

SYMETRIA, KRÁSA A ÚŽITOK

Veronika Gáliková

Táto krátka rozprava o symetrii je myslená ako predstavenie rozsiahleho výskytu tohto javu. Práve tie veci, ktoré sa vyskytujú veľmi univerzálne, sú niekedy nepovšimnuté. V purpurovom svete by slovo purpur azda ani neexistovalo, lebo by to bol aspekt patriaci ku všetkému. Možno by sa zaviedlo, ak by existovali rôzne miery purpurovosti - a v niečom podobná je situácia so symetriou.

Ľudia si niekedy dávajú hádanky typu "Prečo je havran ako písací stôl" (Alica v krajine zázrakov), a sú radi, ak sa im podarí nájsť aspoň jeden zmysel v ktorom veci súvisia. Ohľadne symetrie je ťažko nájsť niečo, čo s ňou *nesúvisí*. (Dokonca aj ten havran a písací stôl majú okrem iného spoločné isté symetrie.). Poďme sa na tento rozšírený jav, tak často braný ako samozrejmosť, pozrieť trochu sústredenejšie. Nakoniec pravidlo "rozmyšľať hlboko nad jednoduchými vecami" požaduje práve toto - pozrieť sa nanovo na veci "notoricky známe".

1 Čo je symetria a prečo sa starať

Ťažko nájsť univerzálne prijatú definíciu niečoho tak rozšíreného v rozličných kontextoch. Pre účely tohoto nášho pojednania budeme symetriu chápať nasledovne:

Ak po prevedení určitej transformácie na systéme ostane nejaká jeho charakteristika zachovaná, je táto transformácia v danom ohľade symetriou a spomenutá charakteristika invariantom.

Prečo sa o symetrie zaujímať:

- Hojný výskyt symetrií naznačuje možnosť siahnuť na nejaký hlboký, spoločný princíp, vlastný mnohým javom.
- Máme sklon ich rozpoznávať. Využime talent, ak nejaký máme. Hľadať stratené kľúče tam, kde je tráva najnižšia a osvetlenie najlepšie, nie je zlá stratégia, ak nevieme, kde sme ich stratili. Tam kde je viac svetla, máme aspoň šancu hľadanú vec nájsť, ak tam je.
- Aj bez toho, aby sme im celkom rozumeli, už sa ukázali ako náramne pekné a užitočné: sprevádzajú ich vzory a pravidelnosti ktoré umožňujú klasifikáciu (poriadok v systéme) objektov, komprimáciu dát, súvisia so zákonmi zachovania. Ťažko adekvátne zdôrazniť, aké dopady má tento aspekt napríklad na fyziku - zlepšuje predpovednú schopnosť teórií a je akýmsi mostom k ich rozšíreniu.

2 Očividné a inak viditeľné

Pozrime sa najprv na typické príklady symetrie, vo všeobecnosti často spájané s týmto javom vďaka vizuálnemu prejavu. Na obrázkoch nižšie máme tri systémy: motýľ, snežienka a kvet pakostu. Na každom z týchto objektov možno previesť istú transformáciu bez toho, aby sme obrázok vizuálne zmenili. Takými transformáciami je pootočenie snežienky o celočíselný



násobok tretiny celej otáčky, pootočenie pakostu o celočíselný násobok päťtiny celej otáčky, pootočenie motýľa o celočíselný násobok celej otáčky, zrkadlové "preklopenie" týchto objektov vzhľadom na isté osi. Pri motýľovi je to os prechádzajúca pozdĺžne jeho telom, pri kvietkoch je takýchto osí viac.

Čitateľa azda zarazí uvedenie "celej otáčky" ako symetrie. Veď je to také samozrejmé ... nie je azda podoba všetkého "imúnna", invariantná voči takejto transformácii? Toto pripomína "purpurovosť" v purpurovom svete zmienenú v úvode ¹. Tofko vecí je invariantných, symetrických v zmysle jednej otáčky o 360° ... To však neznačí nezaujímavosť takejto transformácie, ale fakt že súvisí so symetriou niečoho, čo je spoločné všetkým tým veciam, čo boli vzhľadom na ňu invariantné. So symetriou samotného priestoru! Toto je "purpur" v zmysle nášho podobenstva z úvodu, a skúmanie jeho "samozrejmostí" už prinieslo pár vytriezvení z predstáv, ako samozrejmostiam rozumieme (antihmota a jej pomer k hmote je len jeden z príkladov).

Postúpme k ďalším typom symetrie, azda menej známym pod týmto menom:



Každé mačiatko je približne osovo symetrické ("zrkadlovým" spôsobom), ale uvažujme ako systém nie jedno zvieratko, ale celú svorku. Sú tu potom ďalšie operácie ktoré možno previesť a pritom približne zachovať obrázok ako je. Možno vymeniť dvojčky podobných mačiatok - dve sivé v strede alebo dve hnedé vpravo. Takémuto poprehadzovaniu poradia sa hovorí permutácia. Nie každá permutácia je v tomto prípade symetriou; keby sme permutovali rôz-

¹Ale s tým rozdielom že náš svet ani nie je celý purpurový. Sú objekty ktoré treba otočiť o dvakrát "celú otáčku", aby operácia bola symetriou. Ale to je príbeh o ktorom treba azda pojednať podrobnejšie inokedy.

nofarebné mačiatka, zmena obrázka by bola badateľná.

