

NEWTONOVSKÁ FYZIKA (S VÝHLADOM K ZOVŠEOBECNENIAM)

Veronika Gáliková

Tento výber tém z newtonovskej fyziky je predkladaný ako doplnok k základnému kurzu fyziky pre technické odbory. Je v pláne text priebežne dopĺňať a upravovať. Táto verzia je zo septembra 2023.

- Snahou je predložiť fyziku vo "fyzikálnom duchu" - teda je tu menej dôrazu na algoritmické používanie prírodných zákonov v konkrétnych technických aplikáciách a viac dôrazu na "**hlbšie zamýšľanie sa nad jednoduchými vecami.**"
- Text je tiež zostavovaný **s výhľadom na novšie kapitoly fyziky**, ako relativita a kvantová teória, ktoré majú s klasickou mechanikou spoločné viac, než je často vidieť pri rýchlych prehľadových prezentáciách ponúknutým študentom ako "čosi navyše". Teda prezentácia zámerne vyberá aspekty, na ktoré sa dá odvolávať pri štúdiu "novších teórií" ako na paralely a analógie.
- Snahou je poukázať aj na rozličné formalizmy umožňujúce lepší prístup k rôznym zovšeobecneniam. Viaceré užitočné (a presahujúce do mnohých oblastí) **matematické nástroje** sa dajú ilustrovať už na úrovni newtonovskej mechaniky, napriek tomu, že v bežných základných kurzoch sa nespomínajú (symetrie, hamiltonovský prepis rovníc,...)

Pri zohľadnení týchto kritérií sa môžu dostať do popredia aspekty, ktoré sa v bežnom "strojárskom" kurze mechaniky spomenuli len okrajovo alebo vôbec (napríklad príbuznosť gravitácie a pseudosíl v neinerciálnych sústavách, rovnosť inerciálnej a gravitačnej hmotnosti, poctivá definícia pojmov "rovno a rovnomerne", symetrie Newtonových zákonov, ich prepísanie do tvaru v ktorom naozaj vidno "časový vývoj stavu" v súvislosti s energiou,...). A naopak aspekty, ktoré sú pre technické aplikácie preberané v prvých kurzoch do vyčerpávajúcich detailov, tu môžu byť prakticky vynechané.

1 Popis javov v prírode

Vo fyzike **sledujeme javy** okolo nás, snažíme sa **nájsť v nich nejaký princíp**, odhaliť "**pravidlá hry**", korektne ich **sformulovať** a potom ich **konfrontovať s ďalšími pozorovaniami**.

Aký proces sa však skrýva za tak krátkym popisom práce! Ako sledujeme? Ako reprezentujeme pozorované javy v našej mysli či reči? V akom jazyku a ako sformulujeme princípy, ktoré sú za spomenutými javmi? Čo je mierou korektnosti danej formulácie?

Toto nemá byť filozofický traktát, ale než sa človek ponorí kdesi do mora vzorcov a výpočtov, je dobré sa poobzerať, o čo sa vlastne jedná.

1.1 Cez filter vnímania a predpokladov

Naše sledovanie javov okolo nás je poznačené našim spôsobom vnímania, spracovania signálov sprostredkovaných našimi zmyslami. Dosah týchto môžeme vylepšiť použitím vhodných prístrojov. Avšak výber a spracovanie informácií je nevyhnutne poznačené spôsobom, akým funguje náš mozog a k dôsledkom tohto faktora nemáme "nadhľad" z ktorého by sme ich nezávisle posúdili. Môžeme sa snažiť odfiltrovať rozličné subjektívne prvky v pozorovaniach, ale tento faktor do istej miery ostáva. Naša schopnosť objektívneho skúmania prírody je relatívna. Treba robiť čo sa dá. A iste nevyvodzovať z našej subjektivity že nič nie je objektívne.

Čo sa týka reprezentácie javov v prírode v našej mysli, problémom pri snahe o pozorné uvažovanie môže byť práve "samozrejmosť" situácie, množstvo implicitných predpokladov ktoré už ani ako také nerozoznávame. Nie že by na tom, že máme predpoklady, bolo samo osebe niečo zlé;

napriek pseudovedeckým sloganom o tom ako treba "nikdy nič nepredpokladať", faktom ostáva, že s nulovými predpokladmi sú nulové výsledky. Ale je dobré sa zamyslieť, čo máme v našej teórii v roli "samozrejmych pojmov" (napríklad v euklidovskej geometrii to boli priamky, body, uhly, kružnice) a čo ako axiómy o nich (príkladom sú opäť Euklidovské axiómy, napríklad že každé dva body sú jednoznačne prepojitelné priamkou atď). Potom môžeme robiť rozličné odvodené závery, konfrontovať ich s pozorovaním sveta okolo a prípadne prehodnotiť svoje voľby axiémov. A celý proces opakovať.

1.2 "Základné/referenčné pojmy" a ich matematická reprezentácia.

Zbierame teda pozorovania z reálneho sveta, a pri ich spracovaní v našej mysli si zavádzame "základné" popisné pojmy ako čas, teleso, poloha. Používame ich často, a pritom máme veľké ťažkosti ich vysvetliť pri tých vzácných chvíľkach hlbšieho uvažovania alebo rozhovoru s malými deťmi. Čo myslíme pod telesom? Kde je jeho hranica? Patrí k nemu táto hranica? Poloha znamená čo? Je prázdny priestor prázdny pojem? Čo je čas?

Čokoľvek ten čas je, keď z neho aj vlastnej mentálnej kapacity minieme isté kritické množstvo, azda sa pokúsime postupovať ako Euklides a ďalší matematici a uvedomiť si, že nejaké pojmy budú musieť byť v úlohe "základných", ktoré sa budú vyskytovať ako dané, referenčné, a ktoré nevieme vysvetliť či popísať, keďže sú najzákladnejšie pomocou ktorých vysvetľujeme alebo popisujeme ostatné. Oprávnenosť takého postupu (osobitne voľbu "základného súboru pojmov") potom treba spätne skúmať podľa toho k akým zmysluplným výsledkom povedie.

Naše popisné **pojmy vo fyzike reprezentujeme matematickými objektmi** ako súbory čísel, funkcií, tenzorov, geometrických obrazcov atď. (Napríklad súbor všetkých, hoci aj hypotetických konfigurácií v priestore niekedy modelujeme ako euklidovský priestor; posunutia v tomto priestore ako vektory; trajektórie telies ako krivky v tomto priestore, čas často reprezentujeme ako parameter číslujúci jednotlivé polohy na krivke atď.)

Potom používame veľmi voľný žargón, zamieňajúc reprezentovaný jav s matematickou reprezentáciou. Je to pomerne neškodný folklór - pokiaľ človek nestratí rozlíšenie že jedno je skutočnosť, aj keď poznačená filtrom nášho vnímania, a druhé len akýsi **matematický avatar**, ktorého sme tej skutočnosti priradili aby sme nad ňou mohli rozmýšľať pomocou matematických nástrojov. Použitelnosť záverov urobených pomocou takýchto avatarov je obmedzená predpokladmi, za ktorých sme priradenie jav - matematický avatar urobili, mierou analógie medzi javom a avatarom atď. Ak sa nejaký avatar dobre osvedčil, máme tendenciu dôverovať mu viac a viac, a ak nakoniec zabudneme, že je len obmedzeným analógom niektorých aspektov reálnej veci, môžeme naraziť na kdejaké "paradoxy", ktoré sú prejavom toho, že reprezentovaný jav sa nemusí podobáť na avatara vo všetkom len preto, že sa nám podarilo nájsť takého, ktorý vystihuje daný jav v niečom. Reprezentovaný jav je skutočnosť nezávislá od nášho úspechu s hľadaním jeho reprezentácií. Aj obmedzené avatary sú však veľmi užitočné. Treba priznať ich limity, ale aj naše obmedzené možnosti spraviť niečo vo fyzike bez nich.

1.3 Pravidlá hry ako axiómy pre matematické objekty. Kritérium správnosti.

Keď si už nazbierame nejaký súbor základných pojmov (s vedomím že ich základnosť možno bude treba neskôr prehodnotiť a nahradiť ich inými), snažíme sa prísť na pravidlá hry prírody. Keďže naše popisné pojmy sú reprezentované ako matematické objekty, treba vzťahy medzi nimi a pravidlá ich hry vyjadrovať tiež matematickými formulami a rovnicami viažucimi dané objekty dohromady. Niektoré z týchto vzťahov bude potrebné postulovať, brať ako základné (ako axiómy v matematických modeloch), a typicky sa z nich potom mnohé budú dať odvodiť.

Potom čo urobíme tento preklad do matematického sveta, je nám k dispozícii tamojšia mašineria algebry, geometrie, analýzy, diferenciálneho a tenzorového počtu atď, pomocou ktorej prichádzame k rozličným tvrdeniam (stále ešte v matematickom prevedení.) Tieto "tvrdenia" sa po spätnom preklade do "popisných pojmov zavedených pre reálny svet" stávajú predpovedami, ktoré je možno (ak nie, máme problém o ktorom treba niekedy pohovoriť) konfrontovať so skutočnosťou.

Príklad: Na začiatku pozorovania (počiatočný čas reprezentovaný ako konkrétna hodnota premennej t_0) bol meteorit (jeho miera zotrvačnosti reprezentovaná ako konštanta m) tam a tam (údaj reprezentovaný ako nejaký polohový vektor $\vec{r}(t_0)$) - pôsobili naň také a také vplyvy (reprezentované ako súčet silových vektorov reprezentujúcich spomenuté vplyvy $\sum \vec{F}_i$). Podľa našich rovníc ($m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}_i$) teraz (v čase t) by mal byť tu a tu (v polohe zodpovedajúcej $\vec{r}(t)$) ... Je to pravda? Teda ak teraz spravíme spätný preklad od avatarov k skutočným objektom, a pozrieme na miesto zodpovedajúce $\vec{r}(t)$, v čase zodpovedajúcom t , nájdeme tam meteorit? Ak áno, náš model *môže* byť dobrý. Ak nie, treba iný. Samozrejme sú tu praktické nuansy - niekedy sme spokojní s približnou presnosťou predpovedí a teda s približným modelom - to je v poriadku, ale nepovažujeme ho za fundamentálne korektný.

Táto konfrontácia s pozorovaním/experimentom poskytuje fyzike veľmi silné kritérium na posúdenie teórií, modelov, súborov axiémov... rozhodne silnejšie ako v matematike, kde je ťažko nájsť objektívny dôvod na zahodenie teórie okrem prípadu, že je nekonzistentná sama so sebou alebo je príliš prázdna na to, aby sa s ňou dalo niečo robiť. Ak náš model dáva predpovede, ktoré protirečia korektne prevedenému a interpretovanému pozorovaniu, je model nesprávny. Ak nedáva predpovede konfrontovateľné so skutočnosťou, ako fyzikálny nástroj je zbytočný.

2 Časopriestor a predpoklady na priradenie matematických avatarov pre jeho reprezentáciu,

Pozrime sa teraz na niektoré z našich základných pojmov, ktorými popisujeme deje okolo nás.

Jeden z kľúčových je **udalosť**. Niečo sa udeje **niekde a niekedy**. Súbor všetkých, hoci aj hypotetických "niekde a niekedy" tvorí akúsi "scenárovú sieť", obvykle ju označujeme ako **časopriestor**. Jeho elementy možno reprezentovať ako "adresy udalostí". Na identifikáciu takej adresy typicky potrebujeme 3 priestorové a 1 časový údaj, preto často počujeme hovoriť o 4-rozmernom časopriestore. Netreba však v tomto pojme vidieť niečo exotického vyžadujúceho geniálnu predstavivosť. Zaviesť takýto 4D model má za účel len uľahčiť narábanie s údajmi, no a ak ku každej udalosti potrebujeme 4, používame matematický nástroj, aký sa k tomu hodí.

Teraz sa venujeme newtonovskej mechanike, kde je čitateľ pravdepodobne zvyknutý uvažovať **polohy telies v trojrozmernom konfiguračnom priestore**, a **zmeny týchto polôh** v čase, a teda vidieť **čas** ako univerzálny parameter, zoraďujúci udalosti pozdĺž **trajektórie** (krivky v konf. priestore). Nič nám však nebráni už tu, na úrovni newtonovskej mechaniky, uvažovať ako scénu časopriestor, teda (keď si zavedieme vzájomnú sústavu) parameter povýšiť na ďalšiu súradnicu. Často totiž môže mať zmysel uvažovať nielen trajektóriu telesa, (množinu polôh kde sa vyskytlo), ale celú jeho **históriu (svetočiaru)**, teda množinu udalostí ktorých sa zúčastnilo.

Výraz "časopriestor" majú ľudia často spojený s einsteinovskou relativitou, ale ako množinu (aspoň hypotetických) udalostí má zmysel aj v newtonovskej fyzike. Je to nástroj na kompaktné uchopenie dát. Avšak každý pozorovateľ vníma priestor okolo seba trojrozmerný, s časom ako parametrom zoraďujúcom tieto trojrozmerné momentky do celkovej histórie.¹ Trojrozmernosť konfiguračného priestoru je hlboký empirický fakt, ktorý je do modelu mechaniky zabudovaný ako predpoklad.

¹To platí mimochodom aj pre neskoršie teórie ako relativita. Nikde sa nenájde pozorovateľ z ktorého hľadiska konfiguračný priestor nie je 3D a kde by čas nehrál výrazne inú rolu ako priestorové rozmery. Ak však chceme dávať do súvisu takéto skúsenosti rozličných pozorovateľov, ukazuje sa ako vcelku efektívny model 4-rozmerný model s časom ako jedným z "rozmerov"- nie však "len ďalším rozmerom ako ostatné".

Na otázku prečo je trojrozmerný súčasná fyzika odpovedať nevie.

Podme sa teda pozrieť najprv na nejaký vhodný model pre náš konfiguračný priestor. Nemusíme nasilu znova vynachádzať koleso - vieme, že na **reprezentáciu polôh telies a ich trajektórií** sa ako veľmi efektívny nástroj ukazujú **geometrické útvary** ako body, priamky, krivky... Vezmime teda geometrický model, alebo aspoň prvky z neho, a pozrime kam vedie. Premyslime však priradenie základných pojmov v mechanike veľmi pozorne - akokoľvek samozrejme sa všetko zdá. Máme totiž tendenciu zamieňať si zvyk a pochopenie, čo je problém, pretože príroda sa lepšie študuje s postojom malého dieťaťa ktoré je síce viac ako ochotné narábať s pojmami ktoré momentálne nevie uchopiť inak ako "dané", ale zvyk ho ešte nenaučil predstierať ich "samozrejmosť".

