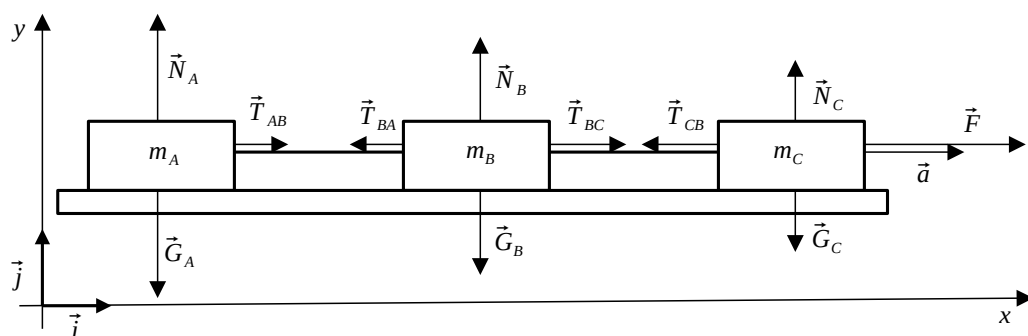
$$\varphi = \frac{kt^3}{6} + \omega_0 t .$$

Uhlová dráha častice v čase t_1 bude

$$\varphi_1 = \frac{kt_1^3}{6} + \omega_0 t_1 = \frac{-6 \text{ rad s}^{-3} \cdot (5 \text{ s})^3}{6} + 30 \text{ rad s}^{-1} \cdot 5 \text{ s} = 25 \text{ rad} .$$

2 Dynamika hmotného bodu

2.1 Na tri telesá s hmotnosťami $m_A = 10 \text{ kg}$, $m_B = 15 \text{ kg}$, $m_C = 20 \text{ kg}$, ktoré ležia na vodorovnej podložke a sú vzájomne spojené lankom, pôsobí vo vodorovnom smere sila $F = 100 \text{ N}$. Hmotnosť lanka aj trenie medzi telesami a podložkou sú zanedbateľné. Vypočítajte zrýchlenie sústavy a silu pôsobiacu v každom spoji.



Obr. 2

Pohyb telies opisuje Newtonov zákon sily

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

Ak sa vzdialenosť medzi telesami nemení, zrýchlenie všetkých telies je rovnaké

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a}.$$

Na telesá pôsobia tiažové sily $\vec{G}_A$, $\vec{G}_B$, $\vec{G}_C$, normálové sily $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, $\vec{N}_C$, ťahové sily lanka $\vec{T}_{AB}$, $\vec{T}_{BA}$, $\vec{T}_{BC}$, $\vec{T}_{CB}$ a vonkajšia sila $\vec{F}$, preto Newtonov zákon sily bude

$$\vec{T}_{AB} + \vec{G}_A + \vec{N}_A = m_A\vec{a},$$

$$\vec{T}_{BA} + \vec{T}_{BC} + \vec{G}_B + \vec{N}_B = m_B\vec{a},$$

$$\vec{F} + \vec{T}_{CB} + \vec{G}_C + \vec{N}_C = m_C\vec{a}.$$

Po skalárnom vynásobení rovníc jednotkovými vektormi $\vec{i}$ a $\vec{j}$ a využitím rovností

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 ,$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1 ,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 ,$$

nadobudnú rovnice skalárny tvar

$$T_{AB} = m_A a ,$$

$$N_A - G_A = 0 ,$$

$$-T_{BA} + T_{BC} = m_B a ,$$

$$N_B - G_B = 0 ,$$

$$F - T_{CB} = m_C a ,$$

$$N_C - G_C = 0 .$$

Vo vertikálnom smere je zrýchlenie nulové, preto platí

$$N_A = G_A ,$$

$$N_B = G_B ,$$

$$N_C = G_C .$$

Z Newtonovho zákon akcie a reakcie vyplýva

$$\vec{T}_{AB} = -\vec{T}_{BA} ,$$

$$T_{AB} = T_{BA} ,$$

$$\vec{T}_{BC} = -\vec{T}_{CB} ,$$

$$T_{BC} = T_{CB} .$$

V horizontálnom smere preto platí

$$T_{AB} = m_A a ,$$

$$-T_{AB} + T_{BC} = m_B a ,$$

$$F - T_{BC} = m_C a .$$

Sčítaním všetkých rovníc je možné vyjadriť zrýchlenie sústavy

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m_C}$$

a následnou úpravou jednotlivých rovníc sily medzi telesami

$$T_{AB} = \frac{F m_A}{m_A + m_B + m_C} ,$$

$$T_{BC} = \frac{F(m_A + m_B)}{m_A + m_B + m_C} .$$

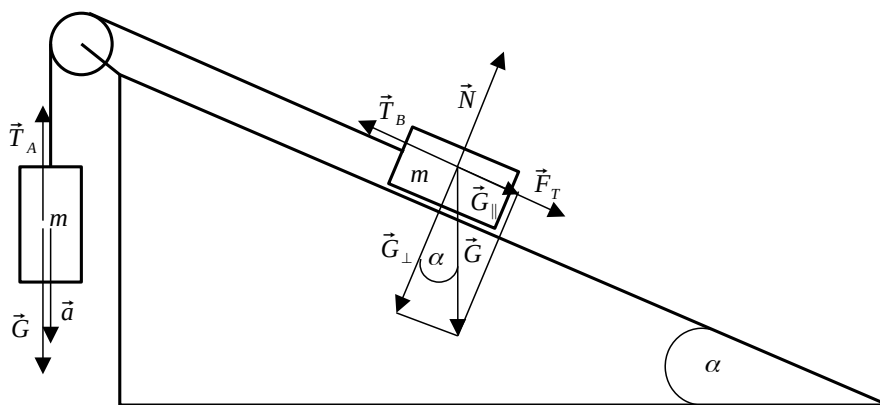
Po dosadení hodnôt číselné riešenie bude

$$a = \frac{100 \text{ N}}{10 \text{ kg} + 15 \text{ kg} + 20 \text{ kg}} = 2,2 \text{ m s}^{-2} ,$$

$$T_{AB} = \frac{100 \text{ N} \cdot 10 \text{ kg}}{10 \text{ kg} + 15 \text{ kg} + 20 \text{ kg}} = 22,2 \text{ N} ,$$

$$T_{BC} = \frac{100 \text{ N} \cdot (10 \text{ kg} + 15 \text{ kg})}{10 \text{ kg} + 15 \text{ kg} + 20 \text{ kg}} = 55,6 \text{ N} .$$

- 2.2 Dve telesá s rovnakými hmotnosťami $m = 5 \text{ kg}$ sú spojené lankom preloženým cez voľne sa otáčajúcu kladku. Prvé teleso visí voľne na lanku, druhé leží na naklonenej rovine, ktorá zvierá s horizontálnou rovinou uhol $\alpha = 30^\circ$. Vypočítajte zrýchlenie telies a silu, ktorou je napínané lanko, ak medzi telesom a naklonenou rovinou nie je trenie aj ak medzi telesom a naklonenou rovinou je trenie a faktor trenia je $\mu = 0,2$.



Obr. 3

Tiažovú silu telesa na naklonenej rovine je možné rozložiť na zložku rovnobežnú s naklonenou rovinou a zložku kolmú na naklonenú rovinu

$$\vec{G} = \vec{G}_{\parallel} + \vec{G}_{\perp} .$$

Zložka rovnobežná s naklonenou rovinou bude mať veľkosť

$$G_{\parallel} = G \sin \alpha$$

a zložka kolmá na naklonenú rovinu

$$G_{\perp} = G \cos \alpha .$$

Veľkosť trecej sily medzi telesom a naklonenou rovinou je

$$F_T = \mu G_{\perp} = \mu G \cos \alpha .$$

Newtonov zákon sily

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a} ,$$

pre visiace teleso bude

$$\vec{G} + \vec{T}_A = m \vec{a}_A$$

a pre teleso na naklonenej rovine

$$\vec{G}_{\parallel} + \vec{G}_{\perp} + \vec{N} + \vec{T}_B + \vec{F}_T = m \vec{a}_B .$$

Z Newtonovho zákona akcie a reakcie vyplýva

$$T_A = T_B = T .$$

Dĺžka lanka sa nemení, preto platí

$$a_A = a_B = a .$$

Tiažovú silu je možné vyjadriť pomocou tiažového zrýchlenia ako

$$\vec{G} = m \vec{g} .$$

Newtonov zákon sily má pre telesá skalárny tvar

$$mg - T = ma ,$$

$$-mg \sin \alpha + T - \mu mg \cos \alpha = ma .$$

Riešením sústavy rovníc je možné vyjadriť zrýchlenie sústavy

$$a = \frac{g(1 - \sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{2} ,$$

aj silu napínajúca lanko

$$mg - T = ma \implies T = mg - ma ,$$

$$T = \frac{mg(1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{2} .$$

Ak je trenie medzi telesom a naklonenou rovinou zanedbateľné

$$\mu = 0 ,$$

zrýchlenie sústavy bude

$$a = \frac{g(1 - \sin \alpha)}{2}$$

a sila napínajúca lanko bude

$$T = \frac{mg(1 + \sin \alpha)}{2} .$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$a = \frac{9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (1 - \sin 30^\circ)}{2} = 2,45 \text{ m s}^{-2} ,$$

$$T = \frac{5 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (1 + \sin 30^\circ)}{2} = 36,79 \text{ N} .$$

Ak trenie medzi telesom a naklonenou rovinou nie je zanedbateľné

$$\mu = 0,1 ,$$

zrýchlenie sústavy bude

$$a = \frac{g(1 - \sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{2}$$

a sila napínajúca lanko bude

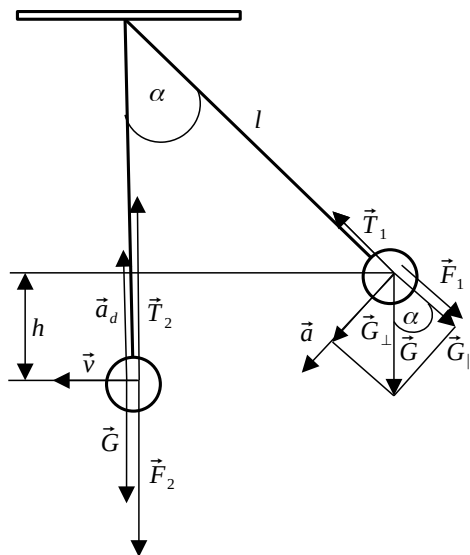
$$T = \frac{mg(1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{2} .$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$a = \frac{9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (1 - \sin 30^\circ - 0,2 \cdot \cos 30^\circ)}{2} = 1,60 \text{ m s}^{-2} ,$$

$$T = \frac{5 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (1 + \sin 30^\circ + 0,2 \cdot \cos 30^\circ)}{2} = 41,04 \text{ N} .$$

2.3 Závažie s hmotnosťou $m = 5 \text{ kg}$ visiace na niti dĺžky $l = 1 \text{ m}$ sa kýva s maximálnou uhlovou výchylkou $\alpha = 60^\circ$. Aká sila F_1 napína niť v krajných polohách a aká sila F_2 pri prechode najnižšou polohou?



Obr. 4

Na závažie v krajnej polohe pôsobí tiažová sila $\vec{G}$ a sila lanka $\vec{T}_1$. Newtonov zákon sily preto bude mať tvar

$$\vec{G} + \vec{T}_1 = m\vec{a}.$$

Tiažovú silu je možné rozložiť na zložku rovnobežnú so smerom nite a zložku kolmú na smer nite

$$\vec{G} = \vec{G}_{\parallel} + \vec{G}_{\perp}.$$

V smere rovnobežnom so smerom nite bude pôsobiť zložka tiažovej sily

$$G_{\parallel} = G \cos \alpha,$$

z Newtonovho zákona sily pre zložky v smere nite vyplýva

$$G_{\parallel} - T_1 = 0,$$

$$mg \cos \alpha - T_1 = 0,$$

z čoho je možné vyjadriť silu, ktorou pôsobí lanko na závažie

$$T_1 = mg \cos \alpha .$$

Podľa Newtonovho zákona akcie a reakcie, sila, ktorou pôsobí závažie na lanko, má rovnakú veľkosť a opačný smer, ako sila, ktorou pôsobí lanko na závažie

$$\vec{F}_1 = -\vec{T}_1 ,$$

preto bude veľkosť sily, ktorá napína lanko v krajnej polohe

$$F_1 = mg \cos \alpha ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$F_1 = 5 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \cos 60^\circ = 24,53 \text{ N} .$$

Výšku závažia v krajnej polohe vzhľadom na najnižšiu polohu je možné vyjadriť ako

$$h = l - l \cos \alpha .$$

Zákon zachovania mechanickej energie pre závažie v krajnej a najnižšej polohe má tvar

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} ,$$

ak je závažie v krajnej polohe v kľude

$$E_{k1} = 0$$

a v najnižšej polohe platí

$$E_{p2} = 0 ,$$

nadobudne zákon zachovania mechanickej energie tvar

$$E_{p1} = E_{k2} ,$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} ,$$

z ktorého je možné vyjadriť rýchlosť závažia v najnižšej polohe

$$v = \sqrt{2gh} .$$

Závažie sa bude pohybovať po kružnici s polomerom l a budú naň pôsobiť tiažová sila $\vec{G}$ a sila lanka $\vec{T}_2$. Newtonov zákon sily pre teleso v najnižšej polohe bude

$$\vec{G} + \vec{T}_2 = m\vec{a}_d,$$

v smere nite preto v najnižšej polohe platí

$$mg - T_2 = -ma_d.$$

Veľkosť dostredivého zrýchlenia v najnižšej polohe je možné vyjadriť pomocou rýchlosti závažia

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \frac{2gh}{l} = 2g(1 - \cos \alpha).$$

Sila napínajúca lanko v najnižšej polohe bude

$$T_2 = mg + ma_d = mg(3 - 2 \cos \alpha).$$

Sila, ktorou pôsobí závažie na lanko, má rovnakú veľkosť a opačný smer, ako sila, ktorou pôsobí lanko na závažie

$$\vec{F}_2 = -\vec{T}_2,$$

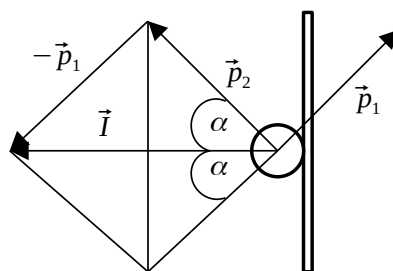
preto bude veľkosť sily, ktorá napína lanko v krajnej polohe

$$F_2 = mg(3 - 2 \cos \alpha),$$

po dosadení číselných hodnôt

$$F_1 = 5 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (3 - 2 \cdot \cos 60^\circ) = 98,1 \text{ N}.$$

2.4 Aký impulz udelí stena pružnej lopte s hmotnosťou $m = 1 \text{ kg}$ a rýchlosťou $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$, ktorá na stenu narazí v smere zvierajúcom s normálou uhol $\alpha = 60^\circ$?



Obr. 5

Impulz sily vyjadruje časový účinok sily

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt ,$$

pre jeho výpočet je možné použiť aj impulzovú vetu

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 .$$

Pri pružnej zrážke sa kinetická energia lopty nezmení

$$E_{k2} = E_{k1} ,$$

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} ,$$

preto sa nezmení ani veľkosť rýchlosti

$$v_2 = v_1 = v$$

a nezmení sa teda ani veľkosť hybnosti

$$p_2 = p_1 = p = mv .$$

Z obrázku (Obr. 5) vyplýva

$$\cos \alpha = \frac{I}{2p} ,$$

z čoho je možné vyjadriť impulz sily

$$I = 2p \cos \alpha = 2mv \cos \alpha ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$I = 2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-1} \cdot \cos 60^\circ = 10 \text{ N s} .$$

2.5 Na teleso ležiace na vodorovnej podložke pôsobí vo vodorovnom smere sila, ktorej časová závislosť je $F(t) = A + Bt + Ct^2$, kde $A = 0,2 \text{ N}$, $B = 0,4 \text{ N s}^{-1}$, $C = 0,6 \text{ N s}^{-2}$. Vypočítajte impulz sily za čas $t_0 = 5 \text{ s}$?

Impulz sily vyjadruje časový účinok sily

$$\vec{I} = \int_0^{t_0} \vec{F}(t) dt .$$

V prípade priamočiareho pohybu bude veľkosť impulzu sily

$$I = \int_0^{t_0} F(t) dt = \int_0^{t_0} (A + Bt + Ct^2) dt = \left[At + B\frac{t^2}{2} + C\frac{t^3}{3} \right]_0^{t_0} = At_0 + B\frac{t_0^2}{2} + C\frac{t_0^3}{3}.$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$I = 0,2 \text{ N} \cdot 5 \text{ s} + 0,4 \text{ N s}^{-1} \cdot \frac{(5 \text{ s})^2}{2} + 0,6 \text{ N s}^{-2} \cdot \frac{(5 \text{ s})^3}{3} = 31 \text{ N s}.$$

2.6 Hmotný bod hmotnosti $m = 5 \text{ kg}$ sa pohybuje účinkom sily tak, že jeho dráha sa mení s časom ako $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, kde $C = 2 \text{ m s}^{-2}$, $D = -0,2 \text{ m s}^{-3}$. Vypočítajte veľkosť sily pôsobiacej na hmotný bod v čase $t_0 = 2 \text{ s}$ a nájdite čas, kedy sa bude sila rovnáť nule.

Rýchlosť pri priamočiarom pohybe je možné vyjadriť z definície

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(A + Bt + Ct^2 + Dt^3)}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2.$$

Zrýchlenie pri priamočiarom pohybe je možné vyjadriť z definície

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(B + 2Ct + 3Dt^2)}{dt} = 2C + 6Dt.$$

Z Newtonovho zákona sily je možné vypočítať silu

$$F(t) = ma(t) = m(2C + 6Dt).$$

V čase t_0 bude sila

$$F(t = t_0) = m(2C + 6Dt_0).$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$F(t = 2 \text{ s}) = 5 \text{ kg} \cdot [2 \cdot 2 \text{ m s}^{-2} + 6 \cdot (-0,2 \text{ m s}^{-3}) \cdot 2 \text{ s}] = 8 \text{ N}.$$

Z podmienky, že veľkosť sily je nulová

$$F(t) = 0,$$

vyplýva

$$m(2C + 6Dt) = 0,$$

z čoho je možné vyjadriť čas, kedy bude sila nulová

$$t = \frac{-C}{3D}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$t = \frac{-2 \text{ m s}^{-2}}{3 \cdot (-0,2 \text{ m s}^{-3})} = 3,33 \text{ s}.$$

2.7 Na teleso hmotnosti $m = 5 \text{ kg}$ pôsobí sila $F = F_0 - kt$, kde $F_0 = 10 \text{ N}$ a $k = 0,1 \text{ N s}^{-1}$ sú konštanty. Vyjadrite zrýchlenie, rýchlosť a polohu telesa v čase $t = 10 \text{ s}$, ak na počiatku malo teleso rýchlosť $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$ a polohu $x_0 = 2 \text{ m}$.

Z Newtonovho zákona sily

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

vyplýva pre zrýchlenie telesa pri priamočiariom pohybe

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} - \frac{kt}{m},$$

po dosadení číselných hodnôt zrýchlenie v čase $t = 10 \text{ s}$ bude

$$a = \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ kg}} - \frac{0,1 \text{ N s}^{-1} \cdot 10 \text{ s}}{5 \text{ kg}} = 2,2 \text{ m s}^{-2}.$$

Rýchlosť hmotného bodu je možné vypočítať pomocou zrýchlenia

$$v = \int a dt = \int \left(\frac{F_0}{m} - \frac{kt}{m} \right) dt = \frac{F_0 t}{m} + \frac{kt^2}{2m} + c_1.$$

Ak rýchlosť na počiatku bola v_0 , integračná konštanta c_1 bude

$$v(t = 0 \text{ s}) = v_0 \implies c_1 = v_0$$

a rýchlosť hmotného bodu bude

$$v = \frac{F_0 t}{m} + \frac{kt^2}{2m} + v_0,$$

po dosadení číselných hodnôt rýchlosť v čase $t = 10 \text{ s}$ bude

$$v = \frac{10 \text{ N} \cdot 10 \text{ s}}{5 \text{ kg}} + \frac{0,1 \text{ N s}^{-1} \cdot (10 \text{ s})^2}{2 \cdot 5 \text{ kg}} + 2 \text{ m s}^{-1} = 23 \text{ m s}^{-1}.$$

Polohu hmotného bodu je možné vypočítať pomocou rýchlosti

$$x = \int v dt = \int \left(\frac{F_0 t}{m} - \frac{kt^2}{2m} + v_0 \right) dt = \frac{F_0 t^2}{2m} - \frac{kt^3}{6m} + v_0 t + c_2 ,$$

ak poloha na počiatku bola x_0 , integračná konštanta c_2 bude

$$x(t = 0 \text{ s}) = x_0 \implies c_2 = x_0$$

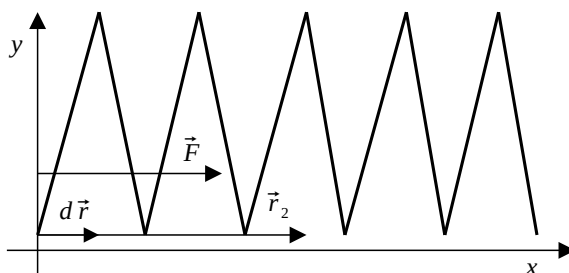
a poloha hmotného bodu bude

$$x = \frac{F_0 t^2}{2m} - \frac{kt^3}{6m} + v_0 t + x_0 ,$$

po dosadení číselných hodnôt rýchlostí v čase $t = 10 \text{ s}$ bude

$$x = \frac{10 \text{ N} \cdot (10 \text{ s})^2}{2 \cdot 5 \text{ kg}} + \frac{0,1 \text{ N s}^{-1} \cdot (10 \text{ s})^3}{6 \cdot 5 \text{ kg}} + 2 \text{ m s}^{-1} \cdot 10 \text{ s} + 2 \text{ m} = 125,33 \text{ m} .$$

2.8 Akú prácu treba vykonať pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o $x_0 = 10 \text{ cm}$, keď na jej stlačenie o $x_1 = 1 \text{ cm}$ je potrebná sila $F_1 = 25\,000 \text{ N}$ a keď platí, že sila je priamoúmerná skráteniu špirály.



Obr. 6

Veľkosť sily, ktorou na pružinu pôsobí vonkajšia sila, je priamoúmerná stlačeniu pružiny

$$F = kx .$$

Ak na stlačenie pružiny o x_1 je potrebná sila F_1 , tuhosť pružiny bude

$$F_1 = kx_1 \implies k = \frac{F_1}{x_1} .$$

Mechanická práca vyjadruje dráhový účinok sily

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} ,$$

ak vektor posunutia a vektor sily majú rovnaký smer, potom platí

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos 0^\circ = F dr .$$

Ak bude mať os x začiatok v mieste, kde sa nachádza nestlačená pružina a smer osi x bude rovnaký ako smer stláčania pružiny, bude platiť

$$dr = dx ,$$

$$r_1 = 0 ,$$

$$r_2 = x_0 .$$

Mechanická práca preto bude

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_0^{x_0} F dx = \int_0^{x_0} kx dx = \frac{kx_0^2}{2}$$

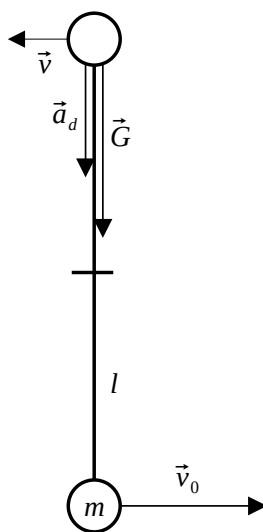
a po dosadení tuhosti pružiny

$$A = \frac{F_1 x_0^2}{2x_1} .$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$A = \frac{25\,000 \text{ N} \cdot (0,10 \text{ m})^2}{2 \cdot 0,01 \text{ m}} = 12\,500 \text{ J} = 12,5 \text{ kJ} .$$

2.9 Na niti o dĺžke $l = 0,5 \text{ m}$ je zavesená guľka. Akú najmenšiu rýchlosť vo vodorovnom smere jej treba udeliť, aby sa vychýlila až do najvyššej polohy a niť bola stále napnutá?