Symetria sa oddávna spája s krásou, a treba sa zamyslieť, akú rôznorodú symetriu vnímame ako krásnu. Predstavme si líku plnú margarétok, alebo obilné pole. Jednotlivé kvietky alebo klasy majú svoje geometrické symetrie, ktoré prispievajú svojim dielom k celej nádhere, ale je tu ešte aj (okrem mnohého iného) permutačná symetria, ktorú málokedy explicitne spomenieme, ale azda má podiel na tom, že krása poľa či líky je viac ako len suma krás jednotlivých prvkov. A tu je aj náznak javu "emergencie" o ktorom sa vedú debaty medzi vednými odborníkmi². V našom prípade je to otázka toho, či na základe vlastností komponent - jednotlivých margarétok, travín atď. vieme povedať všetko o celku (líke). Tu to vyzerá že nie. Permutačná symetria kytice sa nepopíše na základe znalosti symetrie jednotlivých margarétok - dá sa považovať za vlastnosť celku o ktorej ani nebolo ako hovoriť jazykom jednotlivých častí. Alebo sme medzi časti nezahrnuli všetko.

3 Hon za krásou

Symetrie nielen objavujeme ako krásu, ale ich princípy používame keď chceme niečo krásne vytvoriť. V klasickom umení je spojenie obzvlášť výrazné.



Najprv sa pozrime na vizuálnu, geometrickú symetriu v umení. Rozličné staré stavby oplývajú mnohorakou symetriou. Táto bola často volená aj z praktických dôvodov. Keďže sily pôsobiace na stavbu vykazujú určité symetrie, zrkadlia sa tieto aj v kompenzácii týchto síl oporným systémom stavby - usporiadaním múrov, slúpov, nosníkov, oblúkov atď. Tento oporný systém, prispôbený symetrii vplyvov pôsobiacich na stavbu, sa tak aj sám stáva ozdobou.

Keď Michelangelo predstavil svoje veľdielo - Pietu, ľudia sa pozastavovali nad mladistvým vzhľadom Božej Matky. Poznamenajme tu čosi ohľadne znázornenia tejto mladistvosti. Veľmi k nej prispieva fakt, že tvár Panny Márie je takmer dokonale symetrická, ako tomu býva u veľmi mladých ľudí. Keď sa bunkám darí, darí sa im symetricky. Problémy nastávajú nerovnomerne - drobné úrazy s jazvami, poškodené zásobovanie živinami či prasknuté žilky, ... a pravdepodobnosť, že niečo také nastane, sa u nás kumuluje s časom.

V literatúre je symetria tiež do istej miery vizuálna - aj akustická či pojmová... Predstavme si napríklad báseň s viazaným veršom. Aj cudzinec neovládajúci jazyk v ktorom je napísaná

²veľmi zhruba napríklad o tom či biológia je len aplikovaná chémia a chémia len rozvinutá fyzika atómového obalu a podobne

si môže všimnúť istú periodicitu - a periodicitu je symetriou. Prílušnou transformáciou, ktorá "nejaký aspekt zachováva" je posunutie sa o verš či niekoľko veršov ďalej, a zachovávajúc sa vec môže byť kombinácia hlások na konci, alebo aj melódia celého verša a pod. Mnoho umeleckých prostriedkov v literatúre využíva symetriu v abstraktnejšom zmysle - napríklad prirovnanie, paralela, podobenstvo nám poskytujú ako systém dve porovnávané veci či situácie, a prechod od jednej k druhej zachová to, čo majú spoločné, čím sa podobajú.

S hudbou a tancom je to podobné ako s básňami a ďalšími umeleckými prejavmi používajúcimi periodicitu- refrény, opakujúce sa motívy a pod. sú istým druhom symetrie (a nie jediným ktorý sa tu dá nájsť).



4 Architektúra na oblohe

Spomenuli sme v súvislosti so starými stavbami, ako ich oporný systém zohľadňoval symetrie vonkajších vplyvov. Pozrime sa teraz na takéto "vplyvy", sily v prírode. Nielen štruktúry postavené človekom vykazujú symetrie - tieto sa odrážajú v tvare hviezd, slnečnej sústavy a galaxií, snehových vločiek a hladiny mora...



Jedným z najnápadnejších tvarov v slnečnej sústave je súbor do seba vložených koncentrických sférických vrstiev, "obálok" dohromady tvoriacich guľu. Takýto tvar má Slnko, Mesiak,