Fyzika je tanec medzi teóriou a praxou, a na pojmy ktoré nemajú miesto v oboch sa pozeráme ako na málo preskúmané alebo pochybné. Podme skontrolovať ako je to s naším používaním geometrických pojmov ako reprezentantov pre rozličné konfiguračné záležitosti potrebné na popis mechanických dejov. Nepredpokladajme automaticky euklidovskú geometriu, ale neškodí pripomenúť si ju ako všeobecne známy prípad na ktorom sa mnohí zoznamujú s geometrickými pojmami. Táto "známa" geometria predpokladá existenciu "základných" objektov ako bod a priamka. Máme v našom priestore niečo čo by mohli reprezentovať? Polohy telies by mohli byť reprezentované euklidovskými "bodmi", ich spojnice segmentami ktoré sa podľa Euklidových postulátov dajú (jednoznačne) predĺžiť na priamku. Tu je však čas konfrontovať sa s realitou. Zamyslime sa tu nad predpokladmi ktoré robí newtonovská fyzika (jednak aby sme lepšie rozumeli jej, a aby neskoršie zovšeobecnenia či korekcie "novších" teórií bolo s čím porovnať).

"Bod" môžeme vnímať v mechanike ako miesto kde sa môže nachádzať dostatočne malé teleso. Čo značí "dostatočne malé"? Mamut také kritérium spĺňa menej ako tiger a tiger menej ako mucha... Matematik by azda navrhol uvažovať limitne malé teleso. Ale tu treba brať ohľad na overiteľnosť experimentom. Teda bod bude reprezentovať polohu malého telesa, ale dosť veľkého aby sme ho ešte videli ². Pre terajšie účely nám stačí takáto **aproximácia "bodovosti"**. Pamätajme si však pre budúcnosť, že naše závery urobené na jej základe potom netreba automaticky zovšeobecňovať na situácie keď nie je aktuálna.

Podme k **spojnici** medzi dvomi malými telesami, čo by korešpondovala euklidovskému segmentu predĺžiteľnému na "priamku". Ktorú spojnicu vybrať? Medzi dvomi telesami ich je mnoho - je nejaký dôvod uprednostniť jednu pred ostatnými? Možno sa nám chce povedať "tú najrovnejšiu", tváriac sa že vieme o čom hovoríme (kým a nepokúsime vysvetliť kde sme vzali prvotný štandard, prvé "rovno"). Pozor - ešte len hľadáme čo bude v našom priestore zodpovedať častiam priamok, teda štandardom "rovných segmentov". Povedať že rovnú úsečku nájdeme ako rovnú úsečku úlohu nerieši.

Skúsime teda vybrať najkratšiu spojnicu. Teraz však treba konfrontovať otázku, čo tým myslíme, najkratšiu? Potrebujeme si ujasniť ako **meriame dĺžky**, a aké predpoklady a obmedzenia s ním vstupujú do hry: Vezmeme nejaké teleso ako **štandard jednotkovej dĺžky**, postupne ho prikladáme pozdĺž spojnice a počítame koľkokrát sa tam vojde. Náš štandard dĺžky by mal byť dostatočne malý, aby meranie bolo dostatočne jemné, ale zas nie natoľko, žeby sme ho technicky nevedeli zrealizovať. Takisto tu je potichu urobený predpoklad, že existuje nejaká trieda objektov, ktorých dĺžku budeme považovať za konštantnú a budú použiteľné ako meracie jednotky.

Povedzme že máme vybranú najkratšiu spojnicu. Dá sa táto jednoznačne predĺžiť tak, že objekt takto vzniknutý bude dobre reprezentovaný euklidovskou **priamkou**? ³ Tu si ťažko pomôžeme

²aparátom aký máme k dispozícii, nie nevyhnutne voľným okom - a prísne vzaté nejde nevyhnutne ani o "optické videnie", ale o nejakú **detekciu polohy**

³Keďže svet okolo nás berieme ako "skutočný" a geometrický model ako "avatar", formulujeme veci takto krkolomne - že nejaká časť priestoru je reprezentovaná priamkou, a nie že reprezentuje priamku. Časom možno túto pozornosť k terminológii stratíme, ale je dobré mať myšlienku za ňou na mysli.

výberom najkratšej možnosti, a musíme si na zoznam úloh pridať **nájdenie nejakého kanonického štandardu "prvého rovno"**.

Ďalším dôležitým pojmom je **pohyb, zmena polohy v čase**. Súbor polôh v danom časovom intervale potom tvorí tzv. (časom) **parametrizovanú trajektóriu**. Ku každému času z daného intervalu vieme priradiť polohu, ktorú v ňom teleso malo. Keďže v dejoch okolo nás nevidíme "skoky" v zmysle že teleso by zmenilo polohu z jedného miesta na iné bez toho, aby sa vyskytlo aj na (niektorej) spojnici medzi nimi, sú **trajektórie reprezentované súvislými krivkami**. Blízkym bodom na trajektórii prislúchajú blízke hodnoty parametra - času. Podiel vzdialenosti bodov ku príslušnému časovému úseku, za ktorý sa teleso presunulo z jedného do druhého, však nemusí byť konštantný. Než sa však pustíme do pojmov ako rýchlosť zmeny polohy, uvedomíme si že **meranie času** nie je o nič samozrejmejšie ako meranie polohy.

Potrebujeme nejaký **prototyp hodín** - jedno ich "tiknutie" bude najmenšou jednotkou času, teda nemá zmysel tváriť sa, že vieme bezpečne merať čo a ako sa deje na kratších intervaloch. Ďalej, tiknutia prvotných, štandardných hodín sú z definície "rovnomerne" - intervaly medzi nimi sú rovnaké. Rovnomernosť ostatných dejov sa bude posudzovať na základe porovnania s našim kanonickým štandardom. Na zoznam úloh pribúda **nájdenie štandardu prvého "rovnomerne"**.

Zhrnutie: polohy malých telies sú reprezentované bodmi, treba si pamätať že veľmi malé teleso stále nie je nekonečne malé teleso. Dĺžky meriame pomocou nejakých limitne malých (opäť, to nemusí byť vo fyzike to isté ako nekonečne malých) telies predstavujúcich štandard dĺžky, z definície konštantnej a najmenej možnej o akej sa ešte dá relevantne hovoriť ako o merateľnej. Aby slovo "priamočiarno" malo zmysel, budeme potrebovať nájsť prototyp "prvého rovno". Čas meriame pomocou nejakého objektu, ktorý umožňuje odčítanie "cyklov", teda napr. podlieha periodickému deju. Jeden cyklus predstavuje jedno "tiknutie". Doba jedného cyklu je najmenšia merateľná, hovoriť o kratších vedie k experimentálne neoveriteľným tvrdeniam. Budeme potrebovať kanonický štandard/ prototyp "rovnomerne", teda proces vyznačujúci za sebou nasledujúce rovnaké časové úseky.

Poznámka: Dali sme si za úlohu *nájsť* referenčné štandardy "rovno, rovnomerne". Nemôžeme si ich *zvoliť*? Newtonovská mechanika to naozaj tak robí, niečo za také štandardy jednoducho *postuluje*. Voľba je súčasťou modelu. Nutnosť voľby však neznačí *zmysluplnosť* hociktorej. Vo fyzike je korektnosť modelu a teda aj spomínanej voľby posudzovaná podľa toho, či potom predpovede takého modelu súhlasia s pozorovaním prírody. Model si "**volíme**" v zmysle "**snažíme sa uhádnuť** taký, ktorého predpovede sa s pozorovaním zhodnú čo najlepšie".

3 Vzťažná sústava - Ako popísať objektívne veci so subjektívnym aparátom

Už sme si povedali o "scéne" a jej reprezentácii kvalitatívne. Pozrime sa teraz na spôsob, ako veci skvantitatívniť, **priradiť čísla**. Výhodou takého priradenia je silná matematická mašinéria na manipuláciu s číslami, ktorá nám je potom k dispozícii, ak pravda vieme čo ktorá operácia v matematickom svete reprezentuje v tom skutočnom. Pri tomto priraďovaní čísel si treba uvedomiť, že môže existovať viac spôsobov ako ho urobiť. Nakoniec jedná sa o "pomenovávanie", vytváranie systému adries napr. pre polohy telies.

Samotné **označenie udalostí** v časopriestore je v podstate možné robiť akokoľvek, pokiaľ platí že meno-udalosť je jedno-jednoznačné priradenie. Podobne ako keď číslujeme domy v ulici - stačí ak každý dom má svoje jedinečné číslo, a je možné toto číslo použiť ako reprezentanta domu v katastrálnych záznamoch atď. Ale kto kedy hľadal nejaký dom v ulici kde pomenovávanie domov

bolo urobené s len minimálnou požiadavkou jednoznačnosti, asi pripustí, že to nie je najpraktickejší spôsob. Omnoho ľahšie sa nám orientuje ak "blízke domy majú blízke čísla". Ak vidíme že dom s číslom 17 susedí s domami číslo 4 a 56, ťažko sa nám odhaduje o koľko domov ďalej je číslo 18. Podobne mená pre konfigurácie v priestore a čase je vhodné voliť tak, aby tie čo sú si bližšie, mali podobné mená. Miera blízkosti je samozrejme pojem ktorý treba v modeli premyslieť (matematik sa s nami nebude baviť v tomto ohľade, kým nevie aká miera je v modeli), ale minimálne požiadavka na nejaký **systematický aparát pri pomenovávaní** prvkov je azda evidentná.

Obvykle tento aparát budujeme referenčným spôsobom. Ak niekomu hovoríme, ako sa dostane trebárs do parku, používame pojmy ako doprava, doľava, sto metrov, atď, a žiaden z nich sám osebe nemá jasný zmysel, minimálne implicitne rozumieme že doprava a doľava sa myslí pri konvenčne orientovanej chôdzi tvárou smerom kam ideme, vzdialenosť sa určuje od niečoho... Hľadáme teda čo najefektívnejší **referenčný systém** - dostatočne bohatý aby sme popísali veci jednoznačne, a dosť úsporný na to aby nás nezahltili závislé dáta (odvoditeľné z ostatných). Ako sme už spomínali, v priestore v ktorom žijeme zisťujeme je najúspornejší referenčný systém na určenie polohy nám umožňuje určiť polohu telesa pomocou troch nezávislých údajov - priestorová "adresa" má tri údaje. Časová zložka "adresy" udalosti jeden. Aj systemetické priradenie adres však **rôzni pozorovatelia** môžu urobiť rôzne.

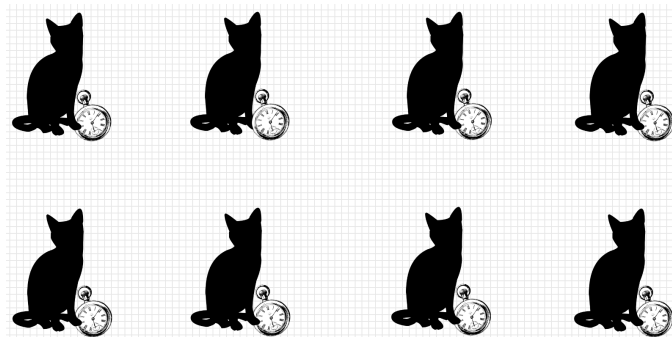


Je možné že niektoré voľby sú v nejakom zmysle lepšie ako iné, ale treba si rozmyslieť, na základe akého kritéria to budeme posudzovať. Príroda sa nebude prispôbovať nášmu vkusu, a naše kritériá pre efektívnosť jej popisu by mali nejako odrážať jej preferencie, nie naše.

Než sa pustíme do diskusie vzťažnej/referenčnej sústavy, venujme ešte poznámku pojmu prílušného **"pozorovateľa"** ktorému je daný referenčný systém "šitý na mieru". Vo fyzike pod pozorovateľom nemyslíme len nejakého fiktívneho či reálneho jednotlivca, ale obvykle sa myslí "centrálny pozorovateľ" spolu s myslénym (ale predpokladáme "v princípe realizovateľným") systémom jeho komplikov-agentov rozostavených v celom priestore. Centrálneho pozorovateľa je ten, pre ktorého sú dané priestorové súradnice "našité na mieru" v zmysle že udalosti v jeho histórii majú v týchto súradniciach najjednoduchšie možné vyjadrenie - všetky sa dejú v priestorovom počiatku (jeho pozícia *definuje* počiatok) a sú jednoducho zoradené, očíslované "tikmi jeho hodínok" (jeho vlastný čas je zároveň časová súradnica pre celý systém).

Agenti prislúchajúci k tomuto centrálnemu pozorovateľovi sú vzhľadom na neho v pokoji, majú s ním zosynchronizované hodiny, pri každom sa dá určiť trojica čísel označujúca jeho polohu vzhľadom na centrálnu jedince. Čokoľvek, kdekoľvek a kedykoľvek sa stane, je to v bezprostrednej blízkosti jedného z agentov. Pozícia tohto agenta bude zároveň pozíciou udalosti, čas na agentových hodinách jej časom. Centrálneho pozorovateľa má takýmto spôsobom možnosť pozbierať dáta o každej udalosti - priradiť jej konzistentným spôsobom štvoricu čísel.

Pre neskoršiu referenciu si ešte ujasníme aké predpoklady sme použili pri úvahách o vzťažnej



sústave daného pozorovateľa. *Predpokladáme, že agent stojaci jednotkovú vzdialenosť od centrálneho jedinca ostáva v jednotkovej vzdialenosti, že je vzhľadom na centrálneho stále v pokoji, že hodinky na rôznych miestach je možné konzistentne zosynchronizovať, že zosynchronizované ostanú, a že všetko toto sa v princípe dá zabezpečiť.* V newtonovskej mechanike sa toto predpokladá, aj pokračujeme s týmito predpokladmi, a naše závery sú urobené pod nimi. (Poznámka do budúcnosti, k novším modelom vo fyzike: Ak sa niekedy objaví dôvod predpoklady spochybniť, aj naše závery bude potrebné prehodnotiť.)

Zatiaľ sme ešte nehovorili o tom, či niektorí pozorovatelia sú nejakým spôsobom význační. Necháme každého rozostaviť si agentov a synchronizovať hodiny, a potom s pomocou Newtonových zákonov urobíme výber význačnej triedy pozorovateľov.

Pozrime sa, akým spôsobom môže pozorovateľ priradiť udalostiam identifikačné čísla. Pozorovateľ vie, že priestor je trojrozmerný, pokryje ho teda **sieťou s tromi triedami "súradnicových kriviek"**. Každá taká krivka je charakteristická tým, že body na nej majú spoločnú hodnotu jednej súradnice. Príkladom je kartézská sieť, sieť sférických súradníc, atď. Požiadavky na tieto krivky sú zatiaľ dosť voľné - každým bodom priestoru by sa mala prechádzať práve jedna súradnicová krivka z každej triedy. Bodu teda možno priradiť tri súradnice podľa súradnicových kriviek ktorých uzol tvorí. Predbežne nazvime tieto súradnice q_1, q_2, q_3 . Blízke body by mali mať blízke hodnoty súradníc. V každom uzle kde sa stretávajú súradnicové krivky si môžeme v princípe predstaviť "agenta", ktorý na danom mieste zotrváva, s identickými hodinami ako má centrálny pozorovateľ. *Newtonovská mechanika predpokladá, že hodinky raz synchronizované ostávajú synchronizované* (úvahy o vybitých baterkách atď možno odložiť bokom, keďže tieto veci sa v princípe dajú technicky zabezpečiť).