Obr. 7

Ak bude mať guľka v najvyššej polohe rýchlosť $\vec{v}$ a bude sa pohybovať po kružnici s polomerom l , bude mať dostredivé zrýchlenie s veľkosťou

$$a = m \frac{v^2}{l} .$$

Ak na ňu bude zároveň pôsobiť tiažová sila

$$\vec{G} = m\vec{g} ,$$

potom bude mať Newtonov zákon sily tvar

$$\vec{G} = m\vec{a} ,$$

v skalárnom tvare

$$mg = m \frac{v^2}{l} ,$$

z čoho je možné vyjadriť rýchlosť guľky v najvyššej polohe

$$v = \sqrt{gl} .$$

Ak bude najnižšia poloha guľky miestom s nulovou potenciálnou energiou, bude v najnižšej polohe celková mechanická energia guľky

$$E_{p0} + E_{k0} = \frac{mv_0^2}{2}$$

a v najvyššej polohe bude celková mechanická energia guľky

$$E_p + E_k = mgh + \frac{mv^2}{2} ,$$

kde výška guľky bude

$$h = 2l .$$

Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva

$$E_{p0} + E_{k0} = E_p + E_k ,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \frac{mv^2}{2} ,$$

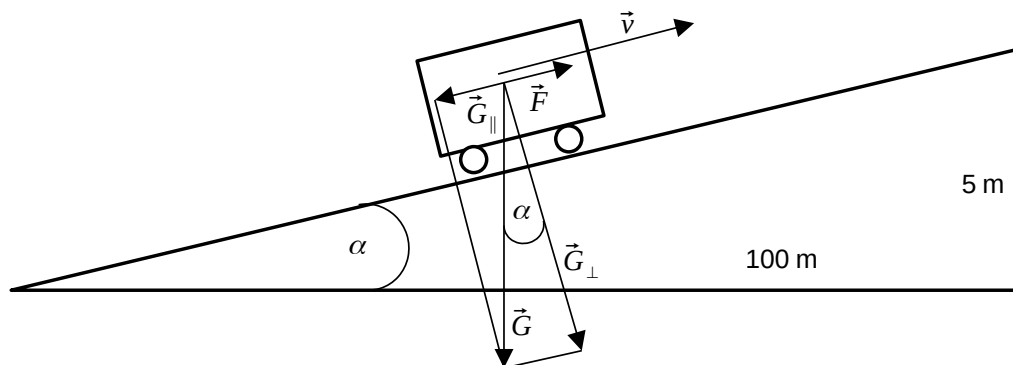
z čoho je možné vypočítať rýchlosť guľky v najnižšej polohe

$$v_0 = \sqrt{5gl} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$v_0 = \sqrt{5 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,5 \text{ m}} = 4,95 \text{ m s}^{-1} .$$

2.10 Vypočítajte výkon motora auta, ktorého hmotnosť je $m = 1200 \text{ kg}$, keď sa auto pohybuje stálou rýchlosťou $v = 50 \text{ km h}^{-1}$ po vozovke s päťpercentným stúpaním.



Obr. 8

Rýchlosť auta je

$$v = 50 \text{ km h}^{-1} = 13,9 \text{ m s}^{-1} .$$

Päťpercentné stúpanie vozovky znamená, že na vzdialenosti 100 m vozovka stúpane o 5 m, preto (Obr. 8) platí

$$\tan \alpha = \frac{5 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0,05$$

a uhol sklonu vozovky bude

$$\alpha = \arctan 0,05 = 2,86^\circ .$$

Výkon motora vyjadruje rýchlosť konania práce

$$P = \frac{dA}{dt} ,$$

ak je sila konštantná, je možné výkon motora vyjadriť ako

$$P = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{s})}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} .$$

Sila motora a rýchlosť auta majú rovnaký smer, preto platí

$$P = Fv \cos 0^\circ = Fv .$$

Ak sa auto pohybuje rovnomerne, musí byť výsledná sila pôsobiaca na auto nulová, sila motora preto musí byť rovnako veľká ako zložka tiaže, ktorá je rovnobežná s vozovkou

$$F = G_{\parallel} = mg \sin \alpha .$$

Výkon auta preto bude

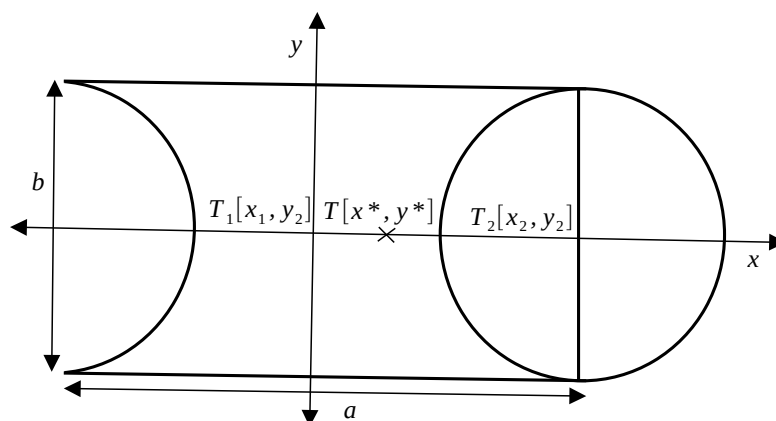
$$P = Fv = mgv \sin \alpha ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$P = 1200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 13,9 \text{ m s}^{-1} \cdot \sin 2,86^{\circ} = 8164 \text{ W} .$$

3 Mechanika tuhého telesa

3.1 Nájdite polohu ťažiska telesa, ktoré vzniklo tak, že z homogénneho obdĺžnika so stranami a, b bol na strane s dĺžkou b vyrezaný polkruh s polomerom $b/2$ a priložený na opačnú stranu obdĺžnika.



Obr. 9

Súradnicovú sústavu je vhodné zvoliť tak, aby sa jej začiatok nachádzal v strede pôvodného obdĺžnika, os x bola rovnobežná so stranou a a os y so stranou b obdĺžnika. Polohu ťažiska telesa je možné určiť ako spoločné ťažisko dvoch symetrických telies, ktorých ťažiská sa nachádzajú v ich stredoch symetrie. Prvé teleso bude mať tvar obdĺžnika s polkruhovými výrezmi na stranách s dĺžkou b . Súradnice ťažiska prvého telesa budú

$$x_1 = 0 ,$$

$$y_1 = 0 .$$

Hmotnosť prvého telesa je možné vypočítať ako

$$m_1 = S_1 h \rho = \left[ab - \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] h \rho ,$$

kde h označuje hrúbku telesa a ρ jeho hustotu. Druhým telesom bude kruh s polomerom $b/2$. Súradnice ťažiska druhého telesa sú

$$x_2 = \frac{a}{2},$$

$$y_2 = 0.$$

Hmotnosť druhého telesa je možné vypočítať ako

$$m_2 = S_2 h \rho = \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 h \rho.$$

Pre polohu spoločného ťažiska dvoch telies platí

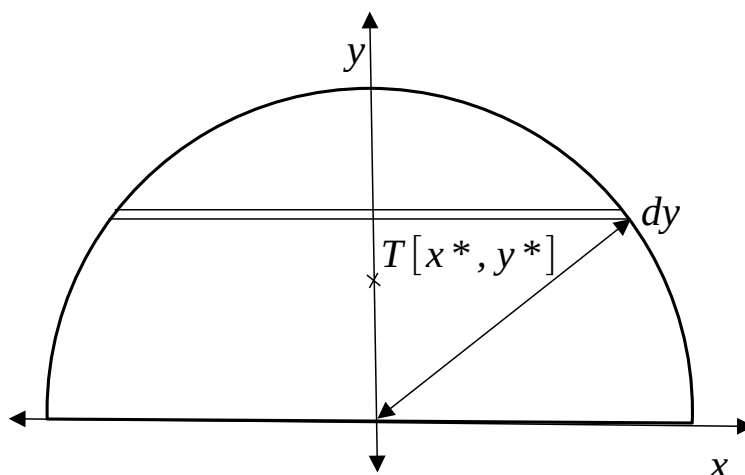
$$\vec{r}^* = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

preto súradnice spoločného ťažiska týchto dvoch telies budú

$$x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 h \rho \frac{a}{2}}{\left[ab - \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] h \rho + \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 h \rho} = \frac{\pi b}{8},$$

$$y^* = 0.$$

3.2 Nájdite polohu ťažiska homogénnej polgule s polomerom $R = 10$ cm.



Obr. 10

Súradnicovú sústavu je vhodné zvoliť tak, aby sa jej začiatok nachádzal v strede kruhovej steny polgule a osi x a z ležali v jej rovine. Os y je osou symetrie telesa, preto sa ťažisko telesa bude nachádzať na tejto osi a bude preň platiť

$$x^* = 0,$$

$$z^* = 0 .$$

Pre polohu ťažiska telesa platí

$$\vec{r}^* = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm ,$$

kde M je hmotnosť telesa. Pre súradnica ťažiska v smere osi y preto platí

$$y^* = \frac{1}{M} \int_M y dm = \frac{1}{V\rho} \int_V y\rho dV = \frac{1}{V} \int_V y dV ,$$

kde ρ je hustota polgule a celý objem polgule bude

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 .$$

Element objemu polgule má tvar kruhovej dosky s polomerom x a hrúbkou dy

$$dV = \pi x^2 dy = \pi(R^2 - y^2)dy ,$$

pričom bola využitá Pytagorova veta

$$R^2 = x^2 + y^2 .$$

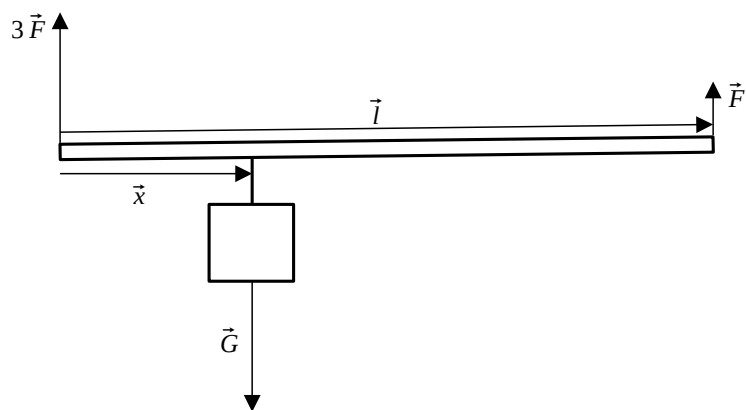
Poloha ťažiska v smere osi y preto bude

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R y\pi(R^2 - y^2)dy = \frac{3}{2\pi R^3} \left[\pi R^2 \frac{y^2}{2} - \pi \frac{y^4}{4} \right]_0^R = \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \left(\pi \frac{R^4}{2} - \pi \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3}{8} R . \end{aligned}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$y^* = \frac{3}{8} 10 \text{ cm} = 3,78 \text{ cm} .$$

3.3 *Otec a syn nesú bremeno na tyči s dĺžkou $l = 2$ m. Ako ďaleko od otcovho konca tyče treba zavesiť bremeno, aby otec niesol tri razy väčšiu záťaž ako syn? V porovnaní s hmotnosťou bremena je hmotnosť tyče zanedbateľná.*



Obr. 11

Teleso je v rovnováhe, ak vektorový súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso sa rovná nule

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

a zároveň vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl vzhľadom na ľubovoľný bod sa rovná nule

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 ,$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 .$$

Vonkajšie sily, ktoré pôsobia na tyč (Obr. 11), sú tiaž bremena $\vec{G}$, sila syna $\vec{F}$ a sila otca $3\vec{F}$. Z podmienky rovnováhy pre tieto sily vyplýva

$$\vec{G} + \vec{F} + 3\vec{F} = 0 .$$

Pretože sily syna a otca majú opačný smer ako tiažová sila, bude pre veľkosti síl platiť

$$G - 4F = 0 ,$$

z čoho vyplýva

$$F = \frac{G}{4} .$$

Podmienku rovnováhy pre momenty síl vzhľadom na bod pri otcovi bude

$$\vec{x} \times \vec{G} + \vec{l} \times \vec{F} = 0 ,$$

pre veľkosti momentov síl bude platiť

$$xG \sin 90^\circ + lF \sin(-90^\circ) = 0 ,$$

$$xG - lF = 0 .$$

Po dosadení z prvej podmienky rovnováhy

$$xG - l\frac{G}{4} = 0 ,$$

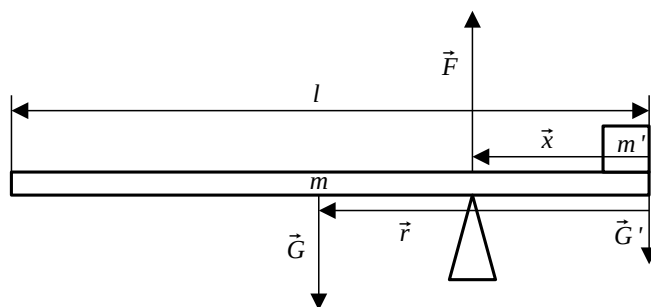
je možné vyjadriť vzdialenosť od otca

$$x = \frac{l}{4} .$$

Po dosadenie číselných hodnôt

$$x = \frac{2 \text{ m}}{4} = 0,5 \text{ m} .$$

3.4 Homogénna úzka doska s dĺžkou $l = 5 \text{ m}$ a hmotnosťou $m = 30 \text{ kg}$ je na jednom konci zaťažená bremenom s hmotnosťou $m' = 10 \text{ kg}$. V akej vzdialenosti od tohto konca je treba podložiť podperu, aby doska zostala vo vodorovnej polohe?



Obr. 12

Teleso je v rovnováhe, ak vektorový súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso sa rovná nule

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

a zároveň vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl vzhľadom na ľubovoľný bod sa rovná nule

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 ,$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 ,$$

Vonkajšie sily, ktoré pôsobia na tyč (Obr. 12), sú tiaž dosky $\vec{G}$ a bremena $\vec{G}'$ a sila podpory F . Z podmienky rovnováhy pre tieto sily vyplýva

$$\vec{G} + \vec{G}' + \vec{F} = 0 .$$

Pretože tiažové sily a sila podpory majú opačný smer, bude pre veľkosti síl platiť

$$G + G' - F = 0 ,$$

z čoho vyplýva

$$F = G + G' .$$

Podmienku rovnováhy pre momenty síl vzhľadom na bod pri bremene bude

$$\vec{r} \times \vec{G} + \vec{x} \times \vec{F} = 0 ,$$

pre veľkosti momentov síl bude platiť

$$\frac{l}{2} G \sin 90^\circ + x F \sin(-90^\circ) = 0 ,$$

$$\frac{l}{2} G - x F = 0 .$$

Po dosadení z prvej podmienky rovnováhy

$$\frac{l}{2} G - x(G + G') = 0 ,$$

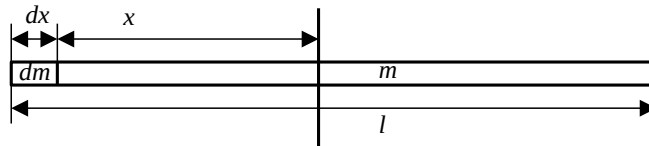
je možné vyjadriť vzdialenosť od bremena

$$x = \frac{Gl}{2(G + G')} = \frac{mgl}{2(mg + m'g)} = \frac{ml}{2(m + m')} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$x = \frac{30 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m}}{2(30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})} = 1,875 \text{ m} .$$

3.5 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče dĺžky $l = 3 \text{ m}$ a hmotnosti $m = 5 \text{ kg}$ vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom tyče a vzhľadom na os prechádzajúcu koncom tyče.



Obr. 13

Moment zotrvačnosti pre tuhé teleso je možné vypočítať pomocou definície

$$J = \int_m r^2 dm .$$

Ak má súradnicová sústava začiatok v strede tyče a smer osi x je rovnaký ako smer tyče, bude moment zotrvačnosti

$$J = \int_m x^2 dm .$$

Pretože je tyč homogénna, bude jej dĺžková hustota

$$\lambda = \frac{m}{l} ,$$

pomocou ktorej je možné vyjadriť element hmotnosti

$$dm = \lambda dx .$$

Moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom preto bude

$$J^* = \lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \lambda \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) = \lambda \frac{l^3}{12} .$$

Po dosadení dĺžkovej hustoty bude moment zotrvačnosti

$$J^* = \frac{ml^2}{12}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$J^* = \frac{5 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m})^2}{12} = 3,75 \text{ kg m}^2 .$$

Moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu koncom tyče je možné vypočítať pomocou Steinerovej vety

$$J = J^* + ma^2 ,$$

kde vzdialenosť medzi ťažiskom a koncom tyče je

$$a = \frac{l}{2} .$$

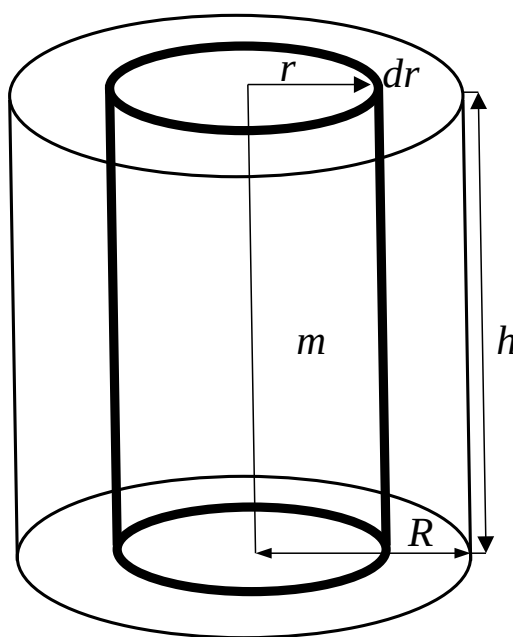
Moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os prechádzajúcu koncovým bodom bude

$$J = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{3} .$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$J^* = \frac{5 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m})^2}{3} = 15 \text{ kg m}^2 .$$

-
- 3.6 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho valca hmotnosti $m = 5 \text{ kg}$ s polomerom $R = 1 \text{ m}$ vzhľadom na os totožnú s osou symetrie valca aj na rovnobežnú os prechádzajúcu okrajom valca.
-



Obr. 14

Pri výpočte je možné vychádzať z definície momentu zotrvačnosti tuhého telesa

$$J = \int_m r^2 dm .$$

Ak je valec homogénny, jeho hustotu je možné vyjadriť ako

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} ,$$

kde h je výška valca. Element hmotnosti bude plášť valca s polomerom r a hrúbkou dr

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr .$$

Moment zotrvačnosti valca vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom bude

$$J^* = \rho \int_0^R r^2 2\pi r h dr = \rho \left[\pi h \frac{r^4}{2} \right]_0^R = \rho \pi h \frac{R^4}{2} ,$$

po dosadení hustoty valca

$$J^* = \frac{mR^2}{2}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$J^* = \frac{5 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2}{2} = 2,5 \text{ kg m}^2 .$$

Pri výpočte momentu zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu okrajom valca je možné využiť Steinerovu vetu

$$J = J^* + ma^2 ,$$

kde a je vzdialenosť medzi osami otáčania prechádzajúcimi stredom a okrajom valca

$$a = R .$$

Moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu okrajom valca bude

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2} ,$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$J^* = \frac{3 \cdot 5 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2}{2} = 7,5 \text{ kg m}^2 .$$

3.7 Krasokorčuliar sa otáča frekvenciou $f_1 = 3 \text{ s}^{-1}$. Akou frekvenciou sa bude krasokorčuliar otáčať, ak roztiahnutím rúk svoj moment zotrvačnosti zväčší dvakrát?

V izolovanej sústave platí zákon zachovania momentu hybnosti

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 ,$$

z ktorého vyplýva

$$J_1 \vec{\omega}_1 = J_2 \vec{\omega}_2 ,$$

kde J_1 , J_2 sú momenty zotrvačnosti a $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ sú uhlové rýchlosti telesa pred rozťahnutím rúk a po rozťahnutí rúk. Smer uhlovej rýchlosti sa nemení a pre veľkosť uhlovej rýchlosti platí

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2 .$$

Uhlovú rýchlosť je možné vyjadriť pomocou frekvencie

$$\omega = 2\pi f ,$$

potom bude platiť

$$J_1 2\pi f_1 = J_2 2\pi f_2 ,$$

$$J_1 f_1 = J_2 f_2 .$$

Ak sa moment zotrvačnosti zväčší dvakrát

$$J_2 = 2J_1 ,$$

bude výsledná frekvencia polovičná

$$f_2 = f_1 \frac{J_1}{J_2} = \frac{f_1}{2} ,$$

teda po dosadení číselných hodnôt

$$f_2 = \frac{3 \text{ s}^{-1}}{2} = 1,5 \text{ s}^{-1} .$$

3.8 Zotrvačník s momentom zotrvačnosti $J = 10 \text{ kg m}^2$ sa roztáča z pokoja pôsobením sily, ktorej moment vzhľadom na os otáčania je $M = 200 \text{ N m}$. Za aký čas dosiahne zotrvačník frekvenciu $f = 8 \text{ s}^{-1}$ a aká bude vtedy jeho kinetická energia?

Pohyb zotrvačníka opisuje pohybová rovnica rotujúceho tuhého telesa

$$\vec{M} = J \vec{\alpha} ,$$

z ktorej pre veľkosť uhlového zrýchlenia vyplýva

$$\alpha = \frac{M}{J} .$$

Uhlové zrýchlenie je konštantné, pre uhlovú rýchlosť telesa platí

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha t + c .$$

Na počiatku bolo teleso v pokoji, preto

$$\omega(t = 0 \text{ s}) = 0 \implies c = 0 ,$$

teda uhlová rýchlosť telesa bude

$$\omega = \alpha t ,$$

z čoho pre čas roztáčania vyplýva

$$t = \frac{\omega}{\alpha} ,$$

po dosadení uhlového zrýchlenia

$$t = \omega \frac{J}{M} .$$

Vzťah medzi uhlovou rýchlosťou a frekvenciou

$$\omega = 2\pi f ,$$

umožňuje upraviť vzťah pre čas roztáčania na tvar

$$t = 2\pi f \frac{J}{M} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$t = 2\pi \cdot 8 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{10 \text{ kg m}^2}{200 \text{ N m}} = 2,51 \text{ s} .$$

Kinetická energia zotrvačníka bude

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J(2\pi f)^2}{2} = 2J\pi^2 f^2 ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$E_k = 2 \cdot 10 \text{ kg m}^2 \cdot \pi^2 \cdot (8 \text{ s}^{-1})^2 = 12\,633 \text{ J} .$$

-
- 3.9 Vypočítajte kinetickú energiu telesa valcového tvaru s polomerom $R = 10 \text{ cm}$ a hmotnosťou $m = 2 \text{ kg}$ v čase $t = 10 \text{ s}$. Teleso sa začalo roztáčať z pokoja okolo svojej geometrickej osi s konštantným uhlovým zrýchlením $\alpha = \pi/8 \text{ s}^{-2}$.
-

Kinetická energia rotujúceho tuhého telesa je

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2},$$

kde J označuje moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania a ω uhlovú rýchlosť telesa. Moment zotrvačnosti homogénneho telesa valcového tvaru vzhľadom na jeho geometrickú os (príklad 3.6) sa rovná

$$J = \frac{mR^2}{2}.$$

Uhlové zrýchlenie je konštantné, pre uhlovú rýchlosť telesa platí

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha t + c.$$

Na počiatku bolo teleso v pokoji, preto platí

$$\omega(t = 0 \text{ s}) = 0 \implies c = 0,$$

teda uhlová rýchlosť telesa bude

$$\omega = \alpha t.$$

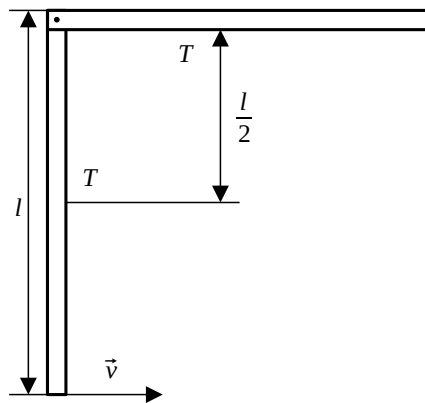
Kinetická energia telesa bude

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} (\alpha t)^2 = \frac{mR^2 \alpha^2 t^2}{4},$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$E_k = \frac{2 \text{ kg} \cdot (0,1 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} \text{ s}^{-2}\right)^2 \cdot (10 \text{ s})^2}{4} = 0,077 \text{ J}.$$

-
- 3.10 Tyč dĺžky $l = 1 \text{ m}$ visí vo zvislej polohe na osi prechádzajúcej jej koncovým bodom. Akú minimálnu rýchlosť treba udeliť voľnému koncu tyče, aby sa tyč dostala do vodorovnej polohy?
-



Obr. 15

Podľa zákona zachovania mechanickej energie sa v izolovanej sústave celková mechanická energia nemení

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} .$$

Ak tyč vo zvislej polohe bude mať nulovou potenciálnou energiu a kinetická energia tyče vo vodorovnej polohe bude nulová, zákon zachovania mechanickej energie sa zjednoduší na tvar

$$E_{k1} = E_{p2} .$$

Kinetickú energiu vo zvislej polohe je možné vypočítať ako kinetickú energiu rotujúceho tuhého telesa

$$E_{k1} = \frac{J\omega^2}{2} ,$$

kde moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os prechádzajúcu jej koncovým bodom (príklad 3.5) bude

$$J = \frac{ml^2}{3}$$

a uhlovú rýchlosť rotujúcej tyče je možné vyjadriť pomocou rýchlosti koncového bodu tyče ako

$$\omega = \frac{v}{l} .$$

Vo vodorovnej polohe bude potenciálna energia tyče

$$E_{p2} = mgh ,$$

kde ťažisko tyče sa zdvihne do výšky

$$h = \frac{l}{2} .$$

Zo zákona zachovania mechanickej energie teda vyplýva

$$\frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \left(\frac{v}{l} \right)^2 = mg \frac{l}{2} ,$$

z čoho je možné vyjadriť rýchlosť koncového bodu tyče

$$v = \sqrt{3gl}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$v = \sqrt{3 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 1 \text{ m}} = 5,42 \text{ m s}^{-1} .$$

4 Gravitačné pole

4.1 Ako ďaleko sa nachádza Mars od Slnka, ak jeho obežná doba je $T_M = 1,9 \text{ r}$ a vzdialenosť medzi Slnkom a Zemou je $a_Z = 1 \text{ AU}$.