planéty... Zloženie sa mení v závislosti od vzdialenosti r od stredu. Jednotlivé vrstvy sa líšia materiálom, teplotou, hustotou ... Materiál v rámci jednej takejto škrupinky je približne rovnaký do všetkých smerov (napr. Zem tvorí výnimku čo sa týka vrstvy posledných niekoľko kilometrov pri povrchu). Teda je tu rotačná symetria, odraz symetrie Newtonovho gravitačného zákona podľa ktorého častica hmotnosti m patriaca do škrupinky s polomerom r podlieha gravitačného vplyvu hmoty M v guľi ohraničenej touto škrupinkou:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Sférická symetria nebeských telies je očividná; všimnúť si symetriu na úrovni matematickej formulky je niekedy trochu menej samozrejmé, pretože to vyžaduje všimnúť si na čom z hľadiska skúmaného javu *nezáleží*. Ak napríklad zmeníme vzdialenosť od stredu r , sila bude iná - na zmene vzdialenosti od stredu z hľadiska veľkosti sily záleží. Ale ak prevedieme rotáciu a porovnáme veľkosť sily na dvoch miestach v rovnakej vzdialenosti od stredu, len pootočených jedno vzhľadom na druhé (sférické súradnice θ , ϕ sú rôzne pre dané miesta), veľkosť sily ostáva rovnaká, je to z hľadiska takýchto transformácií *invariant*. Keďže na natočení z hľadiska veľkosti sily *nezáleží*, body líšiace sa len takouto symetrickou transformáciou sú z hľadiska daného invariantu *ekvivalentné*.

Skúmanie symetrií vyžaduje niekedy takéto "čítanie medzi rovnosťami" a potom správnu interpretáciu, čo je vec cviku a poznania istých matematických trikov. Upozorníme napríklad, že ak formulka mlčí o nejakej veličine, stále s ňou môže mať veľa spoločné, pretože veličina tam môže byť skryto vyjadrená cez iné. Napríklad v našej formulte pre veľkosť sily nevystupuje explicitne kartézská súradnica x - ale je tam skryto vo vzdialenosti r . A opačne, ak aj formulka hovorí explicitne o nejakých veličinách, neznamená to, že žiadna ich zmena nemôže byť symetriou. Napríklad vzorec pre veľkosť gravitačnej sily je možné napísať aj v kartézskych súradniciach, teda ako

$$F = G \frac{Mm}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Všetky kartézské súradnice x, y, z tu explicitne vystupujú, a je pravda, že zmena ktorejkoľvek jednej z nich nie je symetriou čo sa veľkosti sily týka. Ale existuje celá trieda špeciálne koordinovaných zmien týchto súradníc (rotácie), kde zmena jednej kompenzuje zmenu inej práve tak, aby sa zachovala kombinácia $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ relevantná pre veľkosť sily - a teda aby sa aj táto zachovala.

Poučením okrem iného je, že rozpoznať symetriu nie je celkom triviálna vec. Existujú súbory matematických nástrojov užitočných pri love symetrií. Niekoľko ich je spomenutých ďalej v tomto texte. Ak sa človek s obmedzenými časovými možnosťami rozhoduje do ktorej partie matematiky investovať čas, štúdium pojmov ako symetria, ekvivalencia a invariant je konzervatívna voľba s takmer istým výnosom, vzhľadom na to že v súčasnej fyzike tieto pojmy súvisia prakticky so všetkým.

5 Poézia periodickej tabuľky

Symetrie by sme teda mohli zmieniť v súvislosti s každou partiou fyziky. A nielen tej. Chémia má ako svoju základnú zbierku dát periodickú tabuľku prvkov. Vzory a pravidelnosti v týchto

dátach sú jav doteraz plne nepopísaný. Snáď kdesi v matematickej divočine ešte nenarušenej ľudskými snahami čakajú rovnice ktorých symetrie zrkadlia aspoň čiastočne pravidlá elektrónových orbitalov. Ale zatiaľ sa podarilo nájsť rovnicu, ktorá takúto úlohu v prijateľne plní, iba pre prvý prvok, vodík. Na jej základe sa dá čosi usúdiť aj o ostatných, a do istej miery takéto približné úvahy fungujú. Elektrónové konfigurácie atómových obalov sa však dajú reprezentovať istými modelmi aj bez toho, aby nám bolo o nich všetko jasné - nakoniec ani pre ten prvý vodík nám všetko jasné nie je. S uvedeným upozornením, že sa pohybujeme na nevelmi porozumenej pôde, poďme rázne poobdivovať prvky v tabuľke.

1

2

1

H

1.008

Hydrogen

2

He

4.003

Helium

3

Li

6.941

Lithium

4

Be

9.012

Beryllium

11

Na

22.990

Sodium

12

Mg

24.305

Magnesium

19

K

39.098

Potassium

20

Ca

40.078

Calcium

27

Co

58.933

Cobalt

28

Ni

58.693

Nickel

35

Br

79.904

Bromine

36

Kr

84.80

Krypton

43

Tc

98.907

Technetium

44

Ru

101.07

Ruthenium

51

Sb

121.760

Antimony

52

Te

127.6

Tellurium

59

Pr

140.908

Praseodymium

60

Nd

144.24

Neodymium

67

Ho

164.930

Holmium

68

Er

167.26

Erbium

75

Re

186.207

Rhenium

76

Os

190.23

Osmium

83

Bi

208.980

Bismuth

84

Po

(209)

Polonium

91

Pa

231.036

Protactinium

92

U

238.029

Uranium

99

Es

[254]

Einsteinium

100

Fm

257.095

Fermium

107

Bh

[269]

Bohrium

108

Hs

[271]

Hassium

115

Uup

[294]

Ununpentium

116

Lv

[296]

Livermorium

113

Nh

[291]