Keďže naše požiadavky na pozorovateľa boli veľmi voľné, existuje veľké množstvo veľmi rozličných volieb súradných sústav. Rozliční pozorovatelia dokonca nemusia byť jeden voči druhému v pokoji, zatiaľ sú v hre aj pozorovatelia, ktorí sa nezhodnú na počiatku súradnej sústavy, na súradnicových krivkách, dokonca na tom či nejaké pozorované teleso mení alebo nemení svoje priestorové súradnice a akým tempom či spôsobom, keďže samotní pozorovatelia aj s celým svojím dvorom agentov sa jeden voči druhému môžu pohybovať. *V newtonovskej mechanike je však urobený predpoklad, že časové rozdiely medzi udalosťami namerajú všetci pozorovatelia rovnako.* Mnoho "samozrejmych" záverov je poznačených týmto predpokladom a ak by sa ukázal ako nevhodný, všetky by bolo treba prehodnotiť.

Pozorovateľ môže sledovať nejaké teleso a jeho históriu, a vo svojej vzťažnej sústave mu v každom okamihu t priradiť aktuálnu trojicu priestorových súradníc q_1, q_2, q_3 . Môže skúmať ako sa tento súbor údajov mení v čase, teda skúmať trojicu funkcií $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$, skráteno $q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Môže sledovať zmeny jednotlivých súradníc za časový interval Δt , teda veličinu $\frac{q_i(t+\Delta t) - q_i(t)}{\Delta t}$, prípadne zmenu tejto zmeny atď, hľadať súvislosti medzi nimi a okolím telesa, jednoducho snažiť sa ísť s "pravidlami hry."

Azda nie je nemiestne očakávanie, že ten pozorovateľ, ktorého význačné krivky (súradnicové) budú zároveň význačnými krivkami prírody, bude odmenený osobitne jednoduchým vyjadrením týchto pravidiel.

4 Newtonove zákony mechaniky

Newton sa pokúsil uhádnuť pravidlá hry v troch pohybových zákonoch. Podaril sa mu veľmi užitočný model - predpovede urobené na jeho základe majú skvelú zhodu s pozorovaním. Nie kompletnú, očividne je to model s limitami, ale nakoniec nemáme žiaden ktorý by limity nemal - minimálne vo forme predpokladov a teda dosahu na nejaké situácie.

Pohybové zákony v newtonovskej mechanike sú formulované ako platné pre tzv. inerciálnych pozorovateľov. Inerciálny pozorovateľ je taký, v ktorého sústave všetky Newtonove zákony platia.

To znie ako do seba zacyklené tvrdenie. Zákony nárokuje si platnosť v prípadoch, v ktorých platia, predsa platia v daných prípadoch z definície. Čo však nie je triviálne je **existencia** takých prípadov! Akonáhle sa nájde aspoň jedna inerciálna sústava, máme spolu so zákonmi aj ich enormnú predikčnú silu a okrem toho celú triedu inerciálnych vzťažných sústav ekvivalentných tej "aspoň jednej". O tom však neskôr.

Praktický význam Newtonových zákonov závisí od toho, či sa teda oná "aspoň jedna" inerciálna sústava nájde. Prísne vzaté nikdy sme nezrealizovali žiadnu dokonale inerciálnu, ale pokiaľ je teória rozumne "stabilná", často platí, že aspoň približne splnený predpoklad znamená aspoň približnú uplatniteľnosť teórie a jej predikčnej sily. Toto platí aj v tomto prípade. Človek nemusí mať newtonovsky ideálnu inerciálnu vzťažnú sústavu na úspešné použitie newtonovskej mechaniky pre bežné technické aplikácie (alebo trebárs aj tie menej bežné ako exkurzia na Mesiace). Samozrejme ostáva otázka principiálnej platnosti či existencie, ktorej sa treba vážne venovať ak chce človek pochopiť veci do hĺbky a prípadne ich zovšeobecniť, a k tomu sa ešte bude treba vrátiť.

Ak uvažujeme tuhé teleso ktoré sa "nedrobí", teda nestráca hmotnosť strácaním svojich častí (ako by to bolo napríklad v prípade rakety vypúšťajúcej zvyšky paliva), **Newtonove zákony** pre jeho pohyb sa dajú zhrnúť nasledovne:

1. **Teleso sa pohybuje rovnomerne priamočiario (špeciálny prípad: zotrúva v pokoji) pokiaľ vonkajšie sily tento stav nezmenia.**
2. **Teleso hmotnosti m získa pôsobením celkovej vonkajšej sily $\vec{F}$ zrýchlenie $\vec{a}$ úmerné pôsobiacej sile a nepriamo úmerné svojej hmotnosti; $\vec{a} = \vec{F}/m$.**
3. **Pôsobenie dvoch telies je vždy vzájomné; telesá sa seba pôsobia rovnako veľkými, opačne orientovanými silami**

4.1 Miera zotrvačnosti - hmotnosť

Hmotnosť m je jedným z veľmi hlbokých pojmov ktorých význam sa možno ešte celkom nedoceniť. Povedzme si aspoň niečo o roli akú tu hrá. Hmotnosť, o ktorej je tu reč, je tzv. **zotrvačná hmotnosť**. Je "mierou neochoty" nadobúdať zrýchlenie (meniť rýchlosť) za pôsobenia externých síl. Dá sa na ňu pozeráť aj ako na "interakčnú, silovú kapacitu" (nepoužívaný termín) - súvisí s tým, koľko síly treba investovať, aby sa rýchlosť zmenila. Čím je táto "kapacita" väčšia, tým menšie odchýlky má pohyb od "rovnomerného priamočiareho" aj za pôsobenia vonkajších síl.

4.2 Miera pohybu - hybnosť

Newtonove zákony hovoria o pohybe, zotrvačnosti a interakcii. Veličina, ktorá s tými to pojmami bytostne súvisí, je miera pohybu, **hybnosť** $\vec{p}$. Je to akýsi pohybový status, tu definovaný ako súčin hmotnosti m a rýchlosti $\vec{v}$, teda $\vec{p} = m\vec{v}$. Jej konkrétna hodnota v našej vzťažnej sústave, pokiaľ je konštantná, je jednoducho "status quo" podobne ako by konštantná poloha bola jednoducho "status quo" keby bolo teleso voči nám v pokoji. Nakoniec ak je naša sústava inerciálna, existuje k nej iná, s našou rovnoprávna, vzhľadom na ktorú toto teleso *je* v pokoji. Jediný dôvod nezachovať toto pohybové status quo je nejaký externý vplyv, o čom hovorí druhý zákon (uvažujeme tu konštantnú hmotnosť):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teda zmena hybnosti v čase je vyvolaná externou silou. Tretí zákon rehabilituje **zachovanie hybnosti** aj pre prípad interakcie, ak sa vezme do úvahy **celý interagujúci systém**⁴. Ak teleso A pôsobí na teleso B silou $\vec{F}$, zmení sa hybnosť B podľa

$$\frac{d\vec{p}_B}{dt} = \vec{F}$$

Podľa tretieho zákona B pôsobí na teleso A silou $-\vec{F}$. Hybnosť A sa tak zmení ako

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\vec{F}$$

Zmeny hybnosti sa práve vykompenzujú v rámci celého systému telies A, B.

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

Okrem iného to znamená, že ich spoločné ťažisko sa ich vzájomnou interakciou neodkloní od rovnomerného priamočiareho pohybu. Špeciálne, ak sa jedná o telesá rovnakej hmotnosti na začiatku v pokoji, pôjdu od seba rovnako veľkými rýchlosťami.

$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = -m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

(m_A, m_B sú hmotnosti, $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ rýchlosti telies A,B)

4.3 Symetria ako znak význačného postavenia

Newtonove zákony sú formulované pre vzťažné sústavy v ktorých je **zotrvačnosť homogénna a izotropná**. V týchto poznámkach budeme takéto sústavy volať **inerciálne**.

Súvis prvého zákona a homogenity: Pohyb rovnomerne priamočiario je spojený s rovnocennosťou oblastí priestoru ktorými teleso prechádza (ak nepôsobí vonkajšia sila). Zotrvačnosť je homogénna a teleso pokračuje v rámci svojho pohybového stavu v danej vzťažnej sústave. Samotná zmena miesta mu nedáva dôvod na zmenu hybnosti, veď tieto miesta sú ekvivalentné z hľadiska zotrvačnosti - kamkoľvek teleso príde, príde tam s rovnakou zotrvačnou hmotnosťou, a pre zachovanie pohybového stavu teda musí zachovať svoju rýchlosť (ak externé vplyvy nevyžadujú uplatnenie zvyšných zákonov).

Súvis druhého zákona a izotropie v zmysle rovnocennosti smerov: Zmena hybnosti má

⁴Napríklad ak ako skúmaný systém vezmeme kameň vrhnutý v gravitačnom poli Zeme, jeho hybnosť sa zjavne počas letu nezachováva, ale sa mení (v súlade s druhým zákonom) - veď pôsobí "externý vplyv", príťažlivosť Zeme. Ak však vezmeme ako systém kameň aj Zem, ich celková hybnosť sa zachováva - kameň síce zrýchľuje smerom k Zemi, ale aj Zem ku kameňu (pomer ich zrýchlení je prevrátený pomer ich hmotností).

smer ako pôsobiaca externá sila, a veľkosť tejto zmeny za daný časový interval je daná veľkosťou pôsobiacej sily. Nepozorujeme, že by niektoré smery boli samy osebe privilegované a sila pôsobiaca v nich by mala na zmenu hybnosti väčší efekt. Na jednotkovú zmenu hybnosti kdekoľvek do ktoréhokoľvek smeru treba rovnako veľkú silu.

Súvis tretieho zákona a izotropie priestoru v zmysle rovnocennosti orientácie: Ak trebárs interagujúce telesá na seba pôsobia odpudivo, vzdávajú sa od seba pozdĺž priamky, povedzme že A doprava a B doľava. Hybnosť častice idúcej doprava a hybnosť častice idúcej doľava sú rovnako veľké a tak sa kompenzujú, ani jedna z orientácií nemá väčšiu váhu či preferenciu.

Význačné vzťažné sústavy sa vyznačujú tým, že základné pojmy sa v nich sú spojené s vysokou **symetriou**. Toto je **znak osobitného postavenia** naprieč disciplínami fyziky - symetrie sú čosi ako diplomatický pas, ale majú objektívnejší základ a stabilnejšie trvanie. Samozrejme navrhnuť si vysoko symetrický model nestačí - treba sa trafiť do správnych symetrií. Správnosť posudzujeme na základe toho, či náš model vybavený danými symetriami dáva predpovede súhlasiace s experimentom či pozorovaním. Voľne to niekedy formulujeme ako "uhádnutie symetrie, ktorú preferuje príroda".

Keďže symetria súvisí s tým, že na **ničom nezáleží z hľadiska niečoho iného na čom záleží**, niekedy máme tendenciu ju prehliadnuť. Napríklad v druhom zákone vec, na ktorej záleží, je vzťah medzi silou a zmenou hybnosti. Na čom nezáleží je smer (nie v zmysle že sily všetkých smerov sú ekvivalentné, ale že všetky smery sú ekvivalentné pre *vzťahy* medzi silami v nich a nimi vyvolanými zmenami hybnosti). Keďže však táto ľahostajnosť sa prejavila nešpecifikáciou smerov, je ľahké si ju nevšimnúť. Môže sa zdať že ide o akési filozofické dumanie - ale úvahy o symetriách sa ukázali ako veľmi silný zdroj nápodiev vo fyzike, so silným potenciálom posunúť teóriu ďalej. Ďalej posunutá teória vo fyzike máva merateľné dopady (ak nie, nepovažuje sa za posunutú) - a praktické použitie veľmi často potom tiež nebýva ďaleko.

V kapitolách ako relativita, gravitácia, kozmológia, kvantová teória hrajú symetrie veľkú rolu. Aj kvôli nim je dobré naučiť sa symetrie rozoznávať na "známejšej pôde" newtonovskej mechaniky. Niekedy sa pritom ukáže, že sme aj v tej známej pôde prehliadli viac ako zahliadli.

4.4 Prvý zákon a štandard pojmov rovno a rovnomerne

Pri povrchnom uvažovaní by sa mohlo zdať, že prvý zákon je len špeciálny prípad druhého. Veď ak vezmeme prípad nulovej sily $\vec{F} = \vec{0}$, druhý zákon nám hovorí že zmena hybnosti v čase je nulová, teda že hybnosť je konštantná. V prípade konštantnej hmotnosti to znamená konštantnú rýchlosť.

$$\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = \text{konst}$$

A tá predsa patrí k rovnomernému priamočiaremu pohybu, k pokoju v špeciálnom prípade nulovej rýchlosti. Treba teda osobitne aj prvý zákon? Treba, lebo bez neho by druhý nemal jasný význam. Spomeňme si na úvodné úvahy o potrebe štandardu "rovno" a "rovnomerne". Prvý zákon netreba čítať tak veľmi ako popis toho čo voľné teleso robí, ale ako **definíciu rovnomerného priamočiareho pohybu**. Je to návod na výrobu štandardu.

Trajektórie voľných telies definujú priamky. Tempo, ktorým také telesá postupujú, definuje rovnomerné tikanie hodín. Rovnomerne tikajúce hodiny sú tie, pre ktoré na rovnaký kus prejdenej dráhy pripadne rovnaký počet tiknutí.

Aby pozorovateľ bol inerciálny, a s možnosťou používať druhý zákon ako trojicu diferenciálnych rovníc pre súradnice interagujúcich telies, musia byť v jeho vzťažnej sústave **parametrické vyjadrenia súradníc voľného telesa pozdĺž trajektórie lineárnymi funkciami času**.

$(q_i(t) = \alpha t + \beta, \alpha, \beta = \text{konst} \rightarrow \ddot{q}_i = 0$. Nutná podmienka.)

Až keď vieme čo je **rovnomerne priamočiario**, môžeme zmysluplne hovoriť o **odchýlkach** od tohto štandardu, o ktorých potom pojednáva druhý Newtonov zákon.

Ešte tu upozorníme na spôsob ako trochu skomprimovať terminológiu (neskôr sa vec azda ukáže ako ešte užitočnejšia): **Rovnomerne priamočiario v priestore je priamočiario v časopriestore**. "Rovnomerne priamočiario" popisuje trajektóriu a jej parametrizáciu. "Priamočiario" hovorí o tvare priamky ("vezmi trajektóriu voľného telesa - množinu bodov kde sa vyskytlo: taký tvar majú priamky v našom konfiguračnom priestore"). "Rovnomerne" hovorí o parametrizácii ("vezmi rovnako dlhé úseky na trajektórii - príslušné prírastky parametra (časové intervaly) sú definované ako rovnako dlhé - takto rovnomerne plynie čas").

Ak parameter t pridáme ako ďalší rozmer našich dát, uvažujeme teda časopriestor (každý bod predstavuje adresu potenciálnej udalosti, "kedy a kde"), potom možno hovoriť o geometrických vlastnostiach **svetočiary (histórie)**, nielen **trajektórie (priestoročiary)**. Trajektória sa dá v newtonovskej mechanike chápať ako projekcia z priestoročasu do priestoru.