Na riešenie je možné použiť tretí Keplerov zákon

$$\frac{T_Z^2}{T_M^2} = \frac{a_Z^3}{a_M^3},$$

z ktorého vyplýva

$$a_M^3 = a_Z^3 \frac{T_M^2}{T_Z^2}.$$

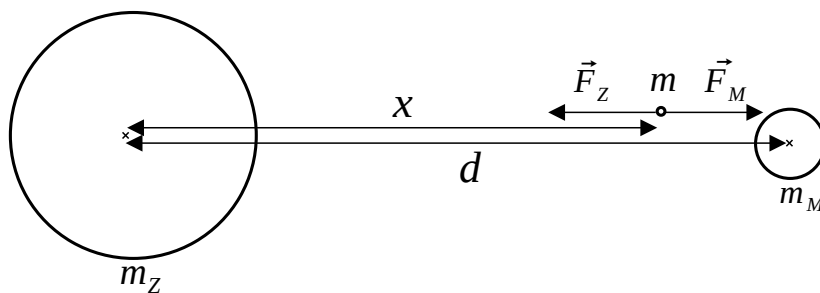
Pre vzdialenosť Marsu od Slnka preto platí

$$a_M = a_Z \sqrt[3]{\frac{T_M^2}{T_Z^2}},$$

po dosadení

$$a_M = 1 \text{ AU} \sqrt[3]{\frac{(1,9 \text{ r})^2}{(1 \text{ r})^2}} = 1 \text{ AU} \sqrt[3]{1,9^2} = 1,53 \text{ AU}.$$

4.2 Ako ďaleko od Zeme na spojnici Zeme a Mesiaca má byť kozmická loď, aby výsledná gravitačná sila pôsobiaca na ňu od Zeme a od Mesiaca bola rovná nule? Vzdialenosť medzi Zemou a Mesiacom je $d = 384\,000 \text{ km}$ a hmotnosť Zeme je 81-krát väčšia ako hmotnosť Mesiaca.



Obr. 16

Na riešenie je možné použiť Newtonov gravitačný zákon

$$\vec{F} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Ak v mieste medzi Zemou a Mesiacom má byť výsledná gravitačná sila nulová

$$\vec{F}_Z + \vec{F}_M = 0,$$

pretože sily majú opačný smer, musia byť ich veľkosti rovnaké

$$F_Z = F_M,$$

teda pre sily, ktoré pôsobia na kozmickú loď s hmotnosťou m , nachádzajúcu sa vo vzdialenosti x od Zeme, musí platiť

$$\kappa \frac{m_Z m}{x^2} = \kappa \frac{m_M m}{(d-x)^2}.$$

Ak je pomer medzi hmotnosťou Zeme a Mesiaca

$$m_Z = 81 m_M,$$

tak potom platí

$$\frac{81}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

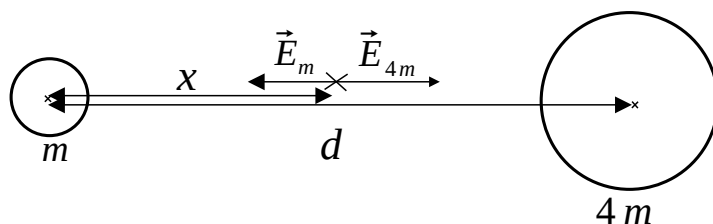
a vzdialenosť kozmickej lode od Zeme bude

$$x = \frac{9}{10} d,$$

po dosadení

$$x = \frac{9}{10} \cdot 384\,000 \text{ km} = 345\,600 \text{ km}.$$

4.3 Dve telesá guľového tvaru s hmotnosťami m a $4m$ sú navzájom vo vzdialenosti d . V ktorom bode medzi nimi bude výsledná intenzita gravitačného poľa nulová a aký bude potenciál spoločného gravitačného poľa v tomto bode?



Obr. 17

Intenzita gravitačného poľa guľového telesa s hmotnosťou m v mieste s polohovým vektorom $\vec{r}$ je

$$\vec{E} = -\kappa \frac{m}{r^3} \vec{r} .$$

Ak má byť výsledná intenzita gravitačného poľa v mieste medzi dvoma telesami nulová

$$\vec{E}_m + \vec{E}_{4m} = 0 ,$$

pretože intenzity majú opačný smer, musia byť ich veľkosti rovnaké

$$E_m = E_{4m} ,$$

teda musí platiť

$$\kappa \frac{m}{x^2} = \kappa \frac{4m}{(d-x)^2} ,$$

odkiaľ je možné vyjadriť vzdialenosť od telesa s hmotnosťou m

$$x = \frac{d}{3} .$$

Potenciál gravitačného poľa

$$V = -\kappa \frac{m}{r} ,$$

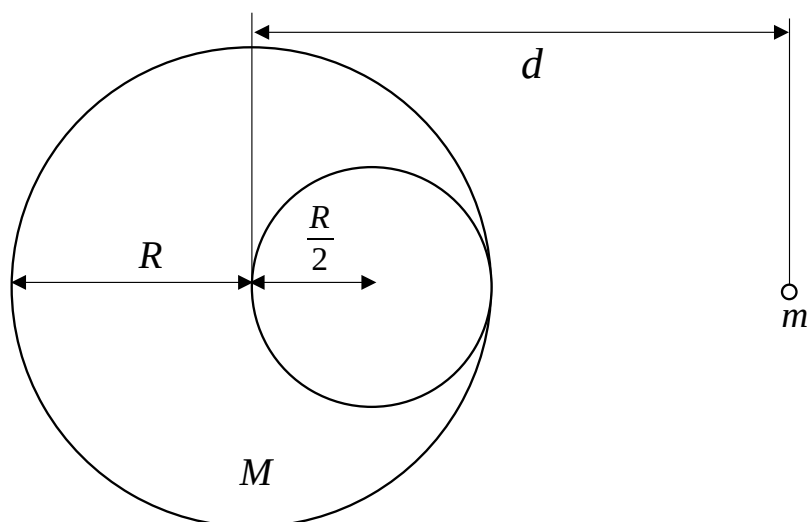
je skalárna veličina a výsledný potenciál je súčtom potenciálov v danom mieste od jednotlivých telies

$$V = V_m + V_{4m} ,$$

preto bude výsledný potenciál

$$V = -\kappa \frac{m}{x} - \kappa \frac{4m}{d-x} = -\kappa \frac{3m}{d} - \kappa \frac{12m}{2d} = -\kappa \frac{9m}{d} .$$

4.4 Z homogénnej gule s polomerom R a hmotnosťou M bolo vytvorené nové teleso tak, že do gule bola vyvŕtaná dutina guľového tvaru s polomerom $R/2$ a stredom vo vzdialenosti $R/2$ od stredu pôvodnej gule. Akou gravitačnou silou bude pôsobiť nové teleso na hmotný bod s hmotnosťou m nachádzajúci sa v smere dutiny vo vzdialenosti d od stredu pôvodnej gule?



Obr. 18

Gravitačná sila, ktorou pôsobila na hmotný bod pôvodná guľa $\vec{F}_0$, bola súčtom gravitačnej sily, ktorou pôsobí nové teleso $\vec{F}$ a gravitačnej sily, ktorou pôsobila vyvrtaná časť F' , preto platí

$$F_0 = F + F' .$$

Veľkosť gravitačnej sily, ktorou pôsobila pôvodná guľa, je možné vyjadriť z Newtonovho gravitačného zákona ako

$$F_0 = \kappa \frac{mM}{d^2} .$$

Hustota materiálu je

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} ,$$

preto hmotnosť vyvrtanej časti bola

$$m' = \rho V' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{M}{8}$$

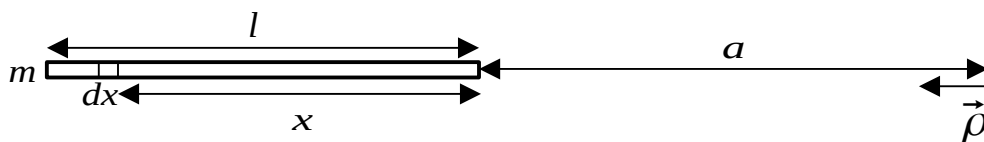
a veľkosť gravitačnej sily, ktorou pôsobila vyvrtaná časť bola

$$F' = \kappa \frac{mm'}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \frac{mM}{8 \left(d - \frac{R}{2}\right)^2} .$$

Gravitačnú silu, ktorou pôsobí na hmotný bod nové teleso je preto možné vyjadriť ako

$$F = F_0 - F' = \kappa \frac{mM}{d^2} - \kappa \frac{mM}{8 \left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \kappa m M \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8 \left(d - \frac{R}{2}\right)^2} \right] .$$

4.5 Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa tyče s hmotnosťou m a dĺžkou l v mieste ležiacom na predĺžení tyče vo vzdialenosti a od jej konca.



Obr. 19

Dĺžková hustota tyče je

$$\lambda = \frac{m}{l},$$

preto element hmotnosti bude

$$dm = \lambda dx = \frac{m}{l} dx$$

a potenciál elementu hmotnosti bude

$$dV = -\kappa \frac{dm}{x+a} = -\kappa \frac{m}{l} \frac{dx}{x+a}.$$

Potenciál celej tyče je možné vypočítať integráciou cez celú hmotnosť tyče ako

$$V = \int_m dV = -\kappa \frac{m}{l} \int_0^l \frac{dx}{x+a} = -\kappa \frac{m}{l} [\ln(x+a)]_0^l = -\kappa \frac{m}{l} \ln \frac{l+a}{a}.$$

Vzťah medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa je

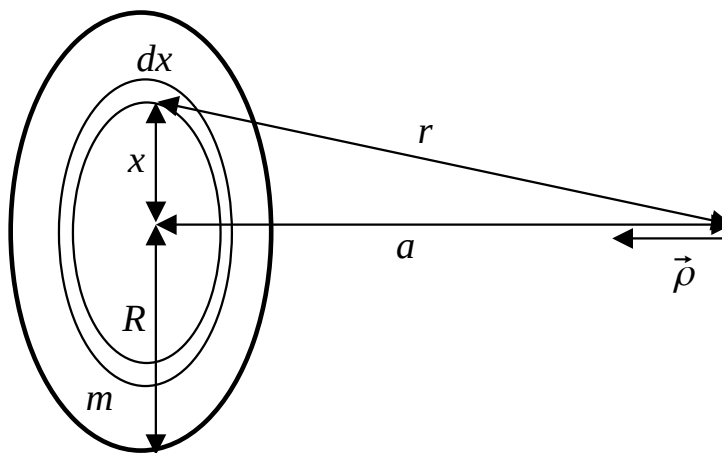
$$\vec{E} = -\text{grad } V,$$

preto intenzita celej tyče bude

$$\vec{E} = -\frac{dV}{da} \vec{\rho} = -\kappa \frac{m}{l} \frac{a}{l+a} \frac{a-l-a}{a^2} \vec{\rho} = \kappa \frac{m}{a(l+a)} \vec{\rho}.$$

kde $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor v smere intenzity gravitačného poľa a pri derivovaní boli použité pravidlá pre deriváciu zloženej funkcie a deriváciu podielu funkcií.

4.6 Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa kruhovej dosky s hmotnosťou m a polomerom R v mieste ležiacom na osi kruhovej dosky vo vzdialenosti a od jej stredu.



Obr. 20

Plošná hustota kruhovej dosky je

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2}$$

a element plochy tvaru medzikružia

$$dS = 2\pi x dx ,$$

bude elementom hmotnosti

$$dm = \sigma dS = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi x dx = \frac{2m}{R^2} x dx .$$

Keďže veľkosť polohového vektora je možné vyjadriť pomocou Pytagorovej vety

$$r^2 = x^2 + a^2 ,$$

potenciál elementu hmotnosti bude

$$dV = -\kappa \frac{dm}{r} = -\kappa \frac{2m}{R^2} x \frac{dx}{r} = -\kappa \frac{2m}{R^2} x \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} .$$

Potenciál celej dosky je možné vypočítať integráciou cez celú hmotnosť dosky ako

$$V = \int_m dV = -\kappa \frac{2m}{R^2} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\kappa \frac{2m}{R^2} [\sqrt{x^2 + a^2}]_0^R = -\kappa \frac{2m}{R^2} (\sqrt{R^2 + a^2} - a) .$$

Vzťah medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa je

$$\vec{E} = -\text{grad } V ,$$

preto intenzita gravitačného poľa kruhovej dosky bude

$$\vec{E} = -\frac{dV}{da}\vec{\rho} = -\kappa\frac{2m}{R^2}\left(\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}-1\right)\vec{\rho} = \kappa\frac{2m}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)\vec{\rho} .$$

kde $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor v smere intenzity gravitačného poľa.

4.7 Akou rýchlosťou treba vystreliť teleso z povrchu Zeme, aby odletelo mimo dosah zemskej príťažlivosti?

Keď teleso odletí z dosahu zemskej príťažlivosti a zastane, bude mať nulovú gravitačnú potenciálnu energiu aj nulovú kinetickú energiu. Zákon zachovania mechanickej energie preto bude mať tvar

$$E_p + E_k = 0 .$$

Gravitačná potenciálna energia telesa s hmotnosťou m na povrchu Zeme bude

$$E_p = -\kappa\frac{mM_Z}{R_Z} ,$$

kde M_Z je hmotnosť Zeme a R_Z polomer Zeme. Kinetická energia telesa vystreleného rýchlosťou v z povrchu Zeme bude

$$E_k = \frac{mv^2}{2} ,$$

preto zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva

$$-\kappa\frac{mM_Z}{R_Z} + \frac{mv^2}{2} = 0 ,$$

z čoho je možné vyjadriť rýchlosť telesa ako

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} .$$

Výsledok je možné vyjadriť aj pomocou gravitačného zrýchlenia

$$g = \kappa\frac{M_Z}{R_Z^2} ,$$

pomocou ktorého pre rýchlosť telesa vyplýva

$$v = \sqrt{2gR_Z}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 6\,378\,000 \text{ m}} = 11\,186 \text{ m s}^{-1}.$$

4.8 *Strela bola vystrelená z povrchu Zeme rýchlosťou $v = 1600 \text{ m s}^{-1}$. Vypočítajte rozdiel výšok, aké by teleso dosiahlo za predpokladu, že gravitačné pole je homogénne a za predpokladu, že gravitačné pole je radiálne.*

Riešenie je možné nájsť pomocou zákona zachovania mechanickej energie

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}.$$

V homogénnom gravitačnom poli je možné zvoliť potenciálnu energiu na povrchu Zeme E_{p1} ako miesto s nulovou potenciálnou energiou a rýchlosť telesa klesá, kým teleso zastane, teda jeho kinetická energia E_{k2} bude nulová. Zákon zachovania mechanickej energie preto bude mať tvar

$$E_{k1} = E_{p2},$$

teda platí

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_h,$$

z čoho je možné vyjadriť výška výstupu strely v homogénnom gravitačnom poli ako

$$h_h = \frac{v^2}{2g}.$$

V radiálnom gravitačnom poli bude na povrchu Zeme potenciálna energia E_{p1} a vo výške h_r bude potenciálna energia E_{p2} . Zákon zachovania mechanickej energie v radiálnom gravitačnom poli preto bude

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{p2},$$

teda platí

$$\frac{mv^2}{2} - \kappa \frac{mM_Z}{R_Z} = -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z + h_r},$$

čo je možné upraviť pomocou gravitačného zrýchlenia

$$g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2},$$

na tvar

$$\frac{mv^2}{2} = mgR_Z \frac{h_r}{R_Z + h_r} ,$$

z ktorého je možné vyjadriť výšku výstupu strely v radiálnom gravitačnom poli ako

$$h_r = \frac{v^2 R_Z}{2gR_Z - v^2} .$$

Rozdiel výšok v homogénnom a radiálnom poli teda bude

$$\Delta h = h_r - h_h = \frac{v^2 R_Z}{2gR_Z - v^2} - \frac{v^2}{2g} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$\Delta h = \frac{(1600 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}}{2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} - (1600 \text{ m s}^{-1})^2} - \frac{(1600 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 2725 \text{ m} .$$

4.9 Vypočítajte kinetickú energiu telesa s hmotnosťou $m = 70 \text{ kg}$, ktoré dopadne na povrch Zeme z výšky $h = 10 \text{ km}$, ak gravitačné pole Zeme nepovažujeme za homogénne.

Riešenie je možné nájsť pomocou zákona zachovania mechanickej energie

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} .$$

Ak počiatočná kinetická energia telesa E_{k1} bude nulová, zákon zachovania mechanickej energie bude mať tvar

$$E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} .$$

Potenciálna energia telesa vo výške h nad povrchom Zeme sa rovná

$$E_{p1} = -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z + h}$$

a potenciálna energia telesa na povrchu Zeme sa rovná

$$E_{p2} = -\kappa \frac{mM_Z}{h} .$$

Zákon zachovania mechanickej energie preto bude mať tvar

$$-\kappa \frac{mM_Z}{R_Z + h} = E_{k2} - \kappa \frac{mM_Z}{R_Z} ,$$

z čoho pre kinetickú energiu pri dopade vyplýva

$$E_k = -\kappa m M_Z \left(\frac{1}{R_Z + h} - \frac{1}{R_Z} \right) .$$

Pomocou gravitačného zrýchlenia

$$g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

je možné vyjadriť kinetickú energiu ako

$$E_k = mgR_Z \frac{h}{R_Z + h} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$E_k = 70 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \frac{10^4 \text{ m}}{6,378 \cdot 10^6 \text{ m} + 10^4 \text{ m}} = 6,856 \cdot 10^6 \text{ J} .$$

4.10 Ako vysoko musí byť družica nad rovníkom, aby sa pri svojom pohybe nachádzala stále nad tým istým miestom?

Družica s hmotnosťou m sa pohybuje po kružnici s polomerom $R_Z + h$, gravitačná sila Zeme pôsobí na družicu ako dostredivá sila, teda platí

$$F_g = F_d ,$$

čo je možné prepísať na tvar

$$\kappa \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2} = m \frac{v^2}{R_Z + h} ,$$

kde M_Z je hmotnosť a R_Z polomer Zeme. Pre rýchlosť družice z toho vyplýva

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}} .$$

Aby sa družica nachádzala stále nad tým istým miestom, musí byť jej uhlová rýchlosť rovnaká ako uhlová rýchlosť Zeme

$$\omega_d = \omega_Z ,$$

preto musí platiť

$$\frac{v}{R_Z + h} = \frac{2\pi}{T_Z} ,$$

po dosazení rychlosti družice

$$\sqrt{\frac{\kappa M_Z}{(R_Z + h)^3}} = \frac{2\pi}{T_Z} .$$

Pre výšku družice vyplýva

$$h = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_Z T_Z^2}{4\pi^2}} - R_Z ,$$

po dosazení číselných hodnôt

$$h = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (3,1536 \cdot 10^7 \text{ s})^2}{4\pi^2}} - 6,371 \cdot 10^6 \text{ m} ,$$

výška družice bude

$$h = 35,8 \cdot 10^6 \text{ m} .$$

5 Termodynamika a molekulová fyzika

5.1 Hustota vzduchu za normálnych podmienok, to znamená tlaku $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$ a teplote $t_0 = 0^\circ\text{C}$ je $\rho_0 = 1,293\text{ kg m}^{-3}$. Aká bude hustota vzduchu pri tlaku $p = 0,5\text{ MPa}$ a teplote $t = 50^\circ\text{C}$?

Príklad je možné riešiť pomocou stavovej rovnice ideálneho plynu

$$pV = nRT ,$$

kde R je univerzálna plynová konštanta a pre látkové množstvo platí

$$n = \frac{m}{M} ,$$

kde M je molárna hmotnosť plynu, čím stavová rovnica nadobudne tvar

$$pV = \frac{m}{M}RT .$$

Z hustoty plynu

$$\rho = \frac{m}{V} ,$$

je možné vyjadriť hmotnosť plynu ako

$$m = \rho V ,$$

pomocou čoho bude mať stavová rovnica tvar

$$pV = \frac{\rho V}{M}RT ,$$

z ktorej je možné vyjadriť hustotu plynu ako

$$\rho = \frac{pM}{RT} .$$

Hustota plynu za normálnych podmienok teda bude

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} .$$

Vydelením rovníc je možné vyjadriť hustotu plynu pomocou vzťahu

$$\rho = \rho_0 \frac{p T_0}{p_0 T} .$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$\rho = 1,293 \text{ kg m}^3 \cdot \frac{0,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 273,15 \text{ K}}{1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 323,15 \text{ K}} = 5,39 \text{ kg m}^{-3} ,$$

kde teploty plynu v termodynamicknej stupnici boli prepočítané z Celziovej stupnice pomocou vzťahu

$$T[\text{K}] = t[^\circ\text{C}] + 273,15 \text{ K} .$$

5.2 Tlak vo válci parného stroja s objemom $V = 201$ sa po otvorení ventilu zmenšil o $\Delta p = 0,5$ MPa. Aká hmotnosť pary bola z valca vypustená, ak sa teplota pary $t = 100^\circ\text{C}$ nezmenila?

Riešenie príkladu je možné pomocou stavovej rovnice ideálneho plynu

$$pV = nRT ,$$

kde R je univerzálna plynová konštanta a pre látkové množstvo platí

$$n = \frac{m}{M} ,$$

kde M je molárna hmotnosť plynu, čím stavová rovnica nadobudne tvar

$$pV = \frac{m}{M} RT .$$

Pred vypustením pary plyn opisovala stavová rovnica

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} RT ,$$

a po vypustení pary plyn opisuje stavová rovnica

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} RT .$$

Odčítaním stavových rovníc je možné získať rovnicu

$$(p_1 - p_2)V = (m_1 - m_2)\frac{RT}{M} ,$$

v ktorej vystupuje hmotnosť vypustenej pary

$$\Delta m = m_1 - m_2 ,$$

a pokles tlaku plynu

$$\Delta p = p_1 - p_2 .$$

Rovnicu je preto možné napísať ako

$$\Delta p V = \Delta m \frac{RT}{M} ,$$

z čoho je možné vyjadriť hmotnosť vypustenej pary

$$\Delta m = \frac{MV}{RT} \Delta p ,$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$\Delta m = \frac{0,018 \text{ kg mol}^{-1} \cdot 0,02 \text{ m}^3}{8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 373,15 \text{ K}} \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,058 \text{ kg} = 58 \text{ g} ,$$

kde teplota plynu v termodynamicknej stupnici bola prepočítaná z Celziovej stupnice pomocou vzťahu

$$T[\text{K}] = t[^\circ\text{C}] + 273,15 \text{ K} .$$

5.3 V dvoch nádobách oddelených uzáverom sa nachádza rovnaký plyn. V prvej nádobe s objemom $V_1 = 21$ je tlak plynu $p_1 = 0,2 \text{ MPa}$, v druhej nádobe s objemom $V_2 = 41$ je tlak plynu $p_2 = 0,4 \text{ MPa}$. Aký bude výsledný tlak plynu po otvorení uzáveru, ak teplota jednotlivých častí bola rovnaká a po prepojení sa ustálila na pôvodnej hodnote?