Nihonium

114

Fl

[293]

Flerovium

119

Uuo

[299]

Ununoctium

120

Uus

[298]

Ununseptium

127

I

126.904

Iodine

128

Xe

131.29

Xenon

135

At

209

Astatine

136

Rn

222.018

Radon

151

Lu

174.967

Lutetium

152

Yb

173.04

Ytterbium

159

La

138.905

Lanthanum

160

Ce

140.115

Cerium

167

Ho

164.930

Holmium

168

Er

167.26

Erbium

175

Lu

174.967

Lutetium

176

Yb

173.04

Ytterbium

183

La

138.905

Lanthanum

184

Ce

140.115

Cerium

191

La

138.905

Lanthanum

192

Ce

140.115

Cerium

199

La

138.905

Lanthanum

200

Ce

140.115

Cerium

207

La

138.905

Lanthanum

208

Ce

140.115

Cerium

215

La

138.905

Lanthanum

216

Ce

140.115

Cerium

223

La

138.905

Lanthanum

224

Ce

140.115

Cerium

231

La

138.905

Lanthanum

232

Ce

140.115

Cerium

239

La

138.905

Lanthanum

240

Ce

140.115

Cerium

247

La

138.905

Lanthanum

248

Ce

140.115

Cerium

255

La

138.905

Lanthanum

256

Ce

140.115

Cerium

263

La

138.905

Lanthanum

264

Ce

140.115

Cerium

271

La

138.905

Lanthanum

272

Ce

140.115

Cerium

279

La

138.905

Lanthanum

280

Ce

140.115

Cerium

287

La

138.905

Lanthanum

288

Ce

140.115

Cerium

295

La

138.905

Lanthanum

296

Ce

140.115

Cerium

303

La

138.905

Lanthanum

304

Ce

140.115

Cerium

311

La

138.905

Lanthanum

312

Ce

140.115

Cerium

319

La

138.905

Lanthanum

320

Ce

140.115

Cerium

327

La

138.905

Lanthanum

328

Ce

140.115

Cerium

335

La

138.905

Lanthanum

336

Ce

140.115

Cerium

343

La

138.905

Lanthanum

344

Ce

140.115

Cerium

351

La

138.905

Lanthanum

352

Ce

140.115

Cerium

359

La

138.905

Lanthanum

360

Ce

140.115

Cerium

367

La

138.905

Lanthanum

368

Ce

140.115

Cerium

375

La

138.905

Lanthanum

376

Ce

140.115

Cerium

383

La

138.905

Lanthanum

384

Ce

140.115

Cerium

391

La

138.905

Lanthanum

392

Ce

140.115

Cerium

399

La

138.905

Lanthanum

400

Ce

140.115

Cerium

407

La

138.905

Lanthanum

408

Ce

140.115

Cerium

415

La

138.905

Lanthanum

416

Ce

140.115

Cerium

423

La

138.905

Lanthanum

424

Ce

140.115

Cerium

431

La

138.905

Lanthanum

432

Ce

140.115

Cerium

439

La

138.905

Lanthanum

440

Ce

140.115

Cerium

447

La

138.905

Lanthanum

448

Ce

140.115

Cerium

455

La

138.905

Lanthanum

456

Ce

140.115

Cerium

463

La

138.905

Lanthanum

464

Ce

140.115

Cerium

471

La

138.905

Lanthanum

472

Ce

140.115

Cerium

479

La

138.905

Lanthanum

480

Ce

140.115

Cerium

487

La

138.905

Lanthanum

488

Ce

140.115

Cerium

495

La

138.905

Lanthanum

496

Ce

140.115

Cerium

503

La

138.905

Lanthanum

504

Ce

140.115

Cerium

511

La

138.905

Lanthanum

512

Ce

140.115

Cerium

519

La

138.905

Lanthanum

520

Ce

140.115

Cerium

527

La

138.905

Lanthanum

528

Ce

140.115

Cerium

535

La

138.905

Lanthanum

536

Ce

140.115

Cerium

543

La

138.905

Lanthanum

544

Ce

140.115

Cerium

551

La

138.905

Lanthanum

552

Ce

140.115

Cerium

559

La

138.905

Lanthanum

560

Ce

140.115

Cerium

567

La

138.905

Lanthanum

568

Ce

140.115

Cerium

575

La

138.905

Lanthanum

576

Ce

140.115

Cerium

583

La

138.905

Lanthanum

584

Ce

140.115

Cerium

591

La

138.905

Lanthanum

592

Ce

140.115

Cerium

599

La

138.905

Lanthanum

600

Ce

140.115

Cerium

607

La

138.905

Lanthanum

608

Ce

140.115

Cerium

615

La

138.905

Lanthanum

616

Ce

140.115

Cerium

623

La

138.905

Lanthanum

624

Ce

140.115

Cerium

631

La

138.905

Lanthanum

632

Ce

140.115

Cerium

639

La

138.905

Lanthanum

640

Ce

140.115

Cerium

647

La

138.905

Lanthanum

648

Ce

140.115

Cerium

655

La

138.905