Potom to, čo sa pre **parametrizovanú krivku v priestore volalo "rovnomerne priamočiario"**, sa v časopriestore pre prislúchajúcu svetočiaru volať iba **"priamočiario"**, keďže parameter dostal tiež status súradnice a jeho rovnomerný prírastok už je aj geometricky popísateľný ako "rovno" v príslušnom (časovom) smere.

4.5 Druhý zákon a pojem sily

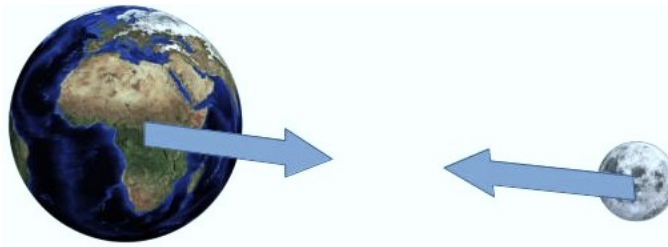
V prípade druhého zákona si treba ujasniť istý "kruhovo-pojmový problém". Pôsobiacia sila je rovná časovej derivácii hybnosti systému, na ktorý pôsobila. Pre použiteľnosť druhého zákona na predpovede o systéme treba toto tvrdenie **doplniť nejakou ďalšou informáciou o sile**, inak by sa dal druhý zákon chápať nanajvýš ako definícia sily, ako skráteného označenia časovej derivácie hybnosti. Ak nepoznáme hybnosť ako funkciu času $\vec{p}(t)$ a chceli by sme ju poznať, je potrebné dosadiť do rovnice známu pôsobiacu silu a dopočítať diferenciálnu rovnicu. Alternatívne, druhý zákon sa dá použiť aj na štúdium síl - sledujeme pohyb telesa, teda poznáme $\vec{p}(t)$, a zo zmien zakódovaných v jej časovej derivácii $\partial_t \vec{p}$ zisťujeme informácie o silách, ktoré zmeny spôsobili. Avšak bez poznania buď sily ako funkcie času alebo hybnosti ako funkcie času je pre nás zákon na predpovede nepoužiteľný.

4.6 Tretí zákon a pôsobenie na diaľku

Najprv adresujme fakt, že **akcia a reakcia** podľa newtonovskej mechaniky sú rovnako veľké, opačne orientované, ale keďže **pôsobia na rôzne telesá**, neznamená to že sa skompenzujú v zmysle že by sa žiadne pôsobenie nedialo.

Tretí zákon, ako sme už spomínali, **rehabilituje zachovanie hybnosti** - ak počítame hybnosť v rámci celého systému interagujúcich telies. Ak máme dve telesá čo na seba pôsobia, ani pre jedno z nich osobitne sa hybnosť nezachováva, keďže je vystavené pôsobeniu druhého telesa. Ak však uvažujeme obe telesá ako súčasť jedného systému, zložky síce podliehajú vzájomnej interakcii a zmene hybnosti, ale ich vzájomné pôsobenie nepredstavuje vonkajší vplyv na systém. **Ťažisko** telies, akýsi zástupca systému, sa teda pohybuje rovnomerne priamočiario v zmysle prvého zákona. Zmeny hybnosti sú rovnako veľké, opačne orientované, a počítané dohromady pre celý systém sa navzájom kompenzujú.

Tretí zákon, osobitne ak sa jedná o trebárs gravitačné či elektrické pôsobenie, má v sebe príznaky "okamžitého pôsobenia na diaľku". Implicitne tu máme predpoklad akcie a reakcie zladených "v tom istom čase". Teda zmeny hybnosti dvoch telies vzdialených od seba azda astromické jednotky su koordinované skrz túto vzdialenosť tak, aby jedna presne kopírovala druhú, až na znamienko.



Akým spôsobom by sa dal takýto komplot na diaľku dosiahnuť sa nevie. Newton si bol vedomý, že jeho model má črty, ktoré sa mu nepozdávali. V súlade so zásadou "hypotheses non fingo" nechal na svojich čitateľov akými úvahami nejasnosti doplnia, prípadne akými novými poznatkami sa podarí nájsť dosť podkladov na rozumnú hypotézu.

4.7 Prejav sily či neinerciálnosti?

Predstavme si, že pozorujeme pohyb nejakého telesa a jeho pohyb v našich súradniciach nie je daný ako rovnomerný priamočiary. Súradnice telesa nie sú lineárnymi funkciami času. Čo to znamená? Ak je to voľné teleso, naša vzťažná sústava je týmto automaticky diskvalifikovaná z význačnej triedy inerciálnych, keďže nespĺňa nutnú podmienku na zaradenie sa k nim. Ak však na teleso pôsobí nejaká sila, je nerovnomernosť jeho pohybu potrebné pripísať jej podľa druhého Newtonovho zákona.

Ako vieme, či sme narazili na prejav nejakej sily alebo neinerciálnosti našej sústavy?

Odpoveď je veľmi prozaická. Robíme čo sa dá. Pokúsime sa nájsť voľné "testovacie telesá". Zabezpečíme aby boli elektricky neutrálne, odčerpáme vzduch a vyhladíme všetko tak aby sme eliminovali interakciu s prostredím, jednoducho odtienime vplyvy ktoré môžeme odtieniť, a skúmame pohyb týchto telies. Nastavíme naše súradnice tak aby mali súradnicové krivky pozdĺž trajektórií takýchto testovacích telies a nastavíme hodinky tak aby tikali spôsobom zladeným s pohybom našich voľných telies (v štýle "rovnaká vzdialenosť - rovnaký počet tiknutí"). Skontrolujeme či v našej vzťažnej sústave je hybnosť izotropná, teda či si interagujúce telesá spôsobia vzájomne zmenu hybnosti takého smeru, orientácie a veľkosti, že celková hybnosť systému sa vzájomnou interakciou častí nezmení. Keď sme takto vyladili svoju súradnú sústavu, budeme teleso ktoré sa v nej nepohybuje rovnomerne priamočiario považovať za ovplyvnené nejakou externou silou.

Avšak je tu jedna vec na zamyslenie pri zmienenom "odtieňovaní vplyvov". Gravitáciu ťažko globálne odtieniť čo i len v princípe. Už aj v rámci skúmania relevantnosti Newtonových zákonov pre tento vesmír bude azda vhodné sa niekedy bližšie pozrieť na tento jav.

5 Význačné vzťažné sústavy - výhľady k špeciálnej relativite

Potom čo sme si zopakovali Newtonove zákony, zopakujme si ešte pre koho platia v uvedenej forme. Inerciálni pozorovatelia sa (podobne ako Newtonove zákony) vyznačujú rešpektom voči istým symetriám, čo súvisí s výberom kriviek ktoré si zvolili ako význačné, referenčné, ako krivky tvoriace ich súradnicovú sieť. Trajektórie a parametrizácie voľných telies (alebo jednoducho svetočiary voľných telies) sú podľa prvého zákona veľmi význačné, a teda inerciálni pozorovatelia budú mať svoj súradný systém "nalinkovaný" pomocou nich. Každá **súradnicová krivka** takého pozorovateľa je *nastavená* tak, že môže v princípe predstavovať trajektóriu voľného telesa, a **tikanie hodín**

tohto pozorovateľa je *nastavené* tak, aby pohyb voľného telesa pozdĺž takejto trajektórie sa ukazoval rovnomerný.

Už sme spomínali, že naše naozaj technicky prevedené súradné sústavy boli dosiaľ vždy len **približne inerciálne** (okrem iného je ťažké zohnať naozaj voľné teleso). Súradnicové priestorové krivky, "referenčné priamky" sa ukazujú v bežných prípadoch dostatočne presne spĺňať axiómy euklidovskej geometrie, a tento model sa s úspechom používa na praktické účely. Význačná súradná sústava je potom (čo do priestorovej časti; čas sa obvykle berie ako parameter) bežná kartézská ako ju poznajú deti už na základných školách.

5.1 Relatívne a absolútne veličiny v newtonovskej mechanike. Grupa symetrie Newtonových rovníc.

Pomocou Newtonových zákonov môžeme vylúčiť veľkú časť súradných sústav ako "nepreferovaných". Ale v triede "**vyvolených**" aj tak ostáva veľké množstvo **rôznych**, v istom zmysle však **rovnocenných**, ekvivalentných pozorovateľov. Títo všetci sa niečím líšia (preto rôzni), majú však niečo dôležité spoločné (preto ekvivalentní). Toto je typický znak **symetrie**. Ak prejdeme od jednej vzťažnej sústavy k inej (prechod daný nejakou matematickou **transformáciou** súradníc), čosi pre naše účely podstatné sa *zachová*, ostane **invariantné**. V prípade newtonovskej mechaniky je podstatnou vecou iste tvar Newtonových zákonov. Povedzme že máme nejakú inerciálnu vzťažnú sústavu S , s pozorovateľom v ktorého súradniciach (t, x, y, z) je pre pozorované telesá zotrvačnosť homogénna a izotropná, a silou ovplyvnené telesá vykazujú zmenu hybnosti ako druhý zákon hovorí. Nanajvýš ako sa od tohto pozorovateľa môže líšiť iný, aby bola aj jeho sústava S' zaradená do význačnej inerciálnej triedy? (Ako sa môžu líšiť súradnice (t', x', y', z') od súradníc (t, x, y, z) ?)

Ukazuje sa, že všetky možné transformácie danej inerciálnej sústavy S , ktoré vedú k tiež inerciálnej sústave S' (teda ktoré zachovávajú tvar Newtonových zákonov), sú

- euklidovské rotácie v priestore (zodpovedajú pozorovateľom s rôzne natočenými priestorovými súradnými osami; nemyslí sa tu rotujúca sústava)
- translácie v priestore (zodpovedajú pozorovateľom s posunutými počiatkami priestorových súradníc)
- translácie v čase (zodpovedajú pozorovateľom s posunutým počiatkom merania času)
- tzv. galileovské boosty (zodpovedajú pozorovateľom pohybujúcim sa rovnomerne priamočiaro)

Povolená je aj kombinácia vyššie uvedených transformácií. O množine všetkých takýchto transformácií hovoríme ako o **grupe symetrie Newtonových zákonov**. Grupy sú náramne užitočný matematický objekt. Pomáhajú matematicky podchytiť pojem symetrie. Modely vo fyzike, ktoré sa ukázali byť užitočné, sa nejakou symetriou vyznačovali prakticky všetky.

Symetria súvisí aj s pojmom **relativity a absolútosti**. Ak máme nejakú triedu objektov (tu to boli pozorovatelia, alebo ich vzťažné sústavy) ktoré sú si v istom zmysle rovnocenné, ale nie rovnaké, potom sa rozličné ich atribúty dajú rozdeliť na relatívne a absolútne nasledovne:

To, v čom sa líšia, bude **relatívne**. Keďže sú si rovnocenní, nie je k dispozícii kritérium ako rozhodnúť či hodnota atribútu je "tá správna". V prípade našich inerciálnych pozorovateľov v newtonovskej mechanike je relatívna napríklad rýchlosť telies. Z hľadiska jednej inerciálnej sústavy S môže byť pozorované teleso v pokoji, z hľadiska sústavy S' ktorá sa voči S pohybuje rovnomerne priamočiaro sa teleso bude pohybovať rovnomerne priamočiaro. Keďže S aj S' sú rovnocenné, nemáme ako rozhodnúť akú rýchlosť má teleso v absolútnom zmysle. Jeho rýchlosť je relatívna - závisí od toho kto meria. Podobne je to pre jednotlivé priestorové a časové súradnice udalostí -

pozorovatelia s posunutými hodinkami či počiatkami súradných osí, prípadne ich natočením, sa na spomenutých údajoch nezhodnú.

To, v čom sa zhodnú, je **absolútne**. Napríklad u našich pozorovateľov z význačnej newtonovskej triedy je absolútna vzdialenosť dvoch udalostí, časový interval ktorý medzi nimi uplynul, zmena rýchlosti telesa, tvar Newtonových rovníc...

5.2 Čo bolo skôr: invariant alebo význačná trieda?

Ako vlastne budujeme teóriu? Začínáme s niečím čo považujeme za absolútne, a hľadáme triedu pozorovateľov, ktorí sa na tom zhodnú, prehlásiac ich za význačných a ekvivalentných lebo sa zhodli na našom predpokladanom invariante? Alebo začneme s nejakou triedou pozorovateľov, ktorých prehlásime za význačných a medzi sebou ekvivalentných (prehlásiac rozdiely medzi nimi za nepodstatné), a hľadáme na čom sa zhodnú, a to potom prehlásime za absolútnu vec?

Z matematického hľadiska by sme mohli budovať model z jedného či druhého konca, podľa toho ktorý vezmeme za "daný". Vo fyzike sa oplatí neustále obzerať čo robí príroda a našť model na mieru pozorovanému. A tak ideme z toho konca, na ktorý máme zrovna viac podkladov. Niekedy je ťažko rozhodnúť z ktorého konca vlastne ideme, osobitne keď sme tak navyknutí na myšlienku, že niečo musí byť invariant, a už máme zažitú, aká trieda pozorovateľov z toho vyplýva.

Príklad: Uvažujme inerciálneho pozorovateľa so sústavou S . Nech druhý pozorovateľ so sústavou S' sa od neho líši len nastavením hodín - zabudol si letný čas aj v zime. Za fyzikálne podstatné nepokladáme tie údaje, v ktorých sa naši dvaja pozorovatelia líšia (časové súradnice ktoré priradia udalostiam). Za relevantné považujeme údaje, na ktorých sa zhodnú (časové intervaly medzi udalosťami). Napríklad v sústave S sviečka bola zapálená o šiestej večer a zhasla o ôsmej; v sústave S' bola zapálená o siedmej a zhasla o deviatej. Fyzikálne relevantný je napríklad fakt, že sviečka mala dosť vosku na dvojhodinové horenie, a na tom sa obaja pozorovatelia zhodli. Tu sa porovnateľne ponúkajú obe možnosti: prehlásiť oboch za rovnocenných, na základe úvahy že predsa sa líšia len niečím o čo sa príroda nebude starať, aj vyhlásiť, že to, čo majú spoločné, je podstatná vec, a tak sú na základe zhody na nej rovnocenní.

Niekedy je azda primárnejšie postulovanie/predpoklad že niečo je invariantné, a hľadá sa najväčšia trieda pozorovateľov ktorá sa na tom zhodne.⁵ Alebo máme dve veci, z ktorých každá je invariantná voči inej triede pozorovateľov, a skúmame, či nás k lepšej zhode s experimentom privedie predpoklad o absolútnosti jednej alebo druhej. Tak tomu bolo pri zistení že Maxwellove rovnice klasického elektromagnetizmu a Newtonove rovnice klasickej mechaniky majú rôzne triedy "význačných pozorovateľov".