Zo stavovej rovnice pre plyn v prvej nádobe

$$p_1 V_1 = n_1 R T ,$$

vyplýva pre látkové množstvo plynu v prvej nádobe

$$n_1 = \frac{p_1 V_1}{R T} .$$

Zo stavovej rovnice pre plyn v druhej nádobe

$$p_2 V_2 = n_2 R T ,$$

vyplýva pre látkové množstvo plynu v druhej nádobe

$$n_2 = \frac{p_2 V_2}{R T} .$$

Po otvorení uzáveru bude pre plyn platiť stavová rovnica

$$p(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) R T ,$$

ktorá po dosadení za látkové množstvá nadobudne tvar

$$p(V_1 + V_2) = \left(\frac{p_1 V_1}{R T} + \frac{p_2 V_2}{R T} \right) R T ,$$

ktorý je možné zjednodušiť na rovnicu

$$p(V_1 + V_2) = p_1 V_1 + p_2 V_2 ,$$

z ktorej je možné vypočítať výsledný tlak

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} ,$$

ktorý po dosadení číselných hodnôt bude

$$p = \frac{0,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 + 0,4 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 + 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 0,33 \cdot 10^6 \text{ Pa} .$$

5.4 Aká je vnútorná energia dusíka, ktorý zaberá pri tlaku $p = 0,5 \text{ MPa}$ objem $V = 5 \text{ l}$?

Vnútorná energia plynu je súčet kinetickej energie všetkých N molekúl plynu

$$U = N \epsilon_s ,$$

kde z ekvipartičnej teóremy pre strednú kinetickú energiu jednej molekuly vyplýva

$$\epsilon_s = \frac{i}{2} k T ,$$

kde i označuje počet stupňov voľnosti molekuly a k je Boltzmannova konštanta. Kinetická energia všetkých molekúl teda bude

$$U = \frac{i}{2} N k T .$$

Pre počet molekúl platí

$$N = nN_A ,$$

kde N_A je Avogadrova konštanta a zároveň pre Boltzmannovu konštantu platí

$$k = \frac{R}{N_A} ,$$

preto je vnútornú energiu plynu možné vyjadriť aj ako

$$U = \frac{i}{2}nRT .$$

Použitím stavovej rovnice

$$pV = nRT ,$$

je vnútornú energiu plynu možné vyjadriť pomocou tlaku a objemu ako

$$U = \frac{i}{2}pV ,$$

keďže dusík je dvojatómový plyn, tak $i = 5$ a vnútorná energia plynu bude

$$U = \frac{5}{2}pV ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$U = \frac{5}{2} \cdot 0,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 6250 \text{ J} .$$

5.5 Ako sa zmení stredná kinetická energia molekuly argónového plynu s hmotnosťou $m = 500 \text{ g}$, ak plynu dodáme teplo $Q = 5000 \text{ J}$ a súčasne tento plyn vykoná prácu $A' = 2000 \text{ J}$? Molárna hmotnosť argónu je $M = 39,9 \text{ g mol}^{-1}$.

Vnútorná energia plynu je súčet kinetickej energie všetkých N molekúl plynu

$$U = N\epsilon_s ,$$

preto aj zmena vnútornej energie plynu bude zmenou strednej kinetickej energie všetkých molekúl

$$\Delta U = N\Delta\epsilon_s .$$

Počet molekúl je možné vyjadriť pomocou látkového množstva

$$N = nN_A ,$$

ktoré je možné vypočítať z hmotnosti plynu

$$n = \frac{m}{M} .$$

Zmenu vnútornej energie plynu je teda možné napísať ako

$$\Delta U = \frac{mN_A}{M} \Delta \epsilon_s ,$$

z čoho zmena strednej kinetickej energie molekuly bude

$$\Delta \epsilon_s = \frac{M}{mN_A} \Delta U .$$

Podľa prvého zákona termodynamiky

$$\Delta U = Q + A ,$$

je zmena vnútornej energie plynu rovná súčtu dodaného tepla a vonkajšej mechanickej práce. Ak prácu koná plyn

$$A = -A' ,$$

zmena vnútornej energie bude

$$\Delta U = Q - A' .$$

Zmenu strednej kinetickej energie molekuly je teda možné vyjadriť ako

$$\Delta \epsilon_s = \frac{M}{mN_A} (Q - A')$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$\Delta \epsilon_s = \frac{39,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}{0,5 \text{ kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \cdot (5000 \text{ J} - 2000 \text{ J}) = 3,98 \cdot 10^{-22} \text{ J} .$$

5.6 V nádobe objemu $V = 0,05 \text{ m}^3$ sa nachádza vodík pri teplote $t_0 = 27^\circ\text{C}$ a tlaku $p_0 = 100 \text{ kPa}$. Vypočítajte tlak a teplotu plynu, ak ohrievaním vodík prijal teplo $Q = 1,5 \text{ kJ}$.

Zmena vnútornej energie plynu sa dá vyjadriť pomocou rozdielu teploty ako

$$\Delta U = \frac{i}{2} N k \Delta T = \frac{i}{2} N k (T_2 - T_1) ,$$

kde počet častíc je možné vypočítať pomocou látkového množstva

$$N = n N_A$$

a pre Boltzmannovu konštantu platí

$$k = \frac{R}{N_A} ,$$

z toho pre zmenu vnútornej energie plynu vyplýva

$$\Delta U = \frac{i}{2} n R (T_2 - T_1) .$$

Pomocou stavovej rovnice

$$p_0 V = n R T_0 ,$$

$$p V = n R T ,$$

je možné zmenu vnútornej energie upraviť na tvar

$$\Delta U = \frac{i}{2} (p V - p_0 V) .$$

Podľa prvého zákona termodynamiky

$$\Delta U = Q + A ,$$

je zmena vnútornej energie plynu rovná súčtu dodaného tepla a vonkajšej mechanickej práce. Ak je objem plynu konštantný, mechanická práca je nulová

$$dA = -p dV \implies A = 0$$

a zmena vnútornej energie sa rovná dodanému teplu

$$\Delta U = Q .$$

Platí teda

$$Q = \frac{i}{2} (p V - p_0 V) ,$$

z čoho je možné vypočítať tlak plynu

$$p = \frac{Q + \frac{i}{2}p_0V}{\frac{i}{2}V}.$$

Pretože vodík je dvojatómový plyn, počet stupňov voľnosti jeho molekuly je $i = 5$ a po dosadení číselných hodnôt

$$p = \frac{1500 \text{ J} + \frac{5}{2} 100\,000 \text{ Pa} \cdot 0,05 \text{ m}^3}{\frac{5}{2} \cdot 0,05 \text{ m}^3} = 112\,000 \text{ Pa} = 112 \text{ kPa}.$$

Pre izochorický dej platí Charlesov zákon

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T},$$

z ktorého vyplýva výsledná teplota

$$T = \frac{p}{p_0} T_0$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$T = \frac{112\,000 \text{ Pa}}{100\,000 \text{ Pa}} \cdot 300,15 \text{ K} = 336,17 \text{ K} = 63,02^\circ \text{C}.$$

5.7 V dusíku s hmotnosťou $m = 200 \text{ g}$, začiatočnou teplotou $t_1 = 27^\circ \text{C}$ a tlakom $p_1 = 0,4 \text{ MPa}$ prebehol termodynamický dej, pri ktorom tlak dusíka klesol na $p_2 = 0,3 \text{ MPa}$. Koľko tepla bolo dodané dusíku, akú prácu plyn vykonal a ako sa zmenila jeho vnútorná energia, ak dej prebiehal a) izochoricky, b) izotermicky, c) adiabaticky? Zobrazte tieto deje v p - V diagramoch.

a) Pre izochorický dej platí, že objem plynu je konštantný

$$V = \text{konšt.} \implies dV = 0,$$

z čoho vyplýva, že práca plynu je nulová

$$dA' = p dV \implies A' = 0.$$

Podľa prvého zákona termodynamiky sa teplo dodané plynu rovná súčtu zmeny jeho vnútornej energie a práci, ktorú plyn vykoná

$$Q = \Delta U + A',$$

pri izochorickom deji teda platí

$$Q = \Delta U .$$

Zmenu vnútornej energie plynu je možné vyjadriť pomocou zmeny teploty ako

$$\Delta U = \frac{i}{2} n R \Delta T = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) ,$$

kde $M = 28 \text{ g mol}^{-1}$ je molárna hmotnosť dusíka. Z Charlesovho zákona

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} ,$$

vyplýva

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1$$

a zmenu vnútornej energie je možné vyjadriť ako

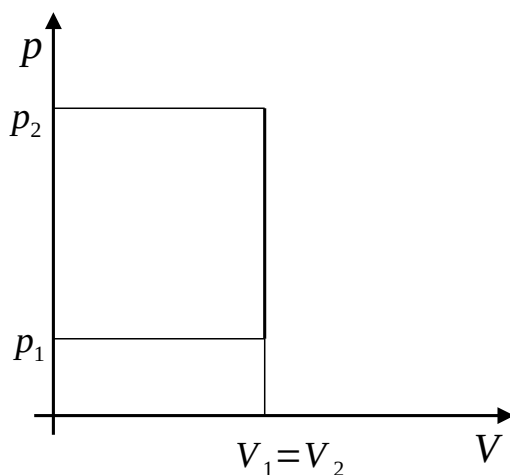
$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{5 \cdot 0,2 \text{ kg}}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 300,15 \text{ K} \left(\frac{0,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{0,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}} - 1 \right) = \\ &= -11\,140 \text{ J} = -11,14 \text{ kJ} . \end{aligned}$$

Teplo dodané plynu sa rovná zmene vnútornej energie

$$Q = \Delta U = -11,14 \text{ kJ} .$$



Obr. 21

b) Pre izotermický dej platí, že teplota plynu je konštantná

$$T = \text{konšt.} \implies \Delta T = 0 ,$$

preto je zmena vnútornej energie plynu nulová

$$\Delta U = \frac{i}{2} n R \Delta T = 0 ,$$

a z prvého zákona termodynamiky

$$Q = \Delta U + A' ,$$

vyplýva

$$Q = A' .$$

Z Boylovho-Mariottovho zákona

$$pV = p_1 V_1 ,$$

vyplýva

$$p = \frac{p_1 V_1}{V} ,$$

čo je možné pomocou stavovej rovnice

$$p_1 V_1 = n R T_1 ,$$

upraviť na tvar

$$p = \frac{n R T_1}{V} = \frac{m}{M} \frac{R T_1}{V} .$$

Prácu plynu je možné vypočítať ako

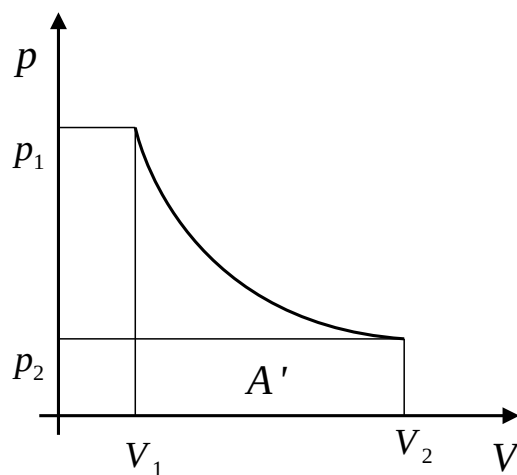
$$\begin{aligned} A' &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{M} R T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = \frac{m}{M} R T_1 [\ln V]_{V_1}^{V_2} = \\ &= \frac{m}{M} R T_1 (\ln V_2 - \ln V_1) = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} . \end{aligned}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$\begin{aligned} A' &= \frac{0,2 \text{ kg}}{28 \cdot 10^{-3} \text{ g mol}^{-1}} \cdot 8,314 \text{ J K mol}^{-1} \cdot 300,15 \text{ K} \cdot \ln \frac{0,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{0,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}} = \\ &= 5128 \text{ J} = 5,128 \text{ kJ} . \end{aligned}$$

Tepló dodané plynu sa rovná práci plynu

$$Q = A' = 5,128 \text{ kJ} .$$



Obr. 22

c) Pri adiabatickom deji nedochádza ku výmene tepla medzi plynom a okolím

$$Q = 0 .$$

Z prvého zákona termodynamiky

$$Q = \Delta U + A' ,$$

potom vyplýva

$$\Delta U = -A' .$$

Zmenu vnútornej energie plynu je možné vyjadriť ako

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) .$$

Z Poissonovej rovnice

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa ,$$

je možné vyjadriť

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa \implies \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{V_2}{V_1} ,$$

a zo stavovej rovnice

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} ,$$

vyplýva

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} ,$$

čo je možné upraviť na tvar

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} .$$

Pomocou Mayerovho vzťahu

$$C_p = C_v + R ,$$

je Poissonovu konštantu možné vyjadriť cez počet stupňov voľnosti

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = \frac{\frac{i}{2}R + R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i} .$$

Zmena vnútornej energie je preto možné vypočítať ako

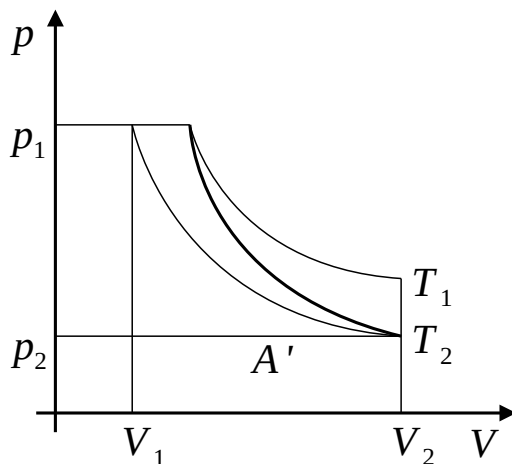
$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T_1 \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{2}{i+2}} - 1 \right] = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{i+2}} - 1 \right] .$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{5 \cdot 0,2 \text{ kg}}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \cdot 300,15 \text{ K} \left[\left(\frac{0,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{0,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}}\right)^{\frac{2}{7}} - 1 \right] = \\ &= -3516 \text{ J} = -3,516 \text{ kJ} . \end{aligned}$$

Práca plynu bude

$$A' = -\Delta U = 3,516 \text{ kJ} .$$



Obr. 23

5.8 Vzduchu teploty $t_1 = 20^\circ\text{C}$, ktorý zaberá pri tlaku $p_1 = 0,1\text{ MPa}$ objem $V_1 = 2\text{ m}^3$, bolo dodané teplo $Q = 400\text{ kJ}$. Vypočítajte zmenu vnútornej energie, vonkajšiu prácu a konečné stavové veličiny, ak dej prebehol a) izochoricky b) izobaricky c) izotermicky. Poissonova konštanta vzduchu je $\kappa = 1,4$.

a) Pri izochorickom deji je objem konštantný, preto plyn mechanickú prácu nekoná

$$V = \text{konšt.} \implies A' = 0$$

a z prvého termodynamického zákona

$$Q = \Delta U + A' ,$$

vyplýva, že zmena vnútornej energie plynu je rovná dodanému teplu

$$\Delta U = Q = 400\text{ kJ} .$$

Zo stavovej rovnice

$$p_1 V_1 = n R T_1 ,$$

je možné vyjadriť látkové množstvo

$$n = \frac{p_1 V_1}{R T_1}$$

a z Poissonovej konštanty

$$\kappa = \frac{i + 2}{i} ,$$

počet stupňov voľnosti

$$i = \frac{2}{\kappa - 1} .$$

Zmenu vnútornej energie plynu je možné vyjadriť ako

$$\Delta U = \frac{i}{2} n R (T_2 - T_1) = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1) ,$$

pretože platí

$$Q = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1) ,$$

je možné vypočítať výslednú teplotu

$$T_2 = \frac{Q + \frac{1}{\kappa-1} p_1 V_1}{\frac{1}{\kappa-1} \frac{p_1 V_1}{T_1}} = T_1 \left[\frac{(\kappa-1)Q}{p_1 V_1} + 1 \right]$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$T_2 = 293,15 \text{ K} \cdot \left[\frac{(1,4-1) \cdot 400 \cdot 10^3 \text{ J}}{0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 2 \text{ m}^3} + 1 \right] = 527,67 \text{ K}.$$

Z Charlesovho zákona

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

pre výsledný tlak vyplýva

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1},$$

čo je možné upraviť na tvar

$$p_2 = p_1 \left[\frac{(\kappa-1)Q}{p_1 V_1} + 1 \right],$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$p_2 = T_2 = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \left[\frac{(1,4-1) \cdot 400 \cdot 10^3 \text{ J}}{0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 2 \text{ m}^3} + 1 \right] = 0,18 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

b) Pri izobarickom deji je tlak plynu konštantný

$$p = \text{konšt.}$$

Látkové množstvo plynu je

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$$

a počet stupňov voľnosti plynu je

$$i = \frac{2}{\kappa-1}.$$

Zmenu vnútornej energie je potom možné vyjadriť ako

$$\Delta U = \frac{i}{2} n R (T_2 - T_1) = \frac{1}{\kappa-1} \frac{p_1 V_1}{RT_1} R (T_2 - T_1) = \frac{1}{\kappa-1} p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

Z Gay-Lussacovho zákona

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

vyplýva

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} ,$$

pomocou čoho je zmenu vnútornej energie možné vypočítať ako

$$\Delta U = \frac{1}{\kappa - 1} p_1 V_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) .$$

Práca plynu pri konštantnom tlaku je

$$A' = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1 (V_2 - V_1) .$$

Z prvého termodynamického zákona

$$Q = \Delta U + A' ,$$

potom vyplýva

$$Q = \frac{1}{\kappa - 1} p_1 V_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) + p_1 (V_2 - V_1) ,$$

čo je možné upraviť na tvar

$$Q(\kappa - 1) + p_1 V_1 \kappa = p_1 V_2 \kappa ,$$

z ktorého je možné vyjadriť výsledný objem

$$V_2 = V_1 \left[\frac{Q(\kappa - 1)}{\kappa p_1 V_1} + 1 \right] ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$V_2 = 2 \text{ m}^3 \cdot \left[\frac{400 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot (1,4 - 1)}{1,4 \cdot 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 2 \text{ m}^3} + 1 \right] = 3,14 \text{ m}^3 .$$

Z Gay-Lussacovho zákona

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} ,$$

pre výslednú teplotu vyplýva

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} ,$$

čo je možné upraviť na tvar

$$T_2 = T_1 \left[\frac{Q(\kappa - 1)}{\kappa p_1 V_1} + 1 \right]$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$T_2 = 293,15 \text{ K} \cdot \left[\frac{400 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot (1,4 - 1)}{1,4 \cdot 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 2 \text{ m}^3} + 1 \right] = 460,66 \text{ K} .$$

c) Pri izotermickom deji je teplota plynu konštantná

$$T = \text{konšt.} ,$$

preto je zmena vnútornej energie plynu nulová

$$\Delta U = 0 .$$

Z prvého termodynamického zákona

$$Q = \Delta U + A' ,$$

vyplýva, že práca plynu je rovná dodanému teplu

$$A' = Q = 400 \text{ kJ} .$$

Z Boyleovho-Mariottovho zákona

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = pV ,$$

je možné vyjadriť tlak plynu

$$p = \frac{p_1 V_1}{V} ,$$

pomocou čoho je možné vyjadriť prácu plynu

$$A' = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} dV = [p_1 V_1 \ln V]_{V_1}^{V_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Pretože platí

$$p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q ,$$

výsledný objem bude

$$V_2 = V_1 e^{\frac{Q}{p_1 V_1}} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$V_2 = 2 \text{ m}^3 \cdot e^{\frac{400 \cdot 10^3 \text{ J}}{0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 2 \text{ m}^3}} = 14,78 \text{ m}^3 .$$

Výsledný tlak potom bude

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = p_1 e^{-\frac{Q}{p_1 V_1}}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$p_2 = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot e^{\frac{-400 \cdot 10^3 \text{ J}}{0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 2 \text{ m}^3}} = 13\,533 \text{ Pa}.$$

5.9 *Hélium s látkovým množstvom $n = 2 \text{ kmol}$ sa izobaricky rozpína a zväčší svoj objem trikrát. Aká je zmena entropie pri tomto deji?*

Zmena entropie pri vratných dejoch je definovaná ako

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

pri izobarickom deji, keď sústava prejde zo stavu 1 do stavu 2, bude celková zmena entropie

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{n C_p dT}{T}.$$

Molárna tepelná kapacita pri konštantnom objeme je

$$C_V = \frac{i}{2} R,$$

pomocou Mayerovho vzťahu

$$C_p = C_V + R,$$

je možné vyjadriť molárna tepelnú kapacita pri konštantnom tlaku ako

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R.$$

Zmena entropie potom bude

$$\Delta S = n \frac{i+2}{2} R \int_1^2 \frac{dT}{T} = n \frac{i+2}{2} R [\ln T]_{T_1}^{T_2} = n \frac{i+2}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Z Gay-Lussacovho zákona

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

vyplýva

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1},$$

pomocou čoho je zmenu entropie možné vyjadriť ako

$$\Delta S = n \frac{i+2}{2} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$\Delta S = 2 \cdot 10^3 \text{ mol} \cdot \frac{3+2}{2} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot \ln 3 = 45\,669 \text{ J K}^{-1}.$$

5.10 Vypočítajte zmenu entropie ideálneho plynu, ktorý sa z objemu $V_0 = 2\text{ l}$ izotermicky rozpí-
nal do vákua na celkový objem $V_1 = 8\text{ l}$. Plynom je hélium s hmotnosťou $m = 20\text{ g}$.

Zmena entropie je definovaná ako

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Z prvého termodynamického zákona

$$dQ = dU + dA' = nC_v dT + p dV,$$

pre izotermický dej

$$dT = 0,$$

vyplýva

$$dQ = p dV.$$

Zo stavovej rovnice

$$pV = nRT$$

je možné vyjadriť tlak plynu

$$p = \frac{nRT}{V},$$

pomocou čoho bude mať prvý termodynamický zákon tvar

$$dQ = \frac{nRT}{V} dV$$

a zmenu entropie je možné vyjadriť ako

$$dS = \frac{nRT}{V} \frac{dV}{T} = nR \frac{dV}{V}.$$

Látkové množstvo plynu bude

$$n = \frac{m}{M},$$

teda zmenu entropie je možné napísať ako

$$dS = \frac{m}{M} R \frac{dV}{V}$$

a celková zmena entropie pri izotermickom rozpínaní bude

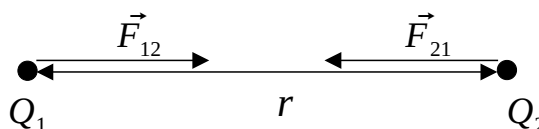
$$\Delta S = \frac{m}{M} R \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R [\ln V]_{V_0}^{V_1} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_1}{V_0},$$

po dosadení číselných hodnôt

$$\Delta S = \frac{0,02 \text{ kg}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot \ln \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 57,63 \text{ J K}^{-1}.$$

6 Elektrické pole a prúd

6.1 Vo vákuu sú dve guľôčky vo vzájomnej vzdialenosti $d = 10$ cm, ktoré majú elektrický náboj $Q_1 = 20 \cdot 10^{-6}$ C a $Q_2 = -10 \cdot 10^{-6}$ C. Akou silou sa priťahujú a akou silou sa budú odpudzovať, keď sa vzájomne dotknú a potom sa znova vzdialia do pôvodnej vzdialenosti?