Lanthanum

656

Ce

140.115

Cerium

663

La

138.905

Lanthanum

664

Ce

140.115

Cerium

671

La

138.905

Lanthanum

672

Ce

140.115

Cerium

679

La

138.905

Lanthanum

680

Ce

140.115

Cerium

687

La

138.905

Lanthanum

688

Ce

140.115

Cerium

695

La

138.905

Lanthanum

696

Ce

140.115

Cerium

703

La

138.905

Lanthanum

704

Ce

140.115

Cerium

711

La

138.905

Lanthanum

712

Ce

140.115

Cerium

719

La

138.905

Lanthanum

720

Ce

140.115

Cerium

727

La

138.905

Lanthanum

728

Ce

140.115

Cerium

735

La

138.905

Lanthanum

736

Ce

140.115

Cerium

743

La

138.905

Lanthanum

744

Ce

140.115

Cerium

751

La

138.905

Lanthanum

752

Ce

140.115

Cerium

759

La

138.905

Lanthanum

760

Ce

140.115

Cerium

767

La

138.905

Lanthanum

768

Ce

140.115

Cerium

775

La

138.905

Lanthanum

776

Ce

140.115

Cerium

783

La

138.905

Lanthanum

784

Ce

140.115

Cerium

791

La

138.905

Lanthanum

792

Ce

140.115

Cerium

799

La

138.905

Lanthanum

800

Ce

140.115

Cerium

807

La

138.905

Lanthanum

808

Ce

140.115

Cerium

815

La

138.905

Lanthanum

816

Ce

140.115

Cerium

823

La

138.905

Lanthanum

824

Ce

140.115

Cerium

831

La

138.905

Lanthanum

832

Ce

140.115

Cerium

839

La

138.905

Lanthanum

840

Ce

140.115

Cerium

847

La

138.905

Lanthanum

848

Ce

140.115

Cerium

855

La

138.905

Lanthanum

856

Ce

140.115

Cerium

863

La

138.905

Lanthanum

864

Ce

140.115

Cerium

871

La

138.905

Lanthanum

872

Ce

140.115

Cerium

879

La

138.905

Lanthanum

880

Ce

140.115

Cerium

887

La

138.905

Lanthanum

888

Ce

140.115

Cerium

895

La

138.905

Lanthanum

896

Ce

140.115

Cerium

903

La

138.905

Lanthanum

904

Ce

140.115

Cerium

911

La

138.905

Lanthanum

912

Ce

140.115

Cerium

919

La

138.905

Lanthanum

920

Ce

140.115

Cerium

927

La

138.905

Lanthanum

928

Ce

140.115

Cerium

935

La

138.905

Lanthanum

936

Ce

140.115

Cerium

943

La

138.905

Lanthanum

944

Ce

140.115

Cerium

951

La

138.905

Lanthanum

952

Ce

140.115

Cerium

959

La

138.905

Lanthanum

960

Ce

140.115

Cerium

967

La

138.905

Lanthanum

968

Ce

140.115

Cerium

975

La

138.905

Lanthanum

976

Ce

140.115

Cerium

983

La

138.905

Lanthanum

984

Ce

140.115

Cerium

991

La

138.905

Lanthanum

992

Ce

140.115

Cerium

999

La

138.905

Lanthanum

1000

Ce

140.115

Cerium

1007

La

138.905

Lanthanum

1008

Ce

140.115

Cerium

1015

La

138.905

Lanthanum

1016

Ce

140.115

Cerium

1023

La

138.905

Lanthanum

1024

Ce

sciennotes.org/printable-periodic-table

Je tu opäť množstvo symetrií. Aká poetická by mala byť veda ktorej základné dáta sú uložené vo veršoch rýmujúcich sa po celej dĺžke: riadky tabuľky javia opakujúce sa štruktúry nielen na konci, v poslednom stĺpci, ale vo všetkých! Obaly atómov v jednom stĺpci majú rovnaké "koncovky", počet valenčných elektrónov. Postupom k prvkom s vyšším počtom elektrónov sledujeme aj pribúdanie "refrénov", typov orbitalov v ďalších a ďalších energetických vrstvách.

A to sme ešte len pri prvkoch - vlastne prevažne pri ich obaloch. Jadrové štruktúry, usporiadania nukleónov vytvárajú ďalšie aspekty celej skladby, nepochybne dokonale zladené s tými obalovými, akurát o nich vieme ešte menej.

Aj na druhej strane škály, väčšej ako obaly jednotlivých atómov, vo svete chemických ("obalových") interakcií, sa vytvárajú štruktúry s ďalšími symetriami o ktorých nemalo zmysel hovoriť na úrovniach menších ako molekuly. O týchto tiež vieme menej ako tam je.

6 Je celok len sumou častí?

Symetria môže byť charakteristikou určitej rodiny objektov, nie nevyhnutne jednotlivých členov.