5.3 Príklad transformácie súradníc - pootočenie

Uvedme si pre ilustráciu konkrétne transformácie súradníc ktoré prepájajú rozličné súradné sústavy bez toho aby menili ich zaradenie do inerciálnej triedy:

Rotácia v rovine xy o konštantný uhol α "domieša" priestorové súradnice x a y . Pozorovatelia sa zhodnú na počiatku súradnej sústavy, na všetkých časových údajoch ($t = t$), na vzdialenostiach

⁵Napríklad kauzalita súvisí s predpokladom, že poradie udalostí, ktoré môžu byť príčinne spojené je absolútne - ak jeden pozorovateľ vidí udalosť A ako príčinu a udalosť B ako následok, tak tento vzťah má platiť pre každého pozorovateľa, s ktorým sa mienime vôbec zaoberať. Toto mimochodom pripúšťa vcelku širokú triedu súradných sústav, a ešte väčšiu ako používa špeciálna relativita.

bodov, ale nie na konkrétnych priestorových súradniciach bodov. Tieto budú súvisieť nasledovne:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Samozrejme ak sa zmenia súradnice pozičného vektora častice, iste sa zmenia aj súradnice vektora jej rýchlosti a zrýchlenia. Ale transformujú sa rovnakou rotačnou maticou R akou sa transformovala pozícia. To isté platí aj pre súradnice vektora pôsobiacej sily.

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' = R\vec{r} \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{v}' = R\vec{v} \\ \vec{a} &\rightarrow \vec{a}' = R\vec{a} \\ \vec{F} &\rightarrow \vec{F}' = R\vec{F} \end{aligned}$$

Druhý Newtonov zákon teda v pootočenej sústave nakoniec bude vyzeráť tak ako v pôvodnej; ak platil tam, bude aj tu, a opačne:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} \\ mR\vec{a} &= R\vec{F} \\ m\vec{a}' &= \vec{F}' \end{aligned}$$

Čo sa týka prvého a tretieho zákona, budú tiež platiť v pootočenej aj pôvodnej sústave rovnako - pootočená priamka je stále priamka a ak pootočíme akciu a reakciu rovnako, ich vzťah sa tiež zachová ako bol.

5.4 Príklad transformácie súradníc - galileovský boost

Tu máme inerciálneho pozorovateľa, ktorý má svoju vzťažnú sústavu S so súradnicami (t, x, y, z) , a uvažujeme iného pozorovateľa, ktorý sa voči prvému pohybuje rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v v smere osi x sústavy S . Povedzme že obaja mali na hodinkách čas 0 v okamihu keď sa stretli, teda keď sa ich priestorové počiatky zhodovali. Nech orientácia ich osí je rovnaká. Potom ich súradnice sú vo vzťahu:.

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Títo pozorovatelia sa zjavne nezhodnú na x -ovej zložke polohy ani rýchlosti pozorovaných telies; napríklad teleso v pokoji voči S' sa bude vzhľadom na S pohybovať. Ale zhodnú sa na zrýchleniach telies; pre y -ovú a z -ovú je to samozrejmé, a pre x -ovú po chvíli tiež:

$$a'_x = \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d^2 (x - vt)}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} = a_x$$

Pôsobiaca sila ostáva v oboch sústavách rovnaká, a teda druhý zákon platí v oboch sústavách ak platí v jednej. Čo sa týka prvého zákona, všetky telesá ktoré sú z hľadiska sústavy S v rovnomernom priamočiarom pohybe alebo v pokoji sú takými aj z hľadiska sústavy S' . Nezhodnú sa na rýchlosti, ale to sa ani nepožaduje. Zhodnú sa na zmenách rýchlosti a teda zmenách hybnosti; tretí zákon platí v oboch ak platí v jednej z nich.

6 Newtonov gravitačný zákon

Poučku o gravitačnom pôsobení medzi hmotnými telesami sa učia už deti na základnej škole. Treba si dať pozor, aby nás notorická známosť formulky nezviedla k domnienke, že už niet ohľadne nej o čom uvažovať. Newtonov gravitačný zákon, jeho úspech i limity poskytujú typický príklad budovania modelov vo fyzike. Keďže s fyzikou nie sme zďaleka hotoví (v kontraste s mienkou ktoréhosi gentlemana krátko predtým než ňou otriasli teórie relativity a kvantovej mechaniky), je dobré vedieť, aké stratégie boli úspešné v minulosti (úspechom sa tu myslí lepší vhľad, všeobecnejšia uplatniteľnosť, lepšia predikčná schopnosť modelu). Schopnosť budovať rozumné modely- reprezentácie javov- je extrémne užitočná kvalita pre ľudí z vedeckých aj technických oborov - preštudovať si exemplárny príklad je teda všeobecne užitočné cvičenie.

Začnime tým, čo je notoricky "známe": Ak teleso hmotnosti M je v strede súradnej sústavy (toto môžeme predpokladať bez ujmy na všeobecnosti), a teleso hmotnosti m je v pozícii danej vektorom $\vec{r}$ (teda sú od seba vo vzdialenosti r), potom každé z nich pôsobí na druhé silou úmernou súčinu ich hmotností a nepriamo úmernou štvorcu ich vzdialenosti

$$F = \kappa \frac{Mm}{r^2}$$

Smer a orientácia sily: Teleso M pôsobí na teleso m silou smerujúcou pozdĺž spojnice do stredu, teda jednotkový vektor charakterizujúci smer a orientáciu tejto sily je $-\vec{r}/r$:

$$\vec{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Táto stručná formulka je podľa klasickej mechaniky použiteľná na ohromnú škálu situácií, od predpovedania návratu komét a zatmení Mesiaca po výpočet stočenia wolframového vlákna v Cavendishových váhach kdesi na stole školského laboratória. Ak má naozaj takúto univerzálnu platnosť, bude v nej pravdepodobne čosi hlboké. Pozorovania ukazujú, že neplatí celkom presne; ale pravdepodobne v niečom je blízka "správne mu modelu" (niežeby sme taký už naisto definitívne mali). Niekedy sa o neznámom môžeme poučiť pomocou jeho príbuzných. A newtonovský model je dosť príbuzný "tomu pravému" na to, aby sa použil pri výpočtoch, ktoré pomohli dostať ľudí na Mesiace a späť (živých). Poďme sa teda pozrieť na aspekty tej krátkej formulky.

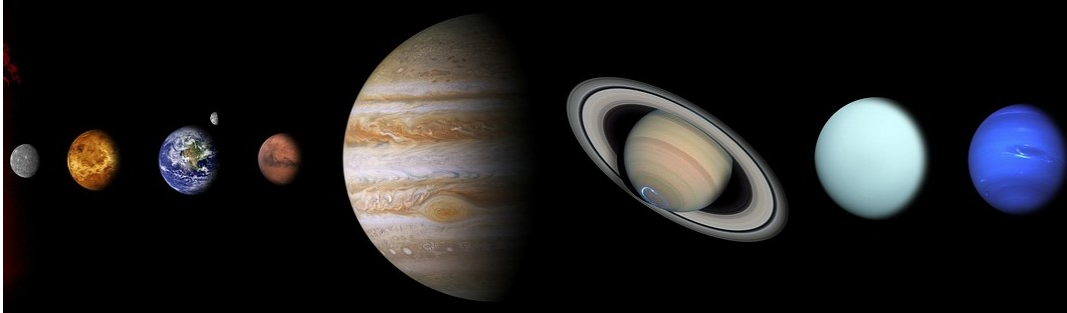
6.1 Univerzálna gravitačná konštanta

Vo formulke máme konštantu úmernosti κ - hovorí sa jej **univerzálna gravitačná konštanta**. A Newtonovmu zákonu sa hovorí "zákon **univerzálnej** gravitácie". V čom je táto univerzálnosť? Sme už tak zvyknutí na formulku aj prívlastok, že si možno ani neuvedomujeme, aký jednotiaci princíp je tu vyslovený. Predstavme si, že máme k dispozícii aparaturu na meranie hmotností, vzdialeností a síl. Newtonov gravitačný zákon okrem iného hovorí, že ak pre dve telesá zmeriame ich hmotnosti M, m , vzdialenosť r a vzájomnú gravitačnú silu F , potom hodnota $\frac{Fr^2}{Mm}$ je číslo nezávislé od toho, kedy a kde vo vesmíre sme meranie previedli, ani od toho či dve telesá boli dvojica hviezd, klokanov, Zem a jablko, Zem a Mesiace, špendlík a vidlička,... pre všetky má spomínaný výraz hodnotu κ . Mesiace poslúcha ten istý princíp ako jablko v záhrade. Odľahlé kúty sveta sú akosi zjednotené v princípoch na ktorých bežia. Nestrať niť spoločného základu, uvedomiť si že obe telesá padajú k Zemi, rozoznať že odlišnosti mesačného a jablkového scenára sú artefaktom odlišných počiatkových podmienok... si vyžaduje hlboké uvažovanie a iskru geniality. My si však môžeme užiť pointu tak, ako si užívame detektívnu zápletku a rozuzlenie, na ktoré by sme sami neprišli. A na tomto klasickom detektívnom príbehu si natrénujme pozornosť pre lepšie ocenenie tých, čo budú nasledovať.

6.2 Izotropia gravitácie a jej vizuálny prejav

Ďalšia zaujímavá vec v gravitačnom zákone je jeho symetria. Podobne ako pri troch pohybových zákonoch, aj tu sa jedná o existenciu nejakých "rozličností" ktoré sú nedôležité z hľadiska niečoho

čo dôležité je. V tomto prípade je veľkosť gravitačnej sily nezávislá od smeru v ktorom leží spojnice dvoch pôsobiacich telies. Ak vezmeme naše teleso M ako fixované v strede, na teleso m bude pôsobiť rovnako veľká sila vo všetkých miestach vzdialených r od M . Dá sa uvažovať, či sa jedná o **izotropiu** gravitácie alebo priestoru. Na úrovni newtonovskej mechaniky sa pravdepodobne prikloníme k tomu, že sa minimálne jedná *aj* o symetriu priestoru, ako naznačuje neskorší odstavec o "poklese s prevráteným štvorcom vzdialenosti". Ešte neskoršie po pojednaní o bytostnom prepojení gravitácie s časopriestorom bude otázka zníť dokonca trochu absurdne.



Symetrii, o ktorej tu hovoríme, sa niekedy hovorí "sférická", keďže množiny bodov v okolí centrálného telesa (M) ktoré sú ekvivalentné (z hľadiska veľkosti gravitačnej sily na iné teleso hmotnosti m) sú sféry. Keď sa poobzeráme po vesmíre, vidíme že sférická symetria je veľmi "oblúbená" - všetky väčšie telesá slnečnej sústavy sú približne guľovitého tvaru. Keďže vznikali gravitačným zbieraním materiálu, ich viditeľný tvar vlastne odráža symetriu zákona ktorý do istej miery "vidíme" reprezentovaný našou formulkou. Reprezentovaný ňou, nie identifikovaný ňou - ako sme už spomínali, naše matematické reprezentácie sú prinajlepšom užitočné avatary, dúfajme odrážajúce veľa aspektov skutočnosti.

6.3 Gravitačné pole - intenzita

Doposiaľ sme hovorili o gravitačnej sile. Tento pojem si vyžaduje aspoň dve telesá. Nemá význam hovoriť o tom, ako nejaké jedno hmotné teleso M pôsobí silou v nejakom bode, pokiaľ tam nie je iné teleso, na ktoré by bolo pôsobené. Nakoniec podľa tretieho zákona každá sila vyžaduje reakciu od telesa na ktoré pôsobila, a ťažko obhájjime ako by samotný bod takú reakciu poskytol v rámci klasického modelu. Ak skúmame situácie, kde je jedno prominentné teleso z hľadiska hmotnosti, ako napríklad Zem v okruhu niekoľkých státisícov kilometrov, často sa nám zide mať "zmapované" jeho okolie z hľadiska jeho gravitačného vplyvu - skúmať *potenciálnu* silu ktorá *by* pôsobila na nejaké "prieskumné/testovacie" teleso na rozličných miestach. Toto testovacie teleso nech má pre praktické výpočtové účely jednotkovú hmotnosť. Takejto hypotetickej sile pripadajúcej na hypotetické teleso jednotkovej hmotnosti v danom mieste sa hovorí **intenzita** gravitačného poľa (telesa M):

$$\vec{E} = -\kappa \frac{M}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

Intenzita je **vektorové pole** popisujúce gravitačný vplyv telesa ktoré ho budí; má zmysel o nej hovoriť či už sa zrovna v okolí testovacia častica nachádza alebo nie. Intenzita umožňuje popísať pole vektorovo - každému bodu pripíšeme vektor. Jeho veľkosť hovorí kvantitatívne o miere pôsobenia na hypotetickú časticu jednotkovej hmotnosti, jeho smer a orientácia hovoria o smere a orientácii tohto pôsobenia v priestore.

Na ilustráciu užitočnosti pojmu intenzity si tu spomeňme prípad ktorý sa používa v praxi veľmi často. V blízkom okolí je ako prominentne hmotné teleso bez konkurencie naša Zem. Keď sa čitateľ poobzerá po predmetoch ktoré má na dosah ruky, všetky vykazujú dôsledky gravitačného pôsobenia Zeme na ne. Interakcie medzi nimi navzájom sú oproti tejto prominentnej zanedbateľné. Pre výpočty pohybov blízko povrchu Zeme sa (pokiaľ ide o gravitačné pôsobenie) väčšinou stačí obmedziť na priťahovanie medzi Zemou a sledovaným telesom. A medzi Zemou a ďalším sledovaným

telesom, atď. Znamená to časté vyčísľovanie výrazu $\kappa \frac{M_z m}{R_z^2}$, kde M_z je hmotnosť Zeme, R_z jej polomer, a m je premenná za ktorú dosadzujeme hmotnosť telesa ktorého pohyb v gravitačnom poli, práve študujeme. Ako vidíme, pre rozličné telesá tu vo výpočte vždy vystupuje spoločný výraz $\kappa \frac{M_z}{R_z^2}$, násobený gravitačným nábojom daného telesa m . Po niekoľkých výpočtoch človek uzná že opakujúca sa veličina sa oplatí spočítať "zvlášť", pomenovať a používať ako skratka. V prípade situácií blízko povrchu Zeme, pre ktoré môžeme vzdialenosť od jej stredu považovať za približne rovnú jej polomeru (pár desiatok metrov je malá časť tisícok kilometrov), má táto veličina hodnotu približne $9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Táto špecifická veľkosť **intenzity gravitačného poľa Zeme blízko povrchu** sa často sa značí symbolom g .

6.4 Poučenie z turistiky - po vrstevniciach a naprieč nimi

O intenzite možno uvažovať v kontexte mnohých javov, nielen gravitačného poľa. Vektorové polia všeobecne majú ešte širšie uplatnenie. Pre obohatenie intuície, skúsme si vektorové pole ilustrovať na konkrétnom príklade: spád terénu. Predstavme si horský terén a nás ako geodetov snažiacich sa ho zmapovať. Pri tomto mapovaní pre turistické účely má veľký význam strmosť svahov. Predstavme si teda vektorové pole "intenzity svahu"- strmosti. Ako každé vektorové pole, má v každom bode svoju mieru (existujú strmšie a miernejšie stúpania/klesania), smer (kopce majú v niektorých smeroch miernejšie svahy ako v iných) a orientáciu (stúpanie doľava znamená klesanie doprava a pod.).