Obr. 24

Sila, ktorou pôsobí guľôčka s nábojom Q_1 na guľôčku s nábojom Q_2 je daná Coulombovým zákonom

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}_{12} ,$$

kde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ je elektrická konštanta a $\vec{r}_{12}$ je polohový vektor guľôčky s nábojom Q_2 vzhľadom na guľôčku s nábojom Q_1 . Rovnako aj sila, ktorou pôsobí guľôčka s nábojom Q_2 na guľôčku s nábojom Q_1 je daná Coulombovým zákonom

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}_{21} ,$$

kde $\vec{r}_{21}$ je polohový vektor guľôčky s nábojom Q_1 vzhľadom na guľôčku s nábojom Q_2 . Sily majú príťažlivý smer a pre ich veľkosť z Coulombovho zákona vyplýva

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0,1 \text{ m})^2} = 179,8 \text{ N} .$$

Ak sa guľôčky dotknú, výsledný elektrický náboj bude

$$Q = Q_1 + Q_2 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ C} + (-10 \cdot 10^{-6} \text{ C}) = 10 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

a po vzdialení guľôčiek zostane na každej guľôčke rovnaký elektrický náboj

$$Q^* = \frac{Q}{2} = \frac{10 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{2} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C} .$$

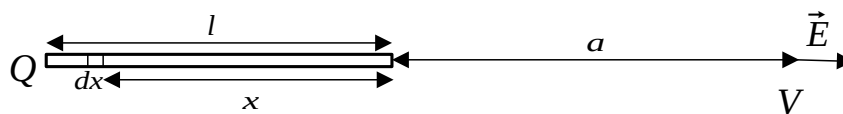
Sily budú mať odpudivý smer a pre ich veľkosť z Coulombovho zákona vyplýva

$$F_{12}^* = F_{21}^* = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q^*||Q^*|}{r^2} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$F_{12}^* = F_{21}^* = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0,1 \text{ m})^2} = 22,5 \text{ N} .$$

6.2 Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrického poľa tyče s elektrickým nábojom Q a dĺžkou l v mieste ležiacom na predĺžení tyče vo vzdialenosti a od jej konca.



Obr. 25

Dĺžková hustota elektrického náboja tyče je

$$\lambda = \frac{Q}{l} ,$$

preto element elektrického náboja tyče bude

$$dQ = \lambda dx = \frac{Q}{l} dx$$

a elektrický potenciál tohto elementu v mieste ležiacom vo vzdialenosti a od konca tyče bude

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{x+a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \frac{dx}{x+a} .$$

Elektrický potenciál celej tyče je možné vypočítať integráciou cez celý elektrický náboj tyče ako

$$V = \int_Q dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \int_0^l \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} [\ln(x+a)]_0^l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \frac{l+a}{a} .$$

Vzťah medzi intenzitou a potenciálom elektrického poľa je

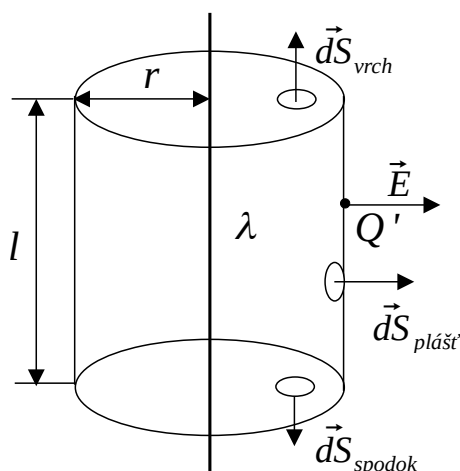
$$\vec{E} = -\text{grad } V ,$$

preto intenzita elektrického poľa tyče bude

$$\vec{E} = -\frac{dV}{da}\vec{\rho} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{l}\frac{a}{l+a}\frac{a-l-a}{a^2}\vec{\rho} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a(l+a)}\vec{\rho} ,$$

kde $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor v smere intenzity gravitačného poľa a pri derivovaní boli použité pravidlá pre deriváciu zloženej funkcie a deriváciu podielu funkcií.

- 6.3 Častica s elektrickým nábojom $Q' = 5 \mu\text{C}$ sa nachádza vo vákuu vo vzdialenosti $r = 2 \text{ cm}$ od elektricky nabitého priameho tenkého vodiča s dĺžkovou hustotou elektrického náboja $\lambda = 3 \mu\text{C m}^{-1}$. Aká veľká elektrická sila pôsobí na túto časticu?



Obr. 26

Podľa Gaussovho zákona elektrostatiky sa tok elektrickej intenzity ľubovoľnou uzavretou plochou rovná podielu elektrického náboja vo vnútri plochy a elektrickej konštanty

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} .$$

Ak je uzavretá plocha zvolená tak, že ju tvorí povrch valca, ktorého os symetrie sa nachádza na elektrickom vodiči a polomer valca sa rovná vzdialenosti častice od elektrického vodiča, je možné tento tok vyjadriť ako súčet toku elektrickej intenzity cez vrchnú podstavu, spodnú podstavu a plášť valca

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{vrch}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{vrch}} + \int_{S_{\text{spodok}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{spodok}} + \int_{S_{\text{plášť}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{plášť}} ,$$

pretože $d\vec{S}_{\text{vrch}}$ aj $d\vec{S}_{\text{spodok}}$ sú kolmé na $\vec{E}$, pre ich skalárny súčin platí

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{vrch}} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{spodok}} = 0 ,$$

pretože $d\vec{S}_{\text{plášť}}$ je rovnobežný s $\vec{E}$, pre ich skalárny súčin platí

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{plášť}} = E dS_{\text{plášť}} ,$$

pretože veľkosť intenzity E je vo vzdialenosti r konštantná, platí

$$\int_{S_{\text{plášť}}} E dS_{\text{plášť}} = E \int_{S_{\text{plášť}}} dS_{\text{plášť}} = E 2\pi r l$$

a náboj vo vnútri válca je možné vyjadriť ako

$$Q = \lambda l .$$

Z Gaussovho zákona elektrostatiky teda vyplýva

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} ,$$

z čoho je možné vyjadriť intenzitu elektrického poľa vodiča v mieste, kde sa nachádza nabitá častica

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} .$$

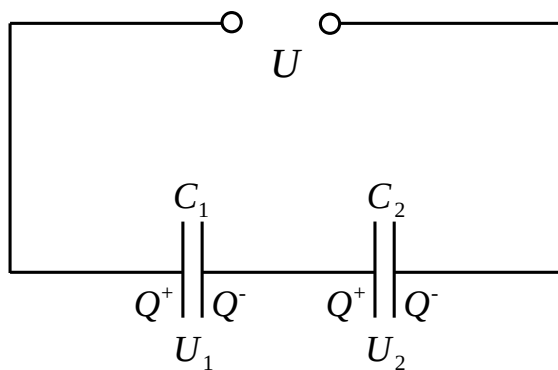
Sila, ktorá pôsobí v tomto mieste na časticu s nábojom Q' bude

$$F = EQ' = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} Q' ,$$

po dosadení

$$F = \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ C m}^{-1}}{2\pi \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 13,5 \text{ N} .$$

6.4 Dva kondenzátory s elektrickými kapacitami $C_1 = 1 \mu\text{F}$ a $C_2 = 2 \mu\text{F}$ sú spojené sériovo a pripojené ku zdroju napätia $U = 600 \text{ V}$. Vypočítajte aký náboj a aké napätie je na každom z nich. Nabité kondenzátory potom odpojíme od zdroja aj navzájom a znova ich zapojíme paralelne, a to tak, že spojíme kladné elektródy a záporné elektródy kondenzátorov. Vypočítajte aký bude na nich náboj a napätie po ustálení stavu.



Obr. 27

Pri sériovom zapojení kondenzátorov (Obr. 27) je náboj na kondenzátoroch rovnaký

$$Q = Q_1 = Q_2$$

a napätie na kondenzátoroch je súčtom napätí na jednotlivých kondenzátoroch

$$U = U_1 + U_2 .$$

Z definície kapacity kondenzátora pre napätie vyplýva

$$U = \frac{Q}{C} ,$$

pomocou čoho je súčet napätí možné upraviť na tvar

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} ,$$

z čoho je možné vyjadriť výslednú kapacitu

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} ,$$

a následne vypočítať elektrický náboj na kondenzátoroch

$$Q = CU = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U .$$

Po dosadení

$$Q = \frac{1 \mu\text{F} \cdot 2 \mu\text{F}}{1 \mu\text{F} + 2 \mu\text{F}} \cdot 600 \text{ V} = 400 \mu\text{C} ,$$

napätie na prvom kondenzátore bude

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} ,$$

po dosadení

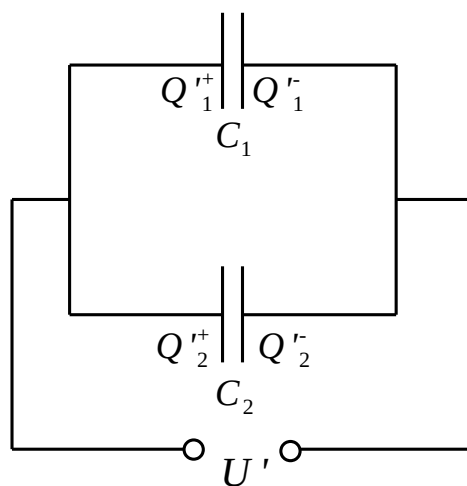
$$U_1 = \frac{400 \mu\text{C}}{1 \mu\text{F}} = 400 \text{ V}$$

a napätie na druhom kondenzátore bude

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} ,$$

po dosadení

$$U_2 = \frac{400 \mu\text{C}}{2 \mu\text{F}} = 200 \text{ V} .$$



Obr. 28

Pri paralelnom zapojení kondenzátorov (Obr. 28) je napätie na kondenzátoroch rovnaké

$$U' = U'_1 = U'_2$$

a elektrický náboj na kondenzátoroch je rovný súčtu nábojov na jednotlivých kondenzátoroch

$$Q' = Q'_1 + Q'_2 = 2Q .$$

Z definície kapacity kondenzátora pre náboj vyplýva

$$Q = CU ,$$

pomocou čoho je súčet nábojov možné upraviť na tvar

$$C'U' = C_1U' + C_2U' ,$$

z čoho je možné vyjadriť výslednú kapacitu

$$C' = C_1 + C_2$$

a následne vypočítať elektrické napätie na kondenzátoroch

$$U' = \frac{Q'}{C'} = \frac{2Q}{C_1 + C_2} ,$$

po dosadení

$$U' = \frac{2 \cdot 400 \mu\text{C}}{1 \mu\text{F} + 2 \mu\text{F}} = 266,7 \text{ V} ,$$

elektrický náboj na prvom kondenzátore bude

$$Q'_1 = C_1 U' ,$$

po dosadení

$$Q'_1 = 1 \mu\text{F} \cdot 266,7 \text{ V} = 266,7 \mu\text{C} ,$$

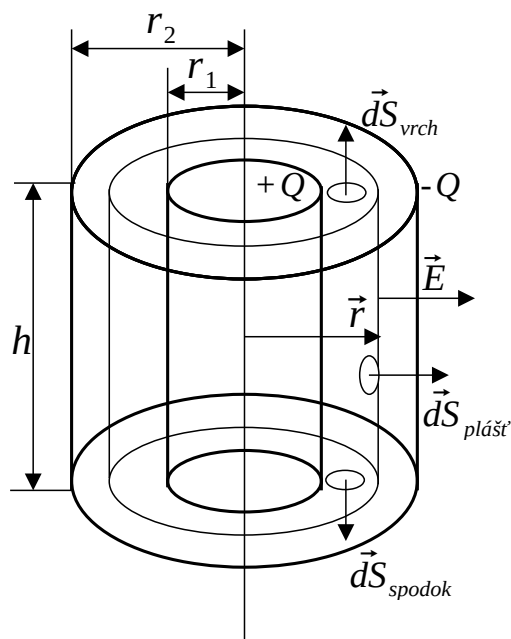
elektrický náboj na druhom kondenzátore bude

$$Q'_2 = C_2 U' ,$$

po dosadení

$$Q'_2 = 2 \mu\text{F} \cdot 266,7 \text{ V} = 533,4 \mu\text{C} .$$

6.5 Vypočítajte kapacitu valcového kondenzátora, ktorý tvoria dve súosové vodivé valcové plochy vo vákuu. Výška oboidvoch je $h = 2 \text{ cm}$, polomer vnútornej je $r_1 = 0,5 \text{ mm}$ a polomer vonkajšej je $r_2 = 5 \text{ mm}$.



Obr. 29

Intenzitu elektrického poľa medzi elektródami kondenzátora je možné vyjadriť pomocou Gaussovho zákona elektrostatiky, podľa ktorého je tok elektrickej intenzity ľubovoľnou uzavretou plochou rovný podielu elektrického náboja vo vnútri plochy a elektrickej konštanty

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} .$$

Ak je uzavretá plocha zvolená tak, že ju tvorí povrch valca, ktorého os symetrie sa nachádza na osi valcového kondenzátora, je možné tento tok vyjadriť ako súčet toku elektrickej intenzity cez vrchnú podstavu, spodnú podstavu a plášť valca

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{vrch}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{vrch}} + \int_{S_{\text{spodok}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{spodok}} + \int_{S_{\text{plášť}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{plášť}} .$$

Pretože $d\vec{S}_{\text{vrch}}$ aj $d\vec{S}_{\text{spodok}}$ sú kolmé na $\vec{E}$ platí

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{vrch}} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{spodok}} = 0 ,$$

pretože $d\vec{S}_{\text{plášť}}$ je rovnobežný s $\vec{E}$ platí

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{plášť}} = E dS_{\text{plášť}} ,$$

pretože veľkosť intenzity E je vo vzdialenosti r konštantná platí

$$\int_{S_{\text{plášť}}} E dS_{\text{plášť}} = E \int_{S_{\text{plášť}}} dS_{\text{plášť}} = E 2\pi r h .$$

Z Gaussovhovho zákona elektrostatiky teda vyplýva

$$E2\pi rh = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

z čoho je možné vyjadriť intenzitu elektrického poľa vodiča v mieste, kde sa nachádza nabitá častica

$$E = \frac{Q}{2\pi rh\epsilon_0}.$$

Napätie medzi elektródami kondenzátora je možné vypočítať pomocou intenzity ako

$$\begin{aligned} U &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E dr \cos 0^\circ = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi rh\epsilon_0} dr = \frac{Q}{2\pi h\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \\ &= \frac{Q}{2\pi h\epsilon_0} [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{2\pi h\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \end{aligned}$$

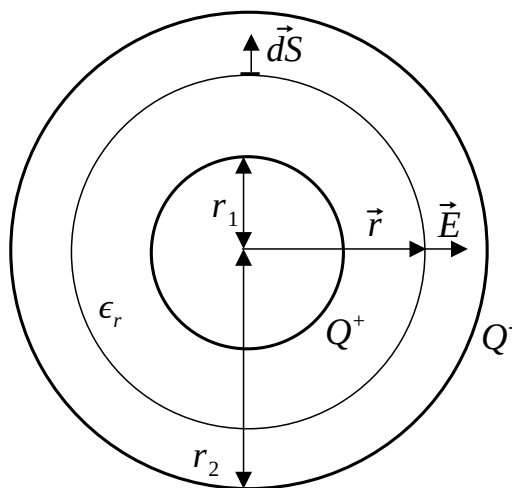
Elektrickú kapacitu kondenzátora je teraz možné vyjadriť pomocou definície

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi h\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

po dosadení

$$C = \frac{2\pi \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}}{\ln \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}} = 4,83 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 0,483 \text{ pF}.$$

- 6.6 Vypočítajte kapacitu guľového kondenzátora, ktorý tvoria dve sústredné vodivé guľové plochy s polomeri $r_1 = 3 \text{ cm}$ a $r_2 = 4 \text{ cm}$, keď prostredie medzi nimi je vyplnené dielektrikom s relatívnou permitivitou $\epsilon_r = 2,6$. Aký bude náboj na elektródach, ak bude kondenzátor pripojený na napätia $U = 600 \text{ V}$ a aká bude energia kondenzátora?



Obr. 30

Intenzitu elektrického poľa medzi elektródami kondenzátora je možné vyjadriť využitím Gaussovho zákona elektrostatiky

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} .$$

Ak je uzavretá plocha zvolená tak, že ju tvorí povrch gule, ktorej stred sa nachádza v strede kondenzátora, bude mať vektor intenzity elektrického poľa rovnaký smer ako vektor elementu plochy a veľkosť intenzity elektrického poľa bude na tejto ploche všade rovnaká. Preto bude platiť

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS \cos 0^\circ = E \int_S dS = ES = E4\pi r^2 .$$

Potom bude z Gaussovho zákona elektrostatiky vyplývať

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} ,$$

z čoho je možné vyjadriť intenzitu elektrického poľa

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} ,$$

pomocou ktorej je možné vypočítať elektrické napätie medzi elektródami kondenzátora

$$\begin{aligned} U &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E dr \cos 0^\circ = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} . \end{aligned}$$

Elektrickú kapacitu kondenzátora je možné pomocou definície vyjadriť ako

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} ,$$

po dosadení

$$C = 4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \cdot 2,6 \cdot \frac{0,03 \text{ m} \cdot 0,04 \text{ m}}{0,04 \text{ m} - 0,03 \text{ m}} = 3,47 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 34,7 \text{ pF} .$$

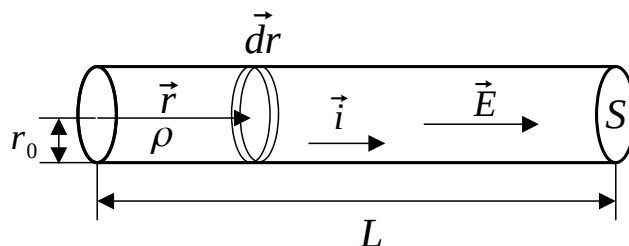
Ak bude kondenzátor pripojený na elektrické napätie $U = 300 \text{ V}$, bude náboj na jeho elektródach

$$Q = CU = 3,47 \cdot 10^{-11} \text{ F} \cdot 600 \text{ V} = 2,08 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 20,8 \text{ nC}$$

a energia elektrického poľa kondenzátora bude

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,47 \cdot 10^{-11} \text{ F} \cdot (600 \text{ V})^2 = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 6,25 \mu\text{J} .$$

- 6.7 Vypočítajte intenzitu elektrického poľa v hliníkovom vodiči tvaru priameho valca s polomerom $r_0 = 2,5 \text{ mm}$ a dĺžkou $L = 1 \text{ m}$, keď ním tečie stacionárny elektrický prúd $I = 10 \text{ A}$. Aké bude napätie na koncoch tohto vodiča a aký elektrický náboj pretečie vodičom za čas $t' = 10 \text{ s}$? Rezistivita hliníka je $\rho = 2,828 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$.



Obr. 31

Riešenie je možné nájsť pomocou Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare

$$\vec{i} = \gamma \vec{E} ,$$

kde γ je konduktivita vodiča

$$\gamma = \frac{1}{\rho} ,$$

a $\vec{i}$ je hustota elektrického prúdu, jej veľkosť je

$$i = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r_0^2} .$$

V skalárnom tvare potom platí

$$i = \gamma E ,$$

z čoho je možné vyjadriť veľkosť intenzity elektrického poľa

$$E = \frac{i}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{I}{\pi r_0^2} = \rho \frac{I}{\pi r_0^2} ,$$

po dosadení

$$E = 2,828 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m} \cdot \frac{10 \text{ A}}{\pi \cdot (0,0025 \text{ m})^2} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ V m}^{-1} = 14,4 \text{ mV m}^{-1} .$$

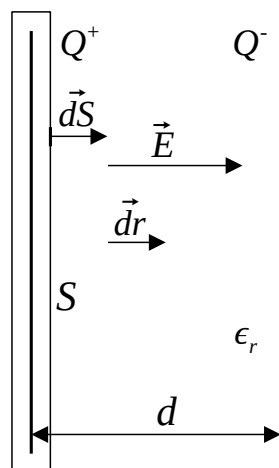
Napätie medzi koncami vodiča bude

$$U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^L E dr = EL = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ V m}^{-1} \cdot 1 \text{ m} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ V} = 14,4 \text{ mV}$$

a elektrický náboj, ktorý pretečie za čas t^* bude

$$Q^* = \int_0^{t^*} I dt = It^* = 10 \text{ A} \cdot 10 \text{ s} = 100 \text{ C} .$$

6.8 Doskový kondenzátor má elektródy s plochou $S = 16 \text{ cm}^2$, vzdialenosť medzi elektródami je $d = 0,2 \text{ cm}$ a priestor medzi elektródami je vyplnený dielektrikom s relatívnou permitivitou $\epsilon_r = 6,9$. Vypočítajte kapacitu kondenzátora, náboj na elektródach, intenzitu elektrického poľa, indukciu elektrického poľa, hustotu energie a energiu elektrického poľa ak je kondenzátor pripojený na elektrické napätie $U = 300 \text{ V}$.



Obr. 32

Intenzitu elektrického poľa je možné vypočítať pomocou Gaussovho zákona elektrostatiky

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0},$$

uzavretá plocha okolo elektródy má síce celkovú plochu $2S$, elektrické pole je ale len na jednej jej strane. Intenzita elektrického poľa je konštantná a má smer elementu plochy, preto platí

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES,$$

z čoho vyplýva rovnica

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0},$$

z ktorej je možné vyjadriť intenzitu elektrického poľa

$$E = \frac{Q}{S \epsilon_r \epsilon_0}$$

a pre napätie medzi elektródami bude platiť

$$U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = E \int_{r_1}^{r_2} dr = Ed = \frac{Q}{S\epsilon_r\epsilon_0} d.$$

Kapacita doskového kondenzátora bude

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{S\epsilon_r\epsilon_0}{d} = \frac{16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 6,9 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}}{0,002 \text{ m}} =$$
$$= 4,89 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 48,9 \text{ pF}.$$

Náboj na elektródach bude

$$Q = CU = 4,89 \cdot 10^{-11} \text{ F} \cdot 300 \text{ V} = 1,47 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 14,7 \text{ nC}.$$

Intenzita elektrického poľa bude

$$E = \frac{U}{d} = \frac{300 \text{ V}}{0,002 \text{ m}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1} = 150 \text{ kV m}^{-1}.$$

Indukcia elektrického poľa bude

$$D = \epsilon_r\epsilon_0 E = 6,9 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \cdot 1,5 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1} =$$
$$= 9,16 \cdot 10^{-6} \text{ C m}^{-2} = 9,16 \mu\text{C m}^{-2}.$$

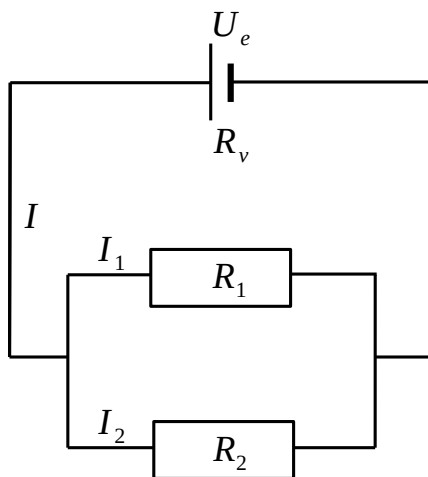
Hustota energie elektrického poľa bude

$$w = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1} \cdot 9,16 \cdot 10^{-6} \text{ C m}^{-2} = 0,687 \text{ J m}^{-3}$$

a energia elektrického poľa bude

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \cdot 4,89 \cdot 10^{-11} \text{ F} \cdot (300 \text{ V})^2 = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 2,2 \mu\text{J}.$$

6.9 Dva rezistory s odpormi $R_1 = 4 \Omega$ a $R_2 = 12 \Omega$ sú spojené paralelne a pripojené na zdroj s elektromotorickým napätím $U_e = 9 \text{ V}$ a vnútorným odporom $R_v = 1,5 \Omega$. Aké prúdy tečú v jednotlivých vetvách obvodu?



Obr. 33

Pre paralelne zapojené rezistory (Obr. 33) s odpormi R_1 a R_2 platí

$$U = U_1 = U_2 ,$$

$$I = I_1 + I_2 .$$

Z Ohmovho zákona

$$I = \frac{U}{R} ,$$

vyplýva

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

a výsledný odpor bude

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Pre elektromotorické napätie zdroja platí

$$U_e = (R + R_v)I ,$$

z čoho pre elektrický prúd vyplýva

$$I = \frac{U_e}{R + R_v} = \frac{U_e}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_v} = \frac{U_e (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_v (R_1 + R_2)} ,$$

po dosadení

$$I = \frac{9 \text{ V} \cdot (4 \Omega + 12 \Omega)}{4 \Omega \cdot 12 \Omega + 1,5 \Omega \cdot (4 \Omega + 12 \Omega)} = 2 \text{ A} .$$

Elektrický prúd tečúci rezistorom s odporom R_1 bude

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{RI}{R_1} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I}{R_1} = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} ,$$

po dosadení

$$I_1 = \frac{12 \Omega \cdot 2 \text{ A}}{4 \Omega + 12 \Omega} = 1,5 \text{ A} .$$

Elektrický prúd tečúci rezistorom s odporom R_2 bude

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{RI}{R_2} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I}{R_2} = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} ,$$

po dosadení

$$I_2 = \frac{4 \Omega \cdot 2 \text{ A}}{4 \Omega + 12 \Omega} = 0,5 \text{ A} .$$

6.10 Elektrický prúd vo vodiči, ktorého elektrický odpor je $R = 10 \Omega$, rovnomerne klesal z hodnoty $I_0 = 2 \text{ A}$ na nulovú hodnotu za čas $t_0 = 3 \text{ s}$. Aké teplo vzniklo za tento čas vo vodiči a aký elektrický náboj pretiekol za tento čas vodičom?