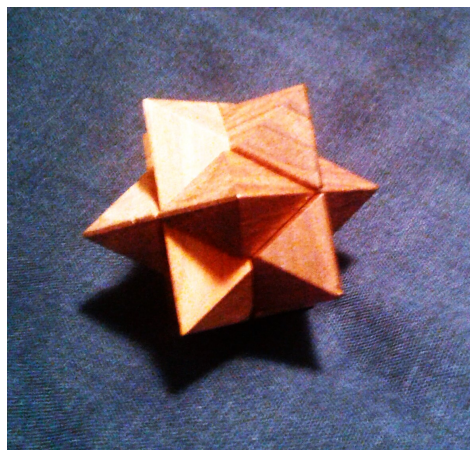
Vráťme a ešte k tomu najjednoduchšiemu atómu - vodíku. Bez zachádzania do technicalít výpočtov, pripomeňme že jeho jediný elektrón sa pohybuje v poli jeho jediného protónu. Pole budené protónom je sféricky symetrické, ako bolo zakódované už v Coulombovom zákone pre klasickú elektrostatickú interakciu. Odkiaľ sa potom berú orbitály vyšších excitovaných stavov elektrónu v poli protónu - ktoré jednotlivo nemusia sférickú symetriu vykazovať?

Táto otázka nás privádza k symetrii vyskytujúcej sa ako charakteristika rodiny objektov (v našom prípade všetkých riešení Schroedingerovej rovnice, resp. k symetrii tejto rovnice samotnej), nie nevyhnutne jednotlivých členov (tu: jednotlivých riešení). Rodina všetkých možných orbitalov dohromady vykazuje aj symetrie, ktoré sa jednotlivým členom pripísať nedajú. Kvantové orbitály sú vec nebezpečná na vizuálne interpretácie, ale tu sa môžeme odkázať na fakt, že aj newtonovská gravitačná interakcia vykazovala podobný jav. Intenzita gravitačného poľa povedzme Slnka je sféricky symetrická - ale poloha planéty v každom jednotlivom čase vyberá význačný smer od Slnka, teda narúša symetriu. Podstatné je, že celá orbita už isté symetrie má, a súbor všetkých možných orbít (aj keď touto planétou nezrealizovaných) má symetrie ako zákon ktorým sa riadia.

Vezmime ešte názornejšiu situáciu: jednotlivé lupienky sedmokrásy nemajú symetriu, ktorú vykazuje ich rodina - celý kvet. Týmto sa pridáva ďalší argument pre jav "emergencie" spomínaný v predošlých odsekoch. Vyzerá to tak, že vlastnosti celku ťažko všetky vysvetliť iba na základe vlastností častí. Minimálne nie v zmysle takých častí a takých vlastností, s akými tu narábame. Otázka, či existuje nejaký zmysel, v ktorom spomenutý redukcionizmus (redukujúci celok na sumu častí) funguje, ide ďaleko za rámec tohto textu a pojmu symetrie. Totiž môže byť jeden základný princíp za všetkým, ale nevyzerá to tak, že by sa skúmaním jednotlivostí ako častice, interakcie a pod. dal celý preskúmať. Či sa dá preskúmať skúmaním celku je ťažko povedať, kým si neujasníme, čo všetko do celku patrí.



Obr. 1: lupene, orbitály, riešenia



Obr. 2: kvet, atóm, rovnica

7 Objav či predpoklad symetrie?

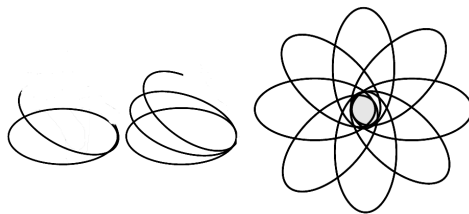
Povedali sme si, že mnoho objektov a javov v prírode vykazuje isté pravidelnosti. Nie všetky vidíme a rozoznávame na prvý pohľad. Pri štúdiu prírodných úkazov a našich pokusoch popisovať ich matematickými modelmi nastávajú rozličné situácie:

- **Objav** (symetria a posteriori): Začíname s istým modelom a symetria je rozpoznaná ako jeho črta. Napríklad ak máme nejakú rovnicu, povedzme empiricky získanú, a rozpoznáme že má nejaké symetrie, potom sa nám na ich základe ponúkajú rozličné triky na jej riešenie. Prepis do "vhodne zvolených" súradníc je len jedným z nich.
- **Predpoklad** (symetria a priori): Začíname s predpokladom, že skúmaný jav vykazuje nejakú konkrétnu symetriu a matematický model budujeme s týmto predpokladom. Napríklad ansatz pre Maxwellovo rozdelenie rýchlostí molekúl, Lagranžian pre štandardný model časticovej fyziky, Schwarzschildova alebo FLRW metrika boli navrhnuté s ohľadom na predpokladané symetrie systémov, ktoré popisujú.
- **Kombinácia** vyššie uvedeného. Spomeňme si na symbolické obrázky drevenej skladačky vyššie. Jednotlivé kúsky majú isté osové symetrie; ak máme všetky poruke a ak ich poskladáme správne, výsledná hviezdica má ešte ďalšie symetrie o ktorých nemohla byť reč na úrovni jednotlivých častí. Vo fyzike sme často v situácii keď nám nie je ani jasné čo všetko vôbec patrí do abstraktnej "skladačky", teda či máme všetky dieliky v rukách, ani akú symetriu má vykazovať výsledný systém. Postupujeme metódou pozri-skús-oprav-hľadaj (ďalšie dieliky) - hádaj (ďalšie symetrie ktoré zatiaľ nevidno) a nepredstieraj, že si už videl všetko.