Napriek tomu, že informácia o spáde je iste užitočná pri plánovaní trasy, turistické mapy obvykle neobsahujú vektorové dáta. Namiesto šípky/vektora v každom mieste máme mapu pokreslenú krivkami charakterizovanými jedným číslom, **vrstevnicami**. Krivky nie sú z praktických príčin nakreslené nekonečne husto, ale očividne sa model myslí tak, že cez každý bod prechádza práve jedna krivka. Nepretínajú sa. A napodiv sa z tohto modelu dá vyčítať o teréne toľko informácie akoby sme mali vektorové dáta o spáde. Vieme na základe hustoty a číslovania susedných vrstevníc povedať ktorým smerom je aké stúpanie či klesanie. Pozdĺž vrstevnice žiaden spád, kolmo na ňu maximálny v danom mieste. Podľa hustoty vrstevníc v okolí vieme určiť mieru strmosti. Všimnime si že vektorové pole (intenzita, strmosť, spád) - niekoľko čísel na každý bod bolo nahradené **skalárnym poľom** - ktoré priradzuje iba jedno číslo každému bodu. V našom turistickom podobenstve máme skalárne pole nadmorskej výšky. Takéto skalárne pole vo fyzike niekedy voláme **potenciálom**.

6.5 Gravitačné pole - potenciál

Vráťme sa ku gravitácii - aj tu existuje skalárne potenciálové pole, označme si ho pre prítomné účely ako ϕ . Jeho záporný **gradient** $-\vec{\nabla}\phi$ je vektorové pole intenzity.

Uveďme si paralely gravitačného poľa s našou turistickou ilustráciou:

- potenciál (skalárne pole) ϕ - nadmorská výška
- gradient potenciálu, intenzita (vektorové pole) $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ - spád, strmosť svahu
- ekvipotenciálne množiny (na nich má ϕ konštantnú hodnotu) - vrstevnice
- Pri pohybe po ekvipotenciálnej množine pole neovplyvňuje rýchlosť (neurýchľuje ani nespomaľuje, intenzita poľa má nulový priemet/ zložku v smere dotyčnicovom k takej množine). Pohyb po horách po vrstevnici nevyžaduje stúpať proti zemskej príťažlivosti ani brzdiť aby nás neurýchlila dole príliš.
- Intenzita je kolmá na ekvipotenciálne množiny. Svah sa najprudšie mení v smere kolmom na vrstevnice.

6.6 Vzťah intenzity - potenciál

Podobne ako existuje vzťah medzi vrstevnicami a strmou terénu, existuje vzťah medzi potenciálovým a jemu príslušným intenzitným poľom. Vektorové pole intenzity $\vec{E}$ je záporným **gradientom** skalárneho poľa potenciálu ϕ :

$$-\vec{\nabla}\phi = \vec{E}$$

V kartézskych súradniciach sú teda zložky $\vec{E}$ vyjadrené ako parciálne derivácie ϕ v smere súradných osí:

$$-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (E_x, E_y, E_z)$$

Intenzite gravitačného poľa buďného telesom hmotnosti M situovaným v strede súradnej sústavy potom v bode danom pozičným vektorom $\vec{r}$ prislúcha potenciál

$$\phi(\vec{r}) = -\kappa \frac{M}{r}$$

Potenciál je daný až na integračnú konštantu, ktorú obvykle volíme s ohľadom na nadchádzajúce výpočty - často nulovú hladinu potenciálu volíme v nejakom význačnom mieste pre danú aplikáciu. Napríklad pre výpočty astronomických predpovedí je význačným miestom nekonečno (okrem iného je rovnako vzdialené od všetkých hviezd a planét pre ktoré výpočty prevádzame). Aj my sme tu počítali s takou konvenciou.

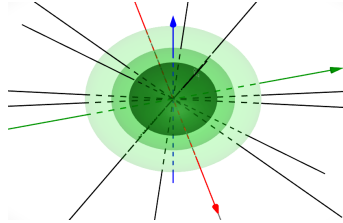
6.7 Pokles intenzity so štvorcom vzdialenosti

Veľkosť intenzity gravitačného poľa so vzdialenosťou klesá - v súlade so skúsenosťou že bližšie telesá majú na seba väčší vplyv. Prečo klesá s druhou mocninou? Prečo ak dáme dve telesá trikrát ďalej, klesne sila deväťkrát? Prečo nie tiež trikrát? Prečo nie dvadsaťsedemkrát?

Pokles miery interakcie so štvorcom vzdialenosti súvisí so symetriou priestoru a jeho trojrozmernosťou. Od čias Michaela Faradaya poznáme veľmi názorný **siločiarový model** poľa. Azda by sme ho mohli ešte lepšie volať **intenzitočiarový** model, keďže obvykle sa kreslí ako súbor myšliených čiar pozdĺž ktorých *by* pôsobila sila na testovacie teleso ktoré by do daného poľa prišlo.

Povedzme že v rámci modelu budeme kresliť M siločiar na každú jednotku hmotnosti zdrojevého telesa (aby sme nejako kvantitatívne rozlíšili polia buďné telesami rozličných hmotností).

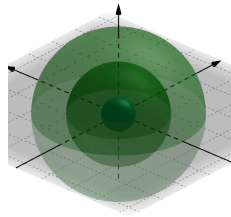
Uvažuje teraz ako závisí **hustota siločiar** od pozície v priestore. Model je **izotropný** vzhľadom na stred daný pozíciou telesa budiaceho pole - siločiar sa zbiehajú izotropne k nemu. Dôvodom je **symetria priestoru** - ak nie je dôvod uprednostniť nejaké smery, rozložíme siločiar rovnomerne do všetkých strán od zdroja. Izotropia ako symetria nám umožňuje **rozdeliť body priestoru do množín ekvivalencie** - "rovnocenných" bodov - v našom prípade ich voláme **ekvipotenciálnymi plochami**. Rovnocennosť je tu myslená v zmysle "odlišnosť len (z hľadiska poľa) nepodstatným atribútom" - tu je takým atribútom smer od stredu.



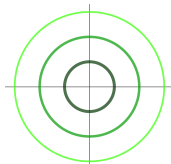
Ekvipotenciálne plochy sú v našom prípade sféry s centrom v počiatku - intenzita je všade kolmá na danú plochu a pre každý bod danej plochy rovnako veľká. Všimnime si teraz **hustotu siločiar**. Ak by predstavovali prúdenie niečoho, aký by bol **"prietok" našimi ekvipotenciálnymi plochami**? Počet siločiar je konštantný, každou sférou ich prebieha rovnaký počet (ako sme spomínali, daný výdatnosťou zdroja poľa, tu hmotnosti). Čo sa však zo sféry na sféru mení je samozrejme hustota týchto siločiar. Ak sa M siločiar má rovnomerne rozložiť na sféru s polomerom r , bude počet siločiar na jednotku plochy nepriamo úmerný štvorcu vzdialenosti, pretože plocha sféry je mu úmerná. **Ekvipotenciálne plochy, množiny bodov s rovnakou hustotou siločiar, sa zväčšujú so štvorcom vzdialenosti, a hustota siločiar reprezentujúca intenzitu poľa s ním klesá.**

Všimnime si ešte, aký je vzťah medzi poklesom intenzity so vzdialenosťou a dimenziou priestoru. Predpokladajme euklidovskú geometriu - ukazuje sa byť pomerne dobrým priblížením. "Výdatnosť" zdroja poľa sa rovnomerne rozkladá medzi všetky body v rámci triedy ekvivalencie. Čím viac deliacich sa, tým menej pripadne na jedného. Teda intenzita izotropného poľa klesá s mierou množiny "rovnocenných" bodov (ekvipotenciálnou plochou).

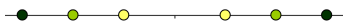
- V 3D je miera bodov s rovnakou vzdialenosťou od daného stredu úmerná štvorcu vzdialenosti ($4\pi r^2$), preto intenzita so štvorcom vzdialenosti klesá. Trojnásobnej vzdialenosti prislúcha deväťkrát menšia intenzita.



- V 2D je miera bodov vzdialených rovnako ďaleko od stredu úmerná vzdialenosti r , lebo "mera" kružnice je $2\pi r$. Hustota siločiar, a teda aj intenzita, by tam klesala s prvou mocninou vzdialenosti. Trojnásobnej vzdialenosti prislúcha trikrát menšia intenzita.



- V 1D sú množiny bodov s rovnakou vzdialenosťou od stredu dané dvojicami bodov. So vzdialenosťou miera týchto množín ekvivalencie neklesá, preto ani hustota siločiar a intenzita poľa. Trojnásobnej vzdialenosti prislúcha stále tá istá intenzita.



6.8 Intenzita a sila, potenciál a potenciálna energia

Intenzita a potenciál sú charakteristiky vplyvu nejakého hmotného telesa v okolí; má význam hovoriť o nich bez ohľadu na to, či sa kdesi nablízku nachádza testovacie teleso, ktoré by podliehalo tomuto vplyvu. Sú však zavedené, aby sa taký vplyv ľahko počítal keď sa také testovacie teleso hmotnosti m nájde: pomocou intenzity a potenciálu vyjadríme **silu** na testovacie teleso a **potenciálnu energiu** ktorú v danom poli má: Ak sa v poli nachádza teleso hmotnosti m , sila naň bude

$$\vec{F} = m\vec{E} = -m\vec{\nabla}\phi$$

Z tohto hľadiska máme teda gravitačnú silu pôsobiacu na testovacie teleso m vyjadrenú ako súčin dvoch faktorov: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ charakterizuje pole, a m je akýsi "gravitačný náboj" častice ktorá do toho poľa prišla.

Potenciálna energia tohto telesa bude

$$U = m\phi$$

Opäť tu vidíme podobný vzorec: jeden faktor charakterizujúci pole (ϕ), druhý predstavujúci "gravitačný náboj" (m).

6.9 Konzervatívna sila, potenciál

Popis interakcie pomocou potenciálu je veľmi užitočná vec. Je pre každú interakciu možná takáto reformulácia dát? Dá sa vždy namiesto vektorového nájsť skalárny popis, nejaká funkcia definovaná na priestore, priradujúca každému bodu v priestore číslo? Je to možné pre gravitačné pole a niekoľko ďalších. Nie vo všeobecnosti - v matematickej všeobecnosti prinajmenšom.

Sily v prírode sú na prvý pohľad rozličného druhu - a predsa niekedy sa za zdanlivo nepríbuznými javmi nájde spoločný princíp. Z praktických dôvodov si ponechávame aj označenia síl, ktoré neodrážajú zatiaľ najhlbšie nájdené princípy. Keď technik popisuje tlmiče v stroji, nebude sa odvolávať na elektromagnetické alebo dokonca spinové javy medzi elementárnymi časticami hmoty, popíše systém pomocou "sily pružiny". Podobne postupuje použije efektívny, skrútený popis pre interakciu medzi povrchmi telies pomocou trecej sily, interakciu molekúl plynu a molekúl piestu pomocou tlakovej sily atď. Newtonove rovnice sú pripravené prijať na svoju "silovú stranu" aj takéto efektívne sily. Ale samozrejme pokiaľ sa v skúmaných javoch objaví niečo, čo ich viaže dohromady, treba za tým ísť. Vo fyzike totiž existuje akýsi nepísaný zákon, empiricky overený lepšie ako klasická mechanika: objavenie hlbšej súvislosti a prispôbenie našich "matematických avatarov" (reprezentácií pojmov a javov - ako funkcie, tenzory, diferenciálne operátory atď) tak, aby táto hlbšia súvislosť bola explicitne vidieť, vedie k jednoduchším, všeobecnejšie platiacim modelom.

Čo sa týka interakcií v prírode, zatiaľ to vyzerá tak, že počet tých základných nie je viac ako 4, alebo azda 3, pretože jedna z nich (gravitácia) sa zdá byť lepšie uchopiteľná ak sa reprezentuje ako geometrický artefakt, nie "sila". Existujú modely, ktoré dávajú zvyšné tri interakcie (elektromagnetická, silná a slabá) akosi "pod jednu strechu". Toto nie je uzavretá kapitola vo fyzike, a nejdeme hľbať nad prognózami, ale skonštatujeme jednu dôležitú črtu, ktorú majú tieto zatiaľ

pre nás fundamentálne interakcie spoločné - všetky sú tzv. **"konzervatívneho typu"** - dajú sa modelovať pomocou **potenciálového poľa**, umožňujúceho pripísať konfiguráciám častíc **potenciálnu energiu**. V uzavretých systémoch, kde sú všetky interakcie konzervatívne sa (ako názov napovedá) **zachováva** istá veličina, celková **energia**. Táto skutočnosť robí možnými výpočty aj tam, kde Newtonove rovnice dávajú buď príliš zložité výpočty, alebo ani nie jasné ako ich sformulovať. Samotný fakt, že všetky fundamentálne pôsobenia vo fyzike ako ich zatiaľ poznáme sú tohto konzervatívneho typu z neho robí vhodného adepta na hlbšie zamyslenie.

6.10 Gravitačný náboj a zotrvačnosť

V predchádzajúcich paragrafoch sme si uviedli hmotnosť telesa ako **"gravitačný náboj"**, akúsi **mieru, akou interaguje s gravitačným poľom** ak do nejakého príde. V newtonovskej mechanike nemáme apriori dôvod predpokladať že tento gravitačný náboj, miera tendencie interagovať gravitačne, je nejako korelovaný s **mierou zotrvačnosti** telesa vystupujúcou v druhom Newtonovom zákone ako inerciálna (zotrvačná) hmotnosť. Nakoniec spomínaný druhý zákon je myslený pre akúkoľvek silu; hmotnosť uvedená v ňom je miera zotrvačnosti voči pôsobeniu akejkoľvek sily. Prečo by táto miera zotrvačnosti mala byť daná práve gravitačným nábojom telesa? Prečo nie jeho elektrickým nábojom, prípadne ešte inými veličinami charakterizujúcimi teleso?

A predsa experimentálne sa **rovnosť** oboch veličín, inerciálnej hmotnosti aj gravitačného náboja telesa, rovná s presnosťou na mnoho platných cifier. Nepoznáme žiaden experiment kde by ich odchýlka bola väčšia ako citlivosť daného merania. Náhoda?

Táto rovnosť má mimoriadne nápadný dôsledok (nápadnosť je miernená zriedkavými príležitosťami skúmať gravitáciu bez doprovodu iných interakcií zastierajúcich efekt o ktorom má byť reč). Napíšme si druhý zákon napríklad pre teleso zotrvačnej hmotnosti m_i s gravitačným nábojom/hmotnosťou m_g v gravitačnom poli Zeme (gravitačnej hmotnosti M_z). Teda druhý Newtonov zákon aplikujeme na prípad keď pôsobiaci silou je práve sila gravitačná. Zem nech je centrovaná do počiatku súradnej sústavy, a teleso ktorého zrýchlenie počítame, nech je v mieste s pozičným vektorom $\vec{r}$, teda v mieste kde má pole intenzitu $\vec{E}(\vec{r})$. Druhý zákon potom hovorí, že pre zrýchlenie nášho telesa platí

$$m_i \vec{a} = m_g \vec{E}$$

Ak gravitačná a inerciálna hmotnosť sú rovnaké, z výpočtu vypadnú a zrýchlenie je od nich nezávislé. Teleso sa bude pohybovať so zrýchlením daným intenzitou gravitačného poľa, nezávisle od svojho inerciálneho atribútu. Teda keby naše teleso bolo dvakrát ťažšie, dostalo by rovnaké zrýchlenie akoby bolo dvakrát ľahšie.