Elektrický prúd rovnomerne klesal z hodnoty I_0 , to znamená

$$I = I_0 - kt ,$$

na nulovú hodnotu za čas t_0 , teda platí

$$0 = I_0 - kt_0 ,$$

z čoho je možné vyjadriť konštantu

$$k = \frac{I_0}{t_0} ,$$

elektrický prúd sa teda bude v čase meniť ako

$$I = I_0 - \frac{I_0}{t_0} t .$$

Pre teplo platí

$$dQ = P dt ,$$

kde výkon elektrického prúdu bude

$$P = UI = RI^2 .$$

Teplo, ktoré vo vodiči vznikne za čas t_0 , bude

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{t_0} P dt = \int_0^{t_0} RI^2 dt = R \int_0^{t_0} \left(I_0 - \frac{I_0}{t_0} t \right)^2 dt = R \int_0^{t_0} \left(I_0^2 - 2 \frac{I_0^2}{t_0} t + \frac{I_0^2}{t_0^2} t^2 \right) dt = \\ &= R \left[I_0^2 t - \frac{I_0^2}{t_0} t^2 + \frac{I_0^2}{t_0^2} \frac{t^3}{3} \right]_0^{t_0} = \frac{RI_0^2 t_0}{3} , \end{aligned}$$

po dosadení

$$Q = \frac{10 \, \Omega \cdot (2 \, \text{A})^2 \cdot 3 \, \text{s}}{3} = 40 \, \text{J} .$$

Pre elektrický náboj platí

$$dQ = I dt .$$

Elektrický náboj, ktorý pretečie vodičom za čas t_0 , bude

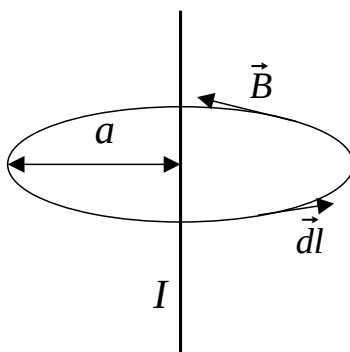
$$q = \int_0^{t_0} I dt = \int_0^{t_0} \left(I_0 - \frac{I_0}{t_0} t \right) dt = \left[I_0 t - \frac{I_0}{t_0} \frac{t^2}{2} \right]_0^{t_0} = \frac{I_0 t_0}{2} ,$$

po dosadení

$$q = \frac{2 \, \text{A} \cdot 3 \, \text{s}}{2} = 3 \, \text{C} .$$

7 Magnetické pole

7.1 Dlhým, rovným vodičom tečie elektrický prúd $I = 2$ A. Aká je indukcia magnetického poľa tohto vodiča vo vzdialenosti $a = 0,5$ m od neho?



Obr. 34

Riešenie príkladu je možné pomocou Ampèrovho zákona celkového prúdu, podľa ktorého sa krivkový integrál magnetickej indukcie po ľubovoľnej uzavretej orientovanej krivke rovná súčinu magnetickej konštanty a celkového elektrického prúdu, ktorý preteká plochou ohraničenou touto krivkou

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I .$$

Ak je ako krivka zvolená kružnica s polomerom a , ktorej stredom prechádza vodič s elektrickým prúdom I , budú mať vektory $\vec{B}$ a $d\vec{l}$ rovnaký smer a veľkosť indukcie magnetického poľa bude na tejto krivke konštantná. Preto bude platiť

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi a ,$$

z Ampèrovho zákona celkového prúdu vyplýva

$$B 2\pi a = \mu_0 I ,$$

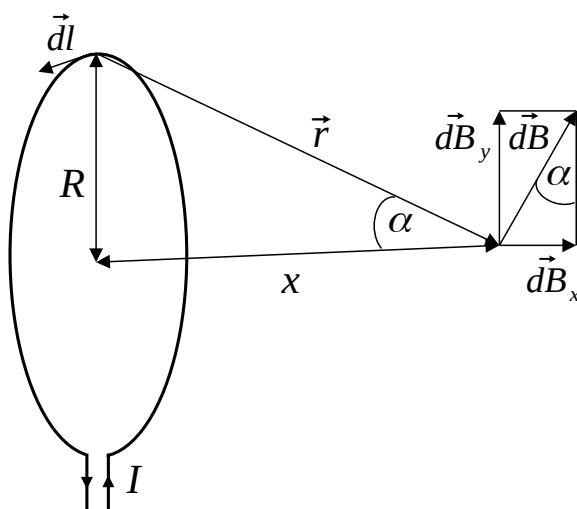
z čoho je možné vyjadriť veľkosť indukcie magnetického poľa

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cdot 2 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,5 \text{ m}} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ T} = 0,8 \mu\text{T}.$$

7.2 Vodičom tvaru kružnice s polomerom $R = 10 \text{ cm}$ tečie elektrický prúd $I = 1,5 \text{ A}$. Vypočítajte indukciu magnetického poľa vodiča na jeho osi vo vzdialenosti $x = 20 \text{ cm}$ od stredu kružnice a v strede kružnice.



Obr. 35

Výpočet indukcie magnetického poľa vodiča je možný pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona, ktorý umožňuje vypočítať príspevok

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

ku magnetickému poľu od elementu dĺžky $d\vec{l}$ v mieste s polohovým vektorom $\vec{r}$. Pretože vektory $d\vec{l}$ a $\vec{r}$ sú kolmé, je možné veľkosť tohto príspevku vyjadriť ako

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl r \sin 90^\circ}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}.$$

Vektor $d\vec{B}$ je možné rozložiť na zložky

$$d\vec{B} = d\vec{B}_x + d\vec{B}_y.$$

Zložky $d\vec{B}_y$ od elementov $d\vec{l}$, ktoré ležia na opačných stranách kružnice, sú rovnako veľké a opačne orientované, preto sa navzájom vyrušia a výsledné magnetické pole bude dané len súčtom zložiek $d\vec{B}_x$, ktorých veľkosť je

$$dB_x = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin \alpha .$$

Veľkosť polohového vektora je možné vyjadriť z Pytagorovej vety

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} ,$$

v pravouhlom trojuholníku tiež platí

$$\sin \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} ,$$

z čoho vyplýva

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl .$$

Indukciu magnetického poľa celého vodiča je možné vypočítať integráciou po celej dĺžke vodiča

$$\begin{aligned} B &= \int dB_x = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} , \end{aligned}$$

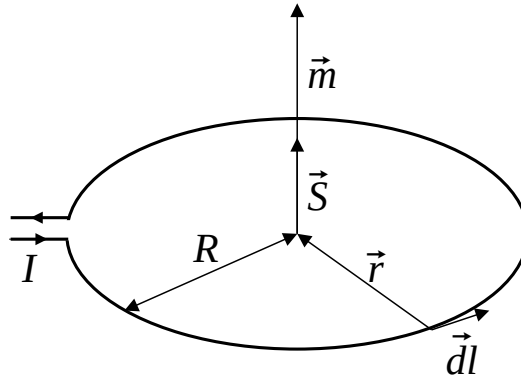
po dosadení

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cdot 2 \text{ A} \cdot (0,1 \text{ m})^2}{2 [(0,1 \text{ m})^2 + (0,2 \text{ m})^2]^{\frac{3}{2}}} = 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 1,12 \mu\text{T} .$$

Indukciu magnetického poľa v strede kružnice je možné vyjadriť z výsledného vzťahu dosadením $x = 0$, z čoho vyplýva

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cdot 2 \text{ A}}{2 \cdot 0,1 \text{ m}} = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 12,6 \mu\text{T} .$$

7.3 Vodičom tvaru kružnice s polomerom $R = 5 \text{ cm}$ tečie elektrický prúd, indukcia magnetického poľa v strede kružnice je $B = 5 \text{ mT}$. Aký je jeho magnetický moment?



Obr. 36

Indukcia magnetického poľa vodiča je daná Biotovým-Savartovým-Laplaceovým zákonom

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

kde element dĺžky $d\vec{l}$ vodiča s elektrickým prúdom I v mieste s polohovým vektorom $\vec{r}$ prispieva ku celkovej indukcii magnetického poľa príspevkom $d\vec{B}$. Pretože vektory $d\vec{l}$ a $\vec{r}$ sú kolmé, platí

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl r \sin 90^\circ}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}.$$

Pretože veľkosť polohového vektora sa rovná polomeru kružnice bude

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2}.$$

Indukciu magnetického poľa celého vodiča je možné vypočítať integráciou po celej dĺžke vodiča

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

pomocou čoho je možné vyjadriť elektrický prúd vo vodiči

$$I = \frac{2BR}{\mu_0}.$$

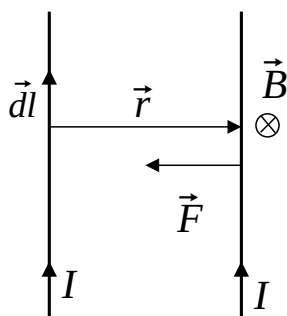
Veľkosť magnetického momentu rovinnej slučky s plochou S , ktorou tečie elektrický prúd I je

$$m = IS = \frac{2BR}{\mu_0} \pi R^2 = \frac{2\pi BR^3}{\mu_0},$$

po dosadení číselných hodnôt

$$m = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot (0,05 \text{ m})^3}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}} = 3,125 \text{ A m}^2.$$

7.4 Dvoma dlhými, rovnými vodičmi, ktoré sú navzájom rovnobežné, tečú rovnaké elektrické prúdy. Vzďialenosť medzi nimi je $a = 0,5 \text{ m}$ a sila, ktorou pôsobí jeden vodič na jednotku dĺžky druhého vodiča je $F_0 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N m}^{-1}$. Vypočítajte, aké veľké elektrické prúdy tečú vo vodičoch.



Obr. 37

Veľkosť indukcie magnetického poľa, ktoré vytvára priamy vodič s elektrickým prúdom I sa dá vypočítať pomocou Ampèrovho zákona celkového prúdu

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I ,$$

ak je integračná krivka kružnica s polomerom a , ktorej stredom prechádza vodič s elektrickým prúdom, zo zákona vyplýva

$$B2\pi a = \mu_0 I ,$$

z čoho je možné vyjadriť veľkosť indukcie magnetického poľa

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} .$$

Silu pôsobiacu v magnetickom poli B na element vodiča $d\vec{l}$, ktorým tečie elektrický prúd I , vyjadruje Ampèrov zákon sily

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} ,$$

pretože element vodiča a indukcia magnetického poľa sú na seba kolmé, pre veľkosť sily platí

$$dF = IdlB ,$$

z čoho je možné vyjadriť veľkosť sily pôsobiacej na jednotku dĺžky vodiča

$$F_0 = \frac{dF}{dl} = IB .$$

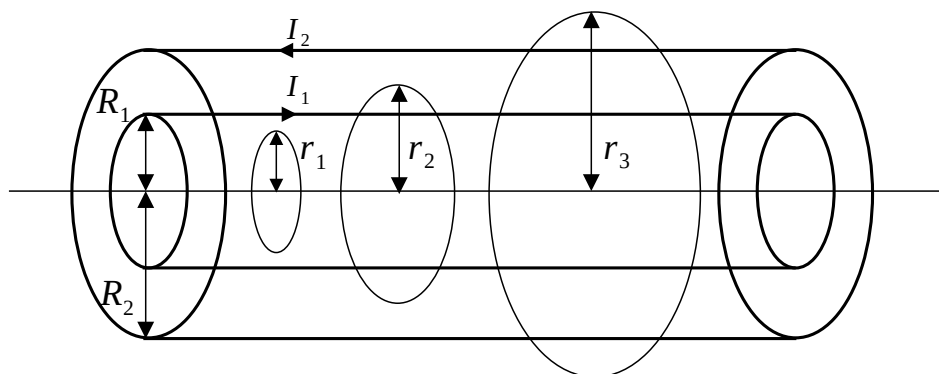
Po dosadení indukcie magnetického poľa, ktoré vytvára druhý vodič

$$F_0 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} ,$$

z čoho je možné vypočítať veľkosť elektrického prúdu, ktorý tečie vodičmi

$$I = \sqrt{\frac{2\pi a F_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ N m}^{-1}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}}} = 0,707 \text{ A} .$$

7.5 Dvoma súosovými medenými rúrkami vo vákuu s polomerami $R_1 = 5 \text{ mm}$ a $R_2 = 10 \text{ mm}$ tečú protismerné elektrické prúdy $I_1 = I_2 = 5 \text{ A}$. Aká je indukcia magnetického poľa vo vzdialenosti $r_1 = 3 \text{ mm}$, $r_2 = 8 \text{ mm}$ a $r_3 = 15 \text{ mm}$ od spoločnej osi rúrok?



Obr. 38

Veľkosť indukcie magnetického poľa je možné vyjadriť pomocou Ampèrovho zákona celkového prúdu

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I .$$

Ak je integračná krivka kružnica s polomerom r_1 , touto krivkou tečie nulový elektrický prúd, z čoho vyplýva

$$B_1 \oint_0^{2\pi r_1} dl = 0 ,$$

$$B_1 2\pi r_1 = 0 .$$

Preto veľkosť indukcie magnetického poľa vo vzdialenosti r_1 bude

$$B_1 = 0 \text{ T} .$$

Ak je integračná krivka kružnica s polomerom r_2 , touto krivkou tečie elektrický prúd I_1 , z čoho vyplýva

$$B_2 \oint_0^{2\pi r_2} dl = \mu_0 I_1 ,$$

$$B_2 2\pi r_2 = \mu_0 I_1 .$$

Preto veľkosť indukcie magnetického poľa vo vzdialenosti r_2 bude

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cdot 5 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,008 \text{ m}} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 0,125 \text{ mT} .$$

Ak je integračná krivka kružnica s polomerom r_3 , touto krivkou tečie nulový celkový elektrický prúd pretože $I_1 - I_2 = 0$, z čoho vyplýva

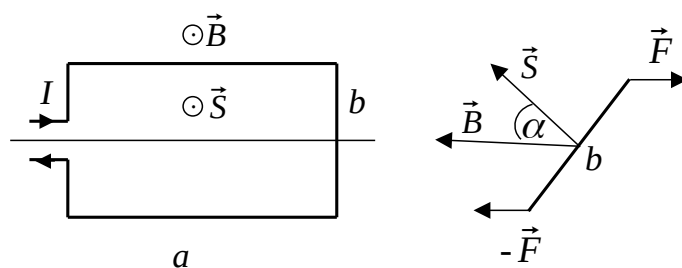
$$B_3 \oint_0^{2\pi r_3} dl = \mu_0 (I_1 - I_2) ,$$

$$B_3 2\pi r_3 = 0 .$$

Preto veľkosť indukcie magnetického poľa vo vzdialenosti r_3 bude

$$B_3 = 0 \text{ T} .$$

- 7.6 V homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0,5 \text{ T}$ sa nachádza vodič v tvare obdĺžnika so stranami $a = 5 \text{ cm}$ a $b = 3 \text{ cm}$, ktorým tečie elektrický prúd $I = 1 \text{ A}$. Vodič sa môže otáčať okolo osi, ktorá prechádza stredmi strán b a je kolmá na indukciu magnetického poľa. Akú prácu vykonajú vonjšie sily, ktoré otočia vodič o uhol $\alpha = 90^\circ$ zo stabilnej polohy?



Obr. 39

Na uzavretú slučku, ktorá leží v rovine a tečie ňou elektrický prúd, homogénne magnetické pole pôsobí momentom sily

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} ,$$

kde magnetický moment slučky je

$$\vec{m} = I\vec{S} .$$

Teda platí

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} .$$

Magnetické pole sa snaží otočiť slučku tak, aby vektor plochy a vektor magnetickej indukcie mali ten istý smer, táto poloha je stabilná. Aby sa slučka otočila okolo osi, musí na ňu pôsobiť dvojica vonkajších síl, ktorá pri otočení slučky o $d\alpha$ vykoná prácu

$$dA = M d\alpha .$$

Moment dvojice vonkajších síl musí byť rovnako veľký ako moment sily magnetického poľa

$$M = ISB \sin \alpha ,$$

teda práca dvojice síl pri otočení slučky o $d\alpha$ bude

$$dA = ISB \sin \alpha d\alpha$$

a celková práca pri otčení o α bude

$$A = \int_0^\alpha ISB \sin \alpha d\alpha = ISB \int_0^\alpha \sin \alpha d\alpha = ISB [-\cos \alpha]_0^\alpha = ISB(1 - \cos \alpha) .$$

Pretože veľkosť plochy slučky je

$$S = ab ,$$

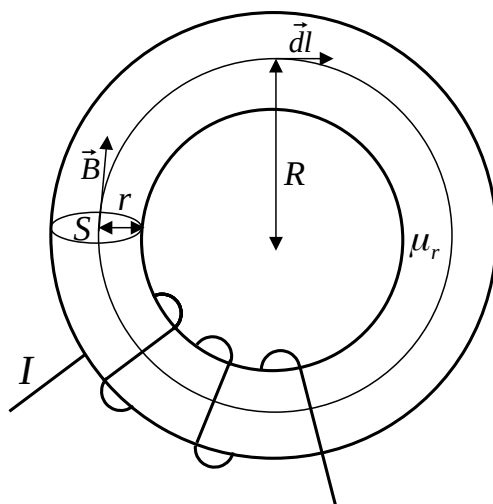
je možné prácu vyjadriť ako

$$A = IabB(1 - \cos \alpha) ,$$

po dosadení

$$A = 1 \text{ A} \cdot 0,05 \text{ m} \cdot 0,03 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ T} \cdot (1 - \cos 90^\circ) = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ J} = 0,75 \text{ mJ} .$$

7.7 Cievka v tvare toroidu s polomerom strednej siločiar $R = 10 \text{ cm}$ a polomerom kruhového prierezu $r = 1 \text{ cm}$ má na oceľovom jadre navinutých $N = 10\,000$ závitov, ktorými tečie elektrický prúd $I = 1 \text{ A}$. Magnetický indukčný tok prierezom jadra je $\Phi = 7,5 \text{ mWb}$. Vypočítajte relatívnu permeabilitu jadra.



Obr. 40

Veľkosť indukcie magnetického poľa je možné vyjadriť pomocou Ampèrovho zákona celkového prúdu

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_r \mu_0 I_{\text{celk.}}$$

Ak je integračná krivka kružnica so stredom v strede toroidu a polomerom R , krivkou tečie celkový elektrický prúd

$$I_{\text{celk.}} = NI.$$

Vektory $\vec{B}$ a $d\vec{l}$ majú rovnaký smer a veľkosť magnetickej indukcie je konštantná

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi R} B dl = B \int_0^{2\pi R} dl = 2\pi RB,$$

potom z Ampèrovho zákona celkového prúdu vyplýva

$$2\pi RB = \mu_r \mu_0 NI,$$

z čoho je možné vyjadriť relatívnu permeabilitu ako

$$\mu_r = \frac{2\pi RB}{\mu_0 NI}.$$

Z magnetického indukčného toku

$$\Phi = BS,$$

pre veľkosť magnetickej indukcie vyplýva

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{\pi r^2},$$

pomocou čoho je relatívnu permeabilitu možné vypočítať ako

$$\mu_r = \frac{2\pi R\Phi}{\mu_0 NI\pi r^2} = \frac{2R\Phi}{\mu_0 NI r^2},$$

po dosadení

$$\mu_r = \frac{2 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cdot 10000 \cdot 1 \text{ A} \cdot (0,01 \text{ m})^2} = 1194.$$

7.8 Aká je energia magnetického poľa toroidu s polomerom $R = 20 \text{ cm}$ na ktorom je navinutých $N = 5000$ závitov s polomerom $r = 1 \text{ cm}$, keď ním tečie elektrický prúd $I = 5 \text{ mA}$?

Indukciu magnetického poľa je možné vypočítať pomocou Ampèrovho zákona celkového prúdu

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{celk.}}$$

Ak je integračná krivka kružnica so stredom v strede toroidu a polomerom R , krivkou tečie celkový prúd

$$I_{\text{celk.}} = NI,$$

vektory $\vec{B}$ a $d\vec{l}$ majú rovnaký smer a veľkosť magnetickej indukcie je konštantná

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi R} B dl = B \int_0^{2\pi R} dl = B 2\pi R,$$

z Ampèrovho zákona celkového prúdu potom vyplýva

$$B 2\pi R = \mu_0 NI,$$

z čoho je možné vyjadriť indukciu magnetického poľa

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} .$$

Magnetický indukčný tok cez jeden závit bude

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \int_S dS = BS = B\pi r^2$$

a magnetický indukčný tok cez N závitov toroidu

$$\Phi_{\text{celk.}} = N\Phi = NB\pi r^2 ,$$

Po dosadení indukcie magnetického poľa

$$\Phi_{\text{celk.}} = \frac{\mu_0 N^2 I r^2}{2R} ,$$

pomocou čoho je vlastnú indukčnosť toroidu možné vypočítať ako

$$L = \frac{\Phi_{\text{celk.}}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R} .$$

Energia magnetického poľa v toroide je

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 r^2 I^2}{4R} ,$$

po dosadení

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cdot (5000)^2 \cdot (0,01 \text{ m})^2 \cdot (0,005 \text{ A})^2}{4 \cdot 0,2 \text{ m}} = \\ &= 9,81 \cdot 10^{-8} \text{ J} = 98,1 \text{ nJ} . \end{aligned}$$

7.9 V magnetickom poli Zeme z indukciou $B = 45 \mu\text{T}$ sa nachádza vodič tvaru obdĺžnika so stranami $a = 20 \text{ cm}$ a $b = 10 \text{ cm}$. Vodič sa môže otáčať okolo osi, ktorá prechádza stredom strany b a je kolmá na indukciu magnetického poľa. Aký je priebeh a amplitúda indukovaného napätia vo vodiči, ak sa vodič v magnetickom poli otáča s frekvenciou $f = 50 \text{ s}^{-1}$.

Podľa Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie sa indukované elektromotorické napätie rovná zápornej časovej zmene magnetického indukčného toku slučkou

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} ,$$

kde magnetický indukčný tok je definovaný ako

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS \cos \alpha .$$

Pretože indukcia magnetického poľa je konštantná

$$\Phi = B \int_S dS \cos \alpha = BS \cos \alpha = Bab \cos \alpha ,$$

pre uhol medzi vektormi plochy a magnetickej indukcie platí

$$\alpha = \omega t = 2\pi ft ,$$

teda magnetický indukčný tok bude

$$\Phi = Bab \cos(2\pi ft) .$$

Z Faradayovho zákona elektromagnetickej indukci preto pre indukované napätie vyplýva

$$U_i = - \frac{d[Bab \cos(2\pi ft)]}{dt} = Bab2\pi f \sin(2\pi ft) = U_0 \sin(2\pi ft) ,$$

kde amplitúda indukovaného napätia je

$$U_0 = Bab2\pi f ,$$

jej veľkosť po dosadení číselných hodnôt bude

$$U_0 = 45 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} = 2,83 \cdot 10^{-4} \text{ V} = 0,283 \text{ mV} .$$

7.10 Vypočítajte amplitúdu a priebeh indukovaného elektrického prúdu v medenom vodiči tvaru obdĺžnika so stranami $a = 10 \text{ cm}$ a $b = 4 \text{ cm}$ s prierezom $S = 2 \text{ mm}^2$ a merným odporom $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$, ktorý sa v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 5 \text{ mT}$ otáča s frekvenciou $f = 100 \text{ s}^{-1}$.