8 Nerobiť závery pred koncom

Pri hľadaní pravidelností v prírode sa často používa estetické hľadisko. Spomeňme si v tejto súvislosti na dávny príbeh, keď sa objavil Keplerov model slnečnej sústavy. Predpokladali sa kruhové orbity a súvislosť s "hudbou sfér" v ktorých by ležali. Kruhové orbity sa považovali za mimoriadne krásne a dokonalé. Teda, ak už krivka má mať krivosť, tak všade rovnakú. Poniektorí azda privítali elipsy s akýmsi rozčarovaním. A to ešte nie celkom uzavreté elipsy, vzhľadom na pozorované stáčanie perihélia!

Eliptickosť a neuzavretosť orbít by však asi nepovažovali za estetickú chybu ani ľudia s veľmi tvrdohlavými a konvenčnými predstavami o tom čo je pekné, ak by sa na pohyb planéty pozerali dostatočne dlho a z dostatočného nadhľadu.

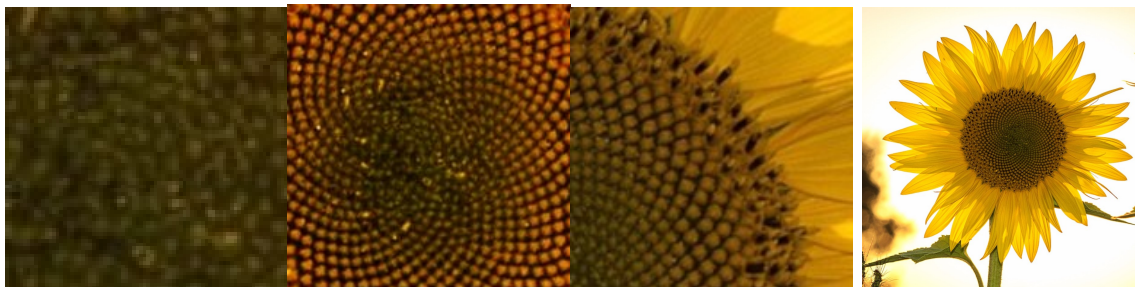


Vykreslený slnečnoplanetárny kvietok nie je menej pekný ako mnohokrát obehnutá kružnica.

A ak zvážime ešte širšie hľadisko (a väčší nadhľad), pripomenieme si relativitu a súvis gravitácie a geometrie, pridáme k tvrdeniu, že planéta vlastne ide rovno v rámci časopriestoru.

Nejdeme tvrdiť, že všeobecná relativita je už posledné slovo vo fyzike, veľmi pravdepodobne nie. Fyzika je mladá veda a zdanie že je pokročilá je relatívne. Ale už sa pestuje dosť dlho na to, aby nám aj ona poskytla pár náznakov, že ak sa nám niečo v prírode javí ako "nie také pekné ako by mohlo byť", je to pravdepodobne preto že buď máme mizerný vkus, alebo sme ešte nevideli celý obraz.

Predstavme si lienku v strede kvetu slnečnice, ako skúma systém okolo seba. V najbližšom okolí niekoľkých milimetrov vidí čosi ako na prvom obrázku nižšie. Je tu istá periodicita, azda trochu rotačnej symetrie jednotlivých zrníek. Keď sa jej podarí preskúmať trochu viac, povedzme tak 5-7 cm okolo stredu, objaví krásne špirály a azda Fibonacciho postupnosť s nimi spojenú. Možno už začne robiť ich extrapolácie a má pripravené predpovede aké veľké zrnká akých tvarov očakávať vo vzdialenosti povedzme dva metre od stredu. Vyberie sa teda sebavedome pozdĺž jednej zo špirál overiť svoje predpovede ... a narazí na akúsi štruktúru novej farby aj textúry - a predpokladá že svet predsa len nie je taký "pekne usporiadaný" ako sa zdalo. Keď však poodstúpi do vzdialenosti tých zmienovaných dvoch metrov, azda v inom smere ako plánovala, vidí novú symetriu o ktorej predtým nevedela nič. A čo ešte keď uvidí celé pole.



Toto podobenstvo stále operuje s vizuálnymi symetriami. Avšak do "nadhľadu z ktorého vidno viac" spadá nielen doslovné poodstúpenie pár krokov, ale aj celkový posun uvažovania, azda k iným pojmom ako máme zaužívané. Toto platí pre mnoho spôsobov poznávania. Vo fyzike sa takým nadhľadom môže ukázať skúmanie situácie vo fázovom priestore namiesto konfiguračného; v zakrivenom časopriestore namiesto euklidovského priestoru; zahrnutie viacerých komponentov do systému namiesto ich umelého vynechávania ak bytostne patria k sebe atď. Niekedy to chce geniálne jednoduchý nápad, a potom často ovládanie matematického aparátu ktorý by pomohol previesť kvalitatívny nápad na kvantitatívne overiteľné predpovede. A občas znalosť matematického aparátu môže inšpirovať aj ku kvalitatívnym nápadom.