Čo je to za silu, ktorá urýchľuje všetky telesá rovnako?

Pre porovnanie, elektrostatičná sila urýchľuje rôzne ťažké telesá rôzne. Tiež sa dá napísať vo forme súčinu intenzity $\vec{E}_{el}$ poľa a náboja q telesa, ktorého pohyb v poli študujeme. Ak toto teleso má mieru zotrvačnosti m_i , potom podľa druhého zákona dostane v poli zrýchlenie podľa vzťahu

$$m_i \vec{a} = q \vec{E}_{el}$$

Teda ak bude mať dvakrát väčšiu zotrvačnosť, dostane dvakrát menšie zrýchlenie. Aj bežná skúsenosť s inými silami nám hovorí, že urýchliť ťažšie teleso je ťažšie. Potrebujeme tým väčšiu silu na dosiahnutie daného zrýchlenia, čím väčšiu má urýchľované teleso hmotnosť.

Gravitácia je iná.

6.11 Sila či pseudosila

Prečo je gravitácia taká odlišná od ostatných síl, prečo ten komplot zladenia sily so zotrvačnosťou telesa, na ktoré pôsobí? Čo je to za silu, ktorá je automaticky väčšia pre teleso s väčšou zotrvačnosťou, menšia pre teleso s menšou?

Treba podotknúť, že hoci nepoznáme inú silu podieľajúcu sa na takomto "spiknutí", poznáme celú triedu "**pseudosíl (fiktívnych síl)**", ktoré sa správajú presne takto. Ide o "sily", ktorým sa pripisuje zrýchlenie hoci aj voľného telesa pozorovaného *neinerciálnym pozorovateľom*, ak sa chce hrať na platnosť druhého zákona aj vo svojej sústave. Môže si pestovať fikciu, že zákon u neho platí, ale musí vymyslieť nejakých "silových agentov" zodpovedných za zrýchlenie ktoré vidí. Ak zrýchlenie v jeho sústave označíme ako $\tilde{a}$, a zotrvačnú hmotnosť pozorovaného telesa ako m_i , potom treba "domyslieť" nejakú silu $\tilde{F}$ tak aby formálne platilo $m_i \tilde{a} = \tilde{F}$.

Tieto fiktívne sily majú vlastnosť ako gravitácia - tiež sú **úmerné zotrvačnej hmotnosti** telesa, a teda po dosadení z rovnice závislosti an hmotnostiach vypadnú. V neinerciálnej vzťažnej sústave sa tiež deje "podivnosť", že všetky telesá bez ohľadu na hmotnosť dostávajú rovnaké zrýchlenie. (Pravda okrem prípadu, keď pôsobí aj "naozajstná sila", akú by za takú prehlásil aj inerciálny pozorovateľ.)

Ak napríklad sedíme vo vlaku, so súradnou sústavou danou trebárs stenami a dlážkou kupé, môžeme nejaký čas pozorovať, že všetko sa deje ako druhý zákon káže. Čo necháme na pokoji ostáva na pokoji, čo pošleme silou kamsi pôjde ako druhý zákon predpisuje. Odrazu sa však môžu všetky dosiaľ pokojné telesá pobrať k prednej stene - všetky s rovnakým zrýchlením (ak odmyslíme rôzne koeficienty trenia apod.) Čo sa stalo? Pre pozorovateľa zvonku sa stala veľmi prirodzená vec v súlade s prvým Newtonovým zákonom - najprv všetky telesá, ktoré sme my v našej vlakovej sústave vnímali v pokoji, vnímal človek na nádraží ako pohybujúce sa rýchlosťou vlaku - rovnomerne, priamočiari. Keď vlak začal brzdiť, pre človeka z nádražia všetky šálky, kufre a cestujúci jednoducho pokračovali podľa prvého zákona ako doposiaľ, ale stena vlaku tak nepokračovala, lebo bola spojená s brzdiacim zariadením a príslušnými silami. Pre nás vnútri však zrazu akási pseudosila hodila všetko o prednú stenu ⁶. Čo je zač a prečo všetko hodila s rovnakým zrýchlením nám dnu nie je jasné. Ale pre pozorovateľa vonku to ani nemôže byť inak - všetci išli rovnako rýchlo, teda všetci aj mali pokračovať rovnako rýchlo, smerom k pribrzdenej stene, ktorá bola pre všetkých tiež rovnaká.

To, čo neinerciálny pozorovateľ vníma ako porušenie Newtonových zákonov vníma inerciálny pozorovateľ ako ich potvrdenie.

Podobne je to pre Eulerovu, Coriolisovu, odstredivú "silu" atď - všetky tieto prejavy neinerciálnosti sústavy z pohľadu pozorovateľa v nich majú vlastnosť, že na telesá pôsobia priamoúmerne ich zotrvačnej hmotnosti - dávajúc im všetkým z pohľadu neinerciálneho pozorovateľa to isté zrýchlenie.

Nie je potom aj gravitácia "pseudosila", dôsledok neinerciálnosti sústavy? A nie je to vlastne dobrá správa pre principiálnu použiteľnosť Newtonových zákonov?

Spomeňme si, že v Newtonových zákonoch hral kľúčovú rolu pojem **voľného telesa**. Jeho pohyb slúžil ako štandard pojmov "rovno, rovnomerne". Ak vieme voľnú časticu zabezpečiť aspoň v princípe, môžeme mať taký štandard aspoň v princípe. Ako teda zohnať voľnú časticu? Odtienime všetky sily na ňu. Môžeme teleso odmagnetovať, elektricky zneutráliť, vyleštiť, odčerpať okolitý vzduch alebo iné odporové prostredie, odstrihnúť každú šnúрку či pružinku čo ho môže ovplyvňovať... a toto môžeme urobiť technicky dôkladnejšie alebo menej dôkladne, každopádne ak vieme

⁶Výraz "pseudo-"alebo dokonca "fiktívna sila"neznačí, že javy, v súvislosti s ktorými ich pozorovateľ zavádza, by boli nejako "imaginárne". Pozorovatelia vo vlaku aj vonku sa zhodnú na počte rozbitých šálok či zlomenín.)

odčerpať miliardu molekúl odporového prostredia, azda budeme vedieť odčerpať aj dve miliardy.

Ako však odtieniť gravitačnú silu a všetky s ňou súvisiace? (Pole Zeme ťahá teleso dole, teleso tlačí na podložku, ale potom aj podložka na teleso...) Reakcie podložiek a závesov možno zlikvidovať tak že prejdeme do padajúcej sústavy, teda že teleso nebude podopierané ničím - napríklad postavíme laboratórium v padajúcom výťahu (a s odčerpaným vzduchom), alebo sa poberieme aj s našou aparátúrou kdesi do vesmíru. Všetky tieto veci možno *v princípe* urobiť.

Ale ani s týmito všetkými opatreniami nie je v princípe možné odtieniť globálne gravitačný vplyv ostatných telies, keďže gravitačná sila má podľa Newtonovej formulky nekonečný dosah a pôsobí, na rozdiel od trebárs elektrickej sily, vždy príťažlivo, nejde "zneutrálniť". Samozrejme, dajú sa uvažovať približne inerciálne sústavy, kde štandard "rovnomerne priamočiaro" bude realizovaný s "takmer voľnými telesami"... ale ostáva fakt že newtonovská mechanika (ak sa do nej zahrnie spolu s tromi pohybovými zákonmi aj zákon gravitácie) sama o sebe hovorí že v tomto vesmíre platí len približne, ak by gravitácia bola sila ako ostatné. Bola by to sila ktorú by bolo nemožné **globálne odtieniť**, teda by bolo v princípe nemožné vôbec mať voľnú časticu ktorá by nám dala prototyp rovnomerného priamočiareho pohybu.

Ak však **gravitácia nie je sila** - ak sa dajú jej prejavy chápať ako **charakteristiky geometrie časopriestoru** - potom **telesá na ktoré nepôsobí okrem gravitácie nič by sú voľné**, ich trajektórie v súlade s prvým zákonom *definujú* v časopriestore pojem priamočiaro. Akurát je možné že to nie sú euklidovské priamky čo takto vznikajú. To však nijako neprotirečí Newtonovej mechanike. Prvý zákon je zaradený práve preto, že je potrebné *zistiť* geometriu, nie ju predpokladať apriori euklidovskú.

Ľudia oboznámení s históriou fyziky len povrchno môžu mať dojem že geometrický model gravitácie ako zakrivenia priestoru či časopriestoru prišiel až s dvadsiatym storočím. Pritom potreba nejakého geometrického obrazu bola zjavná už v newtonovskej mechanike keď sa jednalo o principiálnu konzistentnosť. (Je pravda, že vtedy ešte nebol plne k dispozícii matematický aparát rozvinutý v 19. a 20. storočí, a chýbal aj prínos špeciálnej relativity.)

7 Gravitácia a krivosť - výhľady k všeobecnej relativite

Všeobecná relativita je asociovaná s **krivosťou časopriestoru**. Názov niekedy azda laikov zvädza k domnienke že sa jedná o akési zovšeobecnenie špeciálnej relativity. Ide však o **zovšeobecnenie newtonovského modelu gravitácie** (tak, aby boli lokálne zahrnuté princípy špeciálnej relativity).

7.1 Čo zovšeobecňujú Einsteinove rovnice

Bez ambície urobiť tu rýchlokurz všeobecnej relativity, uvedme si pre neskoršiu referenciu kompaktnú formu **Einsteinových rovníc**

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

s krátkym komentárom, že na ľavej strane máme objekt vyjadrujúci **zakrivenie časopriestoru**, napravo objekt súvisiaci so **zdrojmi gravitácie, hustotou energie-hybnosti** v danej oblasti časopriestoru. Súvis s Newtonovou gravitáciou vidno okrem iného v prítomnosti univerzálnej gravitačnej konštanty κ , spojitosť so špeciálnou relativitou naznačuje rýchlosť svetla c . Prípadne ešte odcitujme Wheelerov výrok o tom ako *hmota hovorí časopriestoru ako sa má zakriviť a časopriestor hmote ako sa má hýbať*.

Do hlbín tenzorového počtu sa pri prehľadových prednáškach nechodí, ale povedzme si, že predpovede tohto modelu je síce ťažšie spočítať, ale sú v lepšej zhode s pozorovaním ako je tomu pri newtonovskej verzii.

Lenže tá newtonovská verzia do veľkej miery funguje. Všeobecná relativita zovšeobecňuje niečo, čo je tam "dobré". Čo sa zovšeobecnilo? Kde je analógia? Pod newtonovskou gravitáciou si mnoho ľudí rovno predstaví už zmienenu formulu pre veľkosť gravitačného pôsobenia dvoch telies povedzme hmotností M, m v istej vzdialenosti r , so slávnou gravitačnou konštantou κ (ktorej hodnotu vedía desaťroční študenti vysvetliť porovnateľne dobre ako ich vysokoškolskí kolegovia):

$$F = \kappa \frac{mM}{r^2} \quad (2)$$

Kde v newtonovskej gravitácii vidno náznak súvisu medzi krivosťou a energiou či hmotou? O krivosť čoho by sa vôbec jednalo?

Ukazuje sa že aj newtonovská gravitácia sa dá vyjadriť ako zakrivenie časopriestoru, ale ukázať to vyžaduje trochu času a priestoru - často viac než bežný prehľadový kurz základnej fyziky umožňuje.

Avšak poukázať na **krivosť spojenú s gravitačným potenciálom** sa dá pomerne ľahko a rýchlo, s použitím základov vysokoškolskej matematiky.

Najprv uveďme na pravú mieru, čo v newtonovskej gravitácii je vlastne zovšeobecnené v rovniciach všeobecnej relativity. Nie priamo Newtonov gravitačný zákon pre silu pôsobiacu na nejaké "testovacie teleso" hmotnosti m v poli nejakého iného telesa hmotnosti M budiaceho skúmané pole; Einsteinove rovnice (1) nakoniec o testovacom telese priamo nehovoria. Popisujú aký vplyv má hmota (napríklad zmienené teleso hmotnosti M) na časopriestor okolo.

Teda lepším **predchodcom/analógom Einsteinových rovníc je newtonovský popis gravitačného poľa ako takého (pomocou intezity alebo potenciálu)**, nie jeho vplyv na testovaciu časticu.

Zopakujme si z predošlých odsekov, že **intenzita gravitačného poľa** budeného hmotou M v počiatku súradnej sústavy je konzervatívne vektorové pole $\vec{E}$, **záporne vzatý gradient skalárneho potenciálu** ϕ , meniace sa v závislosti od polohy v priestore ($\vec{r}$) :

$$\vec{E} = \kappa \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\vec{\nabla} \phi \quad (3)$$

Je v (3) nejaký súvis s krivosťou? **Krivosť** je geometrický pojem, skúmame teda **geometriu** situácie. V priestore okolo hmoty M sú isté význačné plochy - koncentrické sféry so stredom v mieste kde je zmienená hmota. Sú to **ekvipotenciálne plochy** rozmeru $S = 4\pi r^2$. Na každú z nich je vektorové pole intenzity kolmé a veľkosť intenzity je v rámci jednej plochy konštantná. Toto znamená okrem iného veľmi jednoduchý výpočet **toku poľa intenzity danou plochou**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E \quad (4)$$

Zo vzťahu pre veľkosť intenzity

$$E = \kappa \frac{M}{r^2}$$

(po prenásobení 4π) vieme, že tento **tok intenzity plochou je úmerný hmote vo vnútri**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 4\pi \kappa M \quad (5)$$

Obe strany (5) vieme prepísať ako objemový integrál. Ľavú stranu pomocou Gaussovej vety ktorá dáva do súvisu tok poľa uzavretou plochou S a divergenciu poľa v objeme V ktorý táto plocha

ohraničuje. Hmotu na pravej strane vieme prepísať ako objemový integrál hustoty ρ . Potom máme

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = 4\pi\kappa \iiint_V \rho dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\kappa\rho \quad (6)$$

Teda divergencia intenzity gravitačného poľa je úmerná hustote hmoty, alebo, povedané ľudovo, hmota pôsobí ako zdroj gravitácie. Ešte si spomeňme že intenzita je záporne vzatý gradient potenciálu $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ a dosadíme to do (6):

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = 4\pi\kappa\rho \quad (7)$$

Divergencia gradientu je **laplacián**, suma druhých derivácií: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \Delta\phi$, takže (7) je možné prepísať do tvaru zodpovedajúceho tzv. **Poissonovej rovnici**, ktorá dáva do súvisu **hustotu hmoty budiacej gravitačné pole a laplacián gravitačného potenciálu toho poľa**:

$$\Delta\phi = -4\pi\kappa\rho \quad (8)$$

A tu je krivosť! Ak ju nevidno, tak aj príležitosť ujasniť si **geometrický význam laplaciánu**.