Indukované elektromotorické napätie je možné vypočítať pomocou Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie

$$U_i = - \frac{d\Phi}{dt} .$$

Magnetický indukčný tok je slučkou je možné vyjadriť ako

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS \cos \alpha = B \int_S dS \cos \alpha = BS \cos \alpha = Bab \cos \alpha ,$$

pretože pre uhol medzi vektormi plochy a magnetickej indukcie platí

$$\alpha = \omega t = 2\pi ft ,$$

magnetický indukčný tok bude

$$\Phi = Bab \cos(2\pi ft) .$$

Pre indukované napätie potom vyplýva

$$U_i = -\frac{d[Bab \cos(2\pi ft)]}{dt} = Bab2\pi f \sin(2\pi ft) .$$

Vzťah medzi indukovaným napätím a prúdom je možné vyjadriť pomocou Ohmovho zákona

$$I_i = \frac{U_i}{R} ,$$

kde elektrický odpor vodiča je možné vyjadriť ako

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{2(a+b)}{S} .$$

Priebeh indukovaného elektrického prúdu bude

$$I_i = \frac{BabS\pi f}{\rho(a+b)} \sin(2\pi ft) = I_0 \sin(2\pi ft) ,$$

jeho amplitúda je

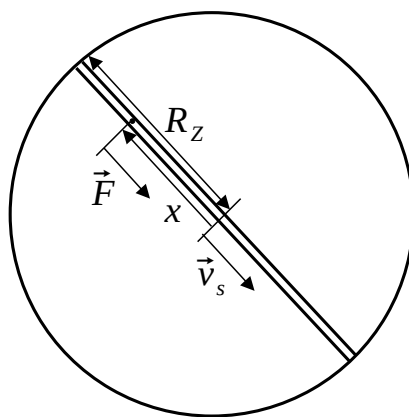
$$I_i = \frac{BabS\pi f}{\rho(a+b)} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$I_0 = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,04 \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ s}^{-1}}{1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m} \cdot (0,1 \text{ m} + 0,04 \text{ m})} = 5,28 \text{ A} .$$

8 Kmity a vlny

8.1 Predstavte si priamu šachtu medzi Európou a Austráliou, ktorá prechádza stredom Zeme. Ak sa do šachty dostane teleso, bude naň pôsobiť sila, ktorá smeruje do stredu Zeme a je priamoúmerná vzdialenosti od stredu Zeme. Vypočítajte, ako dlho bude trvať telesu, ktoré bolo pustené do šachty, cesta z Európy do Austrálie a naspäť a akú rýchlosť bude mať teleso pri prechode stredom Zeme. Tiažové zrýchlenie na povrchu Zeme je $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ a polomer Zeme je $R_Z = 6370 \text{ km}$.



Obr. 41

Na teleso v šachte bude pôsobiť sila, ktorej veľkosť je

$$F = -kx ,$$

z druhého Newtonovho zákona vyplýva

$$ma = F ,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx .$$

Na povrchu Zeme sa sila rovná tiaži telesa

$$kR_Z = mg ,$$

z čoho pre konštantu platí

$$k = m \frac{g}{R_Z} ,$$

pomocou čoho je možné napísať pohybovú rovnicu v tvare

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{R_Z}x ,$$

čo je rovnica harmonického pohybu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x ,$$

ktorého uhlová frekvencia je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_Z}} ,$$

a jej riešenie má tvar

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) .$$

Pretože v čase $t = 0$ s bola poloha telesa $x = R_Z$ platí

$$x_0 = R_Z ,$$

$$\alpha = 0 ,$$

teda rovnica opisujúca pohyb telesa bude

$$x = R_Z \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R_Z}}t\right) .$$

Cesta telesa z Európy do Austrálie a naspäť je perióda pohybu, pre ktorú platí

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_Z}{g}} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}{9,81 \text{ m s}^{-2}}} = 5063 \text{ s} = 84 \text{ min} .$$

Rýchlosť telesa je možné vyjadriť ako

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left[R_Z \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R_Z}}t\right)\right]}{dt} = -\sqrt{R_Z g} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R_Z}}t\right) .$$

Pre teleso v strede Zeme platí

$$R_Z \cos \left(\sqrt{\frac{g}{R_Z}} t_s \right) = 0 ,$$

z toho vyplýva čas

$$t_s = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_Z}{g}} .$$

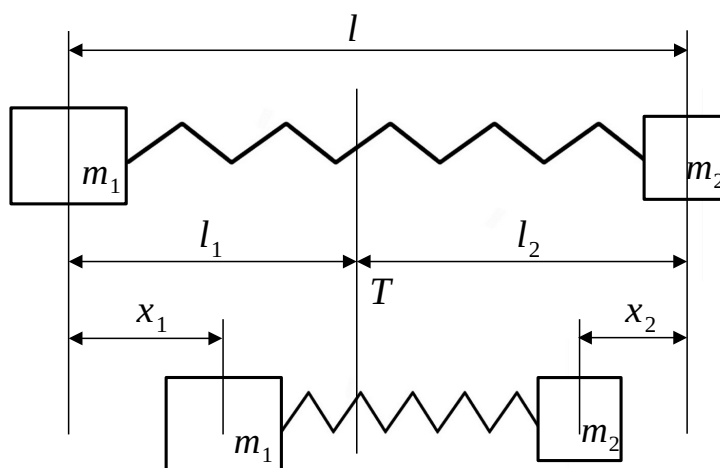
Po dosadení do rýchlosti telesa, rýchlosť telesa v strede Zeme bude

$$v_s = -\sqrt{R_Z g} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{R_Z}} t_s \right) = -\sqrt{R_Z g} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{R_Z}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_Z}{g}} \right) = -\sqrt{R_Z g} ,$$

kde záporné znamienko znamená, že smer v_s je opačný ako smer x , po dosadení číselných hodnôt veľkosť rýchlosti telesa v strede Zeme bude

$$v_s = \sqrt{6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 7905 \text{ m s}^{-1} .$$

8.2 Dve telesá s hmotnosťami $m_1 = 5 \text{ kg}$ a $m_2 = 3 \text{ kg}$ sú spojené pružinou, ktorej tuhosť je $k = 100 \text{ N m}^{-1}$. Telesá priblížime k sebe, čím pružinu stlačíme a potom telesá uvoľníme. Vypočítajte periódu kmitov telies.



Obr. 42

Ak bude začiatok súradnicovej sústavy v spoločnom ťažisku telies, bude platiť

$$0 = \frac{-m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2} ,$$

kde l_1 a l_2 sú vzdialenosti ťažísk jednotlivých telies od ich spoločného ťažiska. Z toho vyplýva

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 .$$

Keďže ide o izolovanú sústavu, po stlačení pružiny sa poloha ťažiska nezmení a bude platiť

$$0 = \frac{-m_1(l_1 - x_1) + m_2(l_2 - x_2)}{m_1 + m_2} ,$$

kde x_1 a x_2 sú výchylky telies z ich rovnovážnych polôh. Z toho vyplýva

$$m_1 x_1 = m_2 x_2 .$$

Sila, ktorá pôsobí na prvé teleso bude

$$F_1 = -k(x_1 + x_2) ,$$

pretože platí

$$x_2 = x_1 \frac{m_1}{m_2} ,$$

je možné silu, pôsobiacu na prvé teleso vyjadriť ako

$$F_1 = -k \frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1 = -k_1 x_1 ,$$

kde platí

$$k_1 = k \frac{m_1 + m_2}{m_2} .$$

Uhlová frekvencia pohybu prvého telesa bude

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

a perióda pohybu prvého telesa bude

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} ,$$

po dosadení

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{5 \text{ kg} \cdot 3 \text{ kg}}{100 \text{ N m}^{-1} \cdot (5 \text{ kg} + 3 \text{ kg})}} = 0,86 \text{ s} .$$

Sila, ktorá pôsobí na druhé teleso bude

$$F_2 = -k(x_1 + x_2) .$$

Pretože platí

$$x_1 = x_2 \frac{m_2}{m_1} ,$$

je možné silu, pôsobiacu na druhé teleso vyjadriť ako

$$F_2 = -k \frac{m_1 + m_2}{m_1} x_2 = -k_2 x_2 ,$$

kde platí

$$k_2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1} .$$

Uhlová frekvencia pohybu druhého telesa bude

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

a perióda pohybu druhého telesa bude

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} .$$

Periódou pohybu prvého aj druhého telesa sú teda rovnaké $T_1 = T_2 = 0,86$ s.

8.3 Vypočítajte periódu harmonického pohybu telesa hmotnosti $m = 100$ g zaveseného na pružine. Na predĺženie pružiny o $x_1 = 10$ cm je potrebná sila $F_1 = 0,2$ N.

Pohybová rovnica telesa s hmotnosťou m , ktoré vykonáva harmonický pohyb, má tvar

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx ,$$

kde x je výchylka telesa z rovnovážnej polohy a k je konštanta pružiny. Rovnica má riešenie v tvare

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) ,$$

kde x_0 je amplitúda a α je fázová konštanta pohybu. Pre uhlovú frekvenciu platí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Na predĺženie pružiny o x_1 je potrebná sila F_1

$$F_1 = kx_1 ,$$

pre konštantu pružiny z toho vyplýva

$$k = \frac{F_1}{x_1} .$$

Períodu harmonického pohybu je možné vypočítať ako

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mx_1}{F_1}} ,$$

po dosadení

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,1 \text{ kg} \cdot 0,1 \text{ m}}{0,2 \text{ N}}} = 1,4 \text{ s} .$$

8.4 Na predĺženie pružiny o $x_1 = 5 \text{ cm}$ je potrebná mechanická práca $A_1 = 0,25 \text{ J}$. Aká bude uhlová frekvencia telesa s hmotnosťou $m = 0,5 \text{ kg}$, ktoré bude kmitať na tejto pružine?

Na predĺženie pružiny o x je potrebná sila

$$F = kx .$$

Mechanická práca pri natiahnutí o x_1 preto bude

$$A_1 = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} kx dx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_0^{x_1} = \frac{1}{2} kx_1^2 ,$$

z čoho je možné vyjadriť tuhosť pružiny

$$k = \frac{2A_1}{x_1^2} .$$

Harmonický pohyb telesa je opísaný pohybovou rovnicou

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx .$$

Jej riešenie má tvar

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) ,$$

kde x_0 je amplitúda a α je fázová konštanta pohybu. Pre uhlovú frekvenciu platí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Po dosadení za tuhosť pružiny, uhlová frekvencia bude

$$\omega = \sqrt{\frac{2A_1}{mx_1^2}}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25 \text{ J}}{0,5 \text{ kg} \cdot (0,05 \text{ m})^2}} = 20 \text{ s}^{-1} .$$

8.5 Horizontálna doska vykonáva harmonický pohyb vo vodorovnom smere s periódou $T = 3 \text{ s}$. Teleso, ktoré leží na doske, sa začne klzať, keď amplitúda kmitov dosiahne hodnotu $x_0 = 0,5 \text{ m}$. Aký je koeficient trenia medzi telesom a doskou?

Na teleso na doske pôsobí trecia sila, ktorej veľkosť je daná súčinom koeficientu trenia a normálovej sily

$$F_t = \mu N .$$

Veľkosť normálovej sily sa rovná súčinu hmotnosti telesa a tiažového zrýchlenia

$$N = mg ,$$

preto veľkosť trecej sily bude

$$F_t = \mu mg .$$

Pretože sa teleso pohybuje spolu s doskou, nachádza sa v neinerciálnej vzťažnej sústave a okrem trecej sily pôsobí na teleso aj zotrvačná sila

$$F_z = -ma .$$

Pohyb dosky pri harmonickom pohybe opisuje funkcia

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) ,$$

z ktorej pre rýchlosť dosky vyplýva

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[x_0 \cos(\omega t + \alpha)]}{dt} = -x_0 \omega \sin(\omega t + \alpha) ,$$

z ktorej pre zrýchlenie dosky vyplýva

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[-x_0\omega \sin(\omega t + \alpha)]}{dt} = -x_0\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) ,$$

pomocou čoho je možné vyjadriť veľkosť zotrvačnej sily

$$F_z = mx_0\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = F_{z0} \cos(\omega t + \alpha) ,$$

kde amplitúda zotrvačnej sily je

$$F_{z0} = mx_0\omega^2 .$$

Teleso sa začne kĺzať, keď sa amplitúda zotrvačnej sily bude rovnať trecej sile

$$F_{z0} = F_t ,$$

teda keď bude platiť

$$mx_0\omega^2 = \mu mg ,$$

kde uhlovú frekvenciu je možné vyjadriť pomocou periódy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

z čoho pre koeficient trenia vyplýva

$$\mu = \frac{4\pi^2 x_0}{T^2 g} ,$$

po dosadení

$$\mu = \frac{4\pi^2 \cdot 0,5 \text{ m}}{(3 \text{ s})^2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 0,22 .$$

8.6 Častica vykonáva tlmený harmonický pohyb, pri ktorom je závislosť polohy častice na čase daná funkciou $x = 5 \text{ cm } e^{-1,4 \text{ s}^{-1}t} \cos(1,6\pi \text{ s}^{-1}t)$. Vypočítajte koeficient útlmu, logaritmický dekrement útlmu, dobu, ze ktorú klesne amplitúda kmitov na jednu stotinu pôvodnej hodnoty a uhlovú frekvenciu, ktorou by častica kmitala, keby prestala pôsobiť tlmiaca sila.

Pri tlmenom harmonickom pohybe polohu častice opisuje funkcia

$$x = x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \alpha) ,$$

z ktorej vyplýva, že koeficient útlmu je

$$b = 1,4 \text{ s}^{-1} ,$$

a logaritmický dekrement útlmu je

$$\delta = bT = b \frac{2\pi}{\omega} = 1,4 \text{ s}^{-1} \frac{2\pi}{1,6\pi \text{ s}^{-1}} = 0,875 .$$

Čas, za ktorý amplitúda klesne na jednu stotinu

$$x_0 e^{-bt_1} = \frac{x_0}{100} ,$$

bude

$$t_1 = \frac{\ln 100}{b} = \frac{\ln 100}{1,4 \text{ s}^{-1}} = 3,29 \text{ s} .$$

Pre uhlovú frekvenciu tlmeného harmonického oscilátora platí

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} ,$$

z čoho je možné vyjadriť uhlovú frekvenciu pohybu bez tlmenia

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + b^2} = \sqrt{(1,6\pi \text{ s}^{-1})^2 + (1,4 \text{ s}^{-1})^2} = 5,22 \text{ s}^{-1} .$$

8.7 Pri zložení dvoch harmonických pohybov prebiehajúcich v jednej priamke je výsledný pohyb opísaný rovnicou $x = x_0 \cos(2 \text{ s}^{-1} \cdot t) \cos(50 \text{ s}^{-1} \cdot t)$. Vypočítajte uhlové frekvencie kmitov, zložením ktorých takéto kmitanie vzniklo a uhlovú frekvenciu rázov výsledného pohybu.

Pri skladaní dvoch harmonických pohybov

$$x = x_0 \cos(\omega_1 t) ,$$

$$x = x_0 \cos(\omega_2 t) ,$$

na základe princípu superpozície pre výchylku výsledného pohybu platí

$$x = x_0 \cos(\omega_1 t) + x_0 \cos(\omega_2 t) .$$

Po využití vzťahu

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) ,$$

je možné výchylku výsledného pohybu zapísať ako

$$x = 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Uhlové frekvencie pôvodných kmitov je možné získať riešením sústavy rovníc

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 2 \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 50 \text{ s}^{-1},$$

z čoho vyplýva

$$\omega_1 = 52 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_2 = 48 \text{ s}^{-1}.$$

Výsledný pohyb je možné zapísať ako harmonický pohyb

$$x = A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right),$$

ktorého amplitúda sa pomaly mení

$$A = \left| 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \right|,$$

perióda tejto amplitúdy potom bude

$$T_A = \frac{2\pi}{\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}} = \frac{4\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.$$

Pretože za jednu periódu amplitúdy vzniknú dve zosilnenia a dve zoslabenia, teda dva rázy, bude pre ich periódu platiť

$$T_r = \frac{T_A}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

a uhlová frekvencia rázov bude

$$\omega_r = \frac{2\pi}{T_r} = |\omega_1 - \omega_2| = |52 \text{ s}^{-1} - 48 \text{ s}^{-1}| = 4 \text{ s}^{-1}.$$

8.8 Vlnenie sa šíri v prostredí, ktorého výchylky častíc sú opísané funkciou $u = A \cos 2\pi(bt - hx)$, kde $A = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $b = 5000 \text{ s}^{-1}$ a $h = 1 \text{ m}^{-1}$. Vypočítajte vlnovú dĺžku, frekvenciu, periódu, amplitúdu, rýchlosť šírenia vlny, maximálnu hodnotu rýchlosti a zrýchlenia kmitov častíc prostredia a napíšte funkciu pre rovnakú vlnu šíriacu sa v opačnom smere.

Funkciu, ktorá opisuje šírenie vlnenia v smere osi x v prostredí

$$u = u_0 \cos(\omega t - kx) ,$$

kde k je kruhové vlnové číslo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} ,$$

je možné prepísať na tvar

$$u = u_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) ,$$

z čoho vyplýva, že vlnová dĺžka vlnenia je

$$\lambda = \frac{1}{h} = \frac{1}{1 \text{ m}^{-1}} = 1 \text{ m} .$$

Frekvencia vlnenia je

$$f = b = 5000 \text{ s}^{-1} ,$$

perióda vlnenia je

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{b} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} ,$$

amplitúda vlnenia je

$$u_0 = A = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} ,$$

a rýchlosť vlnenia je

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{b}{h} = \frac{1 \text{ m}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ s}} = 5000 \text{ m s}^{-1} .$$

Rýchlosť kmitania častíc prostredia je

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{d[A \cos 2\pi(bt - hx)]}{dt} = -2\pi b A \sin 2\pi(bt - hx) .$$

Maximálna hodnota rýchlosti po dosadení bude

$$v_{max.} = 2\pi bA = 2\pi \cdot 5000 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,0628 \text{ m s}^{-1}.$$

Zrýchlenie kmitania častíc prostredia je

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[-2\pi bA \sin 2\pi(bt - hx)]}{dt} = -(2\pi b)^2 A \cos 2\pi(bt - hx).$$

Maximálna hodnota zrýchlenia po dosadení bude

$$a_{max.} = (2\pi b)^2 A = (2\pi \cdot 5000 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1973,9 \text{ m s}^{-2}.$$

Pre vlnu šíriacu sa v opačnom smere bude platiť

$$x \rightarrow -x,$$

preto rovnica opisujúca šírenie vlnenia v opačnom smere bude mať tvar

$$u = A \cos 2\pi(bt + hx).$$

8.9 Rýchlosť zvuku v oceli je možné určiť tak, že sa v ocelevej tyči upevnenej v strede vytvorí vlnenie, ktoré rozochveje vzduch v Kundtovej trubici, v ktorej vznikne stojaté vlnenie. Vypočítajte rýchlosť zvuku v oceli a modul pružnosti v ťahu ocele, ak vzdialenosť medzi susednými uzlami stojatého vlnenia vo vzduchu je $x = 8 \text{ cm}$, dĺžka tyče je $l = 1,2 \text{ m}$, rýchlosť zvuku vo vzduchu je $v = 340 \text{ m s}^{-1}$ a hustota ocele je $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$.

Podmienka vzniku stojatého vlnenia vo vzduchu a tyči a zároveň vzniku rezonancie je

$$f = f'.$$

Pre frekvenciu vlnenia vo vzduchu platí

$$f = \frac{v}{\lambda},$$

kde v a λ sú rýchlosť a vlnová dĺžka zvuku vo vzduchu. Pre frekvenciu vlnenia v tyči platí

$$f' = \frac{v'}{\lambda'},$$

kde v' a λ' sú rýchlosť a vlnová dĺžka zvuku v tyči. Preto je možné prepísať podmienku vzniku stojatého vlnenia na tvar

$$\frac{v}{\lambda} = \frac{v'}{\lambda'},$$

z ktorej pre rýchlosť zvuku v tyči vyplýva

$$v' = v \frac{\lambda'}{\lambda} ,$$

kde vlnovú dĺžku vo vzduchu je možné určiť ako dvojnásobok vzdialenosti medzi dvoma uzlami

$$\lambda = 2x$$

a vlnovú dĺžku v tyči je možné určiť ako dvojnásobok dĺžky tyče

$$\lambda' = 2l ,$$

pomocou čoho pre rýchlosť zvuku v oceli vyplýva

$$v' = v \frac{2l}{2x} = v \frac{l}{x} ,$$

po dosadení

$$v' = 340 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{1,2 \text{ m}}{0,08 \text{ m}} = 5100 \text{ m s}^{-1} .$$

Vlnová rovnica má všeobecný tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Pomocou Hookovho zákona je možné pre vlnenie v oceli odvodiť rovnicu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

preto pre rýchlosť zvuku v oceli bude platiť

$$v'^2 = \frac{E}{\rho} ,$$

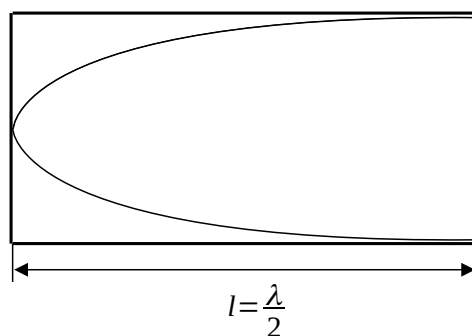
z čoho pre modul pružnosti v ťahu ocele vyplýva

$$E = v'^2 \rho ,$$

po dosadení

$$E = (5100 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot 7800 \text{ kg m}^{-3} = 2,03 \cdot 10^{11} \text{ Pa} .$$

8.10 Píšťala na konci uzavretá vytvára tón základnej frekvencie $f = 130,5 \text{ Hz}$. Vypočítajte dĺžku rezonátora píšťaly a výšku základného tónu, ak koniec píšťaly bude otvorený. Rýchlosť zvuku vo vzduchu je $v = 340 \text{ m s}^{-1}$.



Obr. 43

V prípade, že jeden koniec píšťaly je uzavretý a druhý otvorený (Obr. 43), bude na jednom konci píšťaly uzol a na druhom kmitňa. Pre dĺžku píšťaly a vlnovú dĺžku základného tóna bude platiť

$$l = \frac{\lambda}{4}.$$

Pretože medzi vlnovou dĺžkou a frekvenciou vlnenia platí

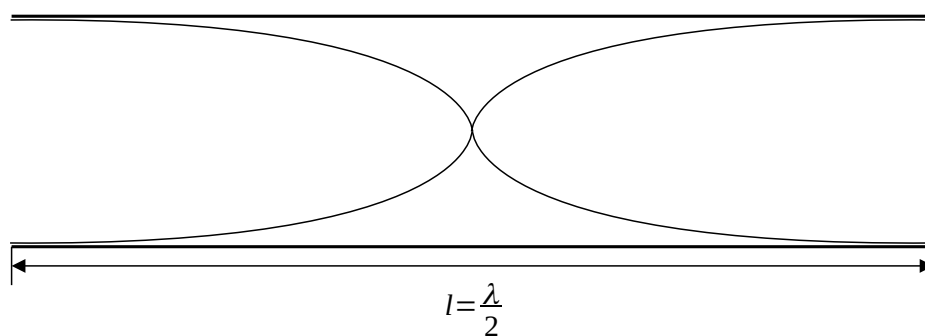
$$f = \frac{v}{\lambda},$$

je možné vyjadriť dĺžku píšťaly ako

$$l = \frac{v}{4f},$$

po dosadení

$$l = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{4 \cdot 130,5 \text{ Hz}} = 0,65 \text{ m}.$$



Obr. 44

V prípade, že obidva konce píšťaly sú otvorené (Obr. 44), bude na oboch koncoch píšťaly kmitňa. Pre dĺžku píšťaly a vlnovú dĺžku základného tónu bude platiť

$$l = \frac{\lambda}{2} ,$$

pretože medzi vlnovou dĺžkou a frekvenciou vlnenia platí

$$f = \frac{v}{\lambda} ,$$

je možné frekvenciu základného tónu vyjadriť ako

$$f = \frac{v}{2l} ,$$

po dosadení

$$f = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{2 \cdot 0,65 \text{ m}} = 261,5 \text{ Hz} .$$

9 Optika

9.1 Dve monochromatické rovinné elektromagnetické vlny s rovnakou frekvenciou, polarizované v rovnakej rovine, s amplitúdami $E_{01} = 5 \text{ V m}^{-1}$ a $E_{02} = 7 \text{ V m}^{-1}$ sa šíria v rovnakom smere vo vákuu. Vypočítajte výslednú intenzitu vlnenia, ak sú vlny a) nekoherentné b) koherentné a fázový posun medzi nimi je $\delta = \frac{\pi}{3}$.

a) Pri superpozícii nekoherentných vln je výsledná intenzita vlnenia rovná súčtu intenzít vlnení

$$I = I_1 + I_2 ,$$

z čoho vyplýva

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{01}^2 + \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{02}^2 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 (E_{01}^2 + E_{02}^2) ,$$

po dosadení

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \cdot [(5 \text{ V m}^{-1})^2 + (7 \text{ V m}^{-1})^2] = \\ &= 0,098 \text{ W m}^{-2} . \end{aligned}$$

b) Výsledná intenzita pri superpozícii dvoch koherentných vln bude

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta ,$$

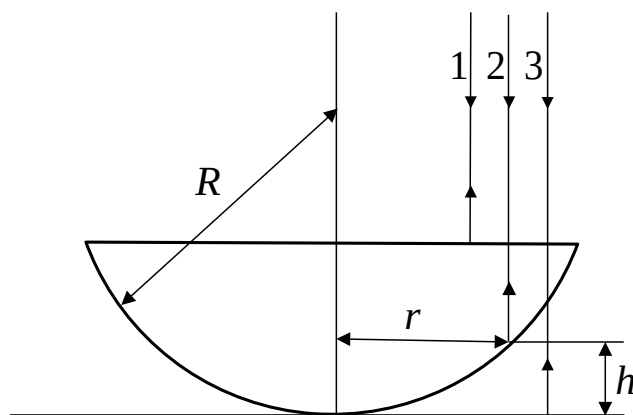
z čoho vyplýva

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{01}^2 + \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{02}^2 + c \epsilon_0 E_{01} E_{02} \cos \delta = \frac{1}{2} c \epsilon_0 (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01} E_{02} \cos \delta) ,$$

po dosadení

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \cdot [(5 \text{ V m}^{-1})^2 + (7 \text{ V m}^{-1})^2 + \\ &+ 2 \cdot 5 \text{ V m}^{-1} \cdot 7 \text{ V m}^{-1} \cdot \cos \frac{\pi}{3}] = 0,145 \text{ W m}^{-2} . \end{aligned}$$

9.2 Na rovinnú dosťičku je položená vypuklou plochou ploskovypuklá šošovka. Svetlo s vlnovou dĺžkou $\lambda = 598 \text{ nm}$ dopadá kolmo na ploskú stranu šošovky. V odrazenom svetle pozorujeme Newtonove krúžky. Polomer piateho tmavého krúžku je $r_5 = 5 \text{ mm}$. Vypočítajte polomer vypuklej plochy šošovky a polomer štvrtého tmavého krúžku.