9 Matematický arzenál

Spomenuli sme matematický aparát na uchopenie symetrií vo fyzike. Vzhľadom na to, ako veľmi sa ich skúmanie osvedčilo ako zdroj nových poznatkov, aj príslušný aparát bol aktívne rozvíjaný. Spomeňme tu aspoň kľúčové slová, s ktorými sa čitateľ môže vydať na prieskum matematických a fyzikálnych oblastí za účelom štúdia symetrií.

Transformácie - tu obvykle značia prechod od jedného objektu k inému. Napríklad od sady kartézskych súradníc k sade sférických, alebo od jedného atómového orbitalu k inému, alebo od jedného stavu systému k inému (časový vývoj je teda tiež transformáciou). Ak tieto niečo zachovávajú (teda napriek tomu že transformácia na systéme bola prevedená, niečo ostalo ako bolo predtým), hovoríme o nich že sú (z hľadiska zachovaného aspektu) symetriami.

Invarianty - sú práve veci, vlastnosti, objekty, aspekty zachovávané sa pri transformáciách. Dost' často je takou transformáciou práve časový vývoj a invariantom veličina nemeniaca sa v čase, konštanta počas vývoja. Význam zákonov zachovania vo fyzike ťažko vôbec doceniť niekto, kto ešte neriešil do detailov vývoj nejakého reálneho dynamického systému. Doriešenie problému môže závisieť tom, či si človek všimne, že nejaká kombinácia nezávislých a závislých premenných a ich derivácií je maskovaná konštanta. Uvedme niekoľko známych zákonov zachovania z fyziky v súvislosti so symetriami, ktoré ich platnosť podmieňujú: zachovanie energie (za predpokladu homogenity času; tvar fyzikálneho zákona popisujúceho systém nezávisí explicitne od času), zachovanie hybnosti (za predpokladu homogenity priestoru v ktorom sa systém pohybuje), zachovanie momentu hybnosti (za predpokladu izotropie priestoru okolo systému).

Ekvivalencia - objekty prepojené symetrickou transformáciou sú ekvivalentné vzhľadom na invariant, ktorý transformácia zachováva. Napríklad dva body na sfére sú spojené rotáciou, a z hľadiska vzdialenosti od stredu (invariant pri rotácii) sú ekvivalentné. Alebo: dve inerciálne vzťažné sústavy spojené Lorentzovou transformáciou sú ekvivalentné z hľadiska rýchlosti svetla - v oboch je rovnaká.

Grupy - boli zavedené pri skúmaní symetrií algebraických rovníc, ale ich využitie je teraz omnoho širšie. Ak sa niekde vyskytuje sada transformácií, ktoré sú symetriami nejakého systému (teda pri prechode od jedného jeho stavu k inému niečo zachovávajú, nemenia), obvykle sa dajú reprezentovať ako grupa. Napríklad rotácie tvoria grupu symetrií sféry.

Lieove algebry - súvisia s grupami spojitých transformácií (napríklad rotácie v euklidovskom priestore) a faktom, že spojité transformácie sa často dajú spraviť "po troche", teda ako zloženie mnohých malých. Malé transformácie majú výhodu v tom, že fungujú lineárne, čo by mal doceniť každý, kto sa už potrápil s aspoň kvadratickou rovnicou.

Killingove vektory - generátory symetrií na hladkých varietach. Hladké variety môžu reprezentovať spojitú množinu stavov systému, krivky v nich postupnosť stavov, teda vývoj. Symetrie zakódované v Killingových vektoroch veľmi uľahčujú predpovede vývoja.

Jetový priestor - je spôsob ako symetriu diferenciálnej rovnice poňať geometricky. Diferenciálne rovnice sú už klasickou súčasťou mnohých odvetví, a nepoznáme univerzálny algoritmus ako ich riešiť. Poznáme také algoritmy pre niektoré typy, a často sú to typy vyznačujúce sa istými symetriami. Práve abstraktný jetový priestor pomáha s geometrickou, často doslova vizuálnou predstavou abstraktnej rovnice. Na neznámu funkciu vystupujúcu v diferenciálnej rovnici a jej derivácie sa pozeráme ako na súradnice jetového priestoru, a samotná rovnica nám potom reprezentuje nejakú (nad)plochu v ňom. (Nad)plochy sú geometrické objekty, a na ich skúmanie sa potom dajú nasadiť geometrické triky, ktorých je (aj vďaka vizuálnej názornosti v nižších rozmeroch a ich analógiám vo vyšších) pomerne hojne.

Klasifikácia, hierarchia, degenerácia, štruktúra spektier... - tieto výrazy sa vyskytujú vo viacerých oblastiach fyziky a málokedy (ak vôbec) bez veľmi úzkeho súvisu so symetriami.

Krása na osoh

Bolo by absurdné pokúšať sa na pár riadkoch v rámci takéhoto prehľadového textu do detailov vysvetľovať súvislosti všetkých pojmov ktoré súvisia so symetriou hoci len vo fyzike. Ale je namieste ich tu uviesť; ak sa s nimi čitateľ stretne, nech si spomenie, že pomáhajú vo fyzike využívať symetriu podobne, ako to znalosť rytmu, rýmov, refrénov a pod. umožňuje umelcom v poézii a hudbe.

Tento projekt získal financovanie z výskumného a inovačného programu EU Horizon 2020 v rámci Marie Skłodowska-Curie Dohody o grante č. 945478.