7.2 Stredná krivosť a laplacián

Z technického hľadiska je laplacián v euklidovskom priestore v kartézskej sústave diferenciálny operátor ktorý môže byť vyjadrený sumou druhých derivácií podľa jednotlivých súradníc:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Teda v jednorozmernom priestore je to jednoducho druhá derivácia. Táto súvisí s **krivosťou grafu funkcie**, na ktorú operátorom druhej derivácie pôsobíme. Ako je jasné už zo základného diferenciálneho počtu, v jednom rozmere majú druhú deriváciu (1-rozmerný laplacián) na súvislom intervale (nielen v jednotlivých bodoch) všade nulovú práve lineárne funkcie, ktorých grafom je priamka - krivka bez krivosti. Pre lineárnu funkciu platí, že jej hodnoty sú "rovnomerne rozložené" v zmysle, že hodnota v danom bode je priemerom hodnôt v susedných bodoch.

Vo vyšších rozmeroch nulový laplacián nejakej funkcie $\Delta f = 0$ neznamena nevyhnutne že graf f je plochý v euklidovskom zmysle (hoci funkcia grafom ktorej je rovina má iste laplacián nulový), ale graf s nulovou tzv. **strednou krivosťou**. Nulová stredná krivosť v nejakom bode znamená, že hodnota funkcie je tu **priemerom hodnôt v susedných bodoch**. Nenulová stredná krivosť kvantifikuje odchýlku od takéhoto rovnomerného rozloženia hodnôt. Grafy funkcií troch a viac premenných nevieme vizualizovať (iba ich priemety do nižších rozmerov), lebo by sme potrebovali veľa rozmerný priestor (3 a viac rozmerov pre premenné, jeden pre funkčnú hodnotu). Ale pojem laplaciánu a strednej krivosti tam pokojne môžeme preniesť a opierať sa o príslušný matematický aparát aj tam kde nás vizuálna predstavivosť nemôže viesť.

Z tohto pohľadu teda Poissonovu rovnicu (8) môžeme vnímať ako **súvis medzi rovnomernosťou rozloženia hodnôt gravitačného potenciálu ϕ v priestore a hustotou hmoty ρ v ňom**. Tam, kde je hustota nulová, je potenciál rozložený "v priemere rovnomerne", v zmysle že stredná krivosť vyjadrená laplaciánom je nulová ($\Delta\phi = 0$). Teda pre potenciál v takej oblasti platí, že v každom bode je jeho hodnota priemerom susedných hodnôt. Tam, kde je potenciál rozložený "nerovnomerne" (stredná krivosť $\Delta\phi \neq 0$), sa podľa Poissonovej rovnice nachádza nejaká hmota ($\rho \neq 0$).

Einsteinove rovnice (1) hovoria čosi podobné, aj keď toho hovoria viac a všeobecnejšie, a krivosť v

nich spomínaná súvisí so samotným časopriestorom. To je však aj dôsledkom toho, že tamojší "potenciál" je desaťzložkový a týchto 10 funkcií predstavuje nezávislé zložky **metriky, geometrickej charakteristiky časopriestoru**. Čo sa týka druhej strany rovnice, zdrojov gravitačného poľa, Poissonova rovnica uvádza ako zdroj nerovnomernosti gravitačného potenciálu nenulovú hustotu hmoty ρ . Einsteinove rovnice počítajú s hmotou ako s formou energie, a ako taká má svoje miesto v objekte $T_{\mu\nu}$ na pravej strane (a majú tam miesto ešte aj všelijaké iné aspekty, nakoniec všeobecná relativita je všeobecnejšia teória ako Newtonova gravitácia.)

Každopádne, obe verzie, newtonovská aj einsteinovská hovoria o tom, že prítomnosť hmoty má dopad na geometriu v okolí.

7.3 Hypotheses non fingo?

Ešte jedna zaujímavá analógia je medzi newtonovskou a einsteinovskou gravitáciou. Keď Newton predstavil svoj model, priniesol mimoriadne zjednotenie do fragmentovaných poznatkov z mechaniky. Zrazu bolo možné popísať padanie jablka a pohyb Mesiaca ako prejavy jedného princípu. A predsa, už v časoch jej vzniku bolo jasné (Newtonovi samotnému azda viac ako mnohým iným), že sú tu voľné konce. Sám sa vyjadril že nevie akým agentom gravitácia pôsobí, ale že je absurdné aby tam niečo, čomu ešte nerozumie nebolo. Vo všeobecnej relativite, nie ako matematickej hračke, ale ako pokuse o popis nášho časopriestoru, je tiež niekoľko vecí o ktorých vieme, že o nich veľa nevieme - jednak sú to vlastnosti objektu $T_{\mu\nu}$ na veľmi malých škálach a vlastnosti podivného člena $\Lambda g_{\mu\nu}$ zodpovedajúceho "temnej energii", ktorý sa do rovníc (1) zahŕňa na základe potreby, na ktorú poukázali kozmologické pozorovania na veľkých škálach.

Nejaký ďalší Einstein či Newton azda príde s modelom, ktorý elegantne popíše tieto nejasnosti, aby sme sa mohli posunúť k ďalším veciam ktoré ešte ani popísať nevieme.

8 Energia a časový vývoj - výhľady ku kvantovej mechanike

Klasická newtonovská mechanika sa dá skúmať v **rôznych formalizmoch**. Tradične sa na školách prezentuje mnohoraké použitie druhého Newtonovho zákona, čo zahŕňa diferenciálne rovnice druhého rádu pre polohu skúmaného telesa. Ale newtonovský formalizmus nie je jediný, ktorý sa dá použiť. Klasická mechanika sa dá skúmať aj v iných (lagrangeovský, hamiltonovský, variačné princípy). V nasledujúcej časti si spomenieme prvky tzv. **hamiltonovskej formulácie**, aj za účelom neskoršieho poukázania na **spoločné črty klasickej a kvantovej mechaniky**, ktoré v tomto formalizme vidno azda ľahšie ako v newtonovskom.

Zdôraznime že sa nejedná o "inú" teóriu, ale o iný formalizmus. Prečo prepisovať čo funguje do iných tvarov a foriem? Veď s Newtonovými rovnicami sa dá namodelovať čo klasická fyzika umožňuje namodelovať. Je to trochu ako pýtať sa, načo vedieť používať rôzne súradné sústavy. Veď kartézská je dobrá a jednoduchá, načo sférické a parabolické a cylindrické komplikácie - až kým človek nenarazí na rovnice, ktoré v jedných súradniciach vyzerajú ako zmes členov s veľmi nejasnou interpretáciou, a v iných sa riešia viac menej pohľadom... Iný formalizmus niekedy umožňuje situáciu lepšie "prečítať", a niekedy umožňuje zovšeobecnenia ktoré v inom nevidno ⁷.

Pozrime sa, čo vlastne klasická mechanika robí. Zo znalosti stavu systému teraz nám pohybové rovnice poskytujú predpoveď pre stav neskôr (alebo aj spätne). **Časový vývoj systému predstavuje postupnosť (parametrizovanú časom) jednotlivých stavov. Pohybové zákony (Newtonove v klasickej mechanike) nám umožňujú zrekonštruovať túto postupnosť zo znalosti jedného jej člena.**

⁷A bez ambícií vysvetliť tu vec bližšie, už sa vo fyzike stalo že jeden formalizmus sa ukázal akosi hlbší ako iný, aj keď na začiatku sa javili ako "rovnocenné" formulácie.

Tu si treba seriózne uvedomiť, čo je vlastne **stav** systému. Vezmime veľmi jednoduchý systém - hmotný bod. Pri matematickom pohľade na Newtonov druhý zákon pre toto teleso

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (9)$$

vidíme, že sa jedná o diferenciálnu rovnicu druhého rádu, nezávislou premennou je čas t (parameter vývoja), závislou sú súradnice polohy telesa $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Rovnica obsahuje nanajvýš ich druhé časové derivácie, dané jednak hmotnosťou telesa m a pôsobiaceou silou $\vec{F}(t)$. Už v jednorozmernom prípade (keď skúmaným systémom je jeden hmotný bod s jedným stupňom voľnosti $x(t)$, (napríklad môže sa pohybovať len v smere jednej osi) si takáto rovnica druhého rádu vyžaduje dve počiatočné podmienky - hodnotu neznámej funkcie a jej prvej derivácie v nejakom konkrétnom (obvykle počiatočnom) čase. Stav jedného hmotného bodu teda tvoria jednak údaje o polohe $\vec{r}$, a údaje súvisiace s hybnosťou $\vec{p}$.

Reprezentácia stavu systému je jedným z dôležitých **rozdielov medzi klasickou a kvantovou fyzikou**. Tu nejdeme robiť rýchlokurz kvantovej mechaniky, ale máme ju vo výhľade, keď chceme predsaťviť alternatívny zápis Newtonových rovníc, preto si z nej spomeňme aspoň čosi.

"Pohybovým zákonom" v kvantovej mechanike je **Schrödingerova rovnica**. Akási kvantová alternatíva k Newtonovým zákonom. Otázkou je, koľko z tej analógie je jasnej keď sa na spomenuté dva zákony pozrieme, ešte aj po zbežnom predstavení jednotlivých symbolov čo sa v nich vyskytujú. Keby sme položili otázku, ako sa klasický a kvantový zákon líšia, možno by sme mali problém rozhodnúť kde vôbec začať zoznam rozdielov, pretože je ťažké vyjadriť odlišnosť dvoch vecí bez toho, aby sme videli aspoň niečo spoločné k čomu vyjadrenie vzťahovať.

Kto videl aspoň základy hamiltovoského formalizmu aplikovaného na klasické problémy, môže mať akú-takú predstavu o tom, že z matematického hľadiska sú popisy kvantovej a klasickej mechaniky v istom zmysle analogické. Preštudovať hamiltonovský formalizmus do hĺbky žiada viac času ako je v bežných kurzoch pre technické obory k dispozícii; ale dajú sa prezentovať aspoň nejaké časti. Ilustrujme si spoločné aspekty Newtonovej a Schrödingerovej rovnice na systéme predstavujúcom jeden elektrón v nejakom potenciáli (poli konzervatívnej sily). Klasický a kvantový popis:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (10)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_E \Psi \quad (11)$$

kde symboly znamenajú nasledovné: $\vec{F}$ - sila, m hmotnosť, t čas, $\vec{r}$ poloha, i komplexná jednotka, $\hbar$ redukovaná Planckova konštanta, Ψ vlnová funkcia, $\hat{H}_E$ hamiltonián (index indikuje že sa jedná o operátor energie, kvantový analóg klasickej veličiny).

Časové derivácie, teda spojitosti s časovým vývojom, sa objavujú v oboch zákonoch; ale jedná sa o prvú deriváciu v (11) a druhú v (10). Treba si ujasniť, čo sa vlastne vyvíja - aký je vzťah medzi objektmi v rovniciach (10) a (11). Snahou je ukázať, že v pozadí oboch modelov je spoločný princíp - **časový vývoj stavu súvisí s energiou**.

Prepíšme rovnice do tvaru, v ktorom vystupujú kľúčové pojmy (**stav, energia, vývoj**) tak explicitne ako sa dá. Ak študovaným systémom je spomínaný elektrón, jeho **stav v kvantovej mechanike** je reprezentovaný tzv. **vlnovou funkciou** Ψ (teraz sa jej nevenujeme hlbšie, len ju zmieňujeme), a v **klasickej mechanike polohou a hybnosťou** ($\vec{r}$, $\vec{p}$). Teda v záujme porovnania mechaník by sme mali radi v (10) explicitne ($\vec{r}$, $\vec{p}$). Toto sa urobí jednoducho, ak zvážime ako hybnosť súvisí s čarovou deriváciou polohy:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\vec{p}}{m}\end{aligned}\tag{12}$$

Teraz máme dve rovnice prvého rádu (12) namiesto jednej rovnice druhého rádu (10). Avšak bolo dosiahnuté viac ako len výmena rádu a počtu rovníc, totiž že sa začína rysovať analógia s (11). Na ľavej strane (12) teraz explicitne vystupuje prvá časová derivácia klasického stavu systému, podobne ako je prvá derivácia kvantového stavu v (11).

Teraz dajme do súvisu pravú stranu. V kvantovom prípade je to **operátor energie (hamiltonián)** pôsobiaci na stav. Klasická verzia môže pôsobiť v tomto ohľade veľmi odlišne. Avšak dostať aj tu do obrazu energiu nie je veľký problém.

Predpokladali sme **konzervatívnu silu**, teda môže byť vyjadrená ako **záporný gradient vhodného potenciálu**. Aby bola jasnejšia analógia s pravou stranou (11), chceli by sme aj v klasickom prípade dostať do obrazu celú energiu, nielen potenciálovú časť. Toto nie je problém urobiť; keďže kinetická energia závisí od hybnosti, nie od polohy, môže byť beztriestne vsunutá do "pozičného gradietu":

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} E_p = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} (E_p + E_k) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} E = -\left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial z}\right)$$

Týmto prepisom sily ako záporným gradientom energie máme polovicu (12) vyjadrenú s energiou na pravej strane. Aby sme podobnú vec dosiahli aj pre druhú polovicu, všimnime si, že pravá strana môže byť prepísaná ako derivácia kinetickej energie ($E_k = p^2/2m$) podľa hybnosti. Tentoraz využijeme skutočnosť, že potenciál nezávisí na hybnosti v prípadoch ktoré tu uvažujeme, a teda môžeme do derivácie bezpečne popri kinetickej energii prepašovať aj potenciálnu:

$$\frac{\vec{p}}{m} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} E_k = \vec{\nabla}_{\vec{p}} (E_k + E_p) = \vec{\nabla}_{\vec{p}} E = \left(\frac{\partial E}{\partial p_x}, \frac{\partial E}{\partial p_y}, \frac{\partial E}{\partial p_z}\right)$$

A ešte všetko poskladajme dokopy:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla}_{\vec{r}} E \\ \vec{\nabla}_{\vec{p}} E \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H}_E \Psi$$

Teraz oba zákony, klasický aj kvantový, vyjadrujú predstavujú **časovú zmenu stavu** (na ľavých stranách prvé časové derivácie polohy-hybnosti alebo vlnovej funkcie) v súvislosti s **energiou** (na pravo). Matematické objekty a operácie sú samozrejme odlišné ⁸ - veď kvantová a klasická mechanika sa líšia hlbšie ako len formalizmom.

Ale spoločný princíp tu je: **Energia je hlboko zviazaná s časovým vývojom.**

Tento projekt získal financovanie z výskumného a inovačného programu EU Horizon 2020 v rámci Marie Skłodowska-Curie Dohody o grante č. 945478.

⁸Hoci predsa len podobnejšie ako táto stručná prezentácia umožňuje ukázať.