Obr. 45

Časť dopadajúceho svetla na ploskú plochu šošovky sa od tejto plochy odrazí (lúč 1) a časť preniká do šošovky. Z prenikajúcej časti svetla sa časť svetla odrazí od vypuklej plochy šošovky (lúč 2) a časť preniká ďalej a odrazí sa až od rovinatej dosťičky (lúč 3). Lúč 1 neinterferuje ani s lúčom 2 ani lúčom 3, lebo ich dráhový rozdiel je väčší ako koherentná dĺžka svetla. Interferencia vzniká medzi lúčmi 2 a 3. Ich dráhový rozdiel je

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2},$$

pretože lúč 3 prešiel dvakrát vrstvou vzduchu s indexom lomu $n = 1$ a pri odraze od opticky hustejšieho prostredia na spodnej dosťičke došlo k zmene fázy o π , čo zodpovedá dráhovému rozdielu $\frac{\lambda}{2}$. Podmienka interferenčného minima je

$$2h + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Z Pytagorovej vety vyplýva

$$(R - h)^2 + r^2 = R^2,$$

z čoho je možné vyjadriť

$$r^2 = h(2R - h).$$

Pretože $h \ll R$, platí

$$r^2 = h(2R - h) \approx h2R,$$

z čoho vyplýva

$$h = \frac{r^2}{2R}.$$

Po dosadení do podmienky pre interferenčné minimum potom platí

$$r_m = \sqrt{mR\lambda},$$

z čoho je možné vyjadriť polomer šošovky ako

$$R = \frac{r_m^2}{m\lambda},$$

z hodnôt pre piate interferenčné minimum

$$R = \frac{r_5^2}{5\lambda}.$$

je možné vypočítať polomer šošovky

$$R = \frac{(5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{5 \cdot 598 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 8,36 \text{ m}.$$

Polomer štvrtého interferenčného minima

$$r_4 = \sqrt{4\lambda R},$$

po dosadení bude

$$r_4 = \sqrt{4 \cdot 598 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 8,36 \text{ m}} = 4,47 \text{ mm}.$$

9.3 Na rovinnú doštičku je položená vypuklou plochou ploskovypuklá šošovka. Svetlo dopadá kolmo na ploskú stranu šošovky. V odrazenom svetle pozorujeme Newtonove krúžky. Ak bude priestor medzi šošovkou a doštičkou vyplnený kvapalinou, polomer štvrtého tmavého krúžku bude rovnaký ako polomer tretieho tmavého krúžku, keď bol v priestore medzi šošovkou a doštičkou vzduch. Vypočítajte index lomu kvapaliny.

Keďže priestor medzi šošovkou a doštičkou vyplní kvapalina s indexom lomu n , bude rozdiel optických dráh lúčov odrazených od vypuklej časti šošovky a doštičky

$$\Delta = 2nh + \frac{\lambda}{2}.$$

Podmienka interferenčného minima je

$$2nh + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

pretože platí

$$h = \frac{r^2}{2R},$$

polomer m -tého tmavého krúžku bude

$$r_m = \sqrt{\frac{mR\lambda}{n}},$$

teda polomer štvrtého tmavého krúžku v prípade, že v priestore je kvapalina, bude

$$r_4 = \sqrt{\frac{mR\lambda}{n}}.$$

a polomer tretieho tmavého krúžku v prípade, že v priestore je vzduch, bude

$$r_3 = \sqrt{mR\lambda},$$

pretože pre vzduch $n = 1$. Z podmienky rovnosti polomerov

$$r_4 = r_3,$$

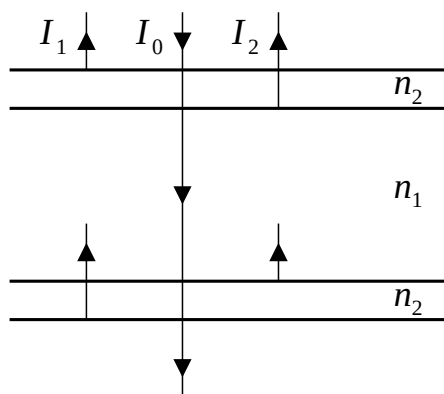
potom vyplýva

$$\sqrt{\frac{mR\lambda}{n}} = \sqrt{mR\lambda},$$

z čoho je možné vyjadriť index lomu kvapaliny

$$n = \frac{4}{3} \approx 1,33.$$

9.4 Na zabránenie strát svetla odrazom je sklenená doštička, ktorej index lomu je $n_1 = 1,66$, z oboch strán pokrytá tenkou krycou vrstvou priehľadnej látky. Aký musí byť index lomu krycej vrstvy a pri akej minimálnej hrúbke krycej vrstvy bude svetlo s vlnovou dĺžkou $\lambda = 520 \text{ nm}$ prechádzať cez doštičku bez strát. Predpokladajme, že svetlo dopadá na doštičku kolmo a straty absorpciou svetla sú zanedbatelné.



Obr. 46

Svetelné lúče, ktoré sú odrazené od krycej vrstvy a doštičky sú koherentné, lebo vznikli rozdelením jedného lúča a krycia vrstva je tenšia, ako koherentná dĺžka svetla. Svetlo bude prechádzať bez strát, ak sa intenzita odrazeného svetla rovná nule, to znamená

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) = 0 ,$$

kde intenzita svetla odrazená na rozhraní medzi vzduchom a krycou vrstvou je

$$I_1 = \left(\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}\right)^2 I_0 ,$$

a intenzita svetla odrazená na rozhraní medzi krycou vrstvou a doštičkou je

$$I_2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 (I_0 - I_1) \approx \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0 .$$

Intenzita odrazeného svetla sa bude rovnáť nule, ak sú zároveň splnené podmienky

$$I_1 = I_2 \quad \text{a} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) = -1 .$$

Z prvej podmienky vyplýva

$$\left(\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}\right)^2 I_0 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0 .$$

Pre index lomu krycej vrstvy musí preto platiť

$$n_2 = \sqrt{n_1} = \sqrt{1,66} = 1,30 .$$

Z druhej podmienky pre rozdiel optických dráh musí platiť

$$\Delta = (2m - 1)\frac{\lambda}{2} .$$

Keďže rozdiel optických dráh je

$$\Delta = 2hn_2 ,$$

pre hrúbku krycej vrstvy z toho vyplýva

$$h = \frac{(2m - 1)\lambda}{4n_1} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Najmenšia hrúbka krycej vrstvy bude pri $m = 1$, preto sa rovná

$$h_{min} = \frac{\lambda}{4n_1} = \frac{520 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{4 \cdot 1,30} = 100 \text{ nm} .$$

9.5 Keď na štrbinu dopadá kolmo rovnobežný zväzok fialového svetla s vlnovou dĺžkou $\lambda_1 = 420 \text{ nm}$, na tienidle vidieť stred druhého tmavého pásika pod uhlom $\alpha_1 = 4^\circ 53'$ od normály k rovine štrbiny. Pod akým uhlom bude vidieť stred tretieho tmavého pásika, ak osvetlíme štrbinu zeleným svetlom s vlnovou dĺžkou $\lambda_2 = 550 \text{ nm}$?

Pri ohybe svetla na štrbine vznikajú minimá na tienidle v miestach, pre ktoré platí

$$d \sin \alpha = k\lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots ,$$

preto pre druhé minimum svetla s vlnovou dĺžkou λ_1 platí

$$d \sin \alpha_1 = 2\lambda_1$$

a pre tretie minimum svetla s vlnovou dĺžkou λ_2 platí

$$d \sin \alpha_2 = 3\lambda_2 .$$

Vzájomným vydelením rovníc vznikne nová rovnica

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{2\lambda_1}{3\lambda_2} ,$$

z ktorej je možné vyjadriť

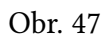
$$\sin \alpha_2 = \frac{3\lambda_2}{2\lambda_1} \sin \alpha_1 ,$$

po dosadení

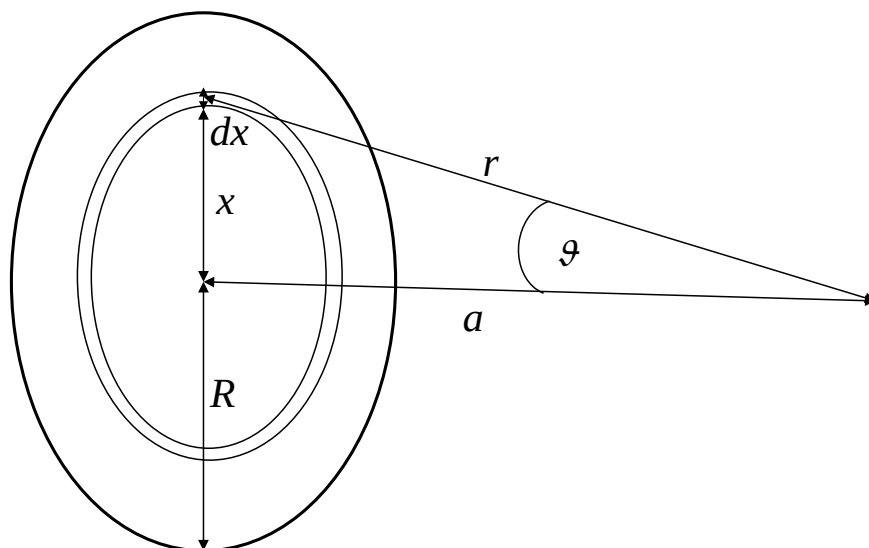
$$\sin \alpha_2 = \frac{3 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2 \cdot 420 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \cdot \sin 4^\circ 53' = 0,167 ,$$

čomu zodpovedá uhol

$$\alpha_2 = 9^\circ 37' .$$


$$E = \frac{\Phi}{S} .$$
$$\Phi = I\Omega \, ,$$
$$E = \frac{I\Omega}{S} \text{ .}$$
$$S = \Omega R^2,$$
$$E = \frac{I\Omega}{\Omega R^2} = \frac{I}{R^2},$$
$$E = \frac{20 \text{ cd}}{(2 \text{ m})^2} = 5 \text{ lx} .$$

9.7 Svetelný zdroj, ktorého jas je $L = 100 \text{ cd m}^{-2}$, má tvar kotúča s polomerom $R = 0,5 \text{ m}$. Vypočítajte intenzitu osvetlenia v bode, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti $a = 5 \text{ m}$ od stredu svetelného zdroja.



Obr. 48

Svetelný zdroj je možné rozdeliť na sústredné kruhové prstence s polomerom x a hrúbkou dx , ktorých plocha je

$$dS = 2\pi x dx .$$

Svietivosť prstenca v smere k danému bodu bude

$$dL_{\vartheta} = L dS \cos \vartheta = L 2\pi x dx \cos \vartheta$$

a intenzita osvetlenia, ktorú prstenec vytvára v danom bode bude

$$dE = \frac{\cos \vartheta}{r^2} L 2\pi x dx \cos \vartheta = \frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} L 2\pi x dx .$$

Vzdialenosť prstenca od bodu je

$$r = \sqrt{x^2 + a^2} ,$$

zároveň platí

$$\cos \vartheta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} ,$$

pomocou čoho je možné intenzitu osvetlenia, ktorú vytvára prstenec, vyjadriť ako

$$E = 2\pi La^2 \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

a intenzitu osvetlenia, ktorú vytvára celý svetelný zdroj, vypočítať integráciou

$$E = 2\pi La^2 \int_0^R \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \pi La^2 \left[-\frac{1}{x^2 + a^2} \right]_0^R = \frac{\pi LR^2}{R^2 + a^2},$$

po dosadení

$$E = \frac{\pi \cdot 100 \text{ cd m}^{-2} \cdot (0,5 \text{ m})^2}{(5 \text{ m})^2 + (0,5 \text{ m})^2} = 3,11 \text{ lx}.$$

9.8 Stena je osvetlená dvoma rovnakými žiarovkami vedľa seba vo vzdialenosti $d = 2 \text{ m}$ od steny. Keď jednu žiarovku vypneme, vypočítajte o akú vzdialenosť treba priblížiť ku stene druhú žiarovku, aby stena zostala rovnako osvetlená ako predtým.

Pre intenzitu osvetlenia plochy bodovým zdrojom, ktorého svietivosť je I , platí

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha.$$

Pretože vzdialenosť žiarovky od steny je d a svetelné lúče dopadajú kolmo na stenu $\alpha = 0^\circ$, bude intenzita osvetlenia steny od jednej žiarovky

$$E = \frac{I}{d^2}.$$

Pretože obidve žiarovky majú rovnakú svietivosť a nachádzajú sa v rovnakej vzdialenosti od steny, bude intenzita osvetlenia steny od dvoch žiaroviek

$$E_2 = 2E = \frac{2I}{d^2}.$$

Po vypnutí jednej žiarovky je potrebné presunúť druhú žiarovku do vzdialenosti x od steny, aby intenzita osvetlenia steny od jednej žiarovky

$$E_1 = \frac{I}{x^2}$$

zostala rovnaká, ako pri osvetlení dvoma žiarovkami

$$E_1 = E_2.$$

Teda musí platiť

$$\frac{I}{x^2} = 2 \frac{I}{d^2} ,$$

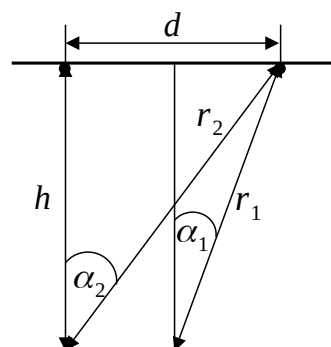
z čoho pre vzdialenosť žiarovky od steny vyplýva

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} ,$$

po dosadení

$$x = \frac{2 \text{ m}}{\sqrt{2}} = 1,41 \text{ m} .$$

9.9 Stôl je osvetlený dvoma žiarovkami, ktoré sú umiestnené na strope vo vzájomnej vzdialenosti $d = 1 \text{ m}$ a výške $h = 1,5 \text{ m}$ nad stolom. Svietivosť každej žiarovky je $I = 100 \text{ cd}$. Vypočítajte intenzitu osvetlenia a) na stole v strede medzi žiarovkami b) na stole priamo pod jednou zo žiaroviek.



Obr. 49

a) Na stole v strede medzi žiarovkami je intenzita osvetlenia od jednotlivých žiaroviek rovnaká

$$E_1 = E_2 = \frac{I}{r_1^2} \cos \alpha_1 .$$

Pretože platí

$$r_1 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

a zároveň

$$\cos \alpha_1 = \frac{h}{r_1} ,$$

bude intenzita osvetlenia od jednotlivých žiaroviek

$$E_1 = E_2 = \frac{Ih}{\left[h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Intenzita osvetlenia na stole v strede medzi žiarovkami bude súčtom intenzít osvetlenia od oboch žiaroviek

$$E = E_1 + E_2 = \frac{2Ih}{\left[h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

po dosadení číselných hodnôt

$$E = \frac{2 \cdot 100 \text{ cd} \cdot 1,5 \text{ m}}{\left[(1,5 \text{ m})^2 + \left(\frac{1 \text{ m}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 76 \text{ lx}.$$

b) V mieste na stole pod žiarovkou, bude intenzita osvetlenia od žiarovky, ktorá je priamo nad ňou

$$E_1 = \frac{I}{h^2}$$

a intenzita osvetlenia od vedľajšej žiarovky bude

$$E_2 = \frac{I}{r_2^2} \cos \alpha_2.$$

Pretože platí

$$r_2 = \sqrt{d^2 + h^2}$$

a zároveň

$$\cos \alpha_2 = \frac{h}{r_2},$$

je možné intenzitu osvetlenia od vedľajšej žiarovky vyjadriť ako

$$E_2 = \frac{Ih}{(d^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

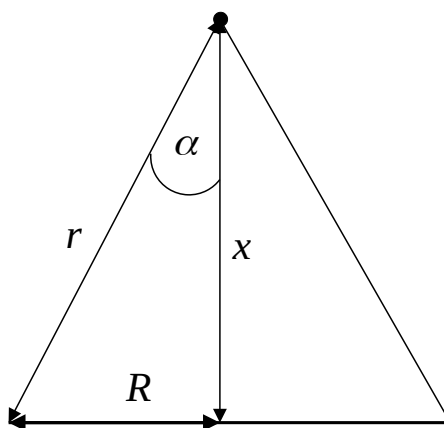
Intenzita osvetlenia na stole pod jednou zo žiaroviek bude súčtom intenzít osvetlenia od oboch žiaroviek

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I}{h^2} + \frac{Ih}{(d^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

po dosadení číselných hodnôt

$$E = \frac{100 \text{ cd}}{(1,5 \text{ m})^2} + \frac{100 \text{ cd} \cdot 1,5 \text{ m}}{[(1 \text{ m})^2 + (1,5 \text{ m})^2]^{\frac{3}{2}}} = 70 \text{ lx}.$$

9.10 V strede nad kruhovou doskou stola s polomerom $R = 80$ cm sa nachádza zdroj svetla so svietivosťou $I = 100$ cd. V akej výške nad stolom má byť umiestnený svetelný zdroj, aby intenzita osvetlenia okraja stola bola maximálna? Aká je maximálna intenzita osvetlenia okraja stola?



Obr. 50

Intenzita osvetlenia okraja stola je

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha .$$

Pretože platí

$$r^2 = R^2 + x^2 ,$$

zároveň

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} ,$$

intenzitu osvetlenia okraja stola je možné vyjadriť ako

$$E = \frac{Ix}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Extrém tejto funkcie musí spĺňať podmienku

$$\frac{dE}{dx} = 0 ,$$

z ktorej vyplýva

$$I \frac{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} 2x}{(R^2 + x^2)^3} = 0 .$$

Táto podmienka je splnená pre vzdialenosť svetelného zdroja od stola

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} ,$$

po dosadení

$$x = \frac{0,8 \text{ m}}{\sqrt{2}} = 0,57 \text{ m} ,$$

pri tejto vzdialenosti svetelného zdroja bude intenzita osvetlenia na okraji stola

$$E = \frac{100 \text{ cd} \cdot 0,57 \text{ m}}{[(0,8 \text{ m})^2 + (0,57 \text{ m})^2]^{\frac{3}{2}}} = 60 \text{ lx} .$$

Fyzikálne konštanty

- tiažové zrýchlenie: $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$
- gravitačná konštanta: $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- Avogadrova konštanta: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Boltzmannova konštanta: $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
- elementárny náboj: $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- elektrická konštanta: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
- magnetická konštanta: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$
- rýchlosť svetla vo vákuu: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
- polomer Zeme: $R_Z = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$
- hmotnosť Zeme: $M_Z = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Literatúra

1. Cyril Šťavina a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, Alfa, Bratislava 1985.
2. Ivan Baník, Jozef Zámečník, Jozefa Lukovičová, Juraj Veselský, Jozef Urbánek:
Fyzika: Zbierka úloh 1, STU, Bratislava 1993.
3. Jozef Zámečník, Ivan Baník, Jozefa Lukovičová, Juraj Veselský, Jozef Urbánek:
Fyzika: Zbierka úloh 2, STU, Bratislava 1993.
4. Viliam Laurinc a kol.: Fyzika I - Zbierka príkladov a úloh, STU, Bratislava 2000.
5. Oľga Holá a kol.: Fyzika II - Zbierka príkladov a úloh, STU, Bratislava 2002.
6. Július Cirák a kol.: Zbierka príkladov a úloh z fyziky, STU, Bratislava 2013.
7. Jozef Petráš, Ján Beňa, Viera Panáková, Jozef Szivós, Eva Griačová:
Fyzika I - Základný kurz pre poslucháčov Strojníckej fakulty, STU, Bratislava 1991.
8. Jozef Petráš, Cyril Šťavina, Jarolím Vaník:
Fyzika II - Základný kurz pre poslucháčov Strojníckej fakulty, STU, Bratislava 2002.
9. Juraj Dillinger, Peter Benco, Marta Kalužná: Fyzika I, STU, Bratislava 2006.
10. Ivan Baník, Marcela Chovancová, Jozef Zámečník:
Fyzika 1 - Mechanika a hydromechanika, STU, Bratislava 2007.
11. Dionýz Ilkovič: Fyzika I, Alfa, Bratislava 1972.
<https://www.ujfi.fei.stuba.sk/fyzika-ilkovic-fyzika-1.php>
12. Dionýz Ilkovič: Fyzika II, Alfa, Bratislava 1973.
<https://www.ujfi.fei.stuba.sk/fyzika-ilkovic-fyzika-2.php>
13. Vladimír Hajko, Juraj Daniel-Szabó: Základy fyziky, Veda, Bratislava 1983.

14. Július Krempaský: Fyzika - Príručka pre vysoké školy technické, Alfa SNTL, Bratislava 1987.
15. Richard Phillips Feynman, Robert Benjamin Leighton, Matthew Sands: Feynmanove prednášky z fyziky 1-5, ALFA, Bratislava 1986-1990.
<https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>
16. Ivan Červeň: Fyzika po kapitolách 1-13, STU, Bratislava 2007-2013.
17. Ivan Baník a kol.: Fyzika netradične 1, STU, Bratislava 2007.
18. Ivan Baník a kol.: Fyzika netradične 2, STU, Bratislava 2008.
19. Jozef Kúdelčík, Peter Hockicko: Základy fyziky, Žilinská univerzita, Žilina 2011.
https://hockicko.uniza.sk/Books/ZakladyFyziky_KudelcikHockicko.pdf
20. Vladimír Hajko a kol.: Fyzika v príkladoch, Alfa, Bratislava 1983.
21. Quido Jackuliak a kol.: Zbierka úloh z fyziky I, Žilinská univerzita, Žilina 2002.
<https://hockicko.uniza.sk/Books/fyzika1.pdf>
22. <https://www.sjf.stuba.sk/sk/ustavy/ustav-matematiky-a-fyziky/vyucba.html>

RNDr. Jozef Leja, PhD.

TECHNICKÁ FYZIKA

Zbierka riešených príkladov

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2023.

Edícia skrípt

Rozsah 136 strán, 50 obrázkov, 3,915 AH, 4,100 VH, 1. vydanie, edičné číslo 6174, tlač ForPress
NITRIANSKE TLAČIARNE, s. r. o.

85 – 236 – 2023

ISBN 978-80-227-5376